ANTÓNIO MANUEL DIAS DOMINGOS

COMPREENSÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS AVANÇADOS – A MATEMÁTICA NO INÍCIO DO SUPERIOR

LISBOA

2003

ANTÓNIO MANUEL DIAS DOMINGOS

COMPREENSÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS AVANÇADOS – A MATEMÁTICA NO INÍCIO DO SUPERIOR

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Doutor em Ciências de Educação – Especialidade de Teoria Curricular e Ensino das Ciências pela Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, sob orientação do Professor Doutor José Manuel Matos.

LISBOA

2003

À Dulce, à Rita e à Inês

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Doutor José Manuel Matos, meu orientador, pela disponibilidade manifestada para acompanhar este trabalho, nomeadamente no que respeita à leitura, questionamento, interpelação permanente e apelo à reflexividade, que foram decisivos na realização da investigação.

Aos colegas que se disponibilizaram a apoiar este trabalho, nomeadamente nas facilidades concedidas para a recolha dos dados empíricos no decorrer das suas aulas.

Aos colegas da UIED que ao longo de vários seminários e conversas informais contribuíram para uma reflexão mais profunda e profícua das questões a investigar e da análise dos dados empíricos.

Aos alunos que se disponibilizaram a participar na investigação, colaborando activamente nas entrevistas realizadas.

Às instituições e pessoas que disponibilizaram meios e informação pertinente para a realização da investigação.

Sumário

Esta investigação pretende caracterizar a compreensão dos conceitos matemáticos avançados ensinados no início do ensino superior, relacionados com os tópicos das sucessões, funções e cálculo diferencial. O estudo realizou-se com alunos do 1º ano de licenciaturas em Ensino das Ciências, Engenharia Electrotécnica e Matemática na primeira disciplina de Análise dos cursos, tendo os seguintes objectivos: integrar o contributo de várias teorias sobre a construção dos conceitos matemáticos, caracterizar a complexidade dos conceitos imagem que os alunos têm dos conceitos matemáticos ensinados e caracterizar desempenhos escolares típicos de alguns alunos.

A metodologia de investigação usada é de natureza qualitativa, integrando uma componente de experiência de ensino e visando a compreensão dos principais conceitos imagem manifestados pelos alunos. Participaram quinze alunos com sucesso inicial na disciplina de Análise Matemática de uma faculdade vocacionada para as ciências e a tecnologia (cinco de cada uma das licenciaturas). Foram efectuadas entrevistas tendo-se ainda recorrido a outras técnicas de recolha de dados como a observação de aulas e a análise de documentos produzidos pelos alunos.

As principais conclusões integram o contributo dado pelos trabalhos de Dubinsky, Sfard, Tall e Vinner permitindo uma caracterização mais profunda das noções de conceito definição e conceito imagem, que se tornam conceitos chave para a compreensão dos conceitos matemáticos estudados. São caracterizados níveis de conceitos imagem que possuem propriedades próprias (localidade, hierarquia, estabilidade e oscilação) e se distinguem entre conceitos imagem incipientes, instrumentais e relacionais, situando-se os primeiros mais próximos da matemática elementar enquanto que os últimos apresentam características próximas da matemática avançada.

Ao estabelecer uma caracterização destes conceitos imagem em termos de objectos, processos, tradução entre representações, propriedades e pensamento proceptual, conseguiu-se aprofundar o nível de complexidade que envolve estes conceitos tornando possível o seu uso

para estabelecer uma caracterização mais pormenorizada da compreensão manifestada pelos alunos sobre os conceitos matemáticos estudados.

Caracterizam-se também os desempenhos escolares de três alunos típicos reveladores de uma diversidade de conceitos imagem que integram diferentes graus de complexidade. Trata-se de três alunos que revelam sucesso escolar ainda que apresentem conceitos imagem bastante diversificados. Um apresenta uma compreensão relacional dos conceitos, revelando ser capaz de os aplicar em situações diversas. Outro apresenta uma compreensão instrumental dos mesmos conceitos revelando um desempenho satisfatório mas de cariz operacional. O terceiro revela-se um caso paradoxal, pois embora apresente uma compreensão incipiente da maior parte dos conceitos estudados consegue mesmo assim apresentar um bom desempenho escolar.

Palavras chave: Educação Matemática, Ensino da Análise, Pensamento Matemático Avançado, Aprendizagem da Matemática, Experiência de Ensino.

Abstract

This research intends to characterize the understanding of advanced mathematical concepts taught at the beginning of the university level: sequences, functions and differential calculus. The study focused on students from the first year of three courses (“licenciaturas”), Science Education, Electronic Engineering, and Mathematics in the first discipline of Calculus, and has the following objectives: to integrate contributions from theories on the construction of the mathematical concepts, to characterize the complexity of pupils’ concepts image of the mathematical concepts taught, and to characterize typical school performances of some pupils.

The methodology used is of a qualitative nature, integrating a component of teaching experience and aiming at understanding the concept images revealed by the pupils. Fifteen pupils having initial success in the discipline of Calculus of a university of sciences and technology (five from each of the courses) participated. Interviews were performed together with others techniques of data collection as field notes of lessons and the analysis of documents produced by the pupils.

The main conclusions integrate contributions given by the work of Dubinsky, Sfard, Tall, and Vinner but allowed a deeper characterization of the notion of concept definition and concept image, that became key concepts for the understanding of the mathematical concepts studied. Levels of concept images are characterized as having their own properties (locality, hierarchy, stability, and oscilation), and encompass incipient, instrumental and relational concept images, the first being closer to elementary mathematics while the last show characteristics closer to advanced mathematics.

By establishing a characterization of these concept images in terms of objects, processes, translation between representations, properties, and proceptual thinking, the complexity level that involves these concepts was deepened, making possible their use to establish a more detailed characterization of the understandings revealed by the pupils about the studied mathematical concepts.

School performances of three typical pupils with academic success revealing a diversity of concept images that integrate different degrees of complexity are also characterized. One student presents a relational understanding of the concepts, showing the ability to apply them in several situations. Another presents an instrumental understanding of the same concepts showing a satisfactory performance although of an operational nature. The third student is paradoxical, showing an incipient understanding of most of the concepts studied but obtaining a good grade at the end of the discipline.

Key Words: Mathematics Education, Teaching of Calculus, Advanced Mathematical Thinking, Mathematical Learning, Teaching Experiment.

Índice de matérias

Índice de figuras

Índice de quadros

CAPÍTULO I

Introdução

Este capítulo tem por objectivo contextualizar o trabalho de investigação que a seguir se desenvolve, descrevendo de modo sucinto a pertinência do estudo e os objectivos que presidem à sua elaboração. Assim, são tidas em conta as mudanças curriculares que aparecem no início do ensino superior, alguns resultados sobre a aprendizagem neste nível de ensino, bem como os campos onde se torna necessário desenvolver mais trabalhos de investigação. Por fim referem-se os objectivos e as principais questões de investigação, terminando o capítulo com uma visão geral da organização do estudo.

1. Pertinência do estudo

O ensino e a aprendizagem da Matemática, são temas de extrema importância numa era em que o problema do insucesso é uma questão central nas tomadas de decisão sobre a Educação. Os estudos internacionais, nacionais e as práticas do quotidiano do professor são reveladores das dificuldades com que os alunos se debatem ao longo da sua vida escolar, nomeadamente no que se refere à aprendizagem da Matemática. Estas dificuldades parecem acentuar-se quando se dá a transição do Ensino Secundário para o Superior. Verificam-se elevados níveis de retenção nos primeiros anos, sobretudo nas disciplinas mais viradas para a construção e compreensão dos conceitos matemáticos mais abstractos.

No caso concreto do ensino e aprendizagem da Análise, disciplina que leccionei durante vários anos para alunos dos cursos de Engenharia e de Matemática, foi possível constatar algumas destas dificuldades. Os alunos apresentam uma concepção dos conceitos matemáticos aprendidos no secundário de cariz operacional, isto é, relacionada com os processos subjacentes aos conceitos, mas que é reveladora de uma falta de reificação dos mesmos. Desta forma a capacidade de abstracção dos conceitos é reduzida e manifesta-se sobretudo na manipulação de objectos matemáticos definidos simbolicamente. Nestas situações os alunos apenas conseguem fazer abordagens a alguns processos envolvidos no conceito, sendo a sua compreensão dos mesmos sempre parcial. À medida que estes conceitos se vão tornando mais abstractos o seu desempenho baixa significativamente. Dado que o tipo de ensino ministrado neste nível de escolaridade pressupõe que os alunos tenham a capacidade de manipular os conceitos a partir da sua definição formal, torna-se importante saber como é que os mesmos são construídos e compreendidos a partir das concepções que são adquiridas no ensino secundário e de que forma é que estas se prolongam aos conceitos desenvolvidos no ensino superior.

Em Portugal são raros os estudos que se debruçam sobre a compreensão dos conceitos matemáticos abordados neste nível de ensino, pelo que a motivação para o desenvolvimento deste estudo assenta na tentativa de procurar identificar e explicar algumas dessas causas de insucesso. As razões que levam a esta situação são bastante amplas e variadas, também existem internacionalmente e são objecto de investigação um pouco por todo o mundo. Apresentam-se de seguida algumas das características presentes na transição entre os dois níveis de ensino, o secundário e o superior, alguns resultados da investigação realizada, sobretudo a nível internacional, e algumas das áreas onde é preciso realizar uma investigação mais sistemática para poder melhorar o ensino e a aprendizagem no superior.

1.1. Mudanças curriculares no início do superior

Na procura de uma explicação para o fenómeno do insucesso, Steen (1998) encontra algumas evidências de domínio mais ou menos genérico: o grande crescimento recente da população estudantil que acede ao ensino superior e o rápido desenvolvimento das telecomunicações a nível mundial que levam a uma procura cada vez maior de conhecimento de nível superior, entre outras. Esta procura é baseada na crença de que as universidades podem antecipar sinais de mudança do mundo do trabalho e criar uma relação óptima entre as aprendizagens dos alunos e as expectativas dos empregadores. Steen considera que apenas algumas universidades acompanham este desafio, sendo o rápido desenvolvimento do mundo e o rápido crescimento da educação superior correspondido por uma evolução lenta das universidades. Segundo Steen (1998), e de acordo com a sua experiência, os cursos, currículos e exames permanecem parados na tradição de alguns séculos atrás enquanto que a autonomia e a liberdade académica governam na sala de aula. Em Portugal apenas a segunda parte desta concepção é verdadeira e, de qualquer modo, a matemática do pós-secundário pode ser vista como uma educação superior num microcosmos, isto é, cada professor tem autonomia para estabelecer o currículo da sua disciplina. Esta visão não se compadece com o crescente aumento de inscrições nos cursos e com o aparecimento e uso da matemática cada vez num maior número de áreas disciplinares, que podem ir desde a biologia às finanças ou da agricultura às neurociências.

As razões que levam os alunos no final do secundário a estudar matemática são bastante variadas. Segundo Steen alguns alunos seguem matemática por possuírem objectivos profissionais bastante claros, como por exemplo os cursos de engenharia onde o pensamento matemático avançado é uma necessidade directa, outros seguem cursos mais especializados que requerem trabalhadores com capacidades especiais. Há alguns que estudam matemática com o objectivo de a ensinar enquanto que uma grande maioria apenas estuda matemática como forma de obter conhecimento crítico e ampliar a sua cultura. É ainda de considerar aqueles que se inscrevem em cursos de nível pós-secundário com o objectivo de relembrar ou aprender conceitos que não foram suficientemente estudados durante o ensino secundário. Segundo Steen este grupo é bastante numeroso nos países onde há um acesso livre a este tipo de ensino. Verifica-se assim que hoje em dia a maioria dos alunos que frequentam o ensino pós-secundário estão envolvidos com algum tipo de matemática, prevendo-se que no futuro todos os cursos apresentem essa vertente. Na era da informação, a competência matemática é tão importante como a literacia o tem sido noutras eras.

A prática matemática escolar, que advém das alterações substanciais que são requeridas na matemática do pós-secundário, também parece orientar-se noutras direcções. Os cursos fazem cada vez mais um apelo a várias aplicações da matemática que escondem por trás temas e conteúdos inerentes à própria matemática que podem ser estudados num contexto abstracto, mas para o estudo dos quais os alunos não parecem estar motivados. A principal preocupação destes reside na aplicação prática o que faz com que estes métodos matemáticos aplicados, na maior parte das vezes, sejam apenas uma mera rotina prática nas suas profissões. Em contrapartida há situações onde esta prática é encarada de forma diferente e a "matemática real" é aquela que foi sendo desenvolvida ao longo do século XX, como uma área bastante disciplinada, conduzida por professores de renome em universidades e institutos de investigação. Para Steen (1998) o currículo de "matemática real" actual parece ser caracterizado, não como o currículo tradicional herdado do passado, mas antes pela vasta dispersão de cursos onde um grande número de alunos aprende uma variedade de matemáticas em situações diversas e com diferentes propósitos.

Este currículo de matemática do pós-secundário aparece essencialmente de três formas: como cursos de matemática tradicionais ensinados sobretudo em departamentos de matemática, como cursos com uma forte base matemática ensinados noutros departamentos e como cursos em outras áreas que empregam métodos matemáticos significativos, ainda que de uma forma indirecta. Steen (1998) conjectura que a matemática que é ensinada se distribui equitativamente por estas três formas defendendo que aquela que é aprendida, recordada e útil ao fim de alguns anos se inclina na direcção da terceira forma referida acima (aquela que se encontra escondida no currículo). Ele admite assim que a maior parte do que é ensinado no currículo tradicional é esquecido pelos alunos após terminarem os seus estudos, enquanto que muito do que é aprendido em contexto é lembrado por muito mais tempo.

1.2. Alguns resultados de investigação sobre o ensino superior

A investigação educativa que é feita no ensino pós-secundário encontra-se longe de ser um campo de investigação unificado. Artigue (1998) faz um óptimo resumo sobre os trabalhos de investigação realizados nesta área. Assim, as principais tendências desta investigação podem ser encontradas no domínio das abordagens construtivistas inspiradas na epistemologia genética de Piaget, ou nos movimentos recentes que têm por base abordagens como o construtivismo social, o interacionismo ou a antropologia, que procuram ter em conta as dimensões social e cultural dos processos de ensino e aprendizagem. No seio destas perspectivas gerais os investigadores desenvolvem uma multiplicidade de quadros teóricos e metodologias que desenham de modo diferente a forma como as questões de investigação são seleccionadas e são trabalhadas, influenciando assim a sua formulação bem como o tipo de resultados que pode ser obtido. Artigue considera ser possível organizar os resultados da investigação segundo duas dimensões principais dos processos de aprendizagem: mudanças qualitativas, reconstruções e descontinuidades na compreensão por um lado e a flexibilidade cognitiva por outro. Ela admite que estas duas dimensões podem ser consideradas como transversais no que respeita às abordagens teóricas, à evidente diversidade cultural dos ambientes de ensino e aprendizagem e aos domínios matemáticos.

As primeiras investigações sobre o ensino superior que ela analisa centram-se em aspectos negativos. Eles incidiram sobretudo no conhecimento dos alunos sobre áreas específicas, com especial relevo para a Análise elementar, área onde há grandes dificuldades ao nível superior. Várias investigações evidenciam alguns limites impostos pelas práticas de ensino, sobretudo aquelas que reduzem a Análise a uma espécie de cálculo algorítmico ou as que são demasiado formais e teóricas reflectindo o estilo de Bourbaki. Em Cornu (1991) é possível encontrar alguns destes resultados. Outros trabalhos como os de Tall e Vinner (1981) mostram a discrepância existente entre as definições formais que os alunos são capazes de citar e os critérios que eles usam para verificar propriedades como funcionalidade, continuidade ou diferenciabilidade. As noções de conceito definição e conceito imagem surgem como forma de analisar as concepções dos alunos face a esta discrepância. Há também vários trabalhos que evidenciam as dificuldades sentidas pelos alunos ao lidar com as representações gráficas, sobretudo quando se procura fazer a ligação entre as representações analítica e gráfica. Foram também encontradas várias situações em que os alunos considerados “bons” foram incapazes de mobilizar de forma eficiente os seus recursos matemáticos quando colocados perante tarefas mais elaboradas. Artigue considera que por vezes a reacção espontânea dos sistemas educacionais a este tipo de dificuldades cria alguns círculos viciosos, como o dos professores tenderem a criar um fosso cada vez maior entre os conteúdos das suas aulas e o que é questionado na avaliação, uma vez que se pretende manter uma taxa aceitável de sucesso ainda que a universidade seja cada vez mais atingida pela massificação. Como o conteúdo da avaliação é considerado pelos alunos como o que deve ser de facto aprendido, esta situação tem efeitos dramáticos sobre as suas concepções sobre a matemática, sobre a actividade matemática ou até mesmo sobre a qualidade das aprendizagens.

Os resultados da investigação estão, no entanto, longe de se reduzir a estas situações negativas. É nesse sentido que Artigue organiza estes resultados segundo as duas dimensões dos processos de aprendizagem. Na primeira dimensão são englobados três tipos principais de investigações. Um primeiro tipo refere-se às mudanças qualitativas na transição dos processos para os objectos. A teoria APOS, cujo principal impulsionador é Dubinsky, é referida por Artigue como um exemplo destas investigações. Esta teoria tem por base a teoria piagetiana da abstracção reflexiva, adaptada ao tipo de construções mentais que estão em jogo na aprendizagem de conceitos matemáticos avançados. A teoria pressupõe a existência de um modelo que parte de objectos físicos ou mentais, através das acções sobre esses objectos conduz a processos que são posteriormente capsulados para formar novos objectos. Para além desta teoria parece ser possível destacar mais duas abordagens, que, embora tenham tido um desenvolvimento mais ou menos independente, podem ser consideradas como sendo igualmente relevantes para este tipo de investigação. Uma delas é a teoria da reificação, cuja principal impulsionadora é Sfard e cujo modelo de desenvolvimento dos objectos matemáticos passa por três fases: interiorização, condensação e reificação. Um conceito é formado a partir da realização de determinados processos sobre um conjunto de objectos, processos esses que vão sendo interiorizados, condensados e posteriormente reificados, resultando num novo objecto matemático. A outra teoria prende-se com a noção de proceito e tem como principal impulsionador David Tall. Os conceitos matemáticos são construídos partindo da realização de determinados procedimentos matemáticos exactos, que por sua vez vão sendo organizados de uma forma mais flexível e eficiente dando origem a determinados processos, processos estes que podem ser representados de forma simbólica assumindo assim o estatuto de proceitos. Estas teorias são desenvolvidas no capítulo correspondente à revisão de literatura.

O segundo tipo de investigações que Artigue refere prende-se com as descontinuidades na compreensão que se verificam no desenvolvimento do conhecimento matemático. Ela inclui nesta categoria a teoria sobre os obstáculos epistemológicos como representando uma abordagem complementar da evolução cognitiva, que se foca essencialmente nas suas descontinuidades. A teoria parte do princípio de que o conhecimento científico não é construído segundo um processo contínuo, mas que resulta da rejeição de formas prévias de conhecimento, os chamados obstáculos epistemológicos. Os autores que se referem a esta teoria partem da hipótese que algumas dificuldades de aprendizagem, por vezes as mais enraizadas, resultam de formas de conhecimento que são coerentes e que têm sido efectivas por algum tempo nos contextos social e educacional.

O terceiro tipo de investigações prende-se com as reconstruções que estão em jogo na transição do secundário para o superior. Algumas dessas reconstruções lidam com objectos matemáticos já familiares para os alunos mesmo antes de começar o ensino formal da Análise. Os números reais fornecem um exemplo típico, pois são introduzidos no ensino secundário como objectos algébricos e algumas investigações mostram que as concepções desenvolvidas pelos alunos não são nem coerentes nem adaptadas ao estudo que se pretende desenvolver com a Análise. As reconstruções são assim vistas como necessárias para a compreensão dos modos de pensamento analítico que se pretendem desenvolver e a construção do campo dos números reais pode permanecer bastante fraca se os alunos não forem confrontados com a incoerência das suas concepções e com os conflitos cognitivos que estas podem induzir. Outra categoria de reconstruções resulta do facto de apenas algumas das facetas dos conceitos matemáticos ensinados serem introduzidas aquando do primeiro contacto com estes. Tomando como exemplo o conceito de integral, há currículos onde o primeiro contacto ocorre no final do secundário com recurso à noção de anti-derivada e a uma abordagem pragmática do teorema fundamental do cálculo que permite uma ligação intuitiva com a noção de área. É depois no ensino superior com o desenvolvimento da teoria da integração que se torna efectiva através da teoria do integral de Riemann e posteriormente com a teoria de Lebesgue. Esta transição requer sucessivas reconstruções das conexões que os alunos desenvolveram sobre o conceito de integral. Uma terceira categoria de reconstruções aparece mais fortemente ligada à transição da Análise mais pragmática e intuitiva estudada no final do secundário e que é direccionada para uma Análise mais formal. O conceito de limite pode aqui ser usado como um bom exemplo deste tipo de reconstrução. Enquanto que no secundário é referida uma concepção dinâmica de limite baseada em explorações gráficas e numéricas e em técnicas de natureza algébrica, a transição para uma abordagem simbólica, que tem lugar no ensino superior, conduz por vezes a uma lacuna profunda, quer conceptualmente quer tecnicamente.

A segunda dimensão que Artigue refere para organizar os resultados da investigação prende-se com a flexibilidade cognitiva nos processos de ensino e aprendizagem. Este tipo de investigação centra-se nas relações que se estabelecem entre os conceitos matemáticos e as suas representações semióticas e tem vindo a ser alvo de uma maior atenção por parte da investigação didáctica. Esta evolução parece estar relacionada com quadros teóricos globais onde as abordagens sócio-culturais e antropológicas são especialmente sensíveis ao papel desempenhado pelas ferramentas materiais e simbólicas da actividade matemática no processo de aprendizagem. A diferença fundamental desta abordagem reside no facto de se quebrar com a visão comum das competências instrumentais e semióticas como um derivado da conceptualização admitindo a hipótese de fortes relações dialécticas no seu desenvolvimento recíproco. Esta visão assume uma importância particular se tivermos em mente a evolução tecnológica actual dos instrumentos da actividade matemática. A aprendizagem da matemática pode deixar de ser vista como uma ascensão para níveis cada vez mais altos de abstracção e formalização, deixando espaço para as ligações entre os campos de experiência matemática, pontos de vista, cenários e registos semióticos que representam uma parte crucial dessa aprendizagem. Como exemplo desta abordagem podemos considerar o papel das tecnologias computacionais que, quando usadas de forma adequada, podem ter um papel crucial no desenvolvimento de relações entre representações semióticas, como por exemplo entre representações gráficas, numéricas e simbólicas de funções, fazendo com que as representações gráficas possam ser ferramentas efectivas no trabalho matemático.

1.3. As necessidades de investigação

As investigações das aprendizagens no ensino superior têm vindo a ter um incremento significativo, permitindo nalgumas áreas criar um corpo de conhecimentos que pode ajudar a estruturar e melhorar o ensino e a aprendizagem, visando uma maior compreensão e um melhor desempenho por parte dos alunos. Apesar desse desenvolvimento há ainda uma necessidade bastante grande de trabalho de investigação em diferentes áreas. Segundo Bass (1998) é possível identificar quatro áreas críticas com falta de investigação sistemática. Uma dessas áreas refere-se à transição da educação secundária para a superior. No que diz respeito aos alunos, ele considera que é preciso saber quais as tendências e competências matemáticas que os alunos devem trazer do secundário quando entram no ensino superior. Relativamente ao currículo é necessário compreender o tipo de coordenação que há na passagem do currículo do secundário para o do superior. Com o desenho e implemento de novos currículos a ambos os níveis é necessária investigação para que se possa estar preparado para as mudanças que se seguem tendo em vista quer os alunos quer o currículo.

A segunda área que Bass refere está relacionada com o uso educativo da tecnologia. As calculadoras gráficas, a visualização e manipulação geométricas, o software simbólico, etc., são cada vez mais comuns. O uso destas tecnologias é defendido por uns que destacam o papel destas ferramentas para realçar a compreensão matemática dos alunos, enquanto que outros consideram que as capacidades e intuições sobre a matemática são enfraquecidas devido à dependência que estas ferramentas criam. Muito pouco se sabe sobre a utilização destas tecnologias no ensino superior, pelo que é importante saber como é que os alunos são ensinados a usar a tecnologia, quando esta é usada, e como é que eles se relacionam com a matemática assim ensinada. Noutras questões a investigar pretendem-se saber como é que o desenvolvimento matemático dos alunos é afectado pelo uso de diferentes ferramentas tecnológicas e como é que os alunos aprendem com uma ferramenta tecnológica particular comparativamente com aqueles que não usam tecnologia.

Uma terceira área que precisa de investigação está relacionada com os professores e o ensino a nível superior. Segundo Bass trata-se de saber quais as crenças dos matemáticos universitários sobre o ensino e a aprendizagem, quais os modelos de ensino exemplar que as faculdades transportam para as suas próprias práticas enquanto instrutoras, que explicações dão para o sucesso e insucesso dos seus alunos ou que preparação e desenvolvimento profissional para o ensino recebem e o que parecem aprender com estas oportunidades.

A quarta área está relacionada com os contextos universitários e a atenção ao ensino. Bass considera que é preciso saber como é que as culturas e políticas dos departamentos e universidades afectam os programas e desenhos curriculares, a aprendizagem dos alunos e a prática educativa, bem como de que forma é que proporcionam incentivos ou desincentivos para que as instituições tenham em conta matérias como o ensino, a aprendizagem e o currículo de matemática.

Esta abordagem mostra-nos que há de facto uma grande falta de investigação que possa suportar, de forma coerente, um conjunto de tomadas de decisão que o ensino superior precisa de implementar como forma de ultrapassar as várias dificuldades com que se vem debatendo, tendo uma boa parte destas sido enumeradas acima. De acordo com as necessidades de investigação referidas acima, a que me proponho desenvolver neste trabalho insere-se na primeira área e prende-se com a aprendizagem dos conceitos matemáticos no início do superior. Procura-se caracterizar os principais conceitos imagem dos alunos relativamente a um conjunto de conceitos considerados fundamentais na construção de novos conceitos mais abstractos.

Pretende-se assim desenvolver um trabalho de investigação, com alunos do 1º ano do Ensino Superior, na área disciplinar da Análise Matemática, nomeadamente nos tópicos respeitantes ao estudo de sucessões e de funções reais de variável real, dando especial destaque ao estudo dos limites, diferenciabilidade e teoremas associados.

2. Objectivos e questões de investigação

Pretende-se com este estudo caracterizar a compreensão de alguns conceitos matemáticos ensinados no primeiro ano do ensino superior em Análise Matemática I, primeira disciplina de Análise, que se destina aos alunos do primeiro ano numa faculdade vocacionada para as ciências e a tecnologia. Neste estudo não se pretende implementar uma nova metodologia de ensino, sendo o currículo leccionado de acordo com as orientações vigentes na instituição.

Os objectivos do estudo centram-se assim na aprendizagem dos conceitos matemáticos avançados, isto é, de conceitos que se focam essencialmente nas abstracções de definições e deduções e que têm por base os processos de representação e abstracção. Procura-se nomeadamente:

- integrar o contributo de várias teorias sobre a construção dos conceitos matemáticos;
- caracterizar a complexidade dos conceitos imagem que os alunos têm dos conceitos matemáticos ensinados;
- caracterizar desempenhos escolares típicos de alguns alunos.

Embora estes três objectivos sejam a coluna vertebral da investigação que a seguir se apresenta, parece ser pertinente explicitar mais o segundo por se considerar que ele engloba outros objectivos mais específicos. Assim, *a caracterização da complexidade dos conceitos imagem que os alunos têm dos conceitos matemáticos ensinados* pode ser apresentada mais especificamente como:

- identificar e caracterizar os principais conceitos imagem que os alunos têm dos conceitos matemáticos;
- compreender o papel destes conceitos imagem na construção de novos conceitos;
- identificar os processos e objectos utilizados na construção destes conceitos;

- compreender o desempenho na utilização de diferentes representações de um mesmo conceito;
- identificar o nível de pensamento proceptual dos alunos ao lidar com conceitos cada vez mais abstractos.

Os alunos participantes na investigação distribuem-se por diferentes licenciaturas: Matemática, Engenharia Electrotécnica e Computadores e Ensino das Ciências da Natureza, sendo os tópicos estudados comuns a todos eles. A metodologia utilizada assentou na realização de entrevistas semi-estruturadas, a par de uma componente de experiência de ensino, da observação de aulas e da recolha de outros documentos produzidos pelos alunos, como testes de avaliação e exames, ou ainda documentos institucionais referentes às classificações no final do ensino secundário e no ingresso no ensino superior.

3. Estruturação dos capítulos

Este trabalho encontra-se estruturado em nove capítulos, que organizam os vários procedimentos do estudo, mas que nem sempre se apresentam com características próprias que os distingem entre si. Alguns deles podem ser interligados por traduzirem uma mesma problemática do estudo, tornando-se complementares na forma como integram e completam os resultados encontrados.

De uma forma mais pormenorizada, o primeiro capítulo pretende fazer uma introdução ao estudo incorporando a sua pertinência e objectivos.

O segundo e terceiro capítulos integram uma revisão da literatura considerada relevante para o tema em estudo. Assim, no segundo são discutidas questões de índole conceptual culminando com um glossário que engloba uma definição dos principais termos usados, enquanto que no terceiro se apresentam alguns dos resultados da investigação realizada nesta área. Estes dois capítulos em conjunto com a primeira parte do nono capítulo procuram responder ao primeiro objectivo proposto.

O quarto capítulo está relacionado com a metodologia utilizada no estudo discutindo algumas das vantagens na utilização de uma abordagem qualitativa, descrevendo o contexto educativo e os procedimentos do estudo e fazendo uma caracterização da amostra utilizada na recolha dos dados. Por fim referem-se algumas das limitações do estudo.

O quinto capítulo pretende servir de guia à leitura dos dados empíricos apresentados nos capítulos seis e sete, e é obtido com base na elaboração de meta-categorias que se destacam das categorias formadas a partir dos dados. Estes três capítulos em conjunto com o ponto dois do nono capítulo pretendem responder ao segundo objectivo estabelecido para a investigação.

O oitavo capítulo e o terceiro ponto do nono referem-se à diversidade de desempenhos escolares que os alunos manifestam ao lidar com os vários conceitos relatando alguns casos típicos de sucesso escolar e procura responder ao terceiro objectivo do estudo.

CAPÍTULO II

O pensamento matemático avançado

Neste capítulo pretendem-se rever teorias sobre a construção do conhecimento matemático, aplicáveis desde a sua forma mais elementar até ao nível requerido no ensino superior, que nos permitem caracterizar o pensamento matemático avançado. Neste nível de ensino este tipo de pensamento refere-se essencialmente às abstracções de definições e deduções, baseadas em processos de representação e abstracção que apresentam um nível elevado de complexidade.

O capítulo encontra-se organizado em quatro temas. No primeiro procura-se clarificar o que se entende por compreensão em matemática e qual o papel das representações nessa compreensão. O segundo tema é dedicado à explicitação de algumas teorias cognitivas relativas à construção dos conceitos matemáticos, nomeadamente, no que diz respeito às noções de *conceito definição* e *conceito imagem*, cujo principal impulsionador é Shlomo Vinner, sobre a dupla natureza dos conceitos matemáticos e a teoria da *reificação* de Anna Sfard, sobre a transição do pensamento processual para o pensamento conceptual proposto por David Tall e sobre a teoria APOS desenvolvida por Ed Dubinsky. No terceiro tema procura-se caracterizar o desenvolvimento do pensamento matemático, fazendo a distinção entre o elementar e o avançado e procurando estabelecer a forma como este evoluiu, segundo o modelo de David Tall. O quarto tema refere-se a algumas das características do pensamento matemático avançado onde é dado um destaque especial ao papel das representações e da demonstração. Este capítulo pretende responder parcialmente ao primeiro objectivo do estudo, integrar o contributo de várias teorias sobre a construção dos conceitos matemáticos.

1. Compreensão em matemática

1.1. Algumas abordagens da noção de compreensão

O termo compreensão tem sido abordado por vários autores com o objectivo de explicar a construção do conhecimento. Skemp (1978) considera dois tipos de compreensão: a *compreensão instrumental* e a *compreensão relacional*. A compreensão instrumental diz respeito à aquisição de regras ou métodos e à capacidade de as usar na resolução de problemas. É privilegiado o saber como sem saber porquê. O objectivo é procurar uma regra que permita dar uma resposta satisfatória para o problema. A compreensão relacional baseia-se em princípios que têm uma aplicação mais geral. Assenta no princípio de saber, ao mesmo tempo, o como e porquê, permitindo não só perceber o método que funciona e porquê, como ajuda a relacioná-lo com o problema e possibilita a sua adaptação para a resolução de novos problemas.

A abordagem de Skemp coloca a questão da compreensão em pólos opostos, mas esta dicotomia não parece estar presente em muitas das situações de aprendizagem com que os alunos são confrontados. Herscovics e Bergeron (1984) apresentam um modelo mais refinado composto por quatro modos de compreensão: *intuitiva*, *de procedimentos*, *abstracção matemática* e *formalização*[1]. A compreensão intuitiva refere-se a um conhecimento matemático informal caracterizado por se basear em pré-conceitos (por exemplo, superfície é um pré-conceito de área), na percepção visual ou em acções não quantificadas (por exemplo, acrescentar a –adding to– e juntar –joining– são acções que mais tarde serão associadas com a adição aritmética). A compreensão de procedimentos refere-se à aquisição de procedimentos matemáticos que os sujeitos podem relacionar com o seu conhecimento intuitivo e usar de forma apropriada. A abstracção matemática pode ter dois sentidos, a abstracção no sentido usual, como afastamento de uma representação ou de um procedimento concreto (por exemplo o número 7 existe na mente da criança mesmo sem requerer a presença de objectos ou a necessidade de os contar) e a abstracção no sentido matemático, como a construção de invariantes (por exemplo a conservação do número), a reversibilidade e composição de transformações e operações matemáticas (por exemplo a subtracção vista como a operação inversa da adição) ou a generalização. A formalização refere-se às interpretações usuais da axiomática e à demonstração matemática formal. Esta formalização pode ter ainda dois significados adicionais: conter a noção matemática como uma definição formal ou usar o

[1] Os termos utilizados pelos autores no original são: intuitive understanding, procedural understanding, mathematical abstraction e formalization.

simbolismo matemático para noções em que a abstracção anterior ou a compreensão de procedimentos ocorreu até certo ponto. A abordagem de Herscovics e Bergeron engloga algumas das principais características que estão presentes na concepção dos objectos matemáticos, desde os mais elementares até aos mais avançados e propõe uma visão mais aprofundada que a de Skemp.

Outro autor que se preocupa com a problemática da compreensão é Sierpinska (1994) que faz um trabalho bastante exaustivo com o objectivo de encontrar ferramentas mentais que lhe permitam equacionar de forma esclarecedora o que significa compreender uma determinada noção matemática. Sierpinska procura caracterizar aquilo que ela chama *actos de compreensão*, que segundo ela, representam os elementos mais simples no processo de compreensão. Para tal, parte do trabalho de Kotarbinski que considera que a compreensão pode ser entendida como uma experiência actual ou potencial da mente. Por exemplo, quando dizemos que uma pessoa que sabe a tabuada da multiplicação compreende a proposição "7x9 é 63", podemos pensar que a pessoa actualmente, nesse momento, pensa em "7x9" e "63" e considera que são iguais ou que ela é potencialmente capaz de o fazer em qualquer altura tendo reflectido sobre isso alguma vez no passado. Sierpinska considera assim que há experiências mentais actuais, designadas actos de compreensão, mas existe também uma *compreensão* que funciona como um potencial para enfrentar um acto de compreensão quando necessário.

Estas *compreensões* parecem pertencer à esfera do conhecimento: são os recursos para conhecer. Um acto de compreensão é portanto uma experiência que ocorre num dado momento e desaparece rapidamente. Em educação, por vezes, falamos de compreensão como uma actividade cognitiva que tem lugar ao longo de determinados períodos de tempo. Ao usarmos o termo *processo de compreensão* para traduzirmos essa situação podemos admitir que os actos de compreensão representam os passos significativos para compreender, enquanto que a compreensão adquirida constitui o suporte para o desenvolvimento futuro.

Sierpinska está interessada em estudar a compreensão em matemática. Nesse sentido a distinção anterior é bastante geral, razão pela qual ela parte da definição de compreensão de expressões linguísticas de Ajdukiewitz para a compreensão de objectos matemáticos. Para isso ela vai substituir na definição de Ajdukiewitz o termo expressão (linguística) por *objecto* (essencialmente matemático) e o acto de compreender um objecto matemático corresponde a fazer uma ligação mental entre esse objecto e um outro objecto que pode ter apenas uma representação mental (por exemplo um conceito abstracto). O primeiro objecto será o objecto *de compreensão* enquanto que o segundo será a *base da compreensão*. Por exemplo: o objecto de compreensão pode ser um problema definido por palavras e no acto de compreensão posso reconhecer o problema como obedecendo a um determinado padrão bem conhecido. Este padrão pode ser a base da compreensão do problema.

Com esta formulação os objectos matemáticos assumem um papel preponderante, pelo que há a necessidade de os caracterizar. Para Sierpinska (1994) parece razoável considerar o termo *objecto* na definição de acto de compreensão, como um termo primitivo uma vez que estamos apenas interessados em explicar o que são objectos matemáticos assim como em explicar o que é a compreensão no campo da matemática. Se considerarmos as várias posições que a noção de objecto pode assumir no seio da Educação Matemática, há duas que merecem destaque para a autora: os objectos podem ser entidades conceptuais, se encarados do ponto de vista subjectivo, ou postulados ontológicos, se considerarmos uma visão mais realista. Para clarificar a sua concepção sobre os objectos Sierpinska considera que não assume uma postura platónica, realista ou idealista, identificando-se antes com uma postura próxima da de Popper onde os objectos matemáticos podem ser considerados criações da mente humana. É necessário ter em conta que estes objectos estão envolvidos num sistema de necessidades e consequências lógicas que moldam as suas relações com outros objectos matemáticos e podem ter propriedades difíceis de descobrir ou de provar. Podemos considerar como objectos por exemplo as funções reais definidas no intervalo [0,1] ou as transformações geométricas e estes objectos podem formar grupos que poderão ser por sua vez também objectos. Teoremas, conjecturas e raciocínios também podem ser vistos como objectos. Embora os objectos possam assumir contornos tão abstractos, deveremos ter em atenção que, muitas vezes, eles começam a ser construídos a partir de actos de compreensão. Mais uma vez Sierpinska mostra preocupações educacionais e considera que estes objectos abstractos não devem ser ensinados a partir da sua abordagem formal. Devemos levar em conta que o que é identificado pela pessoa que compreende como o seu objecto de compreensão pode não ser muito claro desde o início. Os contornos destes objectos não têm que ser claros nos primeiros actos de compreensão.

Para Sierpinska a compreensão é relacionada com a existência de actos de compreensão, que correspondem a actos mentais que acontecem num curto espaço de tempo e representam os elementos mais simples no processo de compreensão. A par destes actos de compreensão há uma compreensão que assume um carácter potencial e se vai desenvolvendo à medida que procura dar significado aos actos de compreensão. A compreensão incide essencialmente sobre objectos matemáticos e compreender um dado objecto corresponde a fazer uma ligação mental entre esse objecto (objecto de compreensão) e um outro objecto qualquer (base da compreensão).

A partir desta definição de compreensão, Sierpinska (1994) procura equacionar quais as componentes que nos permitem avaliar se, de facto, estamos a compreender algo. Uma primeira componente é *ordem e harmonia*. Conhecemos este sentimento por introspecção: o comum acto de reconhecimento de algo consiste em classificá-lo, ordená-lo entre outros objectos similares, dar-lhe um nome, etc. Por exemplo quando encontramos a inscrição $y=2x+3$, podemos ser levados a pensar que se trata de uma função afim. Também algumas teorias psicológicas consideram a ordem e harmonia no nosso campo de conhecimento. Foi importante na psicologia gestaltista por ser um dos traços básicos da tendência para o equilíbrio no campo do conhecimento, princípio da boa forma (Matos e Serrazina, 1996) e esta ideia reaparece em Piaget com a teoria do equilíbrio das estruturas cognitivas, baseado na assimilação e acomodação. Por vezes na hermenêutica a interpretação ou procura de sentido de um texto ou declaração também consiste em introduzir uma ordem.

Outra componente refere-se à compreensão na base de um *pensamento unificado*. Nem todos os actos de compreensão precisam de obedecer à existência de um princípio único ou ter por base um pensamento baseado em leis gerais. No entanto, quando se pretende compreender conceitos abstractos, teoremas, teorias, etc. este pensamento unificado começa a ter um papel importante. Compreender não significa apenas formar agregados de coisas, mas sim interpretar e entender o agregado como um todo, com o objectivo de lhe dar o estatuto de um objecto matemático.

Uma terceira componente pode ser associada às noções de *compreensão sistémica* e *compreensão experiencial* como formas diferentes de ver a compreensão: de fora do objecto no primeiro caso e de dentro no segundo. No caso da compreensão sistémica é preciso ter em conta o seu carácter integrador que tende, por vezes, para a simplificação ao tentar estabelecer leis gerais que reduzam a complexidade das situações problemáticas. Esta parece ser uma das características do conhecimento científico que devemos ter em conta. No caso da compreensão experiencial, que tem como único requisito científico experienciar a situação em toda a sua riqueza e variedade de aspectos sem tentar clarificá-la e sem olhar para o seu sistema de propriedades, é preciso ter em conta que pode ser bastante difícil isolar uma situação e experienciá-la por dentro sem utilizar algum outro sistema de referência. Sierpinska considera que a riqueza desta componente para a compreensão reside na capacidade de encarar os dois modos de forma complementar, em vez de os colocar como uma dicotomia. A compreensão de um dado objecto pode ser mais efectiva se for possível analisá-lo com base numa compreensão sistémica e experiencial em simultâneo.

A quarta componente está relacionada com a compreensão e o alcance da essência das coisas que Sierpinska refere como sendo o fenomenismo (phenomenalism) e o essencialismo.

Muitas vezes temos o sentimento de que não compreendemos realmente alguma coisa enquanto não tivermos alcançado a sua essência. A motivação da nossa intenção de compreender é guiada por questões de forma a entender o que faz do objecto exactamente o que ele é. A sua essência é aquilo sem o qual ele não poderá ser o que é (Sierpinska, 1994). É muito difícil falar sobre a essência das noções matemáticas, mas se tomarmos como exemplo o caso das funções, podemos considerar alguns desses aspectos. Podem ser vistas como relações particulares (em voga durante o período da reforma da Matemática Moderna), como a tendência de aproximar a matemática da vida real (vistas como modelos de relações entre magnitudes variáveis) ou como decorrentes de uma fórmula (abordagem de Euler). Uma perspectiva mais geral e multifacetada pode ser oferecida ao olhar as funções como um processo. Podemos também considerar que a compreensão formal de uma noção matemática consiste em compreender o seu nome com base na sua definição – uma certa afirmação que tem uma estrutura lógica definitiva e ligações lógicas definitivas com outras afirmações (teoremas e definições). A definição neste sentido é o que é observável num conceito – é o seu fenómeno. Sierpinska considera que esta forma de compreensão pode não ser sentida como satisfatória. Usar apenas uma análise da definição não responde a questões acerca de como o conceito é crucial ou marginal para a teoria e para as suas aplicações, qual foi o seu papel no desenvolvimento da teoria, quais eram os problemas que o conceito ajudou a resolver ou compreender melhor. Uma consciência de tudo isto parece ser importante para compreender o conceito.

Em resumo, Sierpinska considera que para podemos escolher entre vários objectos qual é o que melhor se relaciona com um dado objecto que pretendemos compreender, devemos ser guiados por algum critério que nos permita decidir se compreendemos ou não. Para tal ela considera a existência de quatro componentes, ordem e harmonia, pensamento unificado, compreensão sistémica e experiencial e fenomenismo e essencialismo, que nos podem dar alguma informação sobre o grau de compreensão que temos do objecto em causa.

A partir da definição de compreensão e das componentes que lhe estão subjacentes, Sierpinska procura estabelecer as bases da compreensão. As *representações* surgem como tendo um papel primordial na compreensão, mas além destas a autora ainda considera que a *aprecepção*[2] e os *pensamentos porque sim*[3] são componentes indispensáveis para a compreensão.

Com base na definição de compreensão, Sierpinska considera as representações como elementos constituintes da sua base. Segundo ela é possível identificar três tipos de

[2] "Aperception" no original.
[3] "Thoughts that [so and so]" no original.

representações: imagens mentais, representações conceptuais e representações de procedimentos. A origem e caracterização desta categorização será apresentada no próximo ponto deste capítulo, referente ao papel das representações.

A apercepção (percepção consciente) é outra das componentes que está na base da compreensão. Ela aparece nos níveis mais elevados do pensamento abstracto e refere-se essencialmente à tomada de consciência de certas propriedades que normalmente não são tidas em conta nos actos de compreensão. Por exemplo ao tentar compreender o sentido da frase "pensar é tão difícil que muitos preferem tirar conclusões", a primeira coisa que identificamos é a oposição entre pensar e tirar conclusões, onde tirar conclusões aparece (automaticamente) como uma fuga para pensar. Nós deveríamos ter isolado a estrutura da frase dando atenção a considerações como "tão difícil que" para podermos desenvolver uma percepção consciente do seu sentido. A apercepção deveria conduzir-nos a questões como: por que é que pensar deve ser mais difícil que tirar conclusões? Não será o pensamento por vezes baseado em tirar conclusões?

Os *pensamentos porque sim* também são considerados por Sierpinska como estando na base da compreensão. Trata-se da categoria dos actos de compreensão que respondem às nossas questões acerca das razões porque é que as coisas são como são, porque é que as afirmações podem ser verdadeiras ou falsas ou que resultados (de experiências, cálculos, investigações) podem ser esperados numa dada situação. Este tipo de pensamento não precisa de expressar a opinião ou convicção da pessoa. Ela pode estar convencida da verdade do seu pensamento com base na prova que foi entendida, ou pode apenas repetir, na mente, um argumento que foi memorizado. Por exemplo compreender que "$\sqrt{2}$ é um número irracional" com base no pensamento que "$\sqrt{2}$ não pode ser representado como a razão entre dois números inteiros" pode ser ou não uma convicção. A pessoa pode estar convencida da veracidade deste pensamento com base na demonstração que compreendeu ou pode apenas repetir, na sua mente, um argumento que memorizou.

Sierpinska desenvolve assim uma abordagem do conceito de compreensão bastante pormenorizada que nos permite de uma forma clara identificar o nível de compreensão dos alunos. A principal diferença relativamente aos modelos de Skemp e Herscovics e Bergeron reside no facto de não se estabelecer uma hierarquia entre os níveis de compreensão, mas antes uma caracterização das suas principais componentes com identificação das suas características fundamentais. Trata-se de uma abordagem geral, com uma aplicação bastante vasta.

Com um objectivo diferente, Carpenter e Lehrer (1999), mais preocupados com uma abordagem que se centra na aula, consideram que há cinco formas de actividade mental de onde pode emergir a compreensão matemática: construção de relações, prolongar e aplicar o conhecimento matemático, reflexão sobre experiências, comunicar o que sabemos e desenvolver um conhecimento matemático próprio. Estas formas estão todas fortemente interligadas podendo, no entanto, destacar-se algumas das suas propriedades em separado para uma melhor clarificação.

A *construção de relações* é importante, pois podemos considerar que as coisas têm significado pela forma como estão relacionadas com outras coisas. As pessoas constroem o significado de uma nova ideia ou processo relacionando-as com ideias ou processos que já compreenderam anteriormente. O ensino deve preocupar-se com o conhecimento informal dos alunos e relacionar a matemática que se pretende ensinar com esse conhecimento.

Não devemos, no entanto, pensar no desenvolvimento da compreensão como um simples acrescentar de novos conceitos e processos ao conhecimento existente. Desenvolver a compreensão envolve a criação de estruturas de conhecimento ricas e integradas, estruturas estas que dão origem a uma aprendizagem com compreensão. Quando o conhecimento está altamente estruturado o novo conhecimento pode ser relacionado e incorporado nas redes de conhecimento já existente. O conhecimento estruturado é menos susceptível de ser esquecido e proporciona vários caminhos para a sua recuperação, enquanto que peças de informação isoladas são mais difíceis de lembrar. É neste sentido que Carpenter e Lehrer consideram que devemos *prolongar e aplicar o conhecimento matemático*.

A *reflexão sobre experiências* envolve um exame consciente das nossas acções e pensamentos. Ser reflexivo na sua aprendizagem significa examinar conscientemente o conhecimento que se adquire e, em particular, a forma como se relaciona o que já se sabe com qualquer outro conhecimento que se tenha adquirido. A aprendizagem processa-se através da reorganização do que já sabemos e esta reorganização pode provir da reflexão sobre o que sabemos e como o sabemos. Os alunos devem ser reflexivos sobre as actividades que desenvolvem enquanto aprendem ou resolvem problemas.

A capacidade de *comunicar* as nossas ideias é um objectivo importante da educação e serve, muitas vezes, como medida da nossa compreensão. A articulação envolve a comunicação do nosso conhecimento (verbal, escrita, pensamento, etc.) e requer reflexão uma vez que aborda o levantamento de ideias cruciais de uma actividade em que apenas a sua essência pode ser comunicada. Neste processo a actividade começa a ser um objecto de pensamento. Isto é, para comunicarmos as nossas ideias, devemos reflectir sobre elas por forma a identificarmos e descrevermos elementos cruciais. A comunicação requer reflexão e pode mesmo ser pensada como uma forma pública de reflexão.

Compreender envolve a construção do conhecimento pelos indivíduos através das suas próprias actividades desde que desenvolvam um investimento pessoal na construção desse conhecimento. De uma forma mais geral, os alunos devem ser os autores da sua própria aprendizagem. Eles desenvolvem as suas próprias atitudes sobre as diferentes formas e práticas matemáticas. Um dos grandes objectivos do ensino é que os alunos desenvolvam uma predisposição para compreender e que se esforcem para compreenderem por que a compreensão é importante para eles. Os alunos devem assim envolver-se nas actividades que lhe são propostas com o objectivo de *desenvolver um conhecimento matemático próprio*.

A abordagem de Carpenter e Lehrer sugere que a compreensão não é um fenómeno onde apenas podemos falar de compreender ou não compreender, mas antes um processo que se desenvolve e emerge a vários níveis e de formas diferentes na mente dos alunos. Ela pode ser assim caracterizada em termos da actividade mental que contribui para o desenvolvimento da inteligência em vez de um atributo estático do conhecimento de um indivíduo.

Uma outra perspectiva da noção de compreensão é dada por Hiebert e Carpenter (1992) que definem compreensão como a forma como a informação é representada e estruturada. As ideias matemáticas, procedimentos ou factos são compreendidos como fazendo parte de uma rede interna. Partindo do princípio de que a compreensão em matemática pode ser pensada como a ligação entre representações de conhecimento, o seu nível é determinado pelo número e força dessas ligações. Assim, uma ideia, procedimento ou facto matemático é completamente compreendido se ele está ligado a redes existentes com conexões fortes ou muito numerosas. Com base nesta definição os autores descrevem metaforicamente o processo que estrutura o desenvolvimento da compreensão. As redes das representações mentais são construídas gradualmente com a nova informação a ser ligada à rede já existente ou com a construção de novas relações entre informação anteriormente desligada. A compreensão cresce à medida que as redes se vão alargando e tornando mais organizadas. A compreensão pode assim ser vista, não como algo que a pessoa pode ou não ter, mas antes como limitada se apenas algumas das representações mentais de ideias potencialmente relacionadas estão ligadas ou se as conexões são fracas. Assim, a compreensão cresce com o crescimento das redes, com as relações mais fortes estabelecidas por experiências enriquecedoras e através de uma forte estruturação da rede.

O crescimento das redes pode ser visto de diferentes formas: como a adição de novas representações de forma cumulativa ou como uma reorganização das representações (Hiebert e Carpenter, 1992). A primeira forma pode parecer plausível se olharmos para o acumular de novas representações com algum distanciamento, mas quando olhamos de perto os alunos a trabalharem tentando encontrar significado para os seus procedimentos e conjecturas verificamos que estão presentes processos muito mais caóticos. Assim, a reorganização das representações parece ser uma abordagem que descreve melhor as mudanças nas redes. Neste processo as representações são estruturadas de outra forma, formando-se novas conexões e as ligações antigas podem ser abandonadas ou modificadas. A construção de novas relações pode forçar a alteração da configuração das redes afectadas. As duas formas de interpretar o crescimento das redes, dependem grandemente das redes que foram criadas anteriormente. As experiências do passado criam redes mentais que são usadas para interpretar e compreender as novas experiências e informação.

Uma outra dimensão da compreensão defendida por Wertsch (1991) tem as suas raízes no campo da linguística, mas que se revela transversal a várias áreas do conhecimento e está relacionada com a comunicação. Este autor recorre à noção de *voz* para suportar a ideia de que o modo de funcionamento da mente do indivíduo tem origem em processos sociais relacionados com a comunicação. A compreensão da mente humana passa assim pelo entendimento dos dispositivos semióticos. Neste sentido, Wertsch prefere usar o termo *vozes* por encerrar a pluralidade de formas de pensamento e de discurso existentes no plano individual, e também, no nível dialógico, no plano social. As *vozes* têm, um cunho marcadamente social, mesmo se pensarmos no indivíduo, pois envolvem sempre o outro, posicionado socialmente numa dada categoria cultural e social.

Assim, o discurso de um indivíduo invoca sempre uma linguagem social que, por sua vez, dá forma a esse discurso, e simultaneamente, invoca um género de discurso, relativamente estável e típico. No *ventriloquismo* (Wertsch, 1991) – processo de uma *voz* falar através de outra *voz*, numa linguagem social – existe uma certa interferência de uma voz noutra voz, acompanhada por uma subordinação parcial e correlativa. Qualquer palavra, antes de ser apropriada pelo indivíduo – quando ele lhe confere a sua própria intenção – é retirada das outras pessoas e dos seus contextos concretos. Esta apropriação individual da palavra e do seu significado constitui a capacidade do indivíduo em utilizar o género de discurso e a linguagem social como recursos que lhe permitam um desempenho criativo e único.

No ensino assiste-se com frequência a fenómenos de ventriloquismo, onde os alunos procuram apropriar-se de palavras e propriedades, que não são intrínsecas ao seu discurso, mas que quando proferidas pelo professor assumem uma relação de poder que se sobrepõe à voz do próprio aluno. O desequilíbrio entre os níveis de poder existentes nas vozes do professor e do aluno é bastante acentuado, nomeadamente no ensino superior, pelo que a voz menos poderosa incorpora como suas as ideias matemáticas das vozes mais poderosas.

1.2. O papel das representações na compreensão

As representações surgem quase sempre como uma das principais componentes das diferentes abordagens da noção de compreensão anteriormente referidas, pelo que se reveste de especial interesse a sua clarificação recorrendo ao trabalho feito por alguns autores. Têm sido propostos vários modelos para explicar como é possível reproduzir na mente as experiências que nos chegam da realidade exterior. As várias correntes defenderam diferentes paradigmas sem se chegar a consensos, até que por volta meados da década de 70 com o aparecimento da ciência cognitiva se gerou algum acordo em torno desta questão.

Numa tentativa de definir o conceito de representação, Kaput (1987) admite que este envolve duas entidades relacionadas, mas funcionalmente separadas. Um destes entes é denominado o *objecto representante* (símbolo ou representação) e o outro é o *objecto representado* (conceito) e considera implícita uma certa correspondência entre o mundo dos objectos representantes e o mundo dos objectos representados. Assim, qualquer especificação particular da noção de representação deveria descrever, pelo menos, cinco entidades:

1ª os objectos representados,

2ª os objectos representantes,

3ª os aspectos do mundo representado que se representam,

4ª os aspectos do mundo representante que realizam a representação,

5ª a correspondência entre ambos os mundos.

Em muitos casos os dois mundos (ou apenas um deles) podem ser entidades hipotéticas ou mesmo abstracções. Esta tentativa de definição parece pretender introduzir uma forma de podermos classificar as representações, tendo mesmo sido utilizada, por vezes, para controlar as diferentes utilizações que são dadas ao termo. Esta ideia parece não ser no entanto partilhada pelo autor quando posteriormente se refere de novo às representações de uma forma menos pragmática.

Kaput (1992), considera um *mundo de operações mentais*, por vezes hipotético, e um *mundo de operações físicas*, frequentemente observável. Estes dois mundos interagem em direcções opostas (figura 2.1), embora de uma forma mais subtil se possa considerar que fazem parte de um processo cíclico.

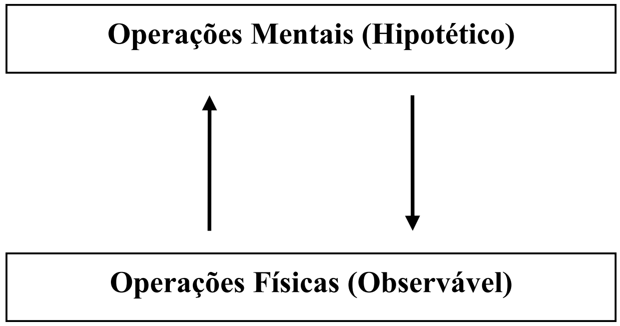


Figura 2.1. Interacção entre dois mundos segundo Kaput.

A seta para cima na figura descreve dois tipos de acontecimentos: a interpretação (ou leitura) deliberada activa e processos menos activos, menos controlados conscientemente e menos organizados que despertam acções mentais por intermédio do material físico observável. A seta para baixo também descreve dois tipos de processos: o acto de projectar a estrutura mental no material existente e o acto de produzir novas estruturas (escrevendo), que inclui a elaboração física das estruturas já existentes.

As projecções ocorrem lendo e escrevendo como parte de um processo cíclico subjacente ao modelo que combina os objectos de percepção e os conceitos. A distinção entre as projecções orientadas para baixo e os actos interpretativos orientados para cima tem por objectivo evidenciar os processos mais importantes subjacentes a esta distinção. No caso da orientação para baixo nós temos conteúdo cognitivo que procuramos exteriorizar com o objectivo de comunicar ou de testar para validar. Os processos orientados para cima são baseados na intenção de usar algum material físico para ajudar o nosso pensamento.

Hiebert e Carpenter (1992) baseiam-se nas noções de *representação interna* e *representação externa* e assumem que o conhecimento é representado internamente por representações internas estruturadas. Consideram que para pensar sobre as ideias matemáticas e para as comunicar necessitamos de as representar de algum modo. A comunicação requer que as representações sejam externas, tomando a forma da linguagem oral, de símbolos escritos, desenhos ou de objectos físicos. Para pensarmos sobre as ideias matemáticas precisamos de representá-las internamente, por forma a permitir que a mente possa operar sobre elas.

No estudo das representações internas os autores consideram dois pressupostos: existem relações entre representações internas e externas e as representações internas podem estar relacionadas ou ligadas umas com as outras de forma a conferir-lhe significado. Vejamos cada um deles em particular. No primeiro caso é importante que se considerem ambas as representações, pois a representação externa (materiais, figuras, símbolos) com que o aluno interage condiciona a forma como ele representa a informação internamente. Inversamente a forma como o aluno gera ou lida com uma representação externa revela de alguma forma como ele representou essa informação internamente. As representações internas são influenciadas e modificadas pela forma como a situação externa é representada e, no caso particular das situações matemáticas, a natureza das representações matemáticas externas influencia a natureza das representações matemáticas internas. No segundo caso as representações internas devem estar ligadas entre si. Dado que estas ligações apenas podem ser inferidas, assume-se que elas são representações influenciadas pela actividade externa, ou seja, as conexões entre as representações internas podem ser estimuladas pelas conexões entre correspondentes representações externas. As conexões entre representações externas podem ser construídas pelo aluno entre diferentes formas de representação ou entre ideias relacionadas com a mesma forma de representação. As conexões entre representações internas, embora não sejam directamente acessíveis, podem considerar-se como redes de conhecimento onde algumas representações podem agrupar outras, formando uma hierarquia, ou podem estar estruturadas como uma teia onde os nós de ligação podem ser pensados como peças da informação representada e as ligações entre os nós representam as conexões.

Tal como foi referido anteriormente, Sierpinska (1994) considera as representações como elementos fundamentais para a compreensão, admitindo que estas estão na sua base. Ela identifica três tipos de representações: imagens mentais, representações conceptuais e representações de procedimentos. Os dois primeiros tipos são identificados a partir do trabalho de Ajdukiewicz, onde as imagens mentais abrangem não só o visual, mas também outras experiências dos sentidos como a audição ou o olfacto. Estas imagens podem também basear-se em memórias ou sentimentos como dor, alegria ou tristeza. As representações conceptuais consistem em alguma espécie de definição ou descrição e são por isso essencialmente verbais. O terceiro tipo de representações, representações de procedimentos, surgem com base nas preocupações que a autora demonstra ter em relação ao ensino. Ela considera que a nossa compreensão também pode ser baseada na competência para fazer algo. Para tal ela evoca o que observa quando procura estudar a compreensão da matemática em alunos mais novos. Muitas vezes eles comportam-se como se a sua compreensão estivesse nos seus dedos em vez das suas mentes. A intenção de compreensão parece estar direccionada para a acção imediata com o sentimento de que se espera uma actividade de realização de tarefas. Estas representações baseiam-se nalguma espécie de esquemas de acções designados por procedimentos. Tem que haver no entanto uma componente conceptual nestas representações, pois estes procedimentos servem para manipular objectos abstractos, símbolos, etc., e são suficientemente gerais para poderem ser usados numa diversidade de situações. Sem a componente conceptual eles não poderão ser considerados procedimentos pois não é suficiente a compreensão com base nas semelhanças, famílias ou significados naturais. Podemos, no entanto, considerar que a sua componente conceptual pode ser mais relevante ou menos relevante. Se a componente conceptual for menos relevante então na compreensão o nosso pensamento é direccionado para uma actividade que não podemos expressar de outra forma senão mostrando como se faz. Se ela for mais relevante então o sujeito tem pelo menos um esquema verbalizado da actividade. Usando a categorização de Brunner que pressupõe que as representações podem ser motoras, icónicas e simbólicas, Sierpinska considera que a categoria de representações processuais se pode ligar com a categoria das representações motoras.

A compreensão com base nas representações pode ser, por vezes, considerada como um ambiente de processamento de informação pelo que alguns autores preferem falar de modelos mentais. Sierpinska (1994) considera que estes modelos são construídos com vários objectos que estão relacionados, podendo ser combinados ou decompostos e que ao trabalharmos com eles se vão tornando mais familiares tornando a nossa compreensão mais fácil. No entanto, estes modelos têm a tendência de adquirir na nossa mente um estatuto de verdade absoluta sobre o domínio conceptual que estamos a explorar, pelo que isso pode ser um obstáculo em explorações futuras.

2. Algumas teorias cognitivas relativas à construção dos conceitos matemáticos

Nas duas últimas décadas foram vários os autores que se debruçaram sobre a problemática da construção dos conceitos matemáticos. De entre as várias abordagens será dado especial destaque ao trabalho de David Tall e Shlomo Vinner sobre conceito definição e conceito imagem, bem como as abordagens estrutural e operacional associadas à questão da reificação desenvolvidas por Anna Sfard e ao trabalho de Eddie Gray e David Tall relativo à noção de proceito e à teoria APOS cujo principal impulsionador é Ed Dubinsky.

2.1. Conceito definição e conceito imagem

Neste ponto é apresentada uma visão que permite encarar os conceitos matemáticos com base nas noções de conceito imagem e conceito definição. O seu principal impulsionador é Shlomo Vinner que apresenta uma distinção bastante nítida entre as duas noções, preocupando-se essencialmente com a construção de conceitos matemáticos mais abstractos que são normalmente ensinados no ensino secundário e superior. David Tall é outro autor que tem uma colaboração estreita com Vinner relativamente a esta temática, embora considere que a distinção entre os dois conceitos anteriores não deve ser feita de modo exclusivo, mas antes que o conceito definição deve ser considerado como uma parcela do conceito imagem global que existe na nossa mente.

A formação dos conceitos é um dos tópicos de maior importância na psicologia da aprendizagem e segundo Vinner (1983) há duas dificuldades principais para lidar com esta questão: uma prende-se com a noção do próprio conceito e a outra com a determinação de quando é que um conceito está correctamente formado na mente de alguém. Um modelo explicativo deste processo cognitivo tem por base as noções de *conceito imagem* e *conceito definição*.

Quando vemos ou ouvimos o nome de um conceito ele produz um estímulo, suscitando algo na nossa memória. Normalmente não se trata de uma definição no sentido usual, mesmo que este possua uma definição, mas sim aquilo que Vinner designa por conceito imagem (Tall e Vinner, 1981; Vinner, 1983, 1991). O conceito imagem é assim qualquer coisa não verbal associado na nossa mente ao nome do conceito. Ele pode ser uma representação visual interna do conceito, no caso destes ter representações visuais ou uma colecção de impressões e experiências. As representações visuais, as impressões e experiências associadas ao nome do conceito podem ser traduzidas por formas verbais. No entanto é de salientar que estas formas verbais podem não ser a primeira coisa a ser evocada na nossa mente. Por exemplo ao ouvir a palavra função podemos recordar a expressão $y=f(x)$ ou visualizar o gráfico de uma função, ou podemos pensar em funções específicas como $y=x^2$, $y=cos(x)$, etc. Deveremos ter em consideração que apenas podemos falar de conceito imagem em relação a um indivíduo específico, embora o mesmo indivíduo possa reagir de forma diferente a um mesmo termo em situações diferentes. Tall e Vinner (1981) usaram o termo *conceito imagem evocado* (*evoked concept image*) para descrever a parte da memória recordada num dado contexto. O termo *conceito imagem* é assim usado para descrever a estrutura cognitiva total associada ao conceito e que inclui todas as *imagens mentais*[4], todas as propriedades e todos os processos que lhe estão associados. Ele é construído ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando quando os indivíduos são confrontados com novos estímulos. Por *conceito definição* entende-se a definição verbal que explica o conceito de modo exacto e de uma forma não circular (Vinner, 1983). Esta visão do conceito definição parece ter por base a

[4] Entende-se por imagens mentais o conjunto de todas as imagens que alguma vez foram associadas com o conceito, na mente da pessoa (Vinner, 1983).

abordagem dos conceitos matemáticos que são aprendidos no final do ensino secundário e no ensino superior, onde é possível apresentar uma definição matemática formal para o conceito. É esta definição que é referida por Vinner como fazendo parte do conceito definição, sendo todas as outras representações associadas ao conceito englobadas no conceito imagem. Desta forma assume-se que para adquirir um conceito precisamos formar um conceito imagem do mesmo. O conhecimento da definição não nos garante a compreensão do conceito e para isso precisamos de ter um conceito imagem (Vinner, 1991). Para alguns conceitos possuímos em simultâneo um conceito definição e um conceito imagem, mas em muitos outros isso não acontece. Por exemplo os conceitos de *casa* ou *laranja* não foram adquiridos por meio de uma definição e, no entanto, temos conceitos imagem bastante claros deste tipo de objectos. Alguns conceitos podem, no entanto, ser introduzidos por meio da definição, ajudando esta a formar o conceito imagem. Por exemplo se pretendermos explicar a uma criança o que é uma floresta podemos dizer que se trata de "uma zona onde podemos encontrar muitas árvores juntas", podendo a criança formar um conceito imagem a partir desta definição. No entanto, a partir do momento em que o conceito imagem se forme, a definição pode permanecer inactiva ou mesmo ser esquecida quando manejamos esse conceito. Segundo Vinner (1991) podemos imaginar um andaime onde o papel da definição aparece como suporte para a construção do conceito imagem, que uma vez construído pode dispensar o conceito definição.

Ao utilizar esta formulação Vinner (1983) distingue dois tipos de aprendizagem: informal e formal. Defende que na aprendizagem informal: a) para lidar com os conceitos precisamos de conceitos imagem e não conceitos definição, b) os conceitos definição (quando o conceito é introduzido por meio da definição) podem permanecer inactivos ou mesmo serem esquecidos. Ao pensarmos, o que utilizamos na maior parte das vezes é o conceito imagem. Na aprendizagem formal a situação é diferente e o conceito definição aparece com bastante incidência nos vários níveis de ensino. Estas definições podem ser-nos ensinadas ou construídas por nós próprios quando tentamos explicar o conceito a alguém. As definições feitas por nós são o resultado da nossa experiência com o conceito, podendo ser consideradas como a descrição do nosso conceito imagem. Por sua vez as definições que nos são ensinadas fazem parte de um sistema geral que nem sempre nos é familiar (por exemplo os conceitos matemáticos). Por vezes as definições são introduzidas antes de termos algum conceito imagem esperando-se que a aprendizagem futura preencha esta lacuna. No entanto, se não precisamos das definições, a razão para continuarmos a utilizá-las pode estar na crença de que elas ajudam a formar os conceitos imagem e, por vezes, podem ser úteis para levar a cabo algumas tarefas cognitivas (Vinner, 1983).

A partir da especificação do conceito definição e do conceito imagem, Vinner elabora um modelo explicativo da construção do conhecimento matemático baseado nas relações que se estabelecem entre ambos (Vinner, 1983, 1991). Assim, para cada conceito, assume a existência de duas células diferentes (não necessariamente biológicas) na estrutura cognitiva. Uma célula é para a definição ou definições do conceito e a outra para o conceito imagem. Qualquer destas células, ou mesmo ambas, podem estar vazias. Podemos considerar que a célula do conceito imagem está vazia enquanto nenhum significado for associado com o nome do conceito. Isto acontece em muitas situações onde o conceito definição é memorizado sem que tenha significado para a pessoa. O modelo prevê (figura 2.2) que deve haver uma interacção entre estas duas células embora elas se possam constituir de forma independente.

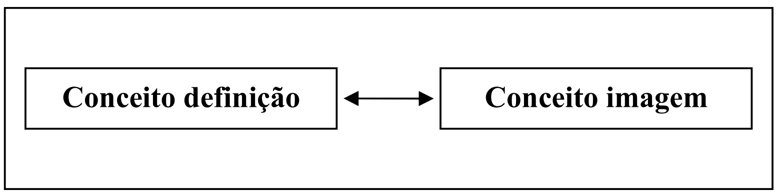


Figura 2.2. Acção recíproca entre conceito imagem e conceito definição.

Para explicar esta interdependência Vinner utiliza um exemplo baseado no sistema de eixos coordenados. Um aluno pode ter um conceito imagem da noção de sistema coordenado que resulta do facto de ter visto muitos gráficos em várias situações. De acordo com este conceito imagem, os dois eixos do sistema coordenado são perpendiculares entre si. Posteriormente, o professor pode definir sistema coordenado como quaisquer duas rectas que se intersectam. Como resultado desta definição podem acontecer três cenários: (1) o conceito imagem pode ser mudado para incluir sistemas coordenados, cujos eixos, por vezes, não formam ângulos rectos (esta é uma reconstrução satisfatória); (2) o conceito imagem pode permanecer tal como estava. A célula da definição poderá conter a definição do professor por algum tempo, mas esta definição poderá ser esquecida ou distorcida com o passar do tempo, e quando o aluno for questionado para definir um sistema coordenado poderá falar de eixos que formam um ângulo recto (este é o caso em que a definição formal não foi bem compreendida); (3) ambas as células podem permanecer tal como estavam. Quando o aluno for questionado para definir um sistema coordenado pode repetir a definição do professor, mas em todas as outras situações pode pensar num sistema coordenado com a configuração de dois eixos perpendiculares.

O mesmo se passa quando um conceito é introduzido por meio da sua definição. A célula do conceito imagem que está inicialmente vazia começa a ser preenchida com os exemplos e explicações que vão sendo dadas. No entanto, ela não reflecte necessariamente todos os aspectos do conceito definição e os cenários acima referidos podem ocorrer nesta situação.

Outro exemplo que pode ilustrar o cenário 2 acima descrito ocorre quando os alunos que estudam o moderno conceito de função afirmam que uma função é uma qualquer correspondência entre dois conjuntos que faz corresponder a cada elemento do primeiro um e um só elemento do segundo. Os alunos podem, no entanto, não admitir que no caso particular da correspondência que atribui a cada número x diferente de zero o seu quadrado, e no caso de x ser zero, atribui o valor -1, seja uma função. Nesta situação o conceito imagem assenta essencialmente em situações em que a correspondência é dada por uma expressão ou obedece a algum padrão que já é familiar ao aluno.

Parece claro que para Vinner o processo de formação dos conceitos assenta numa acção recíproca entre o conceito definição e o conceito imagem. Segundo ele, professores dos vários níveis de ensino, sobretudo no ensino secundário e superior, esperam que o conceito imagem se forme por meio do conceito definição e seja completamente controlado por este (figura 2.3). Este seria o tipo de pensamento que Vinner considera desejável (Vinner, 1983).

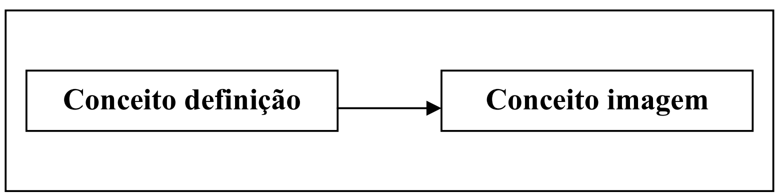


Figura 2.3. Crescimento cognitivo de um conceito formal.

O processo de formação dos conceitos não é único e depende em grande parte do desempenho dos indivíduos. Neste processo Vinner preocupa-se com a forma como o modelo pode integrar algumas actividades matemáticas, como a resolução de problemas ou o desempenho em determinadas tarefas, essencialmente nas que envolvem construção e identificação dos conceitos. Ao colocarmos ao aluno uma tarefa cognitiva as células do conceito imagem e do conceito definição devem ser activadas para proporcionar uma resposta a essa tarefa. Esta actividade pode desencadear várias acções entre as células. Uma dessas acções pode traduzir-se por uma consulta da célula do conceito definição seguida de uma acção recíproca entre ambas (figura 2.4) com o objectivo de proporcionar uma resposta à tarefa.

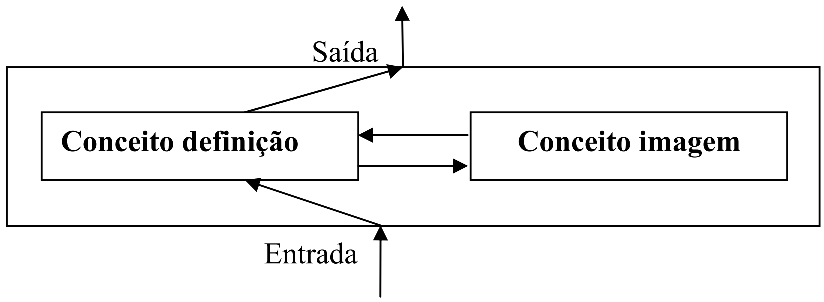


Figura 2.4. Acção recíproca entre definição e imagem.

Outra acção pode resultar apenas numa consulta da célula do conceito definição (figura 2.5).

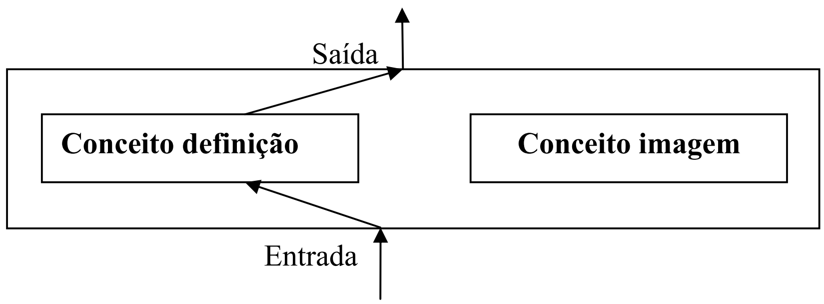


Figura 2.5. Dedução formal pura.

Neste caso o conceito imagem não tem qualquer interferência na resposta e podemos considerar que se trata de um processo cognitivo que assenta numa dedução formal pura. Uma terceira acção que pode ser desencadeada está relacionada com uma consulta da célula do conceito imagem seguida da do conceito definição (figura 2.6). Neste caso estamos perante uma dedução que segue um pensamento intuitivo.

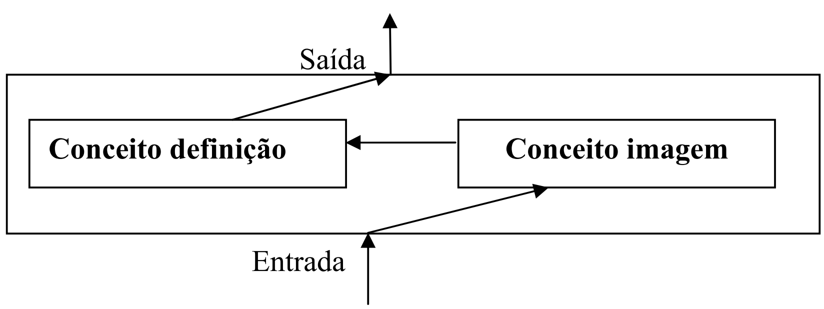


Figura 2.6. Dedução que segue o pensamento intuitivo.

Em nenhum dos casos anteriores é tomada uma decisão sem antes ser consultado o conceito definição.

Vinner (1983) considera que os modelos implicitamente assumidos pelos professores podem ser descritos pelas figuras 2.4 a 2.6. No entanto, argumenta que eles não reflectem a prática uma vez que não temos forma de forçar a estrutura cognitiva a utilizar as definições quer para formar os conceitos imagem, quer para manejar uma tarefa cognitiva. Algumas definições são demasiado complicadas de tratar, não ajudando à criação de conceitos imagem na mente dos alunos. Por outro lado, há definições que podem fazer sentido num dado momento, apoiadas por exemplos específicos, mas a partir da altura em que os alunos formam o seu conceito imagem as definições podem ser esquecidas ou permanecer inactivas.

Assim o modelo para o processo que realmente ocorre na prática baseia-se apenas na consulta do conceito imagem seguido de uma resposta com base neste (figura 2.7) o que proporciona uma resposta intuitiva.

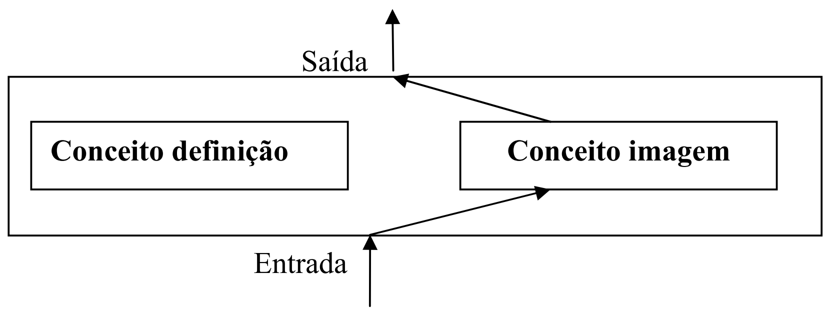


Figura 2.7. Resposta intuitiva.

Numa resposta intuitiva a célula do conceito definição acaba por não ser consultada no processo da resolução de problemas, mesmo que não esteja vazia. Esta tradição baseia-se nos hábitos de todos os dias e no facto de, muitas vezes, ser levada a cabo com sucesso. Para contrariar esta tendência devermos recorrer a problemas não rotineiros onde o conceito imagem seja insuficiente para levar a cabo a resolução dos mesmos.

Outra questão a ter em conta quando trabalhamos com estes conceitos prende-se com a noção de *conceito imagem temporário*. Segundo Vinner (1983), em tarefas intelectuais específicas, por vezes, apenas partes do conceito imagem ou do conceito definição são activadas. Desta forma o conceito imagem ou o conceito definição não podem ser determinados pela simples observação de um comportamento específico, podendo, no entanto, falar-se daquela parte da célula que foi activada. Por exemplo, se pedirmos a alguém para desenhar um quadrilátero tal que ao traçar uma recta seja possível dividi-lo em quatro triângulos, é possível que ela apenas pense em quadriláteros simples, onde os lados não se intersectem. Ao pensar desta forma não vai ser possível dar uma resposta satisfatória à questão, pelo que se pode considerar que o seu conceito imagem temporário não inclui os quadriláteros que apresentam formas mais complexas, embora o seu conceito imagem permanente os possa incluir.

Há ainda um outro fenómeno que pode ocorrer quando consideramos o modelo de Vinner, designado por *compartimentação* (Vinner, Hershkowitz e Bruckeimer, 1981; Vinner e

Dreyfus, 1989). Este fenómeno ocorre quando a pessoa tem dois esquemas diferentes na sua estrutura cognitiva que são potencialmente conflituosos. Por exemplo um aluno pode referir a definição formal de função quando a mesma lhe é pedida, mas, quando está envolvido em tarefas de construção ou identificação, o seu comportamento pode ser baseado no seu conceito imagem de fórmula ou de gráfico. Este comportamento inconsistente pode ser considerado um caso específico de compartimentação. Pode acontecer que, por vezes, uma dada situação não estimule o esquema mais relevante acabando por ser activado um outro menos relevante. Por exemplo, os alunos podem usar a definição formal de função e aceitar que certas correspondências descontínuas são funções, mas quando se pede uma justificação, não usam a definição, argumentando apenas que se trata de uma função descontínua (Vinner e Dreyfus, 1989).

Dada a ênfase que é colocada na definição, nomeadamente no ensino de conceitos matemáticos avançados, Vinner (1991) considera que devemos ter em conta algumas regras didácticas: a) evitar, aos alunos, conflitos cognitivos desnecessários e b) iniciar os conflitos cognitivos apenas quando for necessário motivar os alunos para um estado intelectual mais elevado. (Isto deve ser feito apenas quando a possibilidade de alcançar um estado intelectual mais elevado seja razoavelmente alta). Segundo ele uma das metas do ensino deve ser a mudança dos hábitos de pensamento do modo quotidiano (menos técnico) para o modo técnico. Os conceitos matemáticos devem ser adquiridos pelo primeiro modo devendo a formação dos conceitos começar com vários exemplos e contra exemplos pelo meio dos quais o conceito imagem poderá ser formado. No caso de os alunos estarem a entrar no estudo de conceitos mais avançados a definição deve ser introduzida como o último critério das várias tarefas matemáticas. Estas definições devem ser discutidas e os alunos treinados para as usar correctamente e apenas devem ser utilizadas se as tarefas não puderem ser resolvidas correctamente referindo-se somente aos conceitos imagem. Devem, no entanto, ser tidos em conta os conflitos entre o conceito imagem e a definição formal.

Os termos conceito definição e conceito imagem são centrais na explicação do processo cognitivo da formação dos conceitos para Vinner. Tall também recorre a estes termos, nomeadamente em 1981 quando se viu confrontado com uma grande quantidade de dados recolhidos junto de alunos universitários, procurando uma explicação que fosse para além de uma abordagem puramente matemática. Há, no entanto, algumas diferenças na forma como os termos são abordados por Tall o que revela uma concepção dos objectos matemáticos diferente da apresentada por Vinner. Segundo o primeiro (Tall, 2003), para Vinner, o conceito imagem é uma experiência mental do investigador ao procurar analisar o que acontece quando os alunos se focam de formas diferentes nas imagens e nas definições, podendo induzir-se que para ele a *mente* está separada do *cérebro*. É neste contexto que ele define a existência de células diferentes na estrutura cognitiva que servem de base ao seu modelo de formação dos conceitos. Para Tall a mente é pensada como a forma como o cérebro trabalha, pelo que ela é uma parte indivisível da estrutura do cérebro. Assim, em vez de uma separação entre conceito definição e conceito imagem, como proposto por Vinner, Tall considera que o conceito definição não é mais do que uma parcela do conceito imagem total que existe na nossa mente. Assim, para ele, o conceito imagem descreve a estrutura cognitiva total que é associada ao conceito, formulação muito próxima da explicitada anteriormente, enquanto que o conceito definição adquire um estatuto que não se cinge apenas à definição formal tal como ela é concebida pelos matemáticos. Tall remete a sua abordagem para um texto de 1981 onde ele e Vinner referem o conceito definição como sendo a forma das palavras usadas para especificar o conceito (Tall e Vinner, 1981), mas onde este pode ser aprendido pelo indivíduo de uma forma rotineira ou de um modo mais significante, sendo assim relacionado em maior ou menor grau com o conceito global em estudo. Pode ainda ser uma reconstrução pessoal da definição por parte do indivíduo, assumindo a forma das palavras que ele usa para transmitir a explicação do seu conceito imagem evocado. Quer o conceito definição seja dado ao indivíduo quer seja construído por ele próprio pode variar ao longo do tempo. Desta forma o conceito definição *pessoal* pode diferir do conceito definição formal cuja característica principal é a de ser aceite pela comunidade de matemáticos. Assim, para cada indivíduo, o conceito definição gera o seu próprio conceito imagem, pelo que Tall e Vinner consideram ser possível falar de *imagem do conceito definição* e, portanto, este pode ser considerado uma parte do conceito imagem. Para alguns indivíduos ele pode não existir ou estar vazio. Para outros ele pode ou não ser coerentemente relacionado com as outras partes do conceito imagem. Por exemplo, o conceito definição de uma função em Matemática pode considerado como "uma relação entre dois conjuntos A e B em que cada elemento de A está relacionado com um e um só elemento de B". Mas os alunos que estudaram funções podem ou não lembrar-se do conceito definição e o conceito imagem pode incluir muitos outros aspectos, como por exemplo que a função pode ser dada por uma regra ou fórmula, que em diferentes partes do domínio podem aparecer várias fórmulas, que a função pode ser representada pelo seu gráfico ou tabela de valores, etc. Estes vários aspectos podem fazer ou não parte do conceito imagem do aluno.

A abordagem de Vinner e Tall são essencialmente conduzidas por preocupações de ordem pedagógica, pelo que admitem que a formação do conceito imagem pode também ser fruto do tipo de ensino ministrado. Por exemplo, o professor pode dar a definição formal e trabalhar com ela durante algum tempo, mas posteriormente passar bastante tempo com exemplos que são sempre dados por fórmulas. Neste caso o conceito imagem pode desenvolver uma noção mais restrita, apenas envolvendo fórmulas, enquanto que o conceito definição permanece inactivo na mente do aluno. Ele pode operar de forma satisfatória com esta noção restrita e pode até mesmo dar respostas com o conceito definição formal correcto enquanto que o seu conceito imagem permanece inapropriado.

Nos conceitos, em geral, é possível encontrar partes do conceito imagem que entram em conflito com o conceito definição formal. Estes conflitos podem ou não ser conscientes e podem causar dificuldades ao lidar com conceitos mais formais. A parte do conceito imagem ou conceito definição que pode entrar em conflito com outra parte do conceito imagem ou conceito definição é referida por Tall e Vinner (1981) como sendo um *factor de conflito potencial*. Os autores consideram que estes factores nunca devem ser invocados em circunstâncias que causem conflitos cognitivos actuais (no momento), mas se eles forem evocados os factores daí resultantes poderão ser chamados *factores de conflito cognitivo*. Por exemplo a definição de número complexo $x+iy$ como um par ordenado de números reais (x,y) e a identificação de $x+i0=(x,0)$ como o número real x é um factor de conflito potencial no conceito de número complexo. Isto acontece porque ele inclui um conflito potencial com a noção formal de que o elemento x é distinto do par ordenado $(x,0)$. Tall (1977) verificou através de um questionário que os alunos vêem o número real $\sqrt{2}$ como não sendo um número complexo e, no entanto, vários destes alunos definiram números reais como sendo "números complexos com parte imaginária zero". Nesta situação $\sqrt{2}$ é visto como um número real e $\sqrt{2}+i0$ como complexo. Eles são considerados como sendo entidades distintas ou a mesma, dependendo das circunstâncias, sem causar nenhum conflito cognitivo. Apenas se tornam factores de conflito cognitivo quando evocados em simultâneo.

Nalguns casos os factores de conflito cognitivo podem manifestar-se apenas no subconsciente causando uma situação de constrangimento quando o conceito é utilizado, podendo, ao fim de algum tempo, ser encontrada a razão para que o conflito seja compreendido conscientemente. Há, no entanto, outras situações onde os potenciais factores de conflito são mais sérios que, segundo Tall e Vinner, são aqueles onde o conceito imagem está em desacordo não com outra parte do conceito imagem, mas sim com o próprio conceito definição formal. Tais factores podem impedir a aprendizagem da teoria formal, pelo que eles não podem vir a ser factores de conflito cognitivo actuais a menos que o conceito definição formal desenvolva um conceito imagem que possa, por sua vez, produzir um conflito cognitivo. Os alunos que tenham este factor de conflito cognitivo potencial no seu conceito imagem podem estar seguros nas suas próprias interpretações das noções em causa e ver a teoria formal simplesmente como inoperativa ou supérflua. Estes tipos de conflitos poderão ser encontrados nalguns exemplos descritos no próximo capítulo, aquando da apresentação de alguns resultados da investigação de conceitos matemáticos relativos ao ensino superior, como por exemplo os que envolvem as noções de limite e continuidade.

2.2. A dupla natureza dos conceitos matemáticos e a teoria da reificação.

Nesta secção, parte-se do trabalho de Anna Sfard, e pretende-se traçar um quadro teórico que permite investigar a forma como podemos conceber os conceitos matemáticos, usando uma visão ontológico-psicológica. A partir da análise de diferentes representações e definições matemáticas pode concluir-se que as noções abstractas podem ser concebidas de duas formas fundamentalmente diferentes: *estruturalmente*, como objectos, e *operacionalmente*, como processos (Sfard, 1987, 1991, 1992; Sfard e Linchevki, 1994). Estas duas abordagens embora ostensivamente incompatíveis, são complementares. Vai ser possível mostrar que os processos de aprendizagem podem ser explicados com base numa inter-relação entre as concepções operacional e estrutural das mesmas noções. Com base em exemplos históricos e à luz de algumas teorias cognitivas Sfard vai mostrar que a concepção operacional é normalmente o primeiro passo na aquisição de novas noções matemáticas. Através da análise dos estádios da formação dos conceitos conclui que a transição do modo operacional para os objectos abstractos é um processo longo e difícil composto pelas fases de *interiorização*, *condensação* e *reificação* que serão abordadas em pormenor mais adiante.

O ponto de partida para o desenvolvimento desta perspectiva parece prender-se com preocupações de natureza educacional onde há uma tomada de consciência das dificuldades dos alunos em lidar com o processo de abstracção dos conceitos matemáticos (Sfard, 1987, 1989, 1991, 1992; Sfard e Linchevski, 1994). Reflectindo sobre estas dificuldades, Sfard admite que elas possam estar relacionadas com a génese dos próprios objectos matemáticos, comentando que pela sua inacessibilidade a Matemática parece ultrapassar todas as outras disciplinas científicas e portanto tem que haver algo de especial e único envolvido neste tipo de pensamento (Sfard, 1991). Para compreender este fenómeno ela considera que há uma questão fundamental que deve ser colocada: "como é que a abstracção matemática difere dos outros tipos de abstracção na sua natureza, na forma como se desenvolve e nas suas funções e aplicações?".

Na tentativa de responder a esta questão a autora avança no sentido de uma teoria que envolva em simultâneo a Filosofia e a Psicologia da Matemática, que dê a mesma atenção à matemática em pensamento e à matemática pensada, ambas como processo e produto. Para isso ela vai procurar "um *insight* filosófico sobre a natureza dos conceitos matemáticos" (Sfard, 1991, p. 2), analisando os discursos dos matemáticos na viragem dos séculos XIX-XX relativos aos problemas fundamentais sobre a natureza do pensamento matemático e "compreender com profundidade os processos psicológicos no seio dos quais tais processos emergem" (p. 2) usando para tal a epistemologia genética piagetiana. É neste contexto que a autora considera estar perante uma perspectiva ontológico-psicológica, pois tenta abordar em simultâneo a natureza das entidades matemáticas – aspecto ontológico – a forma como estas são compreendidas pelo indivíduo – aspecto psicológico.

O facto de se usar as duas perspectivas anteriores permite conduzir a constructos matemáticos que podem ser referidos por palavras diferentes consoante a perspectiva assumida num dado momento. Assim, segundo Sfard, a palavra *conceito* (concept) – por vezes substituída por *noção* (notion) – deve ser usada sempre que se pretende expressar a sua forma "oficial" – como um constructo teórico no universo do conhecimento ideal, enquanto que a palavra *concepção* (conception) representa o grupo completo de representações e associações evocadas pelo conceito – sendo o duplicado dos conceitos no universo interno e subjectivo do conhecer humano.

Se olharmos para o mundo da matemática tal como ele se expressa através das suas representações e descrições formais, ele aparece povoado por certos objectos matemáticos que têm traços bem determinados e estão sujeitos a processos governados por leis bem definidas. Os matemáticos descrevem propriedades de conjuntos e números, tal como um cientista apresenta a estrutura das moléculas ou dos cristais. Sfard (1991) considera no entanto que, ao contrário do cientista, os constructos matemáticos avançados são totalmente inacessíveis aos nossos sentidos (apenas podem ser vistos pelos olhos da mente). Assim, quando desenhamos uma função ou escrevemos um número estamos a realçar que o signo no papel não é mais do que uma das muitas representações possíveis daquela entidade abstracta que por si só não pode ser vista nem tocada. A possibilidade de alguém ser capaz de ver estes objectos invisíveis parece ser uma componente essencial da capacidade matemática, enquanto que a falta desta capacidade pode ser uma das principais razões para que a matemática pareça praticamente impermeável para muitas "mentes bem formadas" (Sfard, 1991, p. 3). Este tipo de concepção, que parece prevalecer na matemática actual, é designada pela autora como *concepção estrutural* e assenta na capacidade de ver uma entidade matemática como um objecto, o que significa ser capaz de o referir como se ele fosse uma coisa real – uma estrutura estática que existe algures no espaço e no tempo. Ela pode ser, também, caracterizada pelo facto de permitir reconhecer a ideia num ápice e de a manipular como um todo, sem entrar em detalhes.

Esta não é no entanto a única forma de conceber as noções matemáticas. Por vezes, é possível encontrar definições em livros de texto que revelam uma abordagem bastante diferente. Por exemplo, em vez de definir uma função como um conjunto de pares ordenados, ela aparece ligada a um certo processo computacional ou como um método de obter um sistema de outro. Este tipo de abordagem refere-se essencialmente a *processos*, *algoritmos* e *acções* reflectindo uma *concepção operacional* da noção (Sfard, 1991). Assim, interpretar a noção como um processo implica olhá-la como uma entidade potencial que se manifesta através de uma sequência de acções. Temos assim que, enquanto a concepção estrutural é estática, instantânea e integrativa, a operacional é dinâmica, sequencial e detalhada. Apesar das diferenças entre as duas concepções a autora considera que elas não são mutuamente exclusivas. Embora ostensivamente incompatíveis, elas são de facto complementares e indispensáveis para uma compreensão profunda da Matemática.

São vários os exemplos de noções matemáticas onde é possível verificar a coexistência das duas concepções, como se pode ver no quadro 2.1.

Quadro 2.1. Exemplos de noções matemáticas do tipo estrutural e operacional.

Tópico matemático	**Concepção estrutural**	**Concepção operacional**
Função	Conjunto de pares ordenados (à la Bourbaki)	Processo computacional ou um método bem definido de obter um sistema a partir de um outro (Skemp, 1971)
Simetria	Propriedade de uma figura geométrica	Transformação de uma figura geométrica
Número natural	Propriedade de um conjunto ou a classe de todos os conjuntos com a mesma cardinalidade finita	0 (zero) ou qualquer número que resulte da adição de um com um número natural (contar)
Número racional	Par de inteiros (um elemento de um conjunto de pares especialmente definido)	Divisão de inteiros
Circunferência	O conjunto de todos os pontos equidistantes de um dado ponto	Rotação de um compasso em torno de um ponto fixo

Nota: Adaptado de Sfard (1991, p. 5).

Esta dualidade das noções matemáticas pode ser vista não apenas nas descrições verbais, mas sobretudo através dos vários tipos de representações simbólicas, onde algumas parecem ser mais susceptíveis de interpretação estrutural que outras. Tomando como exemplo a função

$y = 3x^4$ (figura 2.8) podemos ver que três representações distintas podem conduzir a abordagens bastante diferentes. O programa de computador corresponde a uma concepção operacional uma vez que apresenta a função como um processo computacional.

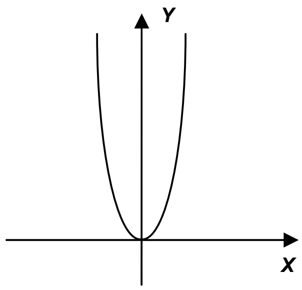
Gráfico	Expressão algébrica	Programa de computador
	$y = 3x^4$	10 INPUT X 20 Y = 1 30 FOR I = 1 TO 4 40 Y = Y * X 50 NEXT I 60 Y = 3 * Y

Figura 2.8. Diferentes representações de uma função (adaptado de Sfard, 1991, p. 6).

A representação gráfica parece corresponder a uma abordagem estrutural, pois há uma infinidade de componentes da função que aparecem combinadas numa linha regular podendo ser interpretadas como um todo integrado. A representação algébrica pode ser interpretada de ambas as formas, como operacional pelo facto de poder descrever de forma concisa determinados cálculos ou como estrutural se pensarmos numa relação estática entre duas magnitudes.

Comparando estas duas concepções com outras utilizadas por autores como por exemplo Clements, Bishop, Eisenberg ou Dreyfus (onde o processamento mental do conhecimento pode levar a que os conceitos matemáticos, nalgumas ocasiões sejam entendidos com base em *imagens mentais*, enquanto que noutras as mesmas ideias são manejadas com base na sua *representação verbal*), Sfard considera que, por exemplo, a abordagem dos conceitos com base em *imagens mentais* apresenta uma estrutura próxima da concepção estrutural. Estas imagens são de alguma forma compactas e integrativas e podem ser manipuladas como objectos reais. Elas preservam a sua identidade e significado mesmo quando observadas de diferentes pontos de vista e em contextos diferentes. Já no que se refere às representações verbais elas devem ser processadas de forma sequencial sendo mais apropriadas para representar procedimentos computacionais. Assim as representações internas não pictoriais parecem ser mais pertinentes para um modo de pensamento operacional.

Segundo Sfard (1991) é possível encontrar na literatura um vasto conjunto de dicotomias na caracterização do universo matemático: para Halamos a matemática pode ser *abstracta* ou *algorítmica*, para Anderson pode ser *declarativa* ou *processual*, para Henrici é *dialéctica* ou *algorítmica*, Piaget faz distinção entre *figurativa* e *operativa*, Skemp distingue entre *instrumental* e *relacional*, etc. A divisão entre *estrutural* e *operacional* feita por Sfard apresenta duas características que a distinguem das anteriores: a sua natureza ontológico-psicológica combinada e a sua complementaridade. Assim, as vantagens desta abordagem estão (a) no facto de ela se focar na natureza das entidades matemáticas (resultado ontológico) tal como são percebidas pelo indivíduo (perspectiva psicológica) e (b) contrariamente às distinções feitas pelos outros autores, em vez de decompor o conhecimento em componentes separadas, tenta uma abordagem onde prevalece a complementaridade das duas perspectivas. É neste sentido que Sfard prefere falar de *dualidade* em vez de *dicotomia*, quando se refere às concepções estrutural e operacional.

Quando falamos sobre objectos matemáticos devemos ser capazes de lidar com produtos de alguns processos sem estarmos preocupados com os próprios processos. Esta capacidade parece apontar no sentido de que a abordagem estrutural deve ser vista como um estado mais avançado do desenvolvimento dos conceitos. É a partir da análise histórica da formação de alguns conceitos matemáticos que Sfard vai defender a conjectura de que a concepção operacional deve preceder a estrutural. Tomando como exemplo a noção de número, a autora mostra a existência da concepção operacional muito antes da sua concepção estrutural ter sido estabelecida. A figura 2.9 sintetiza a evolução histórica da noção de número como um processo cíclico em que a mesma sequência de acontecimentos pode ser observada repetidas vezes, dando origem a um novo tipo de número. Os segmentos recorrentes representam um processo mais ou menos lento que é composto de três fases (Sfard, 1991):

(1) um estádio pré-conceptual onde os matemáticos estão a usar certas operações sobre os números já conhecidos, onde as manipulações rotineiras são apenas tratadas como processos;

(2) um longo período com uma abordagem predominantemente operacional, durante a qual um novo tipo de número começa a emergir fora dos processos familiares. Neste estádio é introduzido um nome para o novo número, que não passa de um nome fictício para realizar certas operações em vez de ter o significado de um objecto "real";

(3) a fase estrutural, quando o número em questão é eventualmente aceite como um objecto matemático acabado.

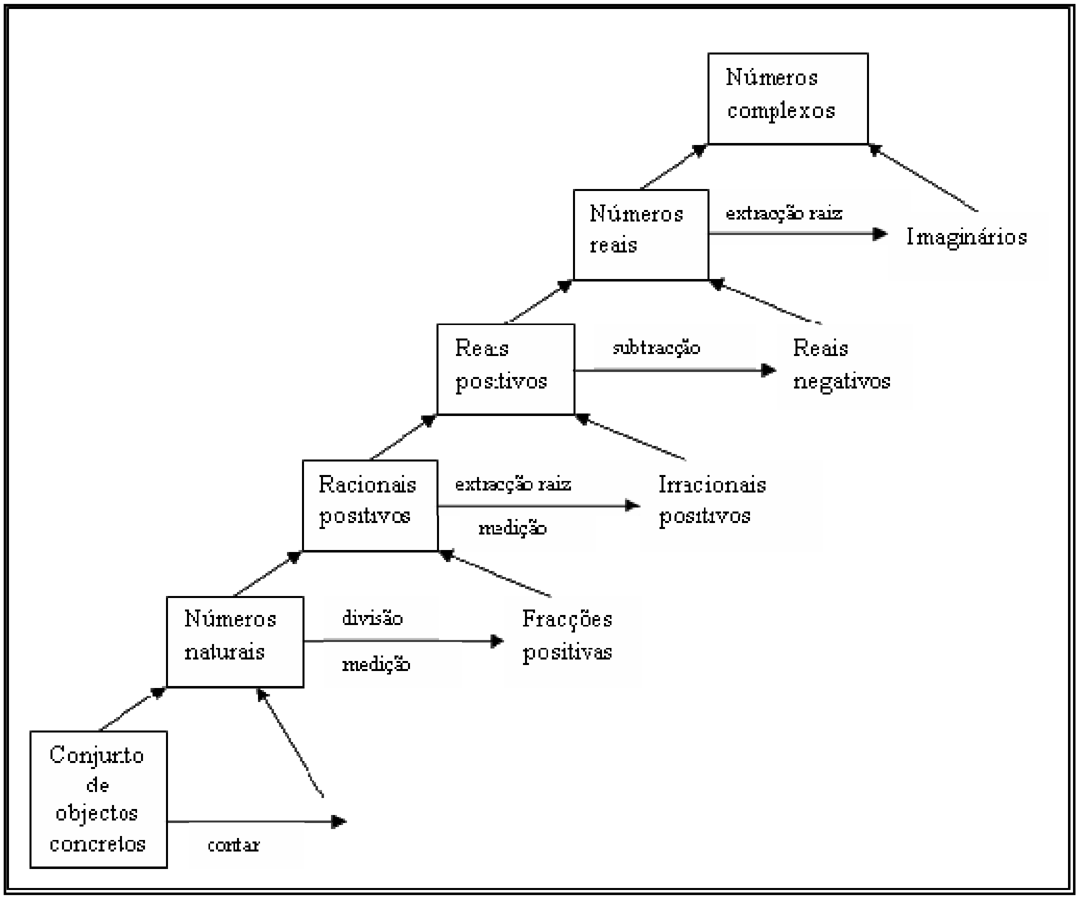


Figura 2.9. Desenvolvimento do conceito de número segundo Sfard (1991, p. 13).

Em resumo, a história dos números pode ser interpretada como uma cadeia de transições das concepções operacionais para as estruturais. Os processos realizados sobre determinados objectos abstractos vão-se convertendo num todo compacto, (ou *reificados* como veremos adiante), para se tornarem num novo tipo de constructos estáticos independentes. Para Sfard este tipo de modelo pode ser aplicado a muitas outras ideias matemáticas.

Não obstante esta tendência para conceber os objectos matemáticos a autora faz uma ressalva para o caso da Geometria. Aqui as representações gráficas estáticas aparecem de uma forma mais natural que qualquer outra representação, podendo provavelmente ser concebidas estruturalmente mesmo antes de tomar consciência de descrições processuais alternativas. Tomando como exemplo o caso da circunferência, ela pode ser inicialmente introduzida com base em formas aproximadamente redondas, no entanto, Sfard considera que a partir do momento em há uma lei para esta forma (o algoritmo para obter a circunferência) na mente, o indivíduo é capaz de expressar a propriedade de uma nova forma. Embora este cenário seja menos favorável, historicamente a maioria dos conceitos matemáticos parece seguir o modelo de uma concepção operacional a anteceder a sua concepção estrutural.

A partir da perspectiva histórica parece destacar-se o facto de a formação da concepção estrutural ser um processo lento e bastante difícil, pelo que devem ser analisadas as fontes de tais dificuldades. Assim deve também ter-se em atenção o ponto de vista psicológico, ou seja, se quando uma pessoa se familiariza com uma nova noção matemática a concepção operacional continua a ser a primeira a ser desenvolvida. Sfard considera que aquilo que é possível observar através da perspectiva histórica também pode ser usado para descrever o processo de aprendizagem.

Esta abordagem pode, no entanto, levantar algumas objecções que, segundo Sfard (1991), devem ser esclarecidas antes de apresentar a perspectiva psicológica do modelo de formação dos conceitos. A primeira objecção prende-se com o facto de, com base na perspectiva histórica, parecer haver um curso natural de acontecimentos nos processos que dificilmente pode ser entendido como espontâneo. A aprendizagem da Matemática, sobretudo nos níveis mais avançados, parece ter lugar a partir da intervenção externa (do professor, do livro) e por isso ser dependente deste tipo de estímulos. Assim, do ponto de vista psicológico considerar que o operacional deve vir antes do estrutural pode ser entendido como uma mera prescrição para o ensino. Sfard considera no entanto que o modelo que propõe se baseia na suposição de que no processo de aprendizagem podem ser identificadas algumas características constantes que são mais ou menos imunes aos estímulos externos. A precedência da concepção operacional sobre a estrutural é vista como uma dessas invariantes. A segunda objecção que pode ser feita está relacionada com o facto de o modelo de aquisição dos conceitos poder ser visto como uma mera projecção da história sobre a psicologia. São no entanto vários os autores que defendem a origem operacional das noções matemáticas sem qualquer referência à história. Por outro lado, considerando que a abordagem estrutural é mais abstracta que a operacional, e se, do ponto de vista filosófico, os números não são basicamente mais do que processos ou se fazer coisas é a única forma de alguém "estar em contacto" com constructos abstractos, então devemos esperar que para chegar a uma concepção estrutural é necessário previamente ter uma compreensão operacional.

O processo da formação dos conceitos, baseado na perspectiva do desenvolvimento histórico, surge assim composto por três estádios que correspondem a três graus de estruturação crescente: *interiorização*, *condensação* e *reificação*, como esquematizado na figura 2.10 (Sfard, 1991).

No estádio de *interiorização* o indivíduo familiariza-se com os processos que eventualmente vão dar origem a um novo conceito. Por exemplo podemos considerar o processo de contar que conduz aos números naturais, a subtracção como forma de levar aos números negativos ou a manipulação algébrica que pode levar às funções. Estes processos e operações são realizados sobre objectos matemáticos de nível inferior e gradualmente o indivíduo vai ficando perito na sua realização. No caso dos números negativos será o estádio em que o indivíduo realiza subtracções com destreza. No caso dos números complexos será quando ele conseguir adquirir uma alta competência no uso de raízes quadradas.

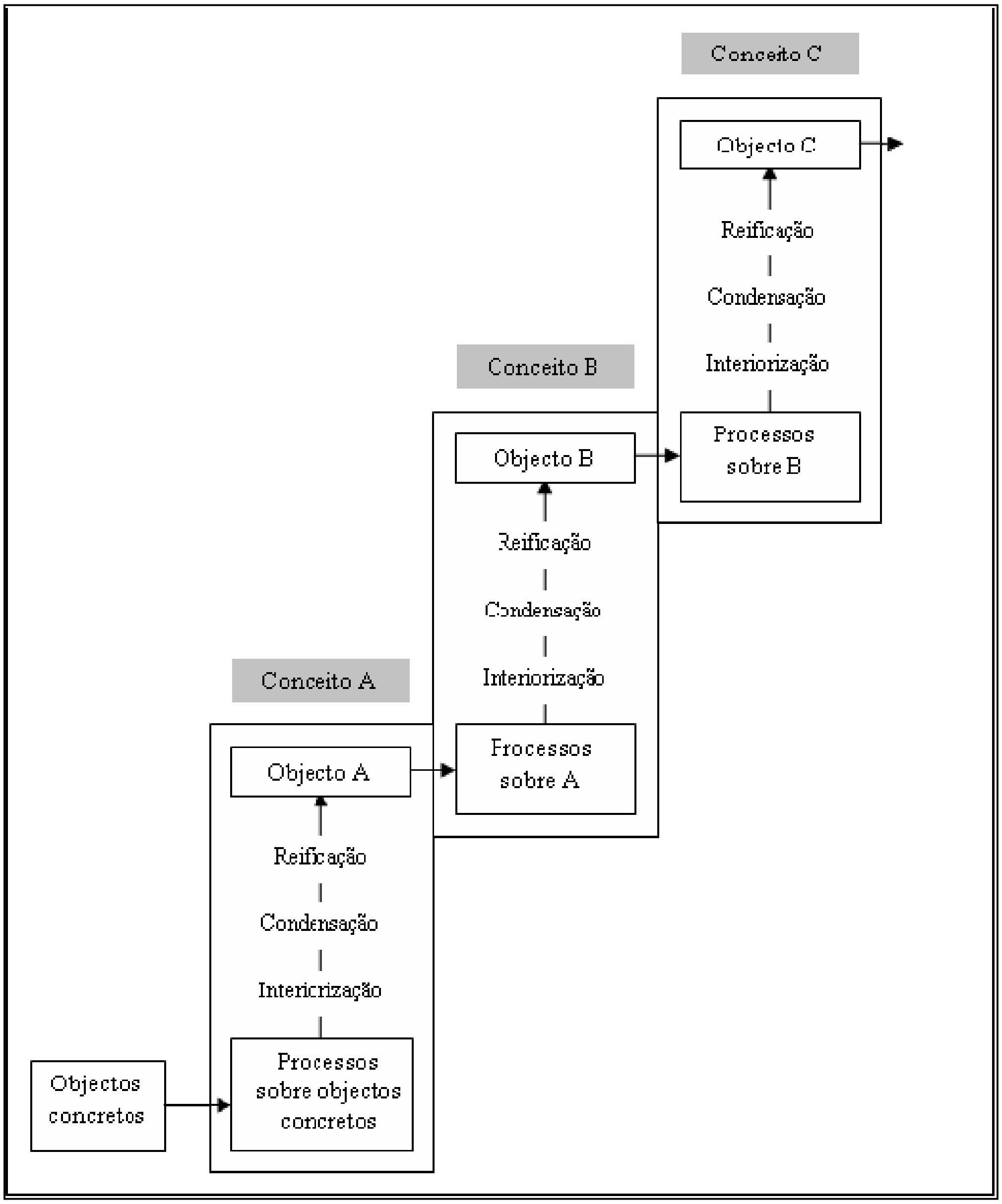


Figura 2.10. Modelo de formação dos conceitos (Sfard, 1991, p. 22).

A fase da *condensação* é um período de compressão de longas sequências de operações em unidades mais fáceis de manejar. Os indivíduos mostram-se cada vez mais capazes de pensar sobre um dado processo como um todo sem sentirem necessidade de entrar em detalhes. É nesta fase que podemos considerar que nascem os novos conceitos. Graças à condensação podemos considerar que a combinação entre vários processos, a realização de comparações e a generalização se tornam muito mais fáceis. O progresso neste estádio pode manifestar-se por vezes na facilidade em alternar entre as diferentes representações do conceito. No caso dos números negativos a condensação pode ser manifestada por exemplo na habilidade dos alunos em realizarem manipulações aritméticas tais como adicionar ou multiplicar números negativos e positivos.

A fase da condensação dura enquanto a nova entidade permanecer firmemente ligada a um determinado processo. Apenas quando a pessoa for capaz de conceber a noção como um objecto acabado é que podemos dizer que o conceito foi reificado. A *reificação* refere-se à súbita capacidade para ver algo familiar de uma forma totalmente nova. O indivíduo consegue subitamente ver uma nova entidade matemática como um objecto completo e autónomo com significado próprio. Assim, enquanto a interiorização e a condensação são mudanças graduais e quantitativas a reificação é um salto instantâneo: o processo solidifica num objecto, numa estrutura estática. A nova entidade é rapidamente desligada do processo que lhe deu origem e começa a adquirir o seu significado pelo facto de pertencer a uma determinada categoria. Este estádio é também o ponto onde começa a interiorização de conceitos de nível superior. Por exemplo no caso dos números negativos a reificação reside no facto de o indivíduo ser capaz de os tratar como um subconjunto do anel dos inteiros (sem necessariamente ter consciência da definição formal de anel). No caso das funções a reificação pode ser evidenciada pela capacidade em resolver equações em que as incógnitas são funções (equações diferenciais, equações com parâmetros), pela disponibilidade em falar sobre propriedades gerais de diferentes processos que podem ser realizados sobre funções (composição, inversão) ou admitir que o cálculo não é uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que são vistos como funções. Pela forma como o modelo é apresentado deve ser entendido como uma hierarquia, o que implica que um estádio não pode ser atingido antes de todos os passos anteriores serem dados (figura 2.10).

O desenvolvimento deste modelo é influenciado pelo ensino. De entre as várias condições que possam advir desse processo, há uma que Sfard considera como essencial, que é o papel potencial dos nomes, símbolos, gráficos e outras representações nas fases da condensação e reificação. Por exemplo a introdução da recta real pode ser vista como fulcral para a reificação dos números negativos ou a utilização do plano de Argand pode ser vista como um passo decisivo para tornar os números complexos em objectos matemáticos legítimos (Sfard, 1991).

Uma questão importante que se coloca, quer na identificação dos vários estádios propostos no modelo de Sfard, quer na utilização do mesmo para analisar dados empíricos prende-se com o facto de estarmos a lidar com as crenças implícitas dos alunos sobre a natureza dos objectos matemáticos. Como não podemos investigar o problema de forma directa, será necessário recorrer às características externas manifestadas pelos comportamentos, atitudes e capacidades dos alunos. O resultado desta abordagem pode assim servir como uma ferramenta de diagnóstico ou mesmo de medida da habilidade dos alunos para pensarem estruturalmente sobre um dado conceito (Sfard, 1991, 1992).

O modelo de formação dos conceitos acima descrito implica que certas noções matemáticas devem ser consideradas como completamente desenvolvidas apenas quando puderem ser concebidas quer operacional quer estruturalmente. No entanto, é possível manipular e apresentar todas as noções matemáticas, teoremas e demonstrações de uma forma puramente operacional. Assim sendo, parece legítimo colocar a questão se de facto há necessidade de recorrer a uma concepção estrutural.

Uma das maneiras de abordar esta questão pode ser com base na forma como a informação matemática é processada na mente. Como já foi referido anteriormente a complementaridade das duas concepções é importante. Na resolução de um problema matemático complexo o indivíduo pode precisar de mudar frequentemente de um modo de pensamento para o outro (Sfard, 1987). A abordagem operacional é indispensável para encontrar respostas concretas para as questões matemáticas, mas pode formar longas cadeias de informação que, por sua vez, ocupam uma grande quantidade de memória. A abordagem estrutural permite transformar estas cadeias em unidades mais compactas facilitando grandemente o esforço cognitivo. A combinação destes vários procedimentos e o seu uso na resolução de problemas pode facilitar significativamente a compreensão de uma dada tarefa. Os objectos abstractos estão para os processos assim como as imagens e símbolos estão para as descrições verbais: são meios para compreender grandes quantidades de dados num ápice (Sfard, 1992). Se o indivíduo compreender os objectos matemáticos na sua plenitude será capaz de lidar com novas situações problemáticas, podendo mesmo considerar-se que é a concepção estrutural que torna todos os processos cognitivos realmente efectivos.

Por outro lado um decréscimo do esforço cognitivo acompanhado por um aumento da eficácia na resolução de problemas traduz-se num sentimento de incremento de competência e de compreensão, pelo que podemos considerar que os objectos abstractos tornam certos processos matemáticos mais significativos. Assim sendo, embora o indivíduo seja capaz de compor e decompor funções usando apenas uma abordagem operacional, ele vai provavelmente sentir-se mais competente se puder pensar na tarefa em termos estruturais (Sfard, 1992).

Outra visão mais geral pode ser baseada no trabalho de Lakoff e Johnson (1980) a partir do qual podemos imaginar os objectos matemáticos como exemplos típicos da grande colecção de metáforas que predominam no nosso sistema conceptual. O recurso frequente a metáforas pode ser explicado pelo facto de muitos dos conceitos importantes que usamos serem abstractos ou não estarem claramente delineados na nossa experiência pelo que precisamos de agarrar o seu significado por meio de outros conceitos que compreendemos de forma clara. Isto implica que os objectos matemáticos são as nossas ferramentas para colocar sentido e ordem no conhecimento matemático (Sfard, 1992).

De uma forma metafórica Sfard (1992) admite que o indivíduo para conhecer precisa de se apoiar em objectos matemáticos sólidos para realizar com segurança as suas acções. Sem a capacidade de pensar estruturalmente pode sentir-se perdido, pois pode ter que fazer manipulações em algo que não conhece, uma vez que, do seu ponto de vista, os objectos em questão não existem. Por exemplo, para um aluno em que o termo "função" não se refira a um objecto abstracto bem definido na sua mente, pode ser difícil responder a questões como "Quais as soluções da equação (funcional) $f(x+y)=f(x)\times f(y)$". Sfard considera que esta questão tem um nível de respostas satisfatórias bastante reduzido entre os alunos do ensino secundário.

A partir de vários estudos, Sfard considera que a reificação pode ser encarada como um processo bastante difícil de realizar e procura alguns dos possíveis problemas que estão na origem dessas dificuldades. O primeiro problema prende-se com as concessões semânticas que é necessário fazer para possibilitar a reificação. Muitas vezes os novos objectos abstractos surgem como generalizações de algumas ideias bastante claras que podem ser interpretadas em termos de processos familiares. Por exemplo a criação dos números racionais, irracionais e negativos foi sucessivamente alargando o conceito de número. Nesta transição algumas das propriedades iniciais do conceito foram-se perdendo à medida que ele se tornava mais restrito. Ou seja, quando nos movemos no sentido de hierarquizar as noções matemáticas algumas propriedades iniciais dos objectos podem deixar de ser aceites ou, por vezes, conduzem mesmo a contradições no esquema interpretativo. O que acontece é que estas concessões inevitáveis são, por vezes, bastante difíceis de fazer. Assim, o que deve ser destacado ao passar de um objecto matemático para a sua versão mais avançada deve ser o verdadeiro processo que, até então, era a principal fonte do seu significado, tendo como resultado a característica principal daquilo que era o atributo essencial do conceito em questão.

O segundo problema relativo à dificuldade de reificação revela-se mais preocupante, segundo Sfard, e refere-se a um círculo vicioso inerente ao próprio processo – uma discrepância aparente entre duas condições que parecem ser necessárias para que um novo objecto possa nascer. Por um lado parece que a reificação deve preceder qualquer menção a manipulações de nível superior – as manipulações a serem executadas no conceito em questão. Assim, enquanto os objectos de nível inferior não estiverem disponíveis, os processos de nível superior não podem ser realizados por falta de uma entrada. Por outro lado, antes de surgir a necessidade real de considerar os processos de nível inferior como objectos acabados, o aluno pode não ter motivação para considerar a existência de "coisas" novas inatingíveis, especialmente se o novo objecto for de tal forma distante da intuição (contra-intuitivo) como por exemplo o caso de um número que não responde à questão "quanto" ou uma função que não obedece a nenhum lei bem definida. O caminho necessário pode não ser criado a menos que a incapacidade para pensar estruturalmente se traduza numa dificuldade óbvia para o progresso futuro. Esta situação surge apenas quando alguns processos de nível superior estão a ser realizados no conceito em questão (Sfard, 1991, 1992). Em resumo podemos considerar que a reificação de baixo nível e a interiorização de alto nível são pré-requisitos uma da outra.

Uma das preocupações fundamentais do modelo de Sfard está relacionada com o ensino e com a forma como os conceitos são abordados. A partir da observação de manuais escolares, por exemplo, é possível constatar que a maior parte dos conceitos são introduzidos com base numa concepção estrutural, concepção esta que pode ser uma fonte de problemas na aula. Assim, com base nas dificuldades manifestadas pelos alunos, a autora conjectura que, por vezes, a chave dos problemas pode residir na incapacidade dos alunos criarem por si próprios os objectos abstractos sobre os quais o professor fala com toda a confiança. Na verdade a pretensão de precedência da concepção operacional sobre a estrutural implica que certos tipos de ensino, embora natural e legítimo para os professores, deva ser cuidadosamente evitado. Neste sentido Sfard (1992) formula dois princípios didácticos, que infelizmente apenas apresenta pela negativa, relativos às coisas que não devem ser feitas:

> Princípio 1: *Os novos conceitos não devem ser introduzidos em termos estruturais*. O modelo proposto para a formação dos conceitos implica que não há vantagens em confrontar os alunos com objectos abstractos não familiares sem lhe dar tempo e meios para se prepararem para o choque pela construção de uma forte base operacional;
>
> Princípio 2. *A concepção estrutural não deve ser exigida enquanto o aluno puder trabalhar sem ela*. A abordagem estrutural não tem muitas possibilidades de atrair a atenção até que seja dado um passo na direcção de um nível superior da teoria, para o qual esta abordagem seja indispensável. Por exemplo no caso das funções esta situação pode surgir quando a resolução de um problema implica a manipulação simultânea de vários constructos, devendo cada um deles ser tratado como um todo integrado no seu estatuto próprio. No entanto este tipo de situação não tem que ocorrer sempre. Sfard

considera que ao nível do ensino secundário alguns conceitos mais avançados podem não passar de uma concepção operacional. Tomando de novo como exemplo o caso das funções, ela considera que quando uma função aparece apenas num contexto de cálculo o aluno pode realizar com sucesso as tarefas propostas apenas com base na concepção operacional. A visão da função como um procedimento conciso, em vez de uma entidade estática, pode ser suficiente para lidar com a diferenciação e a integração.

Um método de ensino baseado nos dois princípios descritos acima pode ser considerado como operacional. A outra forma de ensino, que sendo diferente parece ser a mais comum em muitas aulas, onde os novos conceitos matemáticos aparecem como objectos acabados, pode ser chamada estrutural (Sfard, 1992). Esta abordagem deve ser promovida, partindo do pressuposto que a observação dos dois princípios anteriores são fundamentais para aperfeiçoar o desempenho dos alunos e devem ser compreendidos como condições necessárias nesse processo. Sfard admite mesmo que a não realização destes dois princípios torna a reificação pouco provável. Surge assim a questão do que deverá ser feito para favorecer a transição da concepção operacional para a estrutural, ou, por outras palavras, como favorecer o processo de reificação. Embora não exista uma grande quantidade de dados empíricos, Sfard (1992) usa, entre outros, os dados de um questionário que realizou junto de alunos com idades compreendidas entre os 22 e 25 anos e avança com uma lista de factores que considera importantes para estimular o pensamento estrutural:

1 – O favorecimento da compreensão dos processos subjacentes aos conceitos matemáticos, por parte dos alunos, é crucial para a compreensão dos próprios conceitos. Este factor pode ser implementado incorporando no currículo alguma programação de computadores, pois ao escrever os programas os alunos vão obter um conhecimento profundo dos algoritmos escondidos entre os objectos abstractos.

2 – O facto de ultimamente se ter vindo a subestimar o papel da competência em executar algoritmos é outro factor que pode inibir o pensamento estrutural. As três fases do esquema de desenvolvimento dos conceitos apresentada acima implica que o aluno deve estar bastante seguro na realização de certos procedimentos para poder alcançar uma ideia precisa dos objectos abstractos envolvidos nestas manipulações.

3 – Quando se espera que uma nova entidade abstracta surja devemos ter como catalizador uma representação adequada. Por exemplo as tabelas, símbolos e gráficos têm um efeito estimulante na reificação de funções por serem bons protótipos estáticos e integrativos.

4 – A discussão aberta sobre a natureza das entidades matemáticas e a diferença entre processos e objectos permitem colocar o aluno face a face com as suas crenças implícitas. Este debate pode explicitar as convicções que, por vezes, obstruem a reificação.

A juntar a estes factores, há dois outros que influenciam o progresso dos alunos e que não devem ser esquecidos: o tempo e a motivação (Sfard, 1992). O tempo é o factor mais subestimado, mas para que um objecto matemático nasça é preciso, por vezes, um longo período de incubação. A motivação, por outro lado, é necessária em qualquer tipo de aprendizagem, mas na matemática ela torna-se crucial. É preciso um esforço bastante grande dos alunos para poderem criar um universo de objectos abstractos. Dada a dificuldade inerente da reificação é preciso um empenho bastante forte para conduzir à compreensão. O professor não pode "colocar" estes objectos na mente dos alunos – ele não será capaz de fazer pelos alunos aquilo que eles não forem capazes de fazer por si próprios.

2.3. A transição do pensamento processual para o pensamento conceptual e a importância do simbolismo

Uma outra perspectiva sobre a construção do conhecimento matemático é defendida por David Tall (1995) e baseia-se na forma como a espécie humana a partir de actividades na interacção com o meio consegue desenvolver conceitos abstractos bastante subtis.

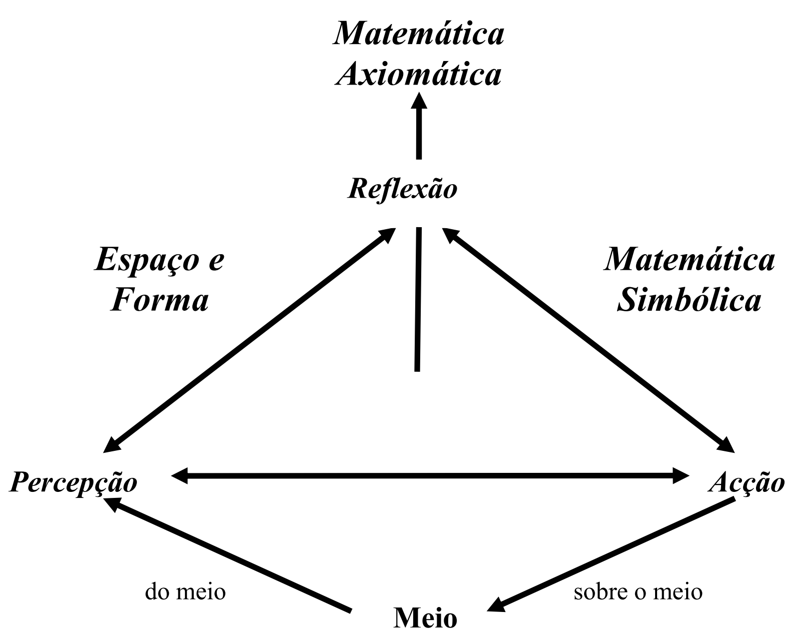


Figura 2.11. Diversos tipos de matemática (adaptado de Tall e outros, 2001, p. 82).

Ele considera que este desenvolvimento começa com a capacidade de *perceber* coisas, *agir* sobre elas e *reflectir* sobre estas acções para construir teorias. É uma visão onde a percepção, a acção e a reflexão ocorrem segundo várias combinações num dado momento e o foco numa delas pode levar a tipos de matemática muito diferentes (figura 2.11). Tall considera assim três tipos de matemática: Espaço e Forma, Matemática Simbólica e Matemática Axiomática (Tall, 1999; Tall e outros, 2001).

A *percepção* do mundo inclui o estudo do *espaço e forma* que conduz à geometria, onde as formulações verbais servem de suporte para uma evolução no sentido da demonstração euclidiana. As *acções* sobre o mundo, tais como contar, são representadas por símbolos e tornam-se na *matemática simbólica* de número, aritmética e por consequência na aritmética e álgebra generalizadas. A *reflexão* na percepção e acção em matemática conduz eventualmente ao desejo de uma *teoria axiomática* consistente baseada em definições formais e deduções, figura 2.12 (Tall, 1999; Tall e outros, 2001).

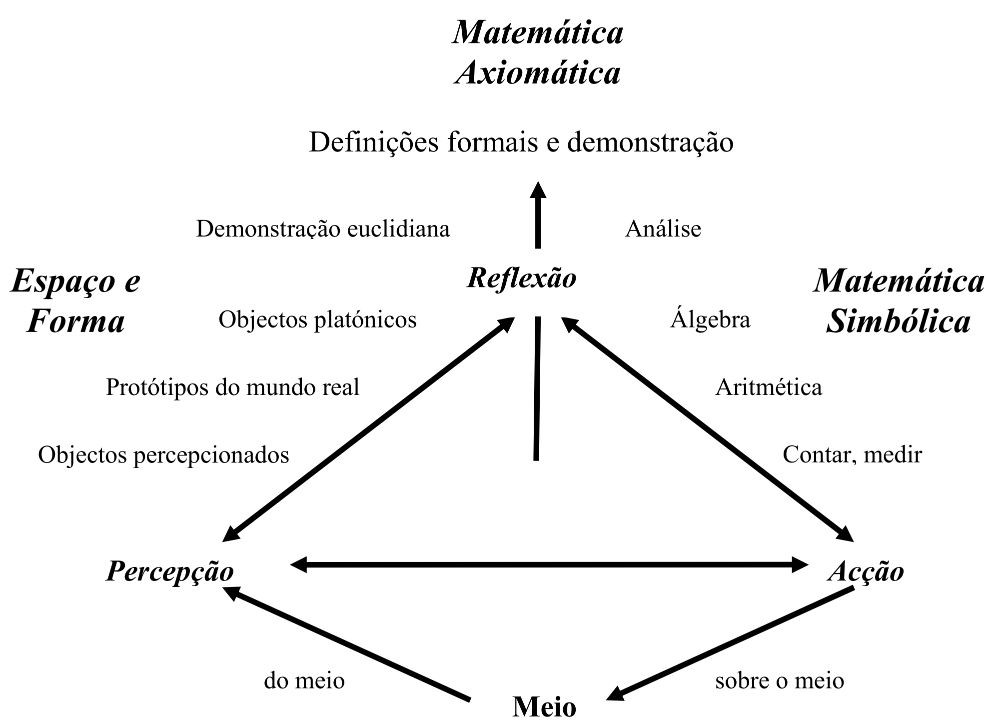


Figura 2.12. Desenvolvimento conceptual de determinados conceitos matemáticos (adaptado de Tall e outros, 2001, p. 82).

Com base nesta figura podemos observar diferentes tipos de desenvolvimento conceptual associados aos diferentes tipos de matemáticas. Esta abordagem esquemática parece introduzir alguma simplificação ao considerar que a percepção do meio conduz à forma e espaço, enquanto que a acção sobre o meio conduz à matemática simbólica. Parece ser possível admitir que uma representação geométrica possa ter origem numa acção sobre o meio ou, inversamente, o acto de contar, por exemplo, pode ser relacionado com a percepção. Tall não revela uma preocupação excessiva com esta possível origem dos objectos matemáticos, estando essencialmente preocupado com a criação e desenvolvimento de objectos mais abstractos que pertencem ao que ele designa por matemática axiomática. A figura 2.12 mostra assim dois caminhos diferentes para o desenvolvimento conceptual dos conceitos matemáticos. Embora não seja o principal objecto deste trabalho, podemos referir brevemente o desenvolvimento cognitivo na geometria com o objectivo de estabelecer as suas principais diferenças em relação à Matemática Simbólica. Este desenvolvimento tem por base a percepção dos objectos que nos rodeiam sendo inicialmente reconhecidos como formas globais. A maior parte destes objectos são entendidos como protótipos que se aplicam a uma vasta colecção de objectos percepcionados. Na matemática o reconhecimento de conceitos como quadrado, paralelogramo, quadrilátero, polígono, levam tempo a organizar numa hierarquia conceptual cujo desenvolvimento envolve várias reconstruções cognitivas. Por exemplo, nos primeiros estádios, os quadrados e rectângulos são inicialmente considerados pelas crianças mais novas como conceitos disjuntos; um quadrado não pode ser um rectângulo porque enquanto o quadrado tem 4 lados iguais o rectângulo tem apenas os lados opostos iguais. As categorias disjuntas de formas geométricas devem ser reconstruídas para obter hierarquias de formas: um quadrado é um rectângulo, é um paralelogramo, é um quadrilátero. Posteriormente são necessárias novas reconstruções para ver a forma não como um objecto físico, mas como um objecto mental com propriedades perfeitas e assim imaginar a geometria não apenas em termos da geometria euclidiana de duas e três dimensões, mas como uma variedade de geometrias diferentes: afim, projectiva, diferencial, etc. (Tall e outros, 2001). A figura 2.13 descreve de forma sucinta este desenvolvimento.

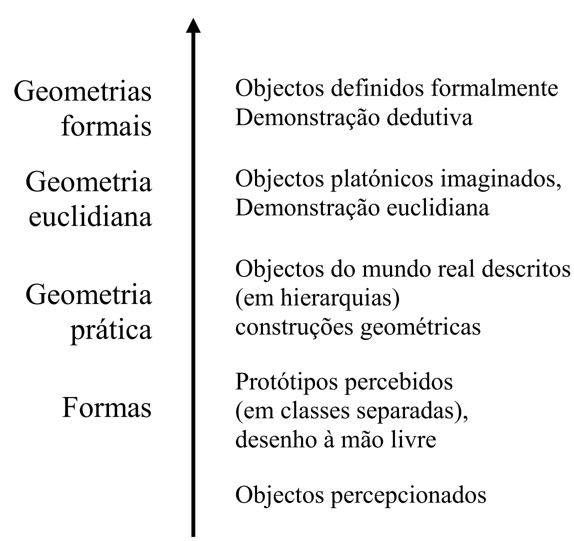


Figura 2.13. Desenvolvimento cognitivo dos conceitos geométricos.

A linguagem tem um papel bastante importante no desenvolvimento destes conceitos geométricos. As formas prototípicas como uma linha recta, um triângulo ou uma circunferência são descritas verbalmente de forma que nos possibilitam imaginar representações platónicas perfeitas, como por exemplo uma recta perfeita sem espessura que pode ser prolongada em qualquer direcção. A prova euclidiana também utiliza a linguagem como forma de fornecer argumentos verbais que possam suportar as deduções baseadas nos conceitos visuais. Mais tarde com a necessidade de formular axiomas e definições que conduzem à geometria formal, a necessidade da linguagem volta a ser fundamental.

Paralelamente a este desenvolvimento, surge um outro que tem por base a acção sobre o mundo e que conduz ao aparecimento da Matemática Simbólica. É este tipo de desenvolvimento conceptual que interessa estudar aqui com mais pormenor, e que apresenta características bastante diferenciadas do caso da geometria. Dada a natureza deste tipo de desenvolvimento conceptual os símbolos têm um papel fundamental. Eles permitem que o ser humano disponha de uma forma incrivelmente simples de lidar com quantidades para calcular, resolver problemas e fazer prognósticos. De uma forma simples eles servem de charneira entre pensar o símbolo como um conceito (como um número) ou como um processo (como contar). Isto permite-nos pensar sobre os símbolos como entidades manipuláveis para fazer matemática.

São várias as situações em que os símbolos permitem comutar entre processo e conceito. Segundo Tall e outros (2001) o quadro seguinte (quadro 2.2) mostra-nos alguns exemplos:

Quadro 2.2. Símbolos como processos e conceitos.

Símbolo	**Processo**	**Conceito**
5	contar	número
4+3	adição	Soma
f'(x)	diferenciação	derivada
$\int f(x)dx$	integração	integral

Nota: Adaptado de Tall e outros (2001, p.84).

Esta dupla utilização do símbolo como processo e conceito começa muitas vezes com a familiarização com o processo, que resulta normalmente de procedimentos inicialmente realizados passo a passo e, posteriormente, executados sem necessidade de uma atenção consciente para detalhes que, por vezes, são bastante sofisticados. Por exemplo, contar, é um processo complexo de verbalizar uma sequência de números e, ao mesmo tempo, apontar para objectos numa colecção um a um. Quando uma criança conta um número de maçãs, ela pode dizer "três é uma, duas, três maçãs". À medida que isto se torna uma rotina a contagem pode ser feita em silêncio, "[uma, duas] três maçãs", sendo depois comprimido em "… três maçãs". Desta forma o processo de contar é comprimido no conceito de número.

O símbolo é visto como algo que é percepcionado pelos sentidos. Ele pode ser representado de várias formas, escrito, falado, visto ou ouvido, mas do ponto de vista teórico o que é importante na representação física é a forma como ele é interpretado pelos diferentes indivíduos ou pelo mesmo indivíduo em alturas diferentes. Para Gray e Tall (1994) reveste-se de especial importância o facto de o mesmo símbolo poder ser concebido como representando um processo ou um objecto. São vários os exemplos onde podemos verificar o uso ambíguo dos símbolos:

> O símbolo 4x3 pode representar o processo da adição repetida, pode ser executado para obter o produto de quatro por três e designar o número 12,
>
> A notação $f(x)=x^2-3$ serve ao mesmo tempo para calcular o valor da função para um valor particular de x e encerra em si o conceito de função para um valor geral de x.

Os matemáticos raramente falam sobre esta ambiguidade. No entanto Gray e Tall consideram que a ambiguidade na interpretação do simbolismo de uma forma flexível está na raiz do pensamento matemático com sucesso (1994). Os autores colocam mesmo a hipótese de a falta desta ambiguidade levar à utilização, de forma absurda, de procedimentos que precisam de ser lembrados como instrumentos separados no seu próprio contexto (por exemplo: fazer a multiplicação antes da adição, o produto de dois negativos dá um positivo ou somar a mesma quantidade de ambos os lados). Tall e Gray (1994) admitem como conjectura que a dualidade na utilização da notação como processo e conceito habilita os mais capazes a tratar os processos matemáticos com base numa relação de sujeição aos conceitos. Para os matemáticos, em vez de terem de lidar conscientemente com esta dualidade de conceito e processo, usam esta forma ambígua sobre o simbolismo para os processos e os produtos. Eles parecem simplificar o assunto substituindo a complexidade cognitiva da dualidade processo-conceito pela conveniência das notações da ambiguidade processo-produto.

Gray e Tall (1994) consideram assim que a ambiguidade do simbolismo expressa na dualidade flexível entre processo e conceito não é completamente utilizada se a distinção entre ambos se mantiver sempre presente. É necessário que haja uma combinação cognitiva de processo e conceito com a sua terminologia própria. Para tal, os autores recorrem à palavra *proceito* (*procept*) para se referirem ao conjunto de conceito e processo representados pelo mesmo símbolo. Um *proceito* elementar será pois uma amálgama de três componentes: um *processo* que produz um *objecto* matemático e um *símbolo* que representa ao mesmo tempo o processo e o objecto.

Para reflectir esta crescente flexibilidade de uma dada noção e a versatilidade dos processos de pensamento, Gray e Tall apresentam aquilo a que chamam uma extensão da definição: Um *proceito* consiste numa colecção de *proceitos* elementares que têm o mesmo objecto. Como exemplo podemos falar por exemplo do proceito 6. Ele inclui o processo de contar 6 e a colecção de outras representações tais como 3+3, 2+4, 4+2, 3x2, 8-2, etc. Todos estes símbolos podem ser considerados para representar o mesmo objecto indicando ainda a forma flexível de como o 6 pode ser decomposto ou recombinado usando diferentes processos.

Podemos também considerar que matematicamente há uma relação de equivalência entre proceitos elementares, basta para tal que eles representem o mesmo objecto e assim sendo podemos definir uma classe de equivalência de proceitos elementares. Os autores consideram, no entanto, que este tipo de precisão só vem complicar a realidade cognitiva. Segundo eles a natureza do proceito depende do crescimento cognitivo do indivíduo. Um proceito elementar é visto como um primeiro estádio num crescimento dinâmico do proceito em vez de um elemento de uma classe de equivalência. Podemos considerar inicialmente o número como um proceito elementar. Por exemplo o símbolo 3 pode recordar o processo de contar "um, dois, três" e o próprio número. A palavra *três* ou o seu símbolo pode ser falada, ouvida ou escrita. Estas formas de comunicação em conjunto com as operações da aritmética permitem a partilha do símbolo de tal forma que, mesmo tratando-se de um conceito abstracto, ele desempenha um papel real como um objecto físico. Os proceitos são assim considerados como a raiz da capacidade humana para manipular ideias matemáticas em aritmética, álgebra e outras teorias que envolvam a manipulação de símbolos (Gray e Tall, 1994; Tall e outros, 2001).

Para explicar o desempenho nos processos matemáticos Gray e Tall (1994) partem da natureza das actividades matemáticas onde os termos procedimento, processo e proceito representam uma sequência no desenvolvimento cada vez mais sofisticada. Assim, o termo procedimento é usado para exprimir uma sequência específica de passos que conduzem a outro passo. Podemos dizer que se trata de um algoritmo específico para implementar um processo. Por exemplo *contar para a frente*[5] pode ser visto como um procedimento para

[5] O procedimento contar para a frente (*count-on*) refere-se à forma como a criança pode realizar a contagem de dois conjuntos de objectos. Supondo que ela está perante dois conjuntos, um com três e outro com dois objectos, este procedimento pressupõe que ela considera o grupo dos primeiros três seguindo depois a contagem dos restantes dois como sendo o quarto e o quinto.

realizar o processo de adição. O termo processo é usado num sentido mais geral e inclui qualquer número de procedimentos que têm o mesmo efeito. Ele não tem que ser executado no pensamento quando o referimos e pode ser realizado de várias formas. Por exemplo o processo de derivação da função $\frac{1+x^2}{x^2}$ pode ser feito por vários procedimentos como a regra do quociente, a regra do produto $\left((1+x^2)\times\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ ou a simplificação para $x^{-2}+1$ antes da derivação. Assim, segundo Tall e outros (2001) com o conhecimento de um procedimento específico o indivíduo pode fazer um cálculo ou uma manipulação. Se tiver uma ou mais alternativas possíveis permite-lhe uma maior flexibilidade e eficiência para escolher o caminho mais apropriado para um dado propósito. Mas ser capaz de pensar sobre o simbolismo como uma entidade permite entender a matemática de uma forma comprimida e manejável, movendo-se facilmente entre processo e conceito. Esta abordagem pode ser esquematicamente traduzida pela figura 2.14, onde é possível observar uma crescente sofisticação do desenvolvimento proceptual com o tempo.

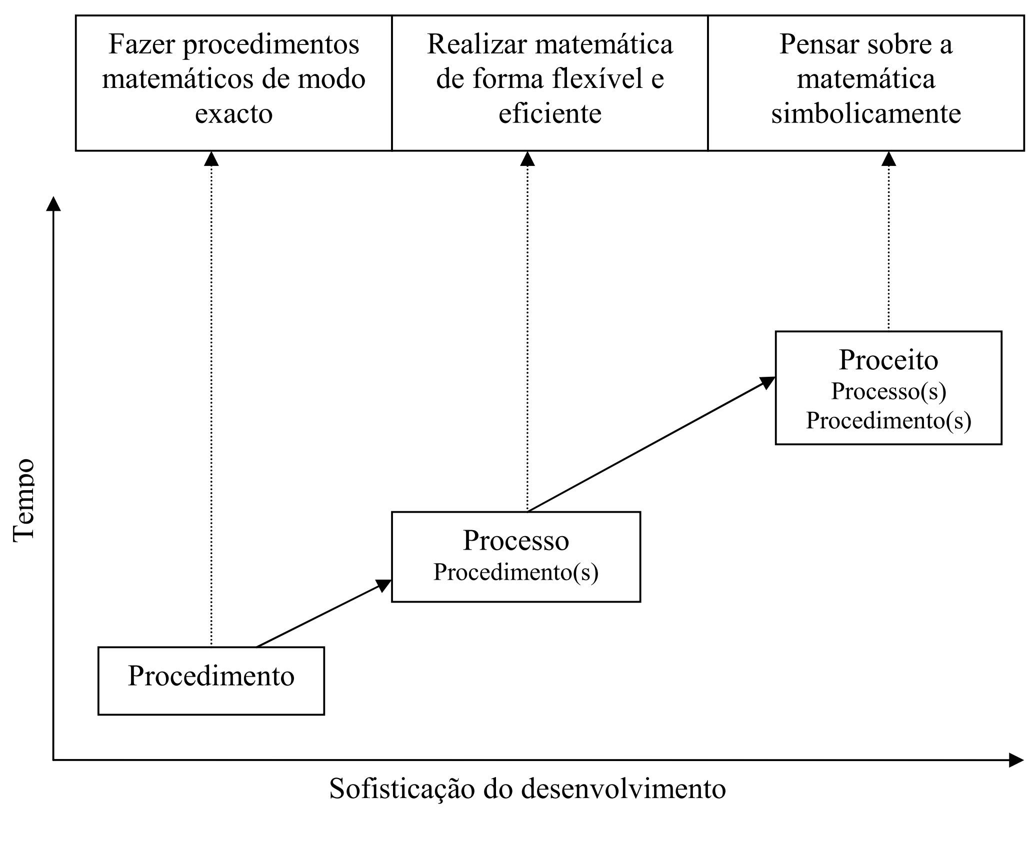


Figura 2.14. Desenvolvimento na execução dos processos matemáticos (adaptado de Tall e outros, 2001, p. 89).

No topo da figura podemos considerar representado um espectro de realização no qual é possível, em certos estados, ter alunos com diferentes capacidades a realizar com sucesso um dado problema rotineiro, ainda que o possível desenvolvimento futuro seja bastante diferente. Estes autores consideram que os alunos que estão mais orientados para o desenvolvimento de procedimentos focam a sua atenção nos passos (dos procedimentos) enquanto que os que vêem o simbolismo como processos ou conceitos têm um processamento cognitivo mais eficiente. Ao longo do tempo, com o encontro de novas tarefas, vai havendo cada vez mais tendência para o pensamento processual. Isto significa que aqueles que focam a sua atenção essencialmente no processual têm cada vez mais dificuldades em aprender novos conceitos matemáticos, enquanto que os mais capazes se focam principalmente nas qualidades essenciais do simbolismo que consiste em vê-lo como processo e conceito ao mesmo tempo.

Se pensarmos por exemplo no símbolo 3 verificamos que ele enriquece o seu significado através da ligação a aspectos relativos a procedimentos, tais como o de contar e a aspectos conceptuais onde o mesmo objecto é representado por diferentes símbolos como 2+1 ou 4-1 que fazem parte do proceito 3. Estas diferentes formas de combinar e dar riqueza à estrutura conceptual do símbolo 3, que vem da combinação dos pensamentos conceptual e processual, é designada por Gray e Tall (1994) como sendo o *pensamento proceptual* (proceptual thinking).

É também importante salientar que é possível observar uma certa dicotomia entre procedimento e conceito. Por vezes, ao tentar melhorar o desempenho dos alunos faz-se a distinção entre os procedimentos que eles precisam de adquirir para poder fazer determinadas coisas e os conceitos ou factos que se espera que eles conheçam para operarem com os procedimentos. Podemos dizer que se trata de uma dicotomia entre as coisas para fazer e as coisas para saber. Segundo Gray e Tall (1994) esta dicotomia deve ser vista de uma perspectiva diferente. Uma vez que os aspectos dos procedimentos matemáticos se centram na manipulação rotineira de objectos que são representados por materiais concretos, símbolos escritos ou imagens mentais é relativamente fácil de avaliar se estes procedimentos estão a ser executados de forma adequada e o desempenho em tarefas similares serve, por vezes, como medida do conhecimento destas habilidades. O conhecimento conceptual é por sua vez mais difícil de aceder. Podemos no entanto admitir que ele é bastante rico em relações, sendo por vezes comparado a uma rede onde os procedimentos podem ter um papel preponderante na sua formação (Hiebert e Carpenter, 1992). Um pensamento flexível usando o conhecimento conceptual revela-se bastante diferente de um pensamento baseado em procedimentos rígidos, pelo que em termos cognitivos o que é importante é a mudança dos processos matemáticos para objectos mentais manipuláveis.

Ao observarem os alunos com idades compreendidas entre os 7 e os 12 anos a trabalhar em aritmética elementar estes autores notaram que havia diferenças na forma de pensar dos vários alunos. Assim, enquanto os mais capazes usavam o pensamento proceptual, os menos capazes usavam um pensamento mais processual. Como foi referido anteriormente, o pensamento proceptual pode ser caracterizado pela habilidade de comprimir fases na manipulação dos símbolos por forma a que estes sejam vistos como objectos que podem ser decompostos e recombinados de forma flexível; enquanto que o pensamento processual pode ser caracterizado por se focar no procedimento e na ajuda física ou quase física que o suporta. Este pensamento é limitado porque dá à criança uma visão mais fechada do simbolismo, ou seja, os números são apenas usados como entidades concretas para ser manipuladas através de um processo de contagem. A ênfase no procedimento reduz a atenção na relação entre entrada e saída, levando, por vezes, a extensões do procedimento de contar, muito próprias do indivíduo e que não podem ser generalizadas (Gray e Tall, 1994). O desempenho dos alunos apresentava no entanto algumas diferenças mais subtis. Os mais capazes usavam estratégias flexíveis para produzir novos factos a partir dos antigos, os menos capazes tinham apenas um procedimento de contagem que crescia, cada vez mais lentamente, à medida que os problemas se tornavam mais complexos e entre estes extremos os menos capazes, que tentavam produzir novos factos de um conjunto limitado de factos conhecidos, acabavam por seguir um caminho inventivo, mas tortuoso que apenas tem sucesso com um esforço muito grande. O alto risco que os alunos correm neste processo leva-os a voltar aos procedimentos de contagem anteriores. Gray e Tall (1991, 1994) consideram então que aquilo que podia ser um espectro contínuo de realização tende a ser uma dicotomia em que os que começam por falhar acabam por permanecer no pensamento processual. Esta bifurcação de estratégia (entre o uso flexível do número como objecto ou processo e a fixação na contagem processual) é considerada pelos autores como um dos factores mais significantes na diferença entre o sucesso e o insucesso e é considerada como a *bifurcação proceptual* (*proceptual divide*).

A bifurcação proceptual pode ter um efeito cumulativo e tornar-se numa fonte de problemas para o desenvolvimento proceptual. O capsular proceptual, que corresponde à transformação de um processo num conceito, ocorre em várias fases criando uma complexa hierarquia de relações. Por exemplo na aritmética elementar podemos considerar que a contagem repetida torna-se adição, a adição repetida torna-se multiplicação, etc.. Gray e Tall (1991, 1994) representam este processo pela figura 2.15 e consideram que os alunos menos capazes que se fixam nos processos apenas podem resolver problemas no nível superior pela coordenação sequencial dos processos, o que se torna uma tarefa bastante difícil para eles. Os mais capazes têm a tarefa mais simplificada.

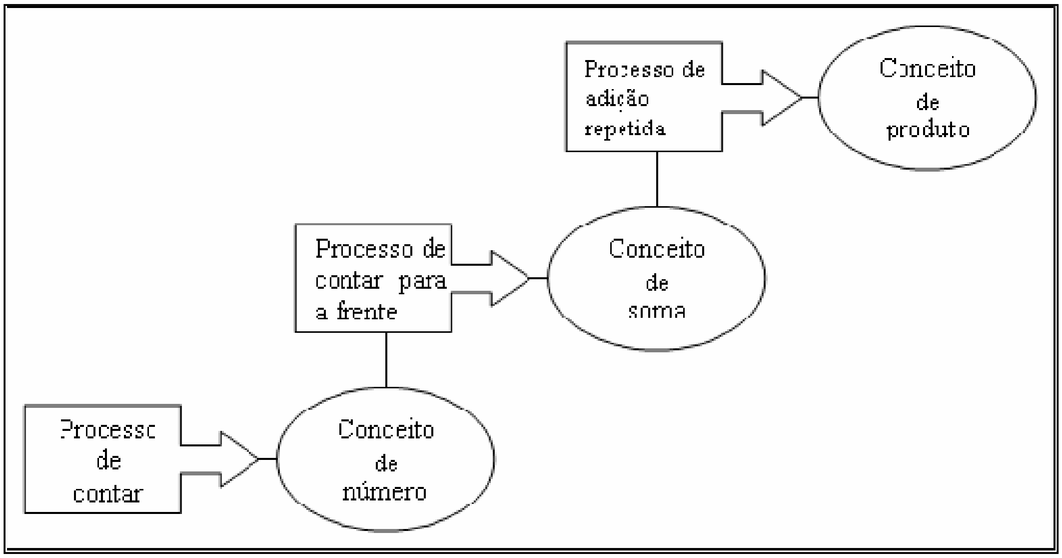


Figura 2.15. Capsular de ordem superior (Gray e Tall, 1994, p. 136).

Os símbolos para soma e produto representam números de novo. Assim contar, somar e multiplicar operam sobre o mesmo proceito, que pode ser decomposto em processos quando necessário. Uma visão proceptual que confunde o processo e o conceito através do uso da mesma notação pode desfazer a hierarquia para um nível único em que as operações aritméticas (processos) actuam sobre os números (proceitos) (figura 2.16).

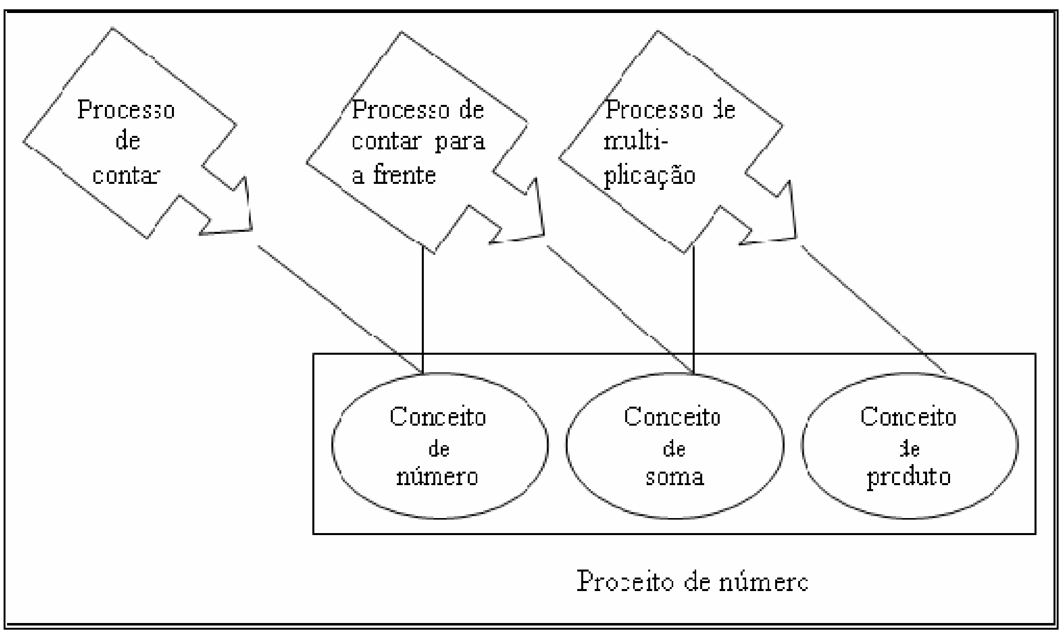


Figura 2.16. Colapso da hierarquia nas operações com números (Gray e Tall, 1994, p. 136).

Segundo os autores esta é a forma como os mais capazes desenvolvem uma compreensão relacional flexível em matemática, que é vista como uma relação significativa entre noções no mesmo nível, enquanto que os menos capazes são confrontados com uma progressão hierárquica que é mais difícil de realizar.

2.4. Teoria APOS

Na procura dos processos pelos quais construímos os conceitos matemáticos, e na procura da natureza das entidades cognitivas construídas nestes processos, Dubinsky baseia-se nas teorias da construção cognitiva desenvolvidas por Piaget para as crianças e propõe a *teoria APOS* para descrever como as *acções* são interiorizadas em *processos* e depois capsuladas como *objectos* mentais que têm um lugar próprio em estruturas cognitivas mais sofisticadas, os *esquemas*. Ele usa assim o método proposto para a construção da matemática elementar e estende-o à matemática avançada.

Segundo Dubinsky (1991) a teoria APOS (actions, processes, objects, shemas) surgiu na tentativa de compreender o mecanismo da abstracção reflexiva, introduzido por Piaget para descrever o desenvolvimento do pensamento lógico nas crianças e estender esta ideia aos conceitos matemáticos mais avançados. Nesta perspectiva, Dubinsky parte da distinção feita por Piaget que inclui três espécies de abstracção: a a*bstracção empírica, a* a*bstracção pseudo-empírica* e a *abstracção reflexiva* (Beth e Piaget, 1961; Piaget, 1977; Piaget e Garcia, 1987).

A *abstracção empírica* permite obter conhecimento a partir das propriedades dos objectos o que significa que ela foi feita com experiências que o sujeito considera como sendo externas. O conhecimento destas propriedades é, contudo, interno e é o resultado das construções internas feitas pelo sujeito. Para Piaget este tipo de abstracção leva à extracção de propriedades comuns dos objectos e extensão de generalizações, que são a passagem de “alguns” para “todos”, do específico para o geral. Podemos pensar por exemplo na cor de um objecto ou no seu peso. Estas propriedades podem ser pensadas como residindo inteiramente no objecto, mas nós apenas podemos ter conhecimento delas fazendo alguma coisa (olhando para o objecto sobre uma certa luz, pesando-o) e indivíduos diferentes sobre diferentes condições podem chegar a conclusões diferentes sobre estas propriedades.

A *abstracção pseudo-empírica*: partilha de características comuns à empírica e à reflexiva e permite obter propriedades que as acções do sujeito tenham introduzido no objecto. Considerando por exemplo a observação de uma correspondência um a um entre dois conjuntos de objectos que o sujeito alinhou lado a lado, o conhecimento desta situação pode ser considerado empírico porque ele é construído com base nos objectos, mas é a sua configuração no espaço e as relações com que isto lida que são de interesse e isto é devido à acção do sujeito. De novo, compreender que é uma relação um a um entre os dois conjuntos é o resultado de uma construção interna feita pelo sujeito.

A *abstracção reflexiva*: é obtida a partir daquilo que Piaget chama *coordenação geral das acções*, e assim, a sua fonte é o sujeito e é absolutamente interna. Um exemplo é a seriação em que a criança realiza várias acções individuais na formação de pares, triplos, etc. e depois interiorizam e coordenam as acções para formar uma ordenação total. Este tipo de abstracção leva a uma espécie diferente de generalização que é construtiva e resulta numa nova síntese por meio da qual as leis particulares adquirem um significado distinto.

Estes diferentes tipos de abstracção não são independentes. Por um lado, as acções que levam à abstracção pseudo-empírica e reflexiva são realizadas em objectos cujas propriedades o sujeito só vem a conhecer através da abstracção empírica. Por outro lado, a abstracção empírica só é possível através da assimilação de esquemas que foram construídos pela abstracção reflexiva. Esta interdependência mútua pode ser resumida da seguinte forma: a abstracção empírica e pseudo-empírica obtêm conhecimento de objectos pela realização (ou imaginação) de acções sobre eles. A abstracção reflexiva interioriza e coordena estas acções para formar novas acções e por fim novos objectos (que podem não ser físicos mas sim matemáticos como uma função ou um grupo). A abstracção empírica extrai dados destes novos objectos através de acções mentais sobre eles e assim por diante.

Na abstracção empírica o sujeito observa um número de objectos e abstrai uma propriedade comum. A abstracção pseudo-empírica prossegue da mesma forma depois das acções terem sido realizadas no objecto. A abstracção reflexiva é mais complicada uma vez que ele atribui o desenvolvimento das estruturas cognitivas a este tipo de abstracção. Do ponto de vista psicológico, Piaget considera que as novas construções matemáticas têm a sua origem na abstracção reflexiva. Assim, ele considera-a como sendo o método donde derivam todas as estruturas lógico-matemáticas e que, ela por si só, suporta toda a construção lógico-matemática.

Como suporte da sua posição sobre o papel da abstracção reflexiva no pensamento matemático avançado, Piaget tentou explicar alguns conceitos matemáticos principais que resultam deste processo psicológico. Alguns exemplos são o conceito matemático de função ou de grupo. De uma forma geral ele considera que é a abstracção reflexiva na sua forma mais avançada que conduz a uma espécie de pensamento matemático pelo qual a forma ou o processo é separado do conteúdo e que, na mente do matemático, os próprios processos são convertidos em objectos de conteúdo.

Dubinsky (1991) considera que a matemática de nível superior não é feita por nenhuma espécie de aplicação directa da abstracção reflexiva, mas antes que quando propriamente compreendida a abstracção reflexiva aparece como uma descrição do mecanismo de desenvolvimento do pensamento intelectual. Na teoria de Piaget é importante considerar que os mesmos processos que descrevem o pensamento matemático de nível superior aparecem no desenvolvimento cognitivo, ao longo da vida, desde as primeiras coordenações das crianças ao lidar com conceitos como número, proporção ou multiplicação.

Com o objectivo de melhor compreender o mecanismo da abstracção reflexiva, Dubinsky (1991) procura em Piaget alguns exemplos desta no pensamento lógico-matemático nos primeiros anos da criança e sugere que a construção específica de processos, que podem ser usados para construir estruturas matemáticas sofisticadas, podem ser encontrados, por vezes, no pensamento dos mais novos. Temos assim por exemplo:

A comutatividade da adição - a descoberta de que o número de objectos numa colecção é independente da ordem em que os objectos são colocados requer que primeiro a criança conte os objectos, os reordene, conte de novo e assim por diante. Cada uma destas acções são interiorizadas e representadas internamente de alguma maneira em que a criança possa reflectir sobre elas, compará-las e compreender que todas dão o mesmo resultado.

O número - Para Piaget o conceito de número é construído pela coordenação de dois esquemas de classificação (construção de um conjunto em que os elementos são unidades, indistinguíveis umas das outras) e seriação (que é ela própria a coordenação de várias acções de emparelhar, juntar 3 a 3, etc.).

A multiplicação - psicologicamente e matematicamente a multiplicação é a adição de adições. Ela refere-se a objectos que são adicionados no sentido de que a adição é uma operação usada para alguma coisa. Para multiplicar é necessário primeiro capsular a acção (mental) da adição num objecto (ou conjunto de objectos) ao qual a adição pode ser aplicada.

Considerando vários exemplos (incluindo os referidos acima) de abstracção reflexiva como métodos de construção, Dubinsky (1991) considera que podemos isolar quatro espécies diferentes de construção que poderão ser importantes para os processos envolvidos no pensamento matemático quer a nível superior ou elementar, que designarei por pensamento matemático avançado. A estas quatro junta ainda uma quinta que Piaget considera uma extensão, mas que não é para ele parte da abstracção reflexiva. As cinco espécies de construção são:

Interiorização – com o aparecimento da capacidade de usar símbolos, linguagem, desenhos e imagens mentais, a criança desenvolve abstracções reflexivas para representar, isto é, para construir processos internos como forma de fazer sentido na percepção dos fenómenos. Piaget chama-lhe interiorização e refere-se-lhe como sendo a tradução de uma sucessão de acções materiais num sistema de operações interiorizadas. Por exemplo a comutatividade da adição.

Coordenação – aparece em situações que envolvem a composição ou coordenação de dois ou mais processos para construir um novo. Esta coordenação deve distinguir-se da frase de Piaget *coordenações gerais das acções* que se referem a todas as formas de utilizar uma ou mais acções para construir novas acções ou objectos.

Capsular (encapsulation no original) – multiplicação, proporção e variação da variação exemplificam a construção que é talvez a mais importante (para a matemática) e mais difícil (para os alunos). Isto é capsulação ou conversão de um processo (dinâmico) num objecto (estático). Piaget considera que "o todo da matemática pode antes de mais ser pensado em termos da construção de estruturas, …entidades matemáticas movendo-se de um nível para outro, uma operação em algumas 'entidades' que aparecem, por sua vez, como objectos da teoria e estes processos são repetidos até enriquecer as estruturas que são alternadamente estruturantes ou começam a ser estruturadas por 'poderosas' estruturas" (Piaget, citado por Dubinsky, 1991, p. 101). Do ponto de vista filosófico, Piaget aplica a ideia de capsulação à relatividade entre forma e conteúdo quando ele se refere à construção de novas formas que suportem as anteriores e as incluam como conteúdos ou às abstracções reflexivas que desenham, a partir de formas mais elementares, os elementos usados para construir novas formas.

Generalização – quando um indivíduo aprende a aplicar um esquema existente a uma vasta colecção de fenómenos, podemos dizer que o esquema foi generalizado. Isto pode ocorrer porque o sujeito está atento à vasta aplicabilidade do esquema. Pode, por vezes, acontecer que quando o processo é capsulado num objecto, por exemplo a razão entre duas quantidades ou a adição, aquele esquema existente, como a igualdade ou adição, pode então ser aplicado para obter, respectivamente, proporção ou multiplicação. O esquema permanece o mesmo excepto que ele agora tem uma maior aplicabilidade. O objecto muda para o sujeito pelo que ele agora compreende que o objecto pode ser assimilado pela extensão do esquema. Piaget chama a isto a *generalização extensiva*.

Reversibilidade – uma vez que o processo existe internamente é possível, para o sujeito, pensar nele ao contrário, não necessariamente no sentido de o anular, mas como meio de construir um novo processo que consiste em inverter o processo original. Piaget não discute isto no contexto da abstracção reflexiva, mas antes em termos do grupo INRC. Dubinsky considera-a como uma forma de construção adicional.

De uma forma resumida, Dubinsky (1991) define a abstracção reflexiva como a construção de objectos mentais e de acções mentais sobre estes objectos. É com base nesta perspectiva que ele faz uma extensão da abstracção reflexiva e das suas construções ao pensamento matemático avançado.

Como base de partida, Cottrill e outros (1996) consideram que o conhecimento matemático é uma tendência individual para responder, num contexto social, a um determinado problema pela construção, reconstrução e organização na sua mente, de processos matemáticos e objectos com os quais se lida com a situação. Com base nesta perspectiva eles consideram três tipos gerais de conhecimento matemático, as *acções*, os *processos* e os *objectos*, que estão organizados em estruturas que designam por *esquemas*. A figura 2.17 representa de forma condensada o processo de construção dos esquemas (Dubinsky, 1991).

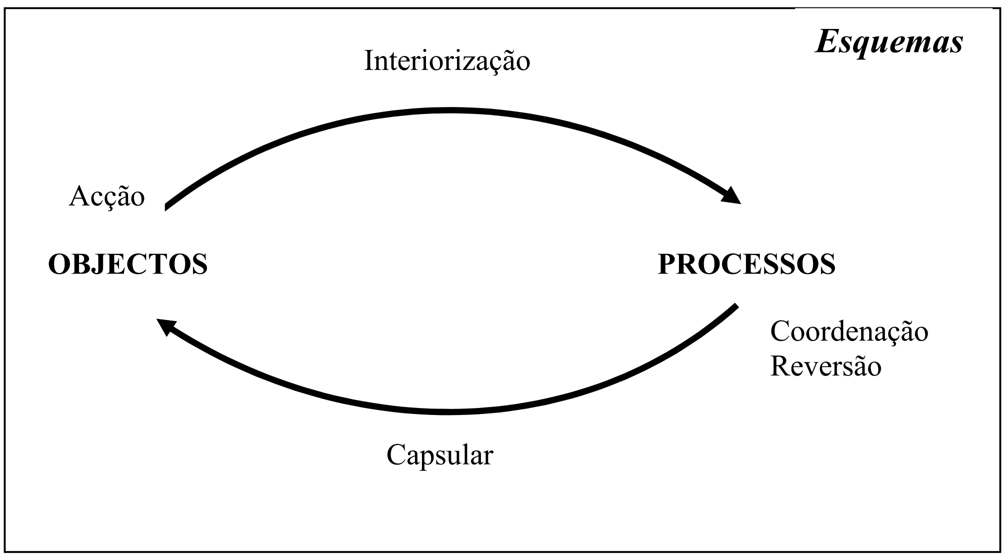


Figura 2.17. Esquemas e a sua construção (adaptado de Dubinsky, 1991, p. 107).

A *Teoria APOS* diz assim respeito ao desenvolvimento destes tipos de conhecimento que estes autores descrevem da seguinte forma (Cottrill e outros, 1996):

> *Uma acção* é qualquer transformação física ou mental de objectos para obter outros objectos. Ela ocorre como reacção a estímulos que o indivíduo percebe como externos. Pode tratar-se de uma resposta simples como um reflexo físico ou do recurso a factos que estão na memória. Pode ainda ser uma resposta com vários passos, mas cada um deles está encadeado nos anteriores sem que haja um controle consciente da transformação. Podemos tomar como exemplo o facto de termos uma função definida por uma fórmula e calculamos a imagem de um determinado ponto. Quando o indivíduo

reflecte sobre uma acção deve começar a estabelecer um controle consciente sobre ela. Podemos então dizer que a acção foi interiorizada e passou a ser um processo.

Um processo é a transformação de um objecto (ou objectos) cuja característica importante é o controle da transformação pelo indivíduo, no sentido em que ele é capaz de descrever ou reflectir sobre todos os passos da transformação sem ter que os realizar. Por exemplo uma função pode ser pensada como transformando dados que recebe (objectos) noutros que são as imagens sem haver necessariamente cálculos específicos. Uma vez construído um processo, o indivíduo pode transformá-lo de várias formas. Ele pode ser *revertido* (reversed) ou pode ser *coordenado* com outros processos. A coordenação pode levar a novos processos (por exemplo, a composição de funções) ou à ligação entre eles para formar um esquema. Com a reflexão do indivíduo sobre o acto de transformar processos, estes começam a tornar-se objectos.

Um objecto é construído através do *capsular* (*encapsulation*) de um processo. Esta capsulação é alcançada quando o indivíduo está atento à totalidade do processo, percebe que transformações podem agir sobre ele e é capaz de construir tais transformações. Os objectos podem ser *descapsulados* para obter os processos dos quais eles provêm e é importante em matemática que os indivíduos sejam capazes de fazer este movimento nos dois sentidos entre a concepção do objecto e o processo de uma dada ideia matemática. Podemos tomar como exemplo o facto de um indivíduo pensar sobre uma função como um objecto quando pensa formar uma nova função pela adição de duas outras sem se referir a nenhum exemplo específico.

Um esquema é uma colecção coerente de acções, processos, objectos e outros esquemas que estão de alguma forma ligados e permitem suportar a resolução de um dado problema. Tal como nos processos um indivíduo pode reflectir sobre um esquema e transformá-lo podendo mesmo acontecer que o esquema se transforme num novo objecto. Assim, podemos considerar pelo menos duas formas de construir objectos: a partir dos processos e a partir dos esquemas. No desenvolvimento da teoria considera-se que os objectos podem ser transformados por acções de nível superior, levando a novos processos, objectos e esquemas. Assim, a expansão dos esquemas pode ser representada por uma espiral de acções, processos e objectos.

Mais recentemente, Dubinsky (2003) apresenta o mesmo esquema da figura 2.17, figura 2.18, cuja principal alteração se verifica na seta inferior que passou a ter um duplo sentido, reforçando a importância do capsular e descapsular no balanço entre processos e objectos. Ao lidar com os processos foi também alterado o nome anteriormente atribuído à reversão que passou a ser designada por *inversão*.

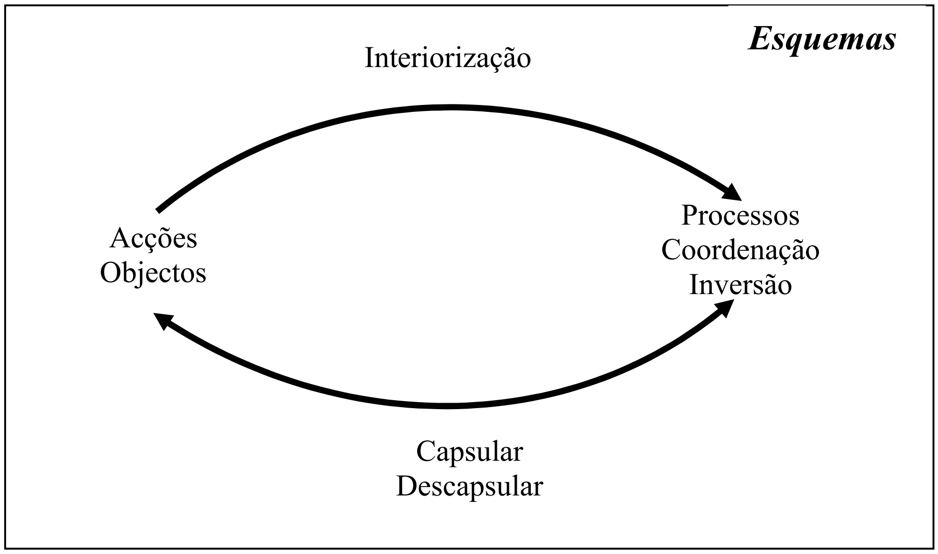


Figura 2.18. Versão actualizada dos esquemas e da sua construção.

Segundo Dubinsky (1991) esta teoria serve, não só para descrever a construção dos vários conceitos matemáticos, como pode sugerir explicações de algumas das dificuldades que os alunos têm com muitos destes conceitos ou mesmo influenciar na elaboração dos currículos. Uma das abordagens que é bastante usada na implementação da teoria é a *decomposição genética*, que procura separar os vários elementos constituintes do conceito de modo a ser possível identificar aqueles que estão na sua génese. Assim, os esquemas são decompostos em termos de acções, processos e objectos, com o objectivo de confrontar o aluno com o ciclo da teoria descrito acima e desta forma melhorar a compreensão do conceito. Por exemplo, para o conceito de limite, antes do início do estudo Cottrill e outros (1996) propõem uma decomposição genética organizada em seis passos:

1. A acção de calcular o valor de uma função f nalguns pontos, pontos estes cada vez mais próximos de a.
2. Interiorização da acção do passo 1 num processo único em que $f(x)$ se aproxima de L à medida que x se aproxima de a.
3. Capsular o processo de 2 desde que, por exemplo ao falar sobre a combinação das propriedades dos limites, o processo limite permaneça um objecto ao qual possam ser aplicadas acções.

4. Reconstruir o processo de 2 em termos de intervalos e desigualdades. Isto é feito introduzindo estimadores numéricos da proximidade da aproximação, simbolicamente teremos $0 < |x - a| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$.
5. Aplicar um esquema de quantificação para ligar os processos construídos no passo anterior para obter a definição formal de limite.
6. Aplicar a definição $\varepsilon - \delta$ a situações específicas.

Esta decomposição surge como uma primeira abordagem que vai sendo adaptada consoante o desempenho mostrado pelos alunos. Ela pode resultar de investigações anteriores ou pode ser uma construção dos próprios professores para implementar o ensino e aprendizagem de um dado conceito. Posteriormente é implementado o processo de ensino e a decomposição anterior vai sendo revista de acordo com as dificuldades manifestadas pelos alunos. Esta abordagem permite melhorar o ensino, pois tem em conta as dificuldades que os alunos vão encontrando ao lidar com os diversos passos da decomposição e é uma forma de estruturar os currículos futuros por forma a adequá-los às necessidades dos alunos.

3. Desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático

O desenvolvimento do pensamento matemático desde o nível elementar até ao ensino superior ou mesmo até à investigação matemática tem sido um importante objecto de estudo. Vários autores se têm debruçado sobre esta problemática evidenciando algumas das suas características essenciais em situações concretas. O trabalho de Tall (1995) desenvolve uma sistematização da evolução do pensamento matemático numa perspectiva cognitivista. Tall começa por separar três componentes da actividade humana: a *percepção* como entrada, o *pensamento* como processamento interno e a *acção* como saída. Esta sequência permite-nos ver as actividades matemáticas como perceber objectos, pensar sobre eles e realizar acções sobre eles.

Se pensarmos apenas em termos de entradas e saídas a matemática elementar começa com a *percepção* de objectos do mundo real e a *acção* sobre esses objectos. Os objectos percebidos seguem a teoria de Van Hiele, são primeiro vistos como estruturas visuais-espaciais, mas depois, à medida que são analisados e as suas propriedades são testadas, são descritos verbalmente e submetidos a uma classificação (primeiro em colecções, depois em hierarquias) que corresponde ao início de uma dedução verbal relacionada com as propriedades e ao desenvolvimento sistemático de uma demonstração verbal. Já as acções sobre os objectos, como por exemplo contar, conduzem a um tipo de desenvolvimento diferente. O processo de contar é desenvolvido usando palavras numéricas e símbolos que serão conceptualizados como conceitos de número. Este é um tipo de desenvolvimento bastante diferente do anterior como pode ser constatado por exemplo pelas teorias anteriormente referidas (teoria da reificação de Anna Sfard, pensamento proceptual de David Tall ou teoria APOS de Ed Dubinsky). Estes dois modos de desenvolvimento que têm por base a percepção e a acção são completamente distintas. No entanto, Tall (1995) considera que em vez de ver a evolução da matemática elementar como um desenvolvimento simples na forma da teoria de estádios neo-piagetiana, prefere uma outra alternativa onde possa ver estes dois desenvolvimentos diferentes a ocorrer ao mesmo tempo. Um é visual-espacial, torna-se verbal e conduz à demonstração, o outro usa os símbolos quer como processos para fazer coisas (tal como contar, adicionar, multiplicar) quer como conceitos para pensar sobre (tal como número, soma, produto).

Como foi referido estes desenvolvimentos podem ocorrer de uma forma completamente independente. Numa perspectiva histórica, Tall refere que podemos admitir que os gregos antigos desenvolveram uma teoria da geometria (incluindo construções geométricas de aritmética) sem nenhum simbolismo para a álgebra e a aritmética e é possível desenvolver a aritmética e a álgebra sem qualquer referência à geometria. No entanto têm sido feitas muitas ligações vantajosas entre os métodos visual e manipulativo simbólico, podendo assim tirar vantagem destas ligações para desenvolver uma abordagem mais versátil que aproveite as principais vantagens de cada uma.

Este tipo de desenvolvimento vai-se tornando cada vez mais complexo, conduzindo ao pensamento matemático avançado que envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por um vasto leque de actividades matemáticas. Estas estruturas servem para construir novas ideias que fundamentam e estendem o sistema crescente de teoremas demonstrados. A figura 2.19 pode assim resumir o desenvolvimento cognitivo do indivíduo, desde o pensamento matemático elementar até ao pensamento matemático avançado. Tall parte da hipótese que este tipo de pensamento começa com a "percepção de" e a "acção sobre" os objectos do mundo externo e é construído através de dois desenvolvimentos paralelos – um que evolui do visual-espacial para o verbal dedutivo e o outro que se baseia num sucessivo capsular de processos em objectos através da manipulação de símbolos – que servem para inspirar um pensamento criativo baseado em objectos formalmente definidos e na demonstração sistemática.

Para melhor compreender a evolução de cada um destes desenvolvimentos e das ligações que se podem estabelecer entre eles, devemos ter em atenção a terceira componente da actividade humana referida anteriormente, o pensamento, que se refere à forma como processamos internamente a informação.

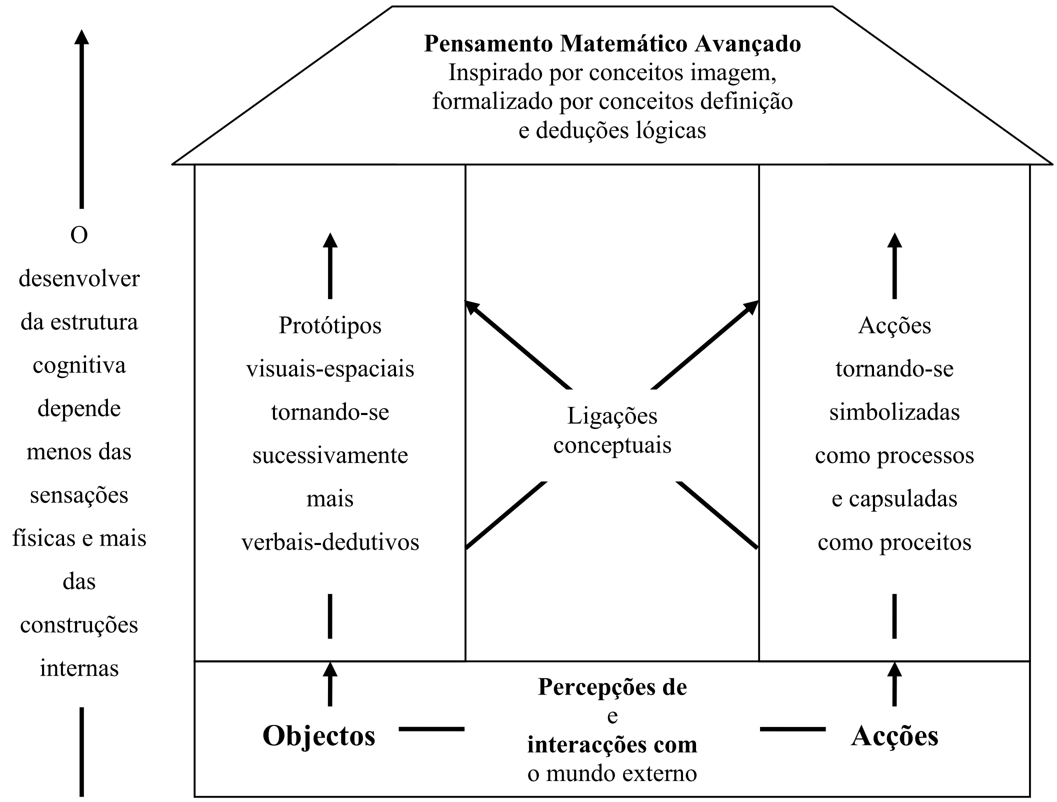


Figura 2.19. Esboço do desenvolvimento cognitivo desde a criança ao matemático investigador (adaptado de Tall, 1995, p. 64).

Esta componente é bastante mais difícil de descrever e analisar, no entanto, podemos conhecê-la através de algumas das suas manifestações como por exemplo o estatuto dos objectos mentais produzidos e das representações desses mesmos objectos. Tall (1995) parte da teoria de Bruner sobre as representações (motoras, icónicas e simbólicas), para fazer a distinção entre matemática elementar onde os objectos são descritos e matemática avançada onde os objectos são definidos. Ele considera que embora em ambos os casos seja usada a linguagem para formular as propriedades dos objectos, na matemática elementar a descrição é construída a partir da experiência com o objecto, na matemática avançada as propriedades dos objectos são construídas a partir da definição. Esta inversão causa grandes dificuldades de acomodação para os principiantes na matemática avançada, sendo necessário recorrer a uma série de tipos de representação diferentes. Tall considera assim que devemos incluir as seguintes representações: motoras (processos físicos), icónicas (processos visuais) e três formas de representação simbólica, a saber, verbal (descrição), formal (definição) e proceptual (dualidade processo-objecto). Na figura 2.20 podemos ver o uso destas diferentes formas de representação aplicadas em tópicos diferentes.

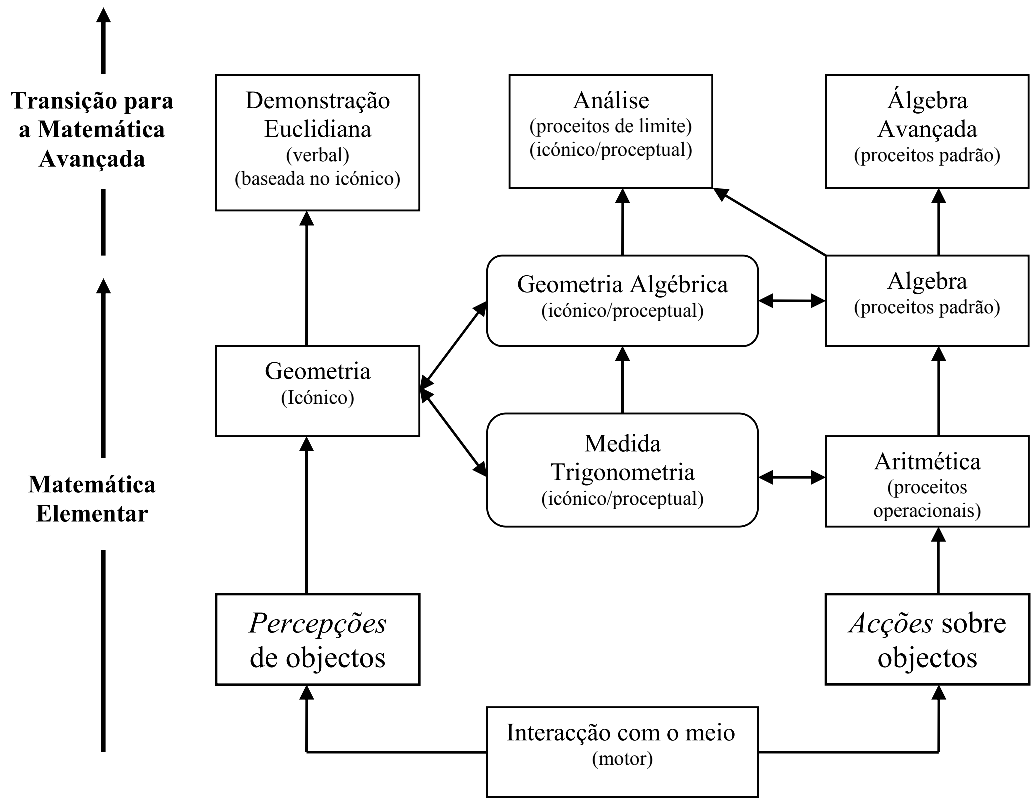


Figura 2.20. Acções e objectos na construção de várias estruturas do conhecimento matemático (adaptado de Tall, 1995, p. 69).

Ela mostra-nos o desenvolvimento do visual-espacial para o verbal na geometria, o desenvolvimento proceptual na aritmética e álgebra e as relações entre eles na medida, trigonometria e coordenadas cartesianas. No topo da figura estão os tópicos que iniciam a transição para o pensamento matemático avançado. Tall considera que todos estes tópicos requerem uma reconstrução cognitiva significativa. A demonstração euclidiana necessita de uma organização sistemática continuada e de formas de combinar a dedução verbal para inspirar a demonstração visual (por exemplo o uso de triângulos congruentes). A evolução em direcção à análise tem as dificuldades causadas pelo proceito de limite. O desenvolvimento na direcção da álgebra mais avançada (como os vectores em três e mais dimensões) envolve tópicos como o vector produto que viola a propriedade comutativa da multiplicação ou a ideia de quatro ou mais dimensões que ultrapassa e corta a ligação visual entre equações e a geometria imaginável.

Ao tentar fazer a separação entre os dois tipos de pensamento matemático, Tall começa por admitir que a transição entre o pensamento matemático elementar e o avançado se pode situar no topo da figura 2.20. Todos estes assuntos envolvem dificuldades que requerem uma reconstrução cognitiva considerável e, por várias vezes, na história foram tópicos de investigação para os matemáticos da época. Na análise e na álgebra avançada também aparece uma quantidade considerável de assuntos que são ensinados na universidade. Parece natural que estes assuntos façam parte da matemática avançada. Ele considera, no entanto, que a geometria euclidiana, a análise e a álgebra avançada devem ser consideradas como pertencendo à matemática elementar, pois embora cada um destes assuntos tenha as suas próprias dificuldades, a mudança cognitiva universal ocorre com a introdução do método axiomático onde os objectos matemáticos têm um novo estatuto cognitivo como conceitos definidos construídos a partir de definições verbais. Esta é uma mudança no estado cognitivo do equilíbrio da convicção visual e manipulação proceptual para objectos definidos e dedução formal. Tall completa assim o esquema da figura 2.20 colocando na zona do pensamento matemático avançado a geometria, análise e álgebra formais apoiadas pelas definições e lógica formais com vista ao desenvolvimento de um pensamento criativo e da investigação.

Embora esta seja a forma que Tall considera a mais adequada para fazer a separação, não deixa de referir que podemos considerar o último nível da matemática elementar como sendo um estádio preliminar do pensamento matemático avançado, uma vez que as ideias elementares são levadas aos seus limites antes da crise teórica que elas geram requerer a reconstrução de uma visão formal. Embora sem grandes consensos, esta também parece ser a opinião do grupo do PME sobre pensamento matemático avançado que reuniu, pela primeira vez, no encontro de 1987 e onde foi acordado que os tópicos onde apareceria o pensamento matemático mais avançado seriam aqueles que eram ensinados nas aulas regulares a partir dos 16 anos.

Segundo Tall (1991) a passagem do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição importante: da descrição à definição, do convencer ao provar de uma forma lógica baseada nestas definições. Esta transição requer uma reconstrução cognitiva que se vê durante o início do percurso no ensino superior como uma luta com as abstracções formais como se elas dominassem a aprendizagem nesta fase inicial. É a transição da *coerência* da matemática elementar para a *consequência* da matemática avançada, baseada em entidades abstractas que o indivíduo deve construir através de deduções das definições formais.

A sistematização feita por Tall acerca da forma como se desenvolve o pensamento matemático pode ser encarada como redutora quando ele coloca a ênfase na percepção e na acção sobre o meio, donde resultam dois modos de crescimento cognitivo que ele considera poderem desenvolver-se de forma independente. Assim, a percepção do meio conduz ao estudo do espaço e forma levando à geometria, enquanto que a acção sobre o meio conduz a uma matemática simbólica suportada por um pensamento proceptual. Esta separação entre os dois modos de desenvolvimento parece não ser tão nítida, pois podemos considerar que as representações geométricas podem resultar de uma acção sobre o meio ou que o acto de contar pode, também ele, ser resultado da percepção. Este tipo de relações entre as duas sequências de desenvolvimento referidas por Tall não é tido em conta de forma explícita no seu modelo embora ele admita a existência de algumas ligações conceptuais entre ambos (ver por exemplo a figura 2.29). Por outro lado ele engloba na matemática simbólica vários tipos de pensamento matemático (algébrico, proporcional, estatístico, lógico, etc.) que parecem apresentar características diferenciadas, pelo que seria interessante estudar de forma mais pormenorizada o modo como cada um deles se desenvolve. Esta distinção parece não ter sido realçada por Tall, pois ele está preocupado essencialmente com a construção dos conceitos matemáticos avançados, onde parece considerar que o pensamento proceptual e a intuição visual-espacial podem descrever de forma concisa os diferentes modos de pensamento a partir das definições e da lógica formal.

4. Algumas características da matemática avançada

4.1. Processos envolvidos no pensamento matemático avançado

Para Tall (1991, 1995) o pensamento matemático avançado tem por base entidades abstractas que são construídas através de deduções e definições formais. Ele refere-se essencialmente às propriedades dos objectos que são elaboradas a partir da sua definição. Em contrapartida o pensamento matemático elementar refere-se essencialmente à descrição dos objectos feita com base nas suas propriedades concretas e na sua manipulação experimental. Segundo Dreyfus (1991) é possível pensar sobre tópicos de matemática avançada de uma forma elementar e a distinção entre os dois tipos de pensamento reside na complexidade e na forma como se lida com ela. Ele admite que não há uma distinção profunda entre muitos dos processos que são usados no pensamento matemático elementar e avançado, mesmo considerando que a matemática avançada se foca essencialmente nas abstracções de definição e dedução. Os processos que Dreyfus considera estarem presentes nos dois tipos de pensamento são os processos de *representação* e de *abstracção*, sendo a principal diferença marcada pela forma como a complexidade que é exigida em cada um deles é abordada. Ele considera que, através da representação e da abstracção, podemos passar de um nível de detalhe para outro e desta forma gerir a complexidade crescente que se verifica na passagem de um modo de pensamento para o outro. Estes processos, quando aplicados ao pensamento matemático avançado, são, muitas vezes, processos matemáticos e psicológicos em simultâneo. Por exemplo se considerarmos a construção de um gráfico de uma função, executamos um conjunto de processos que seguem certas regras que podem ser expressas em linguagem matemática, mas em simultâneo estamos a criar uma imagem mental do gráfico da função. Ambas as imagens criadas (mental e matemática) estão relacionadas e uma não pode aparecer sem a outra, pelo que elas representam os aspectos matemático e psicológico deste processo. De seguida apresentam-se mais em detalhe os processos envolvidos na representação e na abstracção presentes no pensamento matemático avançado.

4.1.1. Processos envolvidos na representação

Segundo Dreyfus (1991) os processos envolvidos na representação são três: o processo de representação, a mudança de representações e a tradução entre elas e a modelação.

O processo de representação envolve três componentes principais: as *representações simbólicas*, as *representações mentais* e a *visualização*. As representações simbólicas são consideradas como absolutamente indispensáveis na matemática avançada. Como já vimos anteriormente no trabalho de Tall, os símbolos permitem conduzir um pensamento proceptual. Eles envolvem relações entre signos e significado, servem para desenvolver o conhecimento pessoal implícito, o significado, que é explicitado através desses símbolos. Deveremos, no entanto, ter em atenção que tem que haver algum significado associado com a noção antes do símbolo para que esta possa ser usada. Outra componente do processo de representação prende-se com a representação mental de um dado objecto ou processo. Representar um conceito significa gerar um exemplo, uma imagem ou um caso. Esta descrição é no entanto incompleta, pois não especifica se o caso gerado é simbólico ou mental nem nos indica o que significa gerar em termos dos processos pelos quais as representações mentais aparecem e são desenvolvidas. Temos assim que enquanto a representação simbólica é externamente escrita ou falada com o objectivo de tornar a comunicação mais fácil, a representação mental refere-se aos esquemas internos ou imagens de referência que a pessoa usa para interagir com o mundo externo. A representação mental torna-se assim fundamental para que a pessoa possa comunicar o seu pensamento acerca de um dado objecto ou processo. A visualização é outra componente do processo de representação, processo pelo qual as representações mentais podem ser criadas. Ela oferece-nos intuição e compreensão, surge como um processo de formar imagens e utilizá-las eficazmente na descoberta e compreensão dos conceitos matemáticos (Domingos, 1994).

Para Dreyfus (1991) o sucesso em matemática passa também por ter representações mentais que contenham vários aspectos do conceito relacionados. O processo pode designar-se por ligação entre múltiplas representações e assume-se que as várias representações mentais do mesmo conceito devem complementar-se e eventualmente devem mesmo integrar-se numa única representação. É neste sentido que ele considera a mudança de representações e a tradução entre elas como outro dos processos que estão envolvidos na representação. Dreyfus considera que embora seja importante ter várias representações de um conceito, a sua existência só por si, não é suficiente para tornar flexível o seu uso. Para manejar com sucesso os conceitos precisamos que as várias representações estejam correcta e fortemente ligadas. A necessidade de mudar de uma representação para outra torna-se evidente sempre que a outra seja mais eficiente para o passo que pretendemos dar. O processo de mudar de representações está assim intimamente associado com o de representar. A mudança deve ser, na maioria das vezes, efectuada entre representações actuais. Segundo Dreyfus, o processo que está fortemente relacionado com a mudança de representações é tradução entre elas. No caso do pensamento matemático avançado esta tradução pode ser entendida como o passar da formulação de uma propriedade matemática ou problema para outro. É o que acontece por exemplo com a resolução de problemas aplicados, onde é necessário utilizar determinados conceitos e propriedades matemáticas para representar fenómenos físicos.

A modelação é outro dos processos envolvidos na representação. Este termo refere-se normalmente à procura de uma representação matemática para um objecto não matemático ou processo. No caso do pensamento matemático avançado Dreyfus (1991) considera que modelar significa construir uma estrutura matemática ou uma teoria que incorpora as características essenciais do objecto, sistema ou processo a ser descrito. O modelo pode assim ser usado para descrever o comportamento do objecto ou processo a modelar. O processo de representar é, de alguma forma, análogo ao de modelação, mas noutro nível. Na modelação a situação ou sistema é físico e o modelo é matemático; na representação o objecto a ser representado é a estrutura matemática e o modelo é a estrutura mental. Assim a representação mental está relacionada com o modelo matemático como o modelo matemático está relacionado com o sistema físico (Dreyfus, 1991).

4.1.2. Processos envolvidos na abstracção

Quando um aluno desenvolve a capacidade de conscientemente fazer abstracções de situações matemáticas ele alcança um nível mais avançado do pensamento matemático. Como pré-requisito para que essa abstracção aconteça, além do processo de representar são necessários mais dois, a *generalização* e a *síntese* (Dreyfus, 1991).

Para Dreyfus generalizar é obter ou induzir de situações particulares para identificar traços ou atributos comuns que permitem expandir os domínios de validade. Este processo pode envolver diferentes níveis. Por exemplo se um aluno sabe pela experiência que uma equação linear de uma variável tem uma solução e que muitos sistemas de duas ou três equações lineares em duas ou três variáveis têm uma solução, ele pode generalizar este conhecimento a um sistema de n equações lineares com n variáveis. Neste caso trata-se de fazer a transição dos casos particulares n=2 e n=3 para o caso geral n, onde precisamos identificar o que há de comum nas condições iniciais para poder conjecturar e estabelecer o domínio de validade da generalização. Nesta situação o caso geral não requer a formulação de outros conceitos matemáticos para além dos que estavam presentes nos casos particulares. Noutros níveis pode ser necessário incluir a formulação desses conceitos. Por exemplo, se considerarmos a transição da convergência de uma sucessão numérica para a convergência de uma sucessão de funções é necessário ter em conta a topologia no espaço das funções, o que aumenta consideravelmente as necessidades cognitivas no processo de generalização. No caso específico da convergência de funções o grau de dificuldade na generalização é de tal ordem complexo que foi objecto de várias décadas de discussão entre os matemáticos (Cauchy, Abel e Fourier) no início do século XIX.

Tall (1991) refere-se à distinção cognitiva que deve ser feita entre diferentes tipos de generalização tendo em consideração as actividades cognitivas que estão envolvidas. Ele refere-se assim às *generalizações expansivas* como sendo aquelas em que se estende a estrutura cognitiva existente sem requerer mudanças nas ideias correntes. Quando tais mudanças são requeridas o processo é chamado *generalização reconstrutiva* e pode ser identificado com a abstracção. Outro tipo de generalização identificado pelo investigador, *generalização disjuntiva* diz respeito a peças de nova informação desligadas que são adicionadas às estruturas do conhecimento já existentes, sem que haja qualquer integração com estas. Trata-se de uma generalização no sentido em que o aluno pode ser capaz de operar com um maior número de exemplos embora não seja capaz de compreender a extensão das implicações abstractas que lhe estão associadas, por se tratar de um conjunto de peças de informação que não estão ligadas entre si.

A síntese é outro dos processos envolvidos na abstracção. Segundo Dreyfus (1991), sintetizar significa compor ou combinar partes de tal forma que elas formem um todo, uma entidade. Por vezes, este todo é mais do que a soma das partes. Por exemplo na álgebra linear os alunos aprendem em profundidade um conjunto de factos isolados sobre ortogonalização de vectores, diagonalização de matrizes, transformações de bases, soluções de sistemas de equações lineares, etc. e, mais tarde, todos estes factos acabam por se fundir numa imagem simples no seio da qual todos eles estão compreendidos e interrelacionados. É a este processo de fundir que Dreyfus chama de síntese.

O processo de abstracção surge assim, para Dreyfus, intimamente ligado com a generalização e a síntese. No entanto, ele considera que nem um nem o outro fazem exigências cognitivas tão fortes como a abstracção. Ela destaca-se precisamente por conseguir reunir o potencial da generalização e da síntese. A natureza dos seus processos mentais é que é diferente da dos processos de generalização e de síntese. Abstrair é antes de mais um processo construtivo – a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, a partir de propriedades e relações entre objectos matemáticos. Este processo está dependente do isolamento que o indivíduo consegue fazer das propriedades e relações apropriadas e requer a capacidade de deslocar a atenção dos próprios objectos para a estrutura das suas propriedades e relações.

Segundo outros autores, para além de representar e abstrair outros processos intervêm no pensamento sobre matemática avançada. Ervynck (1991) descreve aqueles que estão relacionados com a criatividade e que, segundo ele, envolvem quer a visão de construir partes de uma estrutura por conjectura e argumentação quer a capacidade de, por vezes, refinar a estrutura com base numa abordagem matemática dedutiva. Ervynck sugere que um acto de criatividade pode requerer compreensões tais como criar um conceito útil, descobrir uma relação não notada e construir uma ordenação útil. Embora a expectativa tradicional seja a de um resultado rigoroso e preciso, o processo em si próprio pode ser circular e errático. O poder da motivação para a criatividade matemática deve resultar de uma interacção de elementos tais como compreensão, intuição, reorientação em direcção ao que é importante, generalização e capacidade de se focar nos traços principais.

4.2. O papel da demonstração

Quando os alunos começam a estudar a matemática mais avançada têm grandes dificuldades com o processo de demonstração até conseguirem familiarizar-se com este modo de apresentação de conhecimentos matemáticos.

Para Tall (1991) um passo essencial na matemática avançada é ter em conta a transição da explicação *genérica* para a demonstração formal. Por vezes, a explicação do conceito geral, a partir de um exemplo típico, é mais fácil de compreender que o processo de reconstrução baseado no formalismo. Para Hanna (1991) o ponto de partida para a compreensão é a ideia matemática simples baseada na experiência do dia a dia. Para se poder progredir, estas ideias simples devem ser desenvolvidas e explicitadas. Para isso é necessário algum grau de formalismo. Deve criar-se uma linguagem: definir símbolos, regras específicas de manipulação e delinear o alcance das operações matemáticas. Deve ensinar-se uma grande precisão, separando o essencial do não essencial e alcançar uma grande generalidade.

Este tipo de abordagem tem no entanto alguns problemas. Uma vez distanciados do contexto intuitivo original os alunos podem perder de vista a realidade e permanecer como manipuladores de símbolos. Hanna considera assim que há quatro questões que deveremos ter em conta ao ensinar matemática com o objectivo de desenvolver o poder de raciocínio dos alunos.

A primeira diz respeito ao formalismo que deve ser visto como uma ferramenta importante para a clarificação, validação e compreensão. Quando se sente a necessidade da justificação e quando esta necessidade pode ser encontrada com um grau de rigor apropriado, a aprendizagem pode ser fortemente realçada.

A segunda tem a ver com a reflexão. Não é suficiente proporcionar experiências matemáticas para que haja crescimento. É preciso que os alunos reflictam sobre essas experiências. Quanto mais os alunos virem a matemática como uma caixa negra que produz respostas instantâneas, menos paciência têm para lidar com os muitos caminhos erráticos que as suas mentes devem ter para tentar agarrar a essência da matemática. O objectivo da pedagogia deve ser ajudar os alunos a manter o nível de concentração necessário para seguir uma determinada linha de raciocínio.

A terceira questão prende-se com a ideia de que a matemática é considerada como precisa, quando de facto os alunos devem desenvolver alguma tolerância para a ambiguidade. O formalismo pode ser um inimigo da compreensão. Por vezes, uma explicação percebe-se melhor se for dada pictoricamente, de forma vaga, por exemplos ou por analogia. Algumas distinções devem, por vezes, ser deixadas confusas (por exemplo os vários papéis do sinal menos, o facto de usarmos $f(x)$ para representar a função e o valor da função no ponto x).

A última questão está relacionada com o facto de que a questão anterior pode gerar alguma confusão e o aluno dever estar consciente da imprecisão em causa para requerer a quantidade de rigor necessária para ajuizar sobre o raciocínio a seguir.

Tall (1995) também se refere à demonstração como um processo que evolui à medida que os conceitos matemáticos se vão complexificando. Distingue assim três tipos de demonstração: verbal, a que envolve proceitos e a formal. A demonstração verbal depende do contexto onde a mesma ocorre. Por exemplo na geometria euclidiana podemos considerar a transição de demonstrações visuais genéricas para os triângulos e circunferências baseadas na noção principal de triângulos congruentes. Embora não seja uma demonstração lógica no sentido da axiomática da matemática contemporânea, ela introduz o indivíduo num dos aspectos mais importantes da demonstração axiomática através da organização sistemática onde os teoremas são provados com base nos já estabelecidos anteriormente.

A demonstração envolvendo proceitos é realizada através do uso de processos interiorizados. Por exemplo a demonstração em aritmética é sobretudo um cálculo genérico típico de uma classe de exemplos ou um cálculo algébrico (a demonstração de que a soma de dois números ímpares consecutivos, $2n+1$ e $2n+3$, é um múltiplo de 4, $4n+4$)

A demonstração ao nível formal consiste, essencialmente, em rearranjar o conteúdo de um dado conjunto de afirmações envolvendo quantificadores para dar outro conjunto de afirmações com quantificadores. Estas afirmações estão relacionadas com definições de conceitos matemáticos formais onde certas propriedades dos conceitos são dadas e outras são deduzidas. Segundo Tall, a parte lógica da dedução é apenas a ponta do icebergue. A parte abaixo da água é uma aventura para muitos dos que tentam navegar pela primeira vez. Os peritos no pensamento matemático, isto é, os matemáticos usam muito mais que a sua experiência para escolher os conceitos que vale a pena estudar, para os formular de forma produtiva e para os seleccionar como linhas de ataque para a demonstração.

Dos vários processos envolvidos na demonstração, muitos deles podem ser encontrados num nível elementar. Por exemplo uma visão ampla da demonstração como uma actividade de resolução de problemas oferece procedimentos de resolução de problemas como a construção do pensamento reflexivo através da divisão do problema em três fases – entrada, ataque e revisão – que pode ser realizada no ensino secundário (Mason e outros, citado por Tall, 1991). Focando-se na demonstração como um processo de verificação, Mason também vê esta actividade a três níveis:

– Convencer-se a si próprio, o que envolve compreender porque é que a afirmação é verdadeira,

– Convencer um amigo, o que requer uma organização inicial dos argumentos,

– Convencer um inimigo, o que significa uma análise e refinamento dos argumentos iniciais para que possa aguentar o teste da crítica.

Alibert e Thomas (1991) valorizaram um processo de demonstração que privilegiava aquilo que eles denominaram de “debate científico”. Foi implementado um método de ensino em que os alunos eram confrontados com sequências de pensamento matemático que incluía conjecturas, verificação através de argumentos convincentes ou refutação através de contra exemplos. Neste debate todos os alunos eram convidados a pensar em possíveis teoremas sobre um determinado tópico e, posteriormente, a tentar prová-lo ou não.

Este tipo de abordagem conduziu-os a algumas conclusões sobre a importância das demonstrações e a compreensão dos alunos sobre as mesmas, que são:

a) Há uma diferença importante e distinta entre o tipo de provas produzidas pelos matemáticos ao investigar sobre novas áreas com o objectivo de convencer os outros sobre a validade dos seus resultados e as demonstrações destes resultados que serão mais tarde usadas para os transmitir aos alunos. As últimas demonstrações precisam de incluir algum material extra que dê uma visão global da demonstração e da sua estrutura, se ela é significativa para a média dos alunos e não apenas uma sequência linear de raciocínio simbólico com controlo da validade passo a passo;

b) Os contextos em que os alunos encontram as demonstrações podem influenciar grandemente a sua percepção sobre o valor da mesma. Estabelecendo um ambiente onde os alunos possam ver e experimentar o que é necessário para convencerem outros, sobre a verdade ou falsidade das proposições, a demonstração aparece como um instrumento de valor pessoal que eles podem ter que usar no futuro.

5. Definição de termos

Capsular – O termo capsular corresponde ao termo em inglês *encapsulation*, e refere-se à conversão de um processo dinâmico num objecto estático. Mais concretamente, a construção dos objectos matemáticos é feita pelo capsular de processos interiorizados que são coordenados de modo adequado. Termo usado por Ed Dubinsky (1991) no desenvolvimento da teoria APOS. Pode também usar-se capsulação.

Compartimentação – Refere-se à existência de dois esquemas diferentes na estrutura cognitiva, que são potencialmente conflituosos. Este conflito só se torna efectivo (actual) se ambos os esquemas são activados em simultâneo. (Por exemplo o aluno pode referir a definição formal de função quando a mesma lhe é pedida, mas na realização de tarefas onde necessita explicitar o conceito refere-se apenas a aspectos específicos – como o gráfico ou a expressão algébrica). Termo usado por ShlomoVinner (1981) na sua teoria relativa às noções de conceito definição e conceito imagem.

Conceito imagem – Serve para descrever a estrutura cognitiva total que é associada ao conceito. Inclui todas as imagens mentais e todas as propriedades e processos que lhes estão associadas. Termo usado por Shlomo Vinner e David Tall (1981).

Conceito definição – É uma parcela do conceito imagem total que existe na nossa mente. Formulação recente apresentada por David Tall (2003).

Concepção estrutural – Uma de duas formas básicas de abordar um conceito matemático abstracto (a outra é chamada concepção operacional), inspirado por Anna Sfard (1989) no desenvolvimento da teoria da reificação. A concepção estrutural ocorre quando uma dada noção é concebida como um objecto matemático.

Concepção operacional – Uma de duas formas básicas de abordar um conceito matemático abstracto (a outra é chamada concepção estrutural). A concepção operacional ocorre quando uma pessoa vê uma dada noção como referindo um processo em vez de um objecto.

Descapsular – O termo descapsular corresponde ao termo em inglês *de-encapsulation,* e refere-se à capacidade de percorrer o caminho inverso do capsular. Mais concretamente, corresponde à capacidade de partir do objecto matemático para aceder aos processos que lhe estão subjacentes. Pode também usar-se descapsulação.

Pensamento matemático avançado – Foca-se essencialmente nas abstracções de definições e deduções. Tem por base os processos de representação e abstracção, processos estes que, no nível de ensino estudado, têm um maior grau de complexidade. Termo usado por David Tall (1995) e Tommy Dreyfus (1991).

Pensamento matemático elementar – Foca-se essencialmente na descrição dos objectos feita apenas com base nas suas propriedades concretas e na sua manipulação experiencial. Também parte dos processos de representação e abstracção que, no nível de ensino estudado, apresentam um grau de complexidade baixo.

Pensamento proceptual – Refere-se à combinação de dois tipos de pensamento: o processual e o conceptual. O pensamento processual está relacionado com aspectos relativos a procedimentos concretos relacionados com o conceito em estudo, enquanto que o conceptual diz respeito à representação do mesmo objecto usando símbolos diferentes que culminam num mesmo proceito. Termo usado por Eddie Gray e David Tall (1994).

Proceito – O termo *proceito* é um neologismo que, à semelhança do termo inglês *procept*, pretende designar um processo e um conceito representados pelo mesmo símbolo. Termo usado por Eddie Gray e David Tall (1994).

CAPÍTULO III

Investigação sobre conceitos matemáticos no ensino superior

Neste capítulo apresentam-se alguns dos resultados da investigação realizada no domínio da matemática avançada. Foram analisados vários estudos realizados nas últimas duas décadas, abrangendo alunos que estavam a terminar o ensino secundário ou no início do ensino superior. De seguida apresentam-se os principais resultados destas investigações que dizem respeito ao conceito de limite de uma sucessão, ao conceito de função e de limite de uma função, à continuidade e à derivada de uma função.

1. O conceito de limite de uma sucessão

Com o objectivo de caracterizar o conceito imagem dos alunos que ingressavam na faculdade, Tall e Vinner (1981) recorrem aos resultados de um questionário onde era pedido aos alunos se eles tinham encontrado o conceito de limite de uma sucessão anteriormente, qual a sua definição precisa, informal ou se não tinham nenhuma definição e ainda era pedido que encontrassem o limite de algumas sucessões dadas, como por exemplo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)$. Também se pretendia que os alunos dissessem se o número 0.999… seria igual a 1, justificando a resposta apresentada. As respostas obtidas apontaram no sentido da existência de alguns conflitos potenciais. Assim, embora um matemático actual possa considerar que o cálculo do limite anterior é um problema similar ao da questão relacionada com o número 0.999…, as respostas dos alunos mostraram que 14 dos 36 alunos questionados defendiam que o valor do limite era igual a 2 mas que 0.999… era menor do que 1. As justificações para as respostas à última questão eram expressas em termos infinitesimais com argumentos do tipo "ele é menor do que 1, porque a diferença entre ele e 1 é infinitamente pequena" ou "menor do que 1, porque mesmo no infinito o número embora próximo de 1 não é tecnicamente 1". Tall e Vinner consideram assim que estas duas questões invocam partes diferentes do conceito imagem do processo limite. Esta abordagem parece revestir-se de um grau de complexidade bastante grande, uma vez que se trata de um assunto que é estudado na Análise Não Standard (Diener, 1995), pelo que é de esperar que os alunos no início do estudo dos limites utilizem diferentes partes do conceito imagem. Num teste posterior os mesmos alunos foram questionados para escreverem os decimais seguintes na forma de fracção: 0.25, 0.05, 0.333…, 0.999…, etc. Treze dos catorze alunos que anteriormente tinham considerado que 0.999… era menor que 1 agora afirmavam que 0.9… era igual a 1. Alguns destes alunos experimentaram um conflito cognitivo actual que pode ser ilustrado por algumas das respostas apresentadas a seguir: "0.333… é igual a $\frac{1}{3}$", "0.999… é igual a 3 vezes 0.333… é igual a 3 vezes $\frac{1}{3}$ que é igual a *asneira* (sic)", "0.999… é igual a 1 ou (não existe)" ou "0.999…é aproximadamente igual a 1". Outro factor de conflito que Tall e Vinner (1981) consideram ser bastante importante prende-se com o conceito imagem que os alunos formam de "$s_n \to s$" que implica que a sucessão s_n se aproxima de s mas nunca atinge esse valor senão no infinito. Perante este conceito imagem o caso de 0.999… não poderá ser igual a 1 porque o processo de se aproximar de 1 continua indefinidamente sem nunca ser completado. Assim, na formação do conceito imagem, deve recorrer-se a uma grande diversidade de sucessões e não apenas àquelas que são dadas por fórmulas onde o processo parece nunca vir a igualar o limite.

A aprendizagem do conceito com base na definição formal pode fazer com que a imagem do conceito definição que se forma na sua estrutura cognitiva seja bastante fraca (Tall e Vinner, 1981). Podemos considerar como exemplos desta situação as dificuldades que os alunos experimentam quando lidam com o uso dos quantificadores "qualquer que seja" e "existe" na definição de limite de uma sucessão. Tall e Vinner (1981) constataram que, por exemplo, os alunos têm um conceito imagem bastante forte de que se s_n tende para s então $\frac{1}{s_n}$ tende para $\frac{1}{s}$ (desde que o último não seja zero). No entanto a fraca compreensão do conceito definição pode tornar a demonstração formal deste resultado muito difícil para eles. Este fenómeno ocorre quando em presença de um conceito imagem bastante forte e uma imagem do conceito definição bastante fraca.

Outro estudo que pretende aferir sobre a compreensão do conceito de limite de uma sucessão foi realizado por Davis e Vinner (1986). O estudo foi antecedido pelo implemento daquilo que os autores designam por uma pedagogia adequada, onde o professor teve em atenção a necessidade de usar exemplos típicos e não típicos de sucessões que tendem ou não para um limite e ao mesmo tempo foi implementada a definição formal. Os alunos tiveram este ensino no 11º ano e no final eram considerados pelo professor como dotados, sendo capazes de provar teoremas típicos, formular definições correctas, produzir exemplos de sequências para mostrar falhas em definições incorrectas, etc. Depois das férias do verão, no primeiro dia de aulas foi dado um teste escrito aos alunos de uma turma, 15 alunos, onde se pedia o seguinte:

Eu preciso de saber do que é que tu te lembras sobre o conceito de limite de uma sucessão. Escreve alguns parágrafos para mostrares do que te lembras. Eu sugiro que tu podes incluir:

1) Uma descrição de uma sucessão em termos intuitivos ou informais;

2) A definição formal precisa.

Dos 15 alunos apenas 1 deu uma resposta que pode ser considerada como indicação de uma compreensão mais ou menos profunda do conceito. Este aluno respondeu que o limite de uma sucessão é o número a partir do qual todos os termos da sucessão, depois dum certo ponto, variam somente de um pequeno número ε. Os restantes 14 alunos apresentaram concepções próprias inadequadas que influenciaram a definição formal pedida. Para Davis e Vinner o conceito definição foi reconstruído tomando como referência o conceito imagem, conceito este que por sua vez estaria incorrectamente formado e portanto resultando numa definição formal incorrecta. As principais categorias formadas a partir das respostas que estes alunos deram foram:

1) Uma sucessão "não deve atingir o seu limite". Assim a sucessão 1, 1, 1, 1, … pode dizer-se que não converge para um limite.

2 A sucessão deve ser monótona crescente ou monótona decrescente. Por exemplo uma sucessão como $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ não tende para um limite.

3) O limite é o "último" termo da sucessão. Nós chegamos ao limite da sucessão depois de "passar através" de infinitos elementos.

4) As sucessões devem ter um padrão óbvio ou consistente. Sucessões como por exemplo 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1,… ou 1, 2, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ são imediatamente excluídas.

Parece assim que há um conflito entre a definição formal e o conceito de exemplos típicos que podem causar um conceito imagem incorrecto.

Noutro estudo realizado por Aline Robert (1982, citado por Cornu, 1991), ela identificou os diferentes modelos dos alunos sobre a noção de limite de uma sucessão. Alguns alunos evocaram modelos bastante rudimentares, aparentemente resultantes das suas concepções espontâneas, tais como:

Estacionário: “os termos finais por vezes têm o mesmo valor”,

Barreira: “os valores não podem passar l”.

Para além destes modelos surgiram outros que parecem resultar do ensino formal:

Monótono e monótono dinâmico: “uma sucessão convergente é uma sucessão crescente limitada superiormente (ou decrescente limitada inferiormente)”, “uma sucessão convergente é uma sucessão crescente (ou decrescente) que se aproxima de um limite”

Dinâmico: “u_n tende para l”, “u_n aproxima-se de l”, “a distância de u_n a l é cada vez mais pequena”, “ os valores aproximam-se de um número cada vez mais”

Estático: “o u_n está num intervalo próximo de l”, “ o u_n está agrupado à volta de l”, “os elementos da sucessão acabam por se encontrar numa vizinhança de l”

Misto: uma mistura de todos os outros.

À medida que os alunos vão avançando na matemática formal, começam a ser confrontados com definições em palavras e símbolos que dão origem a novas entidades matemáticas através da dedução, construindo as suas propriedades através de teoremas e demonstrações. Os alunos por vezes têm grande dificuldade em lidar com esta nova visão das definições. A sua estrutura conceptual nem sempre é consistente com a teoria formal onde tudo deve ser deduzido das definições através de uma inferência lógica. Nem mesmo os matemáticos usam apenas a lógica. Normalmente há uma acção recíproca entre as imagens mentais (para sugerir) e a dedução (para provar), (Tall e outros 2001). Desta forma também é possível encontrar esta tendência entre os alunos. Pinto (1998) estudou alguns alunos que estavam a iniciar o estudo da Análise Matemática com o objectivo de saber como lidavam com as definições e a dedução e encontrou duas estratégias bastante diferentes: aqueles que *davam significado à definição* a partir de um conjunto de imagens pessoais, dos objectos percebidos, dos processos, de exemplos e contra-exemplos, etc. e aqueles que *extraíam significado da definição* por dedução formal ao demonstrar teoremas. Para Tall e outros (2001), numa primeira análise, estas duas estratégias parecem ser bastante poderosas se usadas de forma sequencial. Inicialmente damos significado pela construção de exemplos e contra-exemplos, pela edificação de um conjunto de possibilidades que podem ser deduzidas das definições e posteriormente movemo-nos para a extracção lógica de resultados hipotéticos formulando-os como teoremas e provando-os. Pinto (1998) verificou que embora os alunos possam usar qualquer das estratégias em situações diferentes, muitos preferem uma estratégia sendo a outra dificilmente usada. Conseguiu verificar no entanto que os alunos podem ter sucesso em qualquer das duas estratégias. Os alunos que recorreram à estratégia de dar significado envolveram-se em contínuas reconstruções de ideias baseadas na forma como expandiram as suas imagens mentais para ter em conta o novo fenómeno. Por exemplo, quando é pedido a um aluno (Chris) a definição de sucessão convergente ele refere que não memorizou a definição e recorre a um gráfico que lhe permite escrever a definição correctamente (figura 3.1) reconhecendo posteriormente que embora tenha desenhado uma linha contínua ela deveria ser apenas constituída por pontos. Ele reconhece todos os elementos envolvidos na definição sem recorrer aos quantificadores e quando lhe pedem para negar a definição anterior volta a escrever a definição correctamente sem fazer qualquer referência explícita à inversão dos quantificadores.

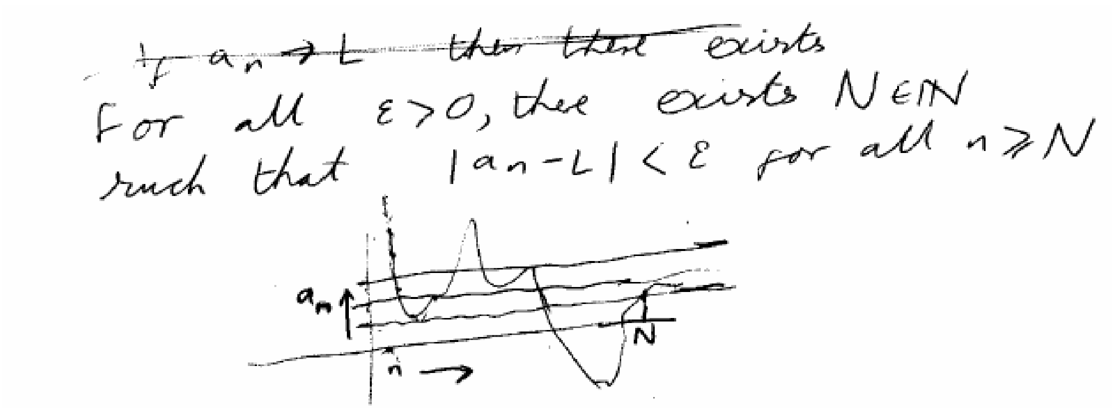


Figura 3.1. A definição de sucessão convergente para Chris (Pinto, 1998, p. 163).

Já os alunos que extraem significado devem primeiro praticar a definição por forma a conseguirem memorizá-la, usando-a depois para elaborar um conjunto de propriedades demonstradas a partir das definições. É o caso do aluno Ross (Pinto 1998) que afirma ter memorizado primeiro a definição de sucessão convergente, através da escrita sucessiva da mesma. Ele acaba por escrever a definição formal usando quantificadores (figura 3.2) e quando lhe pedem para negar a definição ele fá-lo como uma simples manipulação de símbolos trocando os quantificadores.

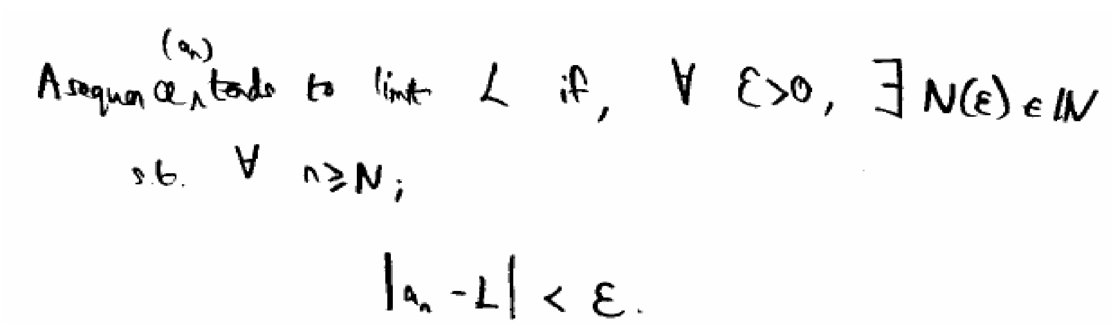


Figura 3.2. Definição de convergência de Ross (Pinto, 1998, p. 161).

Para além dos alunos com sucesso, Pinto (1998), Tall e outros (2001) há outros que revelam bastantes dificuldades. Um dos principais problemas encontrados por Pinto diz respeito às imagens mentais dos alunos que são de tal forma dominantes que os impede de fazer deduções a partir da definição. Por exemplo Laura refere muitas ideias pessoais a respeito do conceito de limite de uma sucessão, tais como "O limite é o número para o qual a sucessão tende, mas nunca o atinge" ou "Seja a_n uma sucessão e L o limite para o qual ela tende. Então quando alguns valores iniciais são colocados na fórmula da sucessão as respostas nunca atingem o valor L (positivo ou negativo)". As suas imagens mentais permitem-lhe dar significado aos enunciados dos teoremas, mas ela é incapaz de escrever a definição no sentido formal. Pinto considera que a definição e demonstração formal representam para Laura um trabalho complicado e desnecessário sobre algo que é obvio. Ela foi incapaz de dar significado à definição formal de forma que lhe permitisse usá-la para fazer deduções lógicas.

Outros alunos fizeram uma tentativa para trabalhar com a definição, no entanto incorreram em erros sérios (Pinto 1998). Por exemplo Rolf refere que aprendeu a definição memorizando-a devido ao grande número de vezes que teve de a escrever. Esta estratégia acabou por não resultar pois ele admitia que podia já não se lembrar, e quando a escreveu ela ficou bastante incompleta (figura 3.3).

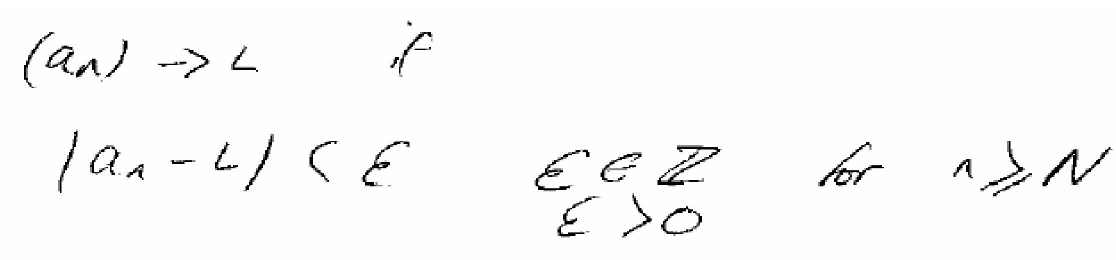


Figura 3.3. Definição de sucessão convergente escrita por Rolf (Pinto, 1998, p. 236).

Para além da definição não ser satisfatória ele também não conseguiu construir uma teoria coerente.

Segundo Pinto e Tall (2001) este estudo revela certos aspectos da construção individual do conhecimento que diferem dos propostos por algumas das teorias cognitivas. Por exemplo, a estratégia do capsular de processos para obter novos objectos, teoria APOS, não parece fornecer o modelo para explicar as estratégias cognitivas do caminho "natural" da aprendizagem. Em vez da construção de um conceito imagem a partir de um objecto definido, abstraindo das "acções sobre os objectos" o aprendiz natural com sucesso compreende o objecto definido reconstruindo-o a partir do conceito imagem. Por outro lado é possível encontrar conceitos imagem que não foram desenvolvidos através da dedução formal mas que mesmo assim parecem ser coerentes com os modelos formais. Estes podem ou não ser transformáveis em linguagem formal, no entanto os indivíduos da posse destes conceitos imagem sentem que conseguem alcançar a teoria embora eles possam não ser suficientes para garantir o sucesso a longo prazo. Outra conclusão que Pinto considera ser possível tirar da sua investigação é de carácter pedagógico, considerando que o ensino da matemática avançada não se deve cingir a uma metodologia simples, ou fórmula, que funciona para todos os alunos. Eles apresentam diferentes exigências cognitivas de acordo com as suas estratégias de aprendizagem, pelo que os professores devem ter em conta ambas as formas de aprender.

2. O conceito de função

Com o objectivo de caracterizar o conceito definição e conceito imagem dos alunos do 10º e 11º anos Vinner (1983, 1991) utilizou um questionário que foi administrado a 147 alunos das escolas de Jerusalém. Os alunos do 10º ano fizeram o teste alguns meses depois de terem estudado o tema e os do 11º tinham estudo o tema no ano anterior. Todos os inquiridos eram considerados bons alunos O conceito foi ensinado a todos os alunos usando a abordagem moderna, onde uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que faz corresponder a cada elemento do primeiro conjunto um e um só elemento do segundo.

O inquérito era constituído por duas partes. Na primeira, a partir da pergunta "na tua opinião o que é uma função", Vinner estabeleceu quatro categorias representativas dos principais conceitos definição invocados pelos alunos. Na primeira categoria 57% dos alunos usaram a definição do livro por vezes misturada com elementos do seu conceito imagem. Muitos repetiram a definição formal usando palavras suas, o que se revelou bastante impreciso ou até mesmo incorrecto do ponto de vista matemático. Na segunda categoria foram consideradas as respostas que admitiam que uma função era uma regra de correspondência e nela foram incluídos cerca de 14% dos alunos. Nenhum destes alunos considerava a possibilidade de existir uma correspondência arbitrária uma vez que as regras não podem ser arbitrárias. Elas devem obedecer a uma determinada lógica ou razão matemática. Na terceira categoria foram colocados cerca de 14% dos alunos que admitiram que uma função é um termo algébrico, uma fórmula, uma equação ou uma manipulação algébrica. Os restantes ou não responderam ou usaram alguns elementos do seu conceito imagem para explicitar a definição. Por exemplo, a função foi identificada pelos alunos com o gráfico, com os símbolos "$y = f(x)$" ou com diagramas de Venn.

Outra parte do inquérito era dedicado a questões do tipo "existe uma função em que cada número diferente de zero corresponde ao seu quadrado e a zero corresponde -1?", sendo também dado um gráfico onde se pretendia saber se era possível arranjar uma função para o representar. Com base nesta segunda parte do inquérito, Vinner tentou caracterizar os principais conceitos imagem destes alunos sobre funções. Assim, entre um terço e dois terços dos alunos consideraram que uma função deve ser dada por uma regra. Se forem dadas duas regras para dois domínios disjuntos estaremos perante duas funções. Se a correspondência for arbitrária, os alunos consideram que poderemos estar perante uma infinidade de funções onde cada número tem a sua própria regra de correspondência. Para alguns destes alunos é possível que uma função seja dada por várias regras relacionadas com domínios disjuntos, desde que esses domínios sejam partes da recta real ou intervalos. Mas, se na correspondência há apenas um ponto que é excepção (como no exemplo citado acima), ela poderá já não ser considerada como função. Há outros alunos ainda que consideram que, se as correspondências não são dadas por uma regra algébrica, não são funções, a menos que a comunidade dos matemáticos as considerem como tal, dando-lhe um nome ou uma notação especial. Cerca de dois quintos dos alunos consideram que o gráfico de uma função deve ser regular, simétrico, persistente ou crescer e decrescer de forma razoável. Por fim há um grupo de alunos que considera que uma função é uma correspondência um a um. Vinner considera que esta abordagem resulta da distorção da definição do livro, como resultado daquilo que ele chama de uma tendência implícita para a simetria: se para um x do domínio há apenas um y no contradomínio, então o contrário também deve ser verdadeiro.

Outro estudo realizado por Vinner e Dreyfus (1989) tem o mesmo objectivo que o acima referido: fazer uma caracterização dos principais conceitos definição e imagem dos alunos do 1º ano de duas instituições de ensino superior de Israel. Neste estudo participaram 271 alunos e 36 futuros professores aos quais foi administrado um questionário semelhante ao do estudo anterior. As categorias que foram formadas correspondem em grande parte a um refinamento das que tinham sido descritas por Vinner (1983). Assim os principais conceitos definição de função encontrados são:

1) Uma correspondência. Uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que fazem corresponder a cada elemento do primeiro conjunto exactamente um elemento do segundo.

2) Uma relação de dependência. Uma função é uma relação de dependência entre duas variáveis (y depende de x).

3) Uma regra. Uma função é uma regra da qual se espera que tenha uma certa regularidade, enquanto que a correspondência podia ser arbitrária.

4) Uma operação. Uma função é uma operação ou uma manipulação. Nós agimos num dado número, geralmente por meio de operações algébricas, para obter a sua imagem.

5) Uma fórmula. Uma função é uma fórmula, uma expressão algébrica ou uma equação.

6) Uma representação. Uma função é identificada, ainda que sem significado, com uma das suas representações gráfica ou simbólica.

A partir do mesmo questionário (Vinner e Dreyfus, 1989) foi ainda possível identificar as seguintes propriedades relativas a conceitos imagem de função:

1) Univocidade. Se a correspondência atribui exactamente um valor a cada elemento do seu domínio, então ela é uma função. Caso contrário ela não é uma função.

2) Descontinuidade. Se o gráfico tem uma falha a correspondência é descontínua num ponto do seu domínio.

3) Divisão do domínio. O domínio da correspondência divide-se em dois subdomínios, em cada um dos quais possui uma regra de correspondência diferente. Como consequência o gráfico deve mudar o seu carácter de um subdomínio para o outro.

4) Ponto excepcional. Existe um ponto de excepção para uma dada correspondência, isto é, um ponto para o qual a regra geral de correspondência não serve.

Foi ainda possível observar, a partir da análise dos inquéritos, o fenómeno de compartimentação. Cerca de 56% dos inquiridos que usaram a definição formal para explicar o que era uma função, não usaram a mesma definição quando interpretaram os gráficos dados ou quando tentaram justificar se determinadas correspondências eram ou não funções, mostrando mesmo nalguns casos comportamentos inconsistentes entre ambas as respostas.

3. O conceito de limite de uma função

Na tentativa de caracterizar o conceito imagem sobre a noção de limite de uma função, Tall e Vinner (1981) analisaram a definição proposta nalguns manuais. Esta começa por um exemplo concreto, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$, onde a função não está definida para o ponto x=1, referindo em seguida que a mesma pode ser escrita da seguinte forma: para todo o número positivo h, há um número k, tal que $|x-1|<k \Rightarrow |f(x)-2|<h$. Partindo desta representação é apresentada a definição de limite: “para todo o número positivo h há um número k, tal que $|x-a|<k \Rightarrow |f(x)-c|<h$”. Explicitamente a definição deve por último especificar que $x \neq a$, pelo que se deve ler: “dado h>0 existe k>0, tal que $0<|x-a|<k \Rightarrow |f(x)-c|<h$”. Os autores consideram que esta definição deve fazer parte do conceito imagem. No entanto avançam com a conjectura de que a abordagem que é anterior à definição é por vezes tão

significativa que o sentido que os alunos lhe dão é essencialmente dinâmica, como x se aproxima de a então $f(x)$ aproxima-se de c, com uma sensação de movimento bem definida.

Com base num questionário dado aos alunos do 1º ano do ensino superior, pediram para estes explicarem o que significava $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)=3$ e para escreverem a definição de $\lim_{x\to a} f(x)=c$ no caso de conhecerem alguma.

Os alunos que responderam à segunda questão, o conceito definição para $\lim_{x\to a} f(x)=c$, foram classificados em duas categorias: os que usaram o conceito definição formal e os que usaram o conceito definição dinâmico. Dos 18 alunos que usaram o conceito definição formal apenas 4 deram uma resposta correcta, enquanto que dos 31 que fizeram uma abordagem dinâmica apenas 4 deram respostas incorrectas. Dos 14 alunos que usaram a definição formal de forma incorrecta 7 misturaram a definição com outras noções de limites tais como: "se $x\to a$, $c-\varepsilon\le f(x)\le c+\varepsilon$ para todo o $n>n_0$" ou "$|f(n)-f(n+1)|<\varepsilon$ para todo n maior que um dado N_0" e os outros 7 deram respostas incompletas ou imprecisas como por exemplo "$|f(x)-c|<\varepsilon$ para todos os valores positivos de ε com x suficientemente próximo de a. Os 27 alunos que usaram a definição correcta de forma dinâmica incluíam essencialmente respostas típicas tais como "o valor de que $f(x)$ se aproxima enquanto os valores de x estão cada vez mais próximos de a é c" ou "enquanto x tende para a, o valor de $f(x)$ tende para c".

Quanto à questão inicial centrada sobre $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)=3$, foi possível constatar que os alunos mostraram empenho, respondendo à questão, mesmo quando não conseguiram dar qualquer resposta à segunda parte (não apresentaram nenhum conceito definição). Assim, dos que não apresentaram um conceito definição 12 usaram uma ideia dinâmica, tendo apenas 1 dado uma resposta incorrecta e 9 usaram outro tipo de justificação, tendo 3 destes respondido incorrectamente. Os que usaram uma ideia dinâmica disseram essencialmente que $\frac{x^3-1}{x-1}$ se aproxima de 3 enquanto x se aproxima de 1, e alguns fizeram a divisão, calculando em seguida o limite da expressão resultante. Os que usaram outras abordagens invocaram algumas ideias relacionadas com a continuidade ou recorreram à regra de L'Hôpital para obter o valor do limite pretendido. Os autores denotam com particular interesse que dos 4 alunos que tinham na situação anterior recorrido à definição formal, 3 deles a continuam a usar neste caso tendo o quarto utilizado um método dinâmico. No entanto dos 14 que usaram a definição formal de forma incorrecta 10 recorreram a um método dinâmico (tendo apenas dois respondido incorrectamente) e 4 usaram a definição formal de forma incorrecta. Assim, dos 70 alunos que responderam 54 usaram um método dinâmico com diferentes níveis de precisão. Tall e Vinner consideram que para muitos dos que usaram este método referindo palavras como “aproximar”, “estar perto de”, “tender para” se pode pôr a hipótese de que $f(x) \neq c$ seja um factor de conflito potencial.

No seguimento do questionário, no final dos dois anos do curso, 22 alunos foram espontaneamente abordados na aula para dizerem se o teorema seguinte era verdadeiro ou falso:

Supondo que se $x \to a$ então $f(x) \to b$

e que se $y \to b$ então $g(y) \to c$

então temos que

se $x \to a$ então $g(f(x)) \to c$.

Vinte e um alunos consideraram que era verdadeiro e apenas 1 referiu que era falso. Mesmo depois de questionados sobre a veracidade da resposta eles continuaram a admitir que o teorema era verdadeiro. Segundo Tall e Vinner tal convicção deve-se ao facto de o conceito imagem de $y = f(x)$ se aproximar de b e $g(f(x)) = g(y)$ se aproximar de c ser bastante poderoso. O teorema é de facto falso. Ele apenas será verdadeiro se $f(x) \neq b$ para x próximo de a. Mas na definição formal que os alunos utilizaram ao longo dos dois anos foi sempre considerado que $\lim_{x \to a} f(x) = c$ significava que para todo o $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$. Os alunos apelaram assim ao seu conceito imagem de limite e não ao conceito definição formal que manejaram ao longo dos dois anos.

A aprendizagem de um conceito como o de limite não é uma tarefa fácil, pois os alunos mesmo antes de este ser ensinado já têm um certo número de ideias, intuições e imagens que lhes são proporcionadas pela sua experiência diária. Segundo Cornu (1991) estas concepções anteriores ao ensino formal podem designar-se por *concepções espontâneas*, que não desaparecem pelo facto de num dado momento ter sido ensinado o novo conceito. Estas ideias espontâneas misturadas com o novo conhecimento adquirido modificam-se e adaptam-se para formar as concepções pessoais dos alunos. Assim, perante a resolução de um problema não é evocada nenhuma teoria única científica, mas antes um raciocínio natural e espontâneo. Segundo Cornu, no caso do conceito de limite, é possível observar que as palavras “tende para” e “limite” têm um significado para os alunos mesmo antes do conceito em si começar a ser ensinado e que eles continuam a confiar nesses significados mesmo depois de terem dado a definição formal. Por exemplo, na sua tese de mestrado, Cornu verificou que a palavra limite apresentava significados diferentes para alunos diferentes em momentos diferentes. A maior parte das vezes ela era considerada como um ponto do qual nos aproximamos sem o atingir, um ponto do qual nos aproximamos e atingimos, um limite superior (ou inferior), um máximo ou mínimo, um intervalo, aquele que vem "imediatamente depois" que pode ser alcançado, um constrangimento, uma proibição, uma regra, o fim ou a chegada. Cornu (1991) verifica que o significado das palavras variava de um aluno para o outro e que a mesma palavra podia ter vários significados para um mesmo aluno, dependendo das situações. As ideias espontâneas podem permanecer na mente dos alunos até estados bastante avançados da aprendizagem. É face a uma grande variedade destas noções espontâneas e a uma tomada de consciência crescente do formalismo que o indivíduo pode facilmente criar na sua mente ideias contraditórias que conduzam a um conceito imagem que contenha factores de conflito potencias, conforme foi referido por Tall e Vinner (1981).

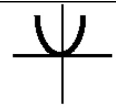
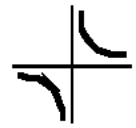
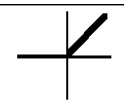
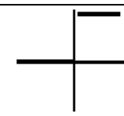
Uma outra questão a ter em conta na aprendizagem do conceito de limite prende-se com o ensino. Cornu (1991) considera que o ensino inicial tende a enfatizar o processo de aproximação do limite em vez do conceito de limite em si mesmo. O conceito imagem associado com este processo contém factores que entram em conflito com a definição formal ("aproxima-se mas não pode atingir", "não pode passar", "tende para"). Desta forma os alunos desenvolvem imagens de limite e infinito que dizem respeito a concepções próprias relacionadas com o processo de "estar próximo", "crescer muito" ou "continuar sempre".

4. A continuidade de uma função

Com o objectivo de caracterizar o conceito imagem, sobre continuidade, dos alunos das escolas inglesas que entram na universidade Tall e Vinner (1981) recorreram a um questionário que aplicaram a 41 alunos. Pedia-se para indicarem quais das funções apresentadas no quadro 3.1 eram contínuas e para darem uma justificação para a sua resposta.

Todos os alunos consideraram que a primeira função era contínua embora muitas das explicações dadas fossem erradas do ponto de vista matemático. Eles justificaram a continuidade, por exemplo, dizendo que a função era dada por uma única fórmula. Na segunda função apenas 6 alunos consideraram que se tratava de uma função contínua. Isto mostra que o conceito imagem que a maioria dos alunos invoca não permite falhas no gráfico. Os 35 alunos que consideraram que a função era descontínua apresentaram argumentos como: "o gráfico não está numa peça única", "a função não está definida na origem" ou " a função vai para infinito na origem". Mesmo entre os que acertaram, por vezes foi possível encontrar alguns conceitos imagem que não coincidiam com o conceito definição: "ela é contínua porque é dada por uma única fórmula".

Quadro 3.1. Funções apresentadas no questionário.

$f_1(x) = x^2$	
$f_2(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$	
$f_3(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$	
$f_4(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$	
$f_5(x) = \begin{cases} 0 & (x \ \ racional) \\ 1 & (x \ \ irracional) \end{cases}$	(Sem figura)

A terceira função foi considerada contínua por 27 alunos, no entanto usaram argumentos como "ela está toda numa peça única". Os 12 que consideraram tratar-se de uma função descontínua usaram justificações diversas tais como: "ela não é dada por uma fórmula simples" ou " há uma mudança repentina no declive". Dois alunos não responderam a esta questão. A quarta função foi considerada contínua por apenas 1 aluno e 2 outros não responderam. Todos os restantes consideraram que se tratava de uma função descontínua com base em diferentes tipos de raciocínio: "ela não está numa peça única", "há um salto na origem" ou "não é uma fórmula simples". A última função foi a que causou maiores problemas. 7 alunos não responderam, 8 consideraram que era uma função contínua e 26 consideraram-na descontínua. Uma razão forte para afirmarem a não continuidade foi o facto de "ela ser impossível de desenhar". Com base nestas respostas parece que o conceito imagem evocado pelos alunos envolve essencialmente gráficos que não têm falhas, são representados por uma peça única ou por uma fórmula simples. No entanto Tall e Vinner consideram que todos estes conceitos imagem têm factores de conflito potencial com a definição formal. Esta definição diz que $f : D \to R$ é contínua em $a \in D$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Alguns dos conflitos potenciais estão relacionados com a natureza do conjunto D. A imagem mental que os matemáticos têm da recta real é que ela não tem falhas, é um todo contínuo. Se considerarmos as funções definidas apenas nos racionais nós temos formalmente funções contínuas que entram em conflito com o conceito imagem referido acima. Por exemplo a função $f : Q \to Q$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \ \ ou \ \ x^2 < 2) \\ 1 & (x > 0 \ \ ou \ \ x^2 > 2) \end{cases}$$

tem um gráfico como o da figura 3.4:

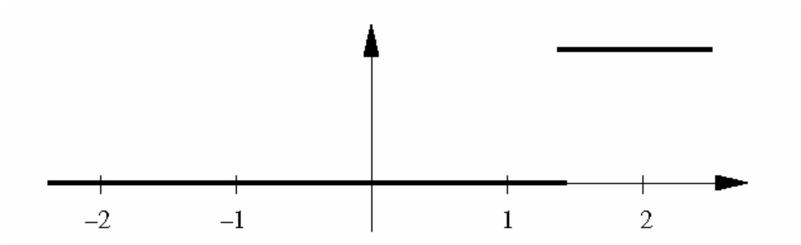


Figura 3.4. Gráfico da função *f*(*x*).

Esta função é contínua mas o gráfico apresenta uma falha.

Quando os alunos são confrontados com estas situações geram-se normalmente conflitos cognitivos com o conceito imagem. Tall e Vinner consideram que numa situação de ensino o professor deve estar atento a estes possíveis conceitos imagem por forma a tentar trazer as imagens incorrectas à superfície e através da discussão tornar o problema compreensível.

Também Vinner (1987) tentou caracterizar o conceito de função contínua dos alunos de ciências da universidade hebraica. O conceito foi abordado pelos professores de várias formas: todos usaram uma abordagem visual relacionada com a possibilidade de desenhar o gráfico sem levantar o lápis do papel, alguns usaram a definição ε, δ, a definição do limite ($f(x)$ é contínua em a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$) e a definição de valor intermédio ($f(x)$ é contínua em [a,b] se para todo o x_1, x_2 tal que $a < x_1 < x_2 < b$ e para qualquer valor intermédio c entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ existe ς, $x_1 < \varsigma < x_2$, tal que $f(\varsigma) = c$). No fim do processo de ensino foi realizado um questionário a 406 alunos, composto por duas partes. Na primeira parte eram dados sete gráficos pedindo-se para os alunos indicarem se as funções correspondentes seriam ou não contínuas e para justificarem as suas respostas. Na segunda parte eram dadas cinco funções definidas pelas suas expressões analíticas e pedia-se o mesmo que na questão anterior. Numa primeira análise foi possível verificar uma percentagem bastante alta de respostas correctas, 87% na primeira parte e 63% na segunda, mas tal como foi referido em Tall e Vinner (1981) muitos alunos deram respostas correctas com base em razões erradas. Para melhor compreender este fenómeno o autor analisou as justificações dadas pelos alunos estabelecendo cinco categorias principais. Na primeira categoria a continuidade é considerada como estando definida (a função) e a descontinuidade como não estando definida. Se $f(x)$ não está definida num certo ponto ela será descontínua, caso contrário, se $f(x)$ está definida em todos os pontos ela é contínua. As justificações dos alunos nesta categoria eram do tipo "a função é contínua porque está definida para todo o *x*" ou " a função é descontínua porque não está definida para todo o *x*". A segunda categoria mostra que a continuidade ou descontinuidade está relacionada com o gráfico. Os alunos nas suas explicações referem o gráfico como justificação: "a função é contínua porque o seu gráfico pode ser desenhado num único traço" ou "a função é descontínua porque o seu gráfico tem duas partes que não se encontram". A terceira categoria refere-se a uma certa referência ao conceito de limite. No entanto, esta categoria é muito mais usada na primeira parte do que na segunda, onde seria mais provável que os alunos recorressem ao limite, uma vez que as funções eram definidas pelas suas expressões analíticas, sendo algumas destas definidas por ramos. Vinner (1987) considera mesmo que o seu uso não foi feito de forma significante. Por exemplo algumas justificações foram do tipo "a função é contínua porque tende para um limite para todo o *x*", "a função é contínua porque $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$" ou "a função é descontínua porque $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$", sendo as duas últimas feitas sem especificar qual era o x_0 no caso em estudo. A quarta categoria é a de não explicação. Vários alunos não dão justificação nalgumas das suas respostas. Vinner considera que esta é uma fraqueza que deve ser destacada uma vez que é de esperar que os alunos neste nível sejam capazes de justificar o que fazem. Nesta categoria apareciam algumas justificações tautológicas como por exemplo "esta função é contínua" ou "esta função é descontínua". A última categoria, outros, é constituída por várias pequenas categorias que não iam além de 3% de respostas. As justificações aqui apresentadas eram bastante variadas, desde referências ao conceito de correspondência unívoca, confusão entre continuidade e diferenciabilidade, aplicações erradas de alguns teoremas e outras explicações irrelevantes.

5. O conceito de derivada

O conceito de tangente aparece normalmente na geometria, por exemplo a tangente a uma circunferência, e é depois estendido ao estudo das funções onde é possível relacionar a tangente ao gráfico com o conceito de derivada. O conceito imagem dos alunos vai sendo construído com base nos vários esquemas que eles vão manipulando e visualizando e por vezes assume como características principais o facto de a tangente poder apenas encontrar a curva num único ponto e não poder atravessar a curva nesse ponto. Este conceito imagem pode levar os alunos a desenhar linhas que não representam a tangente ao gráfico de uma função num ponto dado. Para verificar esta conjectura, Vinner (1991) recorreu a um questionário que foi realizado por 278 alunos de Ciências do 1º ano da universidade no curso de Análise. O questionário era constituído por duas questões. Na primeira eram dados os três gráficos abaixo (figura 3.5) e pedia-se para indicarem quantas tangentes era possível traçar pelo ponto *P* (nenhuma, uma, duas, três ou infinitas).

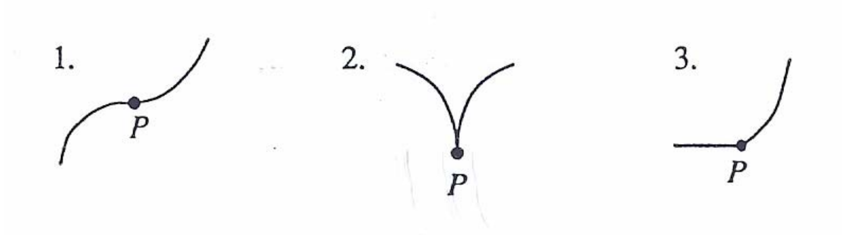


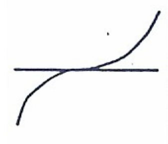
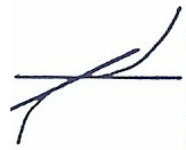
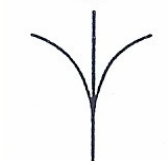
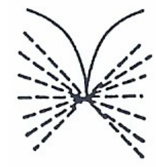
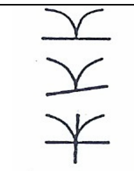
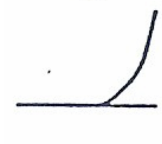
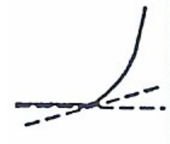
Figura 3.5. Que gráficos têm tangente(s) em *P*?

Na segunda questão era pedido para indicarem a definição de tangente que eles se lembrassem do curso ou no caso de não se lembrarem de nenhuma para tentarem dar uma definição sua. Os gráficos da figura acima correspondem às funções $y = x^3$, $y = \sqrt{|x|}$ e $y = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ x^2 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$ mas as expressões analíticas não foram dadas aos alunos. A definição de tangente que foi dada nas aulas englobou duas vertentes: quer como o limite das secantes ou como uma linha que tem um ponto comum com o gráfico da função e cujo declive é a derivada nesse ponto particular.

A partir da análise das respostas à segunda questão Vinner verificou que apenas 41% dos alunos deu uma das definições da aula, enquanto que 35% deu descrições que se ajustam ao caso da tangente a uma circunferência. Estes últimos argumentaram que a tangente toca a curva mas não a intersecta, que encontra a curva mas não a corta ou que tem um ponto comum com a curva mas está de um lado da curva. Os restantes deram definições sem significado.

Os principais conceitos imagem foram identificados a partir das respostas à primeira questão. O quadro 3.2, abaixo, resume o desempenho dos alunos nesta tarefa. Segundo Vinner há alguns desenhos que têm um interesse especial. Por exemplo em 1B, 2B e 3B os alunos tentam forçar o gráfico por forma a encontrar a imagem formada pela tangente a uma circunferência. 1B e 3B parecem ser “tangentes genéricas”clássicas geradas pelo seu conceito imagem, 2D é uma generalização na qual a “tangente” balança numa extremidade. Em 1C, 2D (o último desenho) e 3C encontra-se outro fenómeno onde parece que o antigo conceito imagem (a tangente a uma circunferência) e o novo conceito imagem (construído pela definição dada nas aulas) agem em simultâneo na mente do aluno.

Quadro 3.2. Distribuição do desempenho dos alunos por gráfico.

	A	B	C	D	E
1	 Resposta certa 18%	 Tangente genérica 38%	 Duas tangentes 6%	Outro desenho 10%	Sem desenho 28%
2	 Resposta certa 8%	 Duas tangentes 18%	 Infinitas tangentes 18%	 Tangente "equilibrada" 14%	Sem desenho 42%
3	 Resposta certa 12%	 Tangente genérica 33%	 Duas tangentes 16%	 Infinitas tangentes 17%	Outro desenho 4% Sem desenho 27%

Nota: N= 278.

Em 2C e 3D os alunos recorrem a infinitas tangentes aparentemente por usarem a imagem da tangente à circunferência mas ao mesmo tempo reconhecendo que não há razão para preferir uma "tangente" de entre as várias que parece ser possível traçar. Contrariamente a estes alunos há aqueles que no primeiro desenho de 2D e 3B preferem algum tipo de simetria e traçam apenas uma tangente ou então partem do princípio que deve haver apenas uma e portanto recorrem à simetria como forma de resolver o problema.

Num outro estudo realizado por Orton (1980, citado por Artigue, 1991), com alunos do ensino secundário e superior, pretendia-se caracterizar, entre outros, o conceito de derivada destes alunos. Todos eles tinham escolhido estudar matemática e já tinham tido pelo menos um curso de Análise. Orton realizou entrevistas a 110 alunos e procurou classificar os erros dos alunos em três categorias: erros estruturais, erros de execução e erros arbitrários. Os erros estruturais são aqueles que surgem de alguma falha ao apreciar as relações envolvidas no problema ou ao agarrar algum princípio essencial para a solução; os erros arbitrários são aqueles em que o sujeito se comporta arbitrariamente e falha tendo em conta os constrangimentos impostos pelo que foi dado; os erros de execução são os envolvidos na falha da realização de manipulações embora os princípios envolvidos possam ter sido bem compreendidos.

A partir desta abordagem, alguns dos principais resultados encontrados foram:

a) Um razoável domínio dos algoritmos algébricos em termos do cálculo de derivadas, sobretudo para funções mais simples,

b) Uma dificuldade bastante significativa na conceptualização dos processos de limite subjacentes à noção de derivada. Por exemplo quando se pedia para explicarem o que acontece na figura 3.6 às secantes *PQ* à curva desenhada à medida que Q_n tendia para *P*, 43 alunos foram incapazes de ver que o processo conduzia à tangente à curva, mesmo depois de lhes serem dadas pistas bastante sugestivas. Aparentemente a secante foi ignorada pelos alunos e focaram a sua atenção apenas na corda *PQ*, levando à obtenção de respostas do tipo "a linha torna-se mais pequena" ou "ela torna-se um ponto"

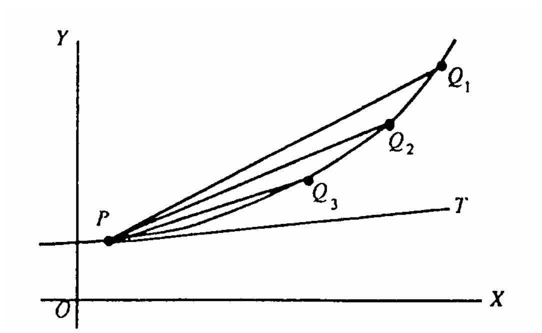


Figura 3.6. Secantes a "tender para" a tangente.

c) A dificuldade de usar representações gráficas relevantes. Os alunos conseguem normalmente calcular derivadas de polinómios correctamente, tendo sucesso em tarefas do tipo: encontrar o declive da tangente à curva $y = x^3 - 3x^2 + 4$ quando $x = 3$. Mas quando se trata de calcular as mesmas taxas de crescimento a partir dos gráficos de funções de complexidade similar, muitos fazem erros confundindo taxa de crescimento média e instantânea ou simplesmente dando o valor da função no ponto em questão. No contexto gráfico a expressão da derivada como um limite dificilmente foi compreendida,

d) O significado mínimo atribuído à utilização dos símbolos. Por exemplo quando foi pedido para explicar o significado de dx, dy, $\frac{dy}{dx}$, 71 alunos deram respostas incorrectas para a taxa de crescimento, argumentando que era a "taxa de variação num ponto" ou um "pequeno incremento na taxa de variação", enquanto que 25 interpretaram dx como o limite de δx quando δx tende para 0.

Estes resultados mostram que há de facto uma predominância na realização de algoritmos e uma fraca capacidade de manipular o conceito de derivada, resultando numa abordagem do conceito essencialmente processual e desprovida de significado.

Em resumo, a aprendizagem de conceitos matemáticos avançados revela-se uma actividade bastante complexa, que não assenta apenas numa lógica de desenvolvimento sequencial onde os conceitos vão sendo construídos seguindo um modelo bem determinado. Das teorias apresentadas no capítulo anterior parece ser possível encontrar algumas sequências de desenvolvimento, mas que não devem ser analisadas apenas como tal. Elas englobam sempre outros tipos de relações que devem ser tidos em conta quando se procura compreender a forma como um determinado conceito é interiorizado e reificado pelo indivíduo. Dos dados disponibilizados pelas investigações analisadas neste capítulo é possível verificar que há uma grande dificuldade na compreensão de alguns conceitos matemáticos avançados, que se analisados à luz das teorias anteriormente referidas nos podem ajudar a encontrar as razões de tais dificuldades e conduzir a possíveis abordagens menos problemáticas. A procura de conceitos imagem bastante diversificados e a elaboração de conceitos definição que tenham em conta essa diversidade, a manipulação de procedimentos e processos com o objectivo de conduzir à sua reificação como objectos, ou o desenvolvimento de um pensamento proceptual como forma de tornar mais fácil a manipulação e a abstracção dos objectos matemáticos podem ajudar-nos a ultrapassar algumas das dificuldades referidas nos vários estudos. Podemos ainda retirar das várias teorias algumas propostas pedagógicas que nos permitam ultrapassar algumas das dificuldades de compreensão manifestadas pelos alunos nos referidos estudos.

É ainda possível constatar que muitos dos estudos descritos neste capítulo têm por base questionários que foram aplicados aos alunos, sendo as questões de resposta aberta por vezes insuficientes para poder inferir os processos que estão subjacentes às concepções que os alunos apresentam sobre os conceitos em estudo. Neste sentido, procura-se, nos próximos capítulos, apresentar uma abordagem de índole essencialmente qualitativa de modo a poder caracterizar de forma mais pormenorizada os conceitos imagem de alguns alunos do ensino superior no que respeita à construção de conceitos matemáticos avançados.

Capítulo IV

Metodologia

Este capítulo tem por objectivo principal descrever e justificar as opções metodológicas subjacentes a esta investigação. Numa primeira parte são consideradas algumas das potencialidades da abordagem qualitativa enquanto metodologia de investigação, as suas principais características e alguns dos métodos de recolha de dados que lhe podem ser associados. Seguidamente é apresentado o contexto educativo onde se pretende caracterizar o processo de ensino que foi implementado bem como uma caracterização dos alunos que compõem a amostra utilizada no estudo. Esta caracterização comporta o seu percurso académico em termos de avaliação no final do ensino secundário, das notas de acesso ao ensino superior e da sua classificação na disciplina no final do semestre lectivo. Posteriormente são referidos os procedimentos do estudo caracterizando as técnicas utilizadas na recolha dos dados, nomeadamente a observação de aulas, a realização das entrevistas e recolha de documentos produzidos pelos alunos.

A escolha de uma metodologia de investigação qualitativa, integrando uma componente de experiência de ensino, tem por base os objectivos que presidem ao estudo. Pretendendo-se aceder aos conceitos imagem que os alunos manifestam relativamente aos conceitos matemáticos, aos processos e objectos que estão presentes na formação desses mesmos conceitos e ao tipo de pensamento proceptual dos alunos, é necessário recorrer a uma fonte natural de dados obtida através de um contexto que incorpore ensino, que seja essencialmente descritiva e onde seja possível observar os processos e compreender os modos de pensar dos alunos. Estas características fazem parte integrante daquilo que se entende por metodologia de investigação qualitativa, como se descreve a seguir.

1. Investigação qualitativa

1.1. Abordagem qualitativa como metodologia de investigação

A investigação qualitativa pode ser encarada como uma forma de estudo da sociedade que se centra no modo como as pessoas interpretam e dão sentido às suas experiências e ao mundo em que vivem. Existem diferentes abordagens que se consideram no âmbito deste tipo de investigação, mas a maioria tem o mesmo objectivo: compreender a realidade social das pessoas, grupos e culturas. Os investigadores usam as abordagens qualitativas para explorar o comportamento, as perspectivas e as experiências das pessoas que eles estudam. A base da investigação qualitativa reside na abordagem interpretativa da realidade social, abordagem esta que podemos considerar como emergente de um longo debate entre o quantitativo e o qualitativo (Howe, 2001).

As visões diferentes que se podem ter sobre a natureza da realidade enquadram um leque de perspectivas de investigação, de paradigmas, que incluem o positivismo, o interpretativismo e a ciência social crítica (criticismo). A investigação qualitativa tem a sua origem na filosofia e nas ciências humanas, particularmente na história e na antropologia. Como método de questionamento e de investigação estas perspectivas surgem desde o início do século XX, embora existissem de forma não estruturada já no século XIX, onde os investigadores tentaram saber mais sobre as culturas e grupos, tanto nos ambientes próprios como em zonas que lhes eram estranhas.

Nas primeiras décadas do século XX, com o nascimento da antropologia e posteriormente com a escola sociológica de Chicago começaram a ser adoptadas abordagens mais focadas. A investigação qualitativa estava pouco sistematizada, era essencialmente uma antropologia interpretativa onde o conceito de cultura era alvo de uma abordagem essencialmente indutiva (Bogdan e Biklen, 1994). Os investigadores faziam reportagens do campo natural que estudavam, quer fossem cidades, bairros típicos ou especiais e faziam-nas observando e falando com as pessoas acerca da sua vida. Entre os anos trinta e cinquenta parece haver um hiato provocado por condicionalismos vários, sobretudo políticos, embora alguns antropólogos continuem a realizar trabalhos de campo. Por outro lado há o não reconhecimento de investigadores como Freud e Piaget como criadores da abordagem qualitativa, ainda que ambos recorressem a estudos de caso, observações e entrevistas em profundidade. Os historiadores parecem estar mais inclinados para poder incluí-los na área da "psicologia qualitativa".

Desde os anos sessenta a investigação qualitativa teve um grande desenvolvimento. É nesta altura que surgem os investigadores educacionais com preocupações sobre a forma como os alunos encaram a escola ou pelo reconhecimento (visibilidade) que era dado sobre os mais desfavorecidos, onde a sua opinião assumia uma visibilidade igual à dos restantes actores sociais. A sociologia e a antropologia sofreram algumas modificações enquanto disciplinas académicas, tendo a sociologia começado a virar-se para os escritos dos fenomenologistas, criando-se o que se viria a designar por *etnometodologia*. O interaccionismo simbólico e o desenvolvimento da teoria fundamentada ou *grounded theory* são alguns dos outros desenvolvimentos da investigação qualitativa (Bogdan e Biklen, 1994).

Podemos dizer que a perspectiva de investigação qualitativa se centra no modo como os seres humanos interpretam e atribuem sentido à sua realidade subjectiva. Os cientistas sociais não abordam as pessoas como individualidades que existem no vazio. Em vez disso eles exploram os mundos das pessoas na globalidade do seu contexto de vida. Estes cientistas acreditam que a compreensão das experiências humanas é importante quando o objectivo é a explicação, a predição e o controle.

1.2. Características da investigação qualitativa

A investigação qualitativa, tal como foi definida acima, apresenta um conjunto de características que lhe são intrínsecas. Segundo Bogdan e Biklen, (1994) as principais características são cinco e não têm que estar todas presentes numa investigação com o mesmo nível de profundidade. A primeira característica refere-se ao facto de na investigação qualitativa a fonte directa de dados ser o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal. O investigador acaba sempre por se introduzir, com maior ou menor grau, no ambiente onde pretende recolher os dados e quer esteja munido ou não de alguns equipamentos de vídeo ou áudio ou apenas da papel e lápis, acaba sempre por desempenhar um papel primordial na sua análise. É ele que tem que rever na totalidade os materiais registados, sendo o seu entendimento sobre esses materiais o principal instrumento de análise. A frequência dos locais de estudo é essencial para compreender o contexto e as acções pois estas são observadas no seu ambiente natural. Com vista a não perder o significado o investigador não deve separar os actos, palavras ou gestos do seu contexto.

A segunda característica está relacionada com o facto de a investigação qualitativa ser descritiva. Os dados recolhidos são quase sempre organizados sobre a forma de palavras ou imagens, em vez de números. Os investigadores procuram analisar os dados usando toda a sua riqueza e respeitando a forma em que eles foram registados ou transcritos. Tudo deve ser analisado com base no princípio de que nada é trivial e que tudo pode vir a constituir uma pista para estabelecer uma maior compreensão do objecto de estudo. Assim, quando se pretende que sejam tidos em conta todos os detalhes, a descrição parece ser um bom método de recolha de dados.

A terceira característica está relacionada com o facto de os investigadores qualitativos se interessarem mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados e produtos. A forma como as pessoas negoceiam os significados, como começam a utilizar certos termos ou como é que certas noções começam a fazer parte do senso comum são indicadores de que na actividade dos investigadores os processos desempenham um papel primordial. Tomando como exemplo a investigação educacional, a ênfase qualitativa no processo tem sido importante no desenvolvimento da ideia de que o desempenho cognitivo dos alunos é afectado pelas expectativas dos professores. Esta conclusão, que é corroborada pelos métodos quantitativos, encontra nas estratégias qualitativas uma forma de evidenciar como as expectativas se traduzem nas actividades, procedimentos e interacções diárias.

A quarta característica está relacionada com a forma como os investigadores qualitativos analisam os dados, admitindo uma tendência para que esta análise seja feita de forma indutiva. A recolha de dados não é feita com o objectivo de provar hipóteses previamente estabelecidas, mas antes para construir abstracções com base no agrupamento dos dados particulares. A teoria é assim construída com base nas várias peças individuais da informação recolhida que se vão inter-relacionando, dando origem àquilo que se pode designar por teoria fundamentada. O investigador vai usar parte do estudo para perceber quais são as questões importantes, ao invés de partir do pressuposto que já sabe essas questões antes de efectuar a investigação.

A quinta e última característica prende-se com o significado, que é considerado de importância vital para a abordagem qualitativa. Os investigadores qualitativos têm como principal preocupação certificarem-se que estão a apreender as diferentes perspectivas adequadamente. Por vezes os dados recolhidos são de novo mostrados aos indivíduos sobre os quais incide a investigação, por forma a poder proporcionar ao investigador a segurança de que os registos são rigorosos e reflectem de forma clara os significados que os sujeitos lhe atribuíram. Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhe permitem tomar em consideração as experiências do ponto de vista do sujeito.

Para além das características principais da investigação qualitativa, há algumas questões que se revestem de especial importância quando se utiliza esta abordagem como forma de gerar teoria. Uma dessas questões prende-se com o carácter científico deste tipo de investigação. Se considerarmos que uma boa parte da atitude científica passa por uma mente aberta no que diz respeito ao método e às provas, implicando a sua investigação uma averiguação empírica e sistemática que se baseia nos dados, podemos considerar que a investigação qualitativa preenche estes requisitos.

Outra questão que por vezes se coloca pretende estabelecer as diferenças entre o trabalho do investigador qualitativo e o do professor, quando se trata de um contexto educativo. O investigador aparece aqui com um papel diferenciado do papel do professor. Enquanto o investigador tem como preocupação primordial observar e conduzir a investigação, recolhendo dados com bastante detalhe, o professor tem que se focar nas aulas e na forma de lidar com os alunos e, se pretender realizar em simultâneo uma investigação, os dados recolhidos acabam por serem menos completos. O sucesso também é encarado de modo diferente. Enquanto que o investigador pretende atingir aquilo que se pode designar por uma boa investigação, o professor está mais preocupado com conteúdos e resultados específicos. Outra diferença reside no facto de o investigador ter sido treinado para utilizar um conjunto de procedimentos e técnicas desenvolvidos ao longo de vários anos para poder recolher e analisar dados. Há ainda o facto de o investigador se basear em teorias e resultados anteriores de investigação que servem de cenário para fornecer pistas e dirigir o estudo de modo a contextualizar novos resultados.

Uma terceira questão refere-se à generalização dos resultados da investigação qualitativa. A generalização é normalmente encarada como a aplicabilidade dos resultados de um estudo particular a locais e sujeitos diferentes. Nesta perspectiva alguns autores não se preocupam com esta questão, e quando há alguma preocupação eles fazem questão em explicitá-la. Há outros autores que têm essa preocupação e podem neste caso basear-se em outros estudos para determinarem a representatividade do que encontraram ou mesmo conduzir alguns estudos mais pequenos. Há também investigadores que não usam a generalização no sentido convencional, estando mais preocupados em estabelecer afirmações universais sobre processos sociais gerais do que considerações relativas aos pontos comuns de contextos semelhantes, como por exemplo turmas. Desta forma, em vez de estarem preocupados com o facto de os seus resultados serem generalizáveis, procuram saber se outros contextos e sujeitos podem ser expostos a estes resultados. Outros investigadores qualitativos utilizam o seu trabalho como forma de documentar um determinado contexto ou grupo de sujeitos, devendo a generalização ser entendida como o trabalho que outros devem desenvolver para articular os seus resultados com o quadro geral que se procura traçar. O seu trabalho surge como um possível gerador de anomalias que outros investigadores devem procurar explicar.

O papel do investigador no enviesamento dos dados também é por vezes um motivo de preocupação. Dada a natureza da investigação qualitativa parece fácil que os preconceitos e atitudes dos investigadores tenham influência sobre os dados uma vez que estes são em grande parte um produto da sua compreensão da situação e que pode não traduzir fielmente o que de facto se passa. Há no entanto uma preocupação dos investigadores com os efeitos da sua subjectividade nos dados, pelo que eles tentam sempre estudar objectivamente os estados subjectivos dos seus sujeitos. Esta abordagem é auxiliada pelos métodos utilizados e pelo facto de o investigador passar uma quantidade de tempo considerável no campo que o leva a um confronto constante das suas opiniões e preconceitos com os dos sujeitos. Desta forma os dados apresentam uma descrição bastante detalhada dos acontecimentos que vão para além de qualquer preconceito do investigador. Há ainda a acrescentar o facto de o investigador ter por objectivo principal a construção de conhecimento e dada a complexidade das situações a sua preocupação centra-se na descrição de muitas situações e não na restrição do campo de observação. Por vezes são os próprios investigadores a referir os seus enviesamentos como forma de lidar com eles.

A presença do investigador qualitativo no campo também parece ser um outro modo de enviesamento dos dados, pois acaba sempre por introduzir algum tipo de modificação no comportamento dos sujeitos que vai estudar. Este problema parece ser transversal a todos os tipos de investigação, pois mesmo na elaboração de um estudo experimental pode por vezes ser criado um ambiente artificial. No caso da investigação qualitativa uma forma de minimizar este "efeito do observador" pode ser através da interacção com os sujeitos que deve ser feita de forma natural, sem provocar intrusões ou significar qualquer ameaça para estes. Como um dos objectivos do investigador é compreender o sujeito no seu ambiente natural, é possível proporcionar situações em que a acção pela sua presença não seja muito diferente daquilo que aconteceria na sua ausência. Compete no entanto ao investigador compreender os efeitos da sua presença, mediante um conhecimento aprofundado do contexto, utilizando-o para construir uma consciência mais ampla da natureza do campo em estudo.

A questão da garantia, isto é, se o facto de investigadores distintos estudarem o mesmo contexto poder conduzir às mesmas conclusões, não é partilhada por todos os investigadores. A possibilidade de estes investigadores poderem ter interesses diversos e provirem de formações académicas bastante diferentes pode conduzir com certeza a resultados não comparáveis. A garantia que podemos buscar neste tipo de situações estará mais relacionada com o facto de haver por parte dos investigadores uma preocupação com o rigor e a abrangência dos seus dados. Poderemos sobretudo admitir que há uma correspondência bastante forte entre os dados registados e aquilo que se passa de facto no local de estudo.

Com a apresentação das principais características da investigação qualitativa e com o enumerar de algumas das principais questões que se colocam, procurou-se fazer um retrato deste tipo de investigação que sirva de suporte à elaboração de uma recolha de dados num ambiente educacional, por forma a poder observar os alunos no seu ambiente de aprendizagem, com o objectivo de caracterizar a sua compreensão dos conceitos matemáticos que são abordados neste contexto.

1.3. Métodos de recolha de dados na investigação qualitativa

Nesta secção faz-se uma abordagem sucinta a algumas técnicas de recolha de dados como é o caso da entrevista, da observação participante, da experiência de ensino e da análise de documentos. Estas técnicas são focadas com especial destaque, por serem aquelas que foram utilizadas na recolha de dados do presente estudo.

1.3.1. A entrevista

Podemos considerar que a entrevista é o procedimento metodológico que mais frequentemente é utilizado na investigação qualitativa. Ela é considerada por Bogdan e Biklen (1994) como a estratégia mais representativa deste tipo de investigação a par da observação participante. Este tipo de entrevistas costumam ser designadas por entrevistas em profundidade onde as questões colocadas são abertas e os sujeitos são encorajados a expressar as suas percepções através das suas próprias palavras. Estas entrevistas visam a compreensão dos pontos de vista dos entrevistados, da terminologia que usam e as suas opiniões. Existem três tipos de abordagem para as entrevistas em profundidade que são determinados pela forma como as questões são previamente determinadas: as entrevistas não estruturadas, as entrevistas semi-estruturadas e as entrevistas estruturadas. As diferenças entre estas três abordagens na estruturação da entrevista residem no alcance que determina e padroniza as questões. Cada uma destas técnicas tem uma finalidade diferente e requer preparação e instrumentos diferenciados.

As entrevistas não estruturadas, também designadas por não directivas (Ghiglione e Matalon, 1970) ou conversação informal (Patton, 1980) são compostas por questões definidas de modo vago com o objectivo de explorar aquilo que é mais significativo para o sujeito que vai responder. Não existem à partida questões predefinidas, podendo estas ser geradas na fluência natural de uma interacção. Os relatos ou a compreensão dos respondentes acerca das suas experiências têm a primazia sobre dados preestabelecidos e categorias de codificação. Este tipo de entrevista é apropriado quando se pretende manter o máximo de flexibilidade para poder dirigir o questionamento na direcção mais apropriada, tendo por base a informação emergente perante as circunstâncias num dado momento. A flexibilidade e a responsabilidade do investigador perante diferenças individuais, mudanças de situação e emergência de novas informações são um dos pontos fortes desta abordagem. Em contrapartida os dados obtidos são menos sistemáticos e portanto mais difíceis de classificar e analisar, sendo o seu processo de recolha quase sempre mais moroso.

As entrevistas semi-estruturadas, também designadas por semi-directivas (Ghiglione e Matalon, 1970) ou de abordagem por um guião (Patton, 1980) envolvem a preparação de um guião de entrevista que é composto por uma lista de questões ou tópicos a ser explorados durante a entrevista. O guião funciona como uma lista de pontos de referência durante a entrevista e assegura que a mesma informação é obtida junto de um dado número de pessoas. Continua a haver uma grande flexibilidade e a ordem das questões não tem que ser pré-determinada. O investigador tem a liberdade de abordar algumas das questões da lista de uma forma mais aprofundada. O facto de poder dispor de um guião, faz com que as entrevistas a um dado número de pessoas sejam mais sistemáticas e mais compreensivas ao determinar os temas que se deverão realçar no momento da própria entrevista.

As entrevistas estruturadas, também designadas por directivas ou padronizadas (Ghiglione e Matalon, 1970) ou padronizadas abertas (*standardized open-ended*) (Patton, 1980) incluem questões pré-estabelecidas, colocadas por uma ordem específica e tendo por vezes predefinida uma categorização das respostas. Estas entrevistas são usadas quando é importante ter uma padronização, pelo que as respostas racionais têm primazia sobre a profundidade, emoção ou inspiração. O entrevistador faz as mesmas perguntas a cada indivíduo usando as mesmas palavras e a mesma sequência. Este tipo de abordagem é útil quando existem vários entrevistadores e se pretende minimizar a variação das questões colocadas, assim como para recolher dados detalhados de forma sistemática facilitando a comparação entre todos os sujeitos.

1.3.2. A observação participante

A observação qualitativa é fundamentalmente naturalista pois ocorre no contexto dos acontecimentos e das experiências daqueles que queremos observar. Pela sua natureza o observador acaba sempre por ter alguma intervenção na situação. Segundo Costa (1986) ele é o principal instrumento de pesquisa, sendo os procedimentos principais a sua presença prolongada no campo e o contacto directo com os sujeitos, os acontecimentos e as situações. Na observação participante o investigador acaba por se tornar um membro da comunidade ou da população em estudo. Ele participa nas actividades da comunidade e observa o modo como as pessoas se comportam e interagem umas com as outras. O investigador deve ser integrado no grupo, sendo este processo quase sempre gradual. Ele começa por procurar ser aceite como alguém que participa e está próximo sendo a pouco e pouco integrado como membro do grupo. Esta pertença ao grupo acaba por ser fundamental para poder compreender e interpretar o que está a acontecer. A dimensão deste tipo de integração depende em grande parte das características do estudo a desenvolver, das características dos participantes e do tipo de questões a serem estudadas. Esta técnica vem reforçar essencialmente o facto de o investigador poder experimentar e compreender com maior profundidade o impacto dos aspectos em estudo. Os principais cuidados a ter são os de procurar não alterar o comportamento que está a ser observado e ter em conta aspectos éticos que respeitem a identidade dos sujeitos observados.

Uma forma de tornar a observação participante mais eficiente é através do recurso a notas de campo que devem ser detalhadas, extensivas e precisas. Embora alguns autores considerem que na observação participante todos os dados recolhidos são notas de campo (Bogdan e Biklen, 1994), esta técnica pode ser abordada de forma mais restrita, considerando apenas que se trata de notas tomadas como forma de complementar aquilo que não é possível recolher com base nas outras técnicas. Podem ser notas de campo por exemplo o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa no decurso da recolha bem como a reflexão que faz sobre os dados. No decurso de entrevistas gravadas, as notas de campo podem ser uma ajuda preciosa, pois podem evidenciar situações que não podem ser captadas pelo gravador, como por exemplo os gestos feitos pelo sujeito, as expressões faciais ou até mesmo comentários feitos antes e depois da entrevista que podem ajudar à compreensão da situação. A principal característica destas notas deve ser a sua capacidade de descrever com exactidão o que está a acontecer, nomeadamente fazendo um retrato dos sujeitos, uma descrição do espaço físico, o relato dos acontecimentos particulares, a descrição pormenorizada das actividades e o comportamento do observador. A par da parte descritiva deve existir uma parte reflexiva, que revela a parte mais subjectiva das notas e que deve conter reflexões sobre a análise, o método, os conflitos e dilemas éticos, o ponto de vista do observador e pontos de clarificação, (Bogdan e Biklen, 1994).

1.3.3. Experiência de ensino

Outra forma de operacionalizar uma abordagem metodológica que privilegie uma interpretação na procura de significados pode ser designada por experiência de ensino (Shulman, 1986). Trata-se de uma poderosa metodologia de investigação utilizada na formulação de explicações do comportamento matemático dos alunos e que tem como objectivo "'apanhar' os processos no seu desenvolvimento e determinar como é que o ensino pode influenciar de maneira optimizada esses processos" (Kantowski, 1978, p. 45). Esta abordagem visa descrever e interpretar os processos de desenvolvimento dos fenómenos sobre que se debruçam induzidos por meio de intervenções planificadas. As origens das experiências de ensino remontam aos trabalhos de psicólogos e pedagogos soviéticos, entre os quais Vygotsky que procurou conceber uma metodologia de investigação que incidisse nos aspectos qualitativos do pensamento e da aprendizagem. A sua *experiência de instrução* (*instructional experiment*) reproduzia de forma sistemática os processos mentais tal como estes se desenvolvem sob influência de diferentes intervenções. Cobb e Steffe (1983) também salientam algumas razões para que o estudo da construção do conhecimento matemático pelo aluno envolva ensino, nomeadamente porque as experiências que os alunos obtêm através da interacção com os adultos influenciam grandemente a sua construção do conhecimento e porque o contexto no seio do qual o conhecimento é construído se torna importante. Esta abordagem metodológica tem assim como principais características a interacção por períodos de tempo mais ou menos longos entre os alunos e os investigadores, o estudo dos processos de passagem dinâmica de um estado de conhecimento para o outro e a natureza qualitativa dos dados (Cobb e Steffe, 1983; Kantowski, 1978). Esta metodologia é ainda caracterizada por poder recorrer a um processo bastante vantajoso para a compreensão dos raciocínios desenvolvidos pelos alunos, que consiste em pedir que estes falem alto (thinking aloud) enquanto resolvem as tarefas propostas (Schnotz e Ballstaedt, 1998). Desta forma é possível ter acesso aos vários processos cognitivos que os alunos utilizam, ainda que tal estratégia apenas possa ser utilizada em situações que envolvem um só aluno.

1.3.4. Análise de documentos

Os investigadores podem complementar o trabalho de observação no campo através da recolha de informação e da posterior análise de aspectos documentados que foram gerados no âmbito das actividades relacionadas com o problema em estudo, tais como leis, regulamentos, memorandos, registos de rotina e no caso da investigação educacional as produções dos alunos, tais como relatórios, resoluções de problemas ou mesmo testes escritos. Este tipo de documentos pode ser uma fonte interessante de informação sobre as actividades realizadas e os processos que aconteceram, podendo vir a gerar novas ideias para novas questões que podem vir a ser retomadas através de novas observações ou entrevistas. Por vezes este tipo de abordagem permite aceder a informações que não estariam disponíveis por outra via, como por exemplo fornecer informação acerca de coisas que aconteceram antes de se iniciar a investigação, ou evidenciar aspectos que estando previstos nunca foram postos em prática.

2. Contexto educativo do estudo

2.1. Contexto geral

O presente estudo foi realizado com alunos do ensino superior, numa instituição pública situada na região da Grande Lisboa. A recolha de dados foi feita durante o primeiro semestre do ano lectivo de 2001/2002 e os alunos abrangidos pertenciam a três licenciaturas diferentes: Matemática, Engenharia Electrotécnica e de Computadores e Ensino das Ciências da Natureza. Em cada uma destas licenciaturas foi observada uma turma com cerca de 27 alunos, tendo posteriormente sido seleccionados 5 alunos de cada uma das turmas para a realização de entrevistas semi-estruturadas com uma componente de experiência de ensino. A disciplina curricular onde foi desenvolvida a investigação é a Análise Matemática I, que faz parte do currículo do primeiro semestre dos cursos acima referidos e que pretende dar continuidade às aprendizagens matemáticas que os alunos já realizaram no ensino secundário. A média de idades dos alunos ronda os 18 anos, todos eles ingressaram nos respectivos cursos neste mesmo ano lectivo, pelo que frequentaram a disciplina pela primeira vez. Com a escolha destes alunos pretende-se que a caracterização dos conceitos imagem reflicta a compreensão que os alunos têm dos conceitos quando se dá a transição entre os dois níveis de ensino. A escolha de alunos que entretanto já estejam a repetir a disciplina poderia trazer algum enviesamento à caracterização destes conceitos imagem. De entre os vários tópicos abordados foram escolhidos para a realização do trabalho de investigação os seguintes: as sucessões de números reais e as funções reais de variável real. No caso das funções reais da variável real, além da sua definição, foi dado especial destaque aos limites, derivadas e teorema de Lagrange. Antes destes temas os alunos já tinham abordado outros dois relacionados com as funções trigonométricas inversas e as noções topológicas em $\boldsymbol{R}$, tendo posteriormente sido estudados mais dois relacionados com as primitivas e os integrais definidos.

2.2. Processo de ensino

Para melhor poder caracterizar os procedimentos do estudo e as verbalizações dos alunos apresenta-se de seguida uma descrição sucinta da forma como decorreu o processo de ensino dos temas abordados. Neste sentido podemos distinguir dois tipos de aulas. Os alunos da licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores e do Ensino das Ciências da Natureza foram alvo de uma metodologia de ensino baseada em aulas teórico-práticas leccionadas sempre pelo mesmo professor, enquanto que os alunos da licenciatura em

Matemática tiveram dois tipos de aulas: as aulas teóricas que funcionavam em simultâneo para todos os alunos da licenciatura inscritos na disciplina e as aulas práticas que eram leccionadas por outro professor, em grupos mais pequenos designados por turnos práticos, com cerca de 27 alunos. Este segundo tipo de aulas é aquele que podemos designar por tradicional na sua organização temporal, por ser o mais usual para a maior parte das disciplinas ministradas nas instituições de Ensino Superior.

2.2.1. As aulas para a licenciatura em Engenharia Electrotécnica e Ensino das Ciências da Natureza

Nesta abordagem os alunos tinham aulas teórico-práticas e o tempo disponível para a leccionação dos temas era o mesmo que dispunham os alunos das restantes licenciaturas sujeitas à organização temporal tradicional. Esta metodologia de ensino baseada em aulas teórico-práticas teve como objectivo principal o de proporcionar uma nova experiência pedagógica, tendo sido aplicada apenas nas duas licenciaturas acima referidas. Para além da mesma duração da componente lectiva estes alunos também compartilhavam, com aqueles que seguiam a organização temporal tradicional, os mesmos conteúdos programáticos e o mesmo processo de avaliação. A metodologia utilizada neste tipo de aulas foi essencialmente indutiva, sendo os conceitos introduzidos com base em exemplos concretos, apresentando-se posteriormente a sua definição formal. Esta abordagem permitiu uma maior interacção entre o professor e os alunos que foram bastante solicitados a participar nas actividades propostas ao longo das aulas, sendo muitas vezes possível identificar os raciocínios que os alunos estavam a desenvolver na resolução dos problemas propostos. Esta abordagem permitiu por vezes reconhecer concepções próprias dos alunos que nem sempre estavam de acordo com as aprendizagens que se pretendiam implementar, ajudando-os desta forma a corrigir essas mesmas concepções. Este processo foi sendo menos participado à medida que os conceitos se vão tornando mais abstractos, ou quando a sua escrita envolve uma tradução simbólica. A resolução de problemas que envolvam uma abordagem simbólica, como por exemplo o conceito de limite de uma função, a noção de sucessão convergente ou de infinitamente grande, são situações em que os alunos têm mais dificuldade na manipulação dos conceitos e o seu empenho na realização das tarefas baixa significativamente. De igual modo a demonstração de alguns dos teoremas dados foi acompanhada pelos alunos de forma mais ou menos passiva, ainda que tenha havido um esforço bastante significativo do professor para os incentivar a participar no desenvolvimento dos raciocínios envolvidos na demonstração. A identificação deste tipo de dificuldades permitiu ao professor recorrer a outras estratégias com vista a ultrapassar as dificuldades manifestadas pelos alunos, no entanto o factor tempo é a principal condicionante para o sucesso deste método. Dado que os alunos estavam sujeitos ao mesmo tipo de avaliação que os restantes dos cursos de engenharia que seguiam as aulas organizadas temporalmente segundo o modo tradicional, e visto haver a realização de três testes de escolha múltipla para todos os alunos da disciplina, o tempo disponível para a compreensão dos conceitos foi manifestamente insuficiente, sendo mesmo necessário recorrer a aulas extraordinárias para conseguir abordar todos os conteúdos previstos no programa. A avaliação de conhecimentos teve por base dois tipos de testes: três testes de escolha múltipla, como já foi referido acima, distribuídos ao longo do semestre e um exame final, tendo este último, um peso relativo de 70 % na classificação final da disciplina.

Apresenta-se de seguida, de forma resumida, os conteúdos e uma descrição do desenvolvimento das aulas que foram observadas pelo investigador.

Quadro 4.1. Descrição das aulas de Engenharia Electrotécnica e Ensino das Ciências

Aulas	Conteúdos	Desenvolvimento
1ª aula	Sucessões: definição, sucessão limitada, operações com sucessões, monotonia.	Recurso a um caso concreto (sucessão de Fibonacci). Apresentação da definição de cada um dos conteúdos acompanhada de exemplos concretos.
2ª aula	Subsucessão, infinitamente grande, infinitamente grande em módulo e sucessão convergente.	Uso de exemplos concretos para introduzir cada um dos conteúdos. Em cada caso foi posteriormente escrita a definição e resolvidos alguns exercícios concretos. Foi utilizada a prova por definição nos casos da sucessão convergente e infinitamente grande.
3ª aula	Teorema associado a sucessões infinitamente grandes. Recta acabada. Definição de infinitésimo. Teorema da unicidade do limite. Teorema das sucessões enquadradas. Teoremas associados às sucessões convergentes.	Apresentação da definição de recta acabada e explicitação do seu significado a partir da definição simbólica. Enunciado dos teoremas acompanhado de exemplos concretos para uma melhor compreensão dos mesmos. Desmonstração do teorema das sucessões enquadradas.
4ª aula	Definição de limite superior e limite inferior de uma sucessão. Definição de sucessão de Cauchy e teorema associado relativo à convergência.	Apresentação das definições acompanhadas de exemplos. Resolução de alguns exercícios referentes aos conteúdos da aula. Resolução de exercícios propostos relativos aos conteúdos abordados em aulas anteriores.
5ª aula	Propriedades dos limites das sucessões	Resolução de exercícios propostos relativos aos conteúdos abordados no tópico das sucessões. Cálculo de limites de sucessões, a partir da resolução de alguns dos exercícios propostos.
6ª aula	Generalidades sobre frvr. Definição de: função, monotonia, paridade, extremos, função limitada,	Apresentação de vários gráficos de funções em acetatos para que os alunos pudessem identificar todos os seus elementos relevantes.

	zeros, injectividade, sobrejectividade e bijectividade. Definição de limite, limites infinitos, limites laterais. Teorema da unicidade do limite e outros teoremas associados.	Nas definições relativas aos limites é apresentada a sua definição simbólica. As definições são acompanhadas de exemplos. Resolução de alguns dos exercícios propostos sobre o cálculo de limites, em pontos onde as funções apresentam descontinuidades ou quando os objectos se aproximam do infinito.
7ª aula	Continuidade. Sua definição simbólica. Teoremas associados à continuidade. Prolongamento de uma função por continuidade. Definições e teoremas associados.	Apresentação de alguns gráficos em acetato para identificar a continuidade das funções. Apresentação da definição simbólica de continuidade. Escrita do enunciado dos teoremas e exemplos concretos dos resultados de cada um deles (por exemplo operações com funções contínuas, sua composição, etc.). Resolução de alguns dos exercícios propostos. Exemplos de prolongamento por continuidade de algumas funções. Enunciado das definições e teoremas relacionados. Apresentação de exemplos.
8ª aula		Aula destinada a tirar dúvidas para o teste. Foram resolvidos exercícios bastante variados sobre todos os conteúdos estudados anteriormente.
9ª aula	Teorema do valor intermédio de Bolzano. Corolários do teorema. Teorema de Weierstrass e corolário. Outros teoremas e definições associadas à continuidade.	Enunciado e demonstração do teorema a partir de um caso concreto. Demonstração dos seus corolários. Resolução de alguns exercícios de aplicação do teorema. Enunciado do teorema de Weierstrass e do seu corolário, sendo dado um exemplo para contextualizar a sua validade. Foi ainda enunciado um teorema relativo à continuidade da inversa de uma função contínua e injectiva.
10ª aula	Definição de derivada e de derivadas laterais. Teoremas relativos às derivadas. Definição de diferencial e classe de uma função diferenciável.	Resolução de alguns dos exercícios propostos sobre a continuidade e teoremas associados, nomeadamente Bolzado e Weierstrass. Enunciado dos vários teoremas relativos às derivadas. Demonstração do teorema que refere que a diferenciabilidade implica a continuidade. Enunciado dos teoremas relativos às operações com funções diferenciáveis, à composta e à inversa destas funções. Resolução de alguns exercícios de aplicação.
11ª aula	Teorema de Rolle e seus corolários.	Enunciado e demonstração do teorema de Rolle e dos seus corolários, acompanhados de alguns exemplos práticos. Resolução de alguns dos exercícios propostos relativos à aplicação do teorema.
13ª aula	Teorema de Darboux. Teorema de Lagrange e seus corolários.	Enunciado do teorema de Darboux acompanhado de um exemplo prático. Enunciado do teorema de Lagrange e dos seus corolários, sendo cada um deles acomanhado de um exemplo concreto. Resolução de alguns dos exercícios propostos sobre a utilização do teorema de Lagrange.
14ª aula	Teorema do valor médio de Cauchy. Regra de Cauchy e regra de L'Hôpital.	Enunciado do teorema de Cauchy acompanhado de um exemplo concreto. Enunciado dos teoremas que encerram a regra de Cauchy e regra de L'Hôpital. Aplicação dos teoremas no cálculo de limites indeterminados.

2.2.2. *As aulas para a licenciatura em Matemática*

No caso dos alunos da licenciatura em Matemática a organização dos tempos lectivos segue o método tradicional: as aulas estão separadas em teóricas e práticas, sendo leccionadas por professores diferentes. Na aula teórica, que funciona para todos os alunos da licenciatura inscritos na disciplina, os conceitos são quase sempre introduzidos a partir da sua definição formal e propriedades, sendo posteriormente referidos alguns exemplos concretos e contra-exemplos para ajudar na sua compreensão. Da mesma forma, os teoremas são enunciados e demonstrados, sempre que a demonstração é considerada relevante para a compreensão dos conceitos e posteriormente são dados alguns exemplos concretos reveladores da sua aplicabilidade. Os alunos são solicitados pelo professor a participar quer nas demonstrações, quer na aplicação das propriedades e teoremas, mas acabam por ter uma participação muito fraca, limitando-se sobretudo a transcrever tudo o que o professor escreve no quadro. As aulas práticas funcionam em grupos mais pequenos, cerca de 27 alunos, e têm como principal objectivo aplicar os conceitos, suas propriedades e teoremas associados, abordados na aula teórica. Para tal é utilizado um conjunto de exercícios que têm essencialmente por base o recurso ao cálculo e às suas técnicas, procurando-se desta forma dar significado aos conceitos teóricos aprendidos anteriormente. Dado que o tempo para o desenvolvimento destas actividades é limitado, a metodologia utilizada passa por disponibilizar um curto espaço de tempo em que os alunos podem pensar sobre o exercício, acabando o professor por esquematizar a sua resolução no quadro. Nesta fase há por vezes uma grande interactividade entre o professor e os alunos que conduz essencialmente ao esclarecimento dos procedimentos utilizados na resolução do problema. A avaliação de conhecimentos destes alunos foi feita com base em dois testes realizados durante o semestre, um no meio e outro no final das aulas, podendo os alunos ser dispensados de exame desde que apresentem uma classificação positiva em ambos os testes. Caso esta condição não se verifique são sujeitos a um exame final. É ainda importante referir que a disciplina de Análise Matemática I para os alunos da licenciatura em Matemática tem um modo de funcionamento diferente do que foi adoptado para a maioria das restantes licenciaturas, embora os conteúdos programáticos sejam praticamente os mesmos. Ela difere essencialmente na profundidade com que os conteúdos são abordados e no método de avaliação utilizado.

Apresenta-se no quadro seguinte, de forma resumida, os conteúdos e uma descrição do desenvolvimento das aulas teóricas que foram observadas pelo investigador.

Quadro 4.2. Descrição das aulas teóricas de Matemática.

Aulas	Conteúdos	Desenvolvimento
1ª aula	Sucessões: definição, sucessão limitada, operações com sucessões.	O início da aula correspondeu à conclusão de alguns exercícios correspondentes às noções topológicas. As definições referentes à noção de sucessão e sucessão limitada foram apresentadas em acetatos, sendo explicadas com recurso a exemplos concretos. Apresentação da definição sobre as operações com sucessões em acetato e explicitação da mesma com recurso a alguns exemplos.
2ª aula	Monotonia, subsucessão. Algumas propriedades das subsucessões.	Apresentação da definição de sucessão monótona e de subsucessão. Explicação de algumas propriedades das subsucessões com recurso a exemplos concretos. Demonstração do teorema que considera que toda a sucessão limitada tem subsucessões monótonas.
3ª aula	Definição de infinitamente grande.Teorema associado a sucessões infinitamente grandes. Definição de sucessão convergente. Recta acabada. Definição de infinitésimo. Teorema da unicidade do limite.	Apresentação das definições em acetato. Explicação das mesmas com recurso a alguns esquemas ilustrativos. Apresentação de alguns casos concretos para justificar a validade do teorema relativo aos infinitamente grandes. Apresentação das definições de sucessão convergente e de recta acabada, explicitando o seu significado simbólico. A definição de infinitésimo e o teorema da unicidade do limite são apresentados em acetato, sendo este último demonstrado.
4ª aula	Teoremas associados às sucessões convergentes. Teorema das sucessões enquadradas.	Enunciado dos teoremas acompanhado da demonstração dos mesmos. Nestes casos para alguns teoremas são dados exemplos concretos ou contra-exemplos.
5ª e 6ª aulas	Teoremas associados às sucessões convergentes (cont.).	Continuação do enunciado dos vários teoremas apresentado em acetatos e precedidos da respectiva demonstração.
7ª e 8ª aulas	Sucessão de Cauchy e teorema associado.	Apresentação da definição e demonstração dos teoremas. Resolução de exercícios de aplicação da sucessão de Cauchy.
9ª aula	Generalidades sobre funções reais de variável real.	São apresentadas em acetato as várias definições relativas à monotonia, paridade, extremos, zeros, injectividade, sobrejectividade e bijectividade. Recurso a alguns exemplos concretos para estabelecer estas propriedades.

As aulas referentes aos tópicos dos limites, continuidade, diferenciabilidade e teoremas de Rolle, Darboux, Lagrange e Cauchy não foram observadas de forma sistemática, tendo o investigador assistido apenas a algumas intermédias que considerou mais significativas. Estas aulas apresentaram um esquema bastante próximo das descritas acima, relativas às sucessões, seguindo como guião a sebenta adoptada para a disciplina. Os conteúdos são os mesmos que foram abordados nas aulas de engenharia, com a excepção do tópico da continuidade, onde também foi abordada a continuidade uniforme. A metodologia usada foi em tudo semelhante à descrita acima, nas aulas sobre sucessões.

As aulas práticas tiveram como principal objectivo resolver um conjunto de exercícios previamente seleccionados de entre aqueles que eram propostos na sebenta. Tal como já foi referido acima, o professor foi propondo à turma a resolução dos exercícios, apresentando, para cada um deles, o seu enunciado e questionando os alunos para que estes pudessem avançar com algumas propostas de resolução. O tempo que é dispensado para que os alunos pensem sobre o exercício em causa é bastante restrito, dadas as limitações que o currículo impõe, pois é necessário que sejam tratados todos os tópicos abordados nas aulas teóricas. As respostas ao questionamento do professor são pouco frequentes e mostram alguma falta de compreensão dos conceitos já ensinados nas aulas teóricas. Os alunos acabam por aguardar que o professor esquematize uma resolução no quadro, estando as principais dificuldades manifestadas por estes relacionadas com a utilização de conceitos mais elementares e com processos e procedimentos de cálculo. Por vezes os conceitos que se pretendem consolidar com a resolução de determinados exercícios acabam por ser negligenciados em deterimento de processos de cálculo mais ou menos rotineiros.

2.3. Caracterização da amostra

A amostra utilizada no presente estudo é composta por quinze alunos, igualmente distribuídos por três licenciaturas: cinco alunos da licenciatura em Engenharia Electrotécnica e Computadores que são o Fernando, o João, o José, o Manuel e o Pedro; cinco alunos da licenciatura em Ensino das Ciências da Natureza que são a Madalena, a Paula, a Alexandra, a Mariana e a Sara e cinco alunos da licenciatura em Matemática que são o Joaquim, a Carla, a Sofia, a Susana e a Maria. Todos os alunos ingressaram nos respectivos cursos no ano lectivo de 2001/2002, apresentando uma média de idades que ronda os 18 anos.

Para uma caracterização mais aprofundada do seu percurso académico vamos referir cada um destes grupos em separado. Os alunos da licenciatura em Ensino das Ciências da Natureza apresentam uma média no final do Ensino Secundário de 14,6 valores e não têm a obrigatoriedade de ter a Matemática como disciplina específica, pelo que apenas 4 dos 5 alunos do estudo realizaram a prova específica de Matemática apresentando uma classificação média de 79 pontos. Para os alunos da licenciatura em Engenharia Electrotécnica e Computadores a média final do Ensino Secundário é de 14,8 valores e na prova específica de Matemática estes alunos obtiveram uma classificação média de 134 pontos. Quanto aos alunos da licenciatura em Matemática apresentam uma média no final do Secundário de 15,6 valores sendo a classificação na prova específica de Matemática de 131 pontos. É ainda de salientar que nos cursos onde a disciplina de Matemática é obrigatória os alunos têm que apresentar uma nota nunca inferior a 95 pontos para poder ingressar nos respectivos cursos.

A escolha dos elementos da amostra de entre cada uma das turmas práticas observadas teve por base três critérios essenciais: as informações do professor, as observações do investigador e a classificação obtida no primeiro momento de avaliação. Numa primeira fase foram ocorrendo várias conversas informais entre o investigador e os professores das turmas por forma a poder encontrar aqueles alunos que poderiam ser considerados informantes privilegiados, no sentido usado por Costa (1986), sendo desta forma identificados alguns possíveis candidatos, nomeadamente aqueles que manifestavam uma maior participação no questionamento que era feito pelo professor dando respostas mais ou menos coerentes com o tipo de raciocínio que se pretendia desenvolver. Para completar este quadro foi ainda tida em conta o resultado numérico da avaliação que entretanto tinha sido realizada, sendo para tal adoptado o critério de escolher alunos que tivessem uma classificação positiva ou pelos menos muito próxima desse patamar. Este parâmetro foi estabelecido pressupondo que estes alunos apresentam alguns conhecimentos dos conceitos que estão a ser leccionados, podendo desta forma tornarem-se bons informantes para os objectivos do estudo.

Como epílogo e tendo apenas em atenção a avaliação desenvolvida no seio da disciplina, podemos constatar que no final do semestre apenas a Mariana conseguiu ter nota positiva (11 valores) na licenciatura em Ensino das Ciências da Natureza, enquanto que em Engenharia Electrotécnica e Computadores o Fernando e o Pedro não conseguiram nota para transitar, sendo a média das notas finais dos restantes de 12 valores. Em Matemática apenas a Maria não transitou, sendo a média das notas finais dos restantes alunos de 12 valores. Na época de exame três destes alunos, que tinham obtido aprovação com base nos dois testes realizados durante o decorrer do semestre lectivo, propuseram-se para fazer melhoria de nota, elevando a média anterior de 12 para 14 valores.

É neste contexto que é desenvolvido o presente estudo, tendo o investigador recorrido à observação de aulas, realização de entrevistas semi-estruturadas, permeadas por experiências de ensino, a alguns alunos de cada uma das licenciaturas e recolha de documentos. Cada uma destas técnicas de recolha de dados vai ser seguidamente descrita com mais pormenor.

3. Procedimentos do estudo

Os procedimentos que a seguir se descrevem surgem de forma natural como métodos para a recolha de dados na investigação qualitativa, pressupondo conduzir a uma efectiva concretização dos objectivos do estudo que se prendem com a aprendizagem dos conceitos matemáticos avançados, nomeadamente na caracterização dos principais conceitos imagem que os alunos têm desses conceitos.

3.1. Observação de aulas

A observação de aulas, por parte do investigador, baseou-se num duplo objectivo: o de integrar o investigador no contexto de modo a que este pudesse ser aceite no grupo e desta forma minimizar a sua influência no enviesamento dos dados e o de proporcionar uma visão global e pormenorizada da abordagem que é feita sobre os temas em estudo por forma a conseguir identificar e compreender os processos e raciocínios desenvolvidos pelos alunos.

As aulas observadas estavam organizadas de duas formas diferentes: as teórico-práticas que integravam os alunos da licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores e a licenciatura em Ensino das Ciências da Natureza e as aulas teóricas e práticas que funcionavam separadamente, leccionadas por dois professores aos alunos da licenciatura em Matemática. No primeiro caso o investigador assistiu a cerca de 14 aulas teórico-práticas, que se distribuíam ao longo da semana por três períodos de duas horas cada um. Estas aulas decorreram sempre numa sala de aula normal, que apresentava mesas para dois alunos em cada uma, distribuídas em várias filas, todas viradas para o quadro que se encontra numa das paredes da sala e sem qualquer desnível relativamente às mesas dos alunos. As aulas eram essencialmente conduzidas pelo professor, que escreveu no quadro praticamente todas as definições, propriedades, enunciados e demonstrações dos teoremas, procurando que os alunos consiguissem desta forma organizar um conjunto coerente de apontamentos sobre o tema em estudo que lhes permita dar significado aos diferentes conceitos abordados. Para uma melhor compreensão os conceitos foram, muitas vezes, introduzidos a partir de exemplos concretos com vista à sua generalização e posterior abstracção. Esta abordagem pareceu ser do agrado dos alunos, permitindo-lhe por vezes uma participação mais activa nas actividades práticas propostas, quase sempre sob a forma de resolução de exercícios. Este tipo de actividade foi realizada pelos alunos individualmente, interagindo por vezes com os colegas do lado e sobretudo com o professor. Esta estratégia foi utilizada por ser a que permite a realização de um mínimo de actividades consideradas essenciais para poder abordar todos os temas propostos no espaço de tempo disponível e ao mesmo tempo manter alguma uniformidade que seja transversal a todos os alunos das restantes licenciaturas inscritos na disciplina e que estão sujeitos ao mesmo método de avaliação.

O investigador enquadrou-se neste contexto sentando-se junto dos alunos, em lugares disponíveis e foi tomando notas de campo com o objectivo de caracterizar a compreensão dos alunos sobre os temas em estudo. Por vezes, quando o grau de proximidade era maior, estes pediram mesmo ajuda ao investigador na resolução de alguns problemas. O investigador encontrou-se assim numa situação de observação participante que lhe permitiu interagir com os alunos, integrando-se de tal forma na turma que a sua presença no grupo não altera o modo como este se relaciona dentro da sala de aula. As questões colocadas pelo professor serviram como indicadores preciosos do desempenho de alguns alunos que procuraram responder, sendo possível por vezes identificar os processos e procedimentos que estão subjacentes ao raciocínio desenvolvido. Este tipo de interacção foi favorecido pelo professor sempre que possível, no entanto os alunos tenderam a aproveitar cada vez menos as suas potencialidades. Para tal pareceu ter contribuido o facto de em quase todas as aulas serem abordados conceitos novos, não permitindo aos alunos dispor de um tempo de reflexão suficientemente amplo para que possam questionar-se sobre estes novos conceitos introduzidos. Este pareceu ser o ponto fundamental para a fraca participação nas actividades da aula, uma vez que os alunos que demoravam mais tempo a desenvolver os seus processos de raciocínio acabavam por não dispor de tempo para reflectir sobre a viabilidade da sua resolução. Desta forma eles acabavam por transcrever a resolução do professor que entretanto já tinha sido apresentada esquematicamente no quadro, sem terem possibilidade de questionar a sua validade para conduzir à sua compreensão. Este processo foi-se agravando ao longo do tempo, sendo cada vez menor a participação dos alunos nas tarefas da aula. Por vezes estas dificuldades tornaram-se bastante notórias quando era proposto aos alunos a realização de uma determinada tarefa que não era imediatamente resolvida pelo professor, começando os alunos por levantar questões que se prendiam mais com a compreensão de conceitos elementares do que com aqueles conceitos que eram considerados necessários para a resolução do problema. É de salientar no entanto que estes constrangimentos temporais resultam essencialmente da organização do currículo, onde todos os tópicos previstos têm que ser leccionados, uma vez que a avaliação é igual para todas as engenharias e abrange todos os tópicos.

Como já foi referido anteriormente, no caso da licenciatura em Matemática, as aulas estavam separadas em dois grupos: teóricas e práticas. As aulas teóricas foram leccionadas em conjunto para todos os alunos da licenciatura tendo cerca de 86 alunos inscritos, dos quais 42 correspondiam a alunos que ingressaram pela primeira vez na licenciatura. Estas aulas não apresentavam qualquer carácter de obrigatoriedade pelo que a média de presenças nas aulas observadas rondava os 25 alunos. Estas aulas apresentavam uma carga horária de 3 horas semanais, repartidas por 3 períodos de uma hora cada. A sala de aula apresentava a forma de anfiteatro, estando o professor e os alunos separados por alguns degraus que medeiam entre as mesas dos alunos e o palco onde se encontra o quadro. Da mesma forma, o investigador continuou a sentar-se junto com os alunos ocupando um lugar disponível que lhe permitisse ter uma visão global da classe, realizando uma observação directa, no sentido que lhe é dado por Costa (1986), observação esta que tinha por objectivo analisar o contexto educativo sem que houvesse qualquer tipo de intervenção no mesmo. Nestas aulas foram abordadas as definições e propriedades dos conceitos e foram enunciados e demonstrados os teoremas considerados fundamentais. Dadas as limitações temporais, as definições e teoremas eram quase sempre apresentadas em acetatos, como já foi referido anteriormente, tendo os alunos também acesso aos seus enunciados através da sebenta da disciplina. Quando se tratou de propriedades foram dados exemplos e contra-exemplos para ajudar à sua compreensão e no caso dos teoremas, a sua demonstração foi esquematizada pelo professor no quadro. Embora o professor procurasse questionar os alunos com o objectivo de que eles pudessem adquirir significado para os conceitos em estudo, estes mostraram uma participação bastante reduzida, limitando-se a transcrever do quadro todos os esquemas explicativos usados por este. Tal como já foi referido anteriormente, a falta de tempo para que os alunos pudessem fazer uma reflexão sobre os conteúdos que estavam a ser abordados parece ser determinante para a atitude de passividade que eles assumiram durante a aula. Por vezes as suas intervenções, ainda que pouco frequentes, mostravam alguma falta de compreensão dos processos de raciocínio que estavam a ser desenvolvidos pelo professor. Foi mesmo possível identificar algumas dificuldades que pareciam ter origem na compreensão de outros objectos matemáticos mais elementares. Nalguns casos o nível da abstracção necessário para compreender os raciocínios utilizados na demonstração era de tal modo elevado, que os alunos apresentaram grandes dificuldades em utilizar esses mesmos raciocínios quando aplicados a casos concretos.

Nas aulas práticas, foi observada apenas uma das turmas, com cerca de 27 alunos que frequentam a disciplina pela primeira vez, cujas aulas decorreram numa sala de aula normal (tal como já foi caracterizada anteriormente). Estas aulas tinham uma carga horária de três horas distribuídas por dois períodos lectivos de uma hora e meia cada. O investigador assistiu a cerca de 12 aulas e continuou a sentar-se junto dos alunos, num lugar disponível. O tipo de observação realizada pode caracterizar-se por participante, ainda que este grupo de alunos solicitasse menos vezes a participação do investigador, comparativamente aos grupos que estavam sujeitos ao tipo de aulas teórico-práticas. Estas aulas eram compostas por resolução de exercícios relacionados com os conteúdos leccionados na aula teórica, sendo o professor a seleccionar os exercícios que deveriam ser resolvidos, com o objectivo de manter alguma uniformidade com as restantes turmas práticas. Após ter sido proposta a resolução de um dado exercício foi dado algum tempo para que os alunos pudessem pensar sobre a abordagem que deveriam fazer, sendo quase sempre o professor a esquematizar a sua solução no quadro. A participação dos alunos só surgiu com o frequente questionamento do professor, revelando-se por vezes bastante incipiente, uma vez que os conceitos que tinham sido abordados na aula teórica já não eram reproduzidos pelos alunos denotando uma falta de compreensão dos mesmos. Por vezes o professor acabou por ter que voltar a referir os enunciados das definições, propriedades e teoremas estudados na aula teórica para que eles pudessem ganhar algum significado na mente dos alunos. Os alunos pareciam essencialmente preocupados com os procedimentos e processos a seguir durante a resolução, procurando uma generalização dessas técnicas ao maior número de exercícios possível.

3.2. Guião das entrevistas

Neste estudo foram realizadas duas entrevistas, uma relativa ao tópico das sucessões e outra relativa às funções, diferenciabilidade e teoremas associados. Em cada uma das entrevistas foram colocadas questões que estavam organizadas por conteúdos e expressas por situações. Apresenta-se de seguida os critérios subjacentes à escolha das situações apresentadas aos alunos e que estão referenciadas nos anexos 1 e 2.

Algumas das situações têm por base tarefas associadas aos conceitos já aprendidos no ensino secundário. É o caso da situação 1 da 1ª entrevista relativa ao conceito de sucessão e das situações 1 e 3 da 2ª entrevista relativas ao conceito de função e derivada. Estas situações tinham um duplo objectivo: caracterizar os conceitos imagem que os alunos têm destes conceitos e perceber de que forma estes conceitos imagem influenciam a construção de novos conceitos. As tarefas que eram propostas apresentavam por vezes um carácter informal para que os alunos não se cingissem apenas à definição formal do conceito e pudessem desta forma apresentar uma maior diversidade de representações onde fosse possível identificar os processos e objectos matemáticos subjacentes aos conceitos.

Outras situações estão relacionadas com conceitos já abordados parcialmente no ensino secundário, mas que agora foram estudados com maior profundidade, nomeadamente recorrendo à sua escrita simbólica. É o caso das situações 2, 3 e 4 da 1ª entrevista e da situação 2 da 2ª entrevista. Em qualquer das situações são propostas tarefas que partem do conhecimento intuitivo dos conceitos pretendendo-se que seja feita uma abordagem mais formal do mesmo. Esta abordagem corresponde à tradução do conceito para a sua representação simbólica e envolve a utilização de alguns objectos matemáticos mais complexos e uma capacidade de abstracção baseada no uso dos símbolos. Também neste caso se procurou relacionar o conceito formal e simbólico com uma abordagem informal. Foi proposto aos alunos que aplicassem a definição simbólica a casos concretos, usando representações gráficas, por forma a identificar o papel desempenhado pelos símbolos. Tratou-se de tarefas que não eram usuais e onde foi possível identificar contextos de experiências de ensino, com os alunos a estabelecer o significado dos vários parâmetros presentes na definição simbólica anteriormente representada. É também neste processo que os alunos concretizam alguns dos objectos matemáticos subjacentes à definição simbólica, objectos estes que aqui são descritos em termos dos seus processos e procedimentos, tornando-se a sua compreensão mais efectiva. É, por exemplo, o caso das vizinhanças e da sua representação em termos de distâncias, como o módulo de uma diferença.

Uma outra situação, a situação 4 da 2ª entrevista, é representativa de uma situação de aprendizagem nova, onde o teorema de Lagrange é abordado pela primeira vez procurando-se em simultâneo estabelecer a sua aplicabilidade. Mais uma vez se procura caracterizar os conceitos imagem que os alunos têm sobre o teorema e o seu uso. Este novo construto envolve a conceptualização de novas premissas como as hipóteses e a tese, bem como as relações que se estabelecem entre elas. Esta tarefa pretende também estabelecer características da compreensão de conceitos da matemática avançada, nomeadamente ao nível do pensamento proceptual usado pelos alunos. O recurso ao caso concreto tem por objectivo descapsular o enunciado do teorema identificando os processos e objectos que o aluno é capaz de manipular.

É transversal a todas as situações identificar o tipo de pensamento proceptual que é usado pelos alunos, bem como caracterizar a sua evolução à medida que os conceitos se vão complexificando.

3.3. Entrevistas

As entrevistas constituíram a principal técnica de recolha de dados. Tratou-se de entrevistas semi-estruturadas, realizadas individualmente, com o objectivo principal de caracterizar os principais conceitos imagem que os alunos têm sobre determinados conceitos matemáticos avançados. Neste sentido foram realizadas duas entrevistas a cada um dos quinze alunos participantes no estudo, com a duração de cerca de uma hora e quinze minutos cada uma. Os guiões das entrevistas são apresentados nos anexos 1 e 2.

A primeira entrevista decorreu durante o período de aulas, aproximadamente a meio do semestre lectivo e uma semana após a realização do primeiro momento de avaliação. Esta avaliação foi constituída por um teste de escolha múltipla para os alunos da licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores e para os de Ensino das Ciências da Natureza e por um teste escrito de resposta aberta para os alunos de Matemática. O guião desta primeira entrevista incide totalmente sobre o tema das sucessões sendo composto por 5 situações. Algumas destas situações são apoiadas por gráficos fornecidos pelo investigador, como forma de minimizar o tempo dispendido no seu traçado e tendo em consideração que o seu uso não deverá alterar de forma significativa os conceitos imagem que estão em jogo durante a entrevista.

A segunda entrevista decorreu no final do semestre lectivo, tendo alguns alunos sido ainda entrevistados durante a última semana de aulas. Nesta altura os alunos que estavam sujeitos ao regime de aulas teórico-práticas tinham já realizado um segundo momento de avaliação, que correspondia a mais um teste de escolha múltipla, estando a preparar um terceiro do mesmo tipo, enquanto que os da licenciatura em Matemática estavam prestes a realizar um segundo teste de resposta aberta, tal como o primeiro. Nesta segunda entrevista o guião incide sobre as funções reais de variável real, dando especial destaque aos limites, derivadas e teoremas fundamentais do cálculo diferencial. Ele é constituído por 4 situações, algumas delas apoiadas por gráficos fornecidos pelo investigador, gráficos estes que só são utilizados quando se prevê que a sua introdução não vai alterar de forma significativa os conceitos imagem a caracterizar. Nalguns casos é mesmo solicitado inicialmente aos alunos que esbocem os seus próprios gráficos, não sendo neste caso fornecido aquele que estava na posse do investigador.

As entrevistas decorreram sempre num ambiente considerado acolhedor e propício para o efeito, contando apenas com a presença do investigador e do aluno a ser entrevistado. O período durante o qual decorria a entrevista era sempre marcado de acordo com a disponibilidade do aluno, normalmente durante o período lectivo onde estes não tinham nenhuma actividade curricular. A realização das entrevistas não pareceu causar ansiedade nos alunos, que foram capazes de falar com bastante facilidade, ainda que não tivessem a certeza de que estavam a dar uma resposta correcta ou a desenvolver um raciocínio coerente com a matemática que tinha sido ensinada. O investigador foi colocando questões que conduziram a uma participação dos alunos que procurou que estes explicitassem os seus raciocínios em voz alta, (*thinking aloud*) no sentido que lhe é dado por Schnotz e Ballstaedt (1998), sendo possível desta forma identificar a compreensão que eles têm sobre determinados objectos matemáticos. Por vezes podemos considerar estar perante experiências de ensino, onde o investigador procura buscar significado para as respostas dadas pelo aluno. Há uma intenção deliberada em ensinar determinados conteúdos que os alunos têm dificuldade em expressar para que se possa aceder aos processos e procedimentos que eles utilizam na construção desses conhecimentos.

A relação que se estabeleceu entre o investigador e os alunos tornou-se de tal forma aberta que por várias vezes os alunos utilizaram a situação de entrevista para esclarecer algumas das suas dúvidas sobre os conceitos tratados. Esta abordagem proporcionou ao investigador uma fonte bastante rica no que se refere aos métodos e processos de raciocínio desenvolvidos por estes alunos. Neste tipo de situações o investigador, quando considera ter compreendido o tipo de raciocínio desenvolvido pelos alunos, acaba por completar ou esclarecer essas dúvidas, tendo em conta que os alunos se encontram numa fase de avaliação, proporcionando-lhe desta forma mais uma oportunidade para que possam clarificar o significado matemático dado a estes conceitos. Outra forma utilizada para ajudar a esclarecer este tipo de dúvidas foi, no final da entrevista, o investigador colocar-se ao dispor dos alunos para eventuais questões que estes tivessem interessados em colocar. Foram vários os alunos entrevistados que aproveitaram a situação para colocar dúvidas relativas aos temas abordados nas entrevistas, assim como outros referentes a outros temas que faziam parte do currículo da disciplina. Alguns destes alunos chegaram mesmo a solicitar a ajuda do investigador nos dias que antecederam a realização da prova de exame. Também foi possível constatar que por vezes alguns alunos conseguiam apresentar um conceito imagem mais completo quando são alvo de pequenas ajudas dadas pelo investigador. Esta abordagem explora os conhecimentos dos alunos no que Vygotsky denomina de zona de desenvolvimento proximal, onde o aluno consegue chegar ao conceito, que antes parecia afastado do seu domínio de conhecimento, através de uma pequena ajuda.

Todas as entrevistas foram audiogravadas, sendo posteriormente transcritas pelo investigador. As transcrições foram posteriormente anotadas com algumas notas de campo que foram sendo recolhidas durante as entrevistas, notas estas que não sendo captadas pela gravação de áudio (gestos, expressões faciais, outros símbolos não representados no papel) se revelaram importantes para compreender e completar as respostas dadas.

3.4. Recolha de documentos

A recolha de documentos foi outra das técnicas de recolha de dados utilizada no decorrer da investigação. Foram recolhidos essencialmente dois tipos de documentos: documentos oficiais que dizem essencialmente respeito ao percurso académico dos alunos e documentos pessoais que dizem respeito às produções dos alunos. Os documentos oficiais recolhidos permitem fazer uma caracterização da amostra podendo ser realizadas algumas inferências sobre a compreensão de determinados conceitos e objectos matemáticos abordados anteriormente. Estas inferências servem essencialmente como elementos orientadores para o desenvolvimento da investigação, não sendo os dados obtidos desta forma utilizados para validar nenhuma conjectura sobre a compreensão manifestada pelos alunos. Os documentos pessoais recolhidos dizem essencialmente respeito a resoluções de determinados exercícios realizadas pelos alunos, às provas escritas de avaliação de conhecimentos e por vezes comportam mesmo as folhas que os alunos utilizam como rascunho, sobretudo quando se trata de provas que têm por base uma metodologia de escolha múltipla. Em várias situações estes documentos revelaram-se de especial importância para poder evidenciar a compreensão de determinados conceitos, nomeadamente no confronto de algumas das resoluções dos alunos com a forma como eles explicam verbalmente essas mesmas resoluções.

3.5. Análise dos dados

A partir dos resultados destas entrevistas, da observação de aulas e dos documentos recolhidos, foi feita uma análise vertical e horizontal dos conceitos abordados. Na análise horizontal foram identificados três tipos principais de conceitos imagem que são transversais aos vários tópicos analisados. Esses conceitos imagem são, o conceito imagem incipiente, o conceito imagem instrumental e o conceito imagem relacional, que caracterizam o desempenho dos alunos na compreensão dos vários conceitos estudados, seguindo uma evolução dos conceitos imagem mais elementares para os mais avançados. Esta classificação dos níveis de conceito imagem permite estabelecer uma certa *hierarquia*, assim como observar uma certa *estabilidade*, fenómeno que reflecte a permanência num mesmo nível ao longo dos vários conceitos estudados. Também deve ser tido em conta o facto de haver uma certa *oscilação* dentro do mesmo nível de conceito imagem, podendo por vezes o aluno manifestar concepções mais elaboradas de algumas propriedades enquanto que outras são mais elementares. Outro fenómeno que também foi possível caracterizar refere-se à *localidade*, onde podemos encontrar alunos que manifestam níveis de conceito imagem mais baixos (incipientes) nos conceitos mais elementares sendo por vezes os conceitos mais complexos acompanhados de níveis de conceito imagem elaborados (instrumentais ou mesmo relacionais). A par desta abordagem foi feita uma outra vertical, que engloba todos os conceitos estudados, e que procura identificar alunos típicos de cada um destes níveis de conceito imagem. Caracteriza-se assim o desempenho de um aluno que pode ser considerado como apresentando um conceito imagem incipiente, outro tipicamente instrumental e outro com nível de conceito imagem relacional.

4. Limitações do estudo

Este estudo tem como principal objectivo caracterizar a compreensão de alguns conceitos matemáticos avançados. A opção por uma metodologia de índole qualitativa induz algumas limitações. Uma destas limitações pode estar relacionada com a sua generalização. De facto, mais do que obter dados que pudessem apresentar características comuns a um grande número de alunos, procurou-se estudar de modo pormenorizado os conceitos imagem de um determinado grupo de alunos. Tendo em atenção que se trata de uma amostra bastante reduzida, composta por alunos que no início do estudo manifestaram um desempenho satisfatório nas avaliações realizadas e que por esse facto representam um grupo restrito da população, a generalização dos dados obtidos deve ter em conta estes constrangimentos metodológicos. Como contrapartida temos acesso a um conjunto de objectos, processos e propriedades que estes alunos relacionam com os conceitos, que nos permitem caracterizar de forma pormenorizada a sua compreensão dos mesmos e que pelas suas características nos podem ajudar a estabelecer os níveis de compreensão de outros grupos de alunos.

Outra questão que devemos ter em conta prende-se com a validade do estudo a médio ou longo prazo. Uma mudança nos pressupostos que estão subjacentes no ensino destes conceitos deverá sempre ser tida em conta, prevendo-se que os conceitos imagem aqui manifestados possam ser significativamente alterados. Estas mudanças serão mais significativas se o ensino ministrado for direccionado para a compreensão dos conceitos, partindo da sua concepção operacional e progredindo no sentido de uma estruturação crescente.

Outra condicionante que pode ser importante destacar prende-se com a duração temporal do estudo e com as alterações que daí podem advir relativas à classificação dos conceitos imagem. Esta classificação em níveis de conceito imagem pode evoluir de forma não antecipada com o tempo, podendo verificar-se regressões ou progressões na compreensão dos conceitos estudados.

Capítulo V

Níveis de complexidade dos conceitos imagem manifestados pelos alunos

Este capítulo tem por objectivo caracterizar níveis de complexidade dos conceitos imagem identificados a partir dos dados empíricos recolhidos junto dos alunos. Pretende-se assim dar resposta parcial ao segundo objectivo proposto para o estudo, uma vez que o mesmo continuará a ser abordado nos dois capítulos seguintes. O termo complexidade é aqui utilizado no sentido de explicitar o nível ou grau de desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático. Estes níveis foram estabelecidos com base na criação de meta-categorias retiradas das categorias formadas a partir dos dados. Os alunos foram colocados perante determinadas tarefas matemáticas (situações apresentadas nos anexos 1 e 2), permitindo caracterizar a forma como eles compreendem os conceitos ensinados. Os principais temas tratados nas tarefas referem-se ao estudo da Análise no primeiro ano do ensino superior, sendo abordados os conceitos de: sucessão, infinitamente grande positivo, sucessão convergente, função, limite de uma função, derivada e também o teorema de Lagrange. Foi possível identificar três níveis diferentes de conceitos imagem nos alunos: *conceito imagem incipiente*, *conceito imagem instrumental* e *conceito imagem relacional*. O objectivo principal ao estabelecer estes níveis foi o de distinguir diferentes tipos de conceitos imagem que podem coexistir na mente do aluno. Perante o ensino de um dado conceito, alguns alunos manifestam conceitos imagem mais próximos dos característicos da matemática elementar (conceitos imagem incipientes) enquanto que outros apresentam concepções mais próximas das que caracterizam a matemática avançada (conceitos imagem relacionais).

Nesta fase de aprendizagem espera-se que ocorra uma passagem de uma matemática mais elementar para uma matemática mais avançada. Segundo Tall (1991) esta passagem envolve uma transição importante que corresponde à passagem da descrição à definição, do convencer ao provar de uma forma lógica baseada em definições. Esta transição requer uma reconstrução cognitiva que é visível sobretudo no início do ensino superior, manifestando-se como uma luta pela compreensão das abstracções formais que parecem dominar o ensino nesta fase. Observei no entanto que os conceitos imagem dos alunos estudados se distribuem por três níveis ou graus de complexidade, dois dos quais ficam aquém do que seria esperado.

Para caracterizar estes níveis de complexidade foram tidos em conta diferentes domínios que são utilizados no desenvolvimento das várias teorias cognitivas apresentadas no capítulo II. São eles: os objectos, os processos, a tradução entre representações, as principais propriedades e o pensamento proceptual, que passarei a discutir brevemente. Os *processos* e os *objectos* são elementos chave nas várias teorias da aprendizagem. A teoria da reificação de Anna Sfard propõe que a execução de processos sobre objectos concretos proporcionam o desenvolvimento das fases de interiorização, condensação e reificação, David Tall concebe a visão proceptual dos conceitos (ou objectos) através da realização de procedimentos e processos que vão sendo cada vez mais sofisticados e que culminam na possibilidade de pensar sobre a matemática simbolicamente, como proceitos, e Ed Dubinsky também realça o papel de objectos sobre os quais são realizados determinados processos que posteriormente são capsulados em novos objectos matemáticos. A *tradução entre representações* e as principais *propriedades matemáticas* de um determinado conceito permitem-nos estabelecer de forma mais clara o tipo de compreensão dos alunos sobre o pensamento matemático avançado, uma vez que facilitam a compreensão das várias ligações que estes são capazes de estabelecer com outros conceitos. O *pensamento proceptual* dá-nos uma visão mais completa da forma como os conceitos matemáticos mais avançados são compreendidos, revelando a capacidade dos alunos em comprimir longas sequências de raciocínios em objectos mais compactos que por vezes são representados por símbolos.

Os níveis de complexidade propostos possuem determinadas propriedades que lhe conferem características próprias e que são a localidade, a hierarquia, a estabilidade e a oscilação. Assim, estes níveis de complexidade não são estanques e verificou-se que um aluno pode estar num dado nível num conceito e no conceito seguinte já se poder classificar noutro nível diferente. Existe pois uma certa *localidade* no nível do conceito imagem. Este fenómeno pode mesmo tomar formas que não seriam expectáveis onde, por exemplo, um aluno pode apresentar um conceito imagem incipiente de função e no entanto quando se pretende abordar a noção de limite ele consegue manifestar um conceito imagem instrumental ou mesmo relacional. Seria de esperar que para os conceitos mais elementares fossem manifestados conceitos imagem relacionais, enquanto que para os conceitos mais avançados os conceitos imagem pudessem apresentar caracterísitcas incipientes ou instrumentais. Este fenómeno de localidade confere características próprias a cada conceito imagem, sendo a ligação entre eles por vezes difícil de estabelecer. Mesmo nas situações em que se poderia pensar que um conceito seria necessário para a construção de outro, os conceitos imagem dos alunos não traduzem essa relação e conceitos mais complexos acabam por ser evocados com base em características específicas que não têm em consideração este tipo de relação. Este fenómeno parece ser indicador da existência de características do conhecimento que são específicas de um dado contexto, podendo desta forma falar-se de cognição em contexto.

Estes níveis de complexidade dos conceitos imagem revelam, no entanto, a existência de uma *hierarquia*, que se desenha como a evolução de conceitos imagem mais elementares (incipientes) para conceitos imagem mais avançados (relacionais), mas cujas fronteiras devem ser consideradas bastante difusas. Esta hierarquia é referida pela literatura e traduz a evolução esperada na compreensão dos conceitos.

Uma outra propriedade dos níveis de conceito imagem identificados, diz respeito ao nível em que alguns alunos se encontram nos vários conceitos, verificando-se a existência duma *estabilidade* que reflecte a sua permanência num mesmo nível. Esta estabilidade pode ser observada quer ao nível dos conceitos imagem incipientes, quer ao nível dos conceitos imagem relacionais. Quando esta propriedade se verifica ao nível dos conceitos imagem relacionais estamos perante uma situação óptima em termos de aprendizagem, manifestando os alunos uma compreensão efectiva dos conceitos. Já quando tal acontece ao nível dos conceitos imagem incipientes podemos considerar que os conceitos abordados não são encarados pelos alunos como objectos matemáticos. A situação intermédia, onde os conceitos imagem manifestados se situam num nível instrumental parece ser por vezes suficiente para que alguns alunos, nomeadamente os dos cursos de engenharia, que revelam uma compreensão dos conceitos que lhe permite ter sucesso na disciplina.

A quarta propriedade dos níveis de conceito imagem identificados diz respeito à forma como as propriedades de um mesmo conceito são estabelecidas, verificando-se uma certa *oscilação* na sua compreensão. Embora os alunos estejam num determinado nível de conceito imagem, apresentam oscilações na forma como utilizam as diferentes propriedades deste. Por exemplo um aluno que manifesta um conceito imagem incipiente de função consegue referir-se à monotonia de algumas funções em concreto, explicitando a relação que se estabelece entre os objectos e as imagens, mas quando se pretende que ele dê uma definição do conceito não refere essa noção de correspondência, fazendo apenas referência a processos e procedimentos mais elementares para a construção do conceito.

1. Conceito imagem incipiente

Os conceitos imagem deste nível são muito incompletos referindo-se a objectos elementares que por si só não traduzem o conceito pretendido. Na maior parte das vezes referem apenas algumas características mais notórias do objecto matemático, mas omitem outras, dificilmente estabelecendo relações significativas entre os mesmos. Normalmente os próprios alunos estão conscientes das limitações dos seus conceitos. Podemos tomar como exemplo o caso da Alexandra quando tenta explicar o que entende por função: "Pois mas eu não sei em concreto o que é uma função. Não se pode dizer que é um gráfico pois não? É um… Onde há pontos do domínio, onde há pontos que têm imagens".

Os *objectos matemáticos* que os alunos utilizam são quase sempre de nível elementar para este nível de ensino, levando a que as acções sobre esses objectos não conduzam a processos que possam ser capsulados nos objectos matemáticos pretendidos. No caso anterior podemos observar a referência ao domínio e às imagens, mas o processo de transformação dos elementos do domínio em imagens não é evocado como uma característica da função. Parece haver a necessidade de criar outros objectos intermédios, como a univocidade da correspondência, para que a compreensão do conceito se torne efectiva.

No que se refere aos *processos* utilizados, eles são quase sempre elementares e o grau de coordenação entre eles é quase sempre fraco. É por vezes possível encontrar alguns processos de nível mais elementar que os alunos interiorizaram, sendo mesmo possível capsulá-los e transformá-los em objectos matemáticos. No entanto estes revelam-se insuficientes para conduzir à construção do novo conceito pretendido. Muitos dos processos que os alunos utilizam nesta categoria são memorizados e as transcrições apresentam inúmeros exemplos de ventriloquismo. Por exemplo a Maria considera que "[uma] sucessão é limitada se tiver majorante e minorante", no entanto quando procura justificar que a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ é limitada refere-se aos naturais admitindo que o majorante tende para mais infinito. É também possível identificar processos que não passam de uma mera automatização de procedimentos. Outros são processos algébricos que apenas conduzem a uma compreensão parcial do conceito. Estas situações são identificadas por exemplo quando se pretende provar por definição que a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ tende para 1, onde alguns alunos conseguem realizar os cálculos que permitem exprimir o n em função do ε, mas não conseguem tirar qualquer conclusão com base nestes cálculos. Alguns processos são ainda verbalizados de forma adequada mas não são pensados como proceitos, isto é, os alunos verbalizam determinadas propriedades dos conceitos mas não conseguem fazer uma tradução simbólica adequada com a atribuição do significado pretendido aos símbolos representados. É o caso da noção de sucessão limitada da Maria apresentada acima.

A *tradução entre representações* é feita com base em processos e procedimentos elementares, que ocasionalmente são coordenados de forma adequada, mas que não permitem uma compreensão do conceito como a que era esperada quando foi implementado o processo de ensino. Por exemplo os alunos recorrem à tradução entre a representação algébrica e gráfica, representando correctamente as imagens de vários objectos, mas quando procuram fazer essa tradução sem calcular essas imagens fazem esboços gráficos que nem sempre correspondem às funções em estudo. As representações têm por base processos elaborados sobre outros constructos matemáticos mais elementares, constructos estes que nem sempre têm o estatuto de objecto matemático, isto é, que não estão reificados ou que não podem ser pensados proceptualmente. Um exemplo deste tipo de tradução pode ser encontrado quando se pretende fazer a representação simbólica da definição de sucessão convergente, onde a noção de vizinhança não é utilizada como um objecto matemático, o que causa uma dificuldade adicional na realização da tradução pretendida. Quando existem traduções, estas baseiam-se nalgum tipo de objectos quase sempre demasiado elementares e permitem que apenas seja feita uma tradução parcial entre diferentes representações.

As principais *propriedades* que os alunos evocam neste nível estão permeadas pela memorização e pelo ventriloquismo, sendo os alunos capazes de as referir verbalmente mas não conseguindo dar-lhe o significado esperado, nomeadamente quando se pretende descapsular o objecto em causa para poder recuperar os processos que estiveram na sua origem. Podemos tomar como exemplo a definição de sucessão limitada da Maria que foi apresentada acima. É no entanto possível observar que há algumas propriedades de nível mais elementar que os alunos utilizam com significado. No entanto estas baseiam-se em processos, também eles demasiado elementares, que não é possível coordenar de modo a dar um significado adequado ao conceito. Por exemplo os alunos conseguem referir-se à monotonia de uma sucessão com base na sua representação gráfica, mas têm dificuldades em generalizar essa propriedade para o caso geral, de modo a fazer a sua tradução simbólica.

O *pensamento proceptual* que é evidenciado neste nível diz respeito, sobretudo, a uma utilização dos símbolos que apenas podem representar objectos matemáticos elementares. Os alunos conseguem assim utilizar alguns proceitos elementares, recuperando os processos que lhe estão subjacentes sempre tal seja necessário. Quando os símbolos são usados na tradução simbólica de conceitos como o de sucessão convergente ou infinitamente grande, por exemplo, são quase sempre desprovidos de significado no contexto da definição simbólica. Nas situações em que o aluno faz a representação simbólica acaba por não ser capaz de explicitar o seu significado. Por vezes alguns símbolos isolados na definição são dotados de significado, mas em nenhum dos casos o aluno mostra uma compreensão que integre os restantes símbolos presentes. Nestas situações apenas é activada parte do pensamento proceptual, normalmente a componente processual. Na maior parte dos casos as componentes conceptual e processual andam desligadas uma da outra.

O quadro 5.1 traduz de forma resumida algumas das principais características deste nível, discriminada pelos diferentes domínios considerados.

Quadro 5.1. Principais características do conceito imagem incipiente.

Objectos	Processos	Tradução entre representações	Propriedades	Pensamento proceptual
• São essencialmente elementares neste nível de ensino. • As acções realizadas sobre eles não conduzem a processos possíveis de capsular nos objectos que representam o conceito.	• Manifestação de ventriloquismo (recurso a processos memorizados). • Processos baseados na automatização de procedimentos. • Processos elementares, sem coordenação entre eles. • Processos interiorizados de nível elementar que conduzem a objectos elementares. • Uso preferencial de processos algébricos. • Verbalização de processos que não são possíveis de representar na forma de proceito.	• Baseada em procedimentos demasiado elementares para este nível de ensino. • As representações entre as quais é feita a tradução não são objectos matemáticos. • As traduções são quase sempre incompletas (nomeadamente as traduções simbólicas).	• Manifestação de ventriloquismo. (recurso à verbalização de propriedades memorizadas) • Memorização. • Propriedades elementares que são usadas com compreensão.	• Os símbolos são usados como proceitos representando objectos matemáticos elementares. • Uso de proceitos elementares que são abordados em termos de processos. • Símbolos que apenas representam o conceito de forma parcial. • Uso parcial do proceito destacando apenas a sua componente processual • Símbolos desprovidos do significado esperado. • Componentes processual e conceptual do conceito desligadas uma da outra.

2. Conceito imagem instrumental

Os conceitos imagem apresentados pelos alunos incluídos neste nível permitem utilizar alguns objectos matemáticos que estão na base do conceito em estudo. Enquanto que no nível anterior os objectos eram demasiado elementares, sendo difícil a realização e coordenação de processos que conduzissem à construção dos objectos pretendidos, neste nível podemos encontrar alguns objectos mais complexos que estão na base dos conceitos abordados sendo possível estabelecer processos que possam conduzir à construção dos novos conceitos. No entanto estes objectos são muitas vezes insuficientes para que através da realização de processos sobre eles seja possível implementar as fases de interiorização e condensação que conduzem à reificação do conceito, tal como é proposto no modelo de Sfard. É possível identificar alguns processos realizados sobre esses objectos, mas falta a coordenação entre eles para que possam ser capsulados em novos objectos. É no entanto possível constatar que a manifestação deste tipo de conceito imagem permite aos alunos, nomeadamente os de engenharia, um desempenho suficiente para obter aprovação na disciplina.

Como exemplo podemos considerar o conceito de função do Fernando "uma função é uma expressão. Uma expressão constituída por constantes e variáveis e que vai ser modificada através dessas variáveis. Aaa… que podem tornar a função… Aaa… já ia falar em gráficos. (…) Pode ter uma representação gráfica, pode ter uma representação analítica…". Ele consegue identificar algumas das características que podem ser associadas ao conceito mas revela dificuldades ao tentar coordenar todos estes elementos para explicitar o seu significado.

Os *objectos* matemáticos que os alunos referem neste nível são quase sempre elementares, não sendo possível pela sua interiorização gerar processos que possam ser coordenados e capsulados no novo conceito em estudo. No caso acima, o Fernando refere-se à expressão algébrica e ao gráfico como objectos, mas não é capaz de explicitar os processos que lhe permitem definir o conceito. É assim possível observar o capsular de processos que dão origem a objectos matemáticos que representam parcialmente o conceito, sendo mesmo esses objectos apresentados como proceitos. Em nenhum dos casos o conceito em estudo é encarado como um proceito ou como um objecto matemático reificado. As definições simbólicas de sucessão convergente ou de infinitamente grande são exemplos deste tipo de situações, sendo o papel dos quantificadores o que mais dificuldades levanta à compreensão.

No domínio dos *processos* é possível observar situações nas quais estes são interiorizados e condensados, resultando mesmo na criação de novos objectos. Por exemplo ao explicitar o significado da expressão $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$, os alunos conseguem referir a forma como os objectos se aproximam de 1 e as imagens de 2, representando esses processos por módulos que traduzem distâncias. Embora estes objectos sejam necessários para a construção dos conceitos em estudo, não basta apenas que eles existam, seria necessário considerar relações entre eles para uma compreensão adequada dos conceitos. Para que haja uma coordenação desses processos de modo a que possam ser capsulados em novos objectos, é necessário que sejam realizados novos processos sobre eles, como refere o modelo de Dubinsky. Esta última fase, que diz respeito à capacidade de utilizar o conceito ensinado como um objecto, não é atingida neste nível, ficando os alunos ligados aos processos maioritariamente realizados usando procedimentos algébricos e envolvendo objectos concretos. Os processos que envolvem objectos abstractos são apenas abordados de forma parcial, sendo possível verbalizá-los mas a sua tradução simbólica revela-se insuficiente. É o que acontece no caso anterior, onde os alunos ao tentar representar simbolicamente o limite não conseguem dar o significado pretendido aos quantificadores.

Neste nível a *tradução entre representações* é feita com base num conjunto de procedimentos e processos que por vezes já foram interiorizados, mas que ainda não foram condensados em unidades mais compactas, possíveis de reificar. Neste sentido os alunos acabam por executar as mesmas rotinas de forma repetitiva, recorrendo a abordagens operacionais que apenas lhes permitem fazer traduções parciais entre representações. A tradução simbólica de alguns conceitos é um exemplo ilustrativo deste domínio, sendo possível observar que os alunos traduzem simbolicamente algumas partes do conceito mas, quando essas partes estão integradas na tradução simbólica do conceito não lhes conseguem dar o significado esperado.

As *propriedades* evocadas pelos alunos, quando de nível elementar, são usadas com compreensão sendo referidas com o estatuto de objectos matemáticos. Por exemplo a monotonia ou a noção de sucessão limitada são explicitadas desta forma por vários alunos. Já quando se trata de propriedades que dizem directamente respeito ao conceito em estudo, são quase sempre explicitadas com base numa concepção operacional, tal como refere Sfard a propósito da concepção das noções matemáticas, referindo-se os alunos apenas aos processos pelos quais estas podem ser traduzidas. Podemos tomar como exemplo destas situações o estabelecimento da invertibilidade das funções, que os alunos tendem a explicitar de modo operacional.

No domínio do *pensamento proceptual*, os objectos matemáticos mais elementares são representados como proceitos e os alunos dão o significado pretendido à representação simbólica. No caso dos conceitos mais complexos, onde a tradução simbólica se torna necessária para a compreensão, os símbolos são usados de modo operacional, isto é, os alunos traduzem o seu significado com base em processos e procedimentos concretos, o que apenas lhes permite fazer uma tradução parcial dos conceitos. Surgem assim partes do conceito que são representados como proceitos, mas que quando integradas na representação simbólica acabam por desempenhar um papel processual. Parece estar presente um pensamento proceptual que dá maior ênfase à sua componente processual. É ainda possível identificar traduções simbólicas mais ou menos completas de determinados conceitos, mas estas não proporcionam aos alunos situações de aprendizagem onde estes consigam extrair ou dar significado à representação como um todo.

O quadro 5.2 traduz de forma resumida algumas das principais características que é possível encontrar neste nível.

Quadro 5.2. Principais características de um conceito imagem instrumental.

Objectos	**Processos**	**Tradução entre representações**	**Propriedades**	**Pensamento proceptual**
• Há uma variedade de objectos elementares para este nível de ensino mas com escassa interiorização e coordenação. • Alguns objectos são interiorizados em processos que depois não são capsulados. • Partes dos conceitos são encarados como objectos, no entanto isso não é suficiente para a sua reificação.	• Processos interiorizados e condensados. • Coordenação de processos que por vezes resultam na criação de objectos matemáticos. • Processos realizados sobre objectos concretos. • Dificuldades em realizar processos envolvendo objectos abstractos. • Uso adequado de processos algébricos. • Capacidade de verbalizar processos representados parcialmente como proceitos.	• Baseada em processos repetitivos. • Baseada em procedimentos interiorizados. • É feita de modo operacional. • As traduções simbólicas são quase sempre incompletas, sem atingir o significado pretendido pelo ensino.	• Propriedades elementares usadas com compreensão. • Uso de algumas propriedades evidenciando as suas características relacionadas com os processos. • São estabelecidas de modo operacional.	• Os símbolos são usados como proceitos representando objectos matemáticos elementares. • No pensamento proceptual apenas destacam a sua componente processual. • Os conceitos mais complexos têm uma tradução simbólica incompleta. • Memorização de algumas sequências de símbolos. • Uso de proceitos nalgumas partes da tradução simbólica de conceitos

3. Conceito imagem relacional

Os conceitos imagem apresentados pelos alunos que foram incluídos neste nível são quase sempre representativos de conceitos que são abordados de forma estrutural, isto é, como objectos matemáticos com uma existência própria para além dos processos que estiveram na sua origem, sendo os alunos capazes de recorrer a esses processos sempre que necessário.

Podemos tomar como exemplo o conceito imagem de função da Paula, que apresenta uma concepção próxima da definição formal utilizada nas aulas: "[Uma função] é a correspondência entre os objectos e as imagens, mas a cada objecto só pode corresponder uma e uma só imagem". O conceito relaciona assim outros objectos matemáticos, como por exemplo a sua representação algébrica ou gráfica, que obedecem a determinados processos, processos estes que são coordenados e capsulados dando origem ao novo objecto.

Neste nível é possível encarar os conceitos como *objectos* matemáticos. É o caso do conceito de função da Paula referido acima. Eles são criados a partir da realização de processos sobre outros objectos, que depois de interiorizados e condensados são reificados. Embora seja possível encontrar situações onde esta sequência é verificada, a fase da reificação é a que se apresentou menos clara e desenvolvida. Nos alunos estudados, por vezes ela só acontece com a ajuda do entrevistador, ainda que os alunos estejam na posse de todos os elementos que se consideram necessários para a sua obtenção. Por exemplo os alunos conseguem referir-se à derivada de uma função num ponto, escrevendo a sua definição formal, mas apenas conseguem estabelecer o papel do limite presente na expressão quando lhe é pedido para fazerem a interpretação geométrica da mesma. É também neste nível que as representações simbólicas dos conceitos mais avançados começam a ser encaradas como proceitos. Esta capacidade também tem aqui desenvolvimentos significativos. Assim, devido a uma compreensão menos profunda de alguns objectos, é possível constatar que alguns dos conceitos mais avançados são difíceis de descapsular. Por exemplo é possível que o aluno escreva a definição simbólica de sucessão convergente, mas que depois tenha alguma dificuldade em explicar o papel de alguns dos parâmetros presentes.

No domínio dos *processos* tem especial relevo os que resultam do descapsular dos objectos matemáticos. Esta capacidade, de a partir do objecto conseguir aceder aos processos que lhe deram origem, atinge neste nível a sua maior expressão pelo que os alunos conseguem lidar com um maior número de processos. Os processos também podem ter outra origem, nomeadamente através de uma coordenação entre eles com o objectivo de os capsular e formar novos objectos. Ao manejar esta variedade de processos é importante que eles sejam interiorizados e condensados convenientemente, e de facto, neste nível, uma grande parte deles é referido como tendo um carácter estrutural, isto é, os alunos referem-nos como se estes representassem propriedades. Por exemplo o recurso ao traçado de uma linha horizontal para, num esboço gráfico, justificar a injectividade da função, é um processo bastante utilizado pelos alunos. Por vezes é possível observar o recurso a alguns processos de índole operacional, baseados em procedimentos mais elementares, que ocorrem quando estes ainda não foram interiorizados e condensados.

No domínio da *tradução entre representações* os alunos efectuam traduções simbólicas dos conceitos. Estas traduções vão sendo menos eficientes à medida que os conceitos vão tendo um grau de complexidade maior, sendo o papel dos quantificadores o que mais dificuldades levanta à compreensão das representações. Quando partem da representação simbólica, os alunos conseguem descapsular esse objecto em representações mais simples que correspondem aos processos e objectos que estiveram na sua origem. Este processo de descapsular põe em evidência a capacidade de fazer a tradução entre várias representações, recorrendo a objectos e processos matemáticos mais complexos, notando-se em simultâneo uma diminuição da ocorrência de procedimentos operacionais. Por exemplo, ao discutir o limite de sucessão, os alunos conseguem passar da noção de vizinhança para a de distância entre os termos da sucessão ao valor do limite, sem recorrer aos procedimentos ou aos processos mais elementares que caracterizam cada uma destas noções.

No domínio das *propriedades* é possível observar que muitas delas são enunciadas com compreensão. Elas são usadas de forma estrutural, isto é, representando objectos matemáticos e verbalizadas a partir das suas definições formais, ainda que por vezes estes objectos não tenham sido reificados ou utilizados como proceitos. Por exemplo a Mariana considera que a sucessão de termo geral $cos(n\pi)$ é limitada porque “o contradomínio é um conjunto limitado”, e, embora use a propriedade de um modo estrutural, consegue descapsulá-la para explicitar a variação da função. Quando as propriedades são usadas como objectos matemáticos mais avançados também é possível proceder ao seu descapsular, podendo desta forma ser evocadas outras propriedades mais elementares.

No domínio do *pensamento proceptual* os conceitos matemáticos mais avançados começam a ser entendidos como proceitos. A tradução simbólica desses conceitos é quase sempre conseguida com êxito sendo no entanto mais difícil explicitar o papel de alguns dos símbolos presentes. A sua abordagem proceptual é essencialmente de nível elementar, sendo no entanto o descapsular destes objectos, traduzidos em processos e objectos mais elementares que revelam uma componente proceptual mais sólida. Por exemplo os alunos podem revelar algumas dificuldades em compreender a definição simbólica de sucessão convergente, nomeadamente no papel desempenhado pelos quantificadores onde se manifesta a componente processual do pensamento, no entanto manifestam um pensamento proceptual quando se trata de explicitar os objectos e processos que estão presentes na definição.

O quadro 5.3 apresenta, de forma resumida, algumas das principais características que é possível observar neste nível.

Quadro 5.3. Principais características de um conceito imagem relacional.

Objectos	Processos	Tradução entre representações	Propriedades	Pensamento proceptual
• Os conceitos assumem o estatuto de objectos matemáticos. • Os objectos são obtidos por reificação. • Os objectos são encarados como proceitos. • Alguns objectos são difíceis de descapsular	• Continuam a ser utilizados processos de índole operacional, ainda que com menor frequência. • Os processos mais utilizados resultam do descapsular de objectos. • Os processos realizados sobre objectos mais elementares são coordenados e capsulados em novos objectos.	• Traduções simbólicas dos conceitos. • Tem por base objectos que são descapsulados. • Há um predomínio de aspectos estruturais em detrimento dos aspectos operacionais. • Fluidez na tradução entre representações.	• São enunciadas com compreensão. • São usadas de forma estrutural (reificadas ou não). • Enunciadas como objectos matemáticos que podem ser descapsulados.	• É possível traduzir simbolicamente os conceitos. • Os símbolos são usados como proceitos. • No pensamento proceptual é possível observar as componentes processual e conceptual em interacção. • A componente proceptual dos conceitos mais avançados é ainda fraca.

4. Síntese dos níveis de conceito imagem

Apresenta-se de seguida dois quadros que resumem a distribuição dos alunos pelos diferentes níveis de conceito imagem estabelecidos, os quais serão discutidos pormenorizadamente no próximo capítulo. Estes quadros traduzem os níveis de conceito imagem manifestados pelos alunos em cada um dos conceitos estudados e ilustram as propriedades que referi atrás. O quadro 5.4 refere-se à distribuição dos alunos relativamente aos conceitos de sucessão, infinitamente grande e sucessão convergente e o quadro 5.5 refere-se à distribuição dos alunos relativamente aos conceitos de função, limite, derivada e teorema de Lagrange.

Quadro 5.4. Níveis de conceito imagem referentes ao tópico das sucessões.

Alunos	Sucessão			Infinitamente grande			Sucessão convergente		
	Incipiente	Instrumental	Relacional	Incipiente	Instrumental	Relacional	Incipiente	Instrumental	Relacional
Maria	X			X				X	
Susana	X				X		X		
Carla			X		X		X		
Joaquim		X				X			X
Sofia			X		X				X
Fernando		X			X			X	
Pedro	X			X			X		
José		X		X				X	
João			X			X			X
Manuel	X				X			X	
Alexandra		X			X			X	
Sara		X		X			X		
Paula			X		X			X	
Mariana			X		X			X	
Madalena		X		X			X		

Quadro 5.5. Níveis de conceito imagem referentes ao tópico das funções e diferenciabilidade.

Alunos	Função			Limite			Derivada			T. Lagrange		
	Incipiente	Instrumental	Relacional	Incipiente	Instrumental	Relacional	Incipiente	Instrumental	Relacional	Incipiente	Instrumental	Relacional
Maria	X				X		X			X		
Susana	X				X		X				X	
Carla			X			X		X			X	
Joaquim			X			X			X			X
Sofia			X			X			X			X
Fernando		X		X			X			X		
Pedro		X		X				X		X		
José		X			X				X		X	
João			X		X				X			X
Manuel		X		X			X			X		
Alexandra	X					X			X	X		
Sara	X				X		X			X		
Paula			X	X					X			X
Mariana			X	X			X			X		
Madalena			X		X			X			X	

Capítulo VI

Conceitos imagem associados às sucessões

Neste capítulo continua a ser dada resposta ao segundo objectivo do estudo, caracterizar a complexidade dos conceitos imagem que os alunos têm dos conceitos matemáticos ensinados, sendo analisados os conceitos imagem observados nos alunos estudados relativos ao tema das sucessões. Os tópicos aqui tratados dizem respeito ao conceito de sucessão, o conceito de infinitamente grande e o conceito de sucessão convergente. O conceito de sucessão foi introduzido com base na seguinte definição: chama-se sucessão de números reais a toda a aplicação de ***N*** em ***R***. Os elementos do contradomínio chamam-se termos da sucessão. Ao contradomínio chama-se conjunto dos termos da sucessão. O conceito de infinitamente grande também foi introduzido com base na sua definição formal. Assim diz-se que a sucessão *u* é um infinitamente grande (ou que tende para mais infinito), e representa-se por $u_n \to +\infty$, se $\forall L \in R^+ \ \exists p \in N : n > p \Rightarrow u_n > L$. O conceito de sucessão convergente também foi ensinado com base numa abordagem formal e simbólica sendo definido da seguinte forma: sejam *u* uma sucessão e $a \in R$. Diz-se que *u* converge para *a* (ou tende para *a* ou, ainda, que o limite da sucessão é *a*), e representa-se por $u_n \to a$, se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in N : n > p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$.

1 – Conceito de sucessão

Nesta secção pretende-se caracterizar o conceito imagem de sucessão que os alunos estudados revelaram, quando este tópico foi ensinado a partir da definição formal comummente abordada neste nível de ensino. As noções de conceito definição e conceito imagem têm por base a caracterização feita por Tall e Vinner (1981) e reafirmadas por Tall (2003). De uma forma resumida podemos considerar que o conceito imagem descreve a estrutura cognitiva total associada ao conceito, enquanto que o conceito definição não é mais do que uma parcela desse conceito imagem que assume a forma das palavras que o indivíduo usa para transmitir a explicação do seu conceito imagem evocado. Neste sentido foi possível classificar os conceitos imagem observados em três níveis: conceitos imagem incipientes, conceitos imagem instrumentais e conceitos imagem relacionais, cuja caracterização geral foi apresentada no capítulo anterior.

1.1. Conceito imagem incipiente

Os conceitos imagem deste nível incluem como explicação do que é uma sucessão algumas propriedades que podem ser associadas ao conceito mas que por si só revelam uma compreensão bastante restrita deste.

É o caso da Maria onde a sucessão é vagamente associada a números naturais.

> Maria – [Uma sucessão] Tem a ver com números, são números naturais, aaa… excepto o zero a maior parte das vezes… Mas em si o que é que é mesmo…".

Ela destaca inicialmente o papel dos números naturais como uma característica de uma sucessão e, quando solicitada a fazer uma caracterização mais pormenorizada, os naturais continuam a ter um papel importante. Assim, quando lhe é pedido para dar um exemplo de uma sucessão, ela afirma:

> Maria – Assim de repente… eu ainda agora estive a ver isso, estava a fazer um resumo já… para o exame e uma que julgo que era n. Não, n<0, não. Não pode ser…
>
> [A aluna confunde sucessão com função, em especial funções definidas por ramos.]
>
> Ent. – Pode não ser uma sucessão definida por ramos, pode ser uma com um termo geral qualquer.
>
> Maria – Pois, mas era a única que eu me lembrava. Dava ali $\frac{1}{n}$ … Era assim uma coisa.

A Maria procura dar um exemplo de um termo geral de uma sucessão que memorizou e continua a relacionar o conceito com os números naturais:

> Maria – Eu sei que $\frac{1}{n}$ é uma sucessão, mas só está definida em alguns ter[mos]… em alguns números. Não é no ***R***, porque não dá para números negativos, mas é no ***N*** excepto o zero, porque o zero não pode ficar em baixo.

Neste caso exclui o zero, não porque reconheça que a definição de sucessão assim o exige, mas porque naquele caso particular, $\frac{1}{n}$, isso é necessário.

Quando se pretende caracterizar a representação gráfica de uma sucessão, o conceito imagem anterior continua presente. A Maria vai confundir dois elementos essenciais do conceito de sucessão: os termos e as ordens dos termos. Esta confusão manifesta-se em muitos outros alunos, como veremos, e caracteriza-se por aplicar a termos, isto é a elementos do contradomínio, propriedades que apenas poderiam ser usadas em relação a ordens de termos, isto é, a elementos do domínio. Ela consegue calcular mentalmente os vários termos de uma sucessão dada mas não faz uma distinção nítida entre termos e ordens. Assim, quando pretende representar graficamente a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ ela desenha o gráfico da figura 6.1, e refere-se às ordens, isto é, ao domínio (eixo dos *XX*), quando lhe é perguntado algo sobre o contradomínio:

> Ent. – Os termos da sucessão vão sendo esses pontinhos todos por aí adiante?
>
> Maria – Sim, no *x* [eixo dos *XX*] tendem para mais infinito.

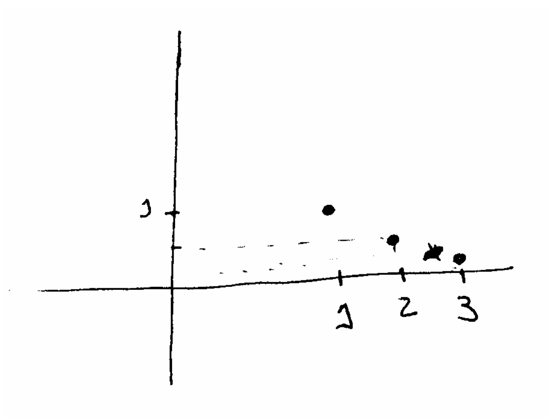


Figura 6.1. Esboço gráfico da sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ da Maria.

Quando pretende representar graficamente a sucessão de termo geral n^2 os próprios termos acabam por ser identificados com os naturais:

> Maria – [Os termos] Vão-se distanciando cada vez mais uns dos outros.
>
> Ent. – Cada vez …?
>
> Maria – Então não vai tomar alguns termos …
>
> Ent. – Diz?
>
> Maria – Não vai tomar alguns termos, por exemplo o …
>
> Ent. – Experimenta a fazer o gráfico dos primeiros termos para ver como é que ela se comporta.
>
> [Desenha um esboço gráfico da sucessão.]
>
> Maria – Portanto, quando [*n*] for 1, é 1.
>
> Ent. – É 1.
>
> Maria – Quando [*n*] for 2… já é 4.
>
> Ent. – Já vai estar lá para cima, não é?
>
> Maria – Pois, eles vão-se distanciar, não vão tomar todas as imagens…

Da mesma forma que revelou uma confusão entre os termos e as ordens, a Maria agora vai confundir as imagens, isto é, os termos, com elementos do conjunto de chegada que não são imagem de nenhum natural.

Também a noção de sucessão limitada parece ser condicionada pelo conceito imagem de sucessão que manifestou inicialmente. A Maria revela um conceito imagem de sucessão limitada que podemos considerar como uma manifestação de ventriloquismo: "a sucessão é limitada se tiver majorante e minorante". No entanto, quando pretende usar este conceito para justificar que a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ é limitada, volta a usar os naturais como representando os termos da sucessão:

> Maria – Portanto, minorante…minorante, por ser de 0 a mais infinito que ela vai, não tem nenhum… mas o 0 não precisa de pertencer para ser minorante, pois não?
>
> (…)
>
> Maria – Ela tem majorante que tende para mais infinito, é um majorante…
>
> Ent. – Quando tu dizes, eu consigo limitá-la, estás a limitar o quê? O n ou os u_n?
>
> Maria – Neste caso… Eu acho que é o n? É mesmo o n… Ah! Assim não sei. [risos] Só voltando a escrever tudo.

Como a Maria manifesta alguma dificuldade em separar os elementos do domínio e do contradomínio acaba por tentar limitar o conjunto que lhe é mais familiar. Esta situação só foi ultrapassada quando o investigador lhe chamou a atenção, no gráfico, para a diferença entre os termos e as ordens conseguindo a partir daí concluir que a sucessão é limitada, indicando um majorante e um minorante dos termos da mesma.

A Maria revela assim um conceito imagem de sucessão que lhe permite manipular a tradução entre algumas representações, como a que lhe permite representar graficamente algumas sucessões a partir do seu termo geral, mas que se revela bastante limitado do ponto de vista da construção de objectos matemáticos que lhe permitam abordar o conceito com o grau de formalismo com que este foi tratado nas aulas, nomeadamente na capacidade de caracterizar uma sucessão como uma aplicação entre os conjuntos ***N*** e ***R***.

O Pedro também apresenta um conceito imagem de sucessão associado aos números naturais. Se lhe fosse pedido para explicar a um colega o que era uma sucessão dir-lhe-ia que:

> Pedro – Ia ser só através de números naturais. Que ia ser 1, 2, 3, 4, 5, não havia números, só números, só os números naturais mesmo… E acho que ficaria por aí. Acho que não há assim mais… (…) O domínio seria… O domínio… não, a função só seria, só existiria função… sucessão neste caso, a partir do 0, a partir do 1. Seria 1, 2, 3, 4, 5, 6, por aí adiante.

Para o Pedro os números naturais surgem como o objecto mais importante na explicação do conceito de sucessão. Ele parece considerar os números naturais como um conjunto de elementos preponderante para estabelecer a diferença entre o conceito de sucessão e o de função, chegando mesmo em determinados momentos a referir-se à sucessão como uma função. Esta abordagem não parece ser determinante na forma como ele compreende a sucessão, pois ao ser questionado sobre outras características do conceito ele refere que no caso das sucessões "não podemos falar de domínio e contradomínio". Estas designações referem-se, segundo ele, ao campo das funções. Embora o conceito de sucessão evocado pareça ser limitado, o Pedro revela um conceito imagem, que lhe permite manipular uma variedade de processos associados ao conceito. Por exemplo noutra pergunta, quando lhe é pedido um exemplo de uma sucessão, ele refere a sucessão de termo geral n^2 e representa-a graficamente fazendo uma distinção bastante nítida entre os naturais e os termos da sucessão e tendo a preocupação de fazer uma representação gráfica dos primeiros termos à escala (figura 6.2).

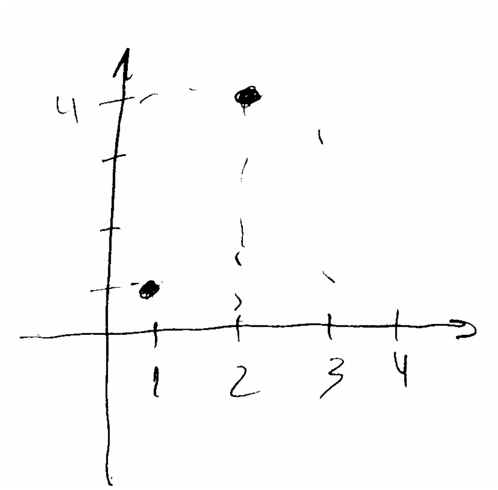


Figura 6.2. Gráfico da sucessão de termo geral n^2 do Pedro.

Com base nesta representação o Pedro consegue referir-se à monotonia, admitindo que se trata de uma sucessão "estritamente crescente". Do mesmo modo, ele indica uma sucessão decrescente, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$, que também representa graficamente, e utiliza o conceito de sucessão limitada neste caso concreto bem como num caso genérico:

> Pedro – [A sucessão limitada] Só chega àquele ponto, não passa… Está limitada nos *YY* [eixo dos *YY*], no u_n neste caso…
>
> Ent. – Será que esta [$\frac{1}{n}$] é limitada, por exemplo?
>
> Pedro – Aaa… Eu acho que é limitada entre 1 e 0… 0 e 1…

O Pedro apresenta um conceito imagem de sucessão de cariz procedimental, isto é, consegue executar com facilidade a tradução entre as representações algébrica e gráfica representando os termos da sucessão e distinguindo-os das respectivas ordens. É também com base nesta abordagem que ele aplica o conceito de sucessão limitada com sucesso. Esta abordagem revela-se no entanto insuficiente para compreender o conceito formal que foi abordado nas aulas, pois não consegue identificar os vários objectos e processos que estão na sua base.

Para o Manuel, o conceito de sucessão também é associado aos números naturais:

> Manuel – É que as sucessões têm que estar dentro dum intervalo. Nem que seja de menos infinito mais infinito…

Para explicar melhor ele refere que precisa de recorrer a um caso concreto e usa como exemplo a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ onde destaca o papel dos naturais:

> Manuel – Então uma sucessão. Por exemplo $\frac{1}{n}$. (…) Com n pertencente ao conjunto dos números naturais. Aqui esta sucessão é uma sucessão que vai tomar valores de 1 até mais infinito.

O Manuel parece estar a considerar que os termos da sucessão são os naturais. No entanto quando lhe é pedido para representar graficamente a sucessão ele calcula os primeiros termos indicando os cálculos efectuados e posteriormente faz o gráfico respectivo (figura 6.3).

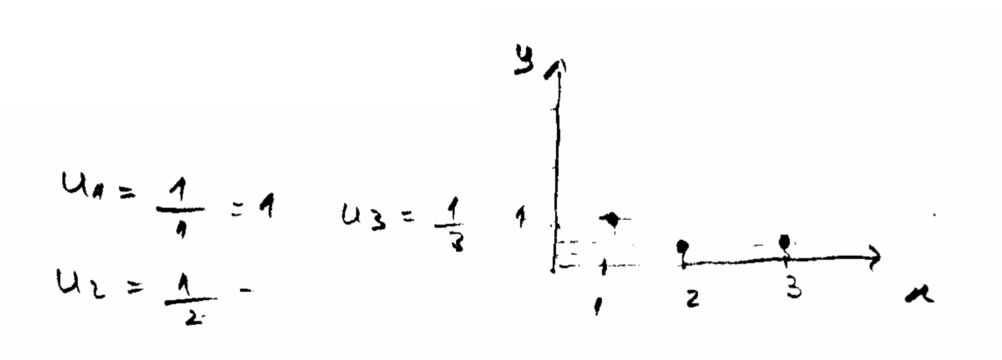


Figura 6.3. Representação gráfica da sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ do Manuel.

É com base nesta representação que ele faz a distinção entre os naturais e os termos da sucessão, considerando que são os pontos que representou que pertencem à sucessão, “Isto é a sucessão, são estes pontos que pertencem à sucessão”. O Manuel necessitou de recorrer a procedimentos de cálculo, isto é, foi preciso calcular alguns termos de uma sucessão concreta e representá-los graficamente, para chegar a esta conclusão.

Por vezes o seu conceito imagem parece suportar a compreensão de algumas propriedades elementares relacionadas com o conceito de sucessão. Por exemplo, quando lhe é pedido o termo geral de uma sucessão crescente, ele refere o n^2 e, sem representar os seus termos, afirma que ela tende para mais infinito. Quando se pretende saber se essa mesma sucessão é limitada ele refere que:

> Manuel – Só é limitada se tiver por exemplo… Limitada…aaa… Seja… Não tenda… Portanto a parte, como é que eu hei-de explicar? Uma sucessão limitada é que não pode tender nem para mais infinito nem para menos infinito. Quer dizer que está entre um conjunto de valores.

Ent. – Hum. Por exemplo esta aqui que tu tinhas antes, podes dizer que ela é limitada? Este $\frac{1}{n}$?

Manuel – Posso, posso porque… Está entre o 1, não, está entre o 0 e o 1.

Embora ele tenha inicialmente baseado a sua explicação em exemplos concretos, refere-se agora aos termos da sucessão como os elementos que devem estar limitados, tendo desta forma mostrado um conceito imagem de sucessão mais consistente que aquele que evocou inicialmente. Este conceito imagem parece basear-se em procedimentos e processos que precisam ser realizados com recurso a exemplos concretos, pelo que podemos considerar tratar-se de uma abordagem bastante elementar. É também possível encontrar, ainda que esporadicamente, o recurso a propriedades relacionadas com o conceito (por exemplo a monotonia) que o Manuel parece ter interiorizado e condensado convenientemente, não precisando de correr aos procedimentos que lhe estão associados.

No caso da Susana, o seu conceito imagem de sucessão tem por base uma representação esquemática dos termos da sucessão:

Susana – Numa recta são … pontos que seguem uma determinada expressão. Faz corresponder …

Embora ela refira aqui os termos "expressão" e "corresponder" acaba por depois não lhes dar relevância ao procurar explicitar o conceito. Assim, quando se procura caracterizar mais em pormenor o conceito, ela dá como exemplo de uma sucessão o termo geral $\frac{1}{x}$, admitindo, embora com alguma ambiguidade, que o x pode pertencer aos naturais.

Ent. – Dá um exemplo de uma sucessão?

Susana – $\frac{1}{x}$ …

Ent. – Por exemplo … (…) [O x] está em que conjunto?

Susana – Pode ser natural …

Ent. – Pode? Ou tem que ser sempre?

Susana – Não pode ser é 0. Esse não existe … Pode ser outra coisa qualquer.

Os números naturais são destacados no conceito imagem da Susana, mas parecem confundir-se com os termos da sucessão, pois quando ela pretende fazer um gráfico da sucessão $\frac{1}{x}$, referida anteriormente, representa os termos da sucessão sobre o eixo horizontal de um sistema de eixos que desenhou (figura 6.4).

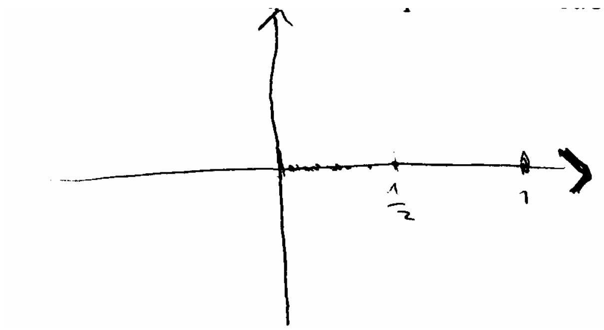


Figura 6.4. Primeira representação gráfica da sucessão $\frac{1}{x}$ da Susana.

Susana – Ia ficar tudo assim a tender para ali … [Desenha os pontos sobre o eixo dos *XX*] … Isto vai assim … Quer dizer, começava no 1 e depois ia tudo tender para aqui [origem dos eixos].

O gráfico da Susana mostra os termos da sucessão representados no eixo horizontal sem fazer distinção entre os objectos e as imagens. Ela parece estar a confundir a representação gráfica da sucessão com um esquema que, por vezes, foi utilizado nas aulas. Esse esquema consistia em representar os termos da sucessão sobre a recta real, normalmente com o intuito de mostrar o seu comportamento, por exemplo, quando se pretendia mostrar que o limite da sucessão se aproximava de um dado valor (como é o caso da sucessão $\frac{1}{x}$ que tende para zero).

Quando questionada sobre a representação gráfica da sucessão anterior, a Susana continua a considerar que a figura 6.4 pode traduzir esse gráfico, admitindo em determinada altura que também pode fazer outro tipo de representação, que concretiza esboçando um conjunto de pontos. Nesta nova representação, efectuada no mesmo sistema de eixos, a Susana não teve a preocupação de representar as escalas de forma apropriada (figura 6.5).

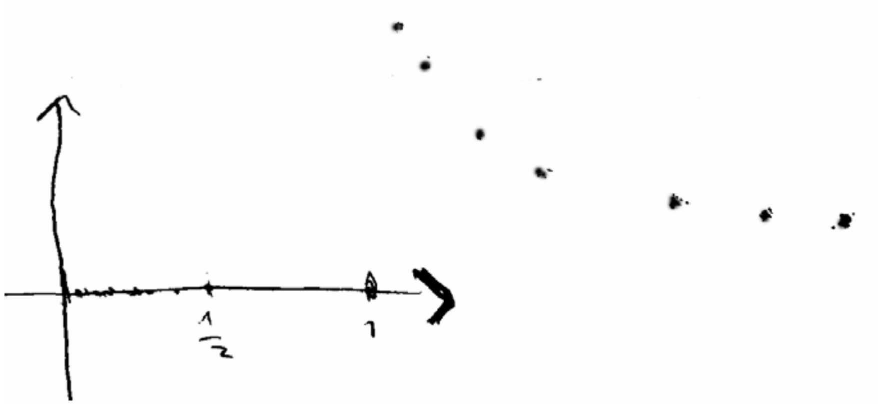


Figura 6.5. Segunda representação gráfica da sucessão $\frac{1}{x}$ como complemento da primeira, feita pela Susana.

Esta segunda representação só surgiu quando lhe foi pedido para calcular os primeiros termos da sucessão e é neste momento que ela distingue entre os termos e as ordens.

Embora a Susana pareça ter compreendido a distinção entre os termos e as ordens, o seu conceito imagem continua marcado pela forma como o conceito de sucessão foi evocado inicialmente. Quando se pretende saber se a sucessão anterior é limitada, ela não consegue associar nenhuma imagem a este conceito. No entanto quando lhe é sugerido que o tópico em discussão pode ter a ver com a existência de majorantes e minorantes, ela considera que não deve ser limitada:

> Susana – Não … Quer dizer … Majorada, ela não está.
>
> Ent. – Porquê?
>
> Susana – Tende para mais infinito, por isso … Não, não está …
>
> Ent. – Estás a dizer que quem tende para mais infinito é?
>
> Susana – Ah! Está … Está … Está para $\frac{1}{2}$ … Para 1, para 1, … Está [limitada] para 1.
>
> Ent. – Quando estou a perguntar se ela é limitada, estás a ver em que eixo? No horizontal ou no vertical?
>
> Susana – Supostamente deveria ser no *XX* …
>
> Ent. – Supostamente deveria ser?
>
> Susana – No *XX*.
>
> Ent. – No horizontal?
>
> Susana – Pois.
>
> Ent. – Quem é que está no eixo dos *XX*? São os … naturais. São os naturais que tu pões aí no eixo dos *XX*. Ora, como n tende para infinito …
>
> Susana – Por isso não pode estar.
>
> Ent. – Então assim, nunca nenhuma era limitada … Estás a perceber? …
>
> Susana – Ah, sim!
>
> Ent. – Porquê? Porque em todas elas o n vai para infinito …
>
> Susana – Então tem que ser no *YY* …

Ela continua a considerar os termos da sucessão situados no eixo horizontal e portanto a tentar limitá-los neste eixo. O facto de os naturais também estarem sobre o mesmo eixo revela-se um factor de conflito actual que não lhe permite nesta situação um desempenho favorável. Só posteriormente ela consegue justificar que a sucessão é limitada, depois de lhe ter sido explicada de novo, pelo entrevistador, a distinção entre os termos e as ordens. Embora a Susana recorra à representação gráfica para explicitar o seu conceito imagem de sucessão ela acaba por admitir que não está familiarizada com esta representação por não ser usual trabalhar as sucessões desta forma. A Susana apresenta assim um conceito imagem de sucessão compartimentado, no sentido em que a mesma representação é integrada em esquemas cognitivos diferentes (diferentes representações gráficas da mesma sucessão) que acabam por entrar em conflito ao estabelecer as propriedades do conceito.

1.2. Conceito imagem instrumental

Nesta categoria são incluídos os conceitos imagem de sucessão baseados essencialmente em determinados procedimentos ou processos, pressupondo quase sempre a existência de uma fórmula ou uma expressão que serve para obter os termos da sucessão.

O Joaquim é um dos alunos que apresenta um conceito imagem de sucessão deste tipo. Quando lhe é pedido para explicar o que é uma sucessão, afirma:

> Joaquim – Era um conjunto de números que se obtinha a partir de uma certa expressão. Obtinha-se colocando os números naturais, 1, 2, 3 colocados numa certa expressão. Ia obtendo outros números, por uma certa ordem.
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> Joaquim – Que geravam a sucessão.
>
> (…)
>
> Ent. – Como é que tu obténs esses números, é a partir de quê?
>
> Joaquim – De uma certa expressão, coloco lá naturais, por exemplo, os naturais seria a expressão $3x$, para n=1 seria u_1, o 2 seria u_2, … x^2 seria 1 ao quadrado, 2 ao quadrado.

O Joaquim pressupõe a existência de uma expressão que lhe permite transformar os naturais noutro tipo de números. Embora ele não explicite o nome de cada um dos conjuntos de números que estão envolvidos, parece ter uma noção bastante clara da diferença entre os termos e as ordens, bem como da forma como os termos se podem obter. Ainda que ele apresente um conceito definição associado a uma fórmula ou expressão, é possível verificar que o seu conceito imagem comporta outro tipo de representações de sucessões:

> Ent. – Dá exemplos de outras sucessões?
>
> Joaquim – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, os naturais, os pares, os ímpares.
>
> Ent. – Hum, hum, por exemplo.
>
> Joaquim – Os quadrados… 2, 4, 9, …

Mesmo que estas sucessões possam ser traduzidas por uma expressão, o Joaquim refere-as sem necessitar de explicitar essa mesma expressão. Já quando se pretende caracterizar o seu conceito imagem relativamente à noção de sucessão limitada, o Joaquim revela algumas dificuldades. Ao dar um exemplo de uma sucessão limitada, ele começa por limitar o seu domínio:

> Joaquim – $\sqrt{10-x}$, a partir de certos números já não existe.
>
> Ent. – Podes mesmo escrever aqui, podes usar o papel.
>
> Joaquim – 10-x, já que não há raiz de números negativos, x só podia ir até dez. Isto de 0 a 10, a partir daí dá números negativos que nós temos que eliminar.
>
> (…)
>
> Joaquim – Ou então… Então outro caso para ela ser limitada mesmo com os números era a função ser seno ou coseno, já que é limitada entre -1 e 1.
>
> Ent. – Por exemplo.

> Joaquim – Seno de *x* neste caso, que varia entre -1 e 1, que é limitada… Já não é limitada pelos valores que nós lá podemos pôr, mas agora aqui como disse limitada já não sei qual é que será. Esta era limitada neste caso pelos valores que nós lá podemos pôr, enquanto que o seno de *x* é pelos valores que ela pode atingir, que será entre -1 e 1.

Embora o Joaquim faça uma distinção entre os termos e as ordens quando está a utilizar a expressão que representa a sucessão, não consegue utilizar esse conhecimento para decidir sobre o conceito de sucessão limitada. Ele parece apenas utilizar do conceito imagem evocado anteriormente, composto por processos que envolvem os naturais e os termos da sucessão, conjuntos estes que podem ser ambos limitados. Ao tentar limitar o conjunto dos naturais o Joaquim acaba por activar outras partes do seu conceito imagem que se referem à noção de sucessão limitada e acaba por ser confrontado com um factor de conflito cognitivo, tal como é descrito por Tall e Vinner (1981), onde uma parte do seu conceito imagem entra em conflito com a outra.

Para o José o conceito de sucessão também é encarado de uma forma operacional, isto é, pressupõe a existência de uma expressão e a realização de determinados procedimentos de cálculo:

> José – Neste momento uma sucessão, sei lá tipo de um em um… De um em um há um ponto, corresponde a um ponto… Cada elemento da função, função que não é função pronto, da equação que a gente tem…
>
> (…)
>
> José – (…) Eu não tenho assim muito jeito para explicar as coisas… Na forma como penso… Eu faço as contas mas para explicar a outra pessoa é muito difícil… Bom mas tentava explicar se calhar com um gráfico.

O José refere-se, ainda que de forma indirecta, às ordens e aos termos e à existência de uma equação. Embora não explicite verbalmente a forma como estas várias componentes do conceito estão relacionadas, revelando alguma dificuldade em referi-las pelos seus nomes, tem um desempenho bastante satisfatório na representação gráfica dos primeiros termos da sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$. Ele consegue fazer a distinção entre as ordens, que pertencem aos naturais, e os termos da sucessão, que pertencem aos reais tendo por base um caso concreto. É também com base no gráfico referido anteriormente que explicita as noções de monotonia e sucessão limitada. Ele considera que a sucessão representada anteriormente é monótona decrescente e limitada:

> José – Esta é limitada porque está limitada entre estes dois pontos… [refere-se aos pontos de ordenada 0 e 1] Tipo vê-se o [ser] limitada se está no *y*, no eixo dos *YY*.
>
> Ent. – Como é que fazes? Como é que vês?
>
> José – Vejo o maior termo, o maior nos *YY*. Vejo o maior, vejo o menor, se estiver limitada pronto.

A noção de sucessão limitada é baseada em procedimentos de cálculo que lhe permitem um desempenho satisfatório. Para o José a existência de um gráfico é fundamental para que ele possa estabelecer algumas das propriedades que podem ser associadas ao conceito de sucessão. O seu conceito imagem de sucessão comporta assim um conjunto de elementos que lhe permitem utilizar o conceito com base em determinados procedimentos de cálculo apoiado por uma componente visual fornecida pelo gráfico.

A Madalena também apresenta um conceito imagem de sucessão que pressupõe a existência de uma expressão algébrica que permite calcular os termos da sucessão. Quando pretende explicitar o que é para ela uma sucessão refere que:

> Madalena – O conceito que eu retive era uma sequência de valores… em função de uma dada expressão.
>
> Ent. – Portanto, tinha por base sempre uma expressão?
>
> Madalena – Uma expressão em que… Em que nós tínhamos sempre que substituir os números que nós chamamos inteiros…
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> Madalena – E que pertenciam ao tal conjunto ***N***. E a cada tal número que nós substituímos vão para…
>
> Ent. – Vai dar…
>
> Madalena – O nosso valor, qualquer valor.

A Madalena destaca o papel desempenhado pelos termos na identificação da sucessão e relaciona-os com uma expressão. Ela refere o processo que lhe permite passar dos objectos para as imagens, identificando os naturais como sendo os "números" que temos que substituir na expressão, mas não encontra inicialmente o nome que deve atribuir aos termos e esta dificuldade limita a forma como pretende referir-se à sucessão. Só depois, já com a ajuda do entrevistador, identifica a expressão referida anteriormente como sendo o termo geral da sucessão, dá exemplos de termos gerais de sucessões e faz a distinção entre termos e ordens:

> Madalena – Quando nós dizíamos por exemplo a sucessão em que o número que substituíamos era o 1, por exemplo, era o termo de ordem 1. Era a ordem e depois o termo era o resultado (…) da substituição desse valor na expressão.

Esta distinção continua a ser bastante clara quando ela tenta explicitar o seu conceito imagem de sucessão limitada:

> Madalena – Sucessão limitada é [aquela em] que os valores… Os valores que vão dar, não os valores de *n*, mas os valores que resultam dessa expressão depois da substituição, que estão sempre compreendidos entre dois valores. Entre um valor máximo e mínimo.

A Madalena revela uma concepção operacional do conceito de sucessão limitada, isto é, precisa de recorrer a uma expressão para explicitar os termos de sucessão e com base nesse processo faz a distinção entre os termos e as ordens. Embora o seu conceito imagem de sucessão pareça ser dominado por esta concepção operacional, não recorre em nenhum caso à representação gráfica de sucessões específicas. Ela consegue referir-se aos processos que relacionam termos e ordens sem precisar de os concretizar, e ao mesmo tempo isso permite-lhe explicitar outros conceitos como a noção de sucessão limitada. Este modo de lidar com o conceito parece pressupor um tipo de compreensão que deixa antever uma interiorização de processos elementares relacionados com o cálculo, isto é, ela não precisa de representar ou calcular os termos da sucessão para poder operar com o conceito.

Para a Sara o conceito de sucessão que evoca parece pressupor a existência de uma relação de dependência. Quando lhe é pedido para explicar a um colega o que é uma sucessão ela diz que:

> Sara – Acho que lhe dizia que era… uma sucessão de… Talvez números em que dependiam sempre do que vinha atrás, do anterior. (…) Eram dependentes uns dos outros.

Embora ela refira a relação de dependência, a mesma parece estar relacionada com sucessões onde o termo geral está definido por recorrência. Quando se pretende caracterizar com mais profundidade o seu conceito imagem ela já refere o termo geral:

> Sara – A sucessão… Depende sempre de uma… De um termo geral, temos o termo geral.
>
> Ent. – Hum.
>
> Sara – E o *n* nunca vai tomar valores… O *n* da sucessão, vai sempre, são números naturais.
>
> Ent. – Então o que é que a gente faz? …
>
> Sara – Vai ao termo geral.
>
> Ent. – Substitui no termo geral e obtém o quê?
>
> Sara – Um número.
>
> Ent. – Outros números, não é?
>
> Sara – Sim.
>
> Ent. – Esses outros números também são naturais ou não?
>
> Sara – Não. Esses podem não ser.
>
> Ent. – Esses outros números que nome é que a gente lhe costuma dar?
>
> Sara – Reais… Não?

Embora a Sara refira a existência de um termo geral, mesmo muito apoiada, parece ter alguma dificuldade em fazer a distinção entre os termos da sucessão e as ordens, não conseguindo mesmo atribuir-lhe qualquer nome. Ela consegue identificar os passos do processo mas o mesmo parece não ter sido ainda interiorizado, por forma a conseguir que a transformação dos objectos em imagens possa constituir um objecto matemático. Mesmo quando lhe é pedido para calcular alguns termos específicos de uma sucessão definida pelo seu termo geral (n^2), mostra alguma hesitação acabando mesmo por falhar os cálculos. Esta abordagem baseada na realização de procedimentos parece contrastar com a forma como ela usa outras propriedades relacionadas com o conceito de sucessão. Quando lhe é pedido um exemplo de um termo geral de uma sucessão ela indica $\frac{1}{n}$ e refere o facto de a mesma ser limitada sem necessitar de fazer a sua representação gráfica.

> Sara – Era limitada… superiormente… E tendia para 0, se não estou em erro. Acho que era.
>
> Ent. – […] É limitada.
>
> Sara – Sim, entre 1 e 0.
>
> Ent. – É limitada superiormente e também o é…?
>
> Sara – Inferiormente.

A Sara parece ter uma concepção do conceito de sucessão limitada, que lhe permite falar sobre uma dada sucessão em concreto sem ter que a representar. É também desta forma que ela se refere à monotonia, afirmando que:

> Sara – Era monótona… … Que era ou crescente ou decrescente.
>
> Ent. – Tem a ver com a variação não é?
>
> Sara – Sim, eu iria dizer que seria sempre decrescente.
>
> Ent. – Esta aqui [$\frac{1}{n}$]?
>
> Sara – Esta aqui, neste caso seria sempre decrescente.
>
> Ent. – [Dá-me] por exemplo, uma que fosse sempre crescente?
>
> Sara – n^2.

Ela consegue dar exemplos de sucessões que são crescentes e decrescentes sem estar na presença dos seus gráficos. Desta forma o seu conceito imagem parece ter sido moldado com base na abordagem formal que o conceito assumiu durante o ensino. A Sara revela assim um conceito imagem de sucessão que embora manifeste algumas dificuldades em lidar com a relação entre objectos e imagens é capaz de utilizar outras propriedades que lhe estão associadas abstraindo a relação entre esses mesmos objectos e imagens.

É com base nos números naturais que a Alexandra se refere inicialmente ao conceito de sucessão:

> Alexandra – Sei lá, uma sucessão de números… naturais ou re… naturais, tem uma ordem… Não sei… A partir daí [risos] não sei explicar.
>
> Ent. – Não consegues explicar o que é que é uma sucessão?
>
> Alexandra – Um seguimento. Tem um conjunto de números. Sei lá…

A primeira coisa que ela evoca quando pretende falar sobre sucessões são os números naturais. Para além disso destaca o facto de haver uma ordem que parece estar associada a estes números. Quando lhe é pedido um exemplo de uma sucessão ela refere o termo geral $2n+3$, calcula alguns termos, mas não consegue fazer uma distinção nítida entre os termos e as ordens. Ao tentar representar graficamente a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ tem algumas dúvidas sobre as variáveis envolvidas e onde deve colocá-las:

> Ent. – Como é que fazias para representar os primeiros termos [de $\frac{1}{n}$] graficamente?
>
> Alexandra – Então, o termo de ordem 1, quer dizer…
>
> Ent. – Sim, sim. Podes fazer.
>
> Alexandra – Aaa … Como é que eu metia aqui [risos]. Quais eram as minhas variáveis?
>
> Ent. – Tu disseste que eram…
>
> Alexandra – Aqui [eixo horizontal] é ordens. No outro são os termos. É isso? Não … Ou é? É … Qual é que é a outra variável? [risos]
>
> Ent. – Eu dizia-te assim: para n=1, o que é que obténs?
>
> Alexandra – Dá 1.
>
> Ent. – Sim.
>
> Alexandra – É aqui. Tipo ligo [Está a tentar representar no sistema de eixos o ponto encontrado e procura saber do entrevistador se deve traçar paralelas aos eixos a passar pela abcissa e ordenada para determinar a posição desses ponto] … É isto?
>
> Ent. – Este ponto, sim.
>
> Alexandra – Mas que variável é esta? [Refere-se ao ponto que acabou de representar] é o termo?

Embora já anteriormente tivesse sido referido como se representavam os termos e as ordens, ao tentar concretizar a sua aplicação num caso concreto a Alexandra não consegue colocar estes elementos na representação gráfica. Quando se procura caracterizar de uma forma mais ampla o seu conceito imagem de sucessão, a Alexandra revela dominar alguns conceitos que lhe estão associados. Ao pedir-lhe para classificar a sucessão de termo geral $2n+3$ quanto à monotonia, ela parece evocar este conceito com compreensão:

> Alexandra – [Monotonia] Ou que é crescente ou decrescente. (…) Esta é estritamente…
>
> Ent. – Esta até é estritamente…
>
> Alexandra – Crescente.
>
> Ent. – Porquê? O que é que acontece?
>
> Alexandra – À medida que nós vamos aumentando a ordem, não é?
>
> Ent. – Hum.
>
> Alexandra – Isto vai crescendo… Muito.
>
> Ent. – Quem é que vai crescer?
>
> Alexandra – A sucess[ão]…O termo.

Ela consegue relacionar os termos e as ordens ainda que tenha alguma hesitação em explicitar a terminologia. Já quando lhe foi pedido para dar exemplos de sucessões decrescentes, ela deu como exemplos as sucessões $-2n+3$ e $\frac{1}{n}$, conseguindo também explicitar a relação entre os naturais e os termos da sucessão. Da mesma forma, ela revela ser capaz de utilizar o conceito se sucessão limitada sem precisar de fazer as representações gráficas das sucessões envolvidas:

> Ent. – Podemos dizer que alguma destas duas sucessões [$2n+3$, $\frac{1}{n}$] é limitada?
>
> Alexandra – Limitada é que tem majorantes e minorantes.
>
> Ent. – Por exemplo esta, $\frac{1}{n}$ … É ou não é limitada?
>
> Alexandra – É. (…) É de 0 e 1.
>
> Ent. – Todos os termos estão sempre entre…
>
> Alexandra – 0 e 1.
>
> Ent. – Como é que tu vês isso aqui nos eixos?
>
> Alexandra – Aqui. (…) No eixo do u_n.
>
> Ent. – E esta aqui [$2n+3$] será limitada?
>
> Alexandra – $2n+3$? Vai ser limitada… sup… Ou inferiormente? … Vai ser limitada inferiormente, ou não? … Não é?
>
> Ent. – Tu disseste que ela era monótona… crescente não era?
>
> Alexandra – Pois, ela é monótona crescente. Ela vai crescer tipo, o termo mais pequenino… vai ser o cin… Vai ser… cinco. (…) Cinco é um minorante.
>
> Ent. – É um minorante.
>
> Alexandra – Depois ela não é limitada superiormente. É, vai tender para infinito.

A Alexandra tem uma noção para sucessão limitada próxima da definição formal usada nas aulas e articula os vários processos que lhe estão subjacentes, nomeadamente, refere o facto de $2n+3$ ser limitada inferiormente e não superiormente, bem como $\frac{1}{n}$ ser limitada, exprimindo essa propriedade através do gráfico. A Alexandra parece ter um conceito imagem de sucessão bastante completo no que diz respeito às propriedades que lhe estão associadas, mas onde falta por vezes a coordenação de alguns processos mais ou menos elementares que lhe permitam criar novos objectos matemáticos necessários à estruturação de um conceito imagem mais abrangente.

O Fernando recorre ao conceito de função quando pretende explicar o que é uma sucessão:

> Fernando – Uma certa sequência, uma série de elementos que tendiam para um certo valor. Ou que não tendiam, há sucessões que não tendem. Mas eu diria que… é isso. Uma função que tende… É uma sucessão de elementos que completam uma sequência, isto pode ser uma função.

O conceito de sucessão do Fernando balança entre uma sequência de valores no que parece referir-se aos termos da sucessão e a noção de função. Esta distinção parece não ser muito clara pois quando lhe é pedido para explicar o que se passa com a monotonia da sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ que indicou como exemplo de uma sucessão, faz um esboço gráfico correspondente à função real de variável real $\frac{1}{x}$ (figura 6.6).

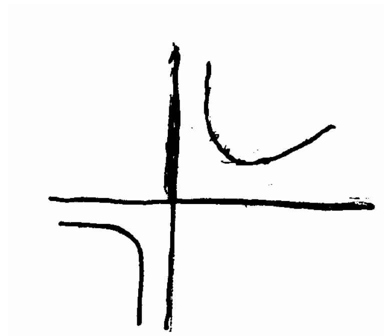


Figura 6.6. Gráfico da sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ do Fernando.

O Fernando traça o gráfico considerando que se trata da representação gráfica de uma sucessão, pelo que a noção de sequência que tinha referido anteriormente acaba por ser negligenciada. Só quando o entrevistador o questiona no sentido de perceber qual é o papel do n representado na expressão é que ele dá atenção ao facto de ter desenhado um gráfico incluindo uma variável negativa.

> Fernando – Este n são os inúmeros elementos que eu vou ter, pertencentes aos naturais.
>
> Ent. – Pertencentes aos…?
>
> Fernando – Naturais.
>
> Ent. – Naturais. Então aquele n …
>
> Fernando – Ah! Naturais, está bem. É só aqui, vai ser só esta parte [indica a parte positiva do eixo].

Depois de reconhecer que apenas pode ter gráfico no primeiro quadrante, o Fernando corrige o traçado do gráfico (figura 6.7) representando vários pontos sobrepostos ao gráfico traçado anteriormente sem ter a preocupação do tipo de relação entre estes pontos e o conjunto dos números naturais:

> Fernando – Pois, é um conjunto de pontos sempre assim.

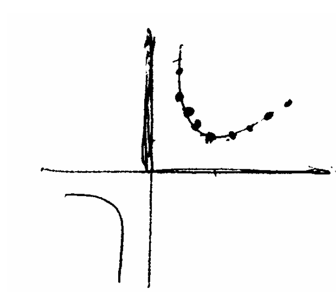


Figura 6.7. Gráfico da sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ corrigido (Fernando).

Questionado sobre o que se passaria na vizinhança da origem,

> Ent. – Aqui, [na vizinhança da origem] vai para mais infinito ou não?
>
> Fernando – Aqui?
>
> Ent. – Hum…
>
> Fernando – Aqui vem de mais infinito, sim… Não. Não porque o valor máximo neste caso é 1.

O Fernando não tem em atenção o facto de apenas ser necessário ter imagens de números naturais, o que revela alguma confusão entre o conceito de sucessão e o de função. Desta forma poder-se-ia considerar que a sucessão tinha um comportamento semelhante ao da função quando esta se aproximava de zero por valores positivos. Só posteriormente é que ele evoca uma parte do conceito imagem que reconhece a relação de dependência entre os termos da sucessão e os naturais, e corrige a representação gráfica (figura 6.8), concretizando os primeiros termos, ainda que numa escala não monométrica.

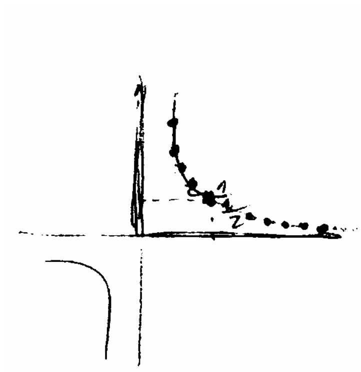


Figura 6.8. Gráfico da sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ com indicação do 1º e 2º termos (Fernando).

O Fernando apresenta um conceito imagem de sucessão que parece ser condicionado pelo conceito de função. Ele consegue realizar alguns processos que lhe permitem passar da representação algébrica para a gráfica, mas a primeira abordagem que faz nessa tradução é esboçando graficamente a função correspondente. Só depois, quando solicitado, é que dá maior atenção às características particulares da sucessão e aos processos envolvidos na sua representação.

1.3. Conceito imagem relacional

Esta categoria inclui os conceitos imagem que contêm uma verbalização do conceito definição formal de sucessão que foi ensinado nas aulas ou alguma variante do mesmo que permite explicá-lo sem recorrer aos vários procedimentos e processos que estiveram na sua origem. Embora o aluno não necessite de explicitar esses procedimentos e processos, ele é capaz, quando necessário, de os evocar, estabelecendo relações entre estes e a definição formal apresentada.

Quando é pedido à Carla para explicar o que é uma sucessão, ela recorre ao conceito de função:

> Carla – Uma sucessão é… um género de uma função, embora não seja bem uma função porque é um conjunto de pontos, não… é uma recta…

Embora recorra à noção de função como forma de definir a sucessão, a Carla usa a parte do seu conceito imagem de função relacionada com a representação gráfica para explicar a diferença entre ambas. Quando pretende caracterizar o seu conceito imagem de sucessão mais detalhadamente consegue dar dois exemplos de termos gerais de sucessões e fazer, nos casos concretos, a distinção entre os termos e as ordens:

> Carla – $\frac{1}{n}$ por exemplo. Por exemplo o n. Utilizamos normalmente, nós usamos os números naturais que é para ter uma sequência de números positivos.
>
> Ent. – Podes mesmo escrever aqui… Por exemplo… $\frac{1}{n}$ não é?
>
> Carla – Em que o n normalmente pertence ao conjunto dos números naturais.

Neste contexto a Carla faz uma abordagem mais pormenorizada, centrando-se essencialmente nos termos gerais das sucessões que indicou e referindo-se aos termos da sucessão como uma sequência de números positivos. Esta capacidade de explicitar os processos parece evidenciar uma compreensão que lhe permite falar sobre outros conceitos relacionados com o de sucessão como é o caso do conceito de monotonia e sucessão limitada. Quando lhe é pedido para justificar se a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ é ou não limitada, ela considera que:

> Carla – É. É uma sucessão limitada. É decrescente também. É limitada entre o intervalo 0 aberto e 1 fechado, porque à medida que o n vai aumentando… a função em si vai diminuindo.

Mesmo sem estar na presença de qualquer gráfico, as noções de sucessão monótona e limitada parecem ter sido interiorizadas e condensadas como é descrito no modelo de Sfard para a construção dos conceitos matemáticos. As noções de sucessão limitada e monótona parece assim poderem ser acedidas quer de um modo estrutural, baseadas numa concepção destas como objectos matemáticos, quer de um modo operacional, revelando os processos que estão na sua origem. O mesmo se passa quando pretende dar exemplos de sucessões não limitadas:

> Carla – Por exemplo o n ou n^2… São sucessões que não são limitadas. Têm um sítio onde começa mas não têm… Porque tendem para infinito…

Ela considera que estas duas sucessões podem ser limitadas inferiormente, mas que, no entanto não é possível arranjar uma forma de limitar o crescimento dos seus termos. Neste sentido a Carla revela a capacidade de fazer uma distinção entre os termos e as ordens mesmo sem recorrer aos processos que lhes estão associados.

Ao tentar explicar o que é uma sucessão, o João também recorre ao conceito de função que parece usar com segurança:

> João – Acho que dizia que é uma função restringida ao intervalo zero a mais infinito e, ah… O conjunto de partida era o conjunto ***N***.
>
> Ent. – Os naturais?
>
> João – Os naturais. Basicamente era isso.

Ele consegue identificar o conjunto de partida como sendo determinante para o tipo de função que está a referir e embora apresente uma abordagem do conceito próxima da que foi ensinada mas aulas, evidencia um conceito imagem de sucessão bastante rico. Assim, quando lhe é pedido para dar exemplos de sucessões ele refere vários termos gerais, "$\frac{1}{n}$, n, n^2, há uma infinidade delas" conseguindo explicitar os conceitos de monotonia e sucessão limitada sem qualquer dificuldade. Por exemplo refere que a sucessão de termo geral n é "monótona crescente" enquanto que "$\frac{1}{n}$ está limitada entre um e zero". Ao fazer esta abordagem, embora recorra aos exemplos concretos, o João não precisou em caso algum de calcular os termos da sucessão ou de fazer a sua representação gráfica. O seu conceito imagem de sucessão parece ter sido reificado, isto é, usa o conceito como um objecto matemático formal, conseguindo no entanto aceder aos processos e objectos que lhe estão subjacentes sempre que tal seja necessário.

A Sofia também recorre ao conceito de função quando pretende explicar o que é uma sucessão:

> Sofia – Ora bem, uma sucessão é uma função… Aaa… Em que os valores de *x*… são valores naturais. É uma sucessão de variável natural, o domínio é ***N***. Depois, ou seja, o gráfico de uma sucessão é um gráfico que é constituído por pontos… isolados. Precisamente como o domínio é ***N*** são os valores de 1, 2, 3, 4, não podemos definir uma recta porque são pontos isolados.

O conceito imagem de sucessão que evoca assenta no conceito de função, mas ela consegue estabelecer as principais diferenças entre ambos. Evidencia o domínio como sendo os números naturais e recorre à representação gráfica para explicar as diferenças entre sucessão e função. É de salientar que quando ela se refere ao gráfico, não precisa de fazer qualquer esboço, referindo-o como um objecto que consegue visualizar para caracterizar o comportamento dos termos da sucessão. Quando lhe é pedido para dar exemplos de algumas sucessões, ela indica os termos gerais $\frac{1}{n}$ e n. Quando se pretende caracterizar de uma forma mais ampla o seu conceito imagem recorrendo a outros conceitos que estão associados ao conceito de sucessão a Sofia, continua a privilegiar uma abordagem mais formal embora por vezes surjam alguns conflitos com as diferentes representações. É o caso em que se pretende saber se a sucessão $\frac{1}{n}$ é ou não limitada:

> Sofia – Eu penso que sim… Porque…
>
> Ent. – Qual é a ideia que tens de a sucessão ser limitada? Diz…
>
> Sofia – Quando o n é 1, o meu n [u_n] é 1. E quando o n está a tender para mais infinito o meu $\frac{1}{n}$ é 0. Elas tomam…, as minhas imagens tomam sempre um valor entre 0 e 1 …

A Sofia recorre aqui a uma explicação onde estabelece o conceito de sucessão limitada recorrendo à identificação do comportamento dos termos. Esta concepção acaba por entrar em conflito com outra de carácter mais formal:

> Sofia – Pela definição uma sucessão limitada significa isto [$|u_n| \le M$, figura 6.9].
>
> Ent. – E o que é que isso quer dizer…
>
> Sofia – Isto quer dizer que as imagens da minha sucessão estão entre o menos *M* e o *M*.
>
> Ent. – Estão compreendidas entre…
>
> Sofia – Estão todas aqui, e aqui. Elas estão compreendidas num intervalo… Só não verifica ser menos *M* e *M*… O *M* não é o mesmo.

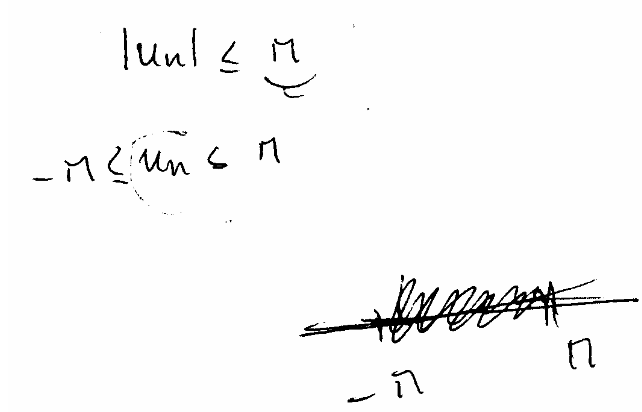


Figura 6.9. Representação simbólica e esquemática de sucessão limitada da Sofia.

A Sofia representa simbolicamente a sucessão limitada conseguindo dar significado à representação feita, isto é, considerando que os termos desta devem estar compreendidos entre -*M* e *M*, esquematizando essa situação com um desenho apropriado. Este tipo de representação tinha sido utilizado nas aulas quando foi dada a definição de função limitada e parece entrar em conflito com o seu conceito imagem evocado anteriormente quando admitiu que a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ era limitada entre 0 e 1, revelando alguma dificuldade em relacionar o intervalo obtido neste caso concreto com o que tinha definido simbolicamente, cujos extremos eram simétricos. Para ultrapassar esta situação é-lhe sugerido que faça a representação gráfica da sucessão, tendo ela inicialmente calculando os primeiros termos e depois representado graficamente a função correspondente unido todos os pontos (figura 6.10).

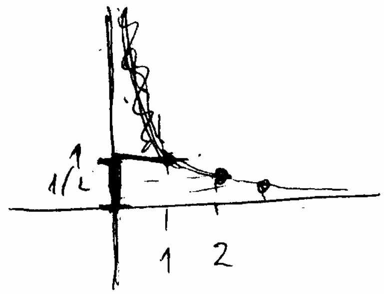


Figura 6.10. Representação gráfica de sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ da Sofia.

Ent. – Tenta esboçar um gráfico com os primeiros termos.

Sofia – Portanto se o *n* é 1…

Ent. – Tens aí um termo não é?… Depois para 2 dá…

Sofia – Para 2 dá $\frac{1}{2}$ (…) $\frac{1}{3}$ … Isto vai tender… Posso fazer um gráfico disto assim… [Desenha um gráfico contínuo].

Ent. – E o gráfico será assim uma coisa contínua ou é só os pontinhos? …

Sofia – O gráfico tem que ser os pontos… [está a pensar em voz alta]

Ent. – É só os pontos não é?

Sofia – É… [sorri pela afirmação que fez anteriormente] Este e este [indica os pontos que tinha representado anteriormente].

Ent. – Portanto esta parte aqui [parte do gráfico que une os termos da sucessão] não existe?

Sofia – Não… Eu estava a fazer como se fosse numa função de domínio ***R***.

A Sofia tenta aplicar a representação esquemática anterior no gráfico representado e parece inclinada para limitar a sucessão no eixo horizontal por ser o eixo que mais se aproxima do seu esquema:

Sofia – Pois, é que este *M*. Supostamente ela varia porque… Se eu conse…

Ent. – Neste caso concreto aqui, onde é que tu punhas o *M*?… Estás a pôr este *M* aqui em baixo [eixo horizontal]?… Ou não?

Sofia – Estou… Estou a pôr… Estou confusa.

Ent. – Quem é que é menor que *M*?

Sofia – As imagens.

Ent. – As imagens?

Sofia – Sim.

Ent. – Então, onde é que estão as imagens?

Sofia – Aqui… no eixo dos *YY*.

Ent. – Então, para dizeres que ela é limitada como é que tu fazes?

Sofia – Eu teria aqui o 1… Portanto ela es…

Ent. – Diz, diz.

Sofia – Precisamente… Este *M* teria que ser um valor aqui… [eixo vertical] E não…

Ela consegue no entanto compreender que este procedimento não lhe vai permitir limitar os termos da sucessão e volta a centrar-se no gráfico fazendo uma abordagem pormenorizada do seu comportamento, o que lhe permite explicitar o facto de a sucessão ser limitada. Esta abordagem não elimina por completo o conflito criado entre as duas representações. A Sofia continua a referir-se à representação esquemática de sucessão limitada como estando definida num intervalo real, e quando a aplica neste caso concreto, tentando definir um intervalo no eixo vertical, reconhece que o intervalo não é contínuo. Ela esperava que o conjunto das imagens gerasse um intervalo real e não fosse constituído apenas por alguns pontos. Este conceito imagem parece ser essencialmente construído com base no conceito de função, não conseguindo a Sofia relacionar o facto de uma sucessão ser limitada com a possibilidade de os seus termos estarem contidos num intervalo real. Estes dois conceitos imagem acabam por ser uma fonte de conflito potencial, conflito este que só se torna actual quando são evocados ao mesmo tempo.

É também com base no conceito de função que a Paula procura explicar o que é para ela uma sucessão:

Paula – Era uma função em que só constavam os números naturais.

Ent. – Hum …

Paula – E pronto, é isso.

Embora ela se refira à sucessão comparando-a com uma função, indica alguns dos seus elementos, considerando que é constituída por termos e por ordens:

Paula – [Estamos a lidar] com termos e… ordens. Neste caso corresponde ao x e ao y nas funções.

Ela faz uma distinção bastante nítida entre os termos e as ordens, calculando mesmo alguns termos de sucessões definidas pelo seu termo geral. No entanto argumenta que, contrariamente ao que acontece nas funções, não podemos falar de domínio e contradomínio. Para ela esta parece ser uma terminologia que apenas se pode aplicar às funções. O conceito de sucessão limitada também parece ter sido interiorizado, uma vez que a Paula consegue aplicá-lo em situações concretas sem necessitar de recorrer aos processos que estão implícitos. Assim, quando se pede para justificar se a sucessão de termo geral n^2 é limitada ela considera que:

Paula – É limitada inf… inferiormente.

Ent. – Sim. Porquê?

Paula – Então, porque está sempre a crescer.

Ela tem uma ideia da forma como os termos da sucessão se comportam sem ter a necessidade de os representar graficamente. Considera que o primeiro termo é 1 e representa o limite inferior e depois a sucessão tende para mais infinito à medida que o n aumenta. Da mesma forma ela consegue falar sobre a monotonia:

> Paula – [Monotonia era a sucessão ser] ou crescente ou decrescente.
>
> Ent. – Achas que essa [n^2] é monótona ou não?
>
> Paula – É. É estritamente crescente.

A sucessão é considerada monótona crescente no sentido estrito e a Paula sugere mesmo o processo que pode ser utilizado para provar a afirmação. Ela indica que se pode calcular a diferença $u_{n+1} - u_n$ para posteriormente estudar o seu sinal. A Paula apresenta um conceito imagem de sucessão baseado numa concepção estrutural, isto é, consegue referir-se à sucessão com base na verbalização de propriedades dos objectos envolvidos. Quando necessário também é capaz de identificar os processos que lhe estão subjacentes, referindo o modo como estes se relacionam, o que mostra a capacidade de encarar o conceito de uma forma operacional.

O conceito imagem de sucessão da Mariana tem por base o conjunto dos termos da sucessão. Quando ela tenta explicar o que é uma sucessão afirma que:

> Mariana – Então [é] um conjunto de números reais. Aaaa… Que vão sempre aumentando ou diminuindo consoante uma razão.

Ela destaca os termos da sucessão pressupondo que eles são reais e podem variar com base numa dada expressão e não refere o papel dos naturais. Dá exemplos de vários termos gerais de sucessões e quando se pretende caracterizar o conceito de sucessão limitada continua a usar uma abordagem baseada mas propriedades de alguns objectos matemáticos. Assim, quando lhe é pedido para indicar se a sucessão de termo geral $cos(n\pi)$, que referiu anteriormente, é limitada ela afirma que:

> Mariana – É.
>
> Ent. – Porquê?
>
> Mariana – Porque o contradomínio é um conjunto limitado.
>
> Ent. – Hum, hum. Portanto isso toma valores sempre onde?
>
> Mariana – Entre -1 e 1.

A Mariana continua a destacar os termos da sucessão como sendo o conjunto a limitar e refere-se a esse conjunto sem recorrer a nenhuma representação concreta ou fazer quaisquer cálculos. O conceito imagem de sucessão que a Mariana revela assenta na capacidade de verbalizar um conjunto de propriedades a que a sucessão deve obedecer, sendo esta identificada com os seus termos. As ordens não são referidas, pressupondo-se que o seu comportamento é sempre idêntico, qualquer que seja a sucessão considerada. Os processos subjacentes a esta concepção parecem estar presentes quando o conceito é evocado, mas só são revelados quando tal é estritamente necessário.

2- Conceito de infinitamente grande

Nesta secção pretende-se caracterizar o conceito imagem de infinitamente grande que os alunos desenvolveram. A forma como o conceito foi introduzido nas aulas, teve por base uma concepção estrutural, isto é, foi introduzido a partir da sua definição formal, já referida no início deste capítulo. Neste sentido procurou-se evidenciar a forma como eles dão significado à definição formal bem como identificar o papel dos símbolos na compreensão do conceito. Foi pedido aos alunos que explicassem o que significava dizer que uma dada sucessão tendia para mais infinito, solicitando-se de seguida a escrita simbólica da definição. Com o objectivo de caracterizar mais pormenorizadamente a compreensão do conceito era apresentado um gráfico dos primeiros termos de uma sucessão onde se pretendia que os alunos concretizassem os vários parâmetros presentes na definição simbólica. Foi assim possível classificar os conceitos imagem observados em três níveis: conceitos imagem incipientes, conceitos imagem instrumentais e conceitos imagem relacionais.

2.1. Conceito imagem incipiente

Neste nível são incluídos os conceitos imagem que, embora possuam uma componente intuitiva do conceito de infinitamente grande, contêm uma tradução simbólica deste bastante incompleta ou mesmo que revelam não possuir qualquer representação simbólica. A par desta tradução, o papel desempenhado pelos vários parâmetros presentes na definição torna-se um entrave à sua compreensão, mesmo quando aplicados em situações concretas.

É o caso da Maria que, quando lhe foi pedido para escrever simbolicamente que a sucessão u_n tendia para mais infinito, afirmou que "isso eu não sei fazer". Embora ela no início não tenha escrito nenhum símbolo relacionado com o conceito, mais tarde identificou a sucessão de termo geral n^2 como sendo um infinitamente grande e explicou qual o comportamento dos termos da sucessão neste caso:

> Maria – Vão crescendo sempre. Tendem para mais infinito. É a única coisa que sei.

Ela fala do comportamento dos termos da sucessão como se estes estivessem numa sequência sempre crescente e defende que não é possível limitar superiormente esta sequência. O seu conceito imagem parece ser moldado por sucessões estritamente crescentes.

Quando a Maria é confrontada com definição simbólica mostra alguma admiração, por descobrir algo familiar na representação escrita, e faz uma leitura textual da mesma:

Maria – Qualquer que seja…

Ent. – O *L*.

Maria – Pertencente a $\boldsymbol{R}^+$, existe um p pertencente a $\boldsymbol{N}$ tal que o $n>p$ implica que isto seja maior que L… Hum!!

Para perceber melhor o significado que atribui à definição simbólica foi-lhe mostrado o gráfico da figura 6.11, como representando os primeiros termos da sucessão de termo geral $u_n = 3n + 2$.

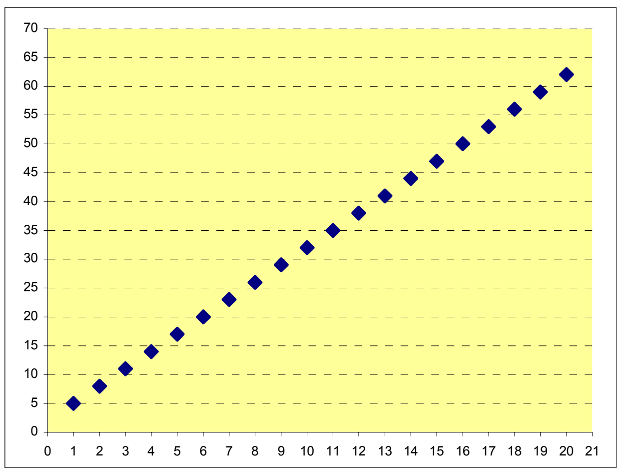


Figura 6.11. Representação gráfica dos primeiros termos da sucessão u_n=3n+2 mostrado aos alunos, pertencente à *Situação 2* da primeira entrevista.

Quando foi pedida, com base no exemplo concreto, a ordem a partir da qual os termos da sucessão são maiores que 5 a Maria faz uma interpretação algébrica da questão recorrendo ao cálculo:

Maria – São maiores que 5?

Ent. – Sim.

Maria – É logo desde o primeiro [faz mentalmente as contas, substituindo no termo geral o n por 1].

(…)

Ent. – A partir de que ordem é que os termos são maiores que 50? [Pausa].

Maria – Isto aqui já é complicado. Maior que 50, não é?

Ent. – Hum.

Maria – O u_n tem que ser maior que 50, é isso?

Enquanto que na primeira questão a abordagem algébrica era mais simples, na segunda ela já teve alguma dificuldade em efectuar mentalmente os cálculos. Quando lhe foi sugerido que podia usar o gráfico dado ela mostrou-se bastante surpresa por tal também ser possível:

> Maria – Aqui neste gráfico?
>
> Ent. – Sim. Eu perguntei-te: a partir de que ordem é que os termos são maiores que 5?
>
> Maria – Hum. Ah! Via ali, naquele lado [refere-se ao eixo vertical].

Com base na representação gráfica (figura 6.11) a Maria consegue dar o significado pretendido a alguns dos símbolos. Coloca o L no eixo vertical e o p no eixo horizontal.

> Ent. – Então se tivesses que colocar este L algures aqui nos eixos, onde é que o colocavas?
>
> Maria – Aqui neste lado… Maior que 50… É deste lado [eixo vertical]
>
> Ent. – E o p?
>
> Maria – O p já é deste lado. [eixo horizontal]
>
> Ent. – O p pertence a que conjunto?
>
> Maria – O p são os… É o n à partida.
>
> (…)
>
> Ent. – O que representa esse $n>p$?
>
> Maria – [risos] Isso eu nunca consegui entender.
>
> Ent. – Não conseguiste perceber?
>
> Maria – Não. Eu sei que é assim mas o porquê não percebi.

O p é identificado com os naturais. No entanto o facto de o n e o p estarem no mesmo eixo parece gerar um conflito que se reflecte na forma como ambos os símbolos estão relacionados. Ela não consegue explicitar o significado da condição $n>p$ presente na definição simbólica, e só após uma explicação pormenorizada da definição é que ela percebeu. No que diz respeito ao L, admite que deve ser tão grande quanto possível para verificar a definição. Esta convicção parece ser baseada no seu conceito imagem de infinitamente grande e no facto de o L servir para "limitar" o crescimento da sucessão.

Embora a Maria não consiga traduzir simbolicamente a definição de infinitamente grande, ela apresenta um conceito imagem que lhe permite manipular alguns dos processos presentes na definição e consegue coordenar alguns desses processos depois de os visualizar graficamente.

O Pedro também não consegue representar simbolicamente a definição de infinitamente grande. Quando lhe é pedido para escrever a definição, diz que não sabe e não escreve qualquer símbolo relacionado com o conceito. Já quando lhe é pedido para explicar o que significa dizer que uma sucessão tende para mais infinito, ele afirma:

> Pedro – Uma sucessão a tender para mais infinito? Então, cresce indefinidamente…

Ent. – Quem é que cresce?

Pedro – O u_n, a imagem.

(…)

Pedro – Por exemplo uma função já… Não, uma sucessão é $u_n = n$… Vai ser uma função, uma sucessão, que vai tender para mais infinito, sempre crescente…

O Pedro indica o comportamento da sucessão com base na variação dos seus termos, que identifica, e dá mesmo um exemplo desenhando o gráfico dos primeiros termos da sucessão $u_n=n$. O seu conceito imagem de infinitamente grande parece ter por base sucessões monótonas crescentes em sentido estrito. Quando confrontado com a definição simbólica, mostrou algumas dificuldades com a terminologia dos símbolos:

Pedro - Qualquer que seja L pertencente a $\boldsymbol{R}^+$.

Ent. – Ou positivo.

Pedro – Exactamente… Eu no outro dia sabia isto…

Ent. – Lembras-te qual é este símbolo [$\exists$]?

Pedro – Eu lembro-me, só queeee …

Ent. – É o existe.

Pedro – Existe pelo menos um p pertencente a $\boldsymbol{N}$, tal que $n>p$… Existe um p, o p vai ser aqui… [indica o eixo horizontal] Vai ser… Isto vai ser o L digamos de…p. Pronto isto vai ser a imagem… E isto vai ser ooo… Vai ser o [n]…Vai ser isto [figura 6.12]. E aqui é que é o u_n. Vai ser maior que L.

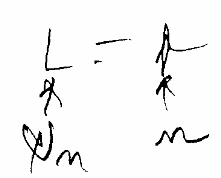


Figura 6.12. Esquema que relaciona o L com o p por comparação com u_n e n (Pedro).

O Pedro não consegue lembrar-se do nome do quantificador existencial e parece não atribuir um significado especial a qualquer dos quantificadores. Ele centra a sua atenção na relação entre L e p, como sendo uma relação de dependência, "$L(p)$", e explica-a por comparação com u_n e n (figura 6.12). Desta forma o n e o p são interpretados como ordens enquanto que o L é relacionado com os termos. Ao ser confrontado com um caso concreto (o gráfico da figura 6.11) ele coloca o L no eixo vertical e o p no horizontal. Com base nesta representação, aplicada ao caso concreto, indica várias ordens a partir das quais os termos da sucessão ultrapassam determinados valores. Não consegue no entanto dar significado à condição $n>p$ que faz parte da definição:

Pedro – Aqui o L que era como se fosse outra sucessão por assim dizer… Só que u_n vai ser igual a… L_n, não… L_n … u_{n-1} vai ser igual a L_n não é?… L_p, L_p.

Ent. – Como é que estás a dizer? …

Pedro – Aaa… como é que eu hei-de dizer. u_{n-1} … vai ser igual a…L_p…

Ent. – Portanto quer dizer que os u_n… Se lhe tirarmos 1 …

Pedro – Um valor, uma unidade, vai ficar igual ao p… Ao L, ao L…

Para ele, o L dependendo do p continua a representar uma sucessão e é à custa dos seus termos que o Pedro tenta explicar a condição $n>p$. Ele atribuiu ao L_p a imagem de u_{n-1} para que esta possa ter como objecto o p e portanto a condição já seria válida para o termo seguinte que seria o u_n, uma vez que o n já era maior que o p. Só posteriormente, com a ajuda do entrevistador, é que ele consegue dar o significado pretendido ao L e ao p evidenciando uma melhor compreensão da definição simbólica. Para que esse desempenho se tornasse efectivo foi determinante a explicitação do significado dos quantificadores que até então tinham sido negligenciados.

O Pedro apresenta um conceito imagem de infinitamente grande associado a sucessões estritamente crescentes. A definição simbólica do conceito é compreendida de um modo incompleto onde o papel dos quantificadores é negligenciado e as relações de dependência entre objectos e imagens são reforçadas.

O José também não consegue traduzir simbolicamente a definição de infinitamente grande. Quando lhe é pedido para escrever a definição ele relaciona-a com a monotonia:

José – Isso lembro-me daquela… De uma coisa que era u_n… Acho que era mais u_{n+1} ou menos u_{n+1}. Uma coisa assim e depois íamos ver qualquer coisa. Isso é o que eu me lembro, mas não…

Ent. – Isso era para estudar o quê?

José – A monoton[ia]. Ver se era crescente.

Esta abordagem recorrendo à monotonia parece ter por base o seu conceito imagem de infinitamente grande. Ele considera que a sucessão é um infinitamente grande se os seus termos "tendem para mais infinito". As sucessões que usa como exemplo são estritamente crescentes e neste sentido encontra na monotonia uma forma de definir o conceito. Quando confrontado com a definição simbólica o José faz uma leitura baseada nos símbolos:

José – [Lendo] Para todo…

Ent. – Para todo o L…

José – Pertencente a $\boldsymbol{R}^+$

Ent. – Pertencente a $\boldsymbol{R}^+$, existe o quê? Existe…

José – Uma ordem a partir da qual, não é?

Ent. – Sim.

José – Aaa…

Ent. – Uma ordem a partir da qual…

José – Então, o u_n é maior que L.

> Ent. – O que é que isto quer dizer?
>
> José – Há sempre um número maior… do que o anterior… Um número.

Ele tem alguma dificuldade com a leitura dos quantificadores e refere-se à ordem p sem a especificar. O conceito de monotonia manifestado anteriormente continua presente ao fazer a interpretação da definição. Quando lhe é pedido para aplicar a definição a um caso concreto (gráfico da figura 6.11), faz a distinção entre as ordens e os termos revelando um desempenho bastante satisfatório ao encontrar ordens a partir das quais os termos ultrapassem determinados valores. Nesta abordagem ele não faz qualquer referência à relação entre o n e o p, considerando sempre que a ordem que satisfaz é aquela em que o L imposto já é ultrapassado. O José centra-se assim na relação que há entre o L e as ordens sem precisar de destacar as relações que há entre o n e o p. Neste sentido parece revelar uma concepção operacional da definição, isto é, consegue relacionar as ordens e os termos no caso concreto sem explicitar o significado dos quantificadores.

A Sara é mais uma das alunas que não consegue traduzir simbolicamente a definição de infinitamente grande. Tal como o José, associa o conceito ao estudo da monotonia:

> Sara – Ah! Qualquer que seja… n, não… Acho que não [dito a sorrir].
>
> Ent. – já não te lembras? … … Tens uma sucessão a tender para mais infinito, não é?
>
> Sara – Sim… … Qualquer que seja o li… Não. Qualquer que seja n pertencente aos… Eu acho que não é nada disto.
>
> Ent. – Não te lembras como é que… …
>
> Sara – Existe sempre um termo… que é superior ao anterior…
>
> (…)
>
> Sara – u_n é sempre menor que u_{n+1}…

A Sara não consegue fazer a representação simbólica porque parece não estar familiarizada com o significado dos quantificadores, "é que eu não estou a perceber bem o que é que quer dizer com os quantificadores". Além disso ela parece manifestar um fenómeno de ventriloquismo reproduzindo algumas vozes que lhe parecem apropriadas para descrever o conceito. É com base no seu conceito imagem de infinitamente grande que ela tenta atribuir significado à definição:

> Ent. – O que é que significa dizer que uma sucessão tende para mais infinito?
>
> Sara – Que ao substituirmos os valores de n no termo geral nós temos cada vez valores … superiores, até mais infinito.

Ela interpreta o conceito evidenciando os processos para explicar a variação dos termos e apenas consegue fazer referência à monotonia. A sucessão é um infinitamente grande quando for monótona crescente no sentido estrito. Ao ser confrontada com a escrita simbólica do conceito ela argumenta que se recorda da linguagem utilizada, voltando desta forma a evidenciar uma tendência para o ventriloquismo:

> Sara – É que eu depois de ler isto veio-me logo à ideia. Lembro-me perfeitamente das palavras que a professora dizia. Então, para todo o L pertencente a $\boldsymbol{R}^+$, existe sempre uma ordem pertencente a $\boldsymbol{N}$… Sendo esse n maior que… Maior que p, ai!
>
> Ent. – Existe uma ordem pertencente a $\boldsymbol{N}$. Que é o p, não é?
>
> Sara – Sim.
>
> Ent. – Tal que…
>
> Sara – Tal que n seja maior que essa… essa ordem… Que essa ordem.
>
> Ent. – Sim. Tens o quê?
>
> Sara – $u_n > L$

A Sara parece ter memorizado a terminologia utilizada na definição simbólica, tendo no entanto alguma dificuldade em a reproduzir com as mesmas palavras que eram usadas pelo professor. A relação que se estabelece entre o n e o p parece ser a que mais problemas levanta, mas que explica da seguinte forma:

> Sara – [A definição significa] que todos os valores… Existem valores pertencentes a $\boldsymbol{R}$, depois destas ordens… Em que n vai ser maior que a ordem que nós aqui escolhermos [refere-se à ordem p], e o termo geral, que é este, irá sempre ser maior que o L que nós depois tenhamos escolhido.

A Sara procura dar significado à definição comentando a relação que há entre os termos e as ordens mas continua a não dar o significado pretendido aos quantificadores. Quando tenta explicar a definição na presença de um caso concreto (gráfico da figura 6.11), ela centra a sua atenção na relação que há entre o n e o p, e continua a não realçar o papel desempenhado pelos quantificadores. Mesmo assim aplica a definição, sendo capaz de encontrar ordens a partir das quais os termos da sucessão são maiores que determinados valores de L dados. Para tal ela associa o L ao eixo vertical e o p e o n ao horizontal. Faz também uma distinção nítida entre os termos e as ordens e nos casos concretos relaciona o n com o p, encontrando o menor valor que o p pode tomar para que a condição estabelecida pela definição simbólica seja verdadeira. No seu conceito imagem o L deve representar um número tão grande quanto possível para que a definição seja verificada.

Para a Madalena a escrita da definição simbólica de infinitamente grande também lhe causa algumas dificuldades. Ela associa a definição ao facto de os termos da sucessão não poderem ser majorados:

> Madalena – Eu escrever não me lembro, mas eu acho que tinha alguma coisa a ver com… Não há nenhum número, não há nenhum número M, ou uma coisa assim. Nós nunca podemos achar nenhum número que seja maior que os termos da sucessão… Porque a sucessão vai sempre crescendo, crescendo e nunca há nenhum número que seja maior.

Esta abordagem evidencia um conceito imagem de infinitamente grande que assenta no facto de os termos crescerem indefinidamente e tem por base algumas sucessões concretas:

> Ent. – O que é que significa dizer que uma sucessão tende para mais infinito, lembras-te?
>
> Madalena – Eram daquelas sucessões de referência.
>
> Ent. – Por exemplo?
>
> Madalena – Essas de n, n^2… $\sqrt{n}$ também.
>
> Ent. – Hum. Portanto o que é que acontece nesse caso?
>
> Madalena – Nesse caso quando nós substituímos o tal conjunto ***N*** dos naturais no n pequenino os valores que nos vão resultar vão ser sempre cada vez maiores, cada vez maiores.
>
> Ent. – Cada vez maiores.
>
> Madalena – E nunca tem, não é limitada, não tem o tal máximo…

A Madalena usa como exemplos sucessões crescentes em sentido estrito e explicita o processo de crescimento para explicar o comportamento dos termos da sucessão. A condição principal que destaca é o facto de não ser possível limitar superiormente os termos da sucessão. Quando lhe é pedido para fazer uma leitura da definição, que entretanto lhe foi apresentada, mostra alguma dificuldade:

> Madalena – Existe uma ordem.
>
> Ent. – Existe uma ordem…
>
> Madalena – Pertencente ao conjunto dos naturais.
>
> Ent. – Uma ordem p, pertencente aos naturais, tal que…
>
> Madalena – A partir dessa ordem.
>
> Ent. – Para $n>p$, a partir dessa ordem… Todos os termos da sucessão são superiores…
>
> Madalena – A esse valor.

A Madalena faz uma leitura bastante abreviada da definição não verbalizando alguns dos símbolos presentes. Esta dificuldade de verbalização desaparece quando se trata de aplicar a definição com base num caso concreto (gráfico da figura 6.11). A Madalena indica os eixos onde deve colocar as ordens e o L:

> Madalena – A ordem será no eixo horizontal.
>
> Ent. – Portanto, à medida que arranjas uma ordem aqui.
>
> Madalena – Qualquer que seja o valor que eu arranje aí no eixo horizontal… Há-de sempre haver termos maiores, aliás…
>
> (…)
>
> Ent. – E esse L estará onde?
>
> Madalena – Esse L será nos termos.
>
> Ent. – Nos…
>
> Madalena – Nos termos, nas imagens.
>
> Ent. – Nas imagens.
>
> Madalena – Porque aqui não dizem que é a ordem que é maior, é sim os termos da sucessão.

Com base no gráfico ela indica várias ordens a partir das quais os termos da sucessão tomam determinados valores. Nestes casos não faz qualquer referência à condição $n>p$ admitindo que a ordem que satisfaz cada uma das condições impostas é aquela que já verifica a condição. O facto de o L ser tão grande quanto possível é para ela condição necessária para que se verifique a definição. A Madalena apresenta assim um conceito imagem de infinitamente grande que tem por base sucessões que são monótonas crescentes em sentido estrito, conseguindo evidenciar alguma coordenação dos vários processos associados ao conceito.

2.2. Conceito imagem instrumental

Nesta categoria são incluídos os conceitos imagem manifestados pelos alunos que apresentam alguma tradução simbólica do conceito de infinitamente grande ainda que incompleta. Eles conseguem traduzir simbolicamente partes do conceito que resultam da sua capacidade de referir algumas propriedades isoladas, não conseguindo no entanto atribuir o significado pretendido à representação no seu todo. A concepção intuitiva do conceito está no entanto presente nos conceitos imagem analisados.

O conceito imagem manifestado pela Carla foi incluído neste nível, pois embora revele uma ideia intuitiva do comportamento dos termos da sucessão que lhe permite reproduzir algumas partes da definição simbólica, ela não consegue dar-lhe significado no seu todo. Quando lhe foi pedido para escrever a definição começou por representar alguns símbolos:

Carla – Eu acho que não é assim… Não deve ser… Eu sei que nós podíamos pôr… Tínhamos que designar um número grande.

Ent. – Sim. E depois o que é que tem que acontecer aos termos?

Carla – Qualquer desses, qualquer número. Eu sei que havia, nós designávamos.

Ent. – Qualquer número, escreves qualquer… número… Como a sucessão está a tender para mais infinito vai ser um número grande ou pequeno?

Carla – Tem que ser grande.

Ent. – Qualquer número grande.

Carla – Qualquer *n*.

Ent. – Se calhar não é bom chamar-lhe *n* porque depois vais ter o *n* à frente. Chama-lhe outro nome qualquer, *L*, ou outra coisa qualquer.

Carla – Qualquer *L*… Hum…

Ent. – O que é que tem que existir? O que é que tens que conseguir arranjar?

Carla – Tenho que arranjar um *p*… Sim tenho que arranjar um *p* de tal forma que o *p* seja maior que *n*. Não!

Ent. – Portanto tens que arranjar um *p*. E esse *p* está onde… Esse *p* pertence a que conjunto?

Carla – Pertence a ***N***.

Ent. – Tens que arranjar um p natural tal que .… Estavas tu a dizer, a partir dessa ordem… Então o que é que acontece a partir dessa ordem?

Carla – [está a escrever u_p] Hup, não.

Ent. – Costumavamos escrever para $n>p$ não era?… Lembras-te?

Carla – $n>p$

Ent. – O que é que tem que acontecer aos termos da sucessão?

Carla – Têm que… Têm que tender para mais infinito. Têm que continuar a…

Ent. – Agora aqui tens que relacioná-los com quem? Com…

Carla – com o L.

Ent. – Com o L. Lembras-te como é que se fazia? Isso implica que…

Carla – Implica.

Ent. – Os termos da sucessão, como é que se escreve?

Carla – u de…u de

Ent. – Os u_n, não é? Implica que os termos têm que ser quê?

Carla – Maiores que L.

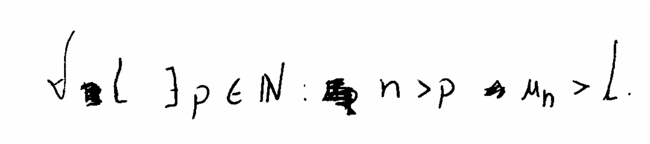


Figura 6.13. Escrita da definição simbólica de infinitamente grande da Carla.

A Carla parece ter memorizado a definição e com muita ajuda consegue reproduzir algumas das suas componentes. À medida que vai escrevendo os símbolos (figura 6.13), ela parece não conseguir atribuir-lhe o significado pretendido, procurando comparar esta definição com alguma representação imagética que foi abordada nas aulas. Embora a representação simbólica final possa traduzir a definição formal, ela parece indecisa sobre a sua validade. Ela revela possuir um conceito imagem de infinitamente grande baseado no conceito de sucessão limitada. Quando questionada sobre o que significa dizer que uma sucessão está a tender para mais infinito, afirma que:

Carla – Quer dizer que à medida que o n vai aumentando vai aumentando também o… o resultado da sucessão. E que nós não conseguimos limitar u_n de forma… Como não dá para limitar u_n, e ela tende sempre a ficar maior também não podemos limitar a própria sucessão.

Ela refere-se ao crescimento da sucessão baseando-se na relação estabelecida entre o n e os termos, termos estes que acabam por ser identificados com a própria sucessão e o conceito de infinitamente grande resulta do facto de não ser possível limitá-los superiormente. As dificuldades experimentadas com a escrita da definição formal parecem dissipar-se quando se pretende aplicar a definição a um caso concreto. Perante o gráfico da figura 6.11, foi-lhe pedido para indicar a ordem a partir da qual os termos da sucessão eram maiores que 5. A Carla começou por fazer os cálculos mentalmente:

Carla – A partir da ordem… 2.

Ent. – Sim. Como é que fizeste?

Carla – Fui ver qual… O que é que era. Espera aí! Não, não, eu enganei-me… Aliás 2 inclusive porque se nós formos substituir, vamos igualar esta função a 5… Maior que 5. Só que para ser mais fácil para nós, nós igualamos a 5.

Ela resolve o problema através dos cálculos e valida a sua resposta testando o resultado obtido. Quando questionada sobre a possibilidade de utilizar o gráfico para este tipo de questões ela referiu que tal era possível e identificou graficamente a resposta que tinha obtido. De uma forma geral, a Carla mostrou ser capaz de utilizar o gráfico para responder a outras questões do mesmo tipo, conseguindo mesmo diferenciar o papel desempenhado pelo p na definição. Ela consegue assim fazer uma abordagem que lhe permite identificar os vários processos envolvidos no conceito quando este é tratado num caso concreto, mas mostra alguma dificuldade em abstrair o mesmo, nomeadamente quando é necessário dar significado à definição simbólica.

O Fernando também encontra algumas dificuldades quando tenta reproduzir a definição simbólica de infinitamente grande. Tal como a Carla, ele parece ter memorizado a definição mas apenas consegue reproduzir alguns dos símbolos sem que os mesmos estejam providos do significado pretendido. Quando lhe é pedido para escrever a definição simbólica ele começa por se referir ao quantificador existencial:

Fernando – Que existia… Como é que era? … Existia um [risos] … $\varepsilon>0$, tal que…

(…)

Fernando – Acho que isto aqui era para a convergência. Acho que isto é para a convergência.

O Fernando acaba por admitir que o ε é utilizado na definição de sucessão convergente e não dá grande relevo ao quantificador que está a utilizar. Posteriormente, ao ser questionado, ele conclui que não é possível limitar superiormente os termos da sucessão. Mesmo com muita ajuda da parte do entrevistador, o Fernando apenas conseguiu recordar-se de fragmentos da definição:

Fernando – Ah! Já estou a perceber… Era… Era a partir de uma ordem…

Ent. – Exactamente. Tem que existir o que? Uma ordem…

Fernando – Tem que existir uma ordem maior, da qual…

Ent. – A partir da qual.

Fernando – Como é que é? Não me lembro disto.

Ent. – Os termos da sucessão… Ultrapassam um dado valor.

Fernando – É, mas.

Ent. – Qualquer que seja esse valor.

Fernando – Eu tenho isso na cabeça e não me está a sair… Que era aaa… Sei a página e tudo, no meu dossier.

Ele continua a tentar recordar-se da definição mas não dá significado à relação que o entrevistador tenta estabelecer entre os termos da sucessão e o valor que é usado para comparar com esses termos. Na tentativa de concretizar a situação o Fernando faz um esquema que pretende representar a evolução dos termos de uma sucessão genérica (figura 6.14), mas que pela forma como foi desenhado voltou a levantar problemas:

> Fernando – Isto era u_1, u_2, u_3, u_4.
>
> Ent. – Hum.
>
> Fernando – A partir da qual, como é que era? … …
>
> Ent. – O que a gente está a dizer é: há uma ordem a partir da qual…
>
> (…)
>
> Fernando – Já não me lembro como é que nós púnhamos a ordem. Depois isto era…

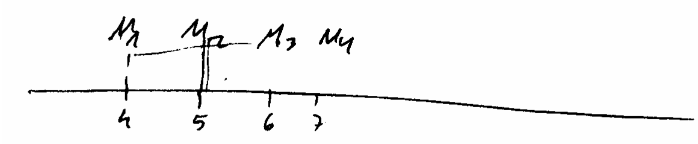


Figura 6.14. Esquema do gráfico de uma sucessão que tende para mais infinito (Fernando).

Por ter representado os termos da sucessão sobre uma recta não consegue representar as ordens uma vez que elas iriam ficar no mesmo eixo em que estão os termos. O Fernando continua a tentar representar a noção de que não é possível impor um limite superior aos termos de uma sucessão "infinitamente crescente" e com a ajuda do entrevistador chega à representação simbólica da mesma (figura 6.15).

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}_0 : n > p \Rightarrow u_n > \varepsilon$$

Figura 6.15. Definição simbólica de infinitamente grande do Fernando.

Embora anteriormente tenha recorrido a uma representação esquemática dos termos da sucessão (figura 6.14) a tender para mais infinito, quando questionado sobre o que é que isso significa, refere-se à sucessão com base noutra representação:

> Fernando – Tende para mais infinito. Uma sucessão pode ser crescente e tender para mais infinito ou [ser] estritamente crescente, ou seja, uma sucessão que tende para mais infinito quer dizer que… Eu até posso esquematizar, se calhar é mais fácil fazer mesmo assim. [desenha a figura 6.16]
>
> Ent. – Sim.
>
> Fernando – Tenho o meu a… e o meu $f(a)$ … Uma imagem. É o objecto maior que o anterior… Vou ter sempre, hummm… Exacto.

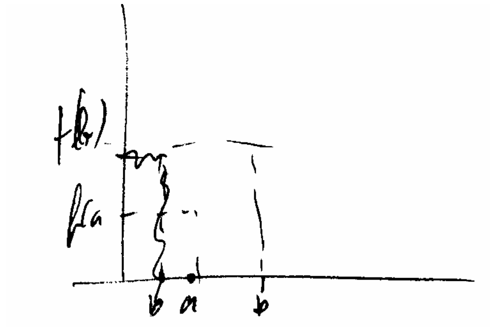


Figura 6.16. Representação esquemática de uma sucessão que tende para mais infinito (Fernando).

O Fernando recorre à representação num sistema de eixos onde destaca o facto de à medida que os objectos aumentam, também acontece o mesmo com as imagens. O seu conceito imagem refere-se assim a sucessões estritamente crescentes.

Quando confrontado com a definição simbólica formal abordada nas aulas o Fernando referiu-se a ela como sendo algo familiar. Já quando se pretendeu dar significado a essa mesma definição, usando o gráfico da figura 6.11, ele revelou algumas dificuldades. Assim, quando se pretendeu saber a partir de que ordem os termos da sucessão eram maiores que um dado valor, 5, optou por uma abordagem algébrica:

> Fernando – A partir da ordem 2.
>
> Ent. – Como é que tu fazes?
>
> Fernando – Não, não, não. Já sei, isto aqui. Então igualo a expressão a 2 e tiro o *n*.

Com base neste processo ele dá uma resposta satisfatória em várias situações e faz a respectiva interpretação no gráfico. Neste caso apenas relaciona a ordem com o L, isto é, dado um determinado L, ele indica uma ordem a partir da qual os termos da sucessão são maiores que esse L. Quando lhe é pedido para relacionar a ordem encontrada com o p que aparece na definição ele revela bastantes dificuldades, chegando mesmo a confundir o L com o p e o n. Esta situação só foi ultrapassada quando o entrevistador lhe chamou a atenção para o papel desempenhado por cada um dos símbolos na definição e para a relação entre o n e o p. O Fernando apresenta um conceito imagem da cariz operacional, isto é, consegue usar o conceito em várias situações concretas recorrendo a processos de cálculo. Esta abordagem não lhe permite no entanto dar o significado pretendido à definição simbólica aprendida nas aulas.

A Sofia também apresenta um conceito imagem da definição simbólica de infinitamente grande que mistura este conceito com o de sucessão convergente. Quando lhe é pedido para escrever simbolicamente a definição ela afirma que:

> Sofia – Ela é um infinitamente… grande… positivo. Eu acho que isto era… Isto deve ser… Eu sei que tinha qualquer coisa, tinha um L… Eu acho que era para todo o ε… existia um L pertencente a $\boldsymbol{R}^+$… tal que… o módulo da minha sucessão era sempre maior que esse L, por muito grande que ele fosse.

(…)

Sofia – Não. Eu acho que isto não era o módulo… Acho que não…

A Sofia refere-se a alguns símbolos que parece considerar indispensáveis à tradução simbólica do conceito. O L acaba por assumir um papel primordial, pois é com base nesse parâmetro que ela tenta dar significado ao conceito de infinitamente grande. Posteriormente considera que o módulo do termo geral não deve fazer parte da definição e acaba por apresentar a escrita da definição de uma forma incompleta (figura 6.17).

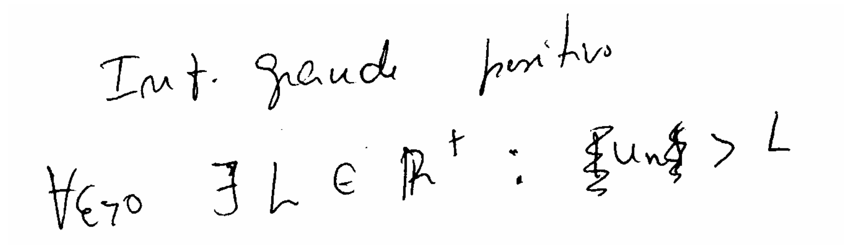


Figura 6.17. Definição simbólica da infinitamente grande da Sofia.

A Sofia continua a tentar dar significado aos símbolos colocando a ênfase na relação entre o L e os termos da sucessão:

Sofia – Eu tenho um L pertencente a $\boldsymbol{R}^+$… A minha função é sempre maior que esse L, precisamente porque está a tender. É a ideia que eu tinha quando estudava isto. Como está a tender para mais infinito a sucessão é sempre maior…

Ela acaba por não conseguir explicitar o significado do ε que escreveu inicialmente e tende a ser guiada pelo seu conceito imagem, isto é, os termos da sucessão vão ser sempre maiores que um dado valor que ela parece admitir ser tão grande quanto nós quisermos. É de salientar que a Sofia se refere ao crescimento dos termos da sucessão sem precisar de recorrer aos processos que estão na sua origem. Já quando tinha sido questionada sobre o significado de uma dada sucessão tender para mais infinito, utilizou uma abordagem semelhante referindo-se mesmo à sucessão em termos do seu limite:

Sofia – Quer dizer que o limite de u_n, da sucessão, quando o n tende para mais infinito… a sucessão também tende para mais infinito.

Quando confrontada com a definição formal dada nas aulas a Sofia fez a sua leitura sem estabelecer qualquer comparação com a que tinha escrito anteriormente:

Sofia – Então o que eu estou a dizer é: para todo o L positivo, existe uma ordem natural… a partir da qual o n é maior que p. Isso implica que ela é sempre maior que esse L… Eu penso… É assim: para todo o L que eu considere… aqui… as imagens são sempre maiores que esse L.

Ela continua a fazer uma leitura da definição sem dar grande importância às ordens representadas por n e p. Foca-se na relação que deve haver entre o L e os termos da sucessão, acabando esta relação por dominar toda a definição. Com base nesta abordagem encontra algumas dificuldades quando confrontada com um caso concreto. Ao tentar concretizar a definição usando o gráfico da figura 6.11, ela coloca o L no eixo horizontal confundindo-o com a ordem.

Sofia – A partir de que ordem… Eu quero saber o p. Aaa… os termos são maiores que 5. Então a minha sucessão é maior que 5… Então a minha sucessão é maior que 5 portanto aqui… [vê no eixo vertical] ela já é maior que 5… Bem mas aqui [eixo horizontal] ainda não chega… portanto há-de ser… A ordem é um p natural… eu penso que é a partir do 5…

Ent. – Dizes que a partir do 5 os termos são maiores de 5?

Sofia – Ai não… Pode ser maior ou igual?

Ent. – Pode?

Sofia – Não. É que eu estava a ver isto mal… Então quando u_n é maior que 5, a partir do 1…

A Sofia começa por não fazer uma distinção entre o L e as ordens mas rapidamente descobre que deve colocar estes parâmetros em eixos diferentes, conseguindo a partir daí responder satisfatoriamente a várias questões do mesmo género. Dá assim o significado pretendido à definição simbólica admitindo que a forma como colocava o L nos eixos limitava a sua compreensão da definição.

Para o Manuel a tradução simbólica do conceito de infinitamente grande parece ser algo que memorizou e que vai adquirindo significado à medida que vai sendo escrita. Ele começa por escrever parcialmente a definição de sucessão convergente, recordando-se depois que não é essa a definição pretendida.

Manuel – Acho que era assim… Existia um… Era esta aqui… Um n pertencente a $\boldsymbol{N}$, com $n>p$. Já não me lembro bem se era assim.

Ent. – Hum, hum…

Manuel – Agora não me lembro se era dois pontos, se era…

Ent. – Não te preocupes.

Manuel – Menos a, Ah! Aaa… não. Esta [definição simbólica de sucessão convergente] era quando tendia para o valor, esta é quando tendia para o valor.

Ent. – Está bem.

Manuel – A outra era… [está a escrever a segunda definição (figura 6.18)] aaam…Em que n era maior que L. Era qualquer coisa assim, já não me lembro muito bem.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists p\in \mathbb{N}: u>p \Rightarrow |x_u - a| < \varepsilon$$

$$\forall \delta>0\ \exists p\in \mathbb{N} \cdot u>p \Rightarrow u_n > L$$

Figura 6.18. Definição simbólica de sucessão convergente e infinitamente grande do Manuel.

O Manuel escreveu a segunda definição (figura 6.18), sem colocar o sinal de implicação e no lugar do u_n tinha escrito n. Embora pareça que ele não faz a distinção entre os naturais e os termos da sucessão, tal não acontece, pois quando questionado sobre o papel do símbolo n, afirma:

Manuel – Isto é o n, é os números naturais.

Ent. – É o n dos naturais?

Manuel – Não, este não. Este é o n de sucessão.

Ent. – Então põe u_n para diferenciar.

O facto de a definição simbólica relacionar os termos da sucessão com o L, sem que o L seja explicitado anteriormente, deixa antever uma falta de compreensão da definição no seu todo. O Manuel centra-se essencialmente no facto de a sucessão não estar a tender para um determinado valor finito, considerando que os termos ultrapassam um dado valor, que será o L neste caso:

Ent. – O que é que tu achas que isto [a definição simbólica que ele escreveu] quer dizer?

Manuel – Que vai ser maior que L. Portanto… Aaam… Que não vai ter um limite fixo, vai ter um limite…

Ele parece estar a recorrer ao seu conceito imagem de infinitamente grande onde o mesmo é justificado com a noção de limite. Quando lhe foi pedido para explicar o que significa dizer que uma dada sucessão tende para mais infinito ele refere:

Manuel – Que não tem limite finito… Portanto lá vamos nós repetir aquilo.

Ent. – Sim, diz…

Manuel – … Como é que eu hei-de dizer…

Ent. – A sucessão está a tender para mais infinito. O que é que isso quer dizer?

Manuel – Que não tem um limite. Não tem um limite finito, que… Não tem… um ponto fixo que a sucessão… tende para.

Ele apresenta um conceito imagem de infinitamente grande que lhe permite explicar o conceito com base noutros conceitos e sem recorrer aos processos que estão na sua origem. Esta abordagem parece condicionar o seu desempenho na utilização da definição simbólica. Quando confrontado com a definição formal dada nas aulas, ele não dá qualquer relevância ao facto de elas serem diferentes. Ao fazer uma leitura da definição sente algumas dificuldades na identificação dos quantificadores:

Manuel – Portanto, aaa… Existindo um ε … Ou um ε, um L…

Ent. – Qualquer, este [$\forall$] é um qualquer.

Manuel – Qualquer… Pois, qualquer. Qualquer que seja o L…aaaa… Qualquer.

Ent. – Pertencente a $\boldsymbol{R}$.

Manuel – Pertencente a $\boldsymbol{R}^+$, existe um p, aaa, um p. Pronto existe um p que é os números naturais.

Ent. – Que é um natural.

Manuel – Pertence aos números naturais… Em que $n>p$… Em que… Portanto n vai ser… O n vai ser maior que o p…

Ent. – E isso implica.

Manuel – Isso implica que a sucessão seja maior que o…

Ent. – Que o tal L?

Manuel – Que o tal L.

A leitura do Manuel parece revelar uma falta do significado esperado para alguns dos símbolos. Com o objectivo de procurar esse significado foi-lhe mostrado o gráfico da figura 6.11, sendo pedido que indicasse como poderia colocar o p e o L nos eixos.

Manuel – … Agora… Nunca tinha pensado nessa.

Ent. – Nunca tinhas pensado nisso? Mas o que é que tu dizes que o p é? … Aqui? [indico a definição simbólica] Tu dizes: existe um p que pertence a quem?

Manuel – Um p que pertence aaaa… Portanto pert… Portanto pertence. Portanto pertence aos números na… [está a hesitar].

Embora ele conclua que o p é um natural e deva ser colocado no eixo horizontal, não consegue relacioná-lo com o n.

Ent. – E aquele n vai estar onde? Este n? Tu depois dizes, para $n>p$ …

Manuel – Portanto, o $n>p$ … O n…O n vai ser os pontos, o 1, o 2, o 3, o 4, o 5 e o 6… Não mas… aaa… Portanto vai ser o que a gente vai substituir aqui…

Ent. – Porquê?

Manuel – Mas se o L vai ser este, o p… Para mim, para mim o n, o L iria ser este [indica o L no eixo vertical].

O n é associado aos naturais enquanto que o p não passa de um natural para o qual o Manuel não consegue explicitar o significado. Por exclusão de partes, acaba por colocar o L no eixo vertical. Quando lhe é pedido, num caso concreto, para indicar uma ordem a partida da qual os termos da sucessão ultrapassam um dado valor, ele tem um desempenho satisfatório, indicando mesmo a menor ordem que verifica a condição. Não consegue no entanto estabelecer nenhuma relação entre esta ordem e as letras n e p da definição. Só quando o entrevistador lhe chama a atenção para esta relação é que o Manuel dá o significado pretendido ao conjunto da definição, indicando valores de p que satisfaçam a definição para vários valores de L dados. O Manuel apresenta assim um conceito imagem de infinitamente grande que lhe permite representar a definição simbólica sem no entanto conseguir explicitar os vários processos que lhe estão subjacentes. Na representação da definição ele parece ter recorrido à memorização tentando posteriormente extrair significado da mesma, o que se revelou uma tarefa bastante complexa.

Para a Mariana a escrita de definição simbólica de infinitamente grande representa algo que ela admite não conseguir fazer. Inicialmente indica a forma abreviada de fazer essa representação e quando a mesma lhe é pedida acaba por escrever alguns símbolos (figura 6.19):

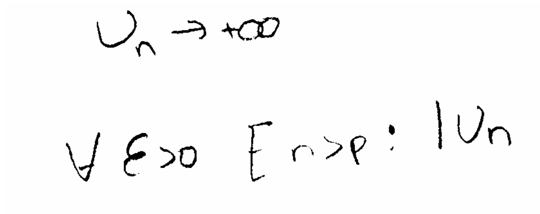


Figura 6.19. Escrita simbólica da definição de infinitamente grande da Mariana.

Ela apenas verbaliza a parte referente ao quantificador universal e não atribui qualquer significado aos restantes símbolos. Parece recorrer à sua memória visual para tentar reproduzir a definição mas acaba por admitir que não se lembra. Já quando lhe foi pedido para explicar o que significava dizer que uma sucessão tendia para mais infinito, ela utiliza uma argumentação em termos de objectos e imagens:

> Mariana – Vai sempre aumentando. À medida que o *n* aumenta os seus termos também vão aumentando.

Esta abordagem parece contemplar essencialmente sucessões monótonas e estritamente crescentes mas revela alguma interiorização na forma como ela encara a relação de dependência que se estabelece entre as ordens e os termos, pois não precisa de explicitar os processos que lhe estão subjacentes. Além desta vertente, o seu conceito imagem de infinitamente grande parece assentar também na ideia de que não é possível fazer qualquer majoração dos termos da sucessão, isto é, qualquer valor que se tente impor como limite para os termos da sucessão será sempre ultrapassado.

Quando confrontada com a definição simbólica, ela identificou-a como sendo algo familiar e conseguiu fazer uma leitura da mesma:

> Mariana – Então, qualquer… Qualquer número por maior que seja pertencente aos… reais positivos… Existe uma ordem depois da qual… a sucessão é maior que esse número.

Com base num caso concreto (figura 6.11), foi-lhe pedido para indicar ordens a partir das quais os termos da sucessão ultrapassavam determinados valores. A Mariana usou a definição, colocando o *L* no eixo vertical e o *n* no horizontal, e indicou sempre as ordens que satisfaziam as condições pretendidas. Em nenhuma das situações ela referiu o parâmetro *p* ou estabeleceu qualquer relação entre o *n* e o *p*. Esta abordagem é consistente com a leitura da definição que fez anteriormente, parecendo subentender-se que este processo de leitura lhe permite explicar o conceito, mesmo quando está a trabalhar com casos concretos. O símbolo *L* é encarado com tendo um papel importante na definição, devendo ter um valor tão grande quanto possível para que a definição seja verificada.

Quando pretende escrever a definição simbólica de infinitamente grande, a Paula começa por recorrer ao uso dos quantificadores e das letras que primeiro lhe ocorrem e posteriormente vai tentando atribuir significado a esses símbolos:

> Paula – É, existe um ε maior que 0. Eu já não sei se é existe um ε ou um L. É um L acho eu… Um L pertencente…a $\boldsymbol{R}^+$.
>
> (…)
>
> Paula – Eu acho que é um L porque o ε é em termos de vizinhanças.

Ela parece recorrer a algumas imagens mentais que englobam quer a definição de infinitamente grande e de sucessão convergente, tentando com base nelas reproduzir a definição pretendida. Enquanto tenta atribuir significado aos primeiros símbolos que escreve (expressão 1 da figura 6.20), ela parece recordar-se da definição pretendida e escreve rapidamente a definição da expressão 2 da mesma figura:

> Paula – Pertencente a $\boldsymbol{R}^+$…Hum… Existe um L… Ah! Primeiro é… [está a escrever a expressão 2 da figura 6.20]
>
> Ent. – Hum. Qualquer que seja o L…
>
> Paula – Tal que… Humm… Existe uma ordem.
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> Paula – Ai, eu hoje estou mesmo… Com n maior que p… Isto não é assim?
>
> Ent. – Aquilo que estás a dizer aqui é…
>
> Paula – Existe uma ordem a partir da qual u_n é maior que L.

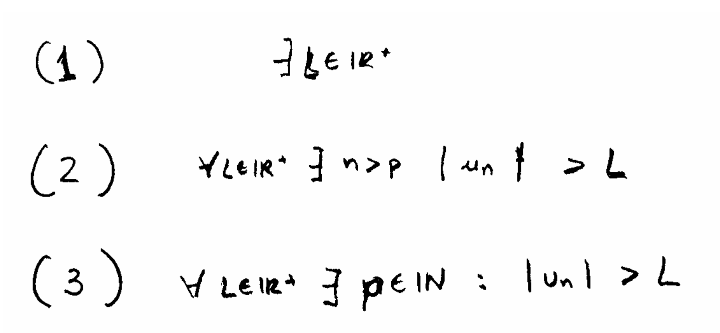


Figura 6.20. Representações simbólicas da definição de infinitamente grande da Paula.

A Paula refere-se a uma ordem mas não consegue estabelecer uma correspondência entre essa ordem e a letra p que representou. Verbaliza de forma correcta a definição mas, no entanto, essa verbalização não fica completamente definida com a representação simbólica que fez. Esta mesma representação continua a levantar-lhe algumas dúvidas tentando de novo relacioná-la com a de sucessão convergente:

> Paula – Mas não há u_n menos qualquer coisa… maior que…

Ela parece ter ainda algumas dúvidas sobre a representação simbólica que escreveu e, quando lhe foi sugerido pelo entrevistador que poderia estar a ser influenciada pela definição de sucessão convergente, ela referiu que sabia a definição e passou de imediato a escrever a apresentada na expressão 3 da figura 6.20. Mais uma vez parece estar a recorrer à sua memória visual e nem sequer estabelece qualquer relação entre as duas últimas representações simbólicas. A Paula parece reforçar em ambas as representações o facto de os termos da sucessão ultrapassarem o L mesmo que este tome valores muito grandes. O seu conceito imagem de infinitamente grande parece assentar neste pressuposto, pois quando lhe foi pedido para explicar o que significava dizer que a sucessão tendia para mais infinito ela argumentou que ela "estava sempre a crescer", isto é, à medida que as "ordens aumentam também aumentam os termos da sucessão".

Quando a Paula foi confrontada com a definição simbólica formal não tentou estabelecer qualquer comparação com a que tinha escrito e acabou por fazer uma leitura da mesma bastante abreviada:

> Paula – Qualquer L pertencente a $\boldsymbol{R}^+$, existe uma ordem a partir da qual, n maior que p implica que u_n é maior que L.

Ela procura fazer uma leitura dos símbolos presentes na definição que mistura com uma leitura informal. Com o objectivo de melhor compreender o significado que dá aos símbolos foi sugerido fazer a aplicação da definição num caso concreto. A partir do gráfico da figura 6.11, foi-lhe pedido para arranjar uma ordem a partir da qual os termos ultrapassem um dado valor. A Paula acaba por trocar os termos com as ordens:

> Ent. – Neste caso concreto, a partir de que ordem é que os termos são maiores que 5?
>
> Paula – A partir de que ordem?
>
> Ent. – De que ordem é que os termos são superiores a 5?
>
> Paula – …É de, hum… A partir para aí do 20…

Coloca o valor atribuído aos termos (5) no eixo horizontal e com base nele procura os valores correspondentes das imagens. Este processo continua a ser repetido noutros exemplos e mesmo quando admite que o p e o n são ordens e portanto devem estar no eixo horizontal, continua a colocar os possíveis valores de L neste mesmo eixo.

> Ent. – […] Onde é que a gente coloca este L… Colocamos o L no eixo horizontal ou aqui no eixo vertical? …
>
> Paula – É no horizontal.
>
> Ent. – É essa a ideia que tu tens? Portanto colocas o L no… eixo horizontal…
>
> Paula – Sim… Porque por exemplo para maior que 5…
>
> [Faz aritmeticamente]
>
> Ent. – Então experimenta lá a fazer… Eu queria saber quando é que os termos são maiores que 5…
>
> Paula – 5 menos 2… 3…
>
> Ent. – Dava-te n maior que 1… Como é que tu justificavas isso agora então aqui no gráfico?

Paula – Não. [risos] Não, assim não está bem.

A Paula só consegue inverter esta situação quando recorre ao cálculo e verifica que obtém uma solução diferente da que tinha proposto com base no gráfico. Esta situação deixa-a bastante perplexa e não consegue mesmo explicitar o significado da condição $n>p$ presente na definição. A Paula apresenta uma concepção da definição simbólica que lhe permite fazer uma leitura da mesma, mas não consegue estabelecer o significado dos símbolos mesmo quando aplicados a uma situação concreta.

Para a Susana a tradução simbólica do conceito de infinitamente grande parece ter por base alguns símbolos que ela destaca em particular:

Susana – Qualquer … Tem que haver qualquer coisa com ε [risos].

Ent. – Porquê, com ε?

Susana – Estou a adivinhar.

[A Susana começa a escrever a definição simbólica da figura 6.21]

Susana – Mas eu só sei isto porque é decorado.

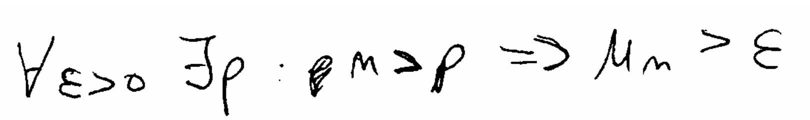


Figura 6.21. Definição simbólica de infinitamente grande da Susana.

Ela acaba por escrever a primeira parte da definição até ao sinal de implicação (figura 6.21), mas revela algumas dúvidas sobre o que acabou de escrever:

Susana – Não tenho a certeza se isto é ao contrário, mas acho que é assim.

Ent. – Sim, $n>p$. E agora o que é que tem que aparecer? … … Implica, não é? … Que … os termos da sucessão … Como é que se escrevem os termos da sucessão de uma forma simplificada? [Pausa]

Susana – É u_n.

Ent. – Sim …

Susana – Serem sempre…

Ent. – Se eles crescem… são sempre maiores que… Neste caso disseste que era um ε.

Susana – Pois, está bem.

A última parte da definição é escrita com muita ajuda do entrevistador, e a Susana só parece estar preocupada com a denominação dos símbolos que está a usar. Ela completa a definição usando o ε como sendo o número que os termos devem ultrapassar, mas quando foi confrontada com a definição dada nas aulas destacou logo o facto de a letra que estava a usar ser diferente:

Susana – Ah! Mas era com o *L*. Com o *M*, não era? A gente fazia era com o *M*?

Ela parece estar a relacionar a escrita simbólica que acabou de fazer com a noção de conjunto limitado, abordada quando do estudo das noções topológicas, onde a letra *M* era usada para majorar os elementos do conjunto. A Susana parece assim estar a utilizar a sua memória visual para escrever a definição sem recorrer ao significado dos símbolos escritos. Quando lhe é pedida uma leitura da definição ela centra-se essencialmente nas ordens:

> Susana – [A definição significa] que existe uma ordem maior, a partir da qual isto vai ser sempre maior que essa ordem. Por maior que seja a ordem existem valores maiores.
>
> Ent. – Quem é que é a tal ordem aí? Qual das letras é que representa a ordem?
>
> Susana – O *L*.

A Susana está a referir-se às ordens mas considera que é o *L* que representa essas ordens. Desta forma encara a ordem como sendo o valor que vai ser sempre ultrapassado pelos termos da sucessão. Esta abordagem parece ser consistente com o seu conceito imagem, pois quando tentou explicar o que significava dizer que uma dada sucessão tendia para mais infinito, referiu-se apenas aos termos da sucessão "Todos os valores estão a ir para ali … [para] mais infinito". Desta forma ela centra-se no comportamento dos termos da sucessão, que designa por ordens, e não consegue explicar o significado do *n* e ao *p* que escreveu anteriormente. Quando questionada, refere que o *p* pertence aos naturais e que o *n* pertence ao domínio, ou seja, o *n* parece servir para substituir na expressão e obter os termos. Ainda assim ela continua a fazer uma leitura da definição que privilegia o papel do *L*: "ando à procura de ver que isto tende para mais infinito e a gente utiliza o *L*". Só quando o entrevistador chama a atenção para o papel diferenciado de cada um dos símbolos presentes na definição é que a Susana começa a atribuir o significado pretendido ao *n* e ao *p*. Perante um caso concreto (figura 6.11), quando lhe é pedido para indicar a ordem a partir da qual os termos são maiores que 5 é que ela faz a distinção entre o *n*, o *p* e o *L*:

> Susana – O *p* [é a ordem a partir da qual os termos da sucessão são maiores que 5].
>
> Ent. – Aqui nos eixos onde é que está o *L*?
>
> Susana – Aqui [eixo vertical].
>
> Ent. – E onde é que está o *p*?
>
> Susana – Depois *p* está ali [eixo horizontal].
>
> Ent. – Porquê? Porque o *p* é um…?
>
> Susana – Natural.
>
> Ent. – E o *n* está aonde? [pausa]
>
> Susana – O *n*?
>
> Ent. – Este *n* aqui … $n>p$ …
>
> Susana – O *n* é o resto dos termos, está aqui. [eixo horizontal]

Desta forma a Susana identifica no gráfico onde deve colocar cada um dos símbolos presentes na definição, embora a relação que estabelece entre o *n* e o *p* não pareça muito clara. Ela afirma que o n serve para representar "o resto dos termos", parecendo destacar o seu papel enquanto gerador de objectos que podem ser usados para obter os termos que ultrapassam o valor de L. No entanto só quando lhe foi pedido para concretizar no gráfico dado o papel dos parâmetros presentes na definição é que ela explicitou o significado da desigualdade $n>p$. A Susana apresenta um conceito imagem de infinitamente grande baseado na definição simbólica, composta por um conjunto de símbolos que obedece a um determinado padrão. Perante esta definição apenas consegue explicar o significado de alguns dos símbolos não tendo pois uma visão de conjunto da mesma.

Para a Alexandra, a tradução simbólica da definição de infinitamente grande parece basear-se na sua memória visual. Quando lhe foi pedido para escrever a definição, ela começou por a representar de forma simplificada, $u_n \to +\infty$, e posteriormente passou à escrita utilizando quantificadores:

> Alexandra – Era exis[te]… Qualquer que seja… Ah! Qualquer que seja… o R, o R ou o L? É um L não é?
>
> Ent. – Sim, pode ser.
>
> Alexandra – Um L maior que 0… Existe sempre um p pertencente a $\boldsymbol{N}$… Que implica… Ah! Não.
>
> Ent. – De tal forma que… Para…
>
> Alexandra – Pois… Esse p é maior que o n…Ai não o n é maior que o p.
>
> Ent. – Hum.
>
> Alexandra – Meto ao contrário?
>
> Ent. – Não, não, podes… Para n maior que p o que é que acontece?
>
> Alexandra – Implica que o L…
>
> Ent. – Repara, os termos da sucessão estão a tender para mais infinito. Quem é que representa os termos da sucessão?
>
> Alexandra – É o… É o… Os termos?
>
> Ent. – Os termos da sucessão.
>
> Alexandra – é o u_n.
>
> Ent. – Exactamente. O u_n é que representa os termos, não é?
>
> Alexandra – u_n ou módulo? É o u_n só. u_n maior que L.

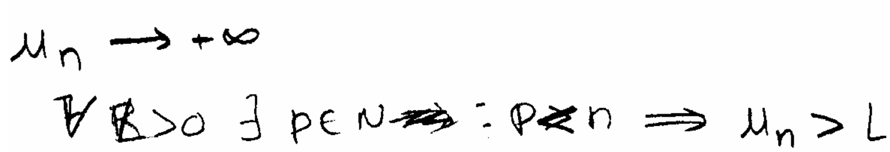


Figura 6.22. Representação simbólica de infinitamente grande da Alexandra.

A Alexandra faz a representação simbólica da definição (figura 6.22), recorrendo à memória visual para estabelecer a posição que os símbolos ocupam. Ela parece recordar-se dos símbolos à medida que vai escrevendo e só os consegue colocar adequadamente com a ajuda do entrevistador. Quando se pretendeu saber o que significava dizer que uma dada sucessão tendia para mais infinito ela argumentou usando a noção de limite:

> Alexandra – É que o limite dessa sucessão é mais infinito.
>
> Ent. – É mais infinito. O que é que está a acontecer aos termos?
>
> Alexandra – Estão a crescer, vão…
>
> Ent. – Vão sendo cada vez…
>
> Alexandra – Cada vez maiores.

Ela refere-se ao limite da sucessão sem explicitar a relação entre este e a noção de infinitamente grande, destacando apenas o facto de os termos crescerem indefinidamente. Para estabelecer o significado dos símbolos da definição que acabara de escrever recorreu-se a um caso concreto (gráfico da figura 6.11), onde se pretendia clarificar a correspondência entre os eixos e os parâmetros n, p e L. A partir da definição, a Alexandra identifica o p como sendo um natural mas tem algumas dúvidas sobre o eixo em que este pode ser colocado:

> Ent. – Disseste o quê? O p é um…
>
> Alexandra – Natural.
>
> Ent. – Natural. É uma ordem não é? Então onde é que tu colocas o p?
>
> Alexandra – Então mas… são os dois [p e n] naturais?
>
> Ent. – Sim. O p é um natural e o n também é um natural. Portanto estarão em que eixo? … Diz, diz…
>
> Alexandra – Mas ambos os eixos são naturais… não são?

Embora considere o n e o p como naturais, a Alexandra parece supor que se trata de dois elementos distintos e portanto devem ser colocadas em eixos separados. Só quando o entrevistador lhe chamou a atenção para o facto de no eixo vertical não haver só naturais, por se tratar do eixo onde são representados os termos da sucessão, é que ela admite que pode colocar o p no eixo horizontal. Ao tentar aplicar a definição no caso concreto da sucessão da figura 6.11, pretendendo-se saber a partir de que ordem é que os termos são maiores que 5, a Alexandra começou por procurar a ordem no eixo vertical:

> Alexandra – A partir de… A partir da ordem… não é isto? [indica a ordem no eixo vertical].
>
> Ent. – Onde é que tu lês as ordens?
>
> Alexandra – Aqui, [eixo vertical] ou não?

Só depois de o entrevistador lhe fazer notar as diferenças entre termos e ordens é que a Alexandra identificou as ordens com o parâmetro n. Posteriormente, depois de ter encontrado ordens a partir das quais os termos ultrapassavam determinados valores dados, admite que o p

também pode ser colocado no eixo horizontal. Mesmo depois desta abordagem, a relação entre o n e o p parece não ser muito clara, pois quando se pretende fazer uma leitura da definição sem se referir a nenhum caso concreto, ela volta a misturar as ordens n e p com o parâmetro L. Quando questionada sobre o papel desempenhado pelo L ela considera que ele pode ser comparado com os termos da sucessão, por se situar no mesmo eixo, mas supõe que o seu valor deva ser pequeno para poder verificar a definição:

> Alexandra – Eu acho que é ind[iferente]… Quer dizer… Se for pequeno é melhor, ou não? Mas acho que é indiferente. Ou tem que ser assim… Não pode é ser menor que 0.

Só perante um novo exemplo num caso concreto é que ela parece compreender o papel desempenhado pelo L em simultâneo com o n e o p. Esta abordagem feita no caso concreto parece indicar que ela compreende a definição, no entanto encontra grandes dificuldades quando se pretende fazer a sua generalização. A Alexandra apresenta assim um conceito imagem de infinitamente grande que pode ser traduzido por uma representação simbólica, mas revela alguma dificuldade em estabelecer o significado desses mesmos símbolos.

2.3. Conceito imagem relacional

Nesta categoria são incluídos os conceitos imagem dos alunos que apresentam uma tradução simbólica do conceito de infinitamente grande adequada. Embora nalguns casos a escrita simbólica se revele incompleta, as verbalizações dos alunos acabam por evidenciar algumas relações que completam a definição. Neste caso o facto de os alunos conseguirem reproduzir e definição simbólica não implica necessariamente a sua compreensão, pelo que a componente relacional do conceito se revela por vezes fraca.

A tradução simbólica da definição de infinitamente grande parece não causar grandes dificuldades ao Joaquim. Ele começa por esperar "que seja como nas funções. Neste caso seria $u_n \to +\infty$". Depois escreve primeiro a definição simbólica de sucessão convergente e tenta estabelecer a outra a partir desta:

> Joaquim – De uma maneira geral, portanto para qualquer ε existe um p pertencente aos naturais tal que a partir de uma certa ordem (…) A sucessão u_n menos, neste caso o a, que seria para onde ela tendia, ia ser menor que ε. Agora para mais infinito é que qualquer M… Que pertence… seja $\boldsymbol{R}^+$ (…) Existe um p… pertencente a $\boldsymbol{N}$ tal que… $n>p$ e $u_n> u_p$. Penso que seja assim [e escreve:]

$$\forall \varepsilon \quad \exists p \in N : \quad n > p \quad |u_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall M \in R^+ \, \exists p \in N \quad n > p \quad (u_n > u_p) \quad u_n > M$$

Figura 6.23. Representação simbólica da definição de infinitamente grande do Joaquim.

O Joaquim representa com alguma facilidade a tradução simbólica de sucessão convergente (figura 6.23), como se ela fosse imprescindível para estabelecer a de infinitamente grande. Embora ele não tenha estabelecido a implicação, a sua leitura parece englobar essa componente. Quando tenta estabelecer a definição pretendida ele parece centrar-se sobretudo no comportamento dos termos da sucessão, concluindo que se $n>p$ então $u_n>u_p$. Esta abordagem parece estar de acordo com o seu conceito imagem de infinitamente grande que tem por base o crescimento ilimitado dos termos da sucessão. Ao tentar explicar o que significa a sucessão tender para mais infinito ele afirma:

> Joaquim – Que… o valor que ela vai tomando. Quando vamos colocando *n* valores ela vai tender cada vez para o número maior, infinito. (…) Que já não é possível dizer, um milhão, dois milhões… É para um número que, maior que possa atingir. Que é impossível.

O Joaquim refere-se aos termos da sucessão como tendendo para infinito, infinito esse que corresponde a números muito grandes, que já não é possível exprimir. Posteriormente ele consegue estabelecer a relação que há entre os termos e *M*, ainda que mostre algumas dúvidas quanto à sua escrita:

> Ent. – Portanto, estás a dizer que qualquer que seja o *M*…
>
> Joaquim – Consigo arranjar um *p*.
>
> Ent. – Arranjas uma ordem.
>
> Joaquim – Que os valores sejam maiores que isso. Ela vai sempre. A própria sucessão vai ser maior que, que qualquer coisa.
>
> Ent. – Vão ser maiores que quem?
>
> Joaquim – Que o *M* [o entrevistador está a apontar com o lápis]
>
> Ent. – Que o *M*.
>
> Joaquim – Pois. Agora… aqui talvez seja *M*.

O Joaquim parece não estar convicto de que a definição que escreveu corresponde ao que era pretendido, mas no entanto não propõe nenhuma alteração. Quando confrontado com a definição dada nas aulas ele pergunta ao entrevistador se é aquela a definição que “devemos considerar como certa” e não tenta estabelecer nenhum tipo de relação entre esta e a que tinha escrito. Quando se pretendeu estabelecer o significado da definição simbólica o Joaquim mostrou um desempenho bastante satisfatório ao aplicar a mesma ao caso concreto proposto (gráfico da figura 6.11). Ele indicou as ordens a partir das quais os termos da sucessão ultrapassavam determinados valores dados, fazendo sempre uma distinção bastante nítida do papel desempenhado pelos parâmetros n, p e L. O Joaquim parece ser capaz de traduzir simbolicamente a definição de infinitamente grande explicitando o significado dos vários símbolos. O seu conceito imagem da infinitamente grande parece contemplar uma componente simbólica porque, embora ele tenha alguma dificuldade em estabelecer o significado da definição simbólica como um todo, explicita e dá significado ao papel desempenhado pelos vários símbolos da definição indicando mesmo relações entre eles.

O João também traduz simbolicamente a definição de infinitamente grande, embora sinta alguma dificuldade em encontrar os símbolos adequados:

> Ent. – Então podes começar por aí… Qualquer que seja… o valor …
>
> João – Acho que era L.
>
> Ent. – Pode ser, exactamente.
>
> João – Pertencente a ***R***.
>
> Ent. – Neste caso, como é a tender para mais infinito.
>
> João – Neste caso é $\boldsymbol{R}^+$ …
>
> Ent. – Tu disseste, existe uma ordem…
>
> João – Existe um n … tal que … Não. Como é que é? … [risos]
>
> Ent. – Existe uma ordem, tal que, a partir dessa ordem…
>
> João – A partir dessa ordem todos os números, todos os termos da sucessão são superiores a L. Portanto…
>
> Ent. – Não era bem um n, era um…
>
> João – Um p.
>
> Ent. – Um p, não era?
>
> João – Existe um p.
>
> Ent. – E esse p que tipo de número é?
>
> João – Pertencente a ***N***.
>
> Ent. – Tal que…
>
> João – Tal que… $n>p$ … $u_{n\,\ldots}>L$.

$$\forall_L \in \mathbb{R}^+ \ \exists_p \in \mathbb{N} : n>p \Rightarrow u_n > L$$

Figura 6.24. Representação simbólica de infinitamente grande do João.

Ele escreve a definição da figura 6.24, mas só posteriormente coloca o sinal de implicação. Embora o João precise de algum esforço para encontrar os símbolos adequados para a escrita da definição, ele possui um conceito imagem de infinitamente grande que deixa antever a compreensão dessa mesma definição. Quando lhe foi pedido para explicar o significado de uma sucessão tender para mais infinito ele usou a própria definição:

> João – Quer dizer que… escolhendo uma ordem qualquer… A partir de certa ordem todos os termos estão acima de determinado valor que nós queiramos, por maior que esse valor seja.

O João recorre à definição simbólica para explicitar o seu conceito imagem e quando é colocado perante um caso concreto (gráfico da figura 6.11), consegue encontrar as ordens a partir das quais os termos ultrapassam determinados valores dados, fazendo uma distinção bastante nítida entre os vários parâmetros presentes na definição. O João parece ser capaz de utilizar o conceito de infinitamente grande extraindo significado da definição simbólica, onde o papel desempenhado pelos vários símbolos é explicitado sempre que é necessário recorrer a casos concretos.

3. Conceito de sucessão convergente

Tal como o conceito de infinitamente grande também o de sucessão convergente foi introduzido a partir da definição simbólica. Nesta secção procura-se explicitar a forma como os alunos deram significado a esta mesma definição, caracterizando os seus conceitos imagem. Neste sentido foi pedido aos alunos para explicarem o que significa dizer que uma dada sucessão está a tender para um dado número finito escrevendo em seguida a sua tradução simbólica. A escrita da definição simbólica foi quase sempre estruturada por comparação com a definição de infinitamente grande, que tinham abordado anteriormente, revelando-se de especial interesse para a caracterização do seu conceito imagem a forma como eles deram significado à escrita da última parte da definição, onde os conceitos de vizinhança e módulo têm um papel fundamental. A escrita desta definição é acompanhada por um gráfico que representa os primeiros termos de uma sucessão convergente onde se procura caracterizar o papel desempenhado pelos vários parâmetros presentes. São ainda abordados outros casos concretos como a convergência de uma sucessão constante ou a prova por definição de que a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ tende para 1. A análise das várias situações permite-nos estabelecer três níveis de conceito imagem que ilustram a forma como a definição simbólica adquire significado para os alunos, conceito imagem incipiente, conceito imagem instrumental, e conceito imagem relacional, que se passam a apresentar de seguida mais em pormenor.

3.1. Conceito imagem incipiente

Nesta categoria são incluídos os conceitos imagem dos alunos que revelaram alguma dificuldade em traduzir simbolicamente a sua noção de sucessão convergente. Quase sempre eles conseguem escrever uma parte da definição, por comparação com a de infinitamente grande, mas é na tradução da proximidade entre os termos da sucessão e o limite que têm um desempenho menos favorável. A dificuldade principal reside na tradução dessa distância numa vizinhança ou no módulo da diferença entre os termos e o valor do limite.

É o caso da Carla, para quem o facto de a sucessão tender para um dado a acaba por ser relacionado com a noção de sucessão limitada:

> Carla – [Significa] que ela… Que é limitada. Não. Sim, que é limitada. Não… Se tende para a…

Ela destaca o facto de os termos estarem limitados, sem referir que se estão a aproximar do valor para o qual ela tende. Esta relação só é expressa quando o entrevistador a refere explicitamente:

> Ent. – Se a gente pensar em termos de distâncias o que é que está a acontecer?
>
> Carla – Ahm… Isto…
>
> Ent. – A distância entre…
>
> Carla – Eles os dois.
>
> Ent. – Os termos e o limite.
>
> Carla – Vai ser…
>
> Ent. – É tão pequena quanto a gente quiser.
>
> Carla – Temos que usar um ε.
>
> Ent. – E isso sugere-te alguma coisa, a distância? …
>
> Carla – O ε.

É com base na noção de distância que a Carla associa a letra ε à definição simbólica que tenta escrever. Para tal usa como referência a definição de infinitamente grande mas mostra alguma insegurança na interpretação dos símbolos que representa. O facto de escrever que o ε pertence a $\boldsymbol{R}^+$ (figura 6.25), não parece ser uma representação que a Carla considere muito familiar. Ela refere que as distâncias têm que ser sempre positivas, e acaba por aceitar a forma como fez a representação, continuando a escrita com base na definição anterior.

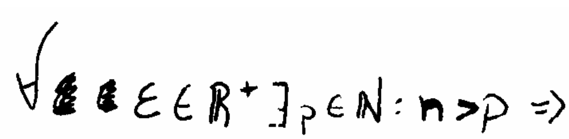


Figura 6.25. Parte inicial da definição da sucessão convergente da Carla.

Inicialmente ela parecia estar a estabelecer uma relação entre o que escreveu e o facto de na definição formal se representar o ε como sendo maior que zero. A conclusão da escrita da definição revelou-se uma tarefa bastante difícil. Numa primeira fase foi-lhe sugerido pelo entrevistador a utilização da noção de vizinhança que ela mostrou não conseguir escrever sozinha, e só depois de escrita lhe permitiu atribuir significado ao ε:

> Carla – O ε era um valor tão pequeno como a gente quisesse… Aaa… Que nós dávamos o valor a ε de forma a que ele fosse pequeno, para que limitássemos um espaço, para ele se ir aproximando de um determinado valor.

A Carla parece estar a referir-se a um intervalo quando considera que o ε serve para "limitar um espaço". No entanto só lhe consegue atribuir esse significado quando lhe foi pedido para representar uma vizinhança de 3 (figura 6.26).

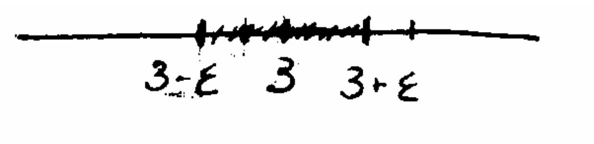


Figura 6.26. Vizinhança de 3 de raio ε (Carla).

Acaba por fazer uma representação das vizinhanças de 3 bastante completa conseguindo explicitar o papel do ε. Quando foi pedido para relacionar a representação da vizinhança que tinha já escrito na definição com a noção de distância para que esta pudesse ser traduzida pelo módulo da distância entre os termos e o *a*, ela não conseguiu estabelecer essa relação, acabando por escrevê-la com apoio do entrevistador (figura 6.27):

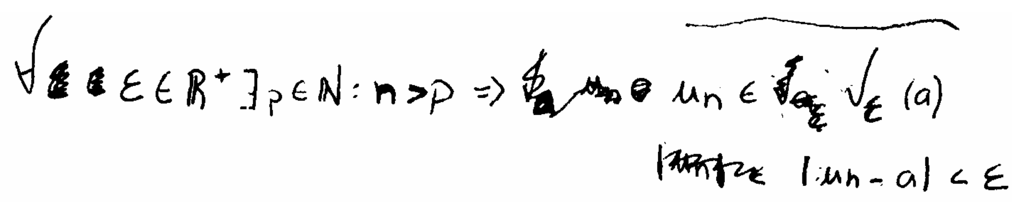


Figura 6.27. Escrita final da definição de sucessão convergente (Carla).

Depois de escrever a parte final, $|u_n\text{-}a|<\varepsilon$, a Carla afirma já se lembrar da definição simbólica. No entanto considera que não a associava à linguagem que tinha sido utilizada anteriormente. Ela parece considerar que a leitura da definição só é possível usando a linguagem formal usada nas aulas, e não consegue compreender o significado de outro tipo de linguagem que aborda a definição de um modo mais intuitivo.

Com o objectivo de caracterizar mais em pormenor o papel desempenhado pelos símbolos foi aplicada a definição simbólica a um caso concreto. Era dada a sucessão de termo geral $\dfrac{3n+2}{n}$ acompanhada do gráfico da figura 6.28, que representava os seus primeiros termos.

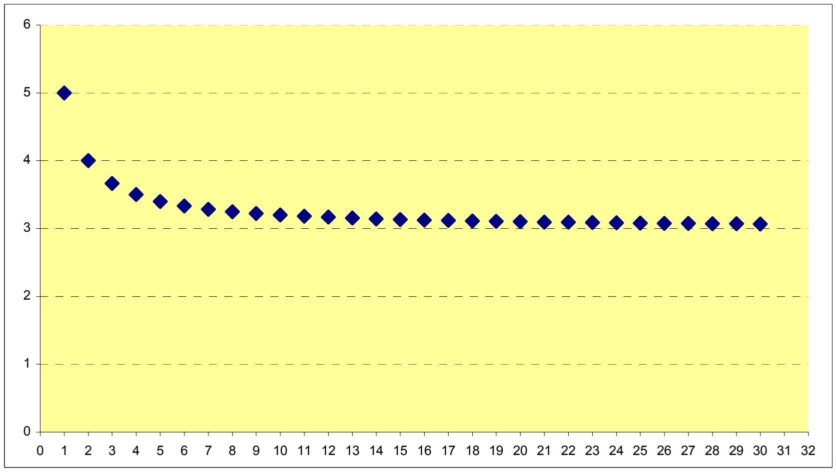


Figura 6.28. Gráfico dos primeiros termos de $u_n = \frac{3n+2}{n}$ mostrado aos alunos (*Situação 3*, 1ª entrevista).

Com base nesta representação era pedido aos alunos para indicarem a ordem a partir da qual os termos estavam numa vizinhança de raio ε do limite, para um dado valor de ε fixo. Nesta situação a Carla mostrou um desempenho satisfatório, colocando a vizinhança dada no eixo vertical centrada no ponto 3 e a partir daí indicando sempre as ordens pretendidas, distinguindo entre os valores de *n* e de *p*, com indicação do menor valor de *p* para o qual a definição fazia sentido no caso concreto. Com base nesta actividade, a Carla estabelece ainda que a partir da ordem indicada todos os termos devem estar dentro da vizinhança. Ela reconhece ainda que o valor do ε deve ser o menor possível para que a sucessão seja convergente.

A Carla mostra assim ser capaz de utilizar a definição formal em situações concretas, dando o significado pretendido aos vários símbolos presentes. Quando confrontada com a sucessão constante u_n=2, ela usa a definição para justificar que ela é convergente:

> Carla – Neste caso, qualquer valor, qualquer ordem… u_n vai ser sempre igual a 2… Por isso para *n* não… vale a pena encontrar uma vizinhança visto que nós temos um número constante. O número vai ser sempre o mesmo por isso não há necessidade de encontrar uma distância porque ela é constante.

Neste caso ela refere a vizinhança sem estar na presença de nenhum gráfico da sucessão, verificando que essa vizinhança pode reduzir-se ao próprio ponto.

O seu conceito imagem de convergência parece ter sido alargado para além da noção de sucessão limitada que tinha utilizado inicialmente, conseguindo agora referir-se à convergência como sendo a propriedade que permite os termos da sucessão aproximarem-se de um ponto ou coincidirem com esse mesmo ponto.

Quanto à utilização da definição formal e Carla também tem um desempenho bastante satisfatório. Quando lhe foi pedido para provar por definição que a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ tendia para 1, após ter escrito a definição para o caso concreto ela justifica que estava à procura de um *p*, para todo o ε. No final explicitou mesmo o *p* em função do ε sem que tenha dado qualquer relevância a esse facto. Ela acabou por dar mais relevância aos procedimentos algébricos do que ao significado dos quantificadores e parâmetros presentes na definição.

A Carla manifesta assim um conceito imagem de sucessão convergente de cariz operacional, isto é, consegue realizar um conjunto de procedimentos e processos que lhe permitem manipular algumas das suas componentes. O sucesso nesta abordagem é conseguido a partir do momento que é feita a tradução simbólica do conceito, tarefa esta que se revelou bastante difícil de concretizar e que só foi conseguida com a ajuda do entrevistador. Desta forma a Carla parece situar-se numa zona de transição entre o nível de conceito imagem incipiente e instrumental, tendo-se no entanto optado pelo primeiro devido ao fraco desempenho manifestado na tradução simbólica do conceito.

Quando pretende explicar o que significa dizer que uma dada sucessão tende para *a*, a Sara refere-se a uma situação em particular em que os termos da sucessão são inferiores a *a*:

> Ent. – O que é que quer dizer que a sucessão está a tender para *a*? Isso significa o quê? …
>
> Sara – [Os termos são] menores que *a*, não?
>
> Ent. – Estão cada vez…
>
> Sara – Mais próximos.

Mesmo assim ela refere o facto de os termos estarem cada vez mais próximos do limite e é com base neste conceito imagem que começa a escrever a definição simbólica. Usa como ponto de partida a definição de infinitamente grande e com base na relação de proximidade que há entre os termos e o limite ela usa a noção de vizinhança à qual associa o ε. Desta forma acaba por escrever a definição simbólica da figura 6.29:

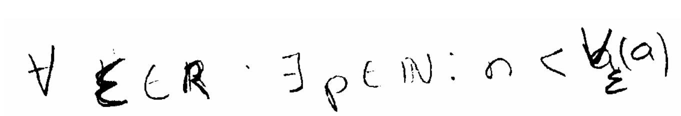


Figura 6.29. Definição de sucessão convergente da Sara.

Ela inclui a noção de vizinhança na definição como majorante dos naturais. No entanto a Sara tem alguma dificuldade em estabelecer essa noção. Ela começa por identificar o papel do ε com o de um número que se pode somar à vizinhança:

Sara – [O ε] eram os valores… por menor que fosse, que somados à vizinhança iam ser um número.

Ent. – Hum, é um número…

Sara – Por mais pequenino que fosse iria estar sempre na vizinhança de a.

O facto de este número poder ser qualquer leva-a a considerar que a vizinhança é um conjunto de pontos que estão na proximidade de um outro dado, mas nunca refere o facto de se tratar de um intervalo. Mesmo quando representa esquematicamente a vizinhança da a sobre uma recta, ela refere que o que vai de $a-\varepsilon$ até o $a+\varepsilon$ é um ponto. Este conceito imagem parece ter sido determinante para a forma como ela escreveu a definição da figura 6.29. Quando lhe é sugerido que a noção de vizinhança também pode ser escrita em termos módulos ela admite que poderia ser $|\varepsilon-a|$ mas não consegue explicitar o significado do que escreveu e só escreve que o módulo de u_n-a é menor que ε com a ajuda do entrevistador. Quando confrontada com a definição formal dada nas aulas ela fez uma leitura que demonstrou alguma falta de compreensão da definição:

Ent. – O que é que isto quer dizer? Para todo o ε existe…

Sara – Uma ordem a partir da qual, tal que $n>p$ … Eu não sei o que isto?

Ent. – É o implica.

Sara – Implica que u_n-a em módulo seja menor que ε .

A Sara fez uma leitura dos símbolos que estavam representados, não conseguindo por vezes identificar o significado matemático de alguns deles.

Para melhor caracterizar o seu conceito imagem de sucessão convergente, com base na definição formal, foi mostrado à Sara o gráfico da figura 6.28 pedindo-se em seguida que indicasse a ordem a partir da qual os termos da sucessão estariam numa vizinhança de raio 1. Inicialmente ela pareceu ter alguma dificuldade em gerir toda a informação que lhe era dada, acabando por considerar que o centro da vizinhança seria o ponto 1. Após o entrevistador lhe ter chamado a atenção que seria a vizinhança do ponto 3 ela estabeleceu a vizinhança pretendida e responder satisfatoriamente à questão colocada. A fixação de outros valores para ε não lhe causou qualquer dificuldade, posteriormente, conseguindo sempre indicar a ordem que satisfazia cada um dos casos concretos e concluindo mesmo que para se verificar a convergência todos os termos a partir daquela ordem têm que estar dentro da vizinhança.

A Sara revela assim conseguir utilizar a definição quando aplicada a situações concretas. No entanto quando se trata de sucessões que não estão de acordo com o conceito imagem manifestado anteriormente, como é o caso da sucessão constante 2, ela considera que a mesma não será convergente, pois "não se está a aproximar", como era o caso da anterior. Só quando, por sugestão do entrevistador, aplica a definição a esta mesma sucessão ela considera que é convergente, não produzindo no entanto uma explicação com base nos parâmetros da definição. O facto de ter verificado que o ε era maior que zero parecer ser suficiente para justificar a convergência.

Também quando lhe foi pedido para provar por definição que a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ tendia para 1, após ter escrito a definição e expresso o ε em função do n não consegue explicitar o que está a pretender provar. Depois de ter escrito o n em função do ε, por sugestão do entrevistador com vista a encontrar uma ordem, ela considera que o problema está resolvido. A procura da ordem p e a sua escrita em função de ε parece não ser relevante no âmbito da definição. A Sara tem assim um desempenho satisfatório quando utiliza a definição formal aplicada a um caso concreto, onde as várias componentes podem ser analisadas graficamente. No entanto quando se trata de utilizar o conceito de um modo mais formal envolvendo a escrita simbólica esse desempenho baixa consideravelmente denotando uma falta de coordenação dos vários processos sintetizados pela definição.

Para o Pedro a noção de sucessão convergente é associada ao modo como os termos da sucessão se aproximam de um dado número:

> Pedro – Então vai, ela vai tender sempre para um certo número… Vai tender para o número… Vai ser assim… Assim… [está a apresentar graficamente] Pronto assim…

Ele recorre à representação gráfica para explicitar o seu conceito imagem (figura 6.30), onde os termos pertencem a sucessões monótonas crescentes ou decrescentes em sentido estrito.

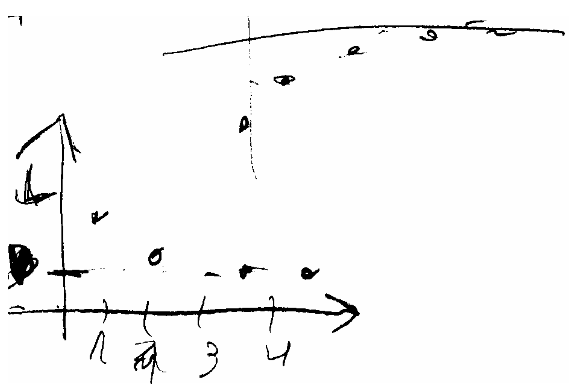


Figura 6.30. Exemplos gráficos de sucessões convergentes do Pedro.

No caso de a sucessão ser constante ele considera que a mesma "não é convergente nem divergente". É o que sucede com a sucessão de termo geral 2 que ele considera que não converge:

> Pedro – Porque ela não tem nenhum valor nem acima nem abaixo para… ir ter ao 2. Ela vai ser sempre 2…

Ele só admite que as sucessões são convergentes quando os termos se estão a aproximar de um dado valor, mas sem nunca o atingir. Este conceito imagem está de acordo com as representações gráficas que utilizou na sua explicação do conceito (figura 6.30).

É com base nesta concepção que o Pedro vai tentar escrever a definição simbólica. Ele usa como guião a definição de infinitamente grande escrita anteriormente embora manifeste algumas dificuldades em interpretar os símbolos que representa:

> Pedro – Então qualquer que seja… aaa… o L pertencente a $\boldsymbol{R}^+$… Existe pelo menos um p…
>
> Ent. – Vais na mesma à procura de uma ordem, não é?
>
> Pedro – Exactamente. Pertencente a $\boldsymbol{N}$… Tal que o n… vai ser menor que p… Exactamente. O n vai ser menor que p. Exactamente, o n vai ser menor que p…
>
> Ent. – Repara, estás a definir a ordem… Portanto, existe uma ordem a partir da qual, não é?
>
> Pedro – Sim, exactamente. Tal que existe uma ordem n a partir da qual…
>
> Ent. – E aí a ordem a partir da qual… Estavas a querer escrever… esta parte, não é?
>
> Pedro – Não é isto que está aqui?… n menor que p… n menor que p. O p vai ser aq… n…… Isto vai ter que existir um… Não, não vai ter. Isto está mal.

Mesmo perante a definição anterior ele não consegue traduzir simbolicamente a linguagem que está a utilizar, considerando que a ordem n será menor que a p. Esta abordagem parece estar relacionada com o facto de ele estar a considerar que neste caso a definição deve conter algo que contradiga a anterior. Como essa contradição não foi aplicada às ordens ele acabou por a aplicar na parte final da definição:

> Pedro – Estava a confundir. O que implica que agora é que vai ser ao contrário. Que u_n… vai ser.
>
> Ent. – Podes pôr mesmo por baixo.
>
> Pedro – que u_n vai ser menor que L… É, é isto…

Com esta representação ele considera que há algo que não foi explicado em termos da convergência tomando como exemplo o gráfico inferior da figura 6.30:

> Pedro – Mas há aqui um problema. Tinha que discutir este valor aqui. [Indica no gráfico da figura 6.30]
>
> Ent. – Tu neste caso estás a dizer que ela está a tender para… para este valor não é?
>
> Pedro – Exactamente.
>
> Ent. – Tu chamaste-lhe aí 1, não era?
>
> Pedro – Sim. 1, pronto. Põe-se aqui um B…
>
> Ent. – Ou para usar a nomenclatura, aqui chama-lhe já o a.
>
> Pedro – É o a.
>
> Ent. – Pronto. Agora está a tender aí para o a.
>
> Pedro – Exactamente. Agora, só que isto aqui não está bem, não está aqui o a.
>
> (…)
>
> Pedro – Existe um n… Pomos u_n… Não podemos por aqui… e [escreve o símbolo $\wedge$] u_n maior que a? …

Com base no gráfico ele repara que a definição não contempla o valor do limite para o qual ela tende. Neste sentido ele parece querer enquadrar os termos da sucessão e para isso sugere a escrita da condição u_n>a, conduzindo à definição simbólica da figura 6.31.

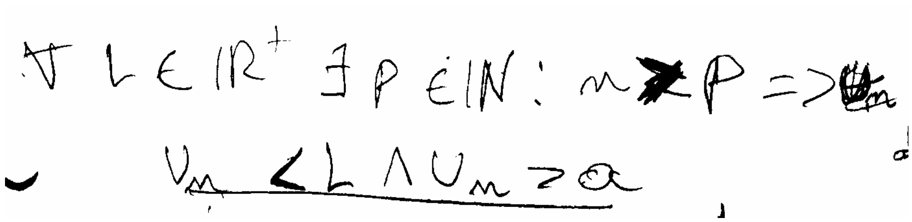


Figura 6.31. Definição de sucessão convergente do Pedro.

O Pedro não consegue com base no seu conceito imagem reformular a definição e, quando lhe é sugerido pelo entrevistador a noção de vizinhança, ele tenta representá-la simbolicamente mas não lhe atribui o significado pretendido para o caso concreto. Da mesma forma a noção de distância e a sua representação através do módulo não lhe pareceu muito familiar, mostrando sempre muitas dúvidas na forma como ela pode representar a convergência da sucessão. Ao ser confrontado com a definição formal dada nas aulas, pelo facto de na definição aparecer o parâmetro ε, ele parece recordar-se da definição afirmando mesmo que já tinha dado esta definição no ensino secundário.

Com o objectivo de caracterizar de uma forma mais concisa a sua compreensão da definição formal foi-lhe proposto concretizar a definição numa sucessão específica (gráfico da figura 6.28). Neste sentido foi pedido ao Pedro para indicar a ordem a partir da qual os termos da sucessão estavam numa vizinhança de 3 de raio 1. Ele identificou a vizinhança, representando-a mesmo no gráfico, e a partir daí indicou a ordem a partir da qual a definição era verificada. A atribuição de vários valores a ε foi sempre acompanhada pela indicação das ordens respectivas, concluindo mesmo que o ε deve ser o mais pequeno possível e que a partir da ordem considerada todos os termos têm que estar dentro da vizinhança. O Pedro revela assim conseguir fazer uma abordagem da definição simbólica baseada num gráfico e com a utilização de valores concretos para os parâmetros, mas a mesma deixa de fazer sentido quando se pretende ter uma visão de conjunto. É o que acontece quando se pretende provar por definição que a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ tende para 1. O Pedro aplica a definição no caso concreto, embora tenha alguma dificuldade em identificar os quantificadores, pois quando refere o quantificador universal escreve o existencial. Quando lhe é pedido para especificar o que é que precisa de encontrar para verificar a definição, afirma que vai procurar uma ordem:

> Pedro – Eu iria à procura do… Do *n*… Do *n*? Sim, para decidirmos a partir de que ordem.

Ent. – Tu andas à procura de uma ordem.

Pedro – De uma ordem.

Ent. – De uma ordem *p*, que se há-de chamar *p*.

Pedro – Sim.

Ent. – Como é que tu vais fazer para lá chegar?

Pedro – n+3 sobre n menos 1.

Ent. – Exacto.

Pedro – Agora isto vai ser igu… isto vai ser menor que ε. Mas acho que este aqui não entra…

Ent. – Repara, tu dizes qualquer que seja o ε, isto tem que acontecer não é?

Pedro – Isto tem que acontecer… Então nós podíamos dar um valor qualquer a ε, que daria sempre…

Embora o Pedro pareça estar a seguir o procedimento correcto, tenta concretizar o ε, não tendo em atenção o facto de este poder ser qualquer. Parece que tem dificuldades em aceitar a inequação com mais do que uma variável. De seguida resolve a inequação, desembaraçando-se dos módulos mas deixando o ε em função do n. Nesta fase ele tenta estabelecer uma relação entre o n e o p admitindo que o p vai ser igual a n-1. Esta relação parece estar ligada à interpretação que ele faz da definição quando impõe a condição $n>p$. Como esta abordagem não é apoiada pelo entrevistador, ele tenta relacionar o ε com o p dando valores a n para que o ε possa ser um natural. Só consegue exprimir o n em função do ε por sugestão do entrevistador, assim como definir o p que estava à procura. Para além das dificuldades manifestadas com alguns procedimentos algébricos, o Pedro parece não conseguir explicitar o significado da definição como um todo. Ele centra-se da execução de determinados procedimentos e não consegue abstrair-se destes para analisar o papel dos parâmetros que estão presentes na definição. A atribuição de significado aos quantificadores parece ser a sua principal dificuldade para a abstracção da definição simbólica.

No caso da Madalena a noção de sucessão convergente é explicada com base no comportamento dos termos da sucessão que se vão aproximando do limite por valores inferiores:

Madalena – Quando tende para um valor *a*… os termos da sucessão vão ser sempre inferiores a *a*. Vão sempre tomando valores próximos de *a* mas que nunca, sempre inferiores. … Sim… Não, não é preciso ser inferiores, vão sempre aproximando de *a* mas nunca chegam a ser *a*…

Ela admite que os termos da sucessão também se podem aproximar por valores superiores, mas o seu conceito imagem assenta na noção de proximidade entre os termos e o limite. Já no caso da sucessão constante, de termo geral 2, ela considera que a mesma não converge por "já ser sempre 2". Embora admita que o limite da sucessão é 2 considera que ela não é convergente por não se estar a aproximar do limite. É com base neste conceito imagem que ela procura dar sentido à definição simbólica. Começa por usar a definição de infinitamente grande como exemplo, mas ainda antes de a escrever refere-se à noção de vizinhança:

> Madalena – Então quando nós, qualquer que seja o valor que nós… Aaa… Um valor, nós queremos um valor… Ele tem que estar a aproximar-se de *L*, ou seja, há-de estar numa vizinhança de *L*. Acho que até era isso que estava na…
>
> Ent. – Sim, sim.
>
> Madalena – Nós demos primeiro os conceitos de vizinhança… Noções topológicas e não sei que… E tinha que estar sempre numa vizinhança de *L*…
>
> Ent. – E como é que a gente pode escrever isso então formalmente?
>
> Madalena – Por muito pequena que fosse a vizinhança…

Embora esteja a tentar utilizar como exemplo a definição anterior, a noção de vizinhança parece ganhar mais força acabando por abandonar o parâmetro L e passando a referir-se ao ε como sendo o raio da vizinhança. Com base neste pressuposto ela começou a escrever a definição simbólica não conseguindo no entanto explicitar o significado da noção de vizinhança que tinha referido anteriormente. Só quando o entrevistador lhe sugeriu que também se podia usar a noção de distância entre os termos e o limite é que ela se recordou que poderia ser um módulo. Embora afirme que os termos se vão aproximando do valor do limite não consegue traduzir isso simbolicamente sendo o entrevistador que lhe sugere que se trata do módulo da diferença entre u_n e a.

Com o objectivo de operacionalizar a definição foi apresentado à Madalena um caso concreto (gráfico da figura 6.28), sendo-lhe pedido que indicasse a ordem a partir da qual os termos estariam numa vizinhança de 3 de raio 1. Ela começou por afirmar que o ε pode ser qualquer, não percebendo inicialmente que o mesmo estava a ser dado, mas acabou por admitir que era possível fazer a sua concretização. Começou por fazer uma abordagem algébrica da situação indicando a resolução da inequação $|u_n\text{-}3|<\varepsilon$ a qual trouxe alguns problemas de ordem processual, nomeadamente na resolução do módulo. Após ter chegado à conclusão que deveria ter $n>2$, foi-lhe pedido para utilizar o gráfico como forma de verificar se o resultado fazia sentido. É nesta altura que ela explica o significado do ε no gráfico como raio da vizinhança:

> Madalena – Então mas isso… Isso quer dizer que… que aqui é que é o ε…Este raio 1 é aqui?
>
> Ent. – É a vizinhança de?
>
> Madalena – Do três.

Ela desenha a vizinhança de 3 de raio 1 e a partir daí dá significado à ordem que tinha encontrado algebricamente. A partir desta situação ela é capaz de indicar no gráfico outras ordens para determinados valores de ε dados, mostrando um desempenho satisfatório na operacionalização da definição simbólica. O mesmo não acontece quando lhe é pedido para utilizar a definição numa situação concreta mas mais genérica. Ao tentar provar por definição que o limite da sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ é 1 ela escreve a definição para a questão em causa mas depois afirma que não sabe o que é preciso fazer:

> Ent. – [Acabou de escrever a definição] Portanto e agora o que é que tens que fazer?
>
> Madalena – Agora tinha que… … Não sei [risos].
>
> Ent. – O que é que tu andas à procura?… O que é que tu tens e o que é que andas à procura?
>
> Madalena – Pois mas aqui este será qualquer, qualquer ε.
>
> Ent. – Qualquer que seja o ε, exacto.
>
> Madalena – Por isso não posso substi[tuir]… Ir à procura do *n* sem ter o ε …

Como na situação anterior o ε tinha sido concretizado ela pretendia que o mesmo acontecesse nesta situação para poder ter um valor de *n* como indicador da ordem. Embora ela acabe por resolver a inequação em ordem a *n* continua a pretender substituir o ε para poder encontrar a ordem. A relação entre o *n* e o *p* acaba por ser sugerida pelo entrevistador e ela continua a não dar nenhum destaque especial ao facto de ter expressado o *n* em função do ε. A definição simbólica parece ter sido compreendida apenas em situações concretas onde é possível fixar o valor de ε, mas quando se trata de lhe atribuir uma maior generalização a Madalena não consegue abstrair o papel de alguns parâmetros.

Para a Susana a noção de sucessão convergente é associada ao modo como os termos se aproximam do limite:

> Susana – Então, por exemplo a outra [$\frac{1}{x}$, $x \in \boldsymbol{N}$] tendia para 0.
>
> Ent. – Então e isso significa o quê? …
>
> Susana – Por maior que seja um natural ela tende sempre para aquele *a*.

Ela começa por recorrer ao caso concreto que tinha representado anteriormente para justificar a sua noção, generalizando depois para uma sucessão qualquer. Embora se refira à sucessão de um modo geral, sem referir os seus termos, acaba por particularizar o domínio, pelo facto de ele estar a tender para mais infinito. O seu conceito imagem é dominado pelo facto de os termos da sucessão se estarem a aproximar do limite, pois quando se trata de uma sucessão constante u_n=2, ela considera que a mesma já não converge:

> Susana – Acho que não.
>
> Ent. – Não?
>
> Susana – Não sei. [risos] Porque eles já pertencem, por isso não tende nada para lá … Eles já são.
>
> Ent. – Portanto, para ela ser convergente, tu achas que ela tem que estar a aproximar-se de…

Susana – Sim. Não toma esse valor …

Pelo facto de os termos serem sempre iguais, a Susana considera que a sucessão não se está a aproximar de 2 e por esse motivo não será convergente. É com base neste conceito imagem que ela tenta escrever a definição simbólica. Para tal usa como referência da definição de infinitamente grande, mas considera que neste caso já pode usar o ε, símbolo que já tinha usado na definição de infinitamente grande. Ela parece estar a associar este ε ao facto de os termos da sucessão estarem cada vez mais próximos do limite. Embora esteja a utilizar como modelo a definição anterior manifesta algumas dificuldades em justificar a sua escrita e não consegue fazer a tradução simbólica da segunda parte da implicação, mesmo depois de o entrevistador se ter referido às noções de vizinhança e de distância. A Susana acaba por referir que pode usar o módulo e quando o entrevistador lhe pede para exprimir a distância entre os termos da sucessão e o limite ela escreve $|u_n|>a$, que é depois corrigido com a ajuda deste para $|u_n-a|<\varepsilon$ (figura 6.32).

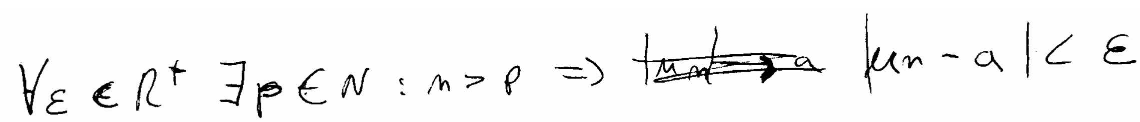


Figura 6.32. Definição de sucessão convergente da Susana.

A Susana revela algumas dificuldades em manipular a definição, pelo que lhe foi pedido para especificar algumas das suas componentes aplicadas a um caso concreto (o gráfico da figura 6.28). Na tentativa de especificar o papel de cada um dos parâmetros foi-lhe pedido para indicar a ordem a partir da qual os termos da sucessão estariam numa vizinhança de 3 de raio 1. Ela optou por fazer uma abordagem algébrica, resolvendo a inequação que conduziu à solução $n>2$. Perante este resultado a Susana não conseguiu atribuir-lhe significado no gráfico, e só quando lhe foi pedido para traduzir a vizinhança em causa é que ela localizou o limite e a partir daí desenhou essa vizinhança. Este processo deixou-a bastante surpreendida pela forma como era possível chegar à mesma conclusão graficamente. Com base noutros valores de ε ela conseguiu operacionalizar a definição, fazendo mesmo a distinção entre os papéis do n e do p presentes na definição. Esta capacidade de operar com a definição parece reduzir-se apenas à abordagem gráfica, não tendo correspondência quando se pretende aplicar a definição de um modo mais genérico para provar que o limite da sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ é igual a 1. Nesta situação a Susana escreve a definição aplicada à sucessão (figura 6.33), mas não consegue explicitar o seu significado.

$$\forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists p \in N : n > p \Rightarrow \left| \frac{n+3}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

Figura 6.33. Definição aplicada à sucessão $\frac{n+3}{n}$ (Susana).

Quando questionada sobre o que era preciso provar, ela referiu que iria resolver a inequação presente no segundo membro da implicação:

> Susana – Então, desenvolvo isto [aponta o segundo membro da implicação].
>
> Ent. – Desenvolves isso. Sim … …
>
> Susana – Depois dá 0 e dá para qualquer …
>
> Ent. – Não sei se dá zero, faz lá as contas … …
>
> Susana – Dá $\frac{3}{n}$ … [calcula o limite] Pois dá.

Ao simplificar a expressão que está dentro do módulo a Susana obtém $|\frac{3}{n}| < \varepsilon$ e calcula o limite de $\frac{3}{n}$ concluindo que dá zero e portanto estaria provado o limite, pois já tinha conseguido obter uma proposição verdadeira. Posteriormente, com base na leitura da definição feita pelo entrevistador ela consegue admitir que anda à procura de um p, mas não consegue indicar a forma de o obter. Ela exprime o n em função do ε mas não relaciona a representação com o p que procura. Só por sugestão do entrevistador é que ela escreve o p em função do ε mas mesmo assim não consegue concluir que tinha provado a afirmação expressa na definição. Tal facto parece dever-se à dificuldade em abstrair o papel desempenhado pelos quantificadores, pois quando se tratou de fixar o papel do ε, na situação referida anteriormente, a Susana teve um desempenho satisfatório.

3.2. Conceito imagem instrumental

Os alunos incluídos neste nível também revelaram algumas dificuldades na tradução simbólica da sua noção de sucessão convergente. Tal como os do nível anterior, utilizam a definição de infinitamente grande como modelo, introduzindo algumas alterações importantes como a tradução simbólica da relação de proximidade entre os termos da sucessão e o valor do limite. Esta representação é quase sempre conseguida com base nas noções de vizinhança e de distância permitindo uma escrita da definição simbólica bastante próxima da definição formal dada nas aulas. O facto de reproduzirem a definição não significa que os alunos tenham desenvolvido a capacidade de a aplicar com um maior ou menor grau de generalidade, dando significado apenas a algumas das suas componentes.

É o caso de Fernando que explica a sua noção de convergência com base num exemplo concreto que já tinha usado anteriormente, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$. Ele faz um esquema (figura 6.34), para expressar a forma como os termos tendem para zero, que é o limite neste caso.

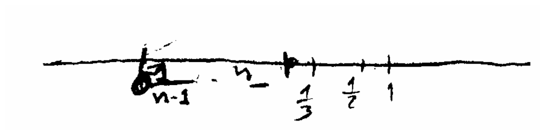


Figura 6.34. Esquema explicativo da convergência da sucessão $\frac{1}{n}$ do Fernando.

É com base neste esquema que ele estabelece que a distância entre os termos e o limite é cada vez menor, referindo que se trata de uma vizinhança:

> Ent. – O que é que está a acontecer à distância entre as imagens e o 0?
>
> Fernando – Estão a diminuir.
>
> Ent. – Está a diminuir.
>
> Fernando – É a vizinhança…
>
> Ent. – Podes usar aqui a noção de vizinhança, não é?
>
> Fernando – É o módulo de u_n… menos… o a. Isto vai ser menor que… Que um valor.

Ele refere-se à vizinhança que traduz em termos de distância no caso geral. O valor que referiu como majorante do módulo foi designado por ε, pelo que quando tentou usar a definição de infinitamente grande para estabelecer a de convergência procurou traduzir essa diferença. Começou por considerar que existe um ε, mas por sugestão do entrevistador acabou por aplicar o quantificador existencial ao parâmetro *p*. Ao estabelecer a condição *n*>*p* admitiu tratar-se de uma sucessão crescente, não conseguindo explicitar o significado da definição como um todo. Pelo facto de a mesma ter sido escrita por partes acabou por ficar com o aspecto que se mostra na figura 6.35.

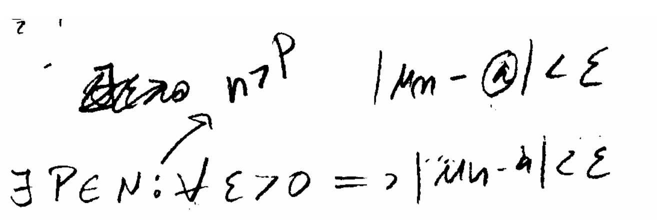


Figura 6.35. Definição simbólica da sucessão a tender para *a* do Fernando.

Com o objectivo de clarificar o papel desempenhado pelos vários parâmetros presentes na definição foi mostrado o gráfico da figura 6.28 e pedia-se a ordem a partir da qual os termos da sucessão estariam numa vizinhança do limite de raio 1. O Fernando começa por procurar no eixo horizontal o valor 1 que seria a vizinhança. Quando lhe foi dito que a vizinhança também podia ter de raio outro valor menor que a unidade, ele admitiu estar a procurar no eixo errado e tentou encontrar o mesmo valor no eixo vertical. Quando questionado sobre a forma como poderia representar a vizinhança ele parece considerar que esta se resume a um ponto argumentando que os valores de ε estariam distribuídos ao longo do eixo vertical na proximidade do limite. Foi preciso recorrer à representação esquemática da vizinhança sobre a recta real para que o Fernando conseguisse entendê-la como sendo um intervalo real. Depois desta abordagem ele desenhou a vizinhança pretendida no gráfico dado. No entanto continuou a não ser capaz de arranjar um valor para p que satisfizesse a definição. Por outro lado o facto de a vizinhança se situar na parte negativa do eixo vertical também se revelou bastante problemático, pois, como ele considera que o ε não pode ser negativo e como associa a vizinhança ao parâmetro, tem alguma dificuldade em compreender este tipo de representação.

O Fernando mostrou assim não conseguir manipular a definição de sucessão convergente, mesmo quando os parâmetros foram concretizados no gráfico. Também no caso geral ele mostrou um domínio bastante fraco da definição. Quando lhe foi pedido para provar por definição que a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ tendia para 1, procurou calcular o limite usando as regras dos limites "Isto é fácil. Vejo o grau do denominador e o grau do numerador". Quando o entrevistador lhe comunicou que teria de usar a definição ele escreveu-a para o caso concreto (figura 6.36) perguntando de seguida se ainda seria preciso fazer mais alguma coisa.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n+3}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

Figura 6.36. Aplicação da definição de sucessão convergente à sucessão $\frac{n+3}{n}$ (Fernando).

No passo seguinte propôs concretizar o n mas abandonou esta ideia por considerar que não provaria para todos os casos. Com a ajuda do entrevistador resolveu a inequação resultante da definição (em baixo na figura 6.36) e logo que simplificou a expressão dentro do módulo procurou aplicar-lhe a função "parte inteira de" que parece recordar-se como fazendo parte deste conjunto de procedimentos. Só conseguiu exprimir o n em função do ε e daí encontrar uma relação de dependência entre p e ε com a ajuda do entrevistador. Desta forma o

Fernando parece não conseguir manipular a definição de sucessão convergente, nem mesmo em situações em que é possível concretizar os parâmetros. Por outro lado o conceito imagem que manifestou inicialmente continuou a prevalecer quando foi confrontado com a sucessão constante u_n=2. Ele admitiu que ela não seria convergente por não se estar "a aproximar de 2". Para ser convergente tinha que "ser algo a crescer ou decrescer que tendesse para um valor único".

Para o José a escrita da definição simbólica de sucessão convergente para *a* também passa por um processo de construção. Ele começa por utilizar como modelo a definição de infinitamente grande onde afecta o *a* ao quantificador universal:

> José – Então há-de ser tipo… Hum… Para todo o *a*… pertencente a ***R***… Não… ***R***…aaa… Pois, $\boldsymbol{R}^+$. O *a*, pois não minto. Aaaa…
>
> Ent. – Há aqui uma parte que é parecida não é?
>
> José – Pois, existe. Depois é existe uma ordem *p*, Isso é quase sempre.
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> José – A partir da qual…
>
> Ent. – A ordem pertence a quê? … Pertencente…
>
> José – Aos naturais.
>
> Ent. – Tal que… A partir dessa ordem o que é que se tem? … Agora aqui é: em vez de ser a sucessão a tender para mais infinito, é a tender para…
>
> José – Há-de ser para *a.*
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> José – Então é a equação … u_n menos *a*, não é? Não.
>
> Ent. – Sim.
>
> José – Já não me lembro disto… Então vai ser menor… Qualquer coisa.
>
> Ent. – Era menor que…?
>
> José – Era, penso eu que o ε .
>
> Ent. – Então põe lá o ε . Então onde é que falta o ε ?
>
> José – Para aqui algures.

O José consegue escrever quase toda a definição com base na anterior e na sua memória visual, e quando foi necessário recorrer à noção de convergência ele conseguiu exprimi-la em termos do módulo da distância entre os termos e o limite. Esta condição, que ele refere como sendo uma equação, parece estar bastante bem definida no seu conceito imagem, pois ele não precisou de evocar qualquer processo que relacionasse os termos da sucessão e o seu limite para representar o módulo, e é a partir desta representação que ele vai utilizar a letra ε tal como na definição formal usada nas aulas. O facto de usar este parâmetro permite-lhe corrigir a parte inicial da definição substituindo o *a* pelo ε no quantificador universal obtendo assim uma definição simbólica formalmente correcta. Para além desta representação ele relaciona ainda a inequação anterior com a noção de vizinhança.

Para caracterizar o papel desempenhado por cada um dos parâmetros presentes na definição foi utilizado o gráfico da figura 6.28. O José identificou correctamente a vizinhança de 3 de raio 1, colocando-a no gráfico, e a partir daí indicou a ordem a partir da qual os termos estavam dentro da vizinhança. Este processo pareceu não lhe causar qualquer embaraço, concluindo mesmo que a partir da ordem considerada todos os termos teriam que estar dentro da vizinhança. O José parece assim conseguir aplicar a definição em situações particulares dando significado aos parâmetros envolvidos. Também quando foi confrontado com a sucessão constante de termo geral 2, ele teve inicialmente algumas dúvidas sobre a sua convergência, mas acabou por concluir que ela era convergente com base na definição simbólica. Aplicou mentalmente a definição à sucessão concluindo que a distância entre os termos e o limite era nula, logo ela teria que ser convergente. Este recurso à definição foi necessário pois o seu conceito imagem não parecia contemplar este caso. O José apresentava até aqui um conceito imagem de sucessão convergente que apenas contemplava aquelas que se estavam a aproximar do limite mas que nunca o atingiam. Esta noção era suportada pela noção de vizinhança que para ele significava que por mais pequena que fosse, centrada no limite, conteria sempre pelo menos um termo. A definição, em conjunto com a identificação da sucessão constante como sendo convergente, veio ampliar o seu conceito imagem que passou a comportar também este tipo de sucessões como sendo convergentes.

Embora o José tenha mostrado um desempenho satisfatório ao aplicar a definição, o mesmo parece não acontecer quando se trata de a usar para provar a convergência de uma sucessão. Quando lhe foi pedido para provar por definição que a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ era convergente para 1 ele não escreveu a definição para este caso concreto, representando apenas a inequação final sem ter utilizado o módulo. Depois de colocar o módulo na expressão ele questionou se não poderia fazer o ε igual a zero. Quando o entrevistador lhe explicou o papel do ε na definição, comentou que teria então que resolver a inequação, mas acabou por não efectuar os cálculos pois não conseguiu desembaraçar-se da função módulo. Após ter simplificado a inequação, com ε em função de *n*, continua sem saber o que lhe é pedido pela definição. Depois de o entrevistador ter feito a leitura da definição, em voz alta e de forma pausada, ele conseguiu concluir que procurava uma ordem, sugerindo exprimir o *n* em função do ε. Este tipo de cálculos voltaram a inibi-lo de continuar a resolução do problema. Quando finalmente conseguiu escrever a inequação com *n* em função de ε recordou-se que poderia usar a função “parte inteira de” para poder encontrar o

p. O desempenho do José na aplicação da definição parece reduzir-se à realização de alguns procedimentos de cálculo que não consegue executar com sucesso. Mostra assim não ter uma visão de conjunto da definição, onde precisa abstrair o papel desempenhado pelos diferentes parâmetros.

Para a Maria a tradução simbólica do conceito de sucessão convergente revelou-se uma tarefa bastante árdua. Ela começa por estabelecer um paralelo entre esta e a definição de infinitamente grande afirmando que basta substituir o L por a. Quando o entrevistador tenta clarificar esse paralelo entre as duas definições através do comportamento dos seus termos, a Maria conclui que os termos da sucessão se estão a aproximar cada vez mais do valor a mas não consegue descrever simbolicamente essa relação. Depois de lhe ter sido sugerida a noção de distância como módulo para traduzir a relação anterior, ela lembra-se da definição que aparentemente terá sido memorizada:

> Maria – Ah! Isto é aquele que existe um δ maior que 0 tal que… Pois isso eu sabia escrever. [risos] Estudei isso para o teste [risos]. δ maior que 0.
>
> Ent. – E depois esqueceste, foi?
>
> Maria – Ah, mas é que eu sei, aí é que está o mal. Qualquer que seja o ε maior que 0, existe um δ. Não, como é que é?
>
> Ent. – O que é que tem que existir?
>
> Maria – Existe um delt[a]. Qualquer que seja o ε maior que 0.
>
> Ent. – Escreve lá. Qualquer que seja…
>
> Maria – Qualquer que seja o δ maior que 0, existe um… ε, também acho que é maior que 0. Agora não sei, como é que é? Eu sei, eu sei esta definição [risos]. Eu sei, agora é que não estava a ver qual era a definição de limite. Eu sei…
>
> Ent. – Vê lá se esta [definição de infinitamente grande] te ajuda nalguma coisa?
>
> Maria – Pois, eu estava a pensar nisso… O ε é que é pertencente a ***N***… Depois esta tem um módulo de u_n-a.
>
> Ent. – Hum. Podes escrever já o módulo.
>
> Maria – Aqui à frente… … Menor que δ.

Embora tenha recorrido à definição de infinitamente grande, acaba por se centrar nos parâmetros δ e ε que julga fazerem parte da definição pretendida mas não consegue explicitar o seu significado. Ela escreve primeiro a parte final da definição e só depois com a ajuda do entrevistador completa a parte central, obtendo como definição simbólica a representação da figura 6.37.

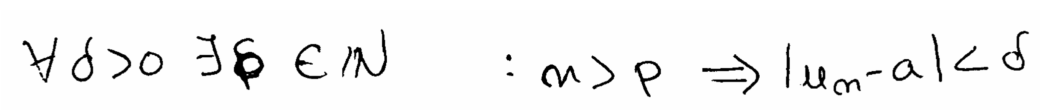


Figura 6.37. Definição de sucessão convergente da Maria.

O conceito imagem da definição simbólica da Maria parece ser condicionado pelos parâmetros ε e δ. Pelo facto de ter considerado que existiria um ε não conseguiu atribuir-lhe a função de ordem desempenhada pelo p tendo-o escrito posteriormente com a ajuda do entrevistador.

Com o objectivo de caracterizar o papel dos vários parâmetros presentes na definição procurou aplicar-se esta a um caso concreto, particularizando alguns desses parâmetros. Assim, a partir do gráfico da figura 6.28, a Maria não consegue indicar a ordem a partir da qual os termos estariam numa vizinhança de 3 de raio 1, referindo que esta questão não faz sentido, e quando se pretende que ela explicite o seu conceito imagem de vizinhança, este revela-se bastante insuficiente:

> Maria – Eu das vizinhanças só me lembro dos bonequinhos.
>
> Ent. – Ah! Mas o bonequinho dá muito jeito…
>
> Maria – Pois dá, é assim que eu consigo ver se… as vizinhanças.
>
> Ent. – Como é que tu representas uma vizinhança de um ponto qualquer? Com os bonequinhos?
>
> Maria – Hum, a professora faz uma cruzinha, põe aquilo entre parêntesis e é aquilo que anda ali à volta [risos]. [Figura 6.38].

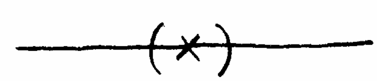


Figura 6.38. Esquema ilustrativo de vizinhança de um ponto (Maria).

Com base nesta representação, a Maria não consegue identificar a vizinhança como um intervalo real, considerando apenas a existência de pontos ali perto. Quando se pretende concretizar a situação anterior ela desenha a vizinhança no gráfico mas ao tentar encontrar a ordem p, conclui que esta só pode ser 2 por corresponder ao extremo da vizinhança:

> Maria – O p, só se for aquele… O 2. É o único que está no 1, os outros estão todos no meio.

Como a imagem do 2 é 4 e se situa no extremo superior do intervalo definido pela vizinhança, a Maria considera-o como o possível p, pois as outras imagens no interior da vizinhança deixavam de ser inteiras. A Maria revela assim não conseguir explicitar o significado da definição mesmo em situações em que é possível concretizar os parâmetros desta. Já no que respeita ao seu conceito imagem de sucessão convergente ela refere-se essencialmente a sucessões cujos termos se estão a aproximar do limite. Quando confrontada com uma sucessão constante, de termo geral igual a 2, ela acha que o seu limite vai ser 2 "tenda [a sucessão] para onde tender". Por sugestão do entrevistador aplica a definição a este caso concreto, embora com um desempenho bastante fraco, e conclui que a mesma é convergente.

Tal conclusão causou-lhe alguma surpresa embora pareça ter conseguido ampliar o seu conceito imagem de sucessão convergente.

O fraco desempenho mostrado na utilização da definição simbólica também continua a reflectir-se quando a mesma é aplicada a um caso concreto. Assim, quando lhe é pedido para provar por definição que a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ tende para 1 ela escreve a definição por comparação com a definição genérica abordada antes e com a ajuda do entrevistador conclui que procura um *p*. Só consegue resolver a inequação com ajuda, sendo o módulo o principal obstáculo para a sua resolução e quando se consegue desembaraçar do módulo sugere que deve resolver a inequação resultante em ordem a *n*. Embora tenha conseguido chegar a esta expressão ela não lhe confere qualquer significado em termos da definição, sendo o entrevistador a sugerir-lhe que a relacione com o *p* que está a tentar definir. Acaba por igualar o segundo membro da inequação a *p* e como este tem que ser natural tenta impor condições aos possíveis valores de ε. Desta forma a Maria parece não compreender a definição simbólica. Ela consegue apenas realizar alguns procedimentos de que se recorda, acabando alguns destes por ser condicionados pela dificuldade sentida na realização dos processos de cálculo.

Para traduzir simbolicamente a definição de sucessão convergente a Paula também recorre à de infinitamente grande. Ela começa por se preocupar com o papel dos parâmetros interrogando-se se neste caso também pode utilizar o *L* e refere que, estando em causa a convergência, deverá ter a condição $u_n<a$. Quando o entrevistador tenta estabelecer a diferença entre o comportamento dos termos de sucessão divergente e da convergente ela refere que no caso da convergência temos u_n-a $<\varepsilon$. A partir daqui escreve a definição simbólica tal como tinha sido apresentada nas aulas (figura 6.39).

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists p\in \mathbb{N}: \ n>p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Figura 6.39. Definição de sucessão convergente da Paula.

Além disso estabelece ainda que o ε deve ser qualquer número pequeno associando-o à noção de vizinhança. Para tal acaba por representar na forma de intervalo real uma vizinhança de 2 para tentar explicar a forma como os termos da sucessão se devem distribuir, não conseguindo no entanto fazer essa referência em relação ao caso geral da sucessão que tinha representado na definição. O seu conceito imagem de sucessão a tender para um dado limite parece estar de acordo com a noção de convergência que foi ensinada mas ela não consegue evidenciar os processos que lhe estão subjacentes. Quando confrontada com o termo geral de uma sucessão constante considera que se trata de uma sucessão que "não é convergente nem divergente" pelo facto de todos os termos serem iguais. É com base na definição, por sugestão do entrevistador, que acaba por estabelecer a convergência da sucessão constante, indicando mesmo que a definição se verifica a partir da ordem 1.

Quando se pretendeu caracterizar mais pormenorizadamente, a partir do gráfico da figura 6.28, o papel dos vários parâmetros da definição a Paula mostrou um desempenho satisfatório. Ela localizou no gráfico uma vizinhança de 3 de raio 1 e a partir dela indicou a ordem a partir da qual os termos estariam dentro dessa vizinhança. Embora refira que se trata de uma situação nova ela localiza as ordens pretendidas para outros valores de ε dados. Também quando a definição foi usada para provar que a sucessão $\frac{n+3}{n}$ tendia para 1 a Paula mostrou ser capaz de executar todos os procedimentos que conduziam à solução do problema. Ela indicou todos os cálculos necessários para levar a cabo a demonstração, referindo que precisava de encontrar uma ordem *p*. De seguida representou essa ordem exprimindo o *p* em função do ε mas não deu nenhum destaque especial à generalidade que tinha conseguido obter com esta abordagem. Ela centra-se essencialmente nos procedimentos, realizando os cálculos de forma rotineira mas sem ter a preocupação de no final constatar que tinha provado que de facto aquele era o valor do limite da sucessão.

Para a Alexandra a representação simbólica de uma sucessão a tender para um dado número finito *a* também é escrita usando como modelo a de infinitamente grande, à qual ela consegue fazer as devidas alterações:

> Alexandra – Qualquer que seja… um ε maior que 0, não é?
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> Alexandra – Existe… um… tal que u_n menos o *a* menor que o ε. É isto? (…) Ai não… Falta o $n>p$.
>
> Ent. – Sim falta aí qualquer coisa…
>
> Alexandra – $n>p$ implica isto.

Ela escreve primeiro os dois quantificadores e a condição final (figura 6.40), mas quando compara com a definição de infinitamente grande repara que falta parte, a condição $n>p$ e o sinal de implicação, que acrescenta posteriormente.

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists p\in\mathbb{N}: n>p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Figura 6.40. Definição de sucessão a tender para *a* da Alexandra.

A Alexandra escreve assim a definição simbólica que é em tudo semelhante à abordada nas aulas. Quando lhe é pedido para explicar o que significa a segunda parte da implicação, $|u_n - a| < \varepsilon$, recorre à noção de vizinhança:

> Alexandra – Nós podemos dizer em termos de vizinhanças…
>
> Ent. – Que significa o quê?
>
> Alexandra – Vizinhança ε de *a*.
>
> (…)
>
> Alexandra – Depois podemos escrever sob a forma intervalos, não é?
>
> Ent. – Então como é que fica na forma de intervalos?
>
> Alexandra – Fica u_n pertence ao… … Era o *a* menos o ε e *a* mais ε .

Ela traduz assim esta condição para a representação em termos de vizinhanças e posteriormente transforma a vizinhança num intervalo real (figura 6.41).

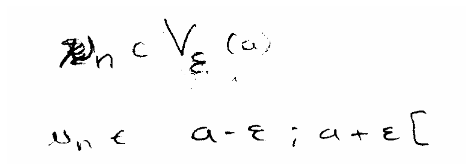


Figura 6.41. Noção de vizinhança e sua representação na forma de intervalo (Alexandra).

A Alexandra apresenta assim a capacidade de traduzir simbolicamente a definição de sucessão convergente, mostrando ser capaz de traduzir a segunda parte da implicação quer em termos de vizinhanças quer de distâncias. Para melhor compreender o significado atribuído aos vários parâmetros envolvidos foi-lhe fornecido o gráfico da figura 6.28 e pedia-se para indicar a ordem a partir da qual os termos da sucessão estavam numa vizinhança de 3 de raio 1. Ao fixar o valor do ε a Alexandra não percebeu inicialmente o que se estava a pedir. Embora no caso geral ela tenha indicado a vizinhança na forma de intervalo, agora só com a ajuda do entrevistador é que a consegue concretizar. Verifica que a vizinhança vai ser centrada no 3 e portanto será o intervalo de 2 a 4. Depois de representar a vizinhança no gráfico ela parece considerar que já tinha respondido à questão colocada inicialmente. Quando o entrevistador lhe volta a colocar a questão no sentido de pretender que ela indique a ordem a partir da qual os termos estão na vizinhança considerada ela fixa-se na vizinhança que representou e tenta responder em função dela:

> Ent. – Agora eu tinha-te perguntado: a partir de que ordem é que os termos, se eu fizer o ε igual a 1, estão na vizinhança? Estão lá dentro da vizinhança?
>
> Alexandra – A partir da ordem 2.
>
> Ent. – Da ordem… onde é que vês a ordem?
>
> Alexandra – Ah! A partir da ordem…
>
> Ent. – Tens que ler a ordem onde? …

Alexandra – Então mas o gráfico não chega aqui… [risos].

Quando lhe é pedida a ordem ela vai fazer a leitura no eixo vertical e indica o extremo inferior da vizinhança que representou anteriormente. Perante o questionamento do entrevistador considera que o gráfico "deveria chegar" ao 2, ou seja, ela pretendia com esta afirmação que os termos da sucessão se estivessem a aproximar do extremo inferior da vizinhança considerada, da mesma forma que estava a acontecer com o centro do intervalo, o 3. Só com ajuda do entrevistador é que ela consegue procurar as ordens no eixo horizontal e desta forma dar algum significado à questão colocada inicialmente. Quando lhe é pedido, com o objectivo de generalizar o papel do parâmetro ε, para indicar se é importante que este tome um valor grande ou pequeno ela centra-se de novo no gráfico dado e considera que deve ser grande pois assim serve uma ordem qualquer por mais pequena que seja. Ela não consegue abstrair-se do caso concreto e afirma que por mais pequena que seja a vizinhança há sempre termos lá dentro, nem que seja só o valor do limite, o *a*. Desta forma defende que para que a sucessão seja convergente basta que a partir da ordem considerada estejam apenas alguns termos dentro da vizinhança. Ela parece ter alguma dificuldade em passar do caso concreto para o caso geral, centrando-se apenas no caso concreto, mesmo quando se pretende fazer uma generalização.

O mesmo se verifica quando do estudo da convergência da sucessão constante 2. Depois de ter usado a definição para provar a convergência da sucessão, quando lhe é pedido para fixar o $\varepsilon=1$ e dizer a partir de que ordem é verificada a definição, ela afirma que "o centro da vizinhança é 2" mas que "a vizinhança é zero". Pelo facto de todos os termos serem iguais a dois ela considera que a vizinhança não tem amplitude, sendo portanto nula. Também neste caso não conseguiu desligar a noção de vizinhança do caso concreto, mostrando uma concepção bastante peculiar desta noção. A Alexandra parece assim apresentar alguma dificuldade em compreender a definição de sucessão convergente. Ela não consegue dar significado aos parâmetros envolvidos nem ao papel dos quantificadores. O facto de conseguir escrever a definição correctamente parece dever-se a um processo de memorização que não encontra eco quando é necessário recorrer à coordenação dos vários processos que lhe estão subjacentes. Também quando se pretende aplicar a definição para provar que o limite da sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ é igual a 1 a Alexandra utiliza a definição de uma forma mecânica. Ela segue todos os procedimentos de cálculo com um desempenho bastante satisfatório, conseguindo exprimir o *p* em função do ε. No entanto quando lhe é pedido para explicar o que acabou de provar ela apenas consegue referir-se aos procedimentos de forma isolada sem lhe atribuir significado no seu conjunto.

Quanto ao seu conceito imagem de sucessão convergente parece ser baseado na visualização da representação gráfica dos termos da sucessão. Para que a sucessão seja convergente ela considera que os termos se devem estar a aproximar de algo. É o caso do gráfico da figura 6.28 cujos termos ela considera estarem a tender para 3. Mas quando refere que esta sucessão está a tender parece estar a considerar que a distância entre os termos também é cada vez menor. A sua noção de convergência considera assim que os termos estão a aproximar-se do limite mas também se vão aproximando uns dos outros. Quando confrontada com a sucessão constante de termo geral 2 ela representa-a graficamente e admite que a mesma não é convergente por serem "só pontos soltos". Esta noção parece estar baseada essencialmente em representações esquemáticas feitas manualmente, onde por vezes se dá esta imagem com o objectivo de representar um maior número de termos, dando mesmo a ideia de que estes são infinitos.

O Manuel também consegue escrever a definição de sucessão a tender para *a*, com base na abordagem que fez quando escreveu a definição de infinitamente grande. Nessa altura ele tinha escrito primeiro a definição simbólica de sucessão convergente que agora se limitou a reproduzir (figura 6.42).

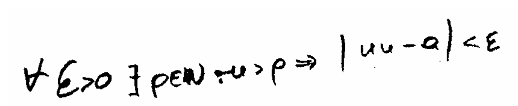


Figura 6.42. Definição se sucessão convergente para *a* do Manuel.

Embora ele represente a definição correctamente do ponto de vista formal, a forma como faz a sua leitura parece deixar transparecer algumas dificuldades na interpretação do que acabou de escrever:

> Manuel – [Lendo a definição simbólica] Portanto…aaa… Qualquer que seja o *p* pertencente a ***N***.
>
> Ent. – Existe, existe.
>
> Manuel – Oh! Eu estou a trocar. Existe um *p*. Portanto qualquer que seja o ε .
>
> Ent. – Maior que 0.
>
> Manuel – Existe um… ε pertencente a ***N***. Em que o *n* novamente é maior que *p*. Em que o… A distância entre… aaa… os termos da sucessão… e o seu limite é… Portanto… como é que eu hei-de explicar esta parte… aaa… Que a distância das… dos termos da sucessão até à… até ao seu limite vai ser menor que o ε .

O Manuel tem alguma dificuldade na leitura dos quantificadores trocando os nomes com alguma frequência e a forma como o *n* e o *p* são referidos deixa antever que o seu significado não corresponde ao que seria esperado. O módulo é referido como a distância entre os termos e o limite, mas esta noção já tinha sido discutida anteriormente e o Manuel na altura não lhe conseguiu atribuir este significado. Aliás quando se pretende saber se esta distância deve ser grande ou pequena ele mostra ter alguma dificuldade em visualizá-la:

> Manuel – Tem que ser… pequena… Porque digamos… A distância, distância… …

Embora admita que a distância deve ser pequena mostra algumas dúvidas por não conseguir visualizá-la a partir da definição. Com o objectivo de caracterizar mais em pormenor o papel desempenhado pelos vários parâmetros presentes na definição foi utilizado o gráfico da figura 6.28 onde se pedia para indicar a ordem a partir da qual os termos da sucessão estavam numa vizinhança de 3 de raio 1. O Manuel começou por fazer uma abordagem algébrica resolvendo a inequação ainda que por um processo pouco usual (figura 6.43):

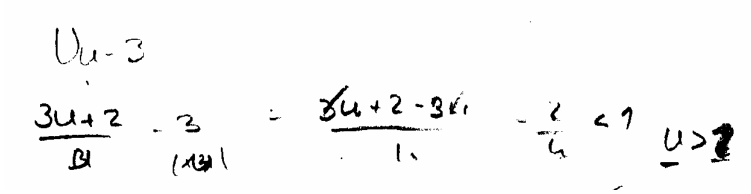


Figura 6.43. Resolução da inequação $|\frac{3n+2}{n}-3|<1$ do Manuel.

Ele simplificou primeiro a expressão contida no módulo, referindo depois que não precisava de usar o módulo por esta ser sempre positiva, e no final estabeleceu a inequação inicial concluindo que $n>2$. Com base nesta conclusão e na definição simbólica foi pedido para caracterizar o p, mas o Manuel não conseguiu interpretar o significado da questão. Quando se pretendeu concretizar o resultado obtido por via algébrica no gráfico dado, a noção de vizinhança veio trazer algumas dificuldades adicionais ao problema. Para o Manuel as vizinhanças não fazem sentido aplicadas às sucessões:

> Manuel – Uma vizinhança de um ponto é. Portanto tem aqui o ponto… Posso fazer aqui, é tudo o que fica aqui perto do ponto… [figura 6.44]
>
> Ent. – E se eu te dissesse para representares essa [$\mathcal{V}_1(3)$] vizinhança, o que é que tu representavas?
>
> Manuel – Então neste caso aqui era um conjunto vazio… Porque é um ponto, não tem vizinhança nenhuma.

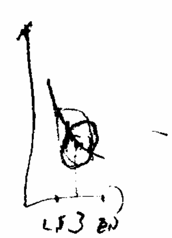


Figura 6.44. Representação da noção de vizinhança do Manuel.

Para ele a vizinhança é representada por um intervalo no eixo horizontal mas reflecte-se no gráfico, nas imagens. É nesse sentido que ele faz o gráfico da figura 6.44 onde representa a vizinhança como uma bola sobre o gráfico da função que desenhou. A vizinhança passa a ser a porção de gráfico que tem projecção no intervalo desenhado no eixo horizontal. Como no caso em estudo o gráfico é discreto e ele está a colocar a vizinhança no eixo horizontal não consegue encontrar um intervalo sobre o gráfico de modo a desenhar aí a vizinhança. Esta imagem de vizinhança é referida por várias vezes, fazendo com que ele desenhe outros gráficos de funções contínuas para explicar esta sua noção. O seu conceito imagem de vizinhança consiste num intervalo real do eixo horizontal projectado sobre o gráfico de uma função contínua. É a porção de gráfico que resulta desta projecção que ele designa como sendo a vizinhança. Com base neste conceito imagem ele não consegue resolver o problema anterior, por não saber onde colocar a vizinhança. Depois de uma explicação pormenorizada do entrevistador conseguiu desenhar a vizinhança de raio 1 correctamente e a partir daí identificou a ordem que tinha encontrado algebricamente. Embora tenha conseguido dar respostas satisfatórias para outros valores de ε mais pequenos, não conseguiu visualizar graficamente a convergência, pois quando se pretendeu saber o que acontecia aos termos da sucessão a partir da ordem encontrada, ele considerou que bastava que "houvesse pelo menos um [termo] na vizinhança".

A resolução gráfica deste tipo de problema deixou-o bastante surpreso afirmando mesmo que nunca tinha pensado neste tipo de abordagem. O Manuel revela assim bastantes dificuldades em operacionalizar a definição sendo o seu desempenho condicionado pela noção de vizinhança. Já quando se trata de analisar a convergência da sucessão constante 2 ele considera que é uma sucessão convergente, argumentando que:

> Manuel – Se ela… Se ela é sempre 2… converge sempre para esse número.

Esta conclusão parece ter por base a noção de sublimite que ele já tinha evocado anteriormente quando explicou a sua noção de convergência:

> Ent. – Se eu digo que uma sucessão está a tender para a, que relação é que há entre os termos da sucessão e aquele limite?
>
> Manuel – Têm que convergir todos para a. Todos os sublimites dessa, dessa… Todos os sublimites dessa sucessão têm que convergir para a.

Ele associa assim a convergência à noção de sublimite que pressupõe a convergência de todas as subsucessões da sucessão dada para o mesmo limite. Parece ser neste sentido que ele se refere à sucessão constante onde facilmente se constata que todas as subsucessões tendem para 2. O seu conceito imagem de convergência parece estar subordinado a um conjunto de propriedades, sendo por vezes difícil de explicitar os processos que lhe estão subjacentes. A aplicação da definição de sucessão convergente à sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$, para provar que a mesma converge para 1, também se revelou uma tarefa bastante árdua. O Manuel começa por escrever a definição por sugestão do entrevistador mas não consegue explicitar o seu significado depois de escrita, ficando sem saber o que se pretendia provar:

> Manuel – Deixa-me ver… se eu me lembro como é que isto se faz… Ora bem… eu agora… … aaaam… A malta fazia isto mas não ligava muita importância. Isto porque não saía nos testes.
>
> Ent. – Sim, mas o que é que tens que fazer aí?
>
> Manuel – Eu lembro-me. Mas agora… acho que não tem muito a ver com este exercício, acho que era aaa…
>
> Ent. – Diz, diz.
>
> Manuel – Ah! Já estou a perceber, esqueça. Estava era a fazer aaa… Tendo duas sucessões consigo construir outra… Eu já não me lembro como é que era mas pronto, eu agora já me lembrei como é que isto se faz.

Ele parece não ter compreendido o significado da definição que escreveu e acaba por tentar associar a resolução ao teorema das sucessões enquadradas que depois também não consegue explicitar. Com a indicação do entrevistador de que não é esse o caminho a seguir ele argumenta que vai tentar explicar pormenorizadamente e pressupõe que vai ter que achar o termo geral u_n. Como este já é conhecido admite então que vai resolver a inequação dada na definição:

> Manuel – Então posso fazer isto… n+3…
>
> Ent. – Sobre n.
>
> Manuel – Menos 1… ε.
>
> Ent. – Exacto.
>
> Manuel – Agora ponho aqui,… Isto iria dar… 3 sobre n…
>
> Ent. – Hum.
>
> Manuel – Agora vou saber o valor de n… Portanto isto vai ser… aaa… Tirar o módulo… Como o ε é um número entre menos, 0 e 1 não é?
>
> Ent. – O?
>
> Manuel – O ε. Sim o ε é de… 0 a 1 não é?

Ao tentar resolver a inequação o Manuel simplifica a expressão dentro do módulo e quando pretende retirar este acaba por enquadrar o valor de ε. Ele parece considerar o facto de o ε ser pequeno, daí tomar um valor entre 0 e 1. Nesta situação, para se desembaraçar do módulo, parece não estar muito preocupado com a expressão que este tem lá dentro e só a considera porque o entrevistador lhe sugere. Este procedimento acaba por ser executado transformando o módulo na disjunção de duas condições que depois resume apenas na inequação $n>\frac{3}{\varepsilon}$.

Perante este resultado continua sem conseguir explicar o que anda à procura:

Manuel – O que eu ando à procura é a provar que isto… tende para 1.

Ent. – Isto tende para 1? Mas provar que isto tende para 1 é o mesmo que escrever isto [refiro a definição]?

Manuel – Sim.

Ent. – O que é que tu andas à procura aqui agora? [indico a definição com o lápis]. Tu agora já estás aqui na definição.

Manuel – Eu agora ando à procura do u_n.

Ent. – Andas à procura de quem?

Manuel – De, do… p? [o entrevistador indica o p com o lápis].

O Manuel não consegue fazer a leitura da definição pelo que não estabelece relação entre esta e os cálculos que efectuou. Ele tem dificuldades em identificar o que se pretende provar e apenas vai executando alguns procedimentos que vai recordando. Apenas refere que procura o p por indicação do entrevistador, e embora tenha expresso o n em função do ε, esta representação não lhe permite estabelecer qualquer relação entre o n e o p. Só posteriormente, por sugestão do entrevistador, é que escreve o p em função do ε mas não lhe confere nenhum destaque especial em termos da prova em causa. O Manuel parece assim ter dificuldades em manejar a definição de sucessão convergente, mostrando um desempenho favorável apenas na sua escrita simbólica. Quando se pretende dar-lhe significado ele não consegue compreender o papel dos vários parâmetros envolvidos nem dar-lhe significado no seu todo.

Para a Mariana a definição simbólica de sucessão convergente também é escrita tendo como modelo a de infinitamente grande. Ela escreve a definição tal como ela tinha sido apresentada nas aulas, tendo apenas substituído o parâmetro ε pelo δ (figura 6.45).

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$$

Figura 6.45. Definição de sucessão a tender para *a* da Mariana.

Embora mostre conhecer a definição, reproduzindo-a correctamente, quando lhe é pedido para explicar por palavras suas o que representa o módulo, parece mostrar alguma dificuldade em traduzir alguns dos parâmetros:

Ent. – O módulo de u_n-a tem que ser mais pequeno que delta. O que é que isto querer dizer? …

Mariana – Ora… que o módulo de u_n menos esse a, menos o número para o qual a sucessão converge, é menor que qualquer número por mais pequeno que ele seja, no eixo dos *XX*.

(…)

Ent. – Em termos de vizinhanças o que é que isso quer dizer?

> Mariana – Qualquer vizinhança… de u_n. A vizinhança *a* de u_n … é sempre menor que ε. Ah! Não sei…

Ela não consegue traduzir o módulo em termos de vizinhanças o que vai condicionar o seu desempenho mesmo quando se tenta aplicar a definição a um caso concreto. Foi o que aconteceu quando a partir do gráfico da figura 6.28, se tentou concretizar a situação anterior.

> Mariana – Aamm… qualquer distância… qualquer distância no eixo dos… no eixo dos *YY*, não é? Que seja maior que 0… por mais pequena que ela seja, existe uma ordem depois da qual, ou seja, existe um *n*, número natural,… da suces… número natural que ultrapassa… …
>
> Ent. – Existe um número natural…
>
> Mariana – Aaaa… maior que. Que seja maior do que…
>
> Ent. – O que é que tem que acontecer depois?
>
> Mariana – O módulo da sucessão menos… menos o número para onde ela tende… seja menor que esta distância mais pequena.

A Mariana refere a distância, que se localiza no eixo vertical, mas não é capaz de a representar graficamente e quando pretende referir-se à ordem considera apenas o papel do *n* mas não relaciona a ordem com a distância. A noção de vizinhança parece ser a sua principal limitação. Mesmo quando se recorreu a um caso particular, onde o ε era 1, e se pretendia saber a ordem a partir da qual os termos estavam nesta vizinhança, a Mariana teve dificuldade em esquematizar a situação no gráfico. Ela apenas referencia a vizinhança de um ponto como sendo os "pontos que estão para um lado e para o outro" sem a identificar com um intervalo real. Só com a ajuda do entrevistador é que ela identifica a vizinhança em causa como sendo o intervalo de 2 a 4 representando-o no gráfico dado e a partir daí indicou a ordem pretendida. Posteriormente encontrou ordens para outros valores de ε dados estabelecendo mesmo que a partir das ordens encontradas todos os termos tinham que estar dentro da vizinhança. Também quando se tenta aplicar a definição de uma forma mais abstracta, provando por definição que a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ tende para 1, a Mariana parece não conseguir aplicar a definição. Ela começa logo por tentar resolver a inequação resultante da aplicação da definição ao caso concreto, sem antes ter escrito a definição. Depois de escrever a definição, por sugestão do entrevistador, ela realiza todos os procedimentos de cálculo com um desempenho notável até conseguir exprimir o *n* em função do ε, expressão esta que ela afecta da função "parte inteira de". Quando questionada sobre a forma de concluir a prova, ela não sabe exactamente qual é o parâmetro que procura e só identifica o *p* por sugestão do entrevistador. Ela centra assim a prova por definição num conjunto de procedimentos algébricos que obedecem a uma dada sequência mas que não têm significado quando integrados na definição como um todo. A definição simbólica de sucessão convergente da Mariana parece não ter sido o resultado da reificação dos vários procedimentos e processos que lhe estão subjacentes. O conceito de vizinhança parece ter sido uma das suas principais limitações. A forma como ela representa a definição parece assim ser o resultado da memorização da sua estrutura simbólica.

O seu conceito imagem de convergência também parece assentar em determinadas propriedades. Quando lhe é pedido para explicitar o que significa dizer que a sucessão é convergente ela recorre à noção de sucessão limitada:

> Mariana – Aaa que é limitada. Não… Se tende para um número… é porque é majorada… Quer dizer… não… permite ou um majorante ou um min[orante]… Como é que hei-de explicar…
>
> Ent. – Diz
>
> Mariana – À medida que vamos aumentando o *n* ela vai tender para um certo número… do eixo dos *YY*…

Embora posteriormente ela use uma explicação que relaciona os naturais com os termos da sucessão, inicialmente tenta recorrer à noção de sucessão limitada. Parece no entanto que ela apenas pode ser limitada superiormente ou inferiormente. Esta ideia parece deixar a possibilidade de a sucessão ser convergente e não ser limitada, por os seus primeiros termos poderem "tender" para infinito. Também quando foi confrontada com a sucessão constante, 2, fez uma abordagem semelhante:

> Mariana – [É convergente] porque ela só admite aquele número… Por isso converge para aquele número. O seu limite é 2.
>
> Ent. – Portanto.
>
> Mariana – Não admite majorantes nem minorantes… Admite majorantes e minorantes, é limitada. Mas como é só um número ela tende para esse número.

Neste caso o comportamento dos termos da sucessão parece não lhe deixar dúvidas pelo que a noção de limitada acabou por prevalecer e conduzir à conclusão de que a sucessão é convergente. O conceito imagem de sucessão convergente da Mariana parece assim ter por base algumas propriedades das sucessões, que são usadas em vez da definição formal aprendida nas aulas. A capacidade de aceder aos processos que estão na base da definição simbólica nem sempre é usada com sucesso.

3.3. Conceito imagem relacional

Os conceitos imagem incluídos nesta categoria traduzem sempre simbolicamente a definição de sucessão convergente. Embora por vezes os alunos que os manifestam recorram à definição de infinitamente grande para estabelecer a de convergência, conseguem introduzir as modificações necessárias de modo a obter uma definição semelhante à que foi abordada nas aulas. Assim, as noções de vizinhança e de distância são utilizadas com compreensão, permitindo um desempenho satisfatório na resolução de situações concretas e abstractas, sendo o papel dos quantificadores o mais difícil de caracterizar.

É o caso do Joaquim que já tinha escrito parte da definição de sucessão convergente quando tentou escrever a de infinitamente grande. Ele usa a representação que já tinha feito completando-a de forma a obter a da figura 6.46.

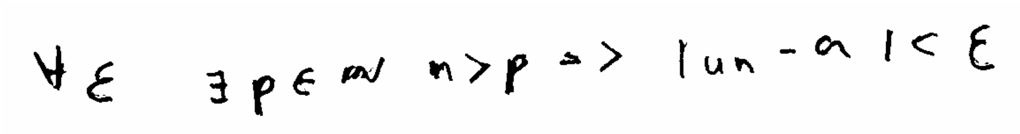


Figura 6.46. Definição de sucessão convergente do Joaquim.

Quando se pretendeu saber o papel do parâmetro ε representado na definição, o Joaquim recorre à noção de vizinhança considerando que se tratava de um intervalo à volta do limite e utiliza a representação gráfica (figura 6.47), para melhor explicitar o seu conceito imagem:

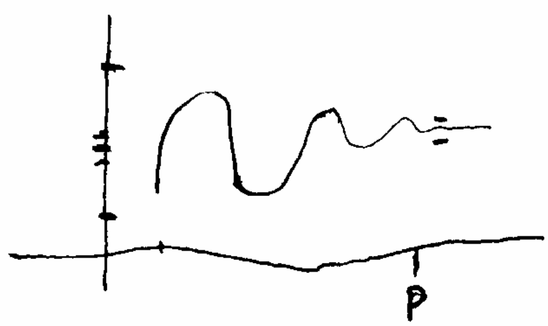


Figura 6.47. Gráfico de uma 'sucessão' convergente (Joaquim).

> Joaquim – Ela está a tender por aqui. Se a gente fizer os ε muito grandes vai haver muitos números aqui. Se a gente fizer os ε pequeninníssimos vai ser mesmo…
>
> Ent. – O que é que vai ter que acontecer?
>
> Joaquim – Se for assim este ε [intervalo representado no eixo vertical com centro no suposto limite] aqui já lá vai a partir daqui. Mas se eu fizer os ε [ver gráfico da figura 6.46] pequeninos ela vai realmente começar a tender é a partir de mais à frente e neste caso o que nos interessa é que ela fica compreendida. Os ε pequeninos, ou seja, está o mais próximo possível do limite que a gente quer.

O Joaquim recorre a um gráfico contínuo como se este representasse a sucessão mas explicita de forma bastante clara a relação entre os 'termos' e o limite com base no parâmetro ε. A forma como os termos se devem dispor a longo da vizinhança também é explicada com base no gráfico anterior:

> Joaquim – Este p [ver gráfico da figura 6.46]. Por exemplo se o p for aqui, [eixo horizontal] para qualquer valor acima disto ele vai estar sempre… Os outros valores de u_n vão estar sempre compreendidos neste intervalo.

O conceito de sucessão convergente parece ter sido reificado com sucesso, isto é, o Joaquim relaciona os diferentes parâmetros presentes na definição simbólica dando-lhe o significado pretendido no contexto de definição. Também quando se pretende caracterizar a definição, com base no gráfico da figura 6.28, o Joaquim mostra um desempenho favorável. Quando lhe foi pedido para indicar a ordem a partir da qual os termos estão numa vizinhança de 3 de raio 1 ele começou por fazer uma abordagem algébrica resolvendo a respectiva inequação e quando lhe foi pedido para indicar no gráfico a conclusão a que tinha chegado relacionou os vários parâmetros:

> Ent. – Portanto, para valores de *n* maiores que 2. No gráfico como é que tu podias ver isso?
>
> Joaquim – Ou seja, a diferença teria que ser 1, já que o ε vai ser a tal diferença. Assim os valores estão compreendidos entre 4 e 2, ou seja seria o limite.
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> Joaquim – Seria talvez já com o valor 4, e essa é a imagem de 2 se não me engano.
>
> Ent. – Exactamente.
>
> Joaquim – Por isso seria o 2 já que a diferença é 1. O ε vai ser a tal diferença. Neste caso seria o 4 e o 2 Neste caso aqui é o 3+1 que dá o 4, e dá aqui este. Por exemplo o valor antes desse, por exemplo o 1 já vai para 5, neste caso o ε teria de ser 2 e não 1.

O Joaquim escolhe a ordem em função da vizinhança dada, embora considere os extremos do intervalo sem referir explicitamente se a ordem que está a indicar se refere ao *n* ou ao *p*. Quando questionado, admite que esta ordem é referente ao parâmetro *p*, pois a partir dela já se verifica a definição. Com base nesta abordagem parece ser possível concluir que o Joaquim aplica a definição estabelecendo de forma clara o papel dos vários parâmetros envolvidos.

Quando se trata da aplicação da definição noutros casos ele também consegue manejá-la com alguma destreza. É o que acontece por exemplo quando confrontado com a sucessão constante de termo geral 2, onde ele recorre à definição simbólica para justificar a sua convergência. Também quando se pretende provar por definição que a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ tende para 1, o Joaquim mostra uma compreensão da definição que lhe permite fazer a prova com êxito. Depois de escrever a definição, resolve com sucesso a inequação que lhe permite escrever o *n* em função do ε. A partir daqui procura um n_1, que posteriormente é identificado com o *p* da definição, o qual lhe permite obter sempre uma ordem para qualquer ε, chegando mesmo a concretizar vários valores de ε para encontrar as respectivas ordens. Embora inicialmente ele não tenha garantido que este parâmetro tinha que ser inteiro, conseguiu facilmente estabelecer essa condição. O Joaquim parece assim encarar a definição simbólica de sucessão convergente como um proceito, isto é, consegue dar significado à representação simbólica e ao mesmo tempo é capaz de referir os processos e procedimentos que lhe estão subjacentes.

Para a Sofia a escrita simbólica da definição de sucessão convergente também parece não causar quaisquer dificuldades. Ela começa por fazer a sua representação em termos do limite e por comparação com a definição de infinitamente grande estabelece a de convergência (figura 6.48):

> Sofia – Então é o limite de u_n quando o n tende para mais infinito é a.
>
> Ent. – E como é que isso se escrevia simbolicamente, lembras-te?
>
> Sofia – Ah! … (…) Então aqui é para todo o ε positivo, existe p pertencente a $\boldsymbol{N}$ tal que $n>p$, isto implica u_n-a em módulo é menor que ε.
>
> Ent. – Exactamente. O que é que isso significa?
>
> Sofia – Eu isto. Eu acho que é assim… Se ele [n] está a tender para mais infinito e está-se a aproximar de um valor. Isto, o limite é um valor, está-se a aproximar de um a. Chega aqui… portanto os pontinhos estão a ficar todos pertinho [faz um esboço gráfico, figura 6.48]. Eu acho que quando… os termos da sucessão, a distância dos termos da sucessão… Eu acho que isto é, como é que eu hei-de dizer. No fundo eu acho que nós estamos a dizer para todo o ε maior que 0 nós queremos que a distância entre os termos da sucessão e o a… Que eles estejam muito pertinho.

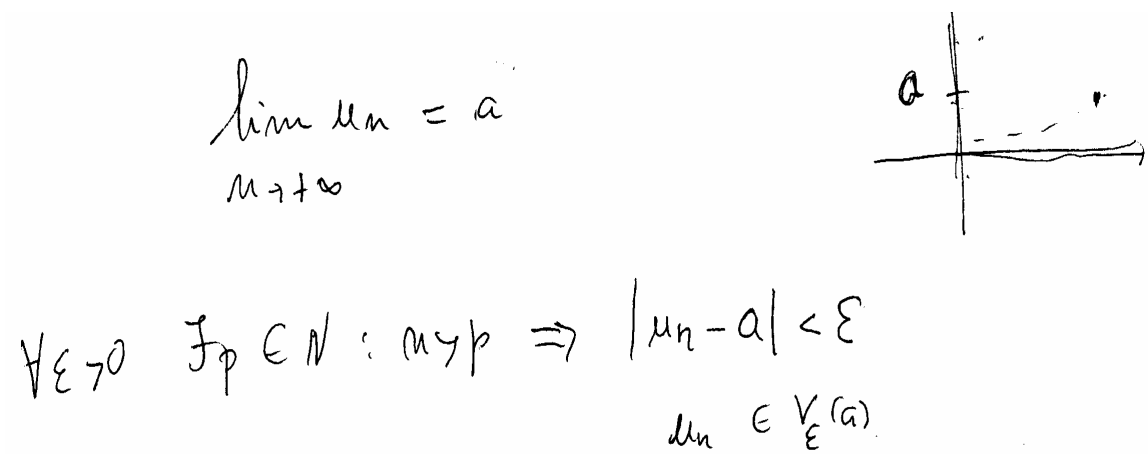


Figura 6.48. Representação simbólica e gráfica da sucessão convergente para a da Sofia.

A Sofia escreve a definição simbólica sem precisar de evidenciar a relação entre os termos e o limite. No entanto, quando necessário, consegue operacionalizar essa relação recorrendo mesmo a uma representação gráfica. Esta abordagem permite-lhe caracterizar o papel do parâmetro ε e com base nele refere-se ao conceito de vizinhança:

> Sofia – [O ε deve ser] pequenino. Pois é isso. E a gente, eu quando estudei até dizia que devia pertencer à vizinhança.
>
> Ent. – Que é outra forma que vocês deram para escrever isso?
>
> Sofia – Sim. Que era, os termos têm que pertencer à vizinhança ε do a. [escreve o módulo em termos de vizinhanças, figura 6.48]
>
> Ent. – É a mesma coisa escrever isto ou isso?
>
> Sofia – É a mesma coisa, sim.

Ela traduz assim a parte final da definição em termos de vizinhanças mostrando possuir um conceito imagem de sucessão convergente bastante diversificado, que lhe permite passar de uma representação para a outra reforçando o significado dos parâmetros envolvidos. Esta abordagem é feita com um grau de generalidade bastante grande deixando antever uma compreensão na qual esta definição parece ser possível ser considerada como um proceito.

Apesar da generalidade aqui observada foi possível encontrar alguns procedimentos que contrariam este tipo de compreensão. Por exemplo, quando se pretendeu caracterizar o papel dos vários parâmetros presentes na definição recorrendo ao gráfico da figura 6.28, foi pedido à Sofia para indicar a ordem a partir da qual os termos da sucessão estariam numa vizinhança de 3 de raio 1. Ela começou por fazer uma abordagem algébrica que lhe permitiu obter uma resposta para o problema colocado:

> Sofia – Então se o ε for 1 o que eu quero considerar é que quando o n é maior que p… Portanto existe p natural… Isso implica que u_n menos o a tem que ser menor que 1…E isto aqui vai ser sempre, este módulo posso tirá-lo… Isto vai ser… Porque… os termos da sucessão aqui são todos positivos.
>
> Ent. – Portanto, neste caso concreto, tu sabes quem é o u_n.
>
> Sofia – Sim
>
> (…)
>
> Sofia – Eu estou a dizer que tiro o módulo porque… Portanto, então posso dizer que u_n menos o a tem que ser menor que 1… Então… o que eu estou a dizer… Pronto, estou a dizer que esta distância é inferior a 1… sempre… Mas quer que eu veja a ordem…
>
> Ent. – Qual é a ordem, neste caso concreto, porque aí tu estás [a fazer] no caso genérico, não é?
>
> Sofia – A ordem aqui?
>
> Ent. – Neste caso.
>
> Sofia – A ordem a part[ir]…
>
> Ent. – Portanto é assim. Se o ε for 1 a partir de que ordem é que isto se verifica… A distância entre os termos e 3 é menor que ε.
>
> Sofia – Aqui o u_n é $\frac{3n+2}{n}$ … Aqui posso substituir o a… Menos 3… menor que 1. [Está a resolver a inequação, figura 6.49]
>
> Ent. – Fica…
>
> Sofia – 2 sobre n menor que 1… Agora isto é ter que o 2 é menor que n, e o n é maior que 2. Se o n tem que a ser maior que o p, tem que ser maior que 2… É a partir do 2.

A Sofia começa por escrever a definição para o caso geral mas com o $\varepsilon=1$ (figura 6.49), e acaba por suprimir o módulo considerando que os termos da sucessão são sempre positivos. Ela parece estar a admitir que o que é de facto sempre positivo é a diferença entre os termos e o limite, por a sucessão se estar a aproximar por valores superiores, mas acaba por não fazer essa referência de forma explícita. Com base nesta representação ela resolve a inequação para o caso concreto e obtém assim a condição pretendida.

$$\varepsilon = 1$$

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad n > p \Rightarrow |u_n - a| < 1$$

$$u_n - a < 1$$

$$\frac{3n+2}{n} - 3 < 1$$

$$\frac{3\cancel{n}+2-3\cancel{n}}{n} < 1$$

$$\frac{2}{n} < 1$$

$$2 < n$$

$$n > 2$$

Figura 6.49. Abordagem algébrica para determinar uma vizinhança de 3 de raio 1 (Sofia).

Quando lhe é pedido para justificar graficamente o resultado a que chegou, ela parte do valor obtido anteriormente como sendo o valor de *p*:

> Sofia – Pronto, quando o *p* é maior que 2… o que nós vimos é que a sucessão está… Portanto o 2, não sei se é este aqui assim, começa a convergir para 3 porque precisamente a distância entre os termos… Portanto por exemplo se aqui é 4 e o limite é 3… 4 menos 3 é 1… Daqui a distância é precisamente 1.
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> Sofia – Se ela tem que ser menor que 1 e aqui a distância. Pronto, se aqui é 1 e nós vimos nitidamente que é aqui que este já não é 4, não é? Estava aqui 3,8 por exemplo, 3,8 menos 3 já vai dar 0,8, já é inferior a 1, portanto já verifica.

Ela parte da ordem encontrada e justifica que a distância entre os termos e o limite já é menor ou igual a 1. Quando lhe é pedido para representar a vizinhança em causa no gráfico, concretiza-a efectuando os cálculos e concluindo que se trata de um intervalo entre 2 e 4 mas centra essa vizinhança no eixo horizontal. Esta abordagem deixa-a algo apreensiva sem que consiga dar uma explicação coerente com o que tinha dito anteriormente. Só com a ajuda do entrevistador é que consegue modificar esta situação, colocando o intervalo no eixo vertical. A partir daqui consegue de novo explicar a conclusão a que chegara algebricamente.

O conceito imagem de vizinhança da Sofia parece estar ligado a uma representação esquemática na forma de intervalo real, que é representado preferencialmente num eixo horizontal. É com base nesta representação que ela aborda o caso anterior. Embora este procedimento tenha causado algumas dificuldades, a Sofia continua a utilizar a definição para resolver algumas situações concretas. Quando confrontada com a sucessão constante de termo geral 2, afirma que se trata de uma sucessão convergente e usa a definição para justificar esse facto. Ela traça o gráfico dos primeiros termos e verifica que qualquer vizinhança do limite contém todos os termos da sucessão. Também quando lhe é pedido para provar por definição que a sucessão $\frac{n+3}{n}$ tende para 1, realiza com sucesso o conjunto de procedimentos de cálculo que lhe permitem exprimir o n em função do ε e desta forma definir o p também como função de ε. A Sofia parece ter interiorizado e condensado os processos envolvidos na tradução simbólica da definição de sucessão convergente, sendo capaz de a utilizar quer em situações concretas quer noutras mais abstractas. Ela parece coordenar os vários processos envolvidos de onde se destacam aqueles que estão relacionados com a forma como os termos se posicionam relativamente ao limite da sucessão. A reificação da definição simbólica parece depender ainda da forma como ela encara a noção de vizinhança no caso concreto que parece não estar completamente interiorizada e condensada.

O João também recorre à definição de infinitamente grande quando pretende escrever a de sucessão convergente. Ele considera que agora esta nova definição "é ao contrário" da de infinitamente grande, parecendo estar apenas a referir-se ao comportamento dos termos em relação ao seu limite.

> João – Agora é ao contrário. Vou ver como é que escrevi [a anterior] para escrever ao contrário.
>
> Ent. – É esta aqui.
>
> João – Ora… agora esta é dizer que… Como é que é? … Existe um p pertencente a $\boldsymbol{N}$, tal que… $n>p$…
>
> Ent. – O que é que quer dizer os termos da sucessão estarem a tender para um dado a?
>
> João – Quer dizer que a partir desse. Existe uma ordem a partir da qual… O módulo da diferença entre os termos… vai ser cada vez mais próximo.

O João escreveu a primeira parte da definição sem indicar o conjunto ao qual pertencia o ε e refere-se ao módulo como representando a diferença entre os termos e não a diferença entre os termos e o limite. Desta forma fica um pouco hesitante mas acaba por concluir que se trata da distância entre os termos e o a, completando de seguida a escrita da definição:

> João – Portanto é u_n menos o a… módulo, vai ser menor que um determinado ε, tão pequeno quanto se queira.
>
> Ent. – E agora esse ε tem que pertencer a que conjunto?
>
> João – Pois é. Qualquer que seja o ε pertencente a… a $\boldsymbol{R}$. Mas é um $\boldsymbol{R}$… O ε é um valor muito pequeno…

Ent. – Interessa-nos que seja um valor muito pequeno, não é?

João – Interessa que seja um valor muito pequeno…

Ent. – E pode ser pertencente a ***R*** ou não? O ε pode ser negativo, por exemplo?

João – Se o ε pode ser negativo… … Não porque temos aqui o módulo.

Após ter escrito a segunda parte da implicação, o João faz uso do seu conceito imagem para garantir que o ε deve ser pequeno. No entanto não consegue decidir de imediato qual o conjunto a que ele deve pertencer. Com uma rápida análise do seu papel na definição, acaba por completar a representação afirmando que ele tem que ser positivo e escrevendo que pertence a $\boldsymbol{R}^{+}$ (figura 6.50).

$$\forall_{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{+}\ \exists_{p} \in \mathbb{N}:\ n > p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Figura 6.50. Definição simbólica de sucessão convergente para *a* do João.

A abordagem que o João faz da definição simbólica parece basear-se numa imagem visual da mesma, que se vai revelando à medida que esta vai sendo escrita. É no entanto possível verificar que ele recorre aos processos que lhe estão subjacentes quando tal se torna necessário. Com o objectivo de caracterizar a capacidade de operacionalizar os vários parâmetros envolvidos, foi pedido para, com base no gráfico da figura 6.28, indicar a ordem a partir da qual os termos estão numa vizinhança de 3 de raio 1. O João começou por fazer uma abordagem algébrica do problema resolvendo a inequação $|\frac{3n+2}{n}-3|<1$ e chegando à conclusão que o n teria que ser maior que 2. Quando lhe foi pedido para localizar a vizinhança no gráfico dado mostrou um desempenho bastante favorável:

> João – No gráfico, se eu quero que ele… Tem que ser uma vizinhança 1. Vejo a… a três somo e subtraio 1 para ter mais ou menos uma distância 1… do… Neste caso, dada esta sucessão não me interessa [a parte da vizinhança entre 2 e 3] porque os valores se aproximam por cima… E portanto, distância 1 é aqui… A partir desta ordem… A partir desta ordem, que é a ordem 2, todos os termos da sucessão estão na vizinhança de raio 1.

Ele estabelece a vizinhança pedida representando-a no gráfico e com base nela encontra a ordem pretendida. Relaciona ainda esta conclusão com o resultado obtido algebricamente. Também quando confrontado com a sucessão constante 2, ele usa a definição para justificar a sua convergência:

> João – Obedece [à definição]. Ela é convergente. Aliás ela está sempre a convergir para dois. Por mais pequeno que seja o ε… nós, todos os termos estão sempre dentro daquela vizinhança. Exactamente. Ela é constante, não sofre alterações.

O João refere-se à convergência da sucessão, não através da forma como os termos se relacionam com o limite mas antes pela forma que assume a vizinhança. O facto de o ε poder ser tão pequeno quanto se queira e os termos estarem sempre dentro da vizinhança é a condição que evoca para a convergência. Conclui que, qualquer que seja a vizinhança, os termos estão lá todos contidos logo a partir da ordem 1. O João parece assim conseguir manipular os vários parâmetros presentes na definição, quer quando estes assumem valores concretos quer quando apresentam um maior grau de generalidade. É o que acontece quando lhe é pedido para provar por definição que a sucessão de termo geral $\frac{n+3}{n}$ converge para 1. Ele escreve a definição simbólica para o caso concreto, resolvendo de seguida a inequação por forma a exprimir o n em função do ε, $n>\frac{3}{\varepsilon}$. De seguida justifica que procura uma ordem, pelo que substitui o n pelo p. Neste processo tem algumas dúvidas sobre a forma de garantir que o p seja natural, recordando-se vagamente da função "parte inteira", mas no final dá significado à definição mostrando ter uma visão de conjunto desta. A definição simbólica de sucessão convergente parece ser utilizada pelo João como um proceito, onde os símbolos têm um significado próprio mas que pode ser facilmente associado aos vários processos que lhe estão subjacentes.

Capítulo VII

Conceitos imagem associados às funções e ao cálculo diferencial

À semelhança do que aconteceu no capítulo VI, neste capítulo são analisados os conceitos imagem observados nos alunos estudados quando estes abordaram os temas referentes às funções e cálculo diferencial. Continua assim a dar-se resposta ao segundo objectivo do estudo, a caracterização da complexidade dos conceitos imagem que os alunos têm dos conceitos matemáticos ensinados, sendo os tópicos estudados referentes ao conceito de função, ao conceito de limite de uma função, ao conceito de derivada e a um dos teoremas fundamentais do cálculo diferencial, o teorema de Lagrange. O conceito de função, que já foi amplamente estudado ao longo do ensino secundário, foi aqui introduzido com base na seguinte definição:

"Dados dois conjuntos A e B chama-se *função definida em A com valores em B*, a toda a correspondência entre A e B que a cada elemento de A faça corresponder um e um só elemento de B. Ao conjunto A chama-se domínio da função.

Representa-se a função por $y=f(x)$ em que x é a variável independente e toma valores em A ($x \in A$) e y é a variável dependente pois os seus valores dependem dos valores que toma a variável x, que toma valores em B ($y \in B$).

À expressão ou fórmula que traduz o modo como a variável y depende da variável x chama-se expressão analítica ou representação analítica da função f.

Uma função f diz-se real de variável real quando $A \subset \boldsymbol{R}$ e $B \subset \boldsymbol{R}$."

O conceito de limite por sua vez foi introduzido com base na seguinte definição: "Seja f: $D \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ e a um ponto aderente ao domínio de f. Diz-se que *b é limite de f no ponto a* (*ou quando x tende para a*), e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = b$, se

$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 : x \in D \wedge |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-b| < \delta$.

Esta definição é acompanhada por um exemplo gráfico e é posteriormente escrita em termos de vizinhanças.

Já no que se refere ao cálculo diferencial, a noção de derivada é introduzida com base na seguinte definição: "Sejam f:$D\subset\boldsymbol{R}$ e a um ponto interior a D. Chama-se *derivada de f no ponto a* ao limite, se existir (em $\overline{R}$), $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ou, fazendo $x-a=h$, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$".

O teorema de Lagrange é apresentado da seguinte forma: "Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ (a, $b\in\boldsymbol{R}$, $a<b$) e diferenciável em $]a, b[$. Então existe $c\in]a, b[$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

1 – Conceito de função

Nesta secção caracteriza-se o conceito imagem de função desenvolvido pelos alunos quando o mesmo foi ensinado tendo por base a definição apresentada acima e tendo em conta as experiências já realizadas com o conceito ao longo do ensino secundário. Tal como no caso do conceito de sucessão, recorre-se às noções de conceito definição e conceito imagem abordadas por Tall e Vinner (1981) e reafirmadas por Tall (2003). Procura-se desta forma caracterizar o modo como os alunos compreendem o conceito quando este é abordado a partir da sua definição formal.

Foi pedido aos alunos para explicarem o que era para eles uma função e a partir das suas respostas foi possível identificar três níveis principais de conceito imagem: conceito imagem incipiente, conceito imagem instrumental e conceito imagem relacional. Esta categorização tem por base o seu conceito definição, isto é, a forma como eles verbalizaram a questão que lhe foi inicialmente colocada, sendo posteriormente acompanhada por uma caracterização mais completa do conceito baseanda numa abordagem de experiência de ensino. Nalguns destes níveis é ainda possível encontrar conceitos imagem típicos. No nível do conceito imagem instrumental alguns alunos manifestam um conceito predominantemente imagético, associando a função aos gráficos, e no nível de conceito imagem relacional outros alunos têm um conceito imagem predominantemente verbal, usando o conceito ensinado nas aulas baseado na noção de correspondência. É ainda possível identificar nesta categoria um outro grupo de alunos cujo conceito imagem parece ser encarado de forma bastante genérica, relacionando a função com uma sucessão.

1.1. Conceito imagem incipiente

Os conceitos imagem deste nível incluem alguns alunos que utilizaram como explicação do que é era para eles uma função algumas das propriedades que podem ser associadas ao conceito mas que por si só não o definem como um objecto matemático. Outros alunos recorreram a esquemas bastante elementares para referirem as relações que se estabelecem entre os vários elementos envolvidos no conceito. Quando solicitados para explicitar o que entendem por função, estes alunos revelaram um conceito definição elementar, que por vezes é difícil de acomodar pelo conceito imagem.

É o caso da Maria onde o conceito de função é associado aos números reais: "Pode ser num conjunto ***R***… Pode ser assim qualquer um… …Aaa… Quer dizer eu sei o que é, explicar é mau… Humm…". A primeira coisa que evoca é o conjunto ***R*** não referindo se se trata do domínio ou do contradomínio. Quando lhe é pedido um exemplo, ela considera que há muitas funções e refere a expressão x^2+2. Com base nesta representação ela refere-se ao domínio e contradomínio:

> Ent. – Qual é o domínio dessa função…
>
> Maria – É o ***R***.
>
> Ent. – E se eu pedisse o contradomínio?
>
> Maria – Humm…
>
> Ent. – O que é que vai ser o contradomínio?
>
> Maria – O contradomínio vai ser só para cima. Vai ser só… É sempre. É de zero a mais infinito… Zero, nunca é zero. Zero aberto.
>
> Ent. – Nunca é zero. Aliás qual é o menor valor que [a função] pode tomar? Como [o *x*] está ao quadrado…
>
> Maria – É zero.
>
> Ent. – Então, quando o *x* for zero isto dá quanto?
>
> Maria – Dá dois… É de dois a mais infinito.

A Maria indica o domínio mas o contradomínio parece trazer-lhe algumas dificuldades. A sua resposta assenta numa estratégia gráfica de cariz intuitivo sem recorrer a qualquer procedimento de cálculo, pelo que só quando lhe é sugerido o cálculo num caso concreto consegue estabelecer o contradomínio correctamente. Com base nesta abordagem esboça o gráfico da função representando apenas o seu vértice (figura 7.1), e tenta estabelecer a sua injectividade:

> Maria – Eu acho que injectiva, um [objecto] só pode ter uma imagem. Aaa…
>
> Ent. – Só pode ter, diz…
>
> Maria – Uma imagem. Não… Um ponto não pode ter duas imagens. Ao contrário, uma imagem não pode ter dois pontos… Acho que é isso.

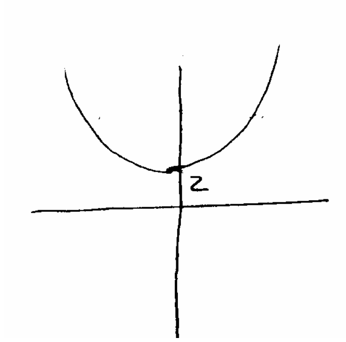


Figura 7.1. Gráfico da função x^2+2 da Maria.

O gráfico da função foi estabelecido atendendo a características da função, revelando entretanto alguma dificuldade ao referir-se aos objectos como pontos. O estabelecimento da injectividade com base na relação entre objectos e imagens parece não estar suficientemente claro acabando por ser concretizado com base na relação contrária, das imagens para os objectos e pela forma negativa. A Maria parece manifestar aqui um fenómeno de ventriloquismo, procurando enunciar a regra que traduz a propriedade. Só quando o entrevistador estabelece, com base num esboço gráfico, a diferença entre objectos e imagens apontando que no caso em análise há dois objectos diferentes com a mesma imagem é que ela refere que é o caso da parábola que representou e admite que neste caso não é uma função injectiva. Quanto à sobrejectividade ela parece encará-la como sendo o contrário da injectividade "Esta [x^2+2] não é injectiva. Então é sobrejectiva". A Maria parece ter alguma dificuldade em abordar algumas das propriedades das funções. O mesmo se passa com a invertibilidade. No caso concreto das funções trigonométricas ela considera ter usado uma restrição do domínio da função seno, onde esta era injectiva, para calcular a sua inversa, mas admite que se poderia ter usado todo o domínio que essa inversa existiria na mesma. A forma como se refere à função não favorece a distinção entre objectos e imagens e a noção de correspondência unívoca não é nunca referida. Também o conceito de função limitada é relacionado com o limite da função. Ela parece considerar que pelo facto de ser possível calcular o limite de uma função então esta também deve ser limitada. Quando lhe é pedido um exemplo, refere a função seno, afirmando que "está limitada entre -1 e 1". O conceito imagem de função da Maria parece assentar na utilização de processos, alguns destes de carácter informal, recorrendo mesmo nalgumas situações ao ventriloquismo. Quando se pretende explicitar esses processos ela faz uma abordagem bastante superficial, que não lhe permite uma coordenação dos mesmos por forma a conseguir dar significado ao conceito de função que foi ensinado.

No caso da Susana, quando pretende explicitar o conceito imagem de função, recorre à representação através de um diagrama de Venn:

> Susana – Era mais fácil explicar por aquilo dos conjuntos. Que… uma função é sempre com… Com um… Quer dizer com um objecto. Como é que é? … Aaam… Sim, que uma imagem… só corresponde… Como é que é? … Uma imagem… Que este não pode corresponder a dois, pronto [desenhou o diagrama da figura 7.2].

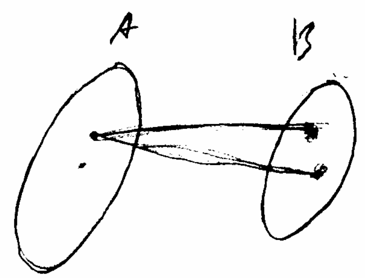


Figura 7.2. Diagrama da Susana para ilustrar uma correspondência que não é função.

A Susana aplica a noção de correspondência mas tem alguma dificuldade em utilizar a terminologia adequada para os elementos de ambos os conjuntos e refere-se à função apenas em termos esquemáticos. Depois de, com a ajuda do entrevistador, ter explicitado a correspondência anterior em termos de objectos e imagens, deu como exemplo a função afim que traduziu pela expressão algébrica $2x+1$. Quando se pretendeu caracterizar o conceito imagem de injectividade a partir desta função, a Susana recorre de novo ao esquema inicial:

> Susana – [$2x+1$] Injectiva? É.
>
> Ent. – O que é que quer dizer ser injectiva?
>
> Susana – Injectiva é que… Era este exemplo há bocado [refere-se ao diagrama da figura 7.2], que… dois objectos diferentes não podem ter a mesma imagem.
>
> Ent. – E isso acontece nessa [$y=2x+1$] ou não?
>
> Susana – Aqui não há nenhum que tenha. Dois diferentes nunca têm a mesma.

Quando é preciso referir exemplos concretos a Susana parece mais confortável na utilização do esquema inicial. No entanto classifica a função afim como injectiva sem a representar graficamente. Quando lhe é pedido um exemplo de uma função que não seja injectiva ela refere que é “o caso das parábolas” e usa um processo gráfico para verificar a injectividade traçando uma recta perpendicular ao eixo vertical. A forma de verificar a injectividade por este processo não é no entanto explicitada, tendo o entrevistador que verbalizar o processo para chegar à conclusão pretendida. Assim, a Susana consegue completar o raciocínio do entrevistador, a partir do momento em que este lhe refere a existência de dois objectos diferentes, concluindo ela que eles “têm a mesma imagem”. Ela parece recorrer aqui a um processo de ventriloquismo, apropriando-se da voz do entrevistador para enunciar o processo. O conceito imagem de função limitada também parece apresentar algumas limitações que impedem a Susana de o aplicar para caracterizar essas mesmas funções. Quando lhe é pedido para indicar uma função que seja limitada a Susana indica a afim que tinha representado anteriormente:

> Susana – Pode ser esta [$2x$+1] … dizendo que é só entre o… No intervalo 1 a 2, por exemplo. Não é isto?

Ela considera que a função pode ser limitada fazendo uma restrição ao domínio. Neste caso considera apenas o intervalo real [1, 2] e desta forma obtém a função limitada. Embora esta condição esteja a limitar o domínio ela parece estar a considerar o conjunto das imagens como sendo aquele que está limitado. Quando lhe é pedido para indicar uma função limitada sem impor qualquer restrição no domínio ela refere-se aos casos em que a função tende para um dado limite finito e portanto desta forma ficaria limitada. É o caso da função exponencial:

> Susana – Por exemplo a e^x… Quando tende para menos infinito está limitada pelo 0… Que é 0.

Ela faz um esboço gráfico desta função para justificar que é limitada quando "tende" para $-\infty$, mas não faz qualquer distinção entre ser limitada e ser limitada inferiormente. Só com a ajuda do entrevistador consegue chegar a exemplos de funções limitadas – funções seno e coseno – funções estas que parece integrar no seu conceito imagem.

A Susana apresenta assim um conceito imagem de função que assenta num conjunto de processos, alguns deles bastante elementares, não conseguindo coordenar esses mesmos processos para poder dar significado à definição formal tal como ela foi apresentada nas aulas. Ela consegue ainda recorrer a representações como esboços gráficos e expressões algébricas tendo no entanto alguma dificuldade em coordenar os processos que lhe estão subjacentes quando procura caracterizar os conceitos em estudo.

Quando é pedido à Alexandra para explicar o que entende por função ela começa por afirmar que não sabe o que é mas acaba por dar como exemplo a função seno, $sen(2x+1)$, que considera ser uma função tentando justificar tal facto com base nas sucessões:

> Alexandra – É [uma função] … mas… não convém ter… Nas sucessões nós tínhamos o domínio… Não é nada…
>
> Ent. – Era. Nas sucessões o domínio estava onde?
>
> Alexandra – Não. Era naturais não era? E aqui é reais e o conjunto de chegada é real.

A Alexandra refere-se ao domínio e ao conjunto de chegada, embora não consiga definir o seu papel na função e identifica os elementos destes dois conjuntos como sendo reais. Mesmo da posse destes elementos ela não consegue coordená-los e procura explicitar o conceito com a noção de gráfico:

> Alexandra – Pois mas eu não sei em concreto o que é uma função. Não se pode dizer que é um gráfico pois não? É um… Onde há pontos do domínio, onde há pontos que tem imagens.

Ela refere os termos gráfico, domínio e imagem mas não refere a forma como é possível relacionar estes elementos, pelo que o seu conceito de função parece ser bastante primário. Embora o conceito imagem manifestado pareça ser superficial, há outros conceitos associados à função que a Alexandra parece entender com maior profundidade. É o caso do conceito de função limitada que ela caracteriza de um modo bastante preciso:

> Alexandra – Funções limitadas é que… têm. Estão limitadas entre… qualquer coisa, no contradomínio.
>
> Ent. – Entre dois valores.
>
> Alexandra – Dois valores do contradomínio. O seno está entre -1 e 1.

É desta forma que ela verbaliza a sua noção de função limitada, dando uma explicação genérica e posteriormente concretizada com um exemplo concreto. É também com base na função seno que ela se refere à monotonia, usando o seu gráfico para justificar que se trata de uma função não monótona:

> Alexandra – O seno… não é monótona.
>
> Ent. – Não é, porquê?
>
> Alexandra – O seno vai sempre assim [descreve um movimento ondulatório com a mão]. Ora, como é que é a função seno… Ela é ímpar não é… É assim, qualquer coisa assim. [desenha a figura 7.3]
>
> Ent. – Exactamente.
>
> Alexandra – E não é monótona porque é crescente e decrescente, e a monotonia é uma, ou é crescente ou é decrescente.

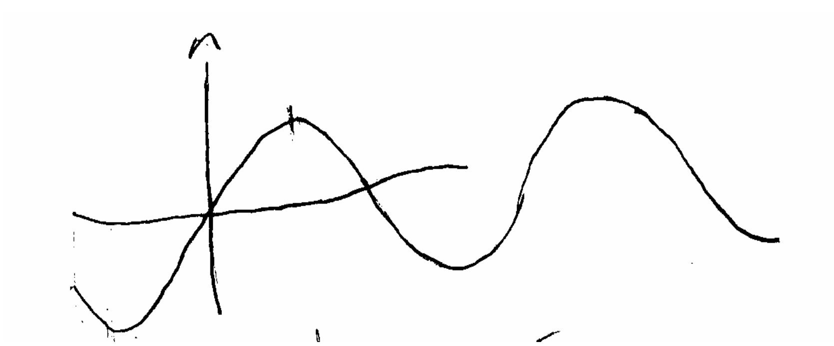


Figura 7.3. Esboço gráfico da função seno da Alexandra.

Ela traça um esboço gráfico da função seno (figura 7.3), tomando como referência algumas propriedades bastante específicas como é o caso da paridade da função e é desta forma que explicita a sua noção de monotonia, tomando como exemplo um gráfico de uma função que não é monótona. Também a noção de injectividade é baseada num esboço gráfico (figura 7.4):

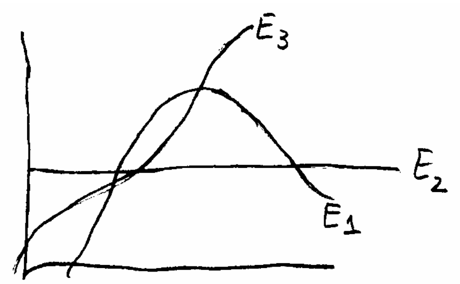


Figura 7.4. Esboço gráfico para justificar a injectividade de uma função genérica (Alexandra).

> Alexandra – Injectivas é quando a imagem… Pontos da função de onde veio. Objectos diferentes correspondem imagens diferentes. Não faz assim… está a perceber? [desenha o gráfico E_1 e usa o processo de verificação traçando E_2] [6]
>
> Ent. – Por exemplo o seno será injectiva ou não?
>
> Alexandra – O seno não é injectiva.
>
> Ent. – Lembras-te de alguma que seja injectiva?
>
> Alexandra – Uma injectiva. Então a exponencial ou a logarítmica. Fazem assim. [desenha E_3]

A Alexandra continua a privilegiar o esboço gráfico para explicar a injectividade. Ela parece sentir alguma dificuldade com a terminologia dos elementos dos conjuntos envolvidos embora posteriormente os identifique correctamente o que lhe permite utilizar uma argumentação válida. Ela parece no entanto mais confortável com o esboço gráfico pelo que utiliza o esboço E_1 complementado com o E_2 para justificar o que a função não deve ser para poder ser considerada injectiva. O esboço E_2 é um processo que serve para mostrar a existência de dois objectos diferentes com a mesma imagem embora ela não o explicite verbalmente. O esboço E_3 serve como exemplo do comportamento gráfico da função que é injectiva. Para além deste esboço gráfico a Alexandra refere ainda outras funções injectivas e que esboça graficamente mesmo sem traçar qualquer sistema de eixos auxiliar. A Alexandra continua a mostrar esta capacidade de se referir de forma genérica a algumas propriedades das funções quando se refere à invertibilidade, usando como exemplo o caso das funções trigonométricas inversas estudado no início do ano lectivo. Ela explicita o processo utilizado para inverter a função seno usando a restrição de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ onde ela é injectiva. Quando lhe foi pedido para justificar a necessidade da injectividade para que se pudesse estabelecer a função inversa, a Alexandra mostrou-se incapaz de dar uma resposta satisfatória. Não conseguiu explicar por que não poderia utilizar outro intervalo, o intervalo de 0 a π que lhe foi indicado pelo entrevistador, nem foi capaz de utilizar uma estratégia gráfica para resolver a situação. Após algum questionamento parece ser possível concluir que o seu conceito imagem de função inversa não comporta a necessidade de a relação entre objectos e imagens ter que ser baseada numa

[6] As referências E_1, E_2, E_3, foram introduzidas pelo investigador como forma de identificar os esboços gráficos.

correspondência unívoca, mostrando ela mesmo alguma perplexidade perante este facto. A Alexandra conseguiu referir que ao definir a função inversa o domínio e contradomínio desta correspondiam ao contradomínio e domínio da função dada, mas não conseguiu identificar o tipo de relação que se estabelecia entre os objectos e as imagens.

O conceito imagem de função da Alexandra parece ser caracterizado por possuir um conjunto de propriedades que ela utiliza com segurança, como é o caso da monotonia, injectividade ou sucessão limitada, no entanto não consegue muitas vezes aceder aos processos subjacentes a essas propriedades e quando identifica alguns deles tem dificuldade em os coordenar. Ela privilegia uma abordagem gráfica destas propriedades. Desta forma, ainda que ela refira por várias vezes as noções de domínio, contradomínio, objectos, imagens ou correspondência, não consegue coordenar estes elementos para estabelecer a função como uma correspondência unívoca entre objectos e imagens. Assim, propriedades como a invertibilidade são difíceis de estabelecer, ainda que ela dê alguns exemplos concretos que foram amplamente explorados nas aulas. Ela parece ter memorizado alguns desses exemplos que servem de protótipos na explicação de determinadas propriedades.

No caso da Sara, o conceito de função que evoca inicialmente também se revela bastante elementar. Quando lhe é pedido para explicar o que é uma função ela afirma que "é algo que varia em função… de qualquer coisa". Apesar desta resposta, ela dá como exemplo de função a expressão x^2 e, com a ajuda do entrevistador, atribui nomes aos elementos dos dois conjuntos envolvidos:

> Ent. – Por exemplo aqui nesta, x^2, há um conjunto de valores que o x pode tomar. Lembras-te como é que se chamavam esses valores?
>
> Sara – Objectos.
>
> Ent. – E aquilo que se obtém?
>
> Sara – São as imagens.
>
> Ent. – Então o que é que acontece aqui na função. Como é que a gente pode definir melhor a função?
>
> Sara – Aaaa… As imagens variam, não…
>
> Ent. – Tu estás a dizer que temos objectos.
>
> Sara – Que variam em função dos objectos.
>
> Ent. – Depois são transformados.
>
> Sara – Em imagens.

Ela identifica os objectos e as imagens, mas não consegue explicitar a forma como ambos estão relacionados, admitindo mesmo que a relação que há entre ambos pode ser qualquer. É-lhe pedido para estabelecer o tipo de correspondência que há entre os dois conjuntos, com base no gráfico da função que indicou anteriormente, x^2. Inicialmente ela tem algumas dúvidas sobre o tipo de gráfico "é assim tipo uma recta, não é? … x^2… Ou é uma parábola?", mas acaba por esboçar a parábola "com a concavidade virada para cima" da figura 7.5:

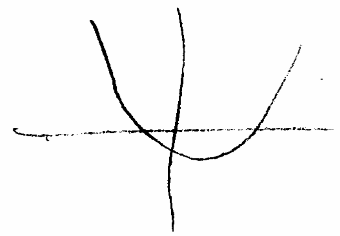


Figura 7.5. Esboço gráfico da função $f(x)=x^2$ da Sara.

A Sara esboça o gráfico de uma parábola baseada apenas no sentido da concavidade e sem ter em atenção qualquer outra propriedade, como a simetria ou a posição do vértice. Com base nesta representação ela explica a existência de dois objectos diferentes com a mesma imagem, traçando uma linha horizontal que corta o esboço gráfico em dois pontos, e é com base nesta abordagem que refere a univocidade da correspondência:

> Ent. – E agora posso ter um objecto com duas imagens?
>
> Sara – Não. Há uma coisa que é, a um objecto corresponde uma e só uma imagem.

A Sara parece recorrer a um processo de ventriloquismo, que lhe permite falar do tipo de correspondência que se verifica entre objectos e imagens, que não conseguiu utilizar quando lhe foi pedido inicialmente para explicar o seu conceito de função.

Quando se pretende caracterizar o seu conceito imagem de função limitada, ela refere que a função deve ter "majorante e minorante". Como exemplos deste tipo de funções indica o seno e o coseno, mostrando desta forma ser capaz de evocar o conceito recorrendo a exemplos concretos de funções. Também quando se pretende caracterizar sua noção de monotonia ela utiliza o mesmo tipo de abordagem. Inicialmente refere que a monotonia está relacionada com o facto de a função ser crescente ou decrescente e considera que a função será decrescente quando $f(a)<f(b)$. Posteriormente, apoiada por um esboço gráfico (figura 7.6) traduz simbolicamente a monotonia:

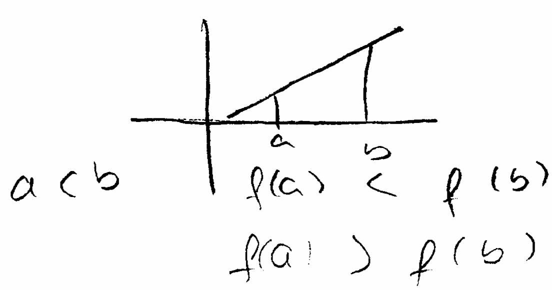


Figura 7.6. Esboço gráfico da Sara para traduzir simbolicamente a monotonia de uma função.

Sara – O $f(a)$ há-de ser menor que o $f(b)$ se ela for decrescente.

Ent. – O $f(a)$.

Sara – É esse. Se ela fosse crescente… Por exemplo, se fosse assim. [faz esboço gráfico]

Ent. – Hum.

Sara – $f(a)<f(b)$.

Ent. – Quando o *a* era menor…

Sara – Quando $a<b$.

(…)

Sara – Assim era se ela fosse crescente.

Ent. – Se ela fosse decrescente o que é que ia acontecer? O *a* continuava a ser menor que o *b* mas…

Sara – $f(a)>f(b)$.

Ela usa o gráfico para estabelecer o facto de a função ser crescente e a partir desta relação estabelece o caso em que ela é decrescente. É ainda com base no esboço gráfico de uma função quadrática que a Sara estabelece a noção de função injectiva. Inicialmente tem algumas dúvidas do tipo de relação existente entre os objectos e as imagens mas com base no esboço gráfico de uma parábola ela identifica dois objectos diferentes com a mesma imagem e portanto considera que não se trata de uma função injectiva.

A Sara apresenta assim uma concepção do conceito de função que se revela bastante limitada no que diz respeito ao tipo de correspondência entre os objectos e as imagens. Embora ela refira estes elementos, tem alguma dificuldade em coordená-los de modo a explicitar a definição que foi abordada nas aulas. Há no entanto outro tipo de propriedades relacionadas com o conceito que ela evoca com sucesso, como é o caso da monotonia, função limitada ou injectividade. Quando se procura evidenciar os processos que estão na sua origem ela recorre a exemplos gráficos, que por vezes parecem ser usados com protótipos de algumas dessas propriedades.

1.2. Conceito imagem instrumental

Os alunos que apresentam um conceito imagem instrumental referem-se ao conceito de função traduzindo-o por uma expressão ou por um gráfico. Na maior parte dos casos estes conceitos imagem são predominantemente imagéticos, sendo as funções associadas aos gráficos.

Para o Fernando o conceito de função é associado à existência de uma expressão:

Fernando – Uma função é uma expressão. Uma expressão constituída por constantes e variáveis e que vai ser modificada através dessas variáveis. Aaa… que podem tornar a função… Aaa… já ia falar em gráficos. (…) Pode ter uma apresentação gráfica, pode ter uma representação analítica…

Ele refere a expressão como a forma de representar a função de onde destaca o papel das constantes e variáveis, mas sem referir os processos subjacentes que lhe permitem relacionar os vários elementos que o constituem. Além da representação algébrica ele considera também a gráfica que parece ser estabelecida com base em protótipos de gráficos que conhece. Assim, quando é pedido um exemplo de uma função ele refere a expressão algébrica x^2, que representa graficamente com base nalgumas propriedades gerais (figura 7.7):

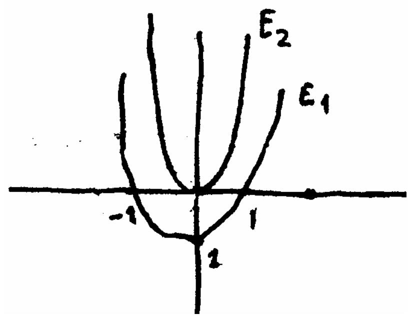


Figura 7.7. Representação gráfica da função $y=x^2$ do Fernando.

Fernando – Tem a parábola. Tem concavidade virada para cima… Passa aqui em -1 e 1… [desenha o esboço gráfico E_1[7]]

(…)

Ent. – [Estás a dizer] que esta aqui passa em -1 e 1?

Fernando – Hum, hum, não passa?

(…)

Fernando – Ah! Sim, se tiver y=$2x^2$, não é $2x^2$. O 2 vai fazer o quê? Vai aumentar…

Ent. – O 2 vai alterar …

Fernando – Alfa x^2? …

Ent. – Estavas a dizer que esta, x^2, é que passava nestes dois pontos?

Fernando – Sim …

Ent. – Se calhar não.

Fernando – x^2 não passa aí?

O Fernando esboça o gráfico a partir do sentido da concavidade e admitindo que a função teria dois zeros, em -1 e 1. Ele parece estar convicto desta representação e mesmo quando é questionado tenta introduzir algumas alterações no coeficiente do x^2, mas continua a não fazer uma abordagem algébrica da situação que lhe permitiria estabelecer os pontos que tomou como referência. Só quando lhe é pedido para calcular a imagem dos pontos que estava a considerar como zeros da função é que ele se apercebe que estes não estão correctamente marcados e esboça o segundo gráfico (E_2), com o vértice na origem dos eixos. Embora pareça

[7] As referências E_1, E_2, foram introduzidas pelo investigador para identificar os esboços gráficos.

privilegiar uma abordagem baseada em protótipos de funções, quando lhe é pedido para explicitar o domínio e contradomínio da função que representou graficamente mostra um desempenho bastante favorável identificando ambos os conjuntos correctamente. Também quando se pretende caracterizar a noção de injectividade o Fernando continua a privilegiar uma abordagem gráfica:

> Fernando – Injectiva [x^2] não. Se traçar uma linha ao longo do gráfico ela vai ter duas imagens… para o mesmo. Quer dizer, vai ter duas imagens para objectos diferentes.
>
> Ent. – Para objectos diferentes tem…
>
> Fernando – Neste caso tem imagens iguais.
>
> Ent. – Portanto, para ela ser injectiva, o que é que tem que acontecer?
>
> Fernando – Não pode ter imagens iguais, cada objecto tem que ter uma imagem.

Ele traça uma linha horizontal que intersecta o gráfico da parábola em dois pontos. Desta forma pretende mostrar que se obtém a mesma imagem para dois objectos diferentes, no entanto tem alguma dificuldade em estabelecer verbalmente esta relação. A injectividade só é verbalizada em termos de objectos e imagens com a ajuda do entrevistador.

A concepção anterior de injectividade volta a ser evocada quando é referida a invertibilidade das funções. O Fernando considera que para poder inverter a função ela tem que ser injectiva e dá como exemplo o caso das funções trigonométricas inversas estudadas anteriormente. Embora ele refira esta necessidade da injectividade para poder inverter a função, tem algumas dificuldades em explicitar o que aconteceria se a função não fosse injectiva. Ele esboça o gráfico de uma parábola "deitada" e verifica que neste caso consegue ter um objecto com duas imagens, mas esta constatação não lhe permite explicar a razão pela qual aquela relação não pode ser uma função. Ele parece considerar que há função sempre que se pode estabelecer uma relação entre objectos e imagens, relação essa normalmente representada por uma expressão ou um gráfico. A univocidade da correspondência entre objectos e imagens só é estabelecida com a ajuda do entrevistador e quando este recorre a um diagrama de Venn. O conceito de função limitada também parece causar algumas dificuldades ao Fernando. Ele afirma que a função quadrática representada anteriormente não é limitada mas não consegue explicar porquê. Posteriormente refere a função x-5, que considera ser uma recta mas que também não é limitada. Só quando o entrevistador se refere às funções trigonométricas, em particular à função seno, para questionar se serão ou não limitadas é que conclui:

> Fernando – Ah! O seno é limitado. É sempre limitado e o coseno também…
>
> Ent. – Por que é que tu podes garantir que é limitado?
>
> Fernando – É limitada porque o domínio vai ser 1 e -1.
>
> Ent. – O?

Fernando – O contradomínio.

O Fernando parece inicialmente ter algumas dúvidas sobre qual dos conjuntos deveria ser limitado para que a função também o fosse. Ao recordar-se da função seno e coseno parece usá-las como protótipos de funções limitadas, conseguindo assim clarificar o seu conceito imagem de função limitada.

O conceito imagem de função do Fernando parece basear-se essencialmente em dois tipos de representações: a expressão algébrica e o gráfico. A representação algébrica surge como uma forma de poder manipular as variáveis e quase nunca é usada para estabelecer procedimentos de cálculo como por exemplo calcular imagens de objectos. A representação gráfica permite-lhe abordar o conceito de uma forma mais ampla, assentando este em determinados protótipos que ele não relaciona com processos algébricos e desta forma mostram-se limitativos da compreensão do conceito. A dificuldade de manipular e relacionar os objectos que estão na base do conceito faz com que o mesmo seja usado de forma compartimentada. É o que acontece por exemplo quando a univocidade da correspondência entre objectos e imagens não é tida em consideração.

De seguida são analisados os conceitos imagem do Pedro, do José e do Manuel que apresentam uma característica comum ao referirem-se ao conceito: usam preferencialmente os gráficos. Eles revelam assim um conceito de cariz imagético ainda que globalmente manifestem dificuldades em relacionar os vários processos e objectos que lhe estão subjacentes.

É caso do Pedro, quando pretende explicitar o seu conceito de função, relacionando-a com um gráfico:

Pedro – Bem, o que é que é uma função … Uma função é defendida por um gráfico também. [Pausa] Só que, ao contrário da sucessão, é contínua… É contínua quer dizer que tem todos os objectos e tem todas as imagens. [Pausa] Ou seja, poderá ser uma coisa assim… Pode ser uma coisa assim … Pode ser muitas coisas. [desenha a figura 7.8]

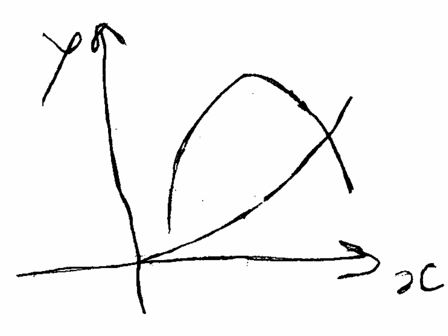


Figura 7.8. Exemplos de gráficos de funções do Pedro.

O Pedro associa assim a sua noção de função a uma representação gráfica, que distingue das sucessões pela forma como os conjuntos envolvidos são construídos. Refere-se aos objectos e imagens como pertencendo a conjuntos de números reais e dá como exemplo o esboço de dois gráficos (figura 7.8), que são representados apenas no primeiro quadrante sem recurso a qualquer expressão algébrica ou propriedade geral. Ele parece usar alguns protótipos de gráficos como o caso do da função quadrática. O Pedro relaciona ainda os diferentes conjuntos com o gráfico, considerando que os objectos estão no eixo horizontal e as imagens no eixo vertical. Quando se pretende concretizar o tipo de relação que se estabelece entre os elementos dos dois conjuntos ele exprime a univocidade da correspondência:

> Ent. – Será que um objecto pode ter mais do que uma imagem? [Pausa prolongada]
>
> Pedro – Pode ter mais do que uma imag[em], não. Não, é ao contrário. Não pode ter, se não não é considerado função.
>
> Ent. – Portanto, dois objectos diferentes…
>
> Pedro – É que podem ter a mesma imagem.

Embora inicialmente o Pedro tenha alguma hesitação em exprimir a forma como a correspondência se deve estabelecer, faz depois uma distinção bastante clara entre as duas situações que relacionam os objectos e as imagens, identificando a correspondência como unívoca, mesmo sem ter necessidade de recorrer a um exemplo concreto. Ele parece ser capaz de reconstruir este tipo de relação característico das funções sem recorrer a processos ou procedimentos mais elementares. Quando se pretende fazer uma caracterização mais vasta do seu conceito imagem procurando explicitar a noção de função limitada, o Pedro começou por referir-se à limitação superior e inferior:

> Ent. – O que é que quer dizer que a função é limitada?
>
> Pedro – É limitada superiormente e inferiormente. Deve ser a mesma coisa, penso eu.
>
> Ent. – Um exemplo de uma função limitada?
>
> Pedro – Um exemplo de uma função limitada? Aaa… y=2… É limitada.
>
> Ent. – Exactamente, uma função constante.
>
> Pedro – Depois a $5+\frac{1}{x}$ também deve ser limitada… (…) Deve ser limitada em princípio.

O Pedro exprime a sua noção de função limitada considerando que é possível limitar o seu contradomínio e dá o exemplo de uma função constante. Quando pretende dar outro exemplo, recorre à função $f(x)=5+\dfrac{1}{x}$, e revela algumas limitações da sua capacidade de traduzir graficamente esta função. Embora considere que o domínio da função é $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$ faz um esboço gráfico num sistema de eixos, representando o seu traçado apenas no primeiro quadrante e que não traduz a expressão algébrica considerada. O Pedro parece estar a considerar apenas imagens na parte positiva do eixo horizontal, tal como acontecia com as sucessões, e continua a recorrer a protótipos de gráficos sem usar a expressão algébrica para calcular pontos de referência que ajudem no traçado do gráfico.

A noção de injectividade é estabelecida pela negativa:

> Pedro – Uma função é injectiva se… se houver dois objectos com duas, com a mesma imagem…
>
> Ent. – Injectiva, se houver? …
>
> Pedro – Um objecto, dois objectos com a mesma imagem. Não deve ser ao contrário. Aaa… não injectiva é que é, dois objectos com a mesma imagem.

A injectividade parece causar alguma hesitação ao Pedro e só consegue explicitar o conceito estabelecendo a não injectividade. Esta abordagem parece estar de acordo com a tradução gráfica que faz da noção, pois, segundo ele, para verificar a injectividade "traçamos uma recta paralela ao eixo e percorremos o gráfico. Se a recta tocar em dois sítios da função quer dizer que não é injectiva". Parece ser esta a abordagem que usa para estabelecer a relação entre os objectos e as imagens. Quando se pretende caracterizar a função inversa o Pedro considera que há algumas funções que não admitem inversa precisamente porque para essa transformação deixam de ser funções. Esta é uma abordagem genérica que parece não encontrar eco quando se pretende estabelecer as condições para que uma dada função seja invertível. Usando como exemplo o esboço gráfico da parábola que fez inicialmente considerou que esta não seria invertível e acabou por a representar no mesmo sistema de eixos mas assumindo como eixo de simetria um eixo horizontal (figura 7.9):

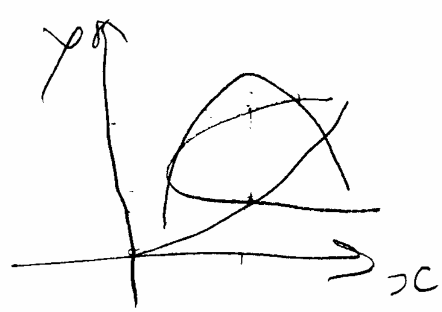


Figura 7.9. Esboço da parábola com eixo de simetria horizontal do Pedro.

Desta forma faz uma leitura mais pormenorizada e considera que tem o mesmo objecto com "duas imagens iguais". Ele parece estar a fazer a leitura das imagens no eixo horizontal que só é corrigida com a intervenção do entrevistador. Mesmo quando consegue estabelece que este tipo de função não é invertível por deixar de haver uma correspondência unívoca, ele não identifica quais as condições a que a função deve obedecer para ser invertível. Admite que no caso de ser uma função linear já deve ser invertível mas não consegue ir além da distinção entre as duas classes de funções: as lineares que são e as quadráticas que não. Esta dificuldade em estabelecer que a função deve ser injectiva para poder ser invertível parece estar relacionada com a forma como identificou a injectividade através do contra-exemplo.

O Pedro parece possuir um conceito imagem de função que assenta essencialmente em esboços de gráficos que representam protótipos de determinadas funções. Ele identifica os vários elementos intervenientes na função mas por vezes tem alguma dificuldade em coordená-los, nomeadamente quando se torna necessário recorrer aos processos e objectos mais elementares. É por exemplo o caso em que mesmo perante o gráfico de uma "parábola deitada" ele não identifica correctamente as diferentes imagens de um mesmo objecto.

Também o José recorre à representação gráfica quando lhe pedem para explicar o que entende por função. Ele começa por esboçar o gráfico da figura 7.10 traduzindo-o algebricamente pela expressão $y=x$.

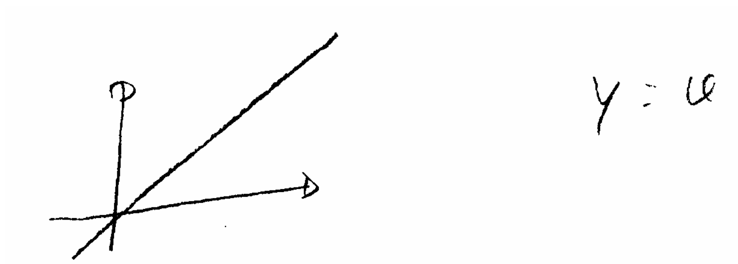


Figura 7.10. Esboço gráfico da função $y=x$ do José.

Para ele este tipo de gráfico parece obedecer a um modelo conhecido, pois não precisa de recorrer à representação de qualquer ponto concreto e consegue ainda referir-se ao domínio e contradomínio como sendo o conjunto $\boldsymbol{R}$. É com base nesta representação que ele explicita a sua noção de função limitada, considerando que esta não pode ser limitada por "estar sempre a crescer". Quando lhe é pedido para explicar o que significa dizer que a função é limitada ele usa como exemplo a função seno "está limitada no… no eixo dos *YY*. Não passa acima de 1 nem abaixo de -1" Desta forma o José consegue, com base num caso concreto, explicitar a sua noção de função limitada como uma propriedade que diz respeito ao seu contradomínio. Quanto à injectividade ele considera que a função que esboçou inicialmente é injectiva afirmando que "cada imagem… só tem um objecto… Cada y só tem um objecto, um x". Ele refere a injectividade com base na relação que se estabelece das imagens para os objectos e indica a parábola como exemplo de uma função não injectiva, afirmando que "há dois objectos diferentes com duas imagens iguais". Ele parece ter interiorizado as noções de injectividade e função limitada com base na sua representação gráfica o que lhe permite um desempenho satisfatório.

Quando se trata da invertibilidade das funções o José não consegue fazer uma abordagem do mesmo tipo das anteriores e, ao referir-se à inversa da função afim que esboçou graficamente no início, utilizou a expressão algébrica exprimindo o x em função do y. Quando foi confrontado com o gráfico da função quadrática, não conseguiu explicar se era ou não possível inverter esta função. Dado não haver nenhuma expressão, não pode recorrer à abordagem algébrica e também não foi capaz de aplicar o processo de inversão ao gráfico. Só quando o entrevistador referiu a injectividade ele se recordou das condições a impor para que fosse possível calcular a inversa.

O José apresenta um conceito imagem de função assente essencialmente numa abordagem gráfica que com recurso a determinados protótipos de funções lhe permite estabelecer as suas principais propriedades. Esta abordagem não lhe facilita o acesso aos processos e objectos mais elementares subjacentes ao conceito, refugiando-se nos processos algébricos quando não consegue utilizar os argumentos gráficos como justificação.

O Manuel também opta por esboçar um gráfico quando pretende explicitar o seu conceito de função. Ele começa por fazer a representação gráfica da figura 7.11 mas tem algumas dificuldades em estabelecer o significado desta representação:

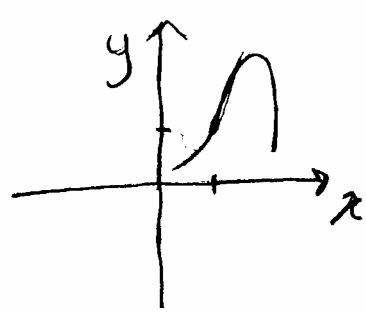


Figura 7.11. Esboço gráfico de uma função do Manuel.

> Manuel – O que me ocorre é que [a função] é definida em vários pontos. É por exemplo 1… 1… [está a representar no sistema de eixos do gráfico a abcissa e ordenada do ponto, (1,1)] Uma recta que é definida por vários pontos. Agora tem x e y em que um certo valor de…y corresponde o valor de x, tem uma imagem… Como é que é? Aaa… a uma im[agem]… Pois… Normalmente uma im[agem]… Um objecto corresponde a uma imagem. [Pausa] Normalmente, porque podem corresponder mais… Agora como é que eu hei-de explicar isso…

O Manuel faz o esboço gráfico e procura explicar o que acontece em termos da relação entre objectos e imagens. Começa por representar o ponto de coordenadas (1,1) marcando a sua posição nos eixos e refere-se em seguida a outro tipo de função, neste caso uma recta, pretendendo ilustrar a relação entre os elementos dos dois eixos. Refere-se a estes elementos como sendo x e y e estabelece a correspondência do y para o x. Posteriormente, quando utiliza a nomenclatura em termos de objectos e imagens, refere a correspondência ainda com os objectos em função das imagens. Esta abordagem parece ser determinante quando se pretende estabelecer a univocidade da correspondência. Embora ele considere que os objectos estão sobre o eixo horizontal, quando lhe é colocada a questão se um objecto pode ter duas imagens ele admite que sim e, ao tentar explicar, acaba por recorrer a mais um esboço gráfico (figura 7.12):

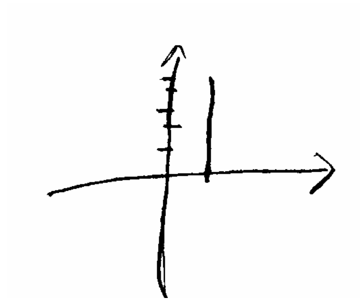


Figura 7.12. Esboço gráfico ilustrativo da existência de um objecto com várias imagens (Manuel).

Como anteriormente ele parece considerar que são os objectos que estão em função das imagens, aqui admite que o esboço gráfico representa uma função, mas ao mesmo tempo considera que no caso de ter uma recta horizontal também está perante uma representação de uma função. Desta forma o Manuel não consegue evocar a necessidade de uma correspondência unívoca para que a mesma represente uma função. Quando se pretende caracterizar o seu conceito de função limitada o Manuel apresenta uma concepção baseada nas noções de limitação superior e inferior:

> Manuel – Aaam… Assim que me ocorra… Uma função limitada é que têm que… tem que ser limitada inferiormente e superiormente. Portanto não pode tender nem para mais nem para menos infinito… Aaam… sei lá… Agora só arranjando uma… mas eu não me estou a lembrar de nenhuma.

A sua noção de função limitada parece estar relacionada com o contradomínio da função, onde ele exclui as situações em que existem limites infinitos e indica como exemplo a função seno, depois de ter feito um esboço gráfico, considerando que está limitada entre -1 e 1. No que se refere à monotonia o Manuel associa-a ao estudo dos extremos da função:

> Manuel – Monótona é, uma função monótona é… Quando me falam de monótona falam dos extremos, eu lembro-me dos extremos.
>
> Ent. – Extremos?
>
> Manuel – Sim… Portanto aaaa… Monótona… se é estritamente crescente, se é…aaa… Se é crescente ou decrescente.

Ele parece relacionar o conceito de monotonia com o estudo das funções onde é feito um quadro de sinais da derivada para a partir daí estabelecer a variação da função. Com base nesta concepção ele refere a função seno como não sendo monótona por estar a "crescer e decrescer". O conceito de injectividade volta a colocar alguns problemas, devido à sua abordagem em termos de correspondência entre objectos e imagens:

> Manuel – Injectiva é uma imagem… Um objecto só corresponde a uma imagem, não. Uma imagem só corresponde a um objecto… Posso estar enganado, eu sempre fiz confusão com isto.
>
> Ent. – Como é que tu vias aqui, por exemplo. [No esboço gráfico de uma parábola]
>
> Manuel – Essa é não injectiva.
>
> Ent. – Esta não é injectiva, porquê? O que é que acontece?
>
> Manuel – Porque uma imagem tem… pelo menos aqui, tem dois objectos.

Ele continua a estabelecer a relação das imagens para os objectos e quando tenta explicitar este tipo de correspondência sente alguma dificuldade. Acaba por estabelecer a injectividade com base nesta abordagem, e quando tem o apoio de um esboço gráfico também privilegia as imagens. Quando pretende indicar uma função injectiva usa também um esboço gráfico sem fazer qualquer referência a objectos ou imagens.

O Manuel apresenta assim um conceito imagem de função baseado essencialmente em determinados protótipos de gráficos de funções. Quando se pretende explicitar o conceito com base nos processos e objectos matemáticos que estão na sua base, ele mostra alguma falta de conhecimento dos procedimentos mais elementares não conseguindo coordená-los de modo que estes possam ser traduzidos em objectos matemáticos mais apropriados para a compreensão do conceito.

1.3. Conceito imagem relacional

Conforme já foi referido anteriormente, no início deste capítulo, esta categoria engloba os conceitos imagem de alguns alunos cujo conceito de função evocado é predominantemente verbal, aproximando-se do conceito ensinado nas aulas baseado na noção de correspondência. Outros alunos acabam por associar o conceito de função ao de sucessão, conseguindo no entanto estabelecer as diferenças que há entre ambos, com base na coordenação dos processos e procedimentos que estão na sua base.

Apresenta-se de seguida o grupo constituído pela Paula, João e Mariana, cujo conceito imagem de função evocado assenta na noção de correspondência.

É o caso da Paula que, quando pretende explicar o que entende por função, usa a noção de correspondência:

> Paula – É a correspondência entre os objectos e as imagens, mas a cada objecto só pode corresponder uma e uma só imagem.

Desta forma ela reforça a univocidade da correspondência e dá como exemplo de uma função a expressão algébrica x^2, que representa graficamente esboçando o gráfico com o vértice na origem dos eixos, a concavidade voltada para cima e o eixo dos *YY* como eixo de simetria. Identifica ainda o domínio e contradomínio neste caso concreto e refere estes dois conjuntos como sendo os objectos e as imagens, respectivamente. O seu conceito de função evocado parece assim coincidir com a definição do conceito que foi ensinada nas aulas. Quando se pretende caracterizar de uma forma mais alargada o seu conceito imagem de função, procurando saber o que significa uma função limitada, a Paula confunde esta noção com a de limite:

> Paula – [Uma função é limitada] É que tem limite, ou tende para algum *a*…
>
> Ent. – Por exemplo. Será que esta função, x^2, a gente pode dizer de que ela é limitada? …
>
> Paula – x^2… conforme para onde ela estiver a tender.

A Paula relaciona a noção de limite com a de função limitada não conseguindo estabelecer a diferença entre ambas. Quando se tenta que ela concretize a afirmação usando a função quadrática que entretanto já tinha representado graficamente, ela dá o exemplo do limite da função quando o *x* tende para 0.

> Paula – Quando *x* tende… para…
>
> Ent. – Diz, diz.
>
> Paula - Para 0. Neste caso dizemos que era o limite à direita e à esquerda.

A Paula centra a sua atenção no caso concreto em que o limite é 0 e refere-se aos limites laterais supondo estar em jogo a noção de função limitada. Só com a intervenção do entrevistador é que deu significado ao conceito indicando como exemplo de uma função limitada a função seno. Quando se pretende caracterizar a noção de injectividade, a Paula recorre a um caso concreto:

> Paula – [Funções injectivas] é que há… Por exemplo no coseno… se nós arranjarmos… Por exemplo só o seno em $-\pi/2$, $\pi/2$…É que neste intervalo a cada, a cada imagem corresponde um único objecto.

Recorda-se das funções trigonométricas inversas estudadas anteriormente, onde foi necessário restringir o domínio da função seno para calcular a inversa e indica correctamente a relação unívoca entre os objectos e imagens. Quando confrontada com o caso concreto da função quadrática, afirma que não se trata de uma função injectiva porque "a cada imagem corresponde mais do que um objecto" e que deste modo ela não pode ter inversa. Quando se pretende clarificar a razão pela qual este tipo de função deixa de ter inversa, surgem algumas dificuldades:

> Paula – Ah! A cada… Um objecto, a mais do que um objecto corresponde… uma imagem.
>
> (…)

> Paula – Então isso é assim… A uma imagem corresponde mais do que um objecto. E uma função é…

A Paula refere quase sempre a relação de correspondência das imagens para os objectos e esta abordagem traz-lhe algumas dificuldades quando pretende estabelecer o que acontece na relação inversa. Mesmo com a ajuda do esboço gráfico de uma parábola tendo como eixo de simetria o eixo horizontal ela não consegue verbalizar o tipo de correspondência aí expresso.

A Paula parece possuir um conceito imagem de função baseado na definição formal dada nas aulas, reconhecendo algumas propriedades associadas ao conceito quando este é aplicado a casos concretos e conseguindo estabelecer relações entre essas propriedades. Há no entanto algumas situações mais complexas, como o caso da invertibilidade, onde ela parece ter algumas dificuldades em coordenar os procedimentos e processos que lhe estão subjacentes. Estas limitações não parecem no entanto ser significativas para que se possa considerar que estamos perante uma concepção instrumental do conceito.

O João também utiliza a noção de correspondência quando pretende verbalizar o seu conceito de função:

> João – Agora é giro porque não posso… Há bocado defini uma sucessão à custa de uma função, agora não posso definir uma função à custa de uma sucessão. Então uma função é uma correspondência entre dois conjuntos…
>
> Ent. – E essa correspondência pode ser qualquer ou obedece a algumas regras em especial?
>
> João – Não, obedece. Obedece a algumas regras em especial, nomeadamente a uma regra que diz que a… um objecto não pode ter mais do que uma imagem.

O João começa por procurar definir a função com base na noção de sucessão, mas como já anteriormente tinha definido a sucessão como sendo uma função, procurou uma definição mais concisa e utilizou a noção de correspondência. Ele identifica os dois conjuntos envolvidos em termos de objectos e imagens bem como a univocidade da correspondência entre ambos. Quando lhe é pedido para dar exemplos de funções ele refere uma grande variedade indicando expressões algébricas para afins, quadráticas, racionais, exponenciais, trigonométricas e logarítmicas. Quando lhe é pedido para explicitar a sua noção de função limitada ele utiliza como exemplo a função seno "Aaa… Podemos [falar de funções limitadas]. Podemos no caso do… seno por exemplo, está limitada entre -1 e 1. Ou o coseno". O João estabelece o conceito de função limitada assim como a monotonia e a injectividade com base em exemplos de funções. Indica como funções monótonas crescentes o caso da afim e logarítmica e no caso de funções injectivas a exponencial, a logarítmica e a afim. Da mesma forma indica uma função não injectiva:

> João – Esta não é [injectiva].
>
> Ent. – Por exemplo. Por que é que não é?

João – O x^2. Porque x^2, por exemplo, a imagem do -1 é igual à imagem do 1, a imagem do -2 é igual à imagem do 2

Ent. – Portanto, ela para ser injectiva o que é que tem que acontecer?

João – Ela para ser injectiva tem que fazer… A cada imagem só pode corresponder um objecto.

A função quadrática não é injectiva porque se conseguem arranjar objectos diferentes com a mesma imagem. No entanto, quando tenta explicar a injectividade, estabelece a correspondência no sentido inverso, das imagens para os objectos. É também com base na função quadrática que o João explicita a sua noção de função inversa. Ele admite que podemos inverter a função x^2 mas "só se restringirmos a um determinado intervalo onde ela seja injectiva, caso contrário não tínhamos uma função". Ele relaciona a injectividade com invertibilidade de uma forma bastante clara, estendendo a noção à invertibilidade das funções trigonométricas abordadas anteriormente.

O João apresenta assim um conceito imagem de função que se baseia na definição aprendida nas aulas que usa com sucesso. Ele é capaz de aceder aos processos e procedimentos que estão na sua base coordenando-os e relacionando-os por forma a usar o conceito numa ampla variedade de situações.

No caso da Mariana a noção de correspondência também está presente quando ela afirma que uma função "é constituída por um conjunto de objectos e a cada um deles faz coincidir uma e uma só imagem". Ela refere dois conjuntos, os objectos e as imagens, e uma correspondência unívoca do primeiro para o segundo. Esta abordagem está bastante próxima da definição formal das aulas, embora nestas os conjuntos tenham sido referidos de uma forma mais abstracta, designados através de símbolos. Quando é pedido um exemplo de uma função ela indica uma quadrática, x^2+1, que, refere, tem a concavidade voltada para cima. Embora refira algumas propriedades gráficas, não fez qualquer esboço das mesmas e quando lhe foi pedido para referir a noção de função limitada fez uma abordagem baseada em funções concretas. Considerou que a função quadrática anterior não era limitada e deu como exemplo de uma limitada o coseno. Em nenhum dos casos sentiu a necessidade de esboçar o gráfico tendo apenas escrito as expressões algébricas das funções que ia referindo. É também desta forma que ela se refere à monotonia considerando que a quadrática não é monótona porque "cresce e decresce" e indica o intervalo real de 1 a mais infinito como exemplo de uma parte do domínio da função no qual ela é sempre crescente. A noção de injectividade também parece não causar dificuldades à Mariana:

Mariana – É corresponderem imagens, a objectos diferentes corresponderem sempre imagens diferentes… Esta [x^2+1] não é injectiva…

Ent. – E, por exemplo, dois objectos diferentes que tenham a mesma imagem?

> Mariana – O 2 e o -2. Não… o 2 e o -2.

Ela explicita a forma como se estabelece a correspondência entre os objectos e imagens e no caso concreto dá exemplos para justificar a não injectividade. Quando se procura caracterizar a noção de função inversa a Mariana relaciona-a com a de simetria. Depois de o entrevistador referir o estudo das funções trigonométricas inversas efectuado anteriormente ela faz uma abordagem algébrica concluindo que tem que igualar a função a *y*. É nesta altura que parece recordar-se do processo desenvolvido anteriormente e refere que precisa de definir um intervalo onde a função seja injectiva para poder ter inversa. Sente alguma dificuldade em explicitar o que acontece se a função não for injectiva mas conclui que "os objectos ficam com duas imagens".

A Mariana apresenta assim um conceito imagem de função próximo do abordado nas aulas e que ela consegue usar com sucesso ao estabelecer o conceito e as propriedades que lhe estão associadas. Ela recorre várias vezes a gráficos de funções que apenas traduz pela sua expressão algébrica, mas que mostra ser capaz de visualizar para estabelecer algumas das suas propriedades mais específicas.

Apresenta-se de seguida um outro grupo de alunos, constituído pela Carla, pela Madalena, pelo Joaquim e pela Sofia onde o conceito de função evocado tem por base a noção de sucessão.

É o caso da Carla que quando tenta explicar o que entende por função relaciona o conceito com o de sucessão "[Uma função é] o género de uma sucessão, só que enquanto uma sucessão é definida por pontos a função é uma linha contínua… de pontos". Ela estabelece assim o conceito de função destacando as diferenças entre as duas representações gráficas, que no caso da função passa a ser uma linha contínua. Embora não refira directamente os conjuntos envolvidos, usa-os noutro tipo de situações. Quando pretende explicar a razão pela qual a função afim $y=x$, não é limitada refere-se ao domínio e contradomínio:

> Carla – Ela não é limitada porque como o ***R*** está contido… como o *x* está contido no ***R*** todo, aaa… ela também vai ter um contradomínio contido no ***R*** todo. Por isso vai de menos infinito a mais infinito e nós não conseguimos considerar nenhum limite.

A Carla conclui que o domínio e o contradomínio são o conjunto ***R***. A função não é limitada pois o conjunto das suas imagens também o não é. Indica como função limitada, a função constante, e quando lhe é pedida outra, ela refere a função $g(x)=\frac{x-1}{x}$. Ela parece estar a relacionar esta função com a sucessão correspondente onde o limite era finito e o primeiro termo estabeleceria o outro limite para os termos. Embora tenha indicado $g(x)$ como sendo uma função limitada, não consegue justificar a sua afirmação, mas considera que para ser limitada "é porque ela está dentro de um intervalo". Quando se procura caracterizar com mais pormenor o que ela considera que está dentro desse intervalo, afirma que são as imagens. A monotonia também é uma propriedade das funções que a Carla concretiza com facilidade "[$y=x$] ela é monótona e neste caso é monótona crescente. Se tivéssemos um menos atrás era monótona decrescente". A partir da representação algébrica estabelece a monotonia da função e da sua simétrica. A noção de injectividade é apresentada com algumas hesitações:

> Carla – Uma função injectiva é uma função que para cada ponto tem uma imagem… Injectiva… sim, por exemplo, o seno e o coseno não são injectivas.
>
> Ent. – Porquê?
>
> Carla – Porque eles à medida que se vai percorrendo o seu domínio eles vão repetindo várias vezes a mesma imagem.

A Carla tem algumas dificuldades em exprimir a forma como os objectos e as imagens se relacionam, referindo-se aos objectos como sendo pontos, e utiliza um caso concreto para justificar a não injectividade. Refere ainda as funções trigonométricas inversas como exemplos de funções obtidas a partir de restrições do seno e coseno, que sendo injectivas tornaram possível a inversão destas funções.

A Carla apresenta assim um conceito imagem da função que lhe permite lidar com sucesso com várias propriedades que lhe estão associadas. Por vezes ela necessita de recorrer a exemplos concretos para estabelecer algumas propriedades, mas mesmo assim não necessita de fazer as representações gráficas das funções que utiliza.

Para a Madalena o conceito de função evocado também é associado às sucessões:

> Madalena – [Função] é parecido com uma sucessão. É parecido com uma sucessão porque também há uma correspondência… só que desta vez é entre objectos [e] imagens e… Quer dizer o domínio não é o mesmo… O domínio é sempre diferente mas, mas no domínio das sucessões é diferente, é o conjunto ***N***… enquanto que nas funções é o domínio ***R***.
>
> Ent. – Exactamente.
>
> Madalena – Dependendo das funções não é? Há umas restrições.

A correspondência entre objectos e imagens não pode ser qualquer pois "a cada objecto corresponde uma e só uma imagem". Afirma que a correspondência deve ser unívoca para que se possa definir uma função. Quando se pretende caracterizar o seu conceito imagem de função limitada ela fica confusa:

> Ent. – Também podemos falar de funções limitadas? …
>
> Madalena – Acho que não… [sorri]
>
> Ent. – Não?

Madalena – Não sei, acho que… Quer dizer, também pode haver funções… que não tenham contradomínio *R*… Mas… se são limitadas ou não…

Ela estabelece de forma correcta a noção de função limitada, como correspondendo a funções cujo contradomínio seja limitado. No entanto a sua principal dificuldade parece ser a de identificar um caso concreto. Começa por considerar um esboço gráfico de uma parábola, mas com o eixo de simetria horizontal:

Madalena – Uma função… Talvez uma parábola deitada, assim para o lado…

Ent. – Deitada?

Madalena – Sim.

Ent. – Isso pode ser função ou não? Podes, podes desenhar para ver o que é que…

Madalena – Ah! Pois não pode, não pode porque… a cada… objecto… corresponde mais do que uma imagem… assim.

Com esta representação a Madalena pensa limitar o contradomínio pois quando procede ao esboço gráfico, pelo facto da representação ser finita, aparenta apenas ter imagens numa parte do eixo vertical. Reconhece no entanto que não se trata de uma função. Com o questionamento do entrevistador ela recorda-se das funções trigonométricas, seno e coseno, que considera estarem limitadas entre -1 e 1.

Quando se trata da noção de injectividade, a Madalena tradu-la em termos de objectos e imagens argumentando que "a cada imagem corresponde só um objecto" considerando pois uma correspondência unívoca das imagens para os objectos. Esta abordagem parece trazer alguns problemas quando a função não é injectiva. A Madalena faz um esboço gráfico de uma função periódica e traça uma linha horizontal que intersecta o gráfico em mais do que um ponto (figura 7.13):

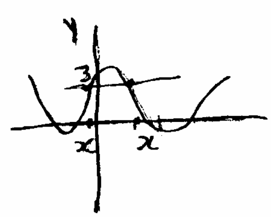


Figura 7.13. Esboço gráfico para estabelecer a injectividade da função (Madalena).

Madalena – Há imagens com o mesmo objecto… Não… Não é isso que eu queria dizer…

Ent. – Queres dizer outra coisa que é? … Quando tu traças assim essa linha aí, horizontal… o que é que tu estás a ver? …

Madalena – Que… há duas imagens iguais.

Ent. – Duas imagens… As imagens estão onde? Estão em que eixo?

Madalena – No do *YY*.

Ent. – Então quais são as imagens?

> Madalena – São as duas 3. Existe aqui e existe aqui… [aponta os dois pontos onde a recta horizontal intersecta o gráfico]
>
> Ent. – Então é só uma, que é 3…
>
> Madalena – Sim. São duas imagens. É uma imagem igual, só que para dois objectos diferentes.

Ela parece centrar-se no papel desempenhado pelas imagens, em vez de referir que tem dois objectos diferentes com a mesma imagem. Embora ela esteja a tentar explicar a não injectividade, parece preocupada em que a correspondência seja estabelecida das imagens para os objectos, daí a necessidade de referir duas imagens ainda que iguais.

Quanto à invertibilidade da função, a Madalena considera necessária a injectividade baseando-se na abordagem feita para definir as funções trigonométricas inversas.

A Madalena apresenta assim um conceito imagem de função que tem por base a noção de correspondência unívoca. Esta noção está presente quando ela relaciona algumas propriedades associadas ao conceito, mas por vezes não é suficiente para a explicitação dessas propriedades.

Ao pretender explicitar o seu conceito de função o Joaquim também começa por fazer referência às sucessões "é quase uma espécie do que era uma sucessão" destacando em seguida o papel desempenhado pela expressão algébrica:

> Joaquim – Só que o domínio pode ser praticamente o que gente quiser. Pode-se arranjar qualquer função com qualquer domínio e é mais ou menos do mesmo estilo. Temos uma certa expressão para introduzir valores que vai dar outros valores e nós com esses valores de x … É uma função com valores que obedecem a essa expressão.

O Joaquim centra-se no processo de transformação que permite passar do domínio para o contradomínio, conjuntos estes que considera poderem ser variados:

> Joaquim – [Temos um domínio] E um contradomínio, que é o conjunto dos pontos que a função dá pelo domínio. Pode variar também ou até ser igual ao domínio. Por exemplo a função seno ou coseno, o domínio é os reais mas o contradomínio será entre -1 e 1. São os valores que ela toma.

Ele realça o facto de estes conjuntos poderem ser variados, o que não acontecia com o domínio das sucessões, e consegue utilizar exemplos para mostrar essa diversidade. Quando se pretende saber se este tipo de transformação dos objectos em imagens obedece a alguma regra em especial ele volta a utilizar a expressão algébrica "obedece à expressão. A expressão é que vai permitir essa passagem do domínio para o contradomínio". Para ele a expressão parece servir para justificar que a correspondência estabelecida é uma função. Quando se procura explicitar este tipo de correspondência mostra diferentes graus de compreensão consoante a situação:

> Ent. – Por exemplo nós podemos ter dois elementos do domínio, dois objectos, com a mesma imagem ou não?

> Joaquim – Podemos. Por exemplo uma parábola. Temos vários objectos… A menos que ficasse assim injectiva, quando é injectiva não podem haver dois objectos com a mesma imagem.

O facto de haver dois objectos com a mesma imagem parece não causar grandes dificuldades ao Joaquim. Esta situação parece ser bastante clara pois consegue relacioná-la com o conceito de injectividade exprimindo a relação que há entre objectos e imagens. Quando se trata da relação contrária ele encontra algumas dificuldades:

> Joaquim – Agora o contrário é que já não se pode.
>
> Ent. – O contrário é que não, porquê?
>
> Joaquim – Hum… pois sei lá porquê! Não se pode porque depois tínhamos a mesma imagem… Depois seria… dois objectos com a mesma imagem. Seria dois objectos com a mesma imagem, porque a expressão só dá um valor… Seria um bocado complicado porque por exemplo no gráfico… em baixo teria um valor e depois teria ainda outro.

Parece continuar a verbalizar a situação anterior, dois objectos com a mesma imagem. Mesmo assim tenta encontrar na expressão algébrica uma justificação, parecendo considerar que a expressão lhe fornece uma correspondência unívoca, e acaba por tentar visualizar graficamente a situação. Ele parece ter uma imagem visual do esboço gráfico da parábola que já tinha referido anteriormente, "parábola deitada", onde para o mesmo objecto conseguia encontrar duas imagens, uma abaixo do eixo horizontal e outra acima. Esta abordagem revelou-se algo confusa e ele acabou por não conseguir estabelecer a univocidade da relação. Quando se procura caracterizar mais em pormenor o seu conceito imagem de função e se pede para explicitar a noção de função limitada o Joaquim usa como exemplo o facto de as funções seno e coseno serem limitadas. Esta abordagem é feita sem recorrer à representação gráfica, do mesmo modo que anteriormente já se tinha referido ao seu domínio e contradomínio. A monotonia também parece ser um conceito familiar, pois ele é capaz de a traduzir na forma simbólica, a partir de um gráfico ou verbalmente:

> Joaquim – Sei lá $f(x)=x$. Se formos ver o gráfico… isto é sempre crescente, porque já que qualquer valor seguinte é sempre maior que o anterior.
>
> Ent. – Portanto se vos pedem para justificar que a sucessão é crescente o que é que vocês têm que provar?
>
> Joaquim – Temos que provar que se eu tiver dois valores, por exemplo a e b, e $a<b$ então obrigatoriamente $f(a)<f(b)$.

Também no caso da invertibilidade das funções o Joaquim estabelece a necessidade da injectividade e a forma como o domínio e contradomínio se relacionam ao obter a inversa.

Desta forma o conceito imagem de função do Joaquim parece ser bastante rico em relações entre os vários elementos constituintes. Ele utiliza os processos e procedimentos subjacentes ao conceito, coordenando-os de forma adequada, e ao mesmo tempo utiliza as propriedades que lhe estão associadas, relacionando-as com as diferentes representações do conceito.

A Sofia também procura relacionar a sucessão com a função mas acaba por destacar o papel desempenhado pela expressão algébrica:

> Sofia – Uma função… É que isto é mais complicado. A sucessão era uma função, agora uma função. A função é… … Uma função é uma expressão… uma função é sempre definida por uma expressão.
>
> Ent. – Por uma expressão.
>
> Sofia – Que pode ter uma ou mais variáveis… E que nós podemos representar graficamente… Normalmente as funções são, as que nós trabalhamos, quer dizer, normalmente não mas pronto. Estas têm duas variáveis, um x e um y.
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> Sofia – Que quando nós colocamos num gráfico, o x é a variável independente e fica no eixo, no eixo horizontal. E o y fica no eixo vertical. E no Y estão as imagens e no X são os objectos. E o que a função faz é dado um objecto estabelecer a sua imagem.

A existência de uma expressão parece ser fundamental para que seja possível explicitar o conceito de função. É a partir das variáveis presentes na expressão que ela associa o conceito à sua representação gráfica, estabelecendo a forma como as mesmas se relacionam com os eixos. Desta forma ela consegue referir de um modo bastante claro os vários elementos intervenientes no conceito bem como explicitar a tradução da representação algébrica para a gráfica. Ela admite que os conjuntos envolvidos, domínio e contradomínio, podem ser bastante variados mas não faz qualquer referência ao tipo de relação entre eles. Quando se pretende caracterizar esse tipo de relação a Sofia usa uma abordagem que envolve o conceito de injectividade:

> Ent. – Por exemplo, [numa função] eu posso ter um objecto com duas imagens? …
>
> Sofia – Vamos lá ver, aaa… Uma função, ela é injectiva se a cada objecto corresponde uma imagem… Mas ela pode não ser injectiva. Mas eu também não posso ter dois objectos, como é que disse? Dois objectos?
>
> Ent. – Um objecto… com duas imagens.
>
> Sofia – Não…
>
> Ent. – Não?
>
> Sofia – Eu posso ter dois objectos com a mesma imagem.
>
> Ent. – Dois objectos diferentes com a mesma imagem?
>
> Sofia – Sim. Isso contradiz precisamente a definição.

Ela estabelece a relação entre os objectos e as imagens, evocando assim propriedades a que algumas funções podem obedecer, bem como a diferença entre ter dois objectos diferentes com a mesma imagem e um objecto com duas imagens. Desta forma ela distingue entre uma situação de não injectividade e outra em que a função não está definida.

Quando se trata de caracterizar a invertibilidade das funções a Sofia considera que as mesmas têm que ser injectivas e é capaz de explicar o que acontece se essa condição não se verificar:

> Sofia – Passamos a ter. Se ela não for injectiva podemos ter aquela situação que descreveu… Que é um objecto passar a ter duas imagens.

Embora não se refira à univocidade da relação entre objectos e imagens, a forma como relaciona os dois conjuntos deixa antever essa necessidade para que a relação possa definir uma função. No que se refere à noção de função limitada, a Sofia faz uma abordagem mais geral, explicitando o seu conceito imagem com base num exemplo concreto, a função coseno.

Desta forma, o conceito imagem de função da Sofia parece poder ser caracterizado por uma coordenação entre um grande número de procedimentos e processos que lhe estão subjacentes. Ela usa estes elementos para estabelecer propriedades associadas ao conceito e revela ser capaz de fazer uma tradução entre as diferentes representações que utiliza.

2 - Conceito de limite de uma função

À semelhança do conceito de limite de uma sucessão, também o de limite de uma função foi introduzido com base na sua definição simbólica. Nesta secção procura-se caracterizar os principais conceitos imagem dos alunos sobre o limite de uma função, bem como a sua capacidade de representar o conceito simbolicamente. Para tal foi feita uma abordagem que podemos considerar como sendo uma experiência de ensino, partindo de um exemplo concreto, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ e da representação gráfica desta mesma função, de modo que os alunos pudessem usar uma interpretação geométrica que lhes permitisse apoiar a tradução simbólica desse mesmo conceito. A análise das respostas dos alunos permitiu-nos verificar um desempenho verbal do conceito bastante satisfatório. No entanto, quando se trata de traduzir simbolicamente essa verbalização, o desempenho baixa significativamente. Desta forma foi possível estabelecer uma categorização do desempenho no estabelecimento da definição formal que comporta três níveis de consecução: os que apresentam um conceito imagem incipiente, traduzindo apenas verbalmente algumas partes da definição simbólica, os que apresentaram um conceito imagem instrumental, fazendo a tradução simbólica de algumas partes do conceito e os que apresentaram um conceito imagem relacional que se traduziu na capacidade de representar simbolicamente o conceito. Apresentam-se em seguida uma descrição pormenorizada dos conceitos imagem em cada um destes níveis.

2.1. Conceito imagem incipiente

Nesta categoria são incluídos os conceitos imagem dos alunos que, quando tentam estabelecer a definição simbólica do conceito de limite de uma função, apenas verbalizam algumas partes do mesmo e a sua tradução para a linguagem matemática fica incompleta ou mesmo desprovida de coerência.

É o caso da Mariana que quando tenta explicar o significado da expressão $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$ apenas faz uma leitura da mesma:

> Mariana – Então, aaa… Quando o x tende… quando o x tende para 1…
>
> Ent. – Hum.
>
> Mariana – A função aproxima-se da imagem, da sua imagem que é dois… Vai-se aproximando do 2…

Ela considera que o valor do limite é a imagem de 1 destacando a relação de proximidade das imagens do 2 quando o x se aproxima de 1. Quando lhe é pedido para explicar a mesma situação com base no gráfico da função (figura 7.14), ela exprime a noção de proximidade referida anteriormente em termos de intervalos:

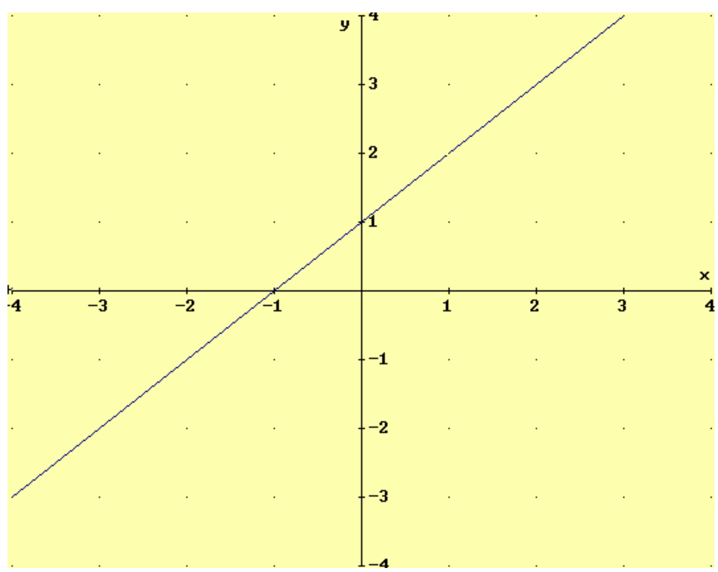


Figura 7.14. Gráfico da função $\frac{x^2-1}{x-1}$ apresentado aos alunos (*Situação 2*, 2ª entrevista).

> Mariana – Então, aaa… Num pequeno intervalo ao pé do 1, à esquerda [aponta no gráfico] aproxima-se do 2. E à direita também se aproxima do 2.
>
> Ent. – Portanto, consideras um intervalo aqui [indicou uma vizinhança do 1, no eixo horizontal] e o que é que tem que acontecer aqui? [indicou uma vizinhança do 2, no eixo vertical] … Tem que estar sempre muito próximo…
>
> Mariana – Do 2. Numa vizinhança ε .

Ent. – (…) Portanto, o que estás a dizer é: quando o x está na vizinhança do 1… As imagens…

Mariana – Estão na vizinhança do 2.

Ela recorre aos limites laterais para explicitar a sua noção de limite considerando separadamente uma vizinhança à esquerda de 1 e outra à direita de 1, mas sem ter a preocupação de definir também uma vizinhança em termos das imagens. Quando o entrevistador refere um intervalo único como vizinhança do 1 ela refere-se à existência de uma vizinhança de 2 com raio ε. Mesmo com o recurso à linguagem das vizinhanças ela não consegue traduzir simbolicamente qualquer parte da definição, pelo que o entrevistador optou por lhe fornecer essa tradução no caso concreto do limite em estudo, idêntica à que foi utilizada nas aulas (figura 7.15).

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 : x \in D \wedge |x-1| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 2| < \delta$$

Figura 7.15. Representação simbólica da expressão $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$ apresentada aos alunos.

Quando se pretendeu que explicitasse o significado de $|x\text{-}1| < \varepsilon$ em termos de vizinhanças, a Mariana não conseguiu fazer essa tradução:

Mariana – Isso [$|x\text{-}1| < \varepsilon$] é a vizinhança do 1.

Ent. – De raio?

Mariana – De raio 1. Não? …

Ent. – É a vizinhança do 1, não é?

Mariana – Sim.

Ent. – De raio?

Mariana – De raio…

A sua concepção de vizinhança parece basear-se essencialmente numa relação de proximidade em termos geométricos mas para a qual ela não consegue estabelecer uma representação simbólica. Desta forma não consegue extrair significado da definição simbólica de limite que lhe foi apresentada, revelando mesmo alguma dificuldade em seguir a sugestão feita pelo entrevistador.

A Mariana apresenta assim um conceito imagem de limite que assenta essencialmente numa interpretação geométrica onde ela consegue estabelecer uma relação dinâmica entre objectos e imagens. Esta abordagem não lhe permite atribuir significado à definição simbólica onde mesmo os procedimentos mais elementares não são traduzidos por símbolos.

No caso da Paula, a explicação do significado da expressão $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$ é feita com base na representação gráfica da função (figura 7.14), fazendo uma leitura directa da mesma:

Paula – [Significa] que a função está a tender… para um certo valor…

Ent. – Que é qual?

Paula – Neste caso, por exemplo, quando x tende para 1…

(…)

Paula – Quando o x tende para 1, a função está a tender… para 2.

Perante o gráfico a Paula refere-se ao limite sem precisar de o concretizar neste, acabando por fazer apenas a leitura da expressão dada. Quando se procura fazer uma caracterização em termos de objectos e imagens, ela identifica os valores de x situados no eixo horizontal e próximo do 1 enquanto que os $f(x)$ se situam no eixo das imagens, próximo do 2. A relação de proximidade foi sugerida pelo entrevistador e a Paula nunca a associou à noção de vizinhança. Quando foi pedido para escrever a definição simbólica de limite para este caso concreto ela não conseguiu verbalizar qualquer parte da definição e quando o entrevistador se referiu aos quantificadores universal e existencial ela verbalizou apenas uma parte da definição de limite de uma sucessão:

Paula – Qualquer ε maior de 0… Não.

Ent. – Por exemplo … …

Paula – Existe uma ordem… Era para as sucessões.

Ela recordou-se que esta era parte da definição usada nas sucessões e com a ajuda do entrevistador consegue estabelecer um paralelo com o que se passava com as imagens: os u_n são neste caso os $f(x)$ e o limite é 2. Mesmo com esta ajuda foi preciso o entrevistador sugerir a representação desta distância como um módulo para que ela depois completasse dizendo que este seria menor que ε. Quanto ao que se passa na vizinhança do ponto 1 ela não consegue traduzir a distância do x ao 1 como um módulo e também não consegue explicar o significado dos quantificadores que escreveu por sugestão do entrevistador. Ela manifesta um fenómeno de ventriloquismo, conseguindo apenas verbalizar algumas propriedades elementares que depois não é capaz de explicar, mesmo que estas tenham sido traduzidas para a sua representação simbólica pelo entrevistador.

A Paula revela assim um conceito imagem de limite de uma função que apenas lhe permite referir o comportamento dos objectos e das imagens no caso concreto. A tradução simbólica do conceito ou de alguma das suas componentes revela-se uma tarefa difícil na qual ela apenas consegue referir o nome de alguns símbolos que estão envolvidos.

Para o Fernando a explicação do significado da expressão $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ reduz-se a uma abordagem verbal que não contempla as particularidades da função:

Fernando – Aaa… Então quando, quando o x vai ser igual a 1, vai ter um valor no seu domínio que é o 2…

Embora já tenha referido antes que o ponto 1 não pertence ao domínio, ele admite que o x pode tomar esse valor e não distingue os objectos das imagens, admitindo que o valor do limite também está no domínio. Pode parecer inicialmente que o Fernando está a procurar elaborar a sua resposta, mas continua a fazer o mesmo tipo de interpretação quando volta a ser questionado sobre o mesmo limite:

Fernando – Então não é o limite da função?

Ent. – Mas este x está onde? O que é que está a acontecer ao x?

Fernando – O x, o x está-se a aproximar do 1

Ent. – Do 1, não é?

Fernando – E quando se aproxima de 1, vai ter o valor 2.

Ent. – E o que é que está a acontecer? Aquele 2 está onde?

Fernando – Aquele 2 está em cima do 1…

O Fernando começa por referir-se genericamente ao conceito de limite de função, mas perante a especificidade da questão sobre o papel do x destaca o facto de ele se estar a aproximar do 1. Quanto ao valor do limite ele parece colocá-lo sobre o gráfico, afirmando que ele está "em cima do 1". Para melhor compreender esta interpretação foi fornecido o gráfico da figura 7.14, que o Fernando teve alguma dificuldade em aceitar como sendo o gráfico da função em estudo:

Fernando – O x a tender para 1 é isto. [Indica com setas no eixo horizontal, figura 7.16]

Ent. – Portanto, o x está aí na vizinhança do 1 não é?

Fernando – E a tender para 2 é isto… [Indica com setas sobre o gráfico da função, figura 7.16]

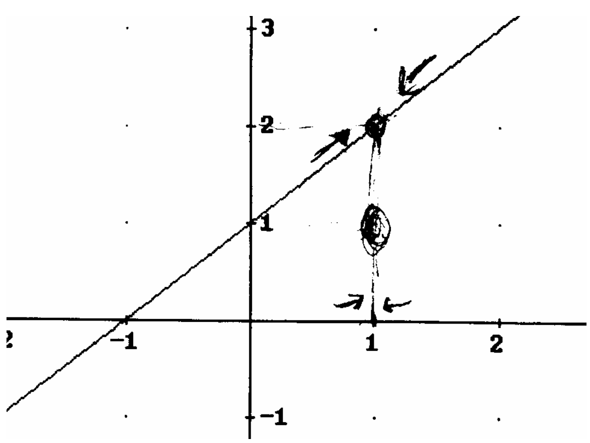


Figura 7.16. Representação esquemática do limite no gráfico feita pelo Fernando.

Na sua representação esquemática o Fernando explicita no eixo das abcissas a forma como o x se aproxima do 1, mas quando se refere ao valor do limite considera que este está situado sobre o gráfico. Parece ser esta a interpretação que fez anteriormente quando considerou que o limite estava "em cima do 1". Mesmo depois de ter estabelecido que se trata de uma imagem a confusão ainda parece persistir nalgumas situações. Quando se pretende fazer a tradução simbólica do limite da função o Fernando considera que não tem qualquer ideia sobre a mesma. Ao discutir o facto de o x poder estar muito próximo do 1 ele refere-se à noção de vizinhança mas apenas concretiza a sua representação simbólica com a ajuda do entrevistador, considerando que x pertence à vizinhança de 1 de raio ε. Quando lhe é pedido para representar de outra forma esta vizinhança ele acaba por escrever a expressão $|x\text{-}1|<\varepsilon$. Ao pretender escrever que os $f(x)$ se aproximam de 2 ele representa $f(x) \to 2$ que só traduz em módulo com ajuda. Quando se procurou estabelecer o papel dos quantificadores o Fernando não lhes conseguiu conferir qualquer significado no contexto da definição.

Desta forma o conceito imagem de limite do Fernando parece assentar numa concepção em que os objectos estão sobre o eixo horizontal mas as imagens podem ser representadas sobre o gráfico. A tradução simbólica revela-se uma tarefa bastante difícil de concretizar pelo facto de as noções de vizinhança e distância não lhe serem familiares, assim como o papel desempenhado pelos quantificadores.

No caso do Manuel o significado da expressão $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ é estabelecido na presença do gráfico da função (figura 7.14), mas que ele parece não utilizar directamente. Assim, quando pretende verbalizar o significado do limite anterior, faz uma abordagem onde usa uma terminologia pouco usual:

> Manuel – À medida que a função sobe para cima do valor 1 vai…
>
> Ent. – Quem é que se aproxima do 1? Portanto o 1 está onde? … Está aqui.
>
> Manuel – Sim.
>
> Ent. – Quem é que se vai aproximar do 1?
>
> Manuel – À medida que o x se aproxima do 1… a função vai tomando o valor 2.
>
> Ent. – Portanto as imagens vão-se aproximando do valor…
>
> Manuel – Do valor 2.

O Manuel parece destacar o traçado do gráfico quando pretende estabelecer a relação entre os objectos e as imagens. Desta forma ele está a considerar que o x se aproxima do ponto de abcissa 1 deslocando-se sobre o gráfico "a função sobe para cima do valor 1" e com esta aproximação da abcissa vai ter como ordenada 2 "a função vai tomando o valor 2". Esta abordagem, considerar a função como sendo a linha do gráfico, já tinha sido referida noutras situações, nomeadamente quando no conceito de limite de uma sucessão se referiu à noção de vizinhança. O Manuel parece assim não conseguir estabelecer a relação de dependência entre os objectos e imagens onde a noção de '*estar próximo de'* apenas pode ser observada sobre a representação gráfica da função. A relação de proximidade que verbaliza no diálogo anterior é apenas a que é sugerida pelo entrevistador. Desta forma ele não consegue estabelecer vizinhanças do ponto de abcissa 1 e do ponto de ordenada 2, por ambas estarem sobrepostas na representação gráfica. Perante esta abordagem o Manuel não consegue estabelecer qualquer parte da definição simbólica de limite e mesmo quando esta lhe é mostrada, refere que não se recorda de a ter visto antes.

O conceito imagem de limite de uma função do Manuel parece ser dominado pela forma como ele concebe o próprio gráfico. O limite é estabelecido sobre a representação gráfica quando há uma aproximação da abcissa e tem como valor a ordenada correspondente. Com esta abordagem a tradução simbólica do conceito revela-se uma tarefa bastante difícil, que ele não consegue explicitar mesmo quando esta lhe é fornecida.

Para o Pedro a explicação do significado da expressão $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ é feita com base na relação entre objectos e imagens:

> Pedro – Quer dizer que quando nós nos aproximarmos… do objecto pela esquerda e pela direita… vai tender sempre para a mesma imagem, que neste caso é 2.

Ele destaca a forma como é possível fazer a aproximação ao objecto e reforça essa ideia quando procura explicar a mesma expressão com base no gráfico da função (figura 7.14) "Então, vindo da esquerda… por valores inferiores a 1 a função vai tender para 2 e vindo pela direita por valores superiores a 1 também". Desta forma ele parece evocar a ideia da existência de limites laterais com base na aproximação ao objecto pela direita e pela esquerda, mas esta abordagem não lhe permite logo traduzir esta relação de proximidade em termos de vizinhanças. Quando lhe é pedido para exprimir este limite com base na definição simbólica ele começa por fazer uma comparação com o que tinha sido feito anteriormente nas sucessões e ao tentar exprimir a tal relação de proximidade entre o x e o 1 afirma que o x será menor que um dado α. Quando o entrevistador lhe sugere que tem que traduzir a distância entre o x e o 1 ele considera que se trata de uma vizinhança que acaba por representar com ajuda, repetindo o mesmo processo para o caso das imagens (figura 7.17):

$$V_\alpha(1) \quad V_\beta(2)$$

Figura 7.17. Representação simbólica das vizinhanças de 1 e de 2 do Pedro.

Com esta representação ele não especifica os elementos (objectos e imagens) que pertencem a cada uma das vizinhanças, embora estes tenham sido verbalizados, e quando faz a sua tradução em módulos acaba por escrever a vizinhança de 1 como $|\alpha\text{-}1|$. Só consegue fazer esta tradução posteriormente com a ajuda do entrevistador, e quando foi feita referência aos quantificadores não lhes atribuiu qualquer significado no contexto da definição.

Desta forma o conceito imagem de limite do Pedro parece basear-se nalguns processos associados ao conceito, como é o caso da existência de limites laterais, conseguindo relacionar os objectos com as imagens na proximidade do ponto em estudo. Esta abordagem revela-se insuficiente para conseguir estabelecer estas aproximações em termos de vizinhanças, pelo que a tradução simbólica do conceito se revelou uma tarefa difícil de concretizar.

2.2. Conceito imagem instrumental

Os conceitos imagem deste nível são caracterizados pelo facto de os alunos apresentarem uma verbalização do conceito de limite que apenas conseguem traduzir simbolicamente de forma parcial. Nesta tradução sobressaem normalmente as vizinhanças do ponto em estudo e do valor do limite, sendo a parte do conceito relacionada com os quantificadores quase sempre inacessível, o que deixa transparecer uma compreensão da representação simbólica insuficiente, baseada nalguns dos processos e procedimentos que estão na sua base. Foi ainda incluído nesta categoria um grupo de alunos, a Sara, a Maria e a Madalena, cujo conceito imagem parece ser ainda mais incompleto que aquele que apresentam o João, o José e a Susana. Este primeiro grupo de alunos parece situar-se numa zona de fronteira entre as duas categorias. Eles manifestam uma compreensão de processos e procedimentos elementares, embora não consigam usá-los na tradução simbólica do conceito.

Para a Sara a explicação do significado da expressão $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ também é feita a partir da representação gráfica da figura 7.14. Embora ela revele alguma dificuldade em apresentar essa explicação, indica no gráfico onde se deve colocar o x e onde se localizam as suas imagens. Desta forma ela estabelece uma relação espacial entre os objectos e as imagens, mas quando lhe é pedido para traduzir essa relação em termos simbólicos apenas se refere à função inversa. A sua abordagem anterior não parece contemplar as noções de vizinhança envolvidas no conceito, mas, quando lhe foi pedido para exprimir simbolicamente o facto de a distância entre o x e o 1 ser tão pequena quanto se queira, ela escreve $|x\text{-}1|<\varepsilon$ e com base nesta representação, escreve também $|f(x)-2|<\delta$ representando a proximidade entre as imagens e o limite. Mesmo da posse destas duas representações simbólicas não conseguiu estabelecer a definição de limite. Ao ser confrontada com a definição simbólica da figura 7.15 continuou a não manifestar uma visão de conjunto da definição, tendo apenas revelado ser capaz de estabelecer no gráfico os intervalos definidos pelas vizinhanças de raio ε e δ.

O conceito imagem de limite da Sara parece ter um carácter essencialmente geométrico que lhe permite localizar os objectos e as imagens no gráfico, mas que não lhe confere a capacidade de estabelecer a relação de proximidade entre os objectos e o ponto em estudo, bem como a mesma relação em termos das suas imagens. Quando esta relação de proximidade lhe é fornecida ela faz a sua tradução em termos de módulos. A definição simbólica é no entanto encarada como uma sequência de símbolos cuja articulação parece estar longe de ser compreendida.

No caso da Maria, quando lhe é pedido para explicar o significado da expressão $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=2$, ela limita-se a ler a própria expressão "o limite quando x tende para 1 é 2, não sei". Quando confrontada com o gráfico da figura 7.14, ao tentar estabelecer se o gráfico representa a função em estudo, ela explica o que se passa em termos de limite:

> Ent. – Será que este gráfico é o gráfico dessa função ou não? …
>
> Maria – É. Pelo menos pelo limite… 1 tende para 2. O 1… Anda próxima do 1 e a imagem em 2.

Ela parece considerar a existência de valores próximos do 1 cuja imagem se aproxima do 2, e é desta forma que procura justificar que o gráfico corresponde à função dada. Quando se pretende representar simbolicamente o limite anterior ela começa por afirmar que não sabe, e quando o entrevistador lhe pede para traduzir por símbolos o facto de o x se estar a aproximar de 1, ela estabelece um paralelo com a forma como tinha representado o limite no caso das sucessões "[nas sucessões] era u_n-a menor que, em módulo menor que o épsilon". Desta forma conclui que pode ser o módulo de x menos 1 menor que um δ. A escrita desta condição teve que ser apoiada pelo entrevistador porque a Maria parece ter alguma dificuldade na tradução da linguagem verbal para a simbólica. Ela parece cingir-se apenas aos termos verbais e não consegue estabelecer qualquer relação com outras representações, como por exemplo a representação algébrica da noção de vizinhança. Também no que diz respeito às imagens foi necessário reforçar a ideia de proximidade entre os $f(x)$ e o limite para que ela escrevesse, por comparação com a situação anterior, a representação $|f(x)-2|<\varepsilon$. Depois de ter completado esta parte da escrita simbólica (figura 7.18), a Maria só conseguiu colocar os quantificadores com a ajuda do entrevistador.

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$$

Figura 7.18. Escrita simbólica parcial de $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$ da Maria.

Quando se pretendeu que explicitasse o papel dos quantificadores na definição ela apenas referiu "eu acho que a escrevi ainda há pouco mas isto é muito esquisito". Embora ela se recorde de ter escrito a definição antes da entrevista não conseguiu explicar o seu significado.

O conceito imagem de limite da Maria parece ser condicionado pelo tipo de representação que tem presente quando o tenta explicitar. Se está perante a sua representação algébrica faz uma leitura sem destacar os processos ou procedimentos presentes. Quando confrontada com o gráfico já evidencia uma distinção entre alguns desses processos. Ela mostra alguma dificuldade em fazer a tradução entre diferentes representações do mesmo conceito, como é o caso do de vizinhança, e não consegue dar significado à expressão simbólica de limite, nomeadamente do papel desempenhado pelos quantificadores.

Para a Madalena a explicação da expressão $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$ é feita com base na representação gráfica da função e na noção de vizinhança:

> Madalena – Portanto o ponto 1 não pertence ao domínio.
>
> Ent. – Já vimos que podemos calcular o limite quando o ponto não pertence ao domínio…
>
> Madalena – Sim. Mas o limite não implica que seja esse ponto, mas sim para onde os valores da função… tendem antes de chegar ao ponto. Nunca chega a ser o ponto mas anda numa vizinhança assim pequenininha do ponto. Então como… Tanto dum lado como do outro, ou seja nas, nos limites laterais é dois. Numa vizinhança do ponto 2.

A Madalena tem em consideração o facto de o ponto 1 não pertencer ao domínio o que a ajuda a estabelecer uma vizinhança do mesmo onde o x pode tomar valores sem nunca atingir o 1 e da mesma forma estabelece uma vizinhança nas imagens centrada no valor do limite. Ela parece ter a necessidade de recorrer aos limites laterais para estabelecer a existência de limite. Embora inicialmente não pareça fazer uma separação nítida entre os objectos e as imagens, ela acaba por explicitar essa relação no próprio gráfico que lhe foi apresentado (figura 7.19):

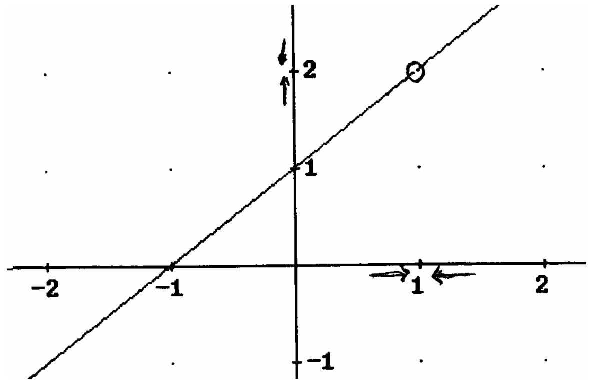


Figura 7.19. Representação esquemática da relação entre objectos e imagens da Madalena.

Madalena – O x a aproximar-se do 1? Do lado esquerdo e do lado direito. [Desenha as setas horizontais, figura 7.19]

Ent. – Está aí. E depois tens então os $f(x)$. O limite é 2…

Madalena – Sim.

Ent. – Ou seja, quem é que se está a aproximar do 2?

Madalena – As imagens.

Ent. – As imagens aí, não é?

Madalena – Este assim e este assim. [Desenha as setas verticais, figura 7.19]

Ela estabelece no gráfico a posição dos objectos e das imagens bem como a forma como eles se podem aproximar dos respectivos valores. É com base nesta abordagem que lhe é solicitada a escrita da definição simbólica do limite, mas a Madalena afirma desconhecer tal definição. Quando se pretende traduzir simbolicamente a noção de vizinhança que referiu anteriormente, afirma que é “a vizinhança do ponto 1 de raio ε”. Ao pretender representar esta mesma vizinhança utilizando a noção de distância ela refere que pode usar o módulo mas escreve que $x \in |\text{-}1|$ alterando de seguida para $|x-1|<\varepsilon$. Só por sugestão do entrevistador ela estabelece o mesmo tipo de representação para as imagens e quando se pretendeu dar significado ao papel dos quantificadores não foi capaz de estabelecer a sua posição na definição.

Desta forma o conceito imagem de limite da Madalena revela-se suficientemente claro quando, com a ajuda do gráfico, descreve os processos que se desenrolam na vizinhança do ponto para o qual a função tende e na vizinhança do limite. Quando se trata de traduzir simbolicamente esses mesmos processos, ela experimenta um conjunto de dificuldades que não lhe permitem estabelecer o significado da definição, ainda que faça a tradução de alguns dos processos com a ajuda do entrevistador.

No caso do João, quando procura explicar a expressão $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ com base no gráfico da função, começa por fazer uma abordagem que parece englobar todo o gráfico:

João – [O limite] é o comportamento da função… Quando, quando a função…

Ent. – Portanto, o limite quando x tende para 1. Ora onde é que estão esses x a tender para 1?

João – Estão aqui. É aqui… Aqui e aqui. [Indica no gráfico através de duas setas horizontais a apontar para o ponto de abcissa 1]

Ent. – Ao pé do 1, não é? E o que é que acontece aos $f(x)$?

João – Os $f(x)$ tendem para 2.

Ainda que tenha sido pedido para interpretar o limite no gráfico, o João começa por fazer uma abordagem que parece englobar a função como um todo, mas para a qual não conseguiu desenvolver uma explicação. Quando o entrevistador procurou especificar no gráfico alguns dos processos envolvidos no limite ele explicita o que se passa em termos de objectos e imagens em cada um dos eixos. Quando se pretende traduzir simbolicamente o limite anterior o João parte da relação de proximidade entre o x e o 1, mostrando ser capaz de a representar de várias formas:

João – Então era qualquer coisa do género… O x está-se a aproximar de 1…

Ent. – Outra forma de dizer que os x se estão a aproximar do 1, pode ser o quê?

João – Então é os x estão numa vizinhança de 1.

Ent. – Do 1.

João – Portanto…

Ent. – Ou ainda podes escrever de outra forma, que é usar…

João – Usar a… A noção de distância.

O João acaba por optar pela noção de distância escrevendo que $|x-1|<\varepsilon$ e da mesma forma para as imagens, $|f(x)-2|<\varepsilon$. Ele parece ter usado o mesmo ε supondo que estava a transformar um intervalo noutro com a mesma amplitude. Quando o entrevistador lhe sugeriu que podia não ser o mesmo, ele alterou-o para δ, que não sabia como se desenhava, obtendo a representação simbólica da figura 7.20:

$$|x-1| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x)-2| < \delta$$

Figura 7.20. Escrita simbólica parcial de $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ do João.

Quando se pretendeu incluir os quantificadores o João começou por afirmar que o x poderia ser qualquer real, ignorando assim eventuais restrições do domínio. Quanto ao ε e ao δ também poderiam ser quaisquer reais positivos, continuando a admitir que representavam amplitudes de intervalos sobre os eixos. Mesmo quando o entrevistador lhe mostrou a definição simbólica da figura 7.15, explicando a relação entre os dois quantificadores no gráfico, ele pareceu não ser capaz de compreender a sua extensão, nomeadamente o papel desempenhado pelos quantificadores

O João apresenta assim um conceito imagem de limite que revela um desempenho bastante favorável no estabelecimento dos principais processos que lhe estão subjacentes, processos estes que ele consegue explicitar no gráfico e alguns deles são mesmo traduzidos simbolicamente. A utilização da definição simbólica revelou-se uma tarefa mais complexa, sendo o papel dos quantificadores aquele que mais contribuiu para esse desempenho menos favorável.

Para o José a explicação da expressão $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ tem por base a representação gráfica, mesmo quando ela não está presente. Quando pretende explicar a expressão ele destaca o que se passa no eixo vertical "é que a função aproxima-se do 2… dos *YY*". Ele refere o que está a acontecer com as imagens no eixo vertical e quando confrontado com o gráfico da figura 7.14, acaba por completar a abordagem anterior:

> José – Quando a gente se aproxima aqui no eixo dos *XX* para 1, dos dois lados.
>
> Ent. – Sim.
>
> José - Ela vai tender para 2, no eixo dos *YY*. Vai-se aproximar do 2.

O José evidencia os processos que estão subjacentes na relação entre os objectos e as imagens, tornando esta relação essencialmente dinâmica. Quando se pretendeu estabelecer a representação simbólica do limite admitiu não ser capaz de o fazer, no entanto conseguiu traduzir alguns dos processos que descreveu anteriormente. Assim quando se destaca o facto de o x se estar a aproximar do 1 ele sugere que se pode representar por "1 menos x menor que qualquer coisa" e como o x se pode aproximar pela direita e pela esquerda considera que pode usar o módulo e escreve |1-x|. Embora ele considere que este módulo deve ser menor que um valor muito pequeno, não usa nenhum símbolo para o registar e quando o entrevistador lhe sugere que pode ser um ε, ele não sabe como este símbolo se escreve. Da mesma forma estabelece o que se passa na vizinhança do limite. Usando o módulo escreve $|2-f(x)|$ afirmando que também pode ser menor que ε. Ele usa o mesmo parâmetro ε em ambos os casos, não porque esteja convicto que ambos devem ser iguais, mas porque não se recorda de outro símbolo diferente. Quando o entrevistador lhe tenta explicar que este parâmetro pode não ser o mesmo, ele usa α, e escreve $|2-f(x)|<\alpha$. Ao procurar estabelecer o papel dos quantificadores o José pretende que o quantificador universal seja aplicado ao ε. Ele parece estar apenas a considerar que todo o objecto tem uma imagem e portanto o quantificador universal estaria relacionado com os objectos. Escreve a representação simbólica da figura 7.21, mostrando alguma dificuldade em desenhar os símbolos dos quantificadores, e não conseguindo explicar o seu papel na definição.

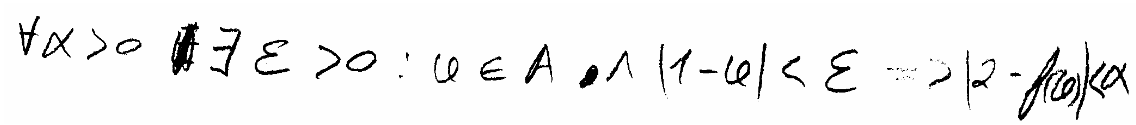


Figura 7.21. Representação simbólica de $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ do José.

O conceito imagem de limite do José pode assim ser caracterizado por apresentar uma componente gráfica bastante completa que permite relacionar os objectos e as imagens de uma forma dinâmica. Com base nesta componente ele traduz simbolicamente algumas partes do conceito, nomeadamente o que se passa na vizinhança do ponto para o qual a função tende e do limite, não sendo no entanto capaz de atribuir significado aos quantificadores bem como identificar os símbolos que os representam.

Para a Susana a explicação da expressão $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ é feita com base no que acontece nas vizinhanças dos pontos de abcissa 1 e ordenada 2:

> Susana – Quer dizer que à direita ou à esquerda do 1 a função tende para 2. Tem como imagem 2 (…) Aproxima-se do 2.
>
> (…)
>
> Susana – Tende para 1 à direita ou à esquerda… do 1. Dá 2 …

Inicialmente ela refere-se à vizinhança do ponto 1 sem uma referência específica aos objectos concluindo que a função tende para 2 e portanto terá como imagem 2. Quando lhe é pedido para explicitar esta concepção com base no gráfico da figura 7.14, é possível clarificar a resposta anterior. A Susana faz a leitura sobre o desenho do gráfico, mostrando a forma como a função se aproxima do 1 pelos dois lados (figura 7.22), e conclui que em ambos os casos é conduzida à mesma imagem, o 2.

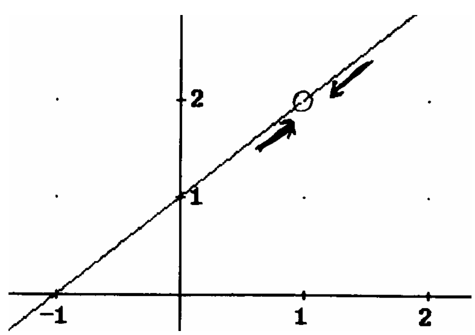


Figura 7.22. Representação esquemática de $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ da Susana. (Setas introduzidas pelo investigador).

Ela refere-se assim ao limite centrando-se no traçado do gráfico e nunca explicita os processos envolvidos em termos da relação dinâmica entre objectos e imagens. A falta desta concepção parece ter sido determinante para a forma como abordou a tradução simbólica do limite. Inicialmente ela refere que não sabe como pode fazer essa representação. Quando o entrevistador procura que ela traduza simbolicamente o que se passa na vizinhança do ponto de abcissa 1, nota que ela tem dificuldade em explicitar o processo e só quando lhe é referida a noção de distância entre o x e o 1 é que ela se recorda que pode utilizar o módulo, escrevendo $|x\text{-}1|<\varepsilon$. Da mesma forma, quando lhe foi sugerido o mesmo processo junto do valor do limite, ela chega ao mesmo tipo de representação, $|f(x)\text{-}2|<\delta$, tendo anteriormente escrito $|f(x)\text{-}f(1)|$. A partir desta parte da representação a Susana parece lembrar-se do resto da definição escrevendo os quantificadores correctamente. Quando se pretendeu estabelecer o papel dos quantificadores a Susana não foi capaz de dar significado à definição como um todo, sendo a sua abordagem bastante incipiente, pois não passou de uma leitura daquilo que tinha escrito anteriormente.

Deste modo o conceito imagem de limite da Susana parece ser caracterizado por uma abordagem que privilegia uma leitura atenta ao que acontece aos objectos e às imagens, mas feita preferencialmente sobre o desenho do gráfico. A tradução simbólica da definição é uma tarefa complexa, em que alguns processos só são traduzidos simbolicamente com a ajuda do entrevistador, nomeadamente o que acontece nas vizinhanças dos pontos de abcissa 1 e ordenada 2. Depois destas representações terem sido estabelecidas em termos de módulos a Susana consegue evocar uma imagem visual da definição que lhe permite escrever os quantificadores mas para os quais não é capaz de explicitar o seu significado no contexto da definição.

2.3. Conceito imagem relacional

Os conceitos imagem deste nível são caracterizados pelo facto de os alunos apresentarem uma verbalização do conceito de limite de função e a par dessa concepção são capazes de estabelecer a sua representação simbólica. A forma como esta representação é encarada revela dois tipos de abordagem: os alunos traduzem simbolicamente os diferentes processos, havendo posteriormente a necessidade de os coordenar para explicitar a definição, ou os alunos escrevem a definição simbólica e posteriormente procuram extrair significado a partir desta, evocando os processos subjacentes.

No caso da Alexandra, quando tenta explicar o significado da expressão $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$, faz uma abordagem centrada no valor do limite:

Alexandra – A função tende para 2… quando se aproxima do 1.

A Alexandra destaca o facto de a função estar a tender para 2 mas não parece dar a mesma importância ao facto de os objectos se aproximarem do 1. Não explicita o tipo de relação que se estabelece entre os objectos e as imagens e quando pretende justificar se o gráfico da figura 7.14 pode ou não representar a função em causa, fica perplexa:

Ent. – Achas que este gráfico pode ser o gráfico desta função ou não?

Alexandra – Não. Ou isto [gráfico da função] serve!

Ent. – Porquê?

Alexandra – Não. Então isto tende para 2 [refere-se à expressão]. Isto não tende para 2 [gráfico da função]. Espere lá que isto… Isto é uma recta…

A Alexandra parece esperar que o gráfico da função se esteja a aproximar do valor 2, valor este que traduz uma assímptota horizontal, quando o *x* tende para mais infinito. Ela parece estar a estabelecer uma relação com o caso das sucessões, onde o limite era estabelecido com o *n* a tender para infinito. Só posteriormente começa a dar mais atenção ao que acontece na vizinhança do ponto de abcissa 1, o que lhe volta a causar algumas dificuldades de interpretação:

Alexandra – Se *x* tende para 1 o limite é dois… Só que…

Ent. – Portanto, quando é o *x* a tender para 1, onde é que estás a colocar o x?

Alexandra – O *x*, aqui [eixo horizontal sobre o ponto 1] não é?… Quando o *x* é 1…O *x* está…

Ela parece admitir que o *x* pode assumir o valor 1, e, como já tinha referido anteriormente que a função não estava definida neste ponto, não consegue explicitar o processo do limite, acabando por referir-se à continuidade à direita e esquerda do ponto, mas não no próprio ponto. Quando lhe é pedido para traduzir simbolicamente o limite ela refere que se lembra da definição e, recorrendo à noção de vizinhança, faz essa tradução (figura 7.23), tendo posteriormente escrito as vizinhanças em termos de módulos.

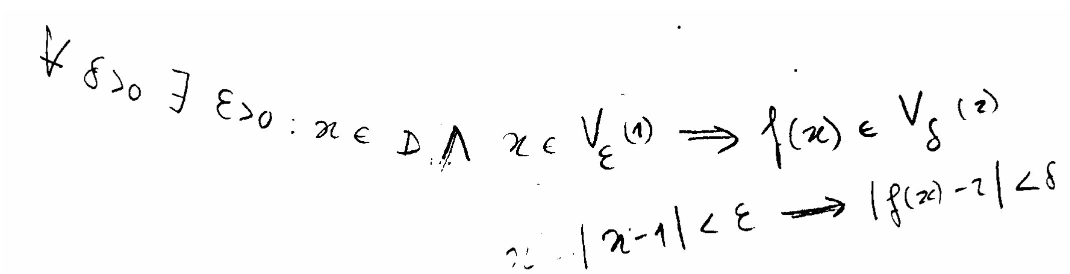


Figura 7.23. Escrita simbólica de $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = 2$ da Alexandra.

Embora a Alexandra tenha manifestado algumas dificuldades em explicitar a representação algébrica do limite, escreve a sua representação simbólica, representação que usa para extrair significado quando procura explicitar o conceito. Com base nesta representação foi capaz de traduzir no gráfico as vizinhanças dos pontos 1 e 2, por meio de intervalos abertos indicando as respectivas amplitudes ε e δ. Apesar desta abordagem o papel dos quantificadores não é directamente explicitado.

A Alexandra apresenta assim um conceito imagem de limite que quando é baseado na sua representação algébrica destaca sobretudo o que acontece em termos das imagens, mas que ela consegue traduzir simbolicamente, extraindo significado desta representação para explicitar os processos que lhe estão subjacentes.

Para o Joaquim a explicação do significado da expressão $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ é feita com base numa abordagem que tende a descrever o que se passa na vizinhança dos pontos 1 e 2:

> Joaquim – O limite quererá dizer… Por exemplo, aqui neste caso, quando o *x* tende para 1 significa [que] quando os valores se aproximam de 1, ficam praticamente próximos, eles vão ter essa imagem. Essa imagem tem que ser igual a 2, neste caso é 2. Quer dizer que os valores imediatamente à esquerda e imediatamente à direita do 1 têm de ter imagem igual a 2… Vai dar o limite igual e se desse diferente já não teria limite.

O Joaquim procura descrever o processo quer na vizinhança do ponto 1 quer do ponto 2. Ele centra-se essencialmente na forma como o *x* se pode aproximar do ponto 1, parecendo admitir que todos estes valores de *x* acabam por ter a mesma imagem. Esta concepção é no entanto alterada quando procura dar a mesma explicação, só que agora com base no gráfico da figura 7.14:

> Joaquim – Nós queremos saber quando os valores tendem para 1.
>
> Ent. – Exactamente.
>
> Joaquim – Por isso estes valores aqui, imediatamente aqui ao andar aqui imediatamente… Não é no 2 mas muito próximo do 2, já que o 2 é aquele ponto que não pertence. Ou seja as imagens vão estar cada vez mais perto do 2 conforme os valores mais perto do 1.
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> Joaquim – Isto é uma função que podemos arranjar o valor que quisermos… O valor mais próximo possível do 1 vai estar o mais próximo possível do 2.

Neste caso o Joaquim começa por considerar o que se passa na vizinhança do limite e afirma que as imagens vão estando cada vez mais próximas do 2, à medida que os objectos se vão aproximando do 1. É com base nesta abordagem que ele começa a escrever a definição simbólica, usando a noção de vizinhança para o caso de um limite genérico:

> Joaquim – Seria uma coisa assim… Portanto se eu pegar num certo valor *x* que pertence à vizinhança ε de um certo *y*, vai implicar que… Que pode existir *f*(*y*) … pertencente à vizinhança ε de a.

Embora pareça utilizar o mesmo raio para a vizinhança quer dos objectos quer das imagens, quando tentou fazer a mesma abordagem para o caso concreto em estudo já utilizou parâmetros diferentes, figura 7.24:

Figura 7.24. Tradução do limite em termos de vizinhanças do Joaquim.

> Joaquim – Nós podemos escrever isso mas o problema é o 1 que não existe… Por isso é que… Quando a gente está aqui a dizer, quando o x tende para 1, isto vai implicar que o $f(x)$ vai pertencer a uma certa vizinhança alfa [escreve δ] de… Neste caso seria de 2.

Embora a escrita simbólica das vizinhanças não esteja formalmente correcta, o Joaquim parece compreender os processos subjacentes ao limite dado, sendo capaz de traduzir de forma dinâmica a relação que há entre os objectos e as imagens. Com base nesta representação traduz as vizinhanças em termos de distâncias, representando-as por módulos, e quando pretendeu incluir os quantificadores para completar a escrita simbólica da definição trocou-os escrevendo que para todo o ε existe um δ. O correcto estabelecimento dos quantificadores parece levantar alguns problemas ao Joaquim, pois ele não conseguiu explicitar a ordem pela qual eles devem ser colocados.

Desta forma o conceito imagem de limite do Joaquim parece ter por base um conjunto de processos que ele coordena de modo bastante satisfatório, e que lhe permitem fazer uma tradução simbólica desses mesmos processos. Quando se pretende dar significado à definição formal, é o papel dos quantificadores que lhe coloca os principais obstáculos, não permitindo uma explicitação clara do papel que estes desempenham na definição.

Para a Sofia a explicação da expressão $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ é feita com base num esboço gráfico (figura 7.25):

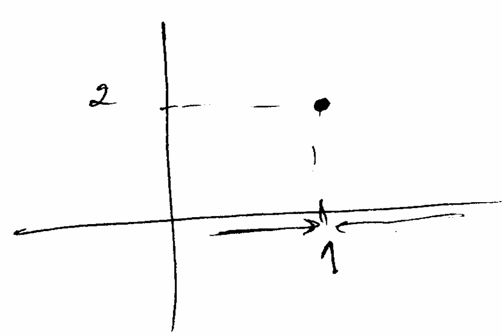


Figura 7.25. Esboço gráfico para traduzir a noção de limite da Sofia.

Sofia – Então estamos a dizer que quando o x, quer dizer… Pronto se aqui tivermos o 1. Estamos a dizer aqui neste caso, quando o x está a tender para 1.

Ent. – Hum, hum.

Sofia – Por valores diferentes de 1, penso eu que é diferentes, sim porque isto nunca se pode… As imagens estão-se a aproximar… (…) Do 2. Portanto a função, pronto está aqui o pontinho da função ou…

A Sofia começa por explicar a sua noção de limite utilizando apenas um sistema de eixos e sem representar graficamente a função. Ela usa-o para descrever o facto de o x estar a tender para 1 e as imagens tenderem para o valor do limite, 2. Esta representação causou-lhe alguma apreensão por ter concretizado no esboço a imagem do 1, mas acabou por concluir que, pelo facto de este ponto não pertencer ao domínio, tinha que considerar que estava a tender para ele por valores diferentes do próprio ponto. Com base nesta abordagem estabelece a definição simbólica:

Sofia – Eu acho que é assim. Para todo o delta positivo, existe um épsilon positivo, tal que o x tem que pertencer a ***R*** excepto o 1… E… x… aaa… O x-1 tem que ser menor que épsilon e ali que é que… O $f(x)$ menos 2, módulo, menor que delta. [Escreve a expressão da figura 7.26]

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 : x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \wedge |x-1| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-2| < \delta$$

Figura 7.26. Escrita simbólica de $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ da Sofia.

A Sofia traduz assim simbolicamente o limite em estudo. Parece que não memorizou apenas a definição, pois quando se pretendeu estabelecer o papel dos parâmetros ε e δ, desenhou-os no gráfico da figura 7.14, representando o raio das vizinhanças centradas nos pontos de abcissa 1 e ordenada 2 respectivamente. É no papel dos quantificadores que reside a principal dificuldade, sobretudo quando pretende explicitar a forma como estes influenciam o alcance da definição.

O conceito imagem de limite da Sofia parece ser o resultado da coordenação dos vários processos subjacentes, através dos quais ela relaciona as várias representações do conceito, conferindo-lhes alguma generalidade, com excepção do papel desempenhado pelos quantificadores.

Para a Carla, a explicação do significado da expressão $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ é estabelecido com base na visualização do gráfico da figura 7.14:

Ent. – O que é que quer dizer que o limite quando o x tende para 1, desta função, é 2?

Carla – Significa que ao aproximarmos o x de 1, ele vai-se aproximando…

Ent. – Portanto, aqui no gráfico, como é que tu podes ver isso?

Carla – Por exemplo, quando o *x* por valores negativos se vai aproximando do 1.

Ent. – Hum.

Carla – Ele vai tendendo para valores cada vez mais perto do 2, embora não atinja o 2. E quando, por valores positivos, … quando se vai chegando *x* igual a 1 por valores positivos, também vai, vai cada vez aproximar-se mais do 2.

A Carla procura explicitar o significado do limite evidenciando os processos que os objectos e as imagens devem seguir. Ela refere-se à forma como *x* se aproxima do ponto de abcissa 1, por valores negativos e positivos, pretendendo expressar que se trata de valores inferiores e superiores, mas quando se refere às imagens acaba por estabelecer apenas que estas também se aproximam do 2. Esta abordagem é acompanhada por uma indicação pormenorizada no gráfico, que lhe permite indicar correctamente os objectos e as imagens a que se está a referir. Na representação simbólica deste limite a Carla traduz o facto de o *x* estar próximo do 1 pela condição $|x-1|<\varepsilon$ adiantando que será assim para qualquer ε maior que zero. Ao traduzir simbolicamente o que se passa na vizinhança do limite ela começa por considerar que neste eixo tem os valores de *y*, que ao serem identificados como $f(x)$ lhe permitem estabelecer a condição $|f(x)-2|<\delta$. Depois de colocar o sinal de implicação entre as duas condições anteriores, corrigiu o parâmetro do quantificador que tinha já escrito afirmando que deve ser para todo o δ existe um ε. A utilização dos quantificadores por esta ordem parece resultar essencialmente da memorização da representação simbólica, pois ela não consegue explicitar o seu papel na definição.

Desta forma o conceito imagem de limite da Carla parece ter por base os processos subjacentes ao conceito, quer os que estão associados à forma como os objectos se aproximam do ponto onde se pretende estudar o limite, quer aqueles que estão relacionados com as imagens na vizinhança do limite. Estes processos são utilizados para fazer a tradução simbólica do conceito, sendo as distâncias ao ponto 1 e 2, no caso concreto, representadas em termos de módulos, ainda que o papel dos quantificadores pareça resultar de um processo de memorização da sua posição na definição.

3. O conceito de derivada

O conceito de derivada é um dos temas fundamentais no estudo da análise e foi apresentado aos alunos a partir da sua definição formal. Posteriormente é usual o professor fazer uma interpretação geométrica desta por forma a dar significado à sua representação algébrica. Nesta secção pretende-se caracterizar os conceitos imagem de derivada expressos pelos alunos e que tiveram por base a forma como este foi abordado nas aulas. Para tal foi-lhes pedido para explicarem o que entendiam por derivada, qual a sua definição formal e uma interpretação geométrica da mesma. Por vezes a noção de razão incremental ou taxa de variação média tornou-se fundamental para que conseguissem verbalizar o conceito. A experiência de ensino neste tópico permitiu que os alunos fossem incentivados a desenvolver as suas concepções acerca do conceito. Com base nas respostas dadas foi possível organizar os conceitos imagem de derivada em três níveis: os que apresentam um conceito imagem incipiente, um conceito imagem instrumental e um conceito imagem relacional. No conceito imagem incipiente observa-se sobretudo referências ao seu uso, com base em processos e regras elementares. No caso do conceito imagem instrumental é possível encontrar referências à representação algébrica ou à sua verbalização, ainda que os alunos não consigam explicitar e coordenar os vários processos que lhe estão subjacentes. O conceito imagem relacional é caracterizado por os alunos explicitarem a definição formal e ao mesmo tempo coordenarem os processos que estão na sua origem, fazendo por exemplo uma interpretação geométrica do conceito.

3.1. Conceito imagem incipiente

Os conceitos imagem incluídos neste nível são caracterizados por os alunos explicitarem o seu conceito de derivada referindo-se sobretudo aos seus usos, nomeadamente a determinação de máximos e mínimos. A derivada é vista como uma regra ou processo que permite estabelecer determinadas propriedades ou mesmo leis físicas, mas onde a sua definição não é conhecida e quando confrontados com a sua escrita não conseguem explicar o seu significado. Surgem assim processos baseados na automatização de procedimentos que conduzem a objectos demasiado elementares neste nível de ensino. Algumas das propriedades usadas são memorizadas e conduzem a um pensamento proceptual onde se manifesta apenas a componente processual.

Para a Susana a derivada de uma função num ponto é associada à sua interpretação geométrica: "é o declive da recta tangente ao gráfico no ponto". Quando lhe é pedida a definição do conceito ela não consegue ir além da noção anterior afirmando que não se recorda da definição. Quando o entrevistador a questiona sobre a noção de razão incremental ela considera que já se lembra da definição e escreve a representação da figura 7.27:

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Figura 7.27. Definição de derivada da Susana.

A Susana estabelece assim que a derivada no ponto a é dada pela razão incremental, sem ter recorrido a nenhuma representação gráfica. Quando questionada sobre a representação que acabou de fazer no sentido de explicar o seu significado, ela juntou-lhe a expressão $x \to a$ e só posteriormente acrescentou o símbolo de limite (figura 7.28):

$$\lim_{x \to a} f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Figura 7.28. Versão alterada da definição de derivada da Susana.

É desta forma que a Susana estabelece a definição de derivada, não conseguindo explicitar o significado da expressão que acabara de escrever. Parece estar a usar a sua memória visual para escrever a representação simbólica e quando se pretende fazer uma interpretação geométrica da mesma também denota alguma falta de compreensão do conceito. Não associa à razão incremental o declive da recta que passa por aqueles pontos, e quando se procura aproximar o x do a não explica o processo dinâmico que leva a recta secante a tornar-se tangente.

A Susana apresenta assim um conceito imagem de derivada que parece assentar num fenómeno de ventriloquismo, ela refere uma abordagem geométrica que depois não consegue explicar, mesmo perante um caso concreto. A representação simbólica do conceito parece ser baseada na sua memória visual, revelando-se incorrecta e para a qual ela não consegue dar uma explicação ainda que baseada nos processos que lhe estão subjacentes.

No caso da Maria, quando se pretende que ela explicite o que significa dizer que uma função tem derivada num ponto, ela recorre aos usos do conceito “estudo na função mas é máximos e mínimos por exemplo… com a derivada…”. Ela refere que pode calcular extremos da função com a derivada e admite que não tem ideia de qual é a definição de derivada embora considere que sabe derivar. Ao procurar estabelecer a definição com base na razão incremental, ela não consegue associar nenhuma representação ao nome, e quando o entrevistador estabelece esta razão com base num caso concreto, entre os pontos de abcissa 1 e 2 de um gráfico dado, ela associa a representação $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ a um teorema “pois que é $f(a)$-$f(b)$ sobre a-b”. A Maria parece estar a recordar-se de parte do teorema de Lagrange, mas não explica qual é o significado geométrico desta razão incremental. Quando lhe é pedido para estabelecer a razão incremental entre dois pontos quaisquer a e x ela faz a sua representação por comparação com os casos anteriores, mas não explicita o processo de fazer tender o x para a. Só quando escreveu a expressão completa da definição, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ reconheceu que se tratava da definição de derivada afirmando que a teria representado se lhe tivesse sido pedida directamente.

O conceito imagem de derivada da Maria parece ser suportado por duas visões: por um lado o seu uso com base nas regras e propriedades do estudo de funções, pelo outro a definição formal que ela parece ter memorizado mas que não é capaz de explicitar em termos dos processos que lhe estão subjacentes.

Para a Sara o conceito de derivada é associado ao de limite. Ela considera que a função tem derivada num ponto quando existe limite. Inicialmente parece estar a referir-se ao limite da razão incremental, pois relaciona-o com a diferenciabilidade "calculamos o limite à esquerda, o limite à direita. Se forem iguais… ela é diferenciável nesse ponto…". No entanto, quando se pretende clarificar essa situação acaba por referir apenas a existência de limite, confundindo mesmo a existência de limites laterais iguais com a continuidade da função. Desta forma a Sara também não consegue dar uma interpretação geométrica para a derivada e quando lhe é sugerido que se trata da tangente ao gráfico da função no ponto, ao simular essa tangente num gráfico dado, ela acaba por traçar uma recta secante à curva. A noção de razão incremental também não lhe é familiar. Quando é levada a estabelecer a definição de derivada a partir da abordagem gráfica, definida como o limite quando x tende para a da razão incremental entre a e x, ela afirma que não se lembra de ter usado aquela abordagem ou de lhe ter conferido algum significado geométrico.

Desta forma o conceito imagem de derivada da Sara revela-se bastante elementar, não sendo possível usá-lo para explicitar a definição ou mesmo para fazer a sua interpretação geométrica.

Quando confrontada com a questão " o que significa dizer que uma função f tem derivada num ponto a" a Mariana não conseguiu dar nenhum tipo de explicação. Mesmo quando lhe é sugerido para calcular a derivada da função $y=x$ ela conclui que dá 1, mas não consegue atribuir qualquer significado a este valor. No entanto, quando questionada sobre a noção de razão incremental ela associa-a ao limite e quando lhe é pedido para a escrever a partir de um gráfico dado mostra um desempenho favorável. Ela consegue traduzir algebricamente essa razão entre os pontos de abcissa 1 e 2 de um gráfico dado mas quando se pretende saber o seu significado ela considera que se trata do declive da recta tangente ao gráfico. Só quando lhe foi pedido para representar geometricamente a recta que passava por aqueles pontos é que considerou que era o declive da recta secante. Com a ajuda do entrevistador traçou outro gráfico onde assinalou dois pontos de abcissas x e a, voltando a escrever algebricamente a expressão para a razão incremental, mas não estabeleceu o limite dessa mesma expressão como sendo a derivada da função. Esta abordagem foi explicitada pelo entrevistador com base na abordagem gráfica, mas a Mariana admitiu não ter compreendido este processo anteriormente.

Desta forma o conceito imagem de derivada da Mariana parece assentar apenas nalgumas regras, como as de derivação, não conseguindo dar-lhe qualquer significado que vá para além dos procedimentos de cálculo algébrico. Mesmo quando escreve a definição, com a ajuda do entrevistador e com o apoio de um esboço gráfico, não consegue explicar o seu significado.

O Fernando também associa o conceito de derivada de uma função ao seu uso. Quando lhe é pedido para explicar o que significa dizer que a função tem derivada num ponto ele afirma "quer dizer que nós estamos a baixar o grau da nossa expressão". Ele refere-se assim às regras de derivação aplicadas às funções polinomiais. Quando lhe é pedido para fazer uma interpretação geométrica da derivada num ponto de um gráfico dado, consegue relacioná-la com o declive da recta tangente:

> Fernando – A derivada é o declive.
>
> Ent. – A derivada é o…
>
> Fernando – Declive.
>
> Ent. – De quê?
>
> Fernando – Do ponto. Desta recta aqui.
>
> Ent. – De que recta?
>
> Fernando – Da recta tangente ao gráfico.

O Fernando refere-se ao declive sem ter representado a recta tangente ao gráfico no ponto em causa, que no entanto traça mais tarde. Já quando se pretende saber como se pode representar algebricamente a derivada ele afirma que não sabe e também não consegue explicitar o que representa a noção de razão incremental. A partir de um esboço gráfico e com a ajuda do entrevistador o Fernando acabou por representar a razão incremental entre dois pontos mas não lhe conseguiu atribuir qualquer significado geométrico no gráfico. Quando se pretendeu estabelecer a definição de derivada com base no limite da razão incremental apenas conseguiu seguir o processo explicitado pelo entrevistador, não reconhecendo na expressão algébrica final a definição formal de derivada.

Desta forma o conceito imagem de derivada do Fernando é baseado no uso que pode fazer aplicando determinadas regras. Quando se procura explicitar a forma como ele concebe a definição, não é capaz de a estabelecer com base na noção de razão incremental e mesmo quando esta é escrita com a ajuda do entrevistador, não a reconhece como tal.

Para o Manuel o conceito de derivada também é associado ao uso que é possível atribuir-lhe. Frequentemente ele relaciona-o com o estudo dos movimentos na Física:

> Manuel – Agora estou-me a lembrar é de Física, que… Estou-me a lembrar que… num certo ponto do movimento… derivada dá a velocidade nesse ponto… Portanto…
>
> Ent. – Se tiveres uma trajectória.
>
> Manuel – Se tiver uma trajectória vai… e houver derivada nesse ponto é porque… está a haver velocidade.

O Manuel explicita o conceito através de uma das aplicações e não lhe dá qualquer interpretação geométrica. Só quando lhe é sugerido pelo entrevistador que a derivada está relacionada com o declive da recta tangente ao gráfico no ponto dado é que o Manuel parece recordar-se do conceito, referindo o estudo feito no ano anterior no ensino secundário. Quando se pretende estabelecer matematicamente o conceito ele procura concretizar a equação da recta tangente a partir da expressão $y=mx+b$, mas que não conseguiu concretizar por estar a fazer uma abordagem no caso genérico. Quando lhe é pedido para calcular a taxa de variação média entre dois pontos representados num gráfico ele não consegue obter a sua expressão embora reconheça que já a tinha utilizado em outras situações. Mesmo depois de representar graficamente a recta secante ao gráfico e de ter escrito a expressão da taxa de variação não conseguiu estabelecer que o valor desta representa o declive da recta que passa por aqueles dois pontos. Para estabelecer a derivada como o limite da razão incremental foi necessário que o processo fosse explicado geometricamente em pormenor, e o Manuel só revelou alguma familiaridade com a expressão quando a escreveu por sugestão do entrevistador.

Desta forma o conceito imagem de derivada do Manuel parece estar relacionado com o uso deste, nomeadamente na sua aplicação a outras áreas disciplinares. Ele não consegue estabelecer a definição formal e apenas a reconhece pela sua estrutura algébrica quando esta é escrita com a ajuda do entrevistador.

3.2. Conceito imagem instrumental

Os conceitos imagem incluídos neste nível revelam uma abordagem onde o conceito de derivada é quase sempre verbalizado correctamente pelos alunos, conseguindo fazer a sua tradução algébrica ou explicitar o seu significado geométrico, mas quando se procura operacionalizar o conceito, isto é, se tenta estabelecer os processos e procedimentos que lhe estão subjacentes, estes não conseguem dar-lhe o significado esperado. Nalguns casos, ainda que eles não apresentem uma verbalização do conceito, referem um conjunto de características que este deve ter, o que denota uma interiorização de alguns dos processos que lhe estão subjacentes. Noutros casos eles apresentam uma verbalização correcta do conceito, mas não conseguem explicitar os processos e procedimentos que estão na sua origem.

É o caso da Madalena que quando procura explicitar a sua noção de derivada de uma função num ponto faz uma interpretação geométrica:

> Madalena – Ah! Num ponto. Num ponto será o declive da recta que passa por esse ponto, ou tangente a esse ponto.

A Madalena relaciona o conceito com o declive da recta tangente, embora a forma como o verbaliza destaque apenas o ponto em si, como se ele pudesse estar isolado. Quando faz a sua interpretação geométrica num gráfico ela representa a tangente ao gráfico no ponto em estudo de forma correcta. Ao pretender estabelecer a definição de derivada ela também a verbaliza correctamente sem recorrer a qualquer interpretação geométrica:

> Madalena – [É o] Limite de $f(x)$ menos $f(a)$ sobre x-a.
>
> Ent. – Limite… Quando…
>
> Madalena – Quando x tende para a.

Ao pretender estabelecer geometricamente esta mesma definição a Madalena mostra alguma dificuldade em interpretar algumas das suas componentes. Assim, quando se procurou estabelecer o significado da expressão $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ela identifica-a como a razão incremental mas não foi capaz de explicitar o significado ao valor que a mesma representa. Só com ajuda é que concluiu que se tratava do declive da recta que passava pelos pontos de abcissa a e x, representando-a graficamente. Quando se procurou estabelecer o processo que conduz à derivada, com o x a aproximar-se do a, a Madalena afirmou que "eu nunca tinha pensado na variação… até chegar à tangente", mostrando que a sua concepção de limite da razão incremental não tinha por base uma abordagem operacional, isto é, o processo dinâmico de fazer tender a recta secante para a tangente não estava presente no seu conceito imagem. O recurso à abordagem baseada na experiência de ensino mostra-se assim um método eficaz que permitiu mesmo à aluna uma melhor compreensão do conceito.

O conceito imagem de derivada da Madalena pode caracterizar-se por conseguir verbalizar a definição do conceito e algumas das suas propriedades mas, no entanto não explicita nem coordena os processos que estão na sua origem.

O Pedro também faz uma interpretação geométrica quando pretende explicitar a sua noção de derivada:

> Pedro – A noção de derivada é o declive. (…) É a inclinação da recta que passa nestes pontos…
>
> Ent. – E que tem que ser, quê? É uma qualquer… O que é que essa recta é?
>
> Pedro – É tangente ao ponto… Tangente ao gráfico nesse ponto.

Ele relaciona a derivada com o declive da tangente ao gráfico no ponto dado, e embora a sua verbalização inicial tenha um carácter mais genérico, parecendo englobar vários pontos, consegue posteriormente clarificar a noção. Quando se pede para definir o conceito, o Pedro recorre à sua memória:

> Pedro – Bem lembro-me da taxa de variação média… Lembro-me da definição pelo limite da derivada.
>
> Ent. – Pelo limite. Como é que era pelo limite?
>
> Pedro – Tem derivada por definição.
>
> Ent. – Então como é que podes escrever isso?
>
> Pedro – O limite?
>
> Ent. – Hum.
>
> Pedro – O limite é. Limite quando x tende para… a.
>
> Ent. – Para a. Neste caso o ponto seria o a.
>
> Pedro – Aaa… $f(x)$-$f(a)$ sobre x-a.
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> Pedro – Isto seria igual ao m que é o tal declive.

Ele associa a taxa de variação média ao conceito de derivada e estabelece a definição formal tal como tinha sido abordada nas aulas. Quando se procurou dar significado à taxa de variação ele identifica-a na expressão anterior mas não foi capaz de explicitar o que esta representava. Ao tentar traduzi-la graficamente, a partir de um gráfico dado, traçou a recta secante que unia os pontos em estudo, mas considerou que algebricamente ela representaria o declive da recta tangente ao gráfico, como já tinha referido anteriormente na definição do conceito. Desta forma ele revela alguma dificuldade em explicar o papel do limite na definição que deu anteriormente do conceito, e só com a ajuda do entrevistador é que visualiza graficamente o processo a partir da simulação de vários valores de x, cada vez mais próximos de a. Esta abordagem parece ser fundamental para a sua compreensão:

> Pedro – Agora já estou a perceber de onde é que isto vem.
>
> Ent. – Não te estavas a lembrar de onde é que isto vinha?
>
> Pedro – Não fazia a mínima ideia. Nem nunca tinha compreendido, acho eu.

O Pedro consegue assim dar o significado esperado à definição de derivada que escrevera anteriormente, acabando mesmo por simular o processo de novo noutro gráfico que entretanto esboçou. Esta abordagem baseada na experiência de ensino tornou-se assim fundamental para melhorar a sua compreensão do conceito.

O conceito imagem de derivada do Pedro pode caracterizar-se por apresentar uma concepção que lhe permite verbalizar o conceito e escrever a sua definição formal, no entanto não é capaz de estabelecer os processos e procedimentos que estão na sua origem. A identificação destes só e conseguida com ajuda e torna-se fundamental para a compreensão do conceito.

No caso da Carla, quando pretende explicar o que significada a função ter derivada num ponto apenas refere algumas das características desse ponto:

> Carla – Quer dizer que… que tem derivada. [risos] Se ela tem derivada naquele ponto… aaam… quer dizer… Se ela tem derivada naquele ponto quer dizer que ela é… contin[ua]… Quer dizer que esse ponto pertence aaam… ao domínio.
>
> (…)
>
> Carla – E depois ela não pode ser… Hum… Um pico vá lá, um pico no ponto.

Ela refere algumas das propriedades que a função deve ter no ponto como a continuidade e a necessidade de o ponto pertencer ao domínio. Reconhece ainda uma outra característica gráfica, que é o facto de a função não ter derivada se naquele ponto houver um "pico", isto é, se as semi-tangentes à direita e à esquerda forem diferentes. Quando lhe é pedido para explicar o que representa o número que resulta do cálculo da derivada num ponto, ela apenas consegue referir-se à função derivada, dizendo que "esse número vai representar a imagem da derivada" e tenta ainda associar o valor da derivada ao estudo da monotonia da função. Quando se pretende estabelecer a definição de derivada, a Carla não associa qualquer representação ao conceito. Como forma de estabelecer a definição foi-lhe fornecido um gráfico onde ela representou dois pontos arbitrários a e b, sendo de seguida pedido para estabelecer a taxa da variação média entre estes dois pontos. A Carla recorda-se vagamente desta taxa e chega à sua expressão no caso concreto. Quando se pretende saber o seu significado ela não associa o seu valor ao declive da recta que passa pelos pontos dados. Quando o entrevistador lhe propõe que se aproxime o ponto a do b, ela estabelece o comportamento da recta secante, que vai tender para uma recta tangente, no entanto não relaciona este processo com a definição de derivada. Quando lhe é sugerida a escrita da mesma com base na repetição do processo anterior para o caso dos pontos x e a, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, ela só reconhece a definição a partir da sua forma, referido que já se está a recordar da escrita mas que nunca lhe tinha atribuído qualquer significado geométrico.

O conceito imagem de derivada da Carla tem por base alguns objectos matemáticos necessários à compreensão do conceito, conseguindo referir-se a algumas das suas aplicações. O estabelecimento da definição formal só é obtido com ajuda, não conseguindo no entanto explicitar o significado desta.

3.3. Conceito imagem relacional

Nos conceitos imagem deste nível são incluídos os alunos que fazem uma abordagem do conceito de derivada bastante completa, reproduzindo a definição formal dada nas aulas mas fazendo ao mesmo tempo uma interpretação geométrica da mesma. Os alunos mostram assim uma concepção que lhes permite manipular o conceito quer com base na definição, quer com base nos processos e objectos que estão na sua origem.

É o caso da Sofia que quando pretende explicar o que significa dizer que uma função tem derivada num ponto recorre à definição de derivada abordada nas aulas:

> Sofia – Tem deriv[ada]. Bom aqui só me ocorre dizer aaa… a definição. Eu acho que aquilo é assim… Pronto, no ponto *a* é o limite.
>
> Ent. – Diz, diz. Podes escrever.
>
> Sofia – A derivada no ponto *a* é o limite quando o *x* tende para *a*… de *f*(*x*)-*f*(*a*) sobre *x*-*a*… Eu acho que isto é… Ah! A derivada no ponto *a* é o declive da recta tangente ao gráfico no ponto *a*.
>
> Ent. – Hum.
>
> Sofia – E quando nós estamos a calcular pela definição, eu acho… É o limite, são as rectazinhas que se vão, quer dizer, quando estou a calcular o limite… são as imagens.

Ela usa a definição como forma de exprimir a sua noção de derivada e acaba por atribuir ao seu valor um significado geométrico, isto é, a derivada como o declive da recta tangente ao gráfico no ponto. Ela procura ainda dar uma interpretação geométrica para a definição, que acaba por abandonar, e concluir que apenas vai obter os valores da derivada nos pontos dados que refere como sendo imagens. Quando lhe é pedido para fazer um esboço gráfico que permita explicar a definição, fez a representação da figura 7.29 e procurou explicitar o significado aos vários elementos presentes na definição:

> Sofia – Aqui está o *a*…Aaa… Quando o *x* está a tender para *a*… Vai ser o limite… porque isto aqui… Eu não sei muito bem o que é que isto é, mas isto…
>
> Ent. – O *f*(*x*)-*f*(*a*) sobre *x*-*a*.
>
> Sofia – Isto é uma taxa de variação ou assim uma coisa, é não é?

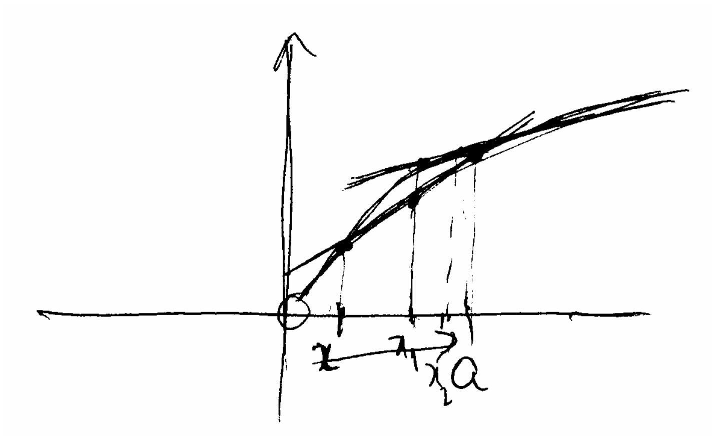


Figura 7.29. Esboço gráfico explicativo da definição de derivada da Sofia.

A Sofia procura descrever os processos subjacentes à definição à medida que vai fazendo a interpretação geométrica e embora inicialmente apresente algumas dúvidas sobre o papel da expressão que define a taxa de variação, acaba por concluir que esta representa o declive da recta que passa pelos pontos em causa e que é secante ao gráfico traçado. Com base nesta abordagem ela procura explicitar o papel desempenhado pelo limite traduzindo a situação graficamente:

> Ent. – Se tu fizeres tender o x para a o que é que vai acontecer?
>
> Sofia – Ah! Porque eu depois, a recta… vai indo assim para cima. Vai ficar à tangente.

Ela conclui que a recta secante se vai aproximar da tangente ao gráfico no ponto a, e estabelece mesmo um paralelo entre o conceito de limite e de derivada:

> Sofia – Eu sabia que quando nós estamos a ver um limite é a aproximação dos valores. Quando é na derivada é a aproximação das curvas, das rectas tangentes.

Desta forma a Sofia explicita a definição de derivada através de uma interacção entre a representação algébrica e gráfica.

O conceito imagem de derivada da Sofia assenta assim numa abordagem estrutural, isto é, baseado na definição formal utilizada nas aulas, mas que pode ser também estabelecido a partir dos processos e objectos que lhe estão subjacentes. Ela consegue estabelecer um paralelo entre a representação algébrica e a respectiva interpretação geométrica que revela uma boa compreensão do conceito.

No caso do Joaquim a derivada de uma função num ponto é estabelecida a partir de uma abordagem geométrica:

> Joaquim – É que é possível traçar uma recta que toca só nesse ponto e a derivada é o declive dessa mesma recta.
>
> Ent. – E a derivada… É o declive da recta…
>
> Joaquim – É o declive da recta tangente ao gráfico, neste caso no ponto a.

Ele utiliza esta forma de definir o conceito sem recorrer a qualquer esboço gráfico e quando lhe é pedido para o concretizar num gráfico dado consegue traçar a recta tangente. Quando se pretendeu estabelecer a definição do conceito o Joaquim não a conseguiu verbalizar tendo-se recorrido a um processo de construção. Ele começou por se referir ao teorema de Lagrange quando pretendeu explicitar a razão incremental, escrevendo-a na forma $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, e posteriormente com base num esboço gráfico onde destacou os pontos de abcissas x e a, concluiu a escrita da expressão da derivada a partir da relação dinâmica estabelecida entre o x e o a:

> Joaquim – Depois é que eles [x e a] se aproximem o máximo possível.
>
> Ent. – Então o que é que tu tens que arranjar aí para eles se aproximarem? É um…
>
> Joaquim – Limite.
>
> Ent. – Exactamente. Então será o limite…
>
> Joaquim – Quando, neste caso, o x tende para a de $f(x)$… [escreve a definição de limite]

O Joaquim chega assim à definição de derivada sem precisar de fazer uma abordagem geométrica. Só depois de ter estabelecido a definição é que explicitou o significado geométrico da razão incremental, argumentando que representa o declive da recta secante que passava pelos pontos considerados. Com base nesta interpretação dá um significado geométrico à definição:

> Joaquim – Aí como eles vão tender, este x vai tender para a, vai ser uma recta cada vez mais próxima de a. No fim vai acabar por passar só em a, que vai ser em a e a.

Desta forma ele estabelece geometricamente o processo que conduz da recta secante até se obter uma tangente.

O Joaquim apresenta assim um conceito imagem de derivada que lhe permite explicitar os vários processos subjacentes embora por vezes pareça necessário ter que haver uma maior coordenação entre eles para que haja um capsular dos processos num novo objecto matemático.

Para a Alexandra o conceito de derivada também é associado à sua interpretação geométrica:

> Alexandra – É o declive… É o declive da recta tangente ao gráfico.

Com base nesta concepção ela faz a representação da tangente num gráfico que lhe foi fornecido e tenta a partir daí estabelecer a definição formal:

> Alexandra – Exacto… Para saber a derivada ia fazer o $f(2)$… menos, menos o quê?… [risos]… $f(x)$ menos f… Como é que ia fazer?
>
> Ent. – Diz. O que é que querias fazer?

Alexandra – Para saber a derivada no ponto 2 nós podíamos fazer o limite não era? … Do $f(x)$ menos $f(2)$.

(…)

Alexandra – $f(x)$-$f(2)$ sobre x-2.

Ent. – Isso é o limite quando… o x tende para…

Alexandra – Ah! 2…

A Alexandra recorda-se da definição de derivada que tenta estabelecer para o ponto 2 do gráfico onde anteriormente tinha representado a recta tangente. Inicialmente mostra alguma indecisão na escrita da razão incremental por não ter estabelecido no gráfico os dois pontos necessários à representação da recta secante a este, mas quando representou o ponto de abcissa x foi capaz de concluir a escrita da definição. Com base nesta representação, ela identifica a razão incremental, estabelecendo que ela representa o declive da recta que passa pelos pontos dados e é secante ao gráfico, e procura concretizar o valor de x para poder definir o valor da derivada no ponto 2 ainda que não conheça a expressão analítica da função em causa. O papel desempenhado pelo limite na razão incremental parece ser compreendido geometricamente ainda que a Alexandra não o consiga explicitar sem a intervenção do entrevistador. Quando lhe é pedido para explicar no gráfico o que vai acontecer quando o x se aproximar do 2 ela conclui que a recta secante vai tender para a tangente.

O conceito imagem de derivada da Alexandra apresenta assim uma componente processual que ela relaciona com a abordagem geométrica proposta, permitindo-lhe explicitar os processos envolvidos no conceito, embora estes ainda não sejam coordenados de modo adequado a poderem ser capsulados para formar um novo objecto matemático.

Para a Paula o conceito de derivada de uma função num ponto é justificado a partir da definição formal:

Ent. – O que é que tu achas que é a derivada num ponto? …

Paula – É… o limite…

Ent. – Hum.

Paula – Eu costumo escrever assim… … [figura 7.30]

Ent. – Exactamente… Portanto é esse limite. E agora o que é que esse limite representa?

Paula – A recta tangente… ao gráfico.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Figura 7.30. Definição de derivada de *f* no ponto *a* da Paula.

A Paula escreve correctamente a definição sem recurso a qualquer interpretação geométrica e confere-lhe um significado geométrico associando a derivada à recta tangente ao gráfico e concluindo posteriormente que ela representa o declive da recta tangente. Quando se procurou estabelecer de um modo mais detalhado o significado da definição, a Paula identificou a razão incremental como sendo o declive da recta secante representando-a geometricamente num esboço gráfico dado. Quando se procurou que explicasse mais pormenorizadamente o significado da definição que escreveu, ela não conseguiu explicitar o papel do limite aplicado à razão incremental de forma espontânea, mas foi capaz de simular geometricamente o que acontece quando o x vai tomando valores cada vez mais próximos de a e desta forma concluiu que a recta secante se vai aproximar da tangente ao gráfico no ponto.

A Paula apresenta assim um conceito imagem de derivada baseado na definição formal mas que adquire o significado pretendido quando explicitado com base numa interpretação geométrica. Ela consegue aceder aos processos que estão subjacentes ao conceito, ainda que esta não seja uma abordagem que consegue fazer de forma espontânea.

Para o João o conceito de derivada é explicitado com base numa abordagem geométrica:

> João – A derivada num ponto, de uma função, corresponde ao declive da recta tangente a essa função nesse ponto.

Ele associa a derivada ao declive da recta tangente ao gráfico mas ao mesmo tempo refere a definição como forma de poder calcular essa derivada:

> João – Ah! Então a derivada num ponto… é o limite.
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> João – Aaa…
>
> Ent. – No ponto a neste caso.
>
> João – No ponto a. Portanto, quando x tende para a… de $f(x)$-$f(a)$ sobre x-a.

O João revela assim ser capaz de explicitar a definição formal ensinada, sem necessitar de fazer qualquer interpretação geométrica. Quando se pretendeu caracterizar de forma mais pormenorizada a definição anterior, com recurso a uma abordagem gráfica, o João foi capaz de representar num gráfico dado a recta que passa pelos pontos de abcissas x e a identificando-a como tendo por declive a razão incremental, e estabelecendo de seguida o processo em que o x tende para a:

> João – Estamos a fazer o x a tender para a, ou seja, estamos a obrigar esta recta de certa maneira, ir tomando aqui… Tendo um ponto mais ou menos fixo no a. (…) Ir tomando inclinações diferentes até que no limite, quando o x é quase a, quando o x chega a ser a… Temos exactamente a recta tangente ao ponto.

Ele articula assim as duas formas de representar a derivada, dando à definição o significado pretendido.

O João apresenta assim um conceito imagem de derivada que lhe permite utilizar a definição formal ensinada nas aulas e ao mesmo tempo estabelece os processos que lhe estão subjacentes, explicitando-os com base numa interpretação geométrica do conceito.

O José também faz uma abordagem geométrica quando pretende explicitar o seu conceito de derivada:

> José – A derivada… Então é a recta tangente à função nesse ponto.

Ele refere-se apenas à recta tangente, mas posteriormente explica que se trata do declive dessa recta. Quando se procura caracterizar a definição de derivada o José verbaliza-a bem mas acaba por deixar a representação incompleta:

> José – É o limite. É o limite… Acho que de… f de x menos f… O f do ponto.
>
> Ent. – O ponto é o ponto a.
>
> José – Para calcular por definição é assim, acho eu… Não, não tem nada a ver.

Embora ele refira inicialmente que é o limite, acaba por representar apenas a razão incremental pelo que fica com algumas dúvidas sobre a representação que acabou de escrever. Quando questionado concluiu que tinha representado a taxa de variação e que esta por sua vez representava o declive de uma recta. Inicialmente teve algumas dúvidas sobre esta recta mas, depois de fazer um esboço gráfico, identificou-a como sendo a recta que passava pelos pontos em estudo e era secante ao gráfico da função. A partir desta representação conclui que quando se "vai encurtando" a distância entre as abcissas dos dois pontos a recta secante vai tender para a tangente. Ele verbaliza este processo mas só quando o entrevistador chama a atenção para esta relação de proximidade é que o José identifica a necessidade de acrescentar o limite à expressão da razão incremental para completar a definição.

O José apresenta um conceito imagem de derivada que assenta numa concepção geométrica e que lhe permite verbalizar a definição formal usada nas aulas. Quando se procura caracterizar esta mesma definição com base numa abordagem geométrica, ele evidencia os processos que estão presentes mas revela algumas dificuldades em coordená-los de forma adequada para representar algebricamente o conceito.

4. Teorema de Lagrange

Na sequência do estudo das derivadas o teorema de Lagrange surge como um dos teoremas fundamentais, cujo resultado pode ser usado na resolução de vários problemas relacionados com o estudo das funções reais de variável real. Tal como já foi referido no início deste capítulo o enunciado do teorema é o seguinte: "Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ ($a, b \in \boldsymbol{R}$, $a<b$) e diferenciável em $]a, b[$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$". Na abordagem feita nas aulas o teorema foi apresentado aos alunos a partir deste enunciado, sendo posteriormente dada uma interpretação geométrica, seguida de alguns exemplos de aplicação.

Com o objectivo de caracterizar o conceito imagem que os alunos desenvolveram acerca do teorema e da sua aplicação foi-lhes pedido para enunciarem as condições do teorema, fazerem uma interpretação geométrica do mesmo e por último usarem o teorema para verificar a desigualdade seguinte, que correspondia a um dos exercícios resolvidos na aula: $| sen(\theta) - sen(\alpha) | \leq | \theta - \alpha |$, $\forall \theta, \alpha \in R$. Com base nas respostas foi possível estabelecer três níveis que permitem organizar os seus principais conceitos imagem: os que revelam um conceito imagem incipiente, um conceito imagem instrumental e um conceito imagem relacional. A abordagem feita apresenta características de experiência de ensino, tendo permitido que os alunos em determinadas situações fossem ajudados a expandir com sucesso o seu conceito imagem.

4.1. Conceito imagem incipiente

Os conceitos imagem deste nível são caracterizados pelo facto de os alunos revelarem desconhecer o enunciado do teorema, recordando-se por vezes de algumas partes deste mas sem conseguir dar-lhe o significado esperado pelo ensino. Eles parecem recorrer a guiões para estabelecer as diferentes partes do enunciado que se revelam por vezes bastante incompletos. Desta forma os alunos não possuem uma interpretação geométrica do enunciado do teorema e quando se pretende fazer a sua aplicação num caso concreto, a identificação das premissas (hipóteses) e o cálculo são quase sempre entraves para a sua compreensão. Nenhum dos alunos presentes nesta categoria identificou as hipóteses do teorema nem provou a desigualdade.

É o caso da Mariana que quando pretende explicitar as condições do teorema apenas se refere à existência de dois pontos e de uma função:

> Mariana – Dois pontos…
>
> Ent. – Dois pontos e…
>
> Mariana – Uma função.
>
> Ent. – E uma função, não é?
>
> Mariana – Sim.
>
> Ent. – E esses dois pontos definem o quê? … Não são pontos isolados pois não?

Mariana – Não. São… dois pontos interiores ao domínio.

Ent. – E tu tens só este ponto e este ponto ou precisas de mais coisas?

Mariana – Então, preciso da função definida nesse … intervalo.

A Mariana parece estar a recorrer à sua memória visual para identificar algumas das condições do teorema, começando por recordar a existência de dois pontos que posteriormente servirão para traduzir um intervalo onde uma dada função estaria definida. Ela vai respondendo com algumas hesitações e o facto de referir destes dois elementos não foi suficiente para que conseguisse estabelecer as hipóteses do teorema. Só com ajuda é que explicitou que a função deve ser contínua no intervalo fechado e diferenciável no intervalo aberto. Perante estas condições a Mariana continua sem saber o que o teorema permite concluir, apenas começando por considerar que a função deve ser contínua. Quando o entrevistador lhe referiu que o teorema está relacionado com a derivada da função e com a existência de um ponto *c* pertencente ao intervalo anterior, ela concluiu que o $f'(c)$ seria igual a zero. Só quando lhe é sugerido que a conclusão do teorema relaciona a derivada da função no ponto *c* com a razão incremental é que a Mariana parece recordar-se e consegue escrever a tese do teorema. Quando se pretendeu fazer uma interpretação geométrica do enunciado do teorema num gráfico dado, enunciado este que entretanto tinha sido escrito de forma esquemática (figura 7.31), a Mariana conseguiu identificar a razão incremental como o declive da recta secante, mas não foi capaz de explicitar o significado da igualdade existente entre esta e o $f'(c)$.

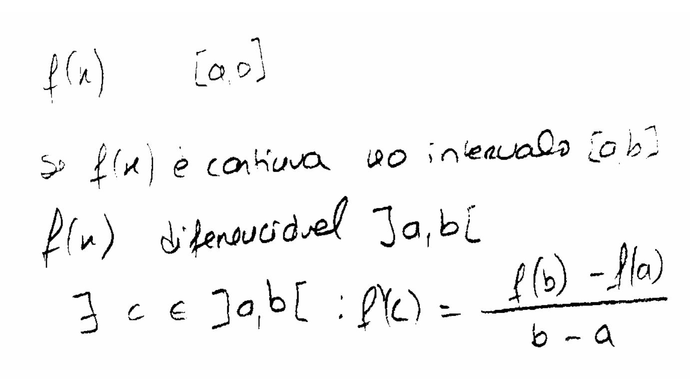


Figura 7.31. Representação esquemática do enunciado do teorema de Lagrange da Mariana.

Ela marcou primeiro o ponto *c* no eixo das abcissas entre os pontos *a* e *b*, extremos do intervalo, e depois com a ajuda do entrevistador associou o $f'(c)$ ao declive da recta tangente.

Quando se pretendeu usar o teorema para demonstrar que $|sen(\theta) - sen(\alpha)| \leq |\theta - \alpha|$, $\forall \theta, \alpha \in R$, a Mariana começou por considerar a necessidade de ter um intervalo, hesitando na forma como o mesmo poderia ser definido, pois poderia ser de θ a α. Posteriormente, por comparação com o enunciado do teorema, concluiu que deveria ser de α a θ. Já no que se refere à função *f*(*x*) foi mais difícil de estabelecer a sua expressão analítica:

> Ent. – Então e que função é que vais escolher? … [Pausa prolongada]
>
> Mariana – Sei lá…
>
> Ent. – Tens que olhar para aqui. [Indico a desigualdade que se pretende provar] O que é que te dava jeito ter aí para função? …
>
> Mariana – O seno de α .
>
> Ent. – O seno de?
>
> Mariana – θ …

A Mariana parece estar a considerar que o α e o θ são variáveis, pelo que a função poderia ser definida genericamente por seno de α ou seno de θ. Esta abordagem parece indicar também uma grande dificuldade em estabelecer uma relação entre o caso concreto e o enunciado do teorema, e só quando lhe é sugerido que se trata de uma função genérica é que ela a refere como sendo a função *f*(*x*)=*sen*(*x*). A partir desta sugestão explicita as hipóteses do teorema, referindo a continuidade da função no intervalo fechado e a diferenciabilidade no intervalo aberto e escreve a tese por comparação com o enunciado do teorema (figura 7.32):

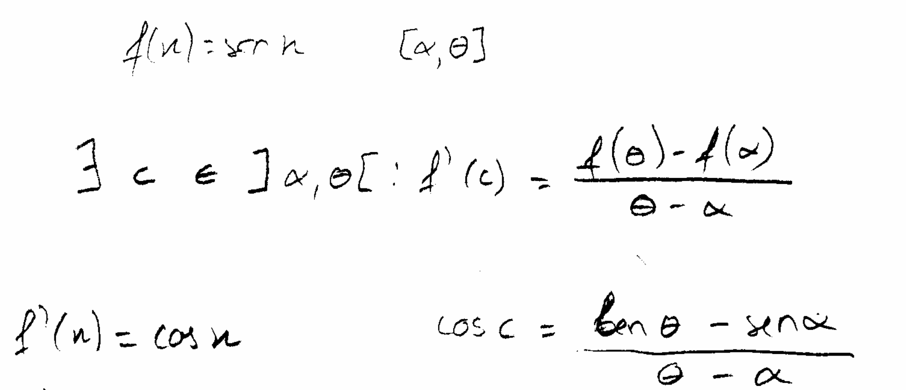


Figura 7.32. Estabelecimento do teorema de Lagrange no caso concreto (Mariana).

Quando se pretendeu aplicar a função módulo a ambos os membros da igualdade a Mariana não sabe se isso é possível, pois considera que a função coseno pode ser negativa e desta forma vai alterar o seu sinal. Esta propriedade parece causar-lhe algumas dificuldades, sendo mesmo necessário recorrer a uma explicação pormenorizada das várias situações possíveis de igualdade e desigualdade com o módulo. Também quando foi necessário transformar o módulo do quociente no quociente dos módulos a Mariana admitiu que tal era possível, mas não conseguiu explicar porquê. Quando se procurou estabelecer a condição que conduzia à desigualdade pretendida por majoração do valor do coseno de *c* (figura 7.33), a Mariana só explicitou o seu significado depois de o entrevistador lhe ter sugerido a forma de executar essa majoração.

$$\frac{|\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\alpha|}{|\theta - \alpha|} = |\cos c|$$

$$\frac{|\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\alpha|}{|\theta - \alpha|} \leq 1$$

$$|\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\alpha| \leq |\theta - \alpha|$$

Figura 7.33. Conclusão da aplicação do teorema de Lagrange ao caso concreto (Mariana).

Desta forma o conceito imagem da Mariana associado ao teorema de Lagrange tem por base a sua memória visual que apenas lhe permite identificar algumas das suas condições. Quando o mesmo lhe é apresentado por escrito não consegue dar-lhe uma interpretação geométrica e ao pretender aplicar o teorema a uma situação concreta as principais dificuldades estão na identificação das hipóteses do teorema e nos processos de cálculo que envolvem propriedades da função módulo.

Para a Sara o enunciado do teorema de Lagrange é algo que ela admite não se lembrar, mas no entanto refere algumas das hipóteses. Depois de lhe ter sido sugerido que o teorema está relacionado com o conceito de derivada envolvendo funções ela acaba por se referir à continuidade e diferenciabilidade:

Ent. – Portanto, o teorema de Lagrange tem a ver com derivadas. Tem a ver com funções que têm que ser…

Sara – Contínuas.

Ent. – Onde?

Sara – Nos pontos.

Ent. – Num…

Sara – Num ponto.

Ent. – Num intervalo.

Sara – Ah! Intervalo.

Ent. – Portanto tem que haver sempre uma função e um intervalo. (…) Depois essa função tem que ser o quê?

Sara – Diferenciável.

Ent. – Tem que ser diferenciável no intervalo…

Sara – *a*, *b*.

Ent. – Fechado ou aberto?

Sara – Aberto.

Inicialmente a Sara não considera a existência de um intervalo, referindo-se à continuidade da função de um modo genérico. Quando passou a considerar o intervalo já se referiu à diferenciabilidade nesse intervalo, excluindo os seus extremos. Ela parece estar a responder ao acaso, usando algumas propriedades a que as funções podem obedecer, mas sem relacionar essas propriedades com o teorema em estudo. Ela acabou por não conseguir identificar o teorema, tendo o entrevistador que lhe sugerir a escrita da tese:

> Ent. – Existe um *c* pertencente ao intervalo *a*, *b*… Tal que o *f'*(*c*) é igual a quê? Lembraste?…
>
> Sara – A limite…
>
> Ent. – À razão incremental… Que é… *f*(*b*)-*f*(*a*) sobre *b*-*a*.
>
> Sara – Não se põe limite sempre antes?

A Sara completa a escrita do teorema de forma esquemática, mostrando no entanto alguma dificuldade nessa escrita, pois pretendia afectar a razão incremental com o limite como tinha feito anteriormente no conceito de derivada. Ela parece recorrer a um guião que é activado sempre que representa determinados símbolos ou faz determinadas representações simbólicas. Quando se procurou dar uma interpretação geométrica do mesmo, a Sara fez um esboço gráfico onde representou o intervalo *a*, *b*, mas não conseguiu dizer qual o significado geométrico da razão incremental nem explicitou como poderia encontrar o ponto *c*, limitando-se a representar a sua abcissa sobre o eixo horizontal e de forma aleatória.

Quando se pretendeu aplicar o teorema para provar a desigualdade $|sen(\theta)-sen(\alpha)|\leq|\theta-\alpha|,\ \forall\theta,\alpha\in R$, a Sara identificou a função e o intervalo de forma apropriada. Depois de estabelecer uma comparação com o enunciado do teorema acabou por considerar o intervalo de α a θ tendo no entanto dúvidas se o mesmo seria aberto ou fechado. Quando se pretendeu estabelecer as hipóteses do teorema a Sara justificou a continuidade da função mas teve algumas dificuldades com a sua diferenciabilidade, tendo associado esta à continuidade da função e à existência de limite. A conclusão do teorema acabou por ser escrita por comparação com o enunciado anterior. Quando se pretendeu aplicar a função módulo a ambos os membros da igualdade obtida a Sara concorda que tal seria possível sem conseguir no entanto justificar essa propriedade. Posteriormente transforma o módulo do quociente no quociente dos módulos mas não chega à conclusão pretendida. Só com a ajuda do entrevistador ela admite compreender o processo de majoração do coseno de *c* mas considera que não seria capaz de desenvolver este raciocínio num exame por pensar que estava a fazer errado.

O conceito imagem que a Sara apresenta do teorema de Lagrange parece ser bastante primário, não conseguindo identificar as suas premissas e mesmo depois de as identificar não foi capaz de fazer a sua interpretação geométrica. Desta forma a aplicação do teorema num caso concreto resumiu-se à execução de um conjunto de procedimentos, nem sempre compreendidos o que se traduz na incapacidade de resolver o problema proposto.

A Alexandra tenta identificar o teorema de Lagrange com base na sua memória visual:

> Alexandra – [O teorema] de Lagrange… O do Cauchy, que era o último…
>
> Ent. – Hum.
>
> Alexandra – Era aquela fórmula muito grande, aquela expressão…

Ela refere-se ao teorema de Cauchy como sendo o último abordado nas aulas, no entanto o teorema que está a tentar descrever é o de Taylor, cuja fórmula parece estar a visualizar. Com base nesta abordagem a Alexandra não enuncia o teorema de Lagrange mas, no entanto é capaz de descrever algumas das suas condições:

> Ent. – E o teorema de Lagrange, lembras-te o que é que ele dizia? Quais é que eram as condições que nós tínhamos que ter?
>
> Alexandra – Então tinha que ser contínua.
>
> Ent. – Temos que ter sempre uma…
>
> Alexandra – Uma função contínua num intervalo e diferenciável nesse intervalo aberto.

Ela refere a existência de uma função contínua e diferenciável num intervalo aberto mas quando se procura estabelecer o resultado do teorema ela apenas indica que existe um zero. Quando o entrevistador se refere à existência de um *c* ela parece recordar-se de mais uma parte do enunciado do teorema:

> Alexandra – Um *c*. Pois era!
>
> Ent. – Existe um *c*… Que está onde?
>
> Alexandra – Está entre *a* e *b*… Existe um *c* pertencente… *a*, *b*, aberto ou fechado?

Embora ela consiga incluir o *c* no intervalo considerado não é capaz de decidir sobre as características do intervalo, revelando não compreender o alcance do teorema. Só quando lhe foi sugerido que iria ter o $f'(c)$ igual a uma outra expressão é que ela voltou a evocar a sua memória visual:

> Alexandra – O $f'(c)$…
>
> Ent. – Pode-se escrever de que forma? …
>
> Alexandra – Ah!… $f(b)$-$f(a)$, a razão incremental. Ou é limite aqui antes?
>
> Ent. – Não.
>
> Alexandra – Não é…
>
> Ent. – [A Alexandra está a escrever] menos $f(a)$ sobre b-a.
>
> Alexandra – Ah! Já me estou a lembrar…

Com base na existência do $f'(c)$ ela parece recordar-se da razão incremental, mas quando vai escrever a sua expressão volta a lembrar-se da definição de derivada e hesita na colocação do limite antes desta. Só quando acabou de escrever a expressão é que ela admite reconhecer o enunciado do teorema.

Quando se procurou dar uma interpretação geométrica do teorema a Alexandra foi capaz de relacionar a razão incremental com o declive da recta secante ao gráfico que passa nos pontos de coordenadas $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ embora por vezes confunda este declive com o da recta tangente. Quando se pretendeu estabelecer a igualdade entre a razão incremental e a derivada da função no ponto c, a Alexandra começou por marcar primeiro a abcissa do ponto, dividindo o intervalo a meio, e só depois é que traçou a tangente ao gráfico. A relação de paralelismo entre as duas rectas anteriores só foi compreendida posteriormente com a ajuda do entrevistador.

Ao utilizar o teorema para provar que $|sen(\theta)-sen(\alpha)|\leq|\theta-\alpha|,\ \ \forall\theta,\alpha\in R$, a Alexandra tentou recordar-se do processo utilizado na resolução feita nas aulas:

> Alexandra – Eu lembro-me de fazer estas coisas, não me lembro é como é que se faz… Sei que há um intervalo, não é?

Ela recorreu ao enunciado escrito anteriormente identificando a necessidade de ter um intervalo que definiu inicialmente entre θ a α e que depois acabou por alterar, definindo-o de α a θ, por comparação com o enunciado do teorema. Posteriormente identificou a função como sendo $f(x) = sen(x)$ e escreveu a tese do teorema para o caso concreto. Nas hipóteses do teorema justificou satisfatoriamente a continuidade e a diferenciabilidade da função embora não tenha a preocupação de referir os intervalos onde tal acontece, admitindo mesmo que a função pode ser diferenciável no intervalo fechado, intervalo este que pode conter o c. A aplicação das propriedades dos módulos à expressão obtida foi feita sem que a Alexandra conseguisse dar uma justificação válida e quando se pretendeu estabelecer a desigualdade pedida ela não conseguiu fazer a majoração de $|cos(c)|$, manifestando apenas alguma compreensão depois de uma explicação pormenorizada do entrevistador.

O conceito imagem do teorema de Lagrange evocado pela Alexandra parece assentar em pequenas parcelas da sua memória visual, que ela vai tentando explicitar à medida que elas vão surgindo. Ela consegue reconhecer o teorema quando acaba de fazer a sua representação esquemática, mas quando pretende fazer a sua interpretação geométrica tem dificuldades com a compreensão da linguagem matemática usada. Na aplicação do teorema parece procurar enquadrar a resolução por procedimentos conhecidos mas que não consegue encadear de forma a chegar ao resultado pretendido.

No caso do Fernando o enunciado do teorema de Lagrange não lhe sugere nenhuma representação. O entrevistador procura que, com base nas hipóteses do teorema ele tente estabelecer a tese. Para tal refere-lhe a existência de uma função contínua no intervalo *a*, *b* fechado e diferenciável no intervalo *a*, *b*, aberto. O Fernando acaba por tentar saber se o teorema só diz isto e quando o entrevistador lhe diz que falta a tese, adiantando que nestas condições existe um *c* pertencente ao intervalo anterior, ele conclui que "o *f*(*c*) é igual a zero". Quando lhe é sugerido que o teorema está relacionado com a derivada e não com a função ele apenas conclui que será *f'*(*c*) = 0. Só depois de uma sugestão é que ele escreve a conclusão do teorema. Quando se procurou fazer uma interpretação geométrica do enunciado acabado de escrever, o Fernando começou por representar o intervalo dado no esboço gráfico justificando de seguida a continuidade e diferenciabilidade da função apenas com base no esboço do gráfico:

> Fernando – É contínua neste intervalo limitado. É diferenciável nesse intervalo, em todos os pontos, e tem derivada. Existe sempre um *c*…
>
> Ent. – Consegues arranjar um *c*. Onde é que está o *c*?
>
> Fernando – O *c* pode estar aqui por exemplo. Pode ser aqui um *c*.

Ao procurar o *c* que o teorema garante existir, o Fernando acaba por o fixar ao acaso, aproximadamente o ponto médio entre *a* e *b*, mas sem explicitar o significado geométrico da igualdade $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Depois de questionado sobre o significado geométrico desta igualdade ele acaba por confundir o declive da recta secante com o da recta tangente, pois interpreta a igualdade no seu sentido estrito considerando que com o mesmo declive as rectas devem estar sobrepostas, e só compreende a não arbitrariedade do ponto *c* quando lhe é referido que a igualdade acima se traduz geometricamente no paralelismo das duas rectas cujos declives são dados pelos dois membros desta igualdade.

Quando se procura usar o teorema anterior para mostrar que $|\,sen(\theta)-sen(\alpha)\,|\leq|\,\theta-\alpha\,|$, $\forall\theta,\alpha\in R$, o Fernando começa por se preocupar com a tese do teorema:

> Ent. – [Lê o guião] "Use o teorema de Lagrange para mostrar a seguinte desigualdade". Então o que é que tu vais precisar de arranjar?
>
> Fernando – Um *c*. Tenho que arranjar um *f'*(*c*).
>
> Ent. – Portanto quais são as hipóteses aqui. O que é que eu tenho de ter?
>
> Fernando – Contínua em *a*, *b*…
>
> Ent. – Contínua em *a*, *b*, o quê? Uma…
>
> Fernando – O quê?
>
> Ent. – Quem é que é contínua em *a*, *b*?
>
> Fernando – A função.
>
> Ent. – Uma função. Então tens que ter uma…
>
> Fernando – Função. Chamada *f*(*x*), qualquer coisa.

Ele refere-se ao c e ao $f'(c)$ mas acaba por conseguir identificar as hipóteses do teorema, referindo a existência de um intervalo e de uma função. Desta forma começa a dar mais atenção à representação esquemática do enunciado do teorema escrito anteriormente e por comparação consegue estabelecer o intervalo α, θ e a função $f(x) = sen(x)$. Usando a mesma estratégia acaba por escrever a aplicação do teorema ao caso concreto ainda que inicialmente tenha considerado a derivada da função seno como sendo menos coseno e apenas tenha escrito a parte da tese do teorema que é traduzida pela igualdade entre a derivada da função no ponto c e a razão incremental no intervalo $[a, b]$. A justificação das hipóteses do teorema só é conseguida com a ajuda do entrevistador e coloca ambos os membros da igualdade anterior em módulo, justificando que tal é necessário porque na expressão que lhe é dada para mostrar eles também aparecem. O Fernando não consegue explicar o motivo pelo qual pode utilizar o módulo e também não faz a majoração de $|cos(c)|$ por forma a provar a desigualdade pretendida.

O conceito imagem que o Fernando apresenta do teorema de Lagrange parece ser elementar, não lhe permitindo estabelecer o enunciado do teorema nem a capacidade de explicitar o seu significado geométrico. A aplicação do teorema a um caso concreto não vai além de uma abordagem baseada em certos procedimentos, sendo esta estabelecida por comparação com o enunciado escrito anteriormente. As operações com módulos e o estabelecimento da desigualdade pretendida só e parcialmente compreendida com a ajuda do entrevistador.

Para a Maria a única representação que associa ao teorema de Lagrange é a razão incremental utilizada anteriormente no conceito de derivada:

> Maria – O Lagrange é parecido com aquilo [indica a razão incremental na definição de derivada].
>
> Ent. – É, não é?
>
> Maria – É. Por isso aqui… Ele disse uma coisa qualquer. É que o Lagrange disse muitas coisas.
>
> Ent. – O que é que ele diz que vocês têm de ter? … Têm que ter uma função… Então dada uma função…
>
> Maria – Hum…
>
> Ent. – E mais? Têm que ter mais uma coisa… além da função, que é o quê?… Têm que ter uma função e… … um intervalo.
>
> Maria – Ah! Sim. É essencial.

Esta associação não lhe permite estabelecer as condições do teorema. Só quando o entrevistador lhe sugere a necessidade da existência de uma função e um intervalo é que ela admite que são elementos essenciais sem no entanto conseguir explicitar as condições a que a função deve obedecer nesse intervalo. Quer a continuidade no intervalo fechado, quer a diferenciabilidade no intervalo aberto, têm que ser sugeridas o que leva a que a Maria se recorde de alguns fragmentos da tese do teorema:

> Ent. – Então, dada uma função *f* definida no intervalo *a*, *b*, o que é que vocês podem dizer…
>
> Maria – Ah! Isso aí eu resolvi… Isso aí fez-me uma confusão porque tem que se encontrar um *c*… É isso que tem um *f'*(*c*)?
>
> (…)
>
> Ent. – Então existe um *c*, podes escrever, pertencente ao *a*, *b* aberto.
>
> Maria – O existe é o primeiro?
>
> Ent. – Diz?
>
> Maria – Existe um *c*, é o primeiro?

A Maria parece recordar-se por momentos de parte da tese do teorema, no entanto acaba por não a conseguir explicitar uma vez que quando lhe é referido o quantificador existencial ela parece admitir que também deve estar presente o quantificador universal. Desta forma ela procura uma ordem para os dois quantificadores e só consegue concluir que o *f'*(*c*) é igual à razão incremental entre *a* e *b* depois de tal lhe ter sido sugerido. Desta forma a representação esquemática do enunciado do teorema resumiu-se à representação da figura 7.34:

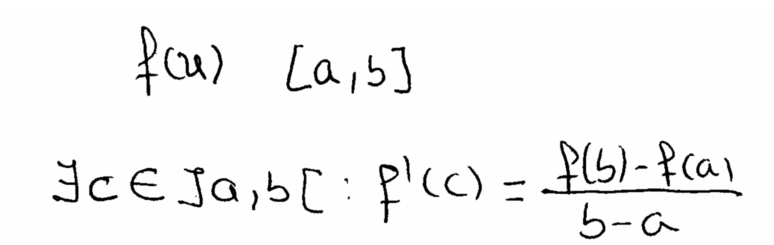


Figura 7.34. Representação esquemática do enunciado do teorema de Lagrange da Maria.

Quando se pretendeu fazer uma interpretação geométrica do teorema a Maria não estabeleceu qualquer relação, argumentando que não sabia. Depois de lhe ter sido sugerido que representasse o intervalo considerado num esboço gráfico dado, ela relacionou a razão incremental com a recta que passa pelos pontos de coordenadas $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e quando o entrevistador lhe sugeriu que a expressão acima comparava o declive dessa recta com o de uma recta tangente ao gráfico, ela estabeleceu que ambas as rectas deveriam ser paralelas e que desta forma conseguia encontrar o ponto *c*. Esta descoberta deixou-a bastante surpresa pelo facto de o enunciado do teorema se revelar bastante simples e fácil de compreender.

Quando se pretendeu utilizar o teorema para mostrar $|\, sen(\theta) - sen(\alpha) \,| \leq |\, \theta - \alpha \,|$, $\forall \theta, \alpha \in R$, a Maria começou por sugerir que precisava de um intervalo e de uma função. Ela conseguiu indicar correctamente o intervalo, referindo que seria de α a θ e acabou por indicar que a função seria o seno, no entanto não conseguiu identificar o seu argumento:

Ent. – Qual é a função?

Maria – É o seno.

Ent. – De?… Qual é a função $f(x)$? …

Maria – Hum, hum… Aquela [$f(x)$] não dá. [risos]

Ent. – Então não dá? Tu arranjaste a função $f(x)$ e depois ficou $f(b)$-$f(a)$ sobre b-a.

Maria – Hum.

Ent. – Tu aqui tens $f(\theta)$-$f(\alpha)$. Então como é que é a função $f(x)$? …

Maria – Como ali?

Ent. – É um seno de quê? … Escreve lá, $f(x)$=… A função que tu procuras há-de ser um seno de quê?

Maria – E isto não existe?

Ent. – Isso vem depois daqui quando substituis.

Maria – Hum.

Ent. – Então como é que fica a função… Se tu dizes que a função é de…x… É um seno de quê?

Maria – De x.

Ent. – De x, não é?

Maria – Isto é só seno de x?

Ela pareceu não ter estabelecido uma comparação entre o enunciado do teorema e a expressão da inequação dada, procurando que a expressão da função a definir gerasse o primeiro membro da inequação. Embora tivesse referido anteriormente que os pontos α e θ são os extremos do intervalo, a Maria parece identificar no primeiro membro da inequação dada o seno de α e o seno de θ como sendo duas funções. Quando se procurou estabelecer o teorema com base na função e intervalo encontrados, a Maria refere-se às hipóteses do teorema, não dando grande importância à continuidade e diferenciabilidade da função no intervalo, e acabou por escrever a tese por aplicação directa do enunciado:

Ent. – Dadas essas condições existe um c pertencente…

Maria – A α, θ.

Ent. – Tal que…

Maria – $f'(c)$ é igual a f…

Ent. – f do segundo menos f do primeiro…

Maria – Sobre θ - α. Ainda temos que fazer mais?

Nesta fase a Maria já não se recorda do enunciado do problema proposto, pelo que acha que este já deve estar concluído. Quando se pretendeu estabelecer a desigualdade a partir da aplicação do teorema, ela não justificou a utilização das propriedades dos módulos nem estabeleceu a majoração da função coseno por forma a encontrar o resultado pretendido.

Desta forma, o conceito imagem do teorema de Lagrange da Maria é elementar, não sendo possível associar-lhe qualquer representação. Mesmo depois de ter uma representação esquemática do enunciado ela não lhe consegue dar uma interpretação geométrica o que parece revelar a falta de compreensão de objectos elementares que estão na base da construção deste novo constructo. Os processos de cálculo envolvendo módulos também se revelaram uma tarefa bastante complexa, não lhe permitindo o estabelecimento da desigualdade dada. Em várias situações a abordagem baseada na experiência de ensino resultou numa ampliação do seu conceito imagem, mostrando uma evolução na aprendizagem do conceito.

Para o Manuel o teorema de Lagrange não apresenta nenhuma característica especial que lhe permita fazer a distinção entre este e os restantes teoremas. Quando lhe é pedido para explicar o que é que o teorema dizia ele refere que:

> Manuel – Agora não [tenho ideia]. Sabia a forma, já nem isso… Quer dizer se eu vir a forma, eu digo que é aquela porque sei que é o Lagrange. Lembro-me é da regra de Cauchy, isso é que eu me lembro bem.

Ele argumenta que apenas o consegue identificar pela sua "forma" no entanto quando tenta explicitar o seu conceito imagem refere a regra de Cauchy que foi bastante utilizada como forma de levantar algumas indeterminações. Posteriormente refere-se aos corolários do teorema de Rolle e consegue reconhecer que há algumas relações entre vários teoremas, embora não consiga distinguir qual deles é mais geral ou qual deles é um caso particular de outro. O Manuel não identifica as condições do teorema, pelo que o entrevistador lhe sugeriu a existência de uma função e de um intervalo. Ao estabelecer as hipóteses do teorema foi o entrevistador que lhe sugeriu a continuidade da função no intervalo fechado e a diferenciabilidade no intervalo aberto. A tese do teorema também não é familiar para o Manuel. Depois de lhe ter sido referida a existência de um ponto c, ele apenas argumentou que teria $f(c)$ igual a qualquer coisa que não se lembrava. Mesmo depois de lhe ter sido sugerido que seria o $f'(c)$ é que era igual a uma dada expressão, ele não conseguiu completar a escrita da tese:

> Ent. – Este $f'(c)$ podia ser dado por quê? (…) Era o $f(b)$-$f(a)$ … Depois sobre b-a.
>
> Manuel – É isso, $f(a)$.
>
> Ent. - $f(b)$-$f(a)$.
>
> Manuel - $f(b)$-$f(a)$.
>
> Ent. – Sobre b-a.
>
> Manuel – Sobre b-a. Já me lembro disto, já.

O Manuel não relacionou a derivada no ponto c com a razão incremental e só quando acabou de escrever a igualdade entre ambas é que pareceu identificar o teorema em causa.

Quando se pretende fazer uma interpretação geométrica do teorema, com base num gráfico dado, o Manuel também não consegue dar-lhe o significado pretendido. Ele começou por fazer uma abordagem da razão incremental entre *a* e *b* semelhante à que tinha sido feita na definição de derivada, considerando o limite da expressão $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, e desta forma identificou a razão incremental com o declive da tangente ao gráfico. Posteriormente relacionou esta expressão com o declive da recta secante ao gráfico, que representou no esboço, mas não explicitou o significado da igualdade entre esta e o $f'(c)$:

> Manuel – Pois, eu isto aqui nunca consegui ver bem. Eu sabia que isto conseguia-se achar o *c* mas não conseguia ver graficamente lá muito bem. Isto era… como é que é?

Só depois de lhe ter sido sugerido o processo que permite identificar as coordenadas do ponto *c* é que o Manuel compreende geometricamente o alcance do teorema, mostrando-se bastante surpreendido com o resultado obtido.

Quando se pretendeu utilizar o teorema de Lagrange para provar que $|sen(\theta)-sen(\alpha)|\leq|\theta-\alpha|$, $\forall\theta,\alpha\in R$, o Manuel pareceu recordar-se da abordagem feita nas aulas e começou por sugerir que é preciso arranjar um intervalo:

> Manuel – Então eu tenho que arranjar um intervalo. Como é que era? Tenho que arranjar… um intervalo…
>
> Ent. – Uma das coisas que precisas é de um intervalo. Então como é que vai ser o intervalo?
>
> Manuel – Ufff!… O intervalo vai ser de…
>
> Ent. – Tu tens o teorema aqui, portanto pode comparar…
>
> Manuel – α , θ. Agora não sei se é aberto ou se é fechado…

Embora ele tenha dúvidas sobre a forma de representar o intervalo, acabou por o definir como sendo fechado, por comparação com o enunciado do teorema. Com base neste intervalo ele afirma que consegue já provar para o caso de $\theta=\alpha$ e considerando que ambos são iguais a 1 vai substituir na expressão dada. Posteriormente admitiu precisar de uma função que definiu como sendo $f(x) = sen(x)$. Desta forma foi capaz de escrever a tese do teorema sem dar grande atenção ao facto de ser necessário verificar as hipóteses. O Manuel não utiliza as propriedades dos módulos por forma a chegar à conclusão pretendida e só conseguiu verificar a desigualdade proposta quando lhe foi sugerida a majoração do $|cos(c)|$.

Desta forma o conceito imagem do teorema de Lagrange que o Manuel evoca é elementar, tendo por base a sua memória visual. Ele procura identificar o enunciado do teorema pela sua forma. Neste seu conceito imagem parece faltar um conjunto de objectos matemáticos essenciais para a sua construção, nomeadamente as hipóteses e a tese como elementos essenciais para a elaboração do enunciado do teorema. Esta falta continua a ser visível quando se pretende fazer uma abordagem geométrica do mesmo e nem os procedimentos de cálculo mais elementares parecem estar disponíveis por forma a suportar a aplicação do teorema a situações concretas. É no entanto possível constatar que a abordagem feita, baseada na experiência de ensino, lhe permitiu ampliar o seu conceito imagem, passando a dispor de um maior número de objectos relacionados com o teorema.

Para o Pedro o teorema de Lagrange não é associado a nenhuma representação específica. Ele afirma que não sabe quais são as condições do teorema limitando-se apenas e escrever esquematicamente o enunciado à medida que este lhe vai sendo sugerido. Quando se pretendeu fazer uma interpretação geométrica do enunciado, num esboço gráfico dado, o Pedro apenas explicitou o significado da razão incremental traçando a recta secante ao gráfico, mas não foi capaz de traduzir graficamente as restantes condições do teorema.

Quando se pretendeu utilizar o teorema para provar que $|sen(\theta)-sen(\alpha)|\leq|\theta-\alpha|$, $\forall\theta,\alpha\in R$, o Pedro mostrou ser capaz de utilizar algumas das condições do teorema que entretanto já tinha esquematizado com a ajuda do entrevistador. Ele começou por referir que, para aplicar o teorema, precisava de um intervalo:

> Pedro – Preciso de ter um intervalo.
>
> Ent. – Um intervalo…
>
> Pedro – E o intervalo pode ser de θ a α.
>
> Ent. – Porquê?
>
> Pedro – Aaam… Porquê? Porque são os dois pontos que estão ali definidos.

Para definir o intervalo recorreu apenas ao enunciado do problema e só quando lhe sugeri a comparação deste com o enunciado do teorema que escrevera anteriormente é que ele admitiu que deveria considerar o intervalo de α a θ. Para identificar a função o Pedro também fez um raciocínio semelhante ao anterior:

> Ent. – E precisas mais do quê? De uma…
>
> Pedro – De uma função.
>
> Ent. – Então e que função é que vais escolher agora aí?
>
> Pedro – Então elas são as duas iguais… As duas iguais quer dizer, escolhia seno de α …

Ele volta a recorrer à expressão que pretende provar e considera que está perante duas funções, seno de α e seno de θ. Só com a sugestão de comparação entre os dados do problema e o enunciado do teorema é que ele identifica a função em causa como sendo $f(x) = sen(x)$. Inicialmente usa o raciocínio anterior considerando que esta é a primeira função e tenta procurar uma segunda para poder estabelecer o primeiro membro da desigualdade dada. Só com ajuda é que ele relaciona o enunciado do teorema com a desigualdade que está a tentar provar admitindo como única a função $f(x)$. Ao aplicar o teorema à função $f(x)$ no intervalo α, θ o Pedro enuncia as hipóteses do teorema, justificando a continuidade da função no intervalo fechado e a diferenciabilidade no intervalo aberto, e estabelece a tese usando correctamente a função no intervalo considerado. Quando se pretendeu usar os procedimentos de cálculo para provar a desigualdade pretendida o Pedro não aplicou as propriedades dos módulos nem estabeleceu a majoração do $|cos(c)|$. Depois de estabelecida a majoração anterior, com ajuda, ele conseguiu concluir a desigualdade pretendida.

Desta forma o conceito imagem do teorema de Lagrange evidenciado pelo Pedro não contempla qualquer representação do teorema nem lhe possibilita uma abordagem geométrica do mesmo. Na aplicação do teorema ele apenas consegue dar significado às premissas do teorema, sendo os procedimentos de cálculo condicionados pela compreensão de alguns objectos matemáticos como é o caso das propriedades dos módulos.

4.2. Conceito imagem instrumental

Os conceitos imagem dos alunos incluídos neste nível revelam que estes conhecem algumas das condições do teorema de Lagrange embora nem sempre tenham conseguido estabelecer o seu enunciado formal, e por vezes revelam dificuldades na sua compreensão, nomeadamente quando procuram dar uma interpretação geométrica do mesmo. A aplicação do teorema a um caso concreto revelou-se um processo complexo. Esta aplicação é feita por comparação com o seu enunciado evidenciando um desempenho favorável, mas que é por vezes dificultada pelo uso de algumas das propriedades das funções envolvidas. Os alunos apresentam assim uma compreensão parcial do teorema que lhes permite a realização de determinados procedimentos e processos com sucesso, sendo no entanto difícil a coordenação destes últimos por forma a gerar novos objectos.

É o caso da Madalena que quando lhe é pedido o enunciado do teorema ela afirma que só pelo nome não o consegue identificar. Quando lhe é sugerido que este está relacionado com as derivadas de uma função dada, ela refere que a função deve ser contínua sem adiantar mais nenhuma condição. Depois de lhe terem sido dadas as hipóteses do teorema e ao tentar estabelecer a tese, quando se procura saber a que deve ser igual o $f'(c)$, a Madalena conclui que a "derivada no ponto *c* deve ser igual a zero". Ela parece recordar-se de uma parte do teorema de Rolle sem no entanto conseguir estabelecer a igualdade pretendida. Depois de ter escrito a conclusão do teorema, por sugestão do entrevistador, acabou por relacionar este teorema com o de Rolle:

> Madalena – Ah! O teorema de Rolle é que é uma excepção deste, um caso particular deste.

Ent. – Sim. Que é o $f(a)$ ser igual ao $f(b)$.

Madalena – Sim. Aqui seria zero.

Ela identifica assim o teorema de Rolle como um caso particular do de Lagrange, o que corresponde à interpretação que tinha procurado estabelecer anteriormente como tese do teorema. Embora a Madalena não pareça muito familiarizada com o enunciado que escreveu, evidencia um desempenho favorável quando procura fazer uma interpretação geométrica do mesmo. Ela relaciona a razão incremental com a recta secante ao gráfico que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e a derivada de f no ponto c com o declive da recta tangente ao gráfico no ponto. A localização do ponto c só é conseguida quando lhe é relembrado que a tese do teorema refere que há uma igualdade entre os declives destas duas rectas, donde a Madalena consegue concluir que elas terão que ser paralelas.

Quando se pretendeu usar o teorema para provar que $|sen(\theta) - sen(\alpha)| \leq |\theta - \alpha|$, $\forall \theta, \alpha \in R$, a Madalena começou por identificar a função:

Ent. – O que é que o teorema diz que tu tens que ter?

Madalena – Uma função contínua e um intervalo.

Ent. – Então como é que arranjavas a função aqui… Comparando o teorema com aquilo que te é dado…

Madalena – Sim. A função seria seno de x.

Ent. – E o intervalo. Precisas de um intervalo…

Madalena – Mas o intervalo tanto faz.

Ent. – Porquê? Diz…

Madalena – A função é sempre contida…

(…)

Madalena – Eu acho que pode ser qualquer intervalo.

Ela identificou a função a partir da desigualdade que se pretende provar, mas parece não estar a estabelecer uma correspondência entre esta inequação e o enunciado do teorema, pois quando se pretende identificar o intervalo a Madalena considera que este pode ser qualquer. Ela parece fazer uma abordagem genérica das hipóteses do teorema considerando que a função é contínua e diferenciável em todo o $\boldsymbol{R}$, e desta forma em qualquer intervalo real as hipóteses vão verificar-se sempre. Só quando o entrevistador tenta estabelecer uma relação entre o enunciado do teorema e a desigualdade a provar é que a Madalena identifica o intervalo de α, θ. Ao aplicar o teorema a Madalena não parece dar grande ênfase às hipóteses do teorema, referindo apenas a continuidade e diferenciabilidade da função seno sem a preocupação de justificar estas propriedades no intervalo dado nem a forma do próprio intervalo. Por comparação com o enunciado acabou por escrever a tese correctamente, mas quando foi necessário recorrer às propriedades da função módulo a Madalena não conseguiu aplicá-las assim como não foi capaz de estabelecer a desigualdade pretendida. A majoração de $|cos(c)|$ afigurou-se uma tarefa difícil de executar e só foi completamente compreendida com a ajuda do entrevistador.

Desta forma o conceito imagem do teorema de Lagrange da Madalena é caracterizado por não apresentar uma representação concisa do enunciado do teorema, mas com base neste consegue dar uma interpretação geométrica dos vários parâmetros que o compõem. Na aplicação do teorema as hipóteses são estabelecidas sem grande precisão e as dificuldades geradas por alguns procedimentos de cálculo que se baseiam em propriedades das funções são entraves ao estabelecimento das conclusões pretendidas.

Quando pretende enunciar o teorema de Lagrange, a Carla começa por referir um intervalo e uma parte da tese do teorema:

> Carla – O teorema de Lagrange diz que existem o ponto *a* e o ponto *b* em que…o intervalo *a*, *b* aberto… É assim, eu sei que eles são todos muito parecidos mas uns são mais do que os outros. É assim, o essencial é que entre um ponto *a* e um ponto *b* existe um ponto *c* que toma um determinado valor… E que, acho que é assim, *f*(*b*) menos *f*(*a*) sobre…
>
> Ent. – Escreve, podes escrever.
>
> Carla – *f*(*b*)… *a*-*b*… Vamos obter a derivada de um ponto *c*.

A Carla começa por referir a existência do intervalo *a*, *b* e em seguida resume o teorema à sua tese, isto é relaciona a razão incremental com a "derivada de um ponto *c*". Embora ela se refira à derivada "de um ponto", ao escrever usa uma função e faz a representação da derivada da função no ponto *c* correctamente (figura 7.35):

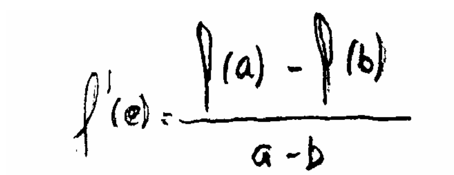


Figura 7.35. Primeira representação do enunciado do teorema de Lagrange da Carla.

Embora a Carla tenha referido inicialmente o intervalo *a*, *b* acaba por admitir que não sabe como fazer a sua representação:

> Carla – Eu queria designar o intervalo só que eu nunca sei se designo primeiro o *a* ou primeiro o *b*. Mas eu acho que é *b*, *a*, não é?

Com base na representação da figura 7.35 ela afirma que o intervalo deve ser de *b* a *a*. No entanto quando tenta completar a tese do teorema acaba por evidenciar de novo essa dificuldade (figura 7.36):

$$\exists c \in]a,b[: f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

Figura 7.36. Representação da tese do teorema de Lagrange feita pela Carla.

Depois de ter concluído que o intervalo deve ser de *b* a *a* representa-o ao contrário. As hipóteses do teorema acabam por ser a última coisa a ser estabelecida:

> Ent. – A função tem que ser?
>
> Carla – Contínua.
>
> Ent. – Contínua no intervalo… fechado.
>
> Carla – Fechado, e também tem que ser diferenciável no intervalo aberto.

Depois do o entrevistador procurar definir as hipóteses do teorema a Carla refere a continuidade e a diferenciabilidade como características a que a função deve obedecer.

Quando se pretendeu dar uma interpretação geométrica do enunciado do teorema, a Carla utilizou um gráfico dado onde representou o intervalo *b*, *a* e posteriormente procurou definir o ponto *c*:

> Carla – Quer dizer que… entre aqui e aqui [indica o intervalo sobre o gráfico] existe um ponto *c*, situado algures aqui [coloca o ponto *c* sobre o gráfico], em que… Em que a derivada que é o declive, nós já tínhamos visto que era um declive, vai… Pronto vai aparecer aqui.

Ela colocou o *b* e o *a* no eixo das abcissas mas realizou a interpretação sobre o gráfico onde colocou o *c*. A Carla considera assim que tem o ponto *c* por onde pode traçar uma recta tangente ao gráfico, podendo concluir-se com base neste processo que esse ponto *c* pode ser arbitrário. Só com a ajuda do entrevistador ela relacionou os dois declives presentes no enunciado como pertencentes a duas rectas paralelas.

Quando se pretendeu usar o teorema para provar que $| sen(\theta) - sen(\alpha) | \leq | \theta - \alpha |$, $\forall \theta, \alpha \in R$, a Carla recorreu ao enunciado e definiu as condições do teorema, identificando a função e o intervalo em causa:

> Ent. – Portanto tens que arranjar o quê? Uma função. Então como é que vai ser o $f(x)$ neste caso?
>
> Carla – Seno de *x*.
>
> Ent. – E precisas mais de quê?
>
> Carla – De um intervalo.
>
> Ent. – De um intervalo… Que nesse caso dá jeito ser qual?
>
> Carla – O delta … a delta [alfa]. Não… delta… a, delta…
>
> Ent. – Portanto este aqui é um alfa.
>
> Carla – Ah! Eu estou a mentir.
>
> Ent. – E este aqui é um teta.

Carla – Então eu estava a designar ao contrário. Então vai ser, este aqui vai ser… aaa… α, θ.

Ela identificou a função directamente embora ao estabelecer o intervalo tivesse alguma dificuldade com o nome dos parâmetros usados. Acabou por defini-lo correctamente, por comparação com o enunciado escrito anteriormente, e estabeleceu as hipóteses do teorema justificando a continuidade e diferenciabilidade da função nos respectivos intervalos. A escrita da tese também não lhe levantou quaisquer problemas. Quando se pretendeu usar a igualdade anterior para chegar à desigualdade dada, as propriedades dos módulos foram um dos entraves, levando a Carla a tentar provar que ambos os membros da igualdade seriam positivos, para que ela pudesse aplicar módulos em ambos os lados da igualdade. Depois de ultrapassada esta dificuldade, com a ajuda do entrevistador, ela concluiu que o módulo do quociente seria igual ao quociente dos módulos mas voltou a ter dificuldades na conclusão final, pois não conseguiu majorar o $|cos(c)|$. Depois desta majoração a Carla identificou o sinal da desigualdade obtida e desta forma chegou à desigualdade pretendida.

O conceito imagem do teorema de Lagrange evocado pela Carla assenta no conhecimento de algumas das premissas, para as quais ela tem uma representação visual. Esta abordagem permite-lhe estabelecer uma interpretação geométrica parcial do teorema e quando se pretende usar este num caso concreto é capaz de realizar alguns dos procedimentos de cálculo. As propriedades relacionadas com a função módulo são as que causam mais dificuldades, conseguindo no entanto realizar outros processos com sucesso.

Para a Susana o enunciado do teorema de Lagrange parece ter sido memorizado uma vez que ela o começa a reproduzir tal como ele foi apresentado nas aulas:

Ent. – Lembras-te do que é que diz o teorema de Lagrange?

Susana – Sim… Que…aamm… Uma função que é contínua num intervalo a, b fechado.

Ent. – Hum.

Susana – E diferenciável no a, b aberto, e que… o $f(a)$ é igual ao $f(b)$…

A Susana começa por referir as hipóteses do teorema de forma correcta, referindo a continuidade e diferenciabilidade da função no intervalo considerado, mas acrescentou mais uma condição que fazia parte do teorema de Rolle estudado nas aulas, anteriormente. Quando lhe foi dito que esta última condição não fazia parte do enunciado do teorema ela concordou e continuou a tentar completar o enunciado. Adiantou então que existia um c tal que a derivada $f'(c)$ seria igual à razão incremental entre a e b. Ao ser questionada sobre o valor que o c poderia tomar ela afirmou que pertencia ao intervalo a, b fechado. Quando o entrevistador lhe perguntou se o c poderia ser por exemplo o a ela concluiu que não e alterou o intervalo passando a representá-lo como intervalo aberto.

Quando se pretendeu fazer uma interpretação geométrica do enunciado do teorema a Susana utilizou o gráfico fornecido pelo entrevistador e traçou uma recta secante ao gráfico a passar pelos pontos de coordenadas $(1, f(1))$ e $(2, f(2))$ (figura 7.37):

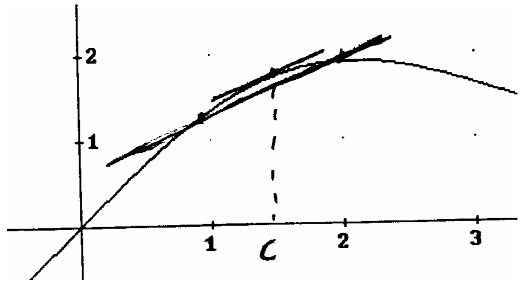


Figura 7.37. Interpretação geométrica do teorema de Lagrange feita pela Susana.

Ela considerou o intervalo de 1 a 2 para fazer a interpretação geométrica traçando a recta secante ao gráfico que passa por estes pontos e em seguida representou o ponto *c* no interior do intervalo, definindo-o com base no ponto de tangência ao gráfico de uma outra recta paralela à anterior. Quando questionada sobre a origem destas duas rectas a Susana parece estar a fazer uma abordagem essencialmente geométrica:

> Ent. – Portanto o que é que tem que acontecer? Essa recta secante que estiveste a traçar vem donde? Qual é o declive dessa recta? …
>
> Susana – O declive?
>
> Ent. – Hum… É dado por quê?
>
> Susana – o $f(2)$ sobre o $f(1)$.

Ela parece surpreendida com o facto de lhe ser pedido o declive da recta secante e tenta relacioná-lo com a razão incremental ainda que defina esta de forma incorrecta. O ponto *c* é determinado pela recta tangente ao gráfico que é paralela à anterior tendo a Susana reconhecido o seu declive como o valor de $f'(c)$.

Quando se pretendeu usar o teorema para provar que $|sen(\theta) - sen(\alpha)| \leq |\theta - \alpha|$, $\forall \theta, \alpha \in R$, a Susana começou por utilizar como ponto de partida a desigualdade que lhe foi dada:

> Ent. – O que é que tu precisas de arranjar, antes de mais? …
>
> Susana – Tinha… Este já tenho [refere-se à razão incremental da tese do teorema]
>
> Ent. – Já tens como? Quem é que é esta função? … [indico com o lápis o $f(x)$ que escreveu no enunciado]
>
> Susana – Quem é que é a função? Ah! É o seno…
>
> Ent. – O seno de…
>
> Susana – Então depois depende… De θ ou de α …

Ela começou por comparar a desigualdade dada com a tese do teorema e procurou identificar os parâmetros semelhantes. Com esta comparação tentava provar que a desigualdade era verdadeira pois continha elementos da tese do teorema. Quando foi pedido para identificar a função em causa a Susana pareceu surpreendida com a questão mas acabou por considerar que se tratava da função seno sem indicar o seu argumento. Ela parece estar a considerar que o α e o θ são variáveis arbitrárias pelo que estaria na presença de duas funções. O intervalo para aplicar o teorema foi facilmente identificado como sendo de α a θ, por comparação com o enunciado, e ao aplicar o teorema a Susana escreveu a expressão $f(\theta)-f(\alpha) \leq f'(c) \times (\theta-\alpha)$. Ela está a usar a tese do teorema escrevendo-a já na forma da expressão dada para provar e introduzindo a desigualdade pretendida. As hipóteses do teorema foram negligenciadas como se não tivessem qualquer influência na prova pretendida. A expressão anterior acabou por ser escrita como uma igualdade, com a ajuda do entrevistador e a Susana foi capaz de calcular o $f'(c)$ chegando à expressão $(sen(\theta)-sen(\alpha)) = cos(c) \times (\theta-\alpha)$. Quando se pretendeu aplicar as propriedades dos módulos à expressão anterior a Susana argumentou que seria possível desde que a expressão fosse positiva. Só com ajuda é que foi possível estabelecer as propriedades dos módulos assim como fazer a majoração do $|cos(c)|$. Depois de estabelecida a majoração anterior a Susana explicitou o sentido da desigualdade, sem no entanto ter verificado que tinha provado a desigualdade pretendida.

O conceito imagem do teorema de Lagrange evidenciado pela Susana parece ter por base a sua memória visual que lhe permite identificar um conjunto de parâmetros que são comuns a vários teoremas, não conseguindo no entanto distinguir concretamente os que pertencem a um teorema específico. A interpretação geométrica do teorema assenta essencialmente nas propriedades geométricas de alguns dos parâmetros e a sua aplicação parece ser baseada em procedimentos e processos que permitem estabelecer uma correspondência directa entre o enunciado do teorema e o do problema, sem a preocupação da veracidade e da aplicabilidade do teorema ao caso concreto.

Para o José o teorema de Lagrange é inicialmente associado ao estudo dos extremos de uma função:

> José – [O teorema de Lagrange] é algo que tem a ver com os extremos… Não…
>
> Ent. – Com os…
>
> José – Os extremos… Aqui… tipo estes dois. [indica os extremos de uma função definida pela sua representação gráfica]

Ele apenas consegue relacionar o teorema com extremos da função, mas não lhe dá nenhum significado especial. Quando lhe é referido que o teorema faz parte do cálculo diferencial ele refere a existência de uma função diferenciável mas é o entrevistador que estabelece as hipóteses do teorema. Quando se pretendeu explicitar a tese o José não identificou nenhum dos seus parâmetros e teve mesmo dificuldades com a sua escrita, nomeadamente o quantificador existencial. Só depois de ter escrito o enunciado é que ele se recorda do teorema afirmando que assim já o consegue identificar. O seu conceito imagem parece ser de carácter imagético, identificando o teorema através da sua forma escrita. Ao pretender dar uma interpretação geométrica para o teorema, o José utilizou um gráfico fornecido pelo entrevistador e começou por identificar no enunciado a taxa de variação. Na representação gráfica marcou os pontos a e b do intervalo considerado e traçou a recta secante ao gráfico que passa pelos pontos de coordenadas $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Para definir o ponto c o José refere que tem que traçar a recta tangente ao gráfico e quando lhe é pedido para explicitar que tipo de recta será essa ele considera que vai ser paralela à anterior. Esta abordagem é apenas referida verbalmente não tendo sido traçada a segunda recta, tangente ao gráfico, nem representado o ponto c no gráfico.

Quando se pretendeu usar o teorema para provar que $|sen(\theta)-sen(\alpha)|\leq|\theta-\alpha|$, $\forall\theta,\alpha\in R$, o José começou por identificar o intervalo:

> Ent. – Então, para usar o teorema o que é que tu precisas de arranjar?
>
> José – Um a e um b. Não…
>
> Ent. – Precisas de arranjar…
>
> José – Um intervalo.
>
> Ent. – Como é que vais arranjar o intervalo?
>
> José – Então o intervalo pode ser aqui o θ e o… Ou não? Talvez.
>
> Ent. – Vais fazer o intervalo de onde até onde?
>
> José – Então de θ até α, não?

Inicialmente ele refere o intervalo genérico que tinha sido definido no enunciado do teorema, mas posteriormente identifica no enunciado do problema que os extremos de intervalo deverão ser θ e α. Posteriormente, quando deu mais atenção ao enunciado do teorema, concluiu que o intervalo deveria ser de α a θ. A função a considerar foi facilmente identificada pelo José que argumentou tratar-se da função $f(x) = sen(x)$. Ao aplicar o teorema ele procurou logo escrever a conclusão:

> Ent. – Agora podes aplicar o teorema a isso. O que é que tens que verificar?
>
> José – O que é que eu tenho que verificar?
>
> Ent. – As condições do teorema quais é que eram?
>
> José – Isto, basta passar isto aqui para baixo, tudo.

O José parece não dar grande relevo às hipóteses do teorema e tenta escrever a tese por comparação com o enunciado do teorema. Quando questionado sobre as hipóteses do teorema, ele mostrou um desempenho satisfatório ainda que tenha sido o entrevistador a relembrá-las. A tese do teorema foi escrita por comparação com o enunciado já escrito anteriormente, tendo chegado à expressão da figura 7.38:

$$\exists c \in]\alpha, \theta[: \cos c = \frac{\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \alpha}{\theta - \alpha}$$

Figura 7.38. Aplicação do teorema de Lagrange no caso concreto, feita pelo José.

Quando se pretendeu aplicar as propriedades dos módulos à igualdade anterior o José considera que não é possível aplicar módulos em ambos os membros uma vez que isso vai alterar o valor das "funções" envolvidas e depois seria necessário desdobrar de novo esse módulo. Ele está a considerar o seno e coseno representados na expressão acima como sendo funções reais de variável real. Depois de aplicar as propriedades dos módulos por sugestão do entrevistador, a majoração do $|cos(c)|$ para estabelecer a desigualdade pretendida revelou-se uma tarefa bastante difícil sendo mesmo necessário recorrer a exemplos com valores concretos para que o José conseguisse identificar a desigualdade pretendida.

O conceito imagem do teorema de Lagrange que o José evoca parece basear-se na sua memória visual que apenas consegue identificar o teorema quando este é representado esquematicamente. A abordagem geométrica do mesmo é feita com base no significado algébrico dos parâmetros do teorema e a sua aplicação a uma situação concreta revela alguma capacidade em estabelecer as condições do teorema, a procura de uma função e um intervalo, bem como a respectiva tese. As hipóteses do teorema tendem a ser desvalorizadas, sendo referidas apenas quando tal é solicitado. Os processos algébricos envolvendo a função módulo revelaram-se tarefas bastante complexas que apenas foram ultrapassadas com a ajuda do entrevistador.

4.3. Conceito imagem relacional

Os conceitos imagem deste nível são caracterizados pelo facto de os alunos serem capazes de identificar as condições do teorema de Lagrange enunciando-o com base nas relações que se estabelecem entre elas e fizeram uma interpretação geométrica do seu enunciado onde traduziram graficamente o significado das relações existentes entre as representações algébricas. Por vezes houve mesmo o estabelecimento de relações entre este e outros teoremas que apresentam alguns aspectos comuns. A aplicação do teorema num caso concreto é sempre realizada com base na relação que é possível estabelecer entre o enunciado e os dados do problema, sendo apenas encontradas algumas dificuldades quando se trata da aplicação das propriedades da função módulo, bem como da sua majoração.

O Joaquim quando pretendeu estabelecer o enunciado do teorema de Lagrange começou por se referir ao teorema de Cauchy:

> Ent. – Lembras-te do que é que diz o teorema de Lagrange?…
>
> Joaquim – Acho que é assim … …[faz a representação da figura 7.39] É um caso especial do teorema de Cauchy se não me engano.
>
> Ent. – Diz? É um caso?
>
> Joaquim – É do Cauchy que é quando o *f*(*x*) e *g*(*x*)…

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad x < a \qquad [x\ ,\ a]$$

Figura 7.39. Primeira representação esquemática do teorema de Lagrange do Joaquim.

Embora ele refira que o teorema de Lagrange é um caso especial do de Cauchy, apenas consegue representar uma parte de cada um deles, sendo o primeiro membro pertencente ao de Cauchy e o segundo ao de Lagrange. Quando se procura estabelecer o intervalo ao qual é aplicado o teorema, ele tem algumas dúvidas sobre a sua representação:

> Ent. – Portanto, outra coisa que vocês têm que ter é um intervalo… Qual é o intervalo?
>
> Joaquim – Entre o x e o a.
>
> Ent. – Neste caso seria o intervalo de x a a, é?
>
> Joaquim – Ou de a a x, conforme o maior e o menor… Se $x<a$ vai ser o intervalo de x, será aberto ou fechado?
>
> Ent. – Como é que tem que ser o intervalo…
>
> Joaquim – Supostamente deveria ser fechado porque senão nem sequer consigo obter o *f*(*x*) e o *f*(*a*)…

O Joaquim tem apenas a preocupação de definir o intervalo sem no entanto o relacionar com a representação anterior. Preocupa-se essencialmente com a posição dos extremos do intervalo, justificando convenientemente o facto de este ser fechado, mas não estabelece uma relação directa com a representação que admite ser a tese do teorema, onde a razão incremental aparece escrita de modo diferente do habitual. Quando se pretende estabelecer as hipóteses para o teorema o Joaquim começa por referir a continuidade da função e quando lhe é sugerido que é necessário considerar o intervalo, ele parece recordar-se das hipóteses e conclui que a função deve ser contínua no intervalo fechado e diferenciável no aberto. Dado que não tinha efectuado qualquer alteração na expressão que escrevera anteriormente para tese do teorema, foi-lhe sugerido que considerasse um intervalo genérico a, b. Com base nesse intervalo ele começou por considerar o $f(c)$ seria igual à razão incremental. Como lhe foi sugerido que se tratava da derivada da função ele acabou por escrever a expressão da figura 7.40:

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \qquad \text{continua } [b, a] \qquad \text{diferenciável }]b, a[$$

Figura 7.40. Tese do teorema de Lagrange do Joaquim.

Desta forma o Joaquim estabeleceu a tese do teorema, tendo o intervalo dado funcionado como catalizador para a definição dos restantes parâmetros. Relativamente ao ponto c, o Joaquim refere que ele está situado entre o b e o a.

Ao procurar fazer uma interpretação geométrica do teorema o Joaquim começa por considerar o significado geométrico da razão incremental, que refere como sendo o declive da recta que passa pelos pontos do gráfico de abcissas a e b, representando essa recta num esboço gráfico e fazendo o mesmo tipo de interpretação para o parâmetro $f'(c)$:

> Joaquim – Esta recta… Uma recta paralela a esta [recta secante definida pela razão incremental] que vai tocar somente em $(c, f(c))$, vai ser tangente neste mesmo ponto c com o mesmo declive daquela.

Ele dá assim significado geométrico ao enunciado do teorema relacionando de forma coerente as representações algébrica e gráfica.

Quando se pretende usar o teorema para provar que $|sen(\theta) - sen(\alpha)| \leq |\theta - \alpha|$, $\forall \theta, \alpha \in R$, o Joaquim começa por dividir ambos os membros da desigualdade por $|\theta - \alpha|$ deixando no segundo membro da desigualdade o número 1. Ele parece admitir que desta forma consegue simplificar a expressão e só abandona esta abordagem quando o entrevistador lhe sugere que o objectivo é utilizar o teorema para provar a desigualdade. O Joaquim começa então por identificar a função como sendo o seno e o intervalo que considera ser de α a θ. Em seguida justifica a continuidade e a diferenciabilidade da função no intervalo considerado e escreve a tese por comparação com o enunciado escrito anteriormente. Quando se pretendeu aplicar as propriedades dos módulos o Joaquim considerou o sinal das funções seno e coseno, mas rapidamente enunciou as propriedades que lhe permitiram aplicar módulos a ambos os membros da igualdade, bem como transformar o módulo do quociente no quociente dos módulos. A majoração da parcela $|cos(c)|$ foi a que suscitou mais dificuldades, tendo o Joaquim recorrido à concretização de vários valores possíveis para estabelecer a desigualdade. Tal conclusão só foi possível com a intervenção do entrevistador.

Desta forma o conceito imagem do teorema de Lagrange evocado pelo Joaquim parece assentar numa abordagem onde o enunciado do teorema começa por ser estabelecido com base nas propriedades dos vários teoremas relacionados e onde o seu significado geométrico resulta de uma abordagem gráfica e algébrica simultâneas. A aplicação do teorema é feita tendo em consideração a validade das hipóteses sendo os procedimentos de cálculo acompanhados de uma avaliação mais ou menos cuidada das várias propriedades das funções envolvidas.

No caso da Sofia o enunciado do teorema de Lagrange é referido com base na definição abordada nas aulas. Ela considera uma função definida num intervalo fechado *a*, *b* e estabelece as hipóteses referindo a continuidade no intervalo fechado e a diferenciabilidade no intervalo aberto. Ao explicitar a tese considerou primeiro a igualdade entre a derivada da função no ponto *c* e a razão incremental entre os extremos do intervalo (figura 7.41), e só depois caracterizou o ponto *c* como pertencente ao interior do intervalo considerado.

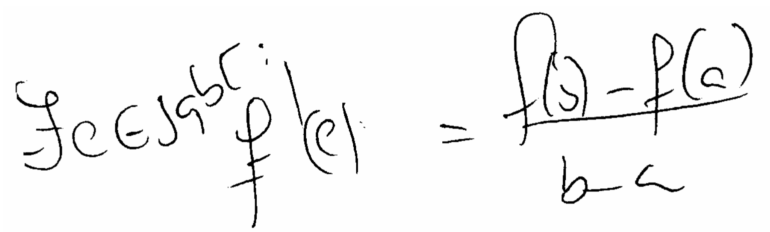


Figura 7.41. Tese do teorema de Lagrange da Sofia.

Quando se pretendeu fazer uma interpretação geométrica do teorema a Sofia utilizou um esboço gráfico fornecido pelo entrevistador onde representou o intervalo *a*, *b*. Em seguida associou a razão incremental ao declive da recta que passa pelos pontos do gráfico de abcissas *a* e *b*, traçando a recta secante ao gráfico e encontrou o ponto *c* através do traçado de uma tangente ao gráfico cujo declive associou ao $f'(c)$ (figura 7.42):

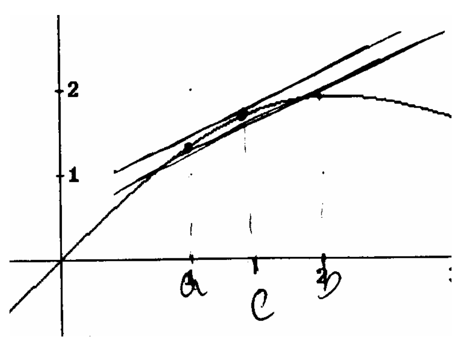


Figura 7.42. Interpretação geométrica do teorema de Lagrange feita pela Sofia.

Quando se pretende usar o teorema para provar que $|sen(\theta) - sen(\alpha)| \leq |\theta - \alpha|$, $\forall \theta, \alpha \in R$, a Sofia foi capaz de identificar a função, referindo-a como sendo $f(x) = \text{sen}(x)$, e o intervalo, que estabeleceu por comparação com o enunciado do teorema, como sendo o intervalo α, θ. Da posse destes dados explicitou as hipóteses do teorema em relação ao intervalo encontrado estabelecendo posteriormente a tese:

> Sofia – Então existe um *c* pertencente a α ,θ, tal que a derivada no ponto *c* vai ser o $f(\theta)$-$f(\alpha)$ sobre θ-α . Portanto o que eu quero provar é isto. Portanto o $f(\theta)$-$f(\alpha)$ é igual à derivada no ponto *c* vezes o θ-α . Aplicando os módulos…

A Sofia estabelece desta forma a tese do teorema e procura dar-lhe uma forma aproximada à da expressão que pretende provar. Ao aplicar as propriedades dos módulos teve alguma dificuldade com a sua justificação:

> Sofia – Pois… Eu por acaso… Não sei quando é que se pode e quando é que não se pode. Quer dizer aplicar módulos para aquilo ficar igual… temos que ter garantia que aquilo já é sempre positivo… para estar lá.

Começa por avançar com a possibilidade de ambos os membros da igualdade serem positivos para poder aplicar os módulos e só com ajuda conclui que a igualdade continua verdadeira qualquer que seja o sinal que estes possam tomar. Ao pretender estabelecer a desigualdade final a Sofia refere que basta majorar o $|cos(c)|$ embora não consiga fazê-lo sem ajuda. Quando lhe foi sugerido que poderia substituir esta parcela pelo maior valor que ela poderia tomar conseguiu completar a demonstração estabelecendo a desigualdade pretendida.

O conceito imagem do teorema de Lagrange evocado pela Sofia parece assentar numa coordenação dos vários processos e objectos que lhe estão associados, que ela relaciona quer algebricamente quer graficamente. A aplicação do teorema a um caso concreto revela essa capacidade de relacionar os dados do problema com o caso geral onde as únicas dificuldades se revelam na aplicação de algumas propriedades mais elementares, relacionadas com a função módulo.

Para o João o enunciado do teorema de Lagrange é verbalizado tal como ele foi abordado nas aulas:

> João – O teorema de Lagrange diz que se a uma função, se uma função for contínua no intervalo *a*, *b*, diferenciá[vel]. Se for contínua no intervalo *a*, *b* assim [representa o intervalo fechado]
>
> Ent. – Hum.
>
> João – E diferenciável no intervalo *a*, *b* …
>
> Ent. – Aberto.
>
> João – Aberto. Garante a existência de um *c* pertencente a *a*, *b* tal que $f'(c)$ é igual a *f* de… Já não me lembro se é $f(b)$-$f(a)$… aaa… $f(b)$-$f(a)$ sobre *b*-*a*.

O João parece estar a recorrer à sua memória visual para estabelecer o enunciado do teorema. No entanto, quando se pretende fazer uma abordagem gráfica do mesmo, ele dá significado geométrico ao enunciado que acabou de escrever. O João utiliza um esboço gráfico fornecido pelo entrevistador e faz a interpretação geométrica estabelecendo um intervalo já definido no esboço:

> João – Então, por exemplo este intervalo… de 0 a 1.
>
> Ent. – Hum.
>
> João – Não. Não dá bem… De 0 a 2 [figura 7.43] … Temos aqui esta secante.
>
> Ent. – Hum, hum.
>
> João – Ele garante é que… Se a função de 1 a 2 for contínua e for diferenciável.
>
> Ent. – Exacto.
>
> João – Ele garante que há um ponto *c* aqui no meio, cuja derivada tem exactamente o mesmo declive que esta recta.

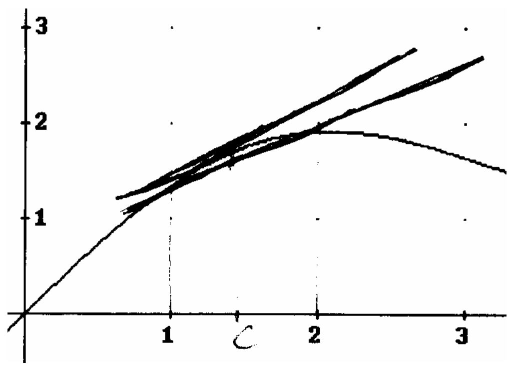


Figura 7.43. Interpretação geométrica do teorema de Lagrange feita pelo João.

O João faz uma abordagem da situação sem precisar de estabelecer uma correspondência directa entre a expressão algébrica e a respectiva tradução gráfica. Representa o ponto *c* antes de ter representado a segunda recta tangente ao gráfico, ficando a ideia na representação esquemática que as rectas não são paralelas. No entanto quando questionado sobre esse aspecto, refere que a igualdade dos declives se traduz no paralelismo das duas rectas. Desta forma o João também mostra ser capaz de diversificar a aplicabilidade do teorema ao utilizar um intervalo concreto para explicitar uma abordagem genérica.

Quando se pretende usar o teorema para provar que $|sen(\theta)-sen(\alpha)| \leq |\theta-\alpha|$, $\forall \theta, \alpha \in R$, o João reconheceu que já tinha resolvido este problema nas aulas e começou por procurar uma função e um intervalo:

> João – Tínhamos que aplicar o teorema de Lagrange aqui ao seno de *x*…
>
> Ent. – Então a função era…
>
> João – Portanto, tínhamos uma função *f*(*x*) igual a seno de *x*. E agora tínhamos de procurar um intervalo… que aqui o melhor talvez seja de… θ a α .
>
> Ent. – Hum. Portanto arranjas um intervalo de θ a α … Porquê de θ a α ?…
>
> João – Que é para depois algures lá mais à frente me aparecerem valores com seno de θ e seno de α . Que é para quando eu agora vou dizer que existe um *c*… que é igual, depois aqui aparece-me qualquer coisa, seno de θ menos seno de α .

Ele identifica a função e o intervalo sem precisar de estabelecer uma correspondência directa entre o enunciado do teorema e a desigualdade que lhe é dada para provar. Ao definir o intervalo o João parece estar a utilizar parte da sua memória visual não dando nenhum destaque especial à forma como os extremos deste estão representados. Quando lhe é pedido para fazer uma comparação com o enunciado do teorema ele considera que é melhor trocar os extremos do intervalo. A aplicação do teorema não levanta dificuldades ao João estabelecendo as hipóteses do teorema e escrevendo a conclusão no caso concreto. Quando foi necessário aplicar as propriedades dos módulos o João referiu que poderia aplicar o módulo a ambos os membros da igualdade que esta se mantinha por se tratar de valores absolutos. Ele parece conhecer a propriedade ainda que não a explicite directamente. Ao concluir refere que se lembra como se faz por ter estudado no dia anterior esta resolução e consegue obter a desigualdade pretendida com a majoração do $|cos(c)|$.

Desta forma o conceito imagem de teorema de Lagrange evocado pelo João parece assentar numa capacidade de recorrer à sua memória visual que no entanto pode ser direccionada para abordagens mais processuais quando é necessário recorrer a explicações mais detalhadas. Ele manipula as premissas do teorema de forma satisfatória, conseguindo aplicá-lo a casos concretos com sucesso.

O enunciado do teorema de Lagrange expresso pela Paula apresenta uma estrutura bastante próxima da abordagem feitas nas aulas:

> Paula – É uma função que tem que ser contínua num intervalo… Diferenciável e tal que se existir… Existe um *c*.
>
> (…)
>
> Paula – Existe um *c* pertencente ao intervalo *a*, *b*.
>
> Ent. – Tal que… …
>
> Paula – Este é o *f* de… *f*(*b*)-*f*(*a*) sobre *b*-*a*.

Ela identifica as condições do teorema, explicitando as hipóteses e estabelecendo a tese tal como o teorema tinha sido enunciado durante o processo de ensino. Ao pretender dar uma interpretação geométrica do enunciado acabado de escrever a Paula fez uma abordagem que privilegiou uma relação directa entre as componentes algébrica e geométrica. Ela começou por utilizar um esboço gráfico onde representou o intervalo a, b e traçou o segmento de recta que une os pontos de coordenadas $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Ao ser questionada sobre a representação que acabara de fazer ela referiu que esta "recta" tinha por declive a razão incremental. De seguida representou o ponto c no eixo horizontal e argumentou que este ponto é aquele onde passa uma recta tangente com o mesmo declive da anterior (figura 7.44).

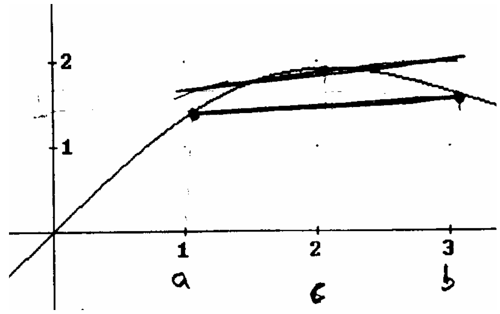


Figura 7.44. Interpretação geométrica do enunciado do teorema de Lagrange da Paula.

Dado que começou por representar primeiro o c acabou por traçar a segunda recta a cortar ligeiramente o gráfico para que pudesse ser paralela à primeira. Esta representação não pareceu causar qualquer problema à Paula que quando questionada afirmou que a segunda recta traçada era tangente ao gráfico naquele ponto. O ponto c que ela escolheu antes de traçar a recta tangente situa-se à mesma distância de ambos os extremos do intervalo.

Quando se pretendeu usar o teorema para provar que $|sen(\theta)-sen(\alpha)|\leq|\theta-\alpha|$, $\forall\theta,\alpha\in R$, a Paula começou por estabelecer o intervalo:

> Paula – Um a e um b…
>
> Ent. – Para que? Para teres um…
>
> Paula – Um intervalo.
>
> Ent. – Então como é que fica o intervalo?
>
> Paula – θ a α ou α a θ.

Ela identifica os extremos do intervalo ainda que não consiga estabelecer a ordem pela qual devem ser representados. Ao ser-lhe sugerido que usasse para comparação o enunciado do teorema ela conclui que seria o intervalo de α a θ. A Paula conseguiu identificar a função como sendo da função seno e quando pretendeu aplicar o teorema neste caso concreto fez uma abordagem genérica das hipóteses. Ela referiu apenas que função seno é uma função trigonométrica pelo que ela será contínua e diferenciável, sem referir especificamente o intervalo, e escreveu a tese por comparação com o enunciado. A justificação da aplicação das propriedades dos módulos revelou-se uma tarefa bastante difícil, assim como a majoração do $|cos(c)|$ para estabelecer a desigualdade pretendida. Esta abordagem só foi conseguida com a ajuda do entrevistador.

Desta forma o conceito imagem do teorema de Lagrange evocado pela Paula apresenta uma concepção bastante próxima da usada nas aulas. A interpretação geométrica do teorema é estabelecida com base na relação entre as componentes algébrica e gráfica e o ponto c assume um estatuto de ponto médio do intervalo considerado. A aplicação do teorema num caso concreto releva alguma capacidade de traduzir o enunciado no caso em estudo, mas onde os procedimentos de cálculo e as propriedades da função módulo revelam alguns entraves à resolução do problema.

Capítulo VIII

Três casos de sucesso escolar

Este capítulo tem por objectivo relatar o resultado da análise horizontal do desempenho de alguns alunos nos vários tópicos estudados. Pretende-se assim dar resposta ao terceiro objectivo proposto para o estudo, caracterizar desempenhos escolares típicos de alguns alunos, que reflectem padrões na compreensão dos conceitos que se repetem noutros alunos. A escolha destes três alunos teve como principal objectivo mostrar uma certa diversidade no que diz respeito à compreensão dos conceitos. Enquanto que nos capítulos anteriores o foco se situava nos conceitos imagem, neste o centro vai estar nos alunos enquanto individualidades cognitivas. A escolha destes alunos tem como denominador comum o facto de todos eles serem alunos de sucesso relativamente à componente escolar, apresentarem uma grande diversidade de concepções relativamente aos conceitos em estudo e serem casos típicos de alunos em determinadas áreas de formação escolar.

O José pode ser considerado como um *aluno típico de engenharia*, que consegue mostrar um desempenho satisfatório, baseado numa concepção operacional dos conceitos, apoiada por representações visuais fortes (gráficos e esquemas), mas sem manifestar uma compreensão relacional destes mesmos conceitos. A Sofia apresenta-se como uma aluna de *sucesso em Matemática* que mostra uma compreensão relacional dos conceitos, revelando ser capaz de os aplicar em situações diversas. A Susana revela-se um *caso paradoxal*, manifestando conceitos imagem de nível inferior (incipientes e instrumentais) mas que, no entanto, obteve um desempenho muito satisfatório nas avaliações (quantitativas) a que foi submetida, quer nesta disciplina quer noutras relacionadas com o curso de Matemática.

Partindo dos níveis de conceitos imagem identificados anteriormente, nos capítulos VI e VII, procura-se caracterizar a compreensão dos conceitos matemáticos abordados segundo estes níveis, que têm em conta os fenómenos de *localidade* e *estabilidade*, já referidos no capítulo V. Procura-se assim caracterizar a compreensão dos conceitos com base nos níveis de conceito imagem observados, tendo em conta a forma como estes conceitos estão relacionados, isto é, alguns conceitos mais elementares deveriam ser encarados como objectos matemáticos para servirem de suporte à construção de outros conceitos mais avançados. Esta reificação dos conceitos mais elementares nem sempre é verificada, sendo a compreensão dos conceitos, por vezes, uma tarefa árdua para os alunos. Quando os conceitos mais elementares são reificados constituindo objectos matemáticos, o desempenho dos alunos melhora substancialmente e os seus conceitos imagem situam-se nos níveis mais altos (conceitos imagem relacionais).

1. O José, um aluno típico de engenharia

O José é um aluno de Engenharia, assíduo e pontual. Nas aulas, ministradas em regime de teórico-práticas, tem como principal preocupação copiar tudo o que é escrito no quadro pela professora e raramente intervém para colocar dúvidas. Participa nas actividades da aula, resolvendo os problemas propostos em conjunto com os colegas, mas nunca se oferece para apresentar a sua resolução. Quando contactado pelo investigador para participar nas entrevistas, mostrou logo a sua disponibilidade comparecendo sempre nos horários combinados. No início das entrevistas mostrou algum receio por não conseguir utilizar a terminologia que era usada nas aulas, mas rapidamente ultrapassou esta fase, verificando-se mesmo casos onde ele revelou dúvidas e colocou questões ao entrevistador. Este tipo de situações repetiu-se, com alguma frequência, durante as entrevistas, tendo, mesmo em situações posteriores à recolha de dados, voltado a solicitar a participação do entrevistador para esclarecer algumas dúvidas relativas a outros conteúdos que não tinham sido abordados nas entrevistas.

Ao longo do estudo o José apresenta níveis de conceito imagem que variam entre o incipiente e o relacional, mas com um cariz predominantemente instrumental.

Quadro 8.1. Níveis de conceito imagem do José.

Conceitos/ Nível	Incipiente	Instrumental	Relacional
Função		X	
Limite		X	
Derivada			X
Teorema de Lagrange		X	
Sucessão		X	
Infinitamente grande	X		
Sucessão convergente		X	

No caso do conceito de função ele revela um conceito imagem instrumental que se mantém no conceito de limite. Já no conceito de derivada apresenta um conceito imagem relacional que no caso do teorema de Lagrange se revela instrumental. No tópico das sucessões o conceito imagem de sucessão é instrumental, assim como o de sucessão convergente, sendo, no entanto, o de infinitamente grande considerado incipiente. O José pode assim ser considerado um aluno típico de engenharia, que aborda os conceitos com base uma concepção operacional, tal como é descrita por Sfard e que discuti no capítulo II, revelando-se esta suficiente para o sucesso em termos de classificação final. O José terminou o semestre com uma classificação final de 12 valores. Apresenta-se de seguida uma caracterização do seu desempenho nos vários conceitos estudados.

No conceito de função o José apresenta um conceito imagem instrumental caracterizado por uma abordagem essencialmente imagética, isto é, baseada em representações gráficas. Ele refere-se ao conceito de função fazendo um esboço gráfico onde não precisa de representar nenhum ponto em concreto, mas referindo-se ao domínio e contradomínio explicitando-os de forma correcta. Ele parece ter reificado estes dois conjuntos acedendo aos processos subjacentes sempre que tal se torna necessário. Também a noção de função limitada é abordada graficamente, indicando ele como exemplo de uma função não limitada o esboço gráfico de $y = x$ e referindo-se à função seno como sendo limitada, mas sem ter necessidade de a representar graficamente. A noção de injectividade também é explicitada com base em exemplos gráficos embora ele estabeleça preferencialmente a correspondência das imagens para os objectos. Em situações mais complexas, quando a abordagem gráfica não lhe permite explicitar os conceitos, recorre a abordagens algébricas. É o caso da função inversa para a qual ele não consegue explicar graficamente em que condições esta pode ser obtida. Começa por dar o exemplo da função afim que representou anteriormente, explicando que iria explicitar o x em função do y. Quando confrontado com o esboço gráfico de uma parábola, sem a respectiva representação algébrica, não foi capaz de indicar um processo (algébrico ou gráfico) para traduzir a respectiva inversa. Nestas situações, embora ele mostre alguma capacidade em manipular determinados processos inerentes a cada uma das propriedades abordadas, encontra alguma dificuldade quando é necessário coordenar esses processos por forma a construir outros mais complexos. Podemos admitir que há um conjunto de processos que estão interiorizados, mas que não foram condensados para, posteriormente, poderem ser reificados.

Quando se procura caracterizar o conceito de limite, o José continua a fazer uma abordagem com características imagéticas, tal como no caso do conceito de função. Ele explica a expressão $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ referindo-se ao facto de a função se estar a aproximar de 2 no eixo vertical e, quando lhe é fornecido o gráfico da função, estabelece com base neste a relação dinâmica onde os objectos se aproximam de 1 e, ao mesmo tempo, as imagens se aproximam de 2. Revela a capacidade de utilizar os elementos do domínio e contradomínio sempre que necessário para explicitar os processos subjacentes ao conceito. Ao pretender traduzir simbolicamente o conceito de limite para o caso concreto, o José apresenta uma concepção, essencialmente, operacional que apenas lhe permite estabelecer algumas das suas componentes. Traduz a noção de proximidade na vizinhança de 1 através da representação $|1-x|$ e da mesma forma traduz a vizinhança de 2, $|2-f(x)|$. Estas representações parecem corresponder a processos já interiorizados, mas que ele não consegue transpor para a definição simbólica pretendida. Encontra dificuldades em representar alguns parâmetros como por exemplo o ε e o estabelecimento da representação simbólica é feito com ajuda e sem que ele consiga dar o significado pretendido aos quantificadores. Neste caso o conceito imagem de função revelou-se determinante para a forma como o conceito de limite foi abordado, permitindo a sua operacionalização, mas limitando uma concepção mais estrutural, nomeadamente na utilização da representação simbólica que não pode ser considerada como um proceito. Se pretendermos estabelecer o tipo de pensamento proceptual utilizado pelo José neste caso, somos confrontados com uma componente processual forte, mas cuja componente conceptual é bastante fraca.

No que diz respeito ao cálculo diferencial, o José apresenta um conceito imagem de derivada relacional enquanto que no teorema de Lagrange revela um conceito imagem instrumental. Também aqui ele continua a privilegiar uma abordagem gráfica com uma forte componente imagética. Começa com referir que a derivada está relacionada com o declive da recta tangente ao gráfico no ponto e quando se pede uma representação algébrica do conceito ele refere-a verbalmente como sendo o limite da razão incremental, mas apenas representa a expressão da razão incremental. Esta representação algébrica levanta-lhe algumas dúvidas que são dissipadas com a interpretação geométrica do conceito. Ele relaciona a razão incremental com o declive da recta secante ao gráfico e estabelece o processo dinâmico que permite transformar esta recta secante na recta tangente. Com base nesta abordagem completa a escrita da representação algébrica do conceito, introduzindo o limite antes da expressão da razão incremental.

Esta capacidade de representar graficamente os conceitos também está presente quando se pretende enunciar o teorema de Lagrange. Quando se procurou estabelecer o enunciado do teorema o José não foi capaz de o associar a nenhuma representação algébrica, referindo-se apenas ao estudo dos extremos das funções. Depois de, com a ajuda do entrevistador, este ter sido escrito, refere que já se lembra, reconhecendo-o pela sua representação algébrica e mostra um desempenho satisfatório ao fazer a sua interpretação geométrica. Começa por representar dois pontos sobre o gráfico, definidos pelas suas abcissas, por onde traçou a recta secante ao gráfico, associando-a à razão incremental e depois explicou o resto do processo referindo que o ponto c seria dado pela recta tangente ao gráfico e paralela à anterior. Este desempenho na interpretação geométrica mostra que ele integra a informação fornecida pelo conceito de derivada que é utilizado como um objecto matemático, sendo capaz de a estender a situações mais complexas, como é o caso deste teorema.

Esta capacidade não lhe fornece, no entanto, as ferramentas necessárias para que se possa considerar que compreendeu o enunciado do teorema. Ao pretender-se aplicar o teorema a um caso concreto ele mostra alguma dificuldade em estabelecer o papel de cada uma das suas premissas. Embora encontre o intervalo e a função, necessários para poder aplicar o teorema, não dá grande importância à verificação das hipóteses procurando estabelecer de imediato a tese. Os processos de cálculo, nomeadamente quando está envolvida a função módulo, são de difícil realização, causando mesmo entraves à resolução do problema proposto. O José parece, assim, estar na posse de um conjunto de procedimentos e processos que lhe permitem estabelecer várias partes do teorema, mas não foi capaz de coordenar todos estes elementos para poder compreender o seu alcance, nomeadamente o papel desempenhado pelas hipóteses e pela tese. O fenómeno de localidade aparece aqui mais esbatido, sendo o José capaz de utilizar a compreensão do conceito de derivada para explicar o alcance do teorema de Lagrange, ainda que o tenha feito com base numa componente essencialmente imagética.

No tópico das sucessões o José apresenta um conceito imagem de sucessão instrumental, um conceito imagem de infinitamente grande incipiente e um conceito imagem de sucessão convergente instrumental. Tal como nos tópicos das funções e do cálculo diferencial também no caso das sucessões é feita uma abordagem preferencialmente imagética. No caso do conceito de sucessão ele começa por tentar explicitá-lo de modo operacional, referindo-se à existência de uma expressão e de outros elementos como os termos e as ordens, mas só consegue clarificar a forma como estes elementos se relacionam recorrendo a um gráfico. É também com base no gráfico que ele explicita outras propriedades do conceito como a monotonia ou a noção de sucessão limitada. A partir do gráfico refere os processos e procedimentos necessários para estabelecer essas propriedades, mas não é capaz de os coordenar para construir outros objectos matemáticos mais eficazes. Esta dificuldade torna-se mais notória quando se pretende abordar o conceito de infinitamente grande, representando-o simbolicamente. O José evidencia processos que lhe permitem explicar operacionalmente o conceito, admitindo que os termos tendem para mais infinito ou que não é possível limitar o seu crescimento, mas não é capaz de traduzir por símbolos essas propriedades. A representação simbólica acaba por lhe ser fornecida pelo entrevistador e quando se procura, com base num gráfico fornecido, que ele dê significado aos símbolos presentes na definição, apenas destaca o papel de alguns deles, nomeadamente do L que utiliza como forma de estabelecer a ordem procurada. Mais uma vez ele operacionaliza a definição num contexto gráfico, mas não é capaz de explicitar o papel dos quantificadores assim como o do parâmetro p presente na definição simbólica.

Quando se pretendeu estabelecer a representação simbólica de sucessão convergente, o José utilizou a de infinitamente grande e fez as devidas adaptações. O facto de os termos se estarem a aproximar do valor do limite é traduzido pelo módulo da diferença entre ambos, processo este que ele parece ter interiorizado e condensado convenientemente. Já no tópico das funções ele tinha manifestado um desempenho favorável neste tipo de representação. Ao estabelecer o papel desempenhado pelos vários símbolos presentes na definição, com base num gráfico dado, ele mostrou um desempenho favorável, que reflecte a interiorização de alguns dos processos e procedimentos realizados no caso anterior com a ajuda do entrevistador. Neste caso ele já relaciona o papel desempenhado pelo ε e pelo p, identificando a relação de dependência entre ambos. O caso de convergência da sucessão constante também é estabelecido com base na definição simbólica e tomando como exemplo uma sucessão concreta. Desta forma o José manifesta uma concepção, essencialmente, operacional do conceito de sucessão convergente, sendo capaz de realizar os vários processos presentes na definição simbólica com base em exemplos concretos, mas não coordena nem capsula esses mesmos processos em novos objectos matemáticos.

O José é assim caracterizado por apresentar níveis de conceito imagem predominantemente instrumentais, que lhe permitem ter uma visão operacional dos conceitos. Ele revela ser capaz de utilizar alguns objectos matemáticos elementares para este nível de ensino, objectos estes que lhe permitem realizar determinados procedimentos e processos de modo a operacionalizar os conceitos. Nos conceitos mais avançados ele situa-se ao nível da interiorização, podendo, por vezes, manifestar alguns indícios de condensação, não mostrando em nenhum dos conceitos estudados a capacidade de os reificar. Ainda assim, o José apresenta uma particularidade interessante, o uso de gráficos e esquemas imagéticos, que lhe fornecem um conjunto de recursos cognitivos que coordena eficazmente. Recorre aos vários tipos de representações imagéticas, coordenado-as com algumas representações algébricas o que se mostra suficiente para que possa ter sucesso escolar.

2. A Sofia, uma aluna de sucesso em Matemática

A Sofia é aluna de Matemática assídua e pontual. Nas aulas tem como principal preocupação copiar todas as demonstrações ou resoluções feitas pelos professores no quadro, quer se trate das aulas teóricas ou práticas. Sempre que é solicitada a participação dos alunos na resolução de problemas ela não responde espontaneamente, embora participe se solicitada directamente. Quando foi contactada pelo investigador para participar nas entrevistas manifestou algum nervosismo, mas mostrou-se disponível embora procurasse saber as razões por que tinha sido escolhida. Ficou mais tranquila quando lhe foi dito que os dados recolhidos não iriam ter reflexo na avaliação final da disciplina e compareceu sempre nos horários combinados. Ao longo das entrevistas teve sempre a preocupação de dar respostas completas, recorrendo, por vezes, a vários processos explicativos para que a sua resposta fosse o mais clara possível para o entrevistador. Na interacção que foi estabelecendo com o entrevistador acabou mesmo nalgumas situações por colocar questões que lhe permitissem consolidar os seus conceitos imagem.

Ao longo do estudo a Sofia apresenta níveis de conceito imagem quase sempre relacionais com a excepção do conceito de infinitamente grande que foi classificado como instrumental.

Quadro 8.2. Níveis de conceito imagem da Sofia.

Conceitos/ Nível	Incipiente	Instrumental	Relacional
Função			X
Limite			X
Derivada			X
Teorema de Lagrange			X
Sucessão			X
Infinitamente grande		X	
Sucessão convergente			X

Podemos considerar que ela representa uma aluna típica com sucesso em Matemática, que compreende os conceitos matemáticos estudados, encarando-os, a maior parte das vezes, como objectos matemáticos e para os quais é possível aceder aos processos e objectos que estiveram na sua origem. Esta capacidade de manipular os conceitos como objectos vai-se tornando menos efectiva à medida que os conceitos se vão tornando mais abstractos. Desta forma o seu desempenho revelou-se bastante satisfatório, conseguindo no final do semestre lectivo uma classificação de 16 valores. Apresenta-se de seguida uma caracterização do seu desempenho nos vários conceitos estudados.

Ao pretender explicitar o conceito de função a Sofia centra-se nos processos e objectos que estão na sua base, procurando coordená-los de forma apropriada. Ela refere-se à existência de uma expressão, das variáveis dependentes e independentes e ao tipo de relação entre essas variáveis. O domínio e contradomínio são referidos como conjuntos que se podem construir de forma bastante variada e as noções de injectividade e função limitada também são explicitadas com base na forma como os vários processos e objectos se relacionam. A univocidade da correspondência nunca é referida explicitamente como uma característica da função, mas é usada sempre que se pretendem estabelecer outras propriedades relacionadas. A tradução da representação algébrica para a gráfica também assume um papel determinante na explicação do conceito. A Sofia parece estar assim numa fase bastante próxima da reificação do conceito, uma vez que revela uma interiorização e condensação dos vários processos e objectos subjacentes, faltando apenas a capacidade de o referir como um objecto único que goze de todas as propriedades que ela lhe atribuiu. Esta abordagem do conceito de função parece ser determinante para a forma como ela encara o conceito de limite. Quando lhe é pedido para explicitar o significado de $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$, começa por fazer um esboço gráfico explicando o processo dinâmico que relaciona a forma como os objectos se aproximam de 1 e as imagens se aproximam de 2. Esta explicação é feita evidenciando os objectos e processos constituintes do conceito e que são, posteriormente, coordenados de forma a poderem ser expressos pela respectiva representação simbólica. As vizinhanças dos pontos de abcissa 1 e ordenada 2 são traduzidas simbolicamente por módulos, evidenciando assim uma visão proceptual dessas vizinhanças. A tradução simbólica do limite anterior tem por base estes proceitos conseguindo a Sofia explicitar o significado dos vários símbolos utilizados na sua escrita.

No que diz respeito ao conceito de derivada e ao teorema de Lagrange a Sofia continua a apresentar um nível de conceito imagem relacional. Quando pretende explicitar o seu conceito de derivada usa a definição que foi dada nas aulas, isto é, refere-se ao limite da razão incremental entre os pontos de abcissas x e a. Além desta abordagem mais estrutural, ela evoca ainda uma interpretação geométrica associando a derivada ao declive da recta tangente ao gráfico no ponto em estudo e faz uma interpretação geométrica da mesma, evidenciando o processo que permite passar da recta secante ao gráfico até que no limite coincida com uma recta tangente. O conceito de derivada é assim encarado segundo várias representações, podendo considerar-se que o mesmo se encontra reificado.

No que se refere ao teorema de Lagrange o desempenho da Sofia é semelhante ao do conceito de derivada. Ela começa por verbalizar o seu enunciado, tal como tinha sido estabelecido nas aulas, e consegue posteriormente dar uma interpretação geométrica deste. A razão incremental volta a ser associada ao declive da recta secante e o ponto c é encontrado com base na recta tangente ao gráfico paralela à secante representada anteriormente. A aplicação do teorema num caso concreto também parece não causar dificuldades. Ao pretender provar a desigualdade $|sen(\theta)-sen(\alpha)|\leq|\theta-\alpha|$, $\forall\theta,\alpha\in R$, a Sofia identificou a função e o intervalo em causa, estabelecendo as hipóteses para este caso e escrevendo a respectiva tese. A utilização da função módulo e o estabelecimento da desigualdade pretendida foi o que mais dificuldades lhe causou, sendo mesmo necessário a ajuda do entrevistador para o estabelecimento de algumas das propriedades da função módulo. A Sofia apresenta assim visão proceptual do teorema de Lagrange onde ambas as componentes, processual e conceptual, são acedidas e manipuladas com sucesso.

É no tópico das sucessões que a Sofia apresenta uma variação nos níveis de conceito imagem. Ela revela um conceito imagem relacional de sucessão e sucessão convergente e um conceito imagem instrumental de infinitamente grande. Ao pretender explicitar o seu conceito de sucessão a Sofia estabelece um paralelo com o conceito de função e refere principais diferenças. Destaca o facto de o domínio ser constituído só por naturais e refere que o seu gráfico vai ser discreto. Ela estabelece as características do gráfico sem fazer qualquer esboço, o que deixa antever que este tem um estatuto de objecto matemático. Há, no entanto, algumas propriedades onde ela tem dificuldade em coordenar as diferentes representações. Começa por admitir que a sucessão de termos geral $\frac{1}{n}$ é limitada entre 0 e 1, concepção esta baseada na sua representação visual do gráfico da função, mas encontra um obstáculo quando pretende comparar esta afirmação com uma concepção mais formal onde considera que a sucessão será limitada se verificar a condição $|u_n| < M$. Esta abordagem leva-a a concluir que a sucessão teria que estar limitada entre $-M$ e M e não estabelece uma comparação entre as duas representações. Embora ela tire conclusões em cada uma das situações em separado, o facto de juntar ambas as representações tornou-se um factor de conflito que ela tem dificuldade em gerir.

Embora a Sofia pareça ter interiorizado e condensado a maior parte dos processos e objectos relacionados com o conceito, mostra alguma dificuldade em coordená-los, nomeadamente, quando estes assumem um carácter mais abstracto. Esta dificuldade também se torna notória quando pretende exprimir simbolicamente o conceito de infinitamente grande. Ela considera que a sucessão é um infinitamente grande quando não consegue limitar o crescimento dos seus termos, considerando que dado um L, por maior que seja, os termos vão ser sempre maiores que esse valor. Esta abordagem não encontra eco quando se pretende escrever a definição simbólica, ficando esta bastante incompleta. Quando confrontada com a definição formal das aulas ela continua a não dar grande importância às ordens, negligenciando o papel do n e do p, e, quando colocada perante um caso concreto, confunde as ordens com o L que referiu anteriormente. A Sofia revela assim alguma dificuldade em coordenar o papel dos diferentes parâmetros da definição simbólica, embora consiga distinguir o papel de cada um deles em separado. Com ajuda, coordena rapidamente os vários processos dando, a partir daí, respostas correctas a questões que procuravam identificar ordens a partir das quais os termos de uma dada sucessão ultrapassavam determinados valores. Podemos considerar que o conceito de infinitamente grande da Sofia estaria numa zona de desenvolvimento proximal (Vigotsky, 1988) e apenas se manifestou durante a experiência de ensino.

Esta concepção também parece poder ser estendida à forma como ela estabelece o conceito de sucessão convergente. Com base na definição simbólica de infinitamente grande ela escreve agora a de sucessão convergente, traduzindo mesmo a distância entre os termos da sucessão e o valor do limite de duas formas diferentes, através do módulo da diferença entre ambos e pela noção de vizinhança. A definição simbólica parece assim ter sido interiorizada e condensada, sendo utilizada para estabelecer a convergência de outras sucessões, quer no caso concreto ou mesmo no caso geral. Esta utilização tem maior eficácia ao nível da abordagem processual, tendo a Sofia recorrido a processos algébricos para provar a convergência de algumas das sucessões. Quando foi necessário fazer uma abordagem gráfica o desempenho diminuiu substancialmente, sendo a noção de vizinhança a que causou mais dificuldades. Neste caso podemos considerar que o pensamento proceptual, presente na utilização da definição, apresenta uma componente processual forte e uma componente conceptual mais fraca.

A Sofia revela assim ser uma aluna que tem sucesso em Matemática, apresentando caracterísitcas que seriam espectáveis para a maior parte dos alunos deste curso. Ela mostra ter reificado uma grande parte dos conceitos abordados no estudo, sendo alguns deles bastante abstractos e consegue, ao mesmo tempo, descapsular estes objectos matemáticos em termos de processos e procedimentos subjacentes. Esta capacidade traduz-se num nível de conceito imagem de cariz relacional que culmina num desempenho escolar muito bom, onde consegue uma avaliação final na disciplina de 16 valores.

3. A Susana, um caso paradoxal

A Susana é uma aluna de Matemática, assídua ainda que nem sempre pontual. Durante as aulas assume uma postura passiva, não fazendo qualquer intervenção nas aulas teóricas onde se limita a copiar todas as demonstrações e resoluções que o professor apresenta no quadro. Relativamente às actividades realizadas na aula prática, só participa quando solicitada, mostrando alguma dificuldade em responder às questões colocadas. A mesma postura da aula teórica, copiando os exemplos resolvidos pela professora no quadro é mantida. Quando foi solicitada para participar nas entrevistas, mostrou alguma preocupação tentando saber que tipo de questões é que poderiam ser colocadas e quando foi informada que estes dados não seriam tidos em conta na avaliação da disciplina pareceu encarar a situação com maior naturalidade. Durante as entrevistas respondeu sempre com espontaneidade, não se preocupando em elaborar demasiado as respostas que dava.

A Susana apresenta ao longo do presente estudo níveis de conceito imagem que se situam sempre entre o incipiente e o instrumental.

Quadro 8.3. Níveis de conceito imagem da Susana.

Conceitos/ Nível	Incipiente	Instrumental	Relacional
Função	X		
Limite		X	
Derivada	X		
Teorema de Lagrange		X	
Sucessão	X		
Infinitamente grande		X	
Sucessão convergente	X		

Assim, no que se refere às funções e cálculo diferencial ela apresenta um conceito imagem de função incipiente, um conceito imagem de limite instrumental, um conceito imagem de derivada incipiente e um conceito imagem do teorema de Lagrange instrumental. No que se refere ao tema das sucessões apresenta um conceito imagem de sucessão incipiente, um conceito imagem de infinitamente grande instrumental e um conceito imagem de sucessão convergente incipiente. Considerando os níveis de conceito imagem que apresenta nos diferentes tópicos podemos admitir à partida que a sua compreensão dos vários conceitos é bastante limitada, no entanto, ela consegue chegar ao final do semestre lectivo e obter uma avaliação positiva (nota final de 15 valores). Apresenta-se em seguida uma caracterização mais pormenorizada do seu desempenho na utilização dos diferentes conceitos.

No caso do conceito de função é possível observar o fenómeno de localidade, sendo o conceito imagem de função considerado incipiente, enquanto que o de limite é classificado como instrumental. A Susana usa esquemas bastante elementares para explicitar a sua noção de função, recorrendo a diagramas de Venn, e não se refere aos conjuntos envolvidos (domínio e contradomínio) que, neste nível de ensino, já deveriam ser usados com o estatuto de objectos matemáticos. Esta abordagem limita o seu desempenho na identificação de outras propriedades associadas ao conceito, como o caso da injectividade e na noção de função limitada que ela apenas explicita com a ajuda do entrevistador e de modo operacional, isto é, refere alguns procedimentos e processos elementares relativos a estas propriedades, mas não lhes atribui o estatuto de objectos matemáticos que já deveriam assumir neste nível de ensino. Este conceito imagem de função vai reflectir-se na forma como aborda o conceito de limite. Perante um caso concreto, $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$, refere-se às vizinhanças dos pontos de abcissa 1 e ordenada 2, mas, quando lhe é fornecido um gráfico da função para explicar o processo, faz uma abordagem sobre o traçado do gráfico sem nunca se referir aos objectos e às imagens. Não foi capaz de fazer a tradução simbólica do limite anterior, mas quando o entrevistador lhe refere a noção de distância entre x e 1 ela consegue representá-la, $|x\text{-}1|<\varepsilon$, bem como a vizinhança do ponto de ordenada 2 que ela representa por $|f(x)\text{-}2|<\delta$. Estas representações são realizadas apenas quando lhe é referida explicitamente a noção de distância, que parece ter memorizado como sendo representada por um módulo, mas não consegue explicitar o processo que conduz a essa representação. Tal dificuldade parece estar relacionada com a incapacidade em identificar a relação entre objectos e imagens aquando da abordagem do conceito de função. A partir da escrita simbólica anterior ela traduz simbolicamente a noção de limite para o caso concreto, mas também não consegue explicitar os diversos elementos, nomeadamente, o papel desempenhado pelos quantificadores. O conceito de função e de limite aparecem assim desligados um do outro, recorrendo a Susana a procedimentos e processos distintos quando aborda cada um deles. Desta forma cada um dos conceitos assume uma certa localidade, isto é, há características que ela considera específicas de cada um, mesmo quando elas são comuns a ambos não existindo transferência entre eles.

No conceito de derivada a Susana também apresenta um conceito imagem incipiente embora quando se trate das suas aplicações, o teorema de Lagrange, ela manifeste um conceito imagem instrumental. Ao procurar explicitar o que entende por derivada ela refere-se ao declive da recta tangente ao gráfico no ponto, mas quando se procura uma representação algébrica que possa traduzir esse facto ela não consegue indicar nenhuma. A verbalização anterior parece basear-se num fenómeno de ventriloquismo, pois só quando o entrevistador se refere à razão incremental é que ela traduz algebricamente essa razão admitindo que representa a derivada da função. A sua representação é o resultado de fragmentos da sua memória visual e não traduz o conceito tal como ele foi ensinado. Depois de confrontada com a definição abordada nas aulas ela não foi capaz de lhe atribuir significado geométrico, quer na representação da recta secante ao gráfico definida pela razão incremental, quer no processo dinâmico representado pelo limite da razão incremental e que transforma a recta secante anterior na recta tangente ao gráfico no ponto. Só com a ajuda do entrevistador ela estabelece uma relação entre as duas representações.

Esta abordagem parece ser-lhe útil quando pretende utilizar o teorema de Lagrange. Volta a utilizar a memória visual para escrever as condições do teorema, acabando por se referir a condições que fazem parte de outros teoremas afins. Quando conseguiu estabelecer o enunciado do teorema e se pretendeu fazer uma interpretação geométrica deste, representou a recta secante ao gráfico e definiu a recta tangente, paralela à anterior, que lhe serviu para encontrar o ponto c procurado. Esta representação geométrica também apresenta algumas características que ela não consegue explicitar. Embora, anteriormente, no conceito de derivada, lhe tivesse sido mostrada a relação entre a recta secante ao gráfico e a razão incremental ela não foi capaz de explicitar essa mesma relação no caso do teorema. Desta forma, embora tenha traçado a recta secante, não lhe conferiu o significado algébrico que tinha sido entretanto abordado no conceito de derivada.

O fenómeno de localidade continua a estar presente, sendo cada um dos conceitos abordado independentemente do outro. Pelo facto de o conceito de derivada ser baseado em procedimentos e processos elementares que não lhe conferem o estatuto de objecto matemático, o teorema de Lagrange acaba por ser estabelecido sem ter em conta as propriedades do conceito anterior, o que conduz a uma compreensão incompleta deste. Além das dificuldades manifestadas em explicitar o significado das premissas do teorema, a Susana também não é capaz de estabelecer o seu alcance, pois quando tenta usá-lo para provar uma desigualdade começa por partir da tese com o objectivo de mostrar que esta é verdadeira. O estabelecimento das condições do teorema, no caso concreto, só é conseguido com ajuda, sendo as hipóteses negligenciadas e mostrando grandes dificuldades nos processos de cálculo que envolvem propriedades dos módulos.

No tema das sucessões a Susana também apresenta um desempenho pouco favorável, revelando um conceito imagem de sucessão e sucessão convergente incipientes, acompanhados de um conceito imagem de infinitamente grande instrumental. Tal como no conceito de função, o conceito imagem de sucessão da Susana não contempla uma distinção nítida entre os termos e as ordens, sendo mesmo confundidos em várias situações. Ao fazer uma representação gráfica dos termos de uma sucessão ela representa-os sobre o eixo horizontal negligenciando o papel dos naturais. Esta representação prevalece como gráfico da sucessão até lhe ter sido solicitado o cálculo dos primeiros termos da sucessão. Nesta fase ela faz outra representação no mesmo sistema de eixos que contempla a relação entre objectos e imagens mas, que nunca explicita como tal. Nesta segunda representação não recorre a escalas apropriadas para representar os termos, faltando evidenciar a relação de correspondência entre objectos e imagens e, quando se pretende estabelecer a noção de sucessão limitada volta a usar a representação inicial. Procura limitar os termos da sucessão que estão representados sobre o eixo horizontal e confunde estes com os naturais que deveriam estar representados neste eixo. A Susana apenas realiza alguns procedimentos e processos elementares sem qualquer coordenação, não gerando pois os objectos matemáticos indispensáveis à compreensão do conceito. É com base neste conceito imagem que ela procura estabelecer o conceito de infinitamente grande. A Susana refere que, ao utilizar este conceito, busca uma ordem a partir da qual os termos da sucessão sejam maiores que essa mesma ordem. O facto de não ter feito anteriormente uma distinção nítida entre termos e ordens é determinante na forma como ela explicita este novo conceito. Esta concepção também é determinante na escrita de definição simbólica do conceito. Ela recorre à sua memória visual para escrever esta definição, o que apenas lhe permite fazer uma representação parcial, sem que consiga explicitar o papel desempenhado pelos símbolos. A diferenciação entre os termos e as ordens só é conseguida com base num exemplo concreto e com a ajuda do entrevistador. É ao estabelecer o papel desempenhado pelos símbolos num gráfico que ela faz essa distinção, mas mesmo assim tem dificuldades em explicar o papel de todos os símbolos da representação simbólica. É com base nesta abordagem que começa a interiorizar alguns processos presentes na definição simbólica mostrando, no entanto, dificuldades em condensá-los para poder formar novos objectos.

Quando se trata de explicitar o conceito de sucessão convergente, a Susana volta a ter dificuldades com a sua tradução simbólica. Ela usa como modelo a definição de infinitamente grande utilizada anteriormente, mas não faz as devidas adaptações. Tem dificuldade em representar simbolicamente o facto de os termos estarem cada vez mais próximos do limite e não utiliza a definição para provar a existência de determinados limites. Mesmo quando se trata de realizar os processos de cálculo necessários à aplicação da definição simbólica, ela apresenta um desempenho bastante fraco deixando antever uma falta de compreensão desta. O conceito de sucessão convergente parece limitar-se a sucessões em que os termos se aproximam do valor do limite, sendo as sucessões constantes excluídas por não apresentarem essa característica. Também neste caso a Susana apresenta um conceito imagem incipiente que se limita à utilização de alguns procedimentos e processos elementares que apenas lhe permitem estabelecer uma abordagem operacional de algumas partes do conceito. Neste tópico continua a verificar-se uma certa localidade dos conceitos imagem manifestados, sendo os conceitos mais elementares, como o de sucessão, traduzidos por conceitos imagem incipientes e, desta forma, os conceitos de infinitamente grande e de sucessão convergente acabam por ser expressos com base em características próprias que não têm por suporte o conceito de sucessão reificado.

Além do fenómeno de localidade bem expresso nos conceitos imagem da Susana também podemos associar-lhe um outro que está relacionado com a estabilidade. Ao longo dos vários conceitos matemáticos abordados ela revela, quase sempre, conceitos imagem incipientes, sobretudo nos casos em que os conceitos são mais elementares, como é o caso do conceito de sucessão e de função. Curiosamente ela apresenta conceitos imagem instrumentais em conceitos que, à partida, são mais complexos como é o caso do conceito de limite, infinitamente grande ou teorema de Lagrange. Esta diferenciação parece dever-se ao facto de, nestes casos, ela utilizar um conjunto de procedimentos e processos que lhe permitem manipular partes do conceito em estudo sem que, no entanto, consiga ter uma visão de conjunto do conceito. Estes procedimentos e processos são, muitas vezes, memorizados, acabando por conduzir a um desempenho favorável ao nível processual. Podemos assim constatar que, nos vários conceitos abordados na investigação, a Susana apenas consegue manipular objectos matemáticos bastante elementares sobre os quais revela dificuldades em realizar processos que possam conduzir à interiorização e condensação com vista à criação de novos objectos que representem os conceitos matemáticos em estudo. Este fraco desempenho ao nível da compreensão dos conceitos não parece, no entanto, reflectir-se no correspondente desempenho escolar. A Susana surge assim como um caso paradoxal, pois apresenta uma avaliação final na disciplina bastante boa (15 valores), sendo mesmo possível constatar níveis de desempenho semelhantes noutras disciplinas do curso.

Capítulo IX

Conclusões e recomendações

Esta investigação pretendeu caracterizar a compreensão dos conceitos matemáticos avançados ensinados no início do ensino superior, relacionados com os tópicos das sucessões, funções e cálculo diferencial. O estudo realizou-se com alunos do 1º ano de licenciaturas em Ensino das Ciências, Engenharia Electrotécnica e Matemática na primeira disciplina de Análise dos cursos, tendo os seguintes objectivos: integrar o contributo de várias teorias sobre a construção dos conceitos matemáticos, caracterizar a complexidade dos conceitos imagem que os alunos têm dos conceitos matemáticos ensinados e caracterizar desempenhos escolares típicos de alguns alunos.

A metodologia de investigação usada foi de natureza qualitativa, integrando uma componente de experiências de ensino e visando a compreensão dos principais conceitos imagem manifestados pelos alunos. Participaram quinze alunos com sucesso inicial na disciplina de Análise Matemática de uma faculdade vocacionada para as ciências e a tecnologia (cinco de cada uma das licenciaturas). Foram efectuadas entrevistas tendo-se ainda recorrido a outras técnicas de recolha de dados como a observação de aulas e a análise de documentos produzidos pelos alunos.

Neste capítulo apresentam-se as conclusões que são possíveis inferir dos dados analisados nos capítulos anteriores. As conclusões estão organizadas segundo três tópicos: contributos de teorias cognitivas para a compreensão da complexidade de conceitos imagem, teorias estas apresentadas no capítulo II, as características dos conceitos imagem abordadas no capítulo V e inferidas da análise de dados dos capítulos VI e VII e as características de alguns desempenhos escolares típicos referidos no capítulo VIII.

Por fim apresentam-se algumas recomendações e implicações que decorrem do desenvolvimento do estudo e dos resultados observados.

1. Contributos de teorias cognitivas para a compreensão da complexidade de conceitos imagem

No capítulo II são referidas algumas teorias cognitivas relacionadas com o pensamento matemático avançado que, embora sejam abordadas em separado, possuem pontos comuns que podem servir para uma caracterização mais completa dos vários níveis de conceito imagem discutidos nesta investigação. Nesta primeira secção das conclusões pretende-se dar resposta ao primeiro objectivo do estudo, nomeadamente a uma integração do contributo destas teorias para a compreensão da construção dos conceitos matemáticos. Partindo dos trabalhos de Tall e Vinner (1981), Vinner (1983, 1991) as noções de conceito definição e conceito imagem desenvolvidas por estes autores servem de ponto de partida para o estabelecimento dos níveis de conceito imagem com que caracterizo a compreensão dos conceitos aqui estudados. O estabelecimento destes níveis bem como da caracterização das suas propriedades e dos seus atributos em cinco domínios, representa um refinamento da anterior categorização usada por estes autores, servindo para caracterizar o tipo de compreensão que os alunos manifestam relativamente aos conceitos.

Para poder estabelecer esta caracterização foi fundamental recorrer à teoria da reificação de Anna Sfard, à concepção proceptual dos conceitos matemáticos de David Tall e à teoria *APOS*, cujo principal impulsionador é Ed Dubinsky. A integração dos pontos fortes das várias teorias tornou-se uma ferramenta poderosa para caracterizar os níveis de conceito imagem propostos, conferindo-lhe uma linguagem própria e permitindo acompanhar o seu desenvolvimento desde o estudo dos conceitos matemáticos mais elementares até aos conceitos matemáticos avançados. A teoria da reificação dá-nos uma explicação bastante completa da forma como podemos conceber os objectos matemáticos, tendo como pressuposto a existência de uma concepção operacional antes de uma concepção estrutural. As fases da interiorização, condensação e reificação mostram-nos um percurso que agrega os objectos e processos em unidades cada vez mais compactas até se tornarem num novo objecto matemático. Da mesma forma Tall admite que os novos conceitos são formados a partir de uma sequência que tem início na realização de procedimentos que vão evoluindo para se tornarem processos e por fim proceitos. Esta evolução traduz-se numa sofisticação cada vez maior, terminando na capacidade de pensar sobre um dado conceito simbolicamente. Dubinsky apresenta um modelo semelhante aos anteriores que contempla a acção sobre objectos com vista à sua interiorização e posterior realização de processos que tendem a ser capsulados em novos objectos.

Embora as várias teorias apresentem percursos semelhantes para explicar a construção dos conceitos matemáticos, parece ser importante coordenar os vários contributos dados por cada uma delas em separado. Assim, partindo do princípio que a teoria da reificação explica a evolução dos conceitos, partindo dos objectos mais elementares para os mais complexos, a visão proceptual destes objectos vem-nos ajudar a compreender como o conhecimento matemático pode ser compactado e representado por meio de símbolos, tornando-se assim mais fácil de manejar e a teoria APOS fornece-nos mecanismos que nos permitem avaliar a compreensão dos alunos de determinados objectos matemáticos, nomeadamente, no balanço entre o capsular e descapsular desses objectos. É assim importante ter em conta estas características das várias teorias com o objectivo de estabelecer os níveis de conceito imagem que melhor traduzam a compreensão dos vários conceitos matemáticos estudados.

Este estudo vem assim acrescentar uma mais valia à teoria já desenvolvida acerca das noções de conceito definição e conceito imagem. Inicialmente, nos trabalhos de Shlomo Vinner estes dois conceitos eram considerados como podendo ser representados por duas células distintas na mente do indivíduo. Uma para o conceito definição e outra para o conceito imagem. Posteriormente, David Tall admitiu que quer o conceito definição quer o conceito imagem faziam parte da mesma estrutura cognitiva, estrutura esta dominada pelo conceito imagem e onde o conceito definição representava uma das suas componentes. Esta categorização tornou-se bastante útil como modelo para abordar a construção dos conceitos matemáticos, sendo utilizada em diversos trabalhos de investigação, no entanto, parece ser limitada na forma como explica os processos que estão associados à construção dos conceitos. A categorização dos conceitos imagem que proponho neste trabalho representa um avanço para a teoria, permitindo que seja possível "medir" a complexidade destes conceitos imagem. É, assim, possível estabelecer uma hierarquia que vai dos conceitos imagem incipientes até aos conceitos imagem relacionais e ao mesmo tempo avaliar o seu grau de complexidade com base nos diferentes domínios identificados que são característicos de cada uma destas categorias.

2. Características dos conceitos imagem

Esta secção pretende complementar a resposta ao segundo objectivo proposto no estudo, caracterizar a complexidade dos conceitos imagem que os alunos têm dos conceitos matemáticos ensinados. No capítulo V foram discutidos pormenorizadamente os níveis de conceito imagem estabelecidos com base na criação de meta-categorias retiradas das categorias formadas a partir dos dados. Foram identificados três níveis diferentes de conceitos imagem – incipiente, instrumental e relacional – com o objectivo de distinguir os diferentes tipos de conceitos imagem que podem coexistir na mente do aluno. Verificou-se que, perante o ensino de um dado conceito, alguns alunos manifestam conceitos imagem próximos dos característicos da matemática elementar (conceitos imagem incipientes) enquanto que outros apresentam concepções próximas das que caracterizam a matemática avançada (conceitos imagem relacionais). Alguns alunos não se enquadraram em nenhum destes níveis apresentando uma concepção que os situa numa zona de transição entre ambos (conceitos imagem instrumentais).

Para caracterizar estes níveis de conceito imagem foram tidos em conta diferentes domínios utilizados pelas várias teorias cognitivas referidas acima. São eles: os objectos, os processos, a tradução entre representações, as principais propriedades e o pensamento proceptual. É com base nestes domínios, pormenorizadamente descritos no capítulo V, que se organizam as características dos conceitos imagem manifestados pelos alunos.

2.1. Objectos

A maior parte dos alunos revelou dominar uma grande diversidade de objectos matemáticos. Alguns destes objectos são demasiado elementares para a compreensão dos conceitos mais avançados. No caso do conceito de função foi possível identificar como objectos bem dominados, pela generalidade dos alunos, o conjunto dos reais, a representação algébrica de algumas funções (essencialmente as afins, quadráticas e algumas trigonométricas, seno e coseno), as representações gráficas destas funções, conceitos como o de função monótona ou função limitada e com menor frequência as noções de domínio, contradomínio, injectividade ou invertibilidade.

O ensino posto em prática prevê que todos estes objectos tivessem sido reificados com sucesso, pois procura que o conceito de função tenha por base a noção de correspondência unívoca entre dois conjuntos. Esta concepção abstracta não foi manifestada por nenhum dos alunos estudados, o que mostra que a mesma não foi convenientemente interiorizada e condensada para poder ser reificada como um novo objecto matemático. Cerca de metade dos alunos (os 7 que apresentam um conceito imagem relacional) mostraram alguma interiorização do conceito a este nível, operacionalizando algumas componentes sobretudo quando aplicadas a casos concretos.

No que se refere ao conceito de limite e à sua tradução simbólica foi possível identificar um bom domínio de alguns objectos matemáticos como as noções de vizinhança, o módulo da diferença entre os objectos e o ponto para o qual a função tende, bem como o módulo da diferença entre as imagens e o valor do limite para representar essas vizinhanças e a interpretação de alguns símbolos como proceitos, nomeadamente os parâmetros ε e δ, raios de vizinhanças. Cerca de 10 alunos referiam alguns destes objectos. O ensino ministrado pretendia que os alunos conseguissem utilizar a definição simbólica como um objecto, no entanto, apenas 4 alunos evidenciaram uma abordagem próxima desta, revelando alguma interiorização de parte da definição, mas não tendo nenhum deles dado o significado pretendido aos quantificadores.

No caso do conceito de derivada foi possível identificar um bom domínio de alguns objectos matemáticos, como a expressão algébrica que define a razão incremental entre dois pontos, a interpretação geométrica da derivada traduzida pelo declive da recta tangente ao gráfico ou mesmo a expressão algébrica que define o conceito como o limite da razão incremental. Apesar de o ensino pressupor que o conceito é usado por todos os alunos com base na compreensão da sua representação algébrica, como o limite da razão incremental, apenas 6 alunos manifestaram um desempenho adequado. Por outro lado, embora se trate de um conceito já abordado no ensino secundário, igual número de alunos (6) apresenta uma concepção que apenas relaciona o conceito com o seu uso. Estes alunos revelam uma interiorização muito fraca que não vai além da utilização de alguns procedimentos e processos elementares realizados sobre objectos matemáticos, mas que se revelam demasiado simples para poderem ser capsulados de modo a traduzir o conceito pretendido.

Quando se pretende estabelecer outros objectos onde o conceito de derivada deve, ele próprio, ser um objecto, como é o caso do teorema de Lagrange, o desempenho dos alunos baixa significativamente. Apenas 4 alunos evidenciaram uma concepção do teorema reveladora de uma interiorização e condensação dos vários processos e objectos envolvidos que lhes permite explicitar o teorema com as características de um novo objecto matemático. Embora tenham sido evidenciados outros objectos elementares, como a expressão da razão incremental, as noções de continuidade e diferenciabilidade e a noção de intervalo real, estes não foram utilizados de forma coordenada pela maior parte dos alunos (11) para dar o significado pretendido ao teorema.

Na abordagem do conceito de sucessão também foi possível observar um domínio de uma variedade de objectos. O conjunto dos naturais, o conjunto dos reais, os termos, as ordens, a expressão algébrica de algumas sucessões de referência, bem como algumas das suas representações gráficas. A maior parte dos alunos (11) faz referência a alguns destes objectos, sendo no entanto mais restrito o grupo de alunos entrevistados que os relaciona e coordena de modo a estabelecer o conceito de sucessão abordado nas aulas. Este conceito foi introduzido com base na definição formal, que já tinha sido abordada no ensino secundário, admitindo que a sucessão é uma aplicação de $\boldsymbol{N}$ em $\boldsymbol{R}$. Nenhum dos alunos entrevistados evocou esta definição formal e apenas 5 alunos apresentaram uma concepção próxima desta.

Quanto ao conceito de infinitamente grande, que foi ensinado com base na definição simbólica, o desempenho dos alunos na sua explicitação baixou significativamente. Eles referem vários objectos matemáticos, como os termos, as ordens ou os parâmetros L e p, mas têm grandes dificuldades em coordenar todos estes objectos para traduzir simbolicamente o conceito. A maior parte dos alunos entrevistados (13) refere-se a algum ou vários destes objectos, no entanto, não é capaz de os utilizar de forma coordenada para poder representar o conceito em causa. Apenas 2 dos alunos manifestam uma concepção próxima da pretendida pelo ensino, sendo o papel dos quantificadores o que mais dificuldades causou.

Analogamente, no conceito de sucessão convergente manifesta-se o mesmo tipo de desempenho. É possível encontrar mais alguns objectos que são utilizados pelos alunos como o módulo da diferença entre os termos e o limite para representar a relação de proximidade entre ambos ou o parâmetro ε que representa a amplitude da vizinhança traduzida pelo módulo anterior. Também aqui a maior parte dos alunos (12) revela ser capaz de utilizar algum ou alguns destes objectos sem, no entanto, conseguir coordená-los e capsulá-los no novo objecto matemático que se pretende estabelecer. Apenas 3 alunos revelam parcialmente essa capacidade, conseguindo manifestar uma compreensão da definição simbólica próxima de uma concepção estrutural pretendida, ainda que o papel dos quantificadores surja como uma condicionante nem sempre fácil de explicitar.

2.2. Processos

Os processos que são aqui destacados são os que constituem um meio de elaborar novos conceitos e, portanto, novos objectos matemáticos. Eles assentam essencialmente em objectos mais elementares sobre os quais os processos são realizados sendo, posteriormente, interiorizados, condensados e coordenados de várias formas para poderem constituir novos objectos matemáticos. Os processos utilizados pelos alunos nesta investigação apresentam características diferentes, consoante os níveis de conceito imagem manifestados.

No caso do conceito de função, quando os alunos manifestam um conceito imagem predominantemente incipiente ou instrumental, (cerca de 8 alunos) o recurso aos processos e à sua coordenação para explicitar o conceito é pouco frequente, recorrendo estes, essencialmente, a verbalizações e representações baseadas em determinados protótipos. Os alunos usam frequentemente gráficos (que representam de forma esquemática) para explicitar o seu conceito de função, mas por exemplo não referem o tipo de relação entre objectos e imagens. Desta forma, ao estabelecer a injectividade, utilizam um processo geométrico, verificar se uma recta paralela ao eixo horizontal encontra o gráfico em mais do que um ponto, mas não conseguem aceder ao processo que lhes permite estabelecer o tipo de relação entre objectos e imagens para explicar o conceito. Quando explicitado, este processo é quase sempre referido com base na relação inversa, das imagens para os objectos, condicionando o seu desempenho na utilização de outros processos, como a invertibilidade da função. Nesta situação, alguns alunos argumentam que a função deve ser injectiva, mas não referem o processo em termos da relação entre objectos e imagens. Também as noções de monotonia e função limitada são, por vezes, estabelecidas com base em esquemas gráficos ou referindo-se a funções típicas representadas pelas suas expressões algébricas, mas sendo o acesso aos processos subjacentes de difícil concretização. Estes protótipos gráficos são assim utilizados como representantes do conceito, mas não têm o estatuto de objecto matemático. No caso em que os alunos apresentam um conceito imagem relacional, também recorrem frequentemente a representações gráficas de funções típicas para se referir ao conceito, no entanto, conseguem aceder aos processos que lhe estão subjacentes. Referem a relação entre objectos e imagens e desta forma explicitam os processos que conduzem à injectividade ou invertibilidade de uma dada função baseando-se na correspondência entre os elementos dos dois conjuntos. Estes alunos têm mais facilidade em manipular determinados objectos matemáticos subjacentes ao conceito pelo que os processos evidenciados são referidos como tendo sido interiorizados e condensados com vista à obtenção de novos objectos mais complexos. Todos os alunos manifestaram uma tendência para recorrer a processos algébricos, sempre que encontraram dificuldades em explicitar as suas concepções sobre determinados objectos.

No que se refere ao conceito de limite e à sua tradução simbólica os alunos continuam a manifestar uma maior facilidade em explicitar os processos envolvidos a partir da representação gráfica da função em estudo. Ao procurar explicar o significado de $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ os alunos que apresentaram um conceito imagem incipiente (5) apenas referem que quando o x se aproximar de 1, a função se aproxima de 2. Por vezes, esta verbalização parece apresentar contornos de ventriloquismo resultando de uma leitura directa da expressão dada, não conseguindo eles indicar espontaneamente o processo no próprio gráfico. No caso dos restantes alunos é possível constatar que explicitam o processo que relaciona os objectos com as imagens, ainda que com diferentes graus de desempenho, referindo-se quase sempre a vizinhanças dos pontos de abcissa 1 e ordenada 2, admitindo que quando os valores de x se aproximam de 1 as respectivas imagens se vão aproximar de 2. Vários alunos têm ainda a necessidade de explicitar o processo com base nos limites laterais. Como a função não está definida no ponto de abcissa 1, eles referem-se aos limites à esquerda e à direita do ponto acabando por constatar que são ambos iguais. É ainda de salientar que embora o valor do limite já fosse dado, vários alunos tiveram dificuldade em recorrer aos processos algébricos para justificar esse valor. A maior parte dos alunos (8) procurou utilizar a regra de Cauchy (abordada nas aulas) para levantar a indeterminação conseguindo desta forma justificar o resultado, tendo 3 recorrido à factorização do numerador e 5 usando outros processos de cálculo que não conduziram à solução pretendida.

No que se refere à representação simbólica do limite anterior os processos utilizados também apresentam algumas diferenças. Os alunos que manifestaram um conceito imagem incipiente (5) apenas verbalizaram partes da definição que, por vezes, representam simbolicamente, mas que não conseguem explicitar em termos de processos. Os restantes representam algumas partes da definição ou mesmo a sua escrita completa, evidenciando alguns processos subjacentes a essa representação. Quase todos escrevem as condições $|x-1|<\varepsilon$ e $|f(x)-2|<\delta$ referindo-as, por vezes, em termos de vizinhanças e explicitando o processo que traduz a forma como os objectos e as imagens se aproximam respectivamente de 1 e de 2. Para alguns destes alunos estas representações não assumem o papel de proceitos, faltando alguma interiorização e condensação dos processos respectivos. Os alunos, que apresentam uma tradução simbólica completa do limite anterior, revelaram alguma dificuldade em explicitar os processos subjacentes à utilização dos quantificadores, pelo que esta representação não tem para nenhum deles o estatuto de objecto matemático.

No que se refere ao conceito de derivada os processos utilizados também variam de acordo com o conceito imagem manifestado. Para os alunos que apresentaram um conceito imagem incipiente (6) os processos que evidenciam estão relacionados com o uso que pode ser dado ao conceito. Referem-se ao cálculo de extremos ou a propriedades físicas dos movimentos. Quase todos eles relacionam o conceito com o declive da recta tangente ao gráfico num ponto, mas esta afirmação não passa de um fenómeno de ventriloquismo, pois quando se procura o significado geométrico da afirmação nenhum deles consegue explicitá-lo.

Os alunos que apresentaram um conceito imagem instrumental (3) também estabeleceram o mesmo tipo de relação, (a derivada como o declive da recta tangente ao gráfico no ponto) referindo-se, no entanto, à razão incremental como forma de representar o declive da recta secante ao gráfico. Neste caso também não conseguiram explicitar o processo geométrico que conduziu à recta tangente e consequentemente à definição do conceito.

Apenas 6 alunos evidenciam este processo (os que apresentaram um conceito imagem relacional) representando a definição do conceito correctamente, embora, para alguns deles, pareça ainda não se ter dado a reificação do mesmo. Eles conseguem referir o processo mostrando que o mesmo está interiorizado e, por vezes, condensado, mas para explicitar o conceito ainda é necessário percorrer os vários passos. Estes alunos tiveram dificuldade em descapsular o conceito para referir os processos e objectos subjacentes.

No que se refere ao teorema de Lagrange o estabelecimento do seu enunciado apenas foi conseguido parcialmente por 4 alunos. Ao pretender explicitar a tese do teorema os alunos mostraram ser capazes de fazer uma interpretação geométrica da mesma, representando a recta secante ao gráfico traduzida na expressão pela razão incremental e determinando em seguida o ponto c como o ponto onde a recta tangente ao gráfico é paralela à anterior. Este processo parece ter sido interiorizado e condensado por estes alunos embora, por vezes, não pareça estar reificado, pois têm tendência para representar primeiro a abcissa do ponto c e só depois traçar a recta tangente "obrigando-a" a ser paralela à que é definida pela razão incremental definida na tese do teorema. A aplicação do teorema a um caso concreto revela sobretudo a grande dificuldade que os alunos apresentam quando realizam processos algébricos que envolvem a função módulo. Apenas um aluno aplica o teorema para provar que $|sen(\theta)-sen(\alpha)|\leq|\theta-\alpha|, \quad \forall\theta,\alpha\in R$, explicitando os processos algébricos que conduzem ao resultado. A maior parte dá pouca relevância às hipóteses do teorema, referindo-as apenas quando tal lhes é solicitado. Esta abordagem parece ser condicionada pelo facto de, na maior parte das situações em que foi pedido para utilizar o teorema, as hipóteses serem sempre verificadas. O desempenho na aplicação da função módulo à tese do teorema e o estabelecimento da desigualdade final envolvem processos que, a maioria dos alunos, não consegue explicitar, sendo a principal fonte de problemas a manipulação da função módulo.

No caso do conceito de sucessão o recurso aos processos para o explicitar também vai evoluindo de acordo com os conceitos imagem manifestados. Os alunos que apresentam um conceito imagem incipiente (4), além de utilizarem objectos bastante elementares para a formação do conceito, também usam processos elementares. Recorrem, por vezes, ao cálculo dos termos de algumas sucessões que servem como protótipos, representando-os graficamente. Estas representações gráficas são, algumas vezes, confundidas com outras representações esquemáticas que não traduzem o conceito. Os alunos que apresentam um conceito imagem instrumental (6) também recorrem frequentemente a processos de cálculo de termos de sucessões e à sua representação algébrica. Neste caso é possível encontrar alguns processos já interiorizados que lhes permitem referir-se a sucessões concretas monótonas ou limitadas, por exemplo, sem as representar graficamente. Os alunos que manifestaram um conceito imagem relacional (5) revelam uma concepção próxima da estrutural que foi ensinada nas aulas. Eles recorrem a vários protótipos de sucessões representados essencialmente pelo seu termo geral para explicitar o conceito e as suas propriedades, evidenciando sempre que solicitado os processos subjacentes, nomeadamente, referindo o tipo de correspondência entre os termos e as ordens.

No que se refere ao conceito de infinitamente grande, os processos usados também são diferenciados consoante o nível de conceito imagem manifestado. No caso dos alunos que apresentaram um conceito imagem incipiente (5), a tradução simbólica não é conseguida por nenhum deles, não sendo possível assim identificar qualquer processo associado a essa tradução. Depois de confrontados com a definição e ao pretender aplicá-la ao caso da sucessão $u_n = 3n + 2$ definida pela representação gráfica dos primeiros termos, foi possível identificar alguns processos. Alguns alunos recorrem a processos algébricos para encontrar a ordem a partir da qual os termos são maiores que um dado valor, enquanto que outros estabelecem uma relação entre os termos e as ordens, indicando no gráfico essa relação. Neste processo as ordens são quase sempre identificadas com os naturais, sendo o parâmetro p da definição difícil de concretizar. Mesmo assim eles indicam naturais a partir dos quais os termos ultrapassam determinados valores. Para os alunos que apresentam um conceito imagem instrumental (8) a tradução simbólica só é conseguida parcialmente e os processos mais utilizados baseiam-se no recurso à memória visual, representando alguns dos símbolos de que se recordam. Na concretização da definição, com base no caso concreto já apresentado acima, continua a verificar-se o recurso a processos algébricos, por vezes conjugados com a abordagem gráfica. Alguns alunos identificam a posição de alguns dos símbolos L, n, p, no gráfico e com base no tipo de correspondência acabam por estabelecer relações entre eles. O parâmetro p continua a ser o símbolo mais difícil de caracterizar. Na situação em que os alunos manifestam um conceito imagem relacional (2) a definição simbólica é estabelecida a partir da sua memória visual. Embora por vezes a sua escrita não corresponda à definição formal abordada nas aulas eles acabam por a completar quando explicitam o significado dos símbolos escritos. Nesta explicitação é possível aceder a alguns processos donde ressalta o facto de os termos ultrapassarem qualquer valor, por maior que este seja, verificando-se isto depois de uma dada ordem que é estabelecida. Ao aplicar a definição ao caso concreto anterior, estes alunos identificam o papel dos vários símbolos da definição, estabelecendo o significado da condição $n>p$ no próprio gráfico. Os vários processos subjacentes ao conceito podem ser acedidos a partir da definição simbólica o que deixa antever a capacidade destes alunos em extrair significado da definição, tal como refere Pinto (1998).

No conceito de sucessão convergente também é possível referir os processos utilizados pelos alunos consoante o nível de conceito imagem que foi identificado. Os alunos que apresentam um conceito imagem incipiente (5), ao pretender fazer a tradução simbólica do conceito, usam como estratégia estabelecer uma comparação entre este conceito e o de infinitamente grande estudado anteriormente. Todos eles revelam dificuldades em representar simbolicamente a relação de proximidade entre os termos e o valor do limite. As noções de vizinhança ou distância são sugeridas e de difícil representação simbólica para estes alunos. Os processos algébricos continuam a prevalecer quando se procura concretizar a definição. Quando na presença de um esboço gráfico alguns alunos indicam as ordens a partir das quais os termos estão numa dada vizinhança dada, mas quando se pretende fazer uma generalização, onde a ordem depende da amplitude de uma vizinhança sem que esta seja concretizada, o seu desempenho é bastante reduzido, sendo os procedimentos algébricos executados sem que lhe seja atribuído o significado pretendido. Para os alunos que apresentam um conceito imagem instrumental (7), a tradução simbólica continua a ser realizada por comparação com a de infinitamente grande, embora estes alunos já relacionem a proximidade entre os termos e o limite com a noção de distância ou de vizinhança. A escrita simbólica desta parte da definição ainda parece assentar na memória visual dos alunos, pois revela-se difícil de explicar em termos de processos. A capacidade de concretizar a definição num esboço gráfico dado é significativa, sendo a representação da vizinhança do limite determinante no desempenho, mas ainda há alguma dificuldade em trabalhar com exemplos onde o raio da vizinhança toma um valor genérico. Nesta situação os alunos continuam a realizar procedimentos de cálculo que não conseguem concluir por não compreenderem o alcance na definição simbólica.

No caso em que os alunos apresentam um conceito imagem relacional (3), a tradução simbólica de sucessão convergente, embora por vezes seja escrita com o apoio da representação de infinitamente grande, é utilizada com compreensão. A relação de proximidade entre os termos e o limite é explicitada com base em esquemas gráficos traduzidos em termos de vizinhanças ou módulos. Estas representações estão interiorizadas e condensadas, explicitando estes alunos os processos subjacentes quando necessário. Assim, eles são capazes de aplicar a definição a casos concretos, baseados em representações gráficas, bem como em situações mais genéricas onde o raio da vizinhança pode ser dado por um parâmetro.

2.3. Tradução entre representações

A tradução entre as diferentes representações de um mesmo conceito que um aluno é capaz de realizar podem ser utilizadas como indicador da sua compreensão do mesmo. Estas representações deveriam ser encaradas como objectos matemáticos para que as relações que se estabelecem ao fazer a tradução fossem bastante ricas e contribuíssem para uma melhor compreensão do conceito.

O que se verificou nesta investigação é que por vezes as representações entre as quais é feita a tradução não são compreendidas como objectos. Algumas dessas representações estão ainda no domínio dos processos ou mesmo dos procedimentos. É o que se passa no caso do conceito de função com os alunos que manifestaram um conceito imagem incipiente (4). Eles referem-se várias vezes à expressão algébrica ou ao gráfico para explicitar o conceito, mas têm dificuldades na passagem duma representação para a outra. Quando concretizam a representação algébrica e procuram encontrar a respectiva representação gráfica desenham gráficos desajustados do gráfico expectável dessa mesma expressão. Por vezes as traduções são feitas com base em representações que fazem apelo à sua memória visual. Por exemplo, para explicitar o conceito de função limitada, referem-se à função seno, como estando limitada entre -1 e 1, sem fazer qualquer esboço gráfico desta. No entanto esta capacidade de visualização parece estar limitada a determinados protótipos de gráficos e quando se procura que essa tradução seja explicitada em termos dos processos subjacentes o desempenho baixa significativamente. Os alunos são capazes de esboçar um gráfico de uma função não injectiva, normalmente uma parábola, mas não conseguem explicar por que é que ela não pode ser invertível.

Os alunos que manifestaram um conceito imagem instrumental (4) também apresentam traduções entre representações próximas das referidas anteriormente. Eles continuam a privilegiar traduções entre a representação algébrica e gráfica de funções, usando como exemplos funções afins e quadráticas. Estas representações continuam a ser usadas com base numa forte componente imagética que lhe permite, por vezes, passar de uma representação para outra. Quando se pretende evidenciar os processos que estão na base dessa tradução o desempenho baixa significativamente. É assim possível constatar a existência de uma variedade de representações sendo notória a dificuldade na tradução entre elas.

No caso dos alunos que apresentaram um conceito imagem relacional (7) também é possível destacar as representações algébrica e gráfica como sendo aquelas onde predomina a tradução. Os alunos encaram no entanto estas representações como objectos o que lhe permite explicitar essa tradução em termos de processos, manifestando desta forma uma compreensão mais profunda do conceito de função. Nalguns casos os alunos referem a tradução entre a representação algébrica e gráfica usando apenas a sua memória visual, que lhe permite caracterizar essa tradução em termos dos processos envolvidos e sem necessitar de esboçar qualquer gráfico.

A tradução simbólica do conceito de limite também apresenta diferentes graus de consecução consoante os tipos de conceito imagem manifestados pelos alunos. Os que apresentam um conceito imagem incipiente (5) não conseguem realizar qualquer tradução entre representações. Mesmo quando são referidas as noções de vizinhança ou distância estes alunos não conseguem fazer a sua tradução simbólica. Já os alunos que manifestaram um conceito imagem instrumental (6) fazem uma tradução simbólica de algumas das componentes da definição. Verbalizam a noção de proximidade entre os objectos e o ponto no qual se pretende calcular o limite, bem como o mesmo tipo de relação entre as imagens e o valor do limite, e traduzem estas relações com base na noção de vizinhança ou como o módulo da distância entre ambos. Estas representações simbólicas têm um carácter predominantemente operacional e a passagem duma para a outra (da noção de vizinhança para o módulo ou vice-versa) não parece ter sido ainda convenientemente interiorizada e condensada. No caso dos alunos que apresentam um conceito imagem relacional (4) é possível encontrar uma tradução simbólica do conceito mais efectiva, também ela feita a partir da representação gráfica. As representações do módulo da diferença entre elementos do domínio ou contradomínio e das vizinhanças referidas acima já apresentam características que nos permitem considerar tratar-se de objectos reificados, sendo a tradução entre ambas realizada com sucesso. Esta capacidade de lidar com estas representações faz com que estes alunos completem a definição simbólica recorrendo ao uso dos quantificadores. Esta tradução que resulta na escrita de definição simbólica do conceito apresenta, no entanto, algumas características de cariz operacional que resulta da explicitação do papel dos quantificadores. Na sua utilização os alunos parecem centrar-se apenas no domínio dos processos não tendo sido observada a sua capsulação.

A representação algébrica do conceito de derivada revelou-se de difícil compreensão para a maior parte dos alunos do estudo. Os que apresentaram um conceito imagem incipiente (6) revelaram ser incapazes de aceder a esta representação, pelo que as traduções que fazem são referentes a objectos bastante elementares, sobre os quais é possível realizar processos, mas que por si só não traduzem o conceito do modo esperado neste nível de ensino. Os restantes alunos acederam a esta representação ainda que com diferentes níveis de desempenho. Os que apresentaram um conceito imagem instrumental (3) mostraram algumas dificuldades em explicitar o significado desta representação, pelo que as traduções entre as representações ligadas ao conceito são pouco significativas. Já os alunos que mostraram possuir um conceito imagem relacional (6) estabelecem uma relação directa entre a representação algébrica e a gráfica do conceito, evidenciando assim uma concepção estrutural deste, traduzida com base numa interpretação geométrica: o declive da recta tangente ao gráfico no ponto dado.

O enunciado do teorema de Lagrange e a sua aplicação a um caso concreto também se revelou uma tarefa bastante árdua para os alunos. Assim, os que apresentaram um conceito imagem incipiente (7) não foram capazes de estabelecer o enunciado do teorema, tendo apenas referido algumas das suas componentes de forma isolada. A representação do enunciado foi sempre estabelecida com a ajuda do entrevistador revelando-se bastante elementares as verbalizações que os alunos conseguiram fazer. Estas verbalizações têm por base o recurso a objectos demasiado elementares para o estabelecimento do enunciado do teorema. Quando na posse do enunciado do teorema estes alunos continuam a não estabelecer uma relação entre este e a sua interpretação geométrica. Quando se pretende aplicar o teorema a um caso concreto a relação entre o enunciado do problema e o do teorema continua a ser bastante fraca, conseguindo estes alunos apenas traduzir alguns dos processos envolvidos. Os alunos que apresentaram um conceito imagem instrumental (4) manifestaram concepções próximas dos anteriores. Apenas conseguiram estabelecer partes do enunciado do teorema e as traduções entre esta representação e a correspondente interpretação geométrica também se revelaram bastante incompletas, correspondendo sobretudo à identificação de alguns dos processos envolvidos. Ao aplicar o teorema ao caso concreto dado, as traduções feitas entre ambas as representações têm um carácter essencialmente processual.

Os alunos que revelaram um conceito imagem relacional (4) estabeleceram o enunciado do teorema fazendo a tradução entre este e a respectiva interpretação geométrica. Quando se pretende aplicar o teorema a um caso concreto eles relacionam o enunciado do problema com o teorema manifestando, no entanto, algumas dificuldades quando se trata de traduzir as propriedades da função módulo.

No caso do conceito de sucessão a tradução entre representações também apresenta características diferenciadas consoante o nível de conceito imagem manifestado. Para os alunos que revelaram um conceito imagem incipiente (4) apenas são realizadas traduções entre representações bastante elementares. Entre elas podemos destacar a tradução entre a representação algébrica e gráfica, que nem sempre é realizada com sucesso e que é feita essencialmente com base em processos algébricos. Os alunos calculam alguns termos que posteriormente representam num esboço gráfico, esboço este que nem sempre reflecte o tipo de relação entre os objectos e as imagens. Os alunos que apresentaram um conceito imagem instrumental (6) também privilegiam a tradução entre a representação algébrica e gráfica, embora coloquem menor ênfase nos processos algébricos. Por vezes caracterizam o comportamento dos termos da sucessão partindo da sua representação algébrica, sem precisar de recorrer à representação gráfica e utilizam essas representações como protótipos. Estas representações são no entanto bastante limitadas, baseadas em termos gerais de sucessões como $\frac{1}{n}$, n ou n^2. Quando os alunos apresentam um conceito imagem relacional (5) utilizam uma maior variedade de representações deste tipo referindo-se à tradução entre estas e as respectivas representações gráficas de um modo mais abstracto. Raramente precisam de recorrer ao esboço gráfico, apresentando assim um entendimento do conceito próximo da concepção estrutural.

No caso do conceito de infinitamente grande, onde se pretendia que os alunos fizessem a sua tradução simbólica, também foi possível identificar diferentes tipos de traduções conforme o nível de conceito imagem dos alunos. Os que apresentam um conceito imagem incipiente (5), referem-se a representações bastante elementares, que não lhes permitem fazer a tradução simbólica pretendida. Mesmo quando confrontados com esta representação não são capazes de dar significado aos seus símbolos. A tentativa de aplicar esta representação a um caso concreto, traduzido graficamente, resultou numa tarefa bastante árdua onde as principais dificuldades se centraram na colocação dos parâmetros dados no gráfico. Nesta situação os alunos recorrem por vezes a processos algébricos e só posteriormente são capazes de interpretar a sua tradução no gráfico. Os alunos que manifestaram um conceito imagem instrumental (8) traduziram simbolicamente algumas partes do conceito, nomeadamente o facto de não ser possível limitar o crescimento dos termos da sucessão. Por vezes algumas partes desta representação são concebidas com recurso à memória visual, sendo o papel dos quantificadores o que mais dificuldades levanta. Ao tentar aplicar a representação simbólica a um caso concreto, os alunos centram-se na posição que os parâmetros devem ocupar nos eixos, não conseguindo explicitar qual o papel dos quantificadores. Os alunos que manifestaram um conceito imagem relacional (2) traduziram simbolicamente o conceito, embora, por vezes, essa tradução seja apenas verbal e difícil de representar simbolicamente. Estes alunos explicitam o papel dos vários símbolos quando fazem a tradução da representação simbólica para a gráfica aplicada ao caso concreto, sendo o papel dos quantificadores aquele onde revelam mais dificuldades. Em nenhum dos casos foi possível obter a tradução simbólica do conceito com o nível de generalidade com que o mesmo foi abordado nas aulas.

No que se refere ao conceito de sucessão convergente a tradução entre representações apresenta características semelhantes ao de infinitamente grande. Ao traduzir simbolicamente o conceito, quase todos os alunos recorrem à representação simbólica de infinitamente grande para escrever a primeira parte da definição de sucessão convergente. Para os alunos que manifestaram um conceito imagem incipiente (5), a tradução simbólica da relação de proximidade entre os termos da sucessão e o limite apenas foi efectuada com a ajuda do entrevistador. A explicitação do papel dos vários parâmetros aplicados a um caso concreto, representado graficamente, também se revelou uma tarefa bastante árdua que por vezes foi ultrapassada recorrendo a processos algébricos. No caso dos alunos que apresentaram um conceito imagem instrumental (7) foi possível fazer a tradução simbólica da proximidade dos termos da sucessão ao limite, sendo representada pelo módulo da diferença entre ambos ou pela noção de vizinhança. Esta tradução apresenta no entanto um cariz predominantemente operacional, mas que permite um desempenho satisfatório quando se pretende explicitar o papel dos símbolos aplicados a um caso concreto. A compreensão da tradução simbólica não é no entanto completa, sendo difícil de explicitar o papel dos quantificadores. Apenas os alunos que revelaram possuir um conceito imagem relacional (3), estabeleceram esse papel. Além de fazerem uma tradução simbólica do conceito bastante próxima da utilizada nas aulas, explicitaram a forma como os vários parâmetros se relacionam quando aplicada ao caso concreto. Para estes alunos a tradução simbólica do conceito é quase sempre apoiada por uma forte representação baseada em esquemas gráficos significativos para a tradução pretendida.

2.4. Propriedades

Ao procurar estabelecer a compreensão dos conceitos abordados, os alunos recorreram a várias propriedades que lhe podem ser associadas. Por vezes elas são referidas pelo próprio entrevistador como forma de caracterizar mais profundamente o conceito imagem dos alunos.

No caso do conceito de função as principais propriedades evocadas prendem-se com a monotonia, a injectividade, a invertibilidade e a noção de função limitada. Estas propriedades são quase sempre explicitadas com base nalgumas das suas representações. Por exemplo quando se referem à monotonia ou às funções limitadas, a maior parte dos alunos recorre a esboços gráficos ou a expressões algébricas conseguindo explicitar o comportamento da função que caracteriza essas mesmas propriedades. No caso de propriedades como a injectividade e a invertibilidade os alunos recorrem preferencialmente às representações algébrica e gráfica e o seu desempenho ao explicitá-las baixa consideravelmente. A maior parte dos alunos tem dificuldade em descapsular estas propriedades, nomeadamente no que se refere à relação entre os objectos e as imagens. Neste sentido é possível encontrar propriedades referidas com base em fenómenos de ventriloquismo e memorização, consistindo numa verbalização correcta das mesmas, que os alunos não conseguem explicitar em termos dos processos que lhe estão subjacentes. Embora o ensino pressuponha que estas propriedades possam ser traduzidas simbolicamente, nenhum aluno as referiu com esse nível de generalidade. As concepções que eles apresentam centram-se essencialmente em abordagens operacionais, onde a correspondência unívoca que se estabelece dos objectos para as imagens se revela uma propriedade difícil de capsular.

No que se refere ao conceito de limite, quando ao alunos apresentam um conceito imagem incipiente (5) apenas conseguem verbalizar a relação de proximidade entre os objectos e o ponto para o qual a função está a tender, sendo a relação entre as imagens e o valor do limite por vezes difícil de estabelecer. Estas propriedades elementares apenas são estabelecidas com base numa representação gráfica, de modo operacional, e nunca são representadas simbolicamente em termos de vizinhanças ou módulos. Os alunos que apresentam um conceito imagem instrumental (6) apresentam, tal como os anteriores, verbalizações que traduzem a proximidade entre os objectos e o ponto onde se calcula o limite e entre as imagens e o valor do limite. Estas relações de proximidade são explicitadas, revelando alguma interiorização dos procedimentos o que permite que os alunos as referiram em termos de vizinhanças ou como representando distâncias expressas através do módulo de uma diferença. Os parâmetros que traduzem o raio das vizinhanças são representados sem que os alunos façam uma caracterização pormenorizada do seu papel. Os alunos que apresentaram um conceito imagem relacional (4) também usaram preferencialmente a representação gráfica da função verbalizando correctamente o conceito. Esta verbalização permite-lhes estabelecer as vizinhanças quer do ponto para o qual a função tende, quer do limite, sendo estas encaradas como proceitos. Desta forma eles traduzem simbolicamente o conceito, ainda que o papel dos quantificadores seja estabelecido com base em procedimentos operacionais. O domínio da representação simbólica do conceito pode assim ser considerada como uma propriedade que estes alunos conseguem utilizar do ponto de vista operacional.

Ao procurar estabelecer o conceito de derivada, os alunos recorrem a propriedades que variam de acordo com o conceito imagem manifestado. Os que apresentam um conceito imagem incipiente (6) referem-se quase sempre a propriedades bastante elementares relacionadas com os usos do conceito, com a existência de limite da função no ponto ou mesmo com a sua continuidade. Alguns alunos relacionam a derivada com o declive da recta tangente ao gráfico no ponto, mas esta propriedade apenas é expressa com contornos de ventriloquismo, pois não conseguem descapsular tal afirmação. Todos os alunos que apresentam um conceito imagem instrumental (3) verbalizam a derivada como declive da recta tangente ainda que esta afirmação seja difícil de descapsular. Por vezes eles também referem a expressão algébrica da derivada, representando-a correctamente, mas quando se pretende que explicitem o seu significado demonstram falta de interiorização e condensação dos processos envolvidos. Para os alunos que revelaram possuir um conceito imagem relacional (6) a expressão algébrica que define o conceito representa um objecto matemático, e a noção de razão incremental tornou-se numa das propriedades fundamentais que baseia a sua representação. Estes alunos referem-se ainda à derivada como uma propriedade geométrica que se traduz pelo declive da recta tangente ao gráfico no ponto dado, relacionando esta propriedade com a representação algébrica anterior.

No caso do teorema de Lagrange há um conjunto de propriedades relacionadas com o seu enunciado que os alunos utilizam de forma diversa. Os que apresentam um conceito imagem incipiente (7) apenas referem algumas propriedades elementares que ajudam a estruturar o enunciado, mas que por si só não lhe conferem a estrutura de teorema. Por vezes referem-se à continuidade e diferenciabilidade de uma função num intervalo e alguns consideram a razão incremental como representando um declive. As propriedades dos módulos são utilizadas com base na memorização, sendo a sua explicitação uma tarefa bastante árdua. Os alunos que manifestaram um conceito imagem instrumental (4) também revelaram não serem capazes de recordar as condições do teorema. Continuam a referir propriedades elementares, como a continuidade, diferenciabilidade ou a razão incremental, mas sem estabelecer as hipóteses e a tese do teorema. As propriedades dos módulos são usadas com algumas dificuldades, sendo a manipulação de expressões com módulos desempenhada com bastante dificuldade. No caso dos alunos com um conceito imagem relacional (4), o enunciado do teorema foi estabelecido com base numa abordagem operacional. As hipóteses do teorema são manipuladas adequadamente, baseadas nas propriedades das funções envolvidas e a sua tese também é estabelecida com base nas propriedades das suas componentes, nomeadamente a relação que há entre a derivada no ponto e a razão incremental. As operações com expressões que envolvem módulos são ainda tarefas de difícil concretização, deixando antever a falta de interiorização e condensação das propriedades da função módulo.

Para o conceito de sucessão as propriedades que os alunos evocam variam consoante os conceitos imagem manifestados. Os que apresentam um conceito imagem incipiente (4) referem-se sobretudo a propriedades elementares para explicitar o conceito. Usam quase sempre o conjunto dos naturais como forma de referir a sucessão, usando no entanto outras propriedades, como a monotonia ou o conceito de sucessão limitada, ainda que com base numa abordagem predominantemente imagética e operacional. Os alunos que apresentam um conceito imagem instrumental (6) referem-se à sucessão com base na existência de uma expressão, que lhe permite referir o tipo de correspondência entre os naturais e os termos da sucessão. Esta correspondência tem um carácter essencialmente operacional, sendo acedida através da expressão que representa a sucessão. Outras propriedades como a monotonia e a noção de sucessão limitada também são utilizadas de modo operacional, referindo-se quase sempre aos processos para explicitar o conceito. Para os alunos que manifestaram um conceito imagem relacional (5) a sucessão é encarada de um modo estrutural, gozando das mesmas propriedades que as funções, ou então é explicitada em termos dos processos que relacionam as ordens e os termos, processos estes que já estão interiorizados e condensados. Outras propriedades como a monotonia e a noção de sucessão limitada também são por vezes abordadas com base numa concepção estrutural, onde é possível proceder à sua descapsulação para evidenciar os processos subjacentes.

Na abordagem ao conceito de infinitamente grande, onde se pretendia que os alunos conseguissem traduzir simbolicamente o conceito, foi possível observar o uso de algumas propriedades relacionadas com o conceito. Os alunos que manifestaram um conceito imagem incipiente (5), não fizeram qualquer tradução simbólica, pelo que as propriedades usadas são de carácter elementar. Eles referem essencialmente termos gerais de sucessões de referência, como por exemplo n, n^2, cuja principal propriedade reside na forma como os termos se comportam (vão sempre crescendo dando origem a sucessões estritamente crescentes). Outras propriedades que usam dizem respeito ao limite, considerando eles que não é possível limitar os termos deste tipo de sucessão. No caso dos alunos que manifestaram um conceito imagem instrumental (8) é possível observar o recurso ao mesmo tipo de propriedades que os alunos da categoria anterior, embora estes façam a tradução simbólica de partes do conceito. Recorrem essencialmente à sua memória visual ao fazer a tradução simbólica, mostrando alguma interiorização dos processos que conduzem ao facto de não ser possível majorar os termos da sucessão. Esta constatação assume um papel importante na tradução simbólica do conceito. Os alunos que manifestaram um conceito imagem relacional (2) não revelam recorrer a propriedades diferentes das referidas pelos restantes.

No caso do conceito de sucessão convergente, tal como no de infinitamente grande, as propriedades utilizadas pelos alunos têm um carácter mais ou menos elementar, se considerarmos que se trata de conceitos relacionados com a matemática avançada. Os alunos continuam de um modo geral a recorrer a termos gerais de sucessões de referência, como a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$, ou a esboços gráficos que traduzem sucessões com limite finito. Embora esta seja uma abordagem relevante, mostra-se limitada pelo facto de os alunos terem um leque de sucessões de referência bastante limitado. A convergência é uma propriedade onde os termos se aproximam de um dado valor, não podendo ser coincidentes com esse valor para alguns alunos e essa proximidade é traduzida quase sempre de modo operacional. Apenas os alunos que manifestaram um conceito imagem relacional (3) referem esta relação como um proceito, fazendo a sua tradução simbólica ao mesmo tempo que explicitam os processos subjacentes a esta representação. Em nenhum dos casos a representação simbólica do conceito pode ser considerada como um objecto matemático e desta forma ser entendida como uma das propriedades das sucessões.

2.5. Pensamento proceptual

O pensamento proceptual, tal como é definido por Gray e Tall (1994), refere-se à combinação de dois tipos de pensamento: o processual e o conceptual. O pensamento processual está relacionado com aspectos relativos a procedimentos concretos relacionados com o conceito em estudo, enquanto que o conceptual diz respeito à representação do mesmo objecto usando símbolos diferentes que culminam num mesmo proceito. É o desenvolvimento deste tipo de pensamento que se pretende que os alunos atinjam de modo a proporcionar uma efectiva compreensão dos conceitos. Apresenta-se de seguida algumas das manifestações deste tipo de pensamento que foi possível observar na abordagem que foi feita pelos alunos a cada um dos conceitos estudados.

No caso do conceito de função cerca de metade dos alunos, os que revelam um conceito imagem incipiente e instrumental (8), apresenta um desenvolvimento mais acentuado da componente processual deste pensamento. Eles referem-se ao conceito baseando-se essencialmente no desenvolvimento de processos, sem que os mesmos sejam pensados como proceitos. A componente conceptual do pensamento proceptual apenas se manifesta quando são referidos objectos bastante elementares, que por si só não representam o conceito. Para os restantes alunos continua a verificar-se uma certa preponderância para o uso da vertente processual, embora já seja possível encontrar referências ao uso de alguns proceitos representativos do conceito. Considerando a generalidade com que o conceito foi ensinado podemos admitir que a componente conceptual deste pensamento, que foi revelada pelos alunos, é ainda fraca e portanto o tipo de pensamento proceptual encontrado tem um cariz essencialmente processual.

Para o conceito de limite, onde se pretendia que os alunos conseguissem fazer a sua tradução simbólica, foi possível observar que a maior parte deles apenas consegue aceder à parte processual do pensamento proceptual. Os que apresentaram um conceito imagem incipiente só se referem aos processos enquanto que os que manifestaram um conceito imagem instrumental compactam alguns dos processos em representações simbólicas, ainda que estas não possam ser consideradas como proceitos. Os alunos que manifestaram um conceito imagem relacional (4) apresentam uma componente processual forte deste tipo de pensamento, ainda que alguns dos processos sejam representados simbolicamente e possam ser considerados como proceitos.

O tipo de pensamento proceptual dos alunos, no que se refere ao conceito de derivada, também varia conforme o tipo de conceito imagem. Os alunos que revelaram um conceito imagem incipiente (6) não explicitam o conceito para além da referência a alguns processos que lhe estão associados. O tipo de pensamento proceptual que manifestam assenta essencialmente na sua componente processual. Os que revelaram um conceito imagem instrumental (3) também manifestaram o uso preferencial de processos, embora representem algebricamente o conceito. Esta representação não é no entanto encarada por eles como um proceito, continuando a privilegiar a componente processual. Os alunos que revelaram um conceito imagem relacional (6), apresentam a expressão algébrica do conceito e ao mesmo tempo explicitaram o seu significado, pelo que a mesma pode ser considerada como um proceito. Desta forma podemos considerar que estes alunos são capazes de pensar sobre o conceito proceptualmente.

No caso do teorema de Lagrange, onde se pretende que os alunos estabeleçam o seu enunciado e posteriormente o apliquem a uma situação concreta, o tipo de pensamento proceptual envolvido é bastante variado. Os alunos que revelaram um conceito imagem incipiente ou instrumental (11) apenas referiram aspectos processuais do seu enunciado, acontecendo o mesmo quando procuram fazer a sua aplicação. Apenas a componente processual se destaca no seu pensamento proceptual. Já os alunos que revelaram um conceito imagem relacional, explicitaram o enunciado do teorema e fizeram a sua aplicação no caso concreto. Estes alunos pensam sobre o teorema proceptualmente, ainda que a componente processual se possa destacar nalgumas situações.

Tal como aconteceu no caso do conceito de função, os alunos que manifestaram um conceito imagem incipiente ou instrumental do conceito de sucessão (10) revelaram um pensamento proceptual dominado pela sua componente processual. A explicitação do conceito é feita quase sempre com base nos processos e procedimentos que o caracterizam, sendo a componente conceptual manifestada mais evidente na tradução de algumas propriedades que por si só não definem o conceito com o grau de generalidade com que este foi ensinado. Os alunos que manifestaram um conceito imagem relacional (5) revelam um pensamento proceptual onde as componentes processual e conceptual se apresentam mais equilibradas. Ao mesmo tempo que se referem ao conceito de um modo estruturado, com o estatuto de um objecto matemático, conseguem descapsulá-lo para aceder aos processos e objectos subjacentes. Este equilíbrio entre ambas as componentes apresenta no entanto uma tendência para privilegiar a componente processual.

No caso do conceito de infinitamente grande, onde se pretendia que os alunos utilizassem a sua representação simbólica como um proceito, foi possível identificar diferentes níveis de pensamento proceptual. A maioria dos alunos (13, que manifestaram um conceito imagem incipiente ou instrumental) revelaram um pensamento proceptual baseado essencialmente na sua componente processual. A tradução simbólica do conceito não é conseguida ou apenas é acedida de forma parcial. Os restantes alunos (2) apresentam uma tradução simbólica do conceito próxima da que foi abordada nas aulas, revelando uma interiorização e condensação dos vários processos, ainda que a fase da reificação não se manifeste de forma clara. Neste sentido é possível considerar que o pensamento proceptual destes alunos apresenta um equilíbrio entre ambas as componentes, podendo ainda encontrar-se uma tendência para aceder à componente processual.

O pensamento proceptual manifestado pelos alunos no caso do conceito de sucessão convergente apresenta diferentes níveis, consoante o desempenho dos alunos. Para os que apresentam um conceito imagem incipiente (5) o pensamento proceptual evidenciado centra-se essencialmente na sua componente processual. A tradução simbólica do conceito não é conseguida, sendo utilizados essencialmente processos relacionados com o conceito. Para os alunos que revelaram um conceito imagem instrumental (7) continua a estar presente uma componente processual forte, embora em algumas partes da representação simbólica seja possível identificar o uso de uma componente conceptual mais consistente. Os alunos que revelaram um conceito imagem relacional (3) são capazes de realizar a tradução simbólica da definição, considerando-a como um objecto matemático que são capazes de descapsular. Desta forma podemos considerar que manifestam um pensamento proceptual que assenta num equilíbrio entre as componentes processual e conceptual.

3. Desempenhos escolares típicos

Esta secção das conclusões pretende complementar a resposta ao terceiro objectivo proposto, caracterizar desempenhos escolares típicos de alguns alunos. No capítulo VIII procurou-se fazer uma análise horizontal do desempenho de alguns alunos nos vários tópicos estudados. A escolha de três alunos teve como principal objectivo mostrar uma certa diversidade no que diz respeito à compreensão dos conceitos, sendo todos eles alunos de sucesso relativamente à componente escolar. O José e a Sofia podem ser encarados como dois alunos típicos nos cursos em que estão inseridos, enquanto que a Susana surge como um caso que causa alguma perplexidade por não obedecer aos critérios que norteiam o processo de ensino e aprendizagem.

O José pode ser considerado como um *aluno típico de engenharia*, que consegue mostrar um desempenho satisfatório, baseado numa concepção operacional dos conceitos, apoiada por representações visuais fortes (gráficos e esquemas), mas sem manifestar uma compreensão relacional destes mesmos conceitos. Embora ele manifeste níveis de conceito imagem de carácter essencialmente instrumental, parece ser possível admitir que está na posse de recursos cognitivos que lhe permitem ter sucesso enquanto aluno de engenharia. Mesmo sem estar na posse de uma compreensão relacional dos conceitos é capaz de os abordar do ponto de vista operacional, identificando os processos e objectos subjacentes, resolvendo desta forma uma quantidade razoável dos problemas matemáticos que lhe são colocados. Esta abordagem coloca-nos perante o dilema de saber se no ensino dos conceitos matemáticos destes alunos deveremos privilegiar de igual modo a componente processual e estrutural ou se devemos abdicar da segunda em detrimento da primeira. De facto, para alguns destes alunos, a componente estrutural é de difícil compreensão e eles acabam por se revelar como alunos de sucesso baseados apenas numa compreensão organizada em termos de processos.

A Sofia apresenta-se como uma aluna de *sucesso em Matemática* que mostra uma compreensão relacional dos conceitos, revelando ser capaz de os aplicar em situações diversas. De facto ela apresenta níveis de conceito imagem predominantemente relacionais nos conceitos estudados, mostrando ser capaz de lidar com estes de modo estrutural e descapsulando-os sempre que é necessário aceder a uma abordagem processual. Ainda assim os conceitos mais abstractos, baseados em definições simbólicas, não se apresentam completamente reificados, o que deixa transparecer uma certa necessidade de reflexão sobre estes mesmos conceitos. Este é o tipo de aluno que se pode considerar desejável para um prosseguimento de estudos em Matemática, ainda que seja pouco usual encontrá-lo com regularidade na sala de aula.

A Susana revela-se um *caso paradoxal*, manifestando conceitos imagem de nível inferior (incipientes e instrumentais) mas que, no entanto, obteve um desempenho muito satisfatório nas avaliações (quantitativas) a que foi submetida, quer nesta disciplina quer noutras relacionadas com o curso de Matemática. Embora ela também seja uma aluna de sucesso, parece ser um caso atípico em termos de ensino e aprendizagem. Dada a discrepância que se verifica entre os conceitos imagem identificados e o seu desempenho escolar, parece ser relevante a sua inclusão neste grupo, como forma de questionamento acerca do papel da avaliação na efectiva compreensão dos conceitos.

4. Recomendações e implicações

Da realização do presente estudo decorrem algumas recomendações e implicações que podem ajudar a compreender e desenvolver os mecanismos que conduzam a uma aprendizagem mais efectiva dos conceitos matemáticos avançados. Estas recomendações e implicações têm por base os desempenhos manifestados pelos alunos e procuram evidenciar abordagens que possam contribuir para uma mais efectiva compreensão dos conceitos matemáticos. Elas situam-se essencialmente ao nível da compreensão dos conceitos e da forma como estes podem ser abordados pelo ensino, de modo a tornar a sua aprendizagem mais efectiva.

4.1. Implicações para o ensino

O desempenho manifestado pelos alunos na compreensão dos conceitos matemáticos abordados, conduz-nos a um conjunto de questões que devemos ter presentes quando pensamos no processo ensino–aprendizagem ao nível da matemática avançada. Uma das questões que se coloca está relacionada com o facto de os conceitos mais elementares não serem utilizados pelos alunos como objectos matemáticos, dificultando desta forma a construção de novos conceitos. De facto, conceitos como o de função, sucessão ou derivada, são usados pela maior parte dos alunos do ponto de vista operacional. Eles referem-se sobretudo a procedimentos e processos associados ao conceito, mas onde há uma fraca coordenação destes elementos com vista à formação de novos objectos mais eficazes para a sua compreensão. Desta forma os novos conceitos que o ensino se propõe reificar acabam por ser construídos com base na realização dos mesmos processos e procedimentos que estão na base dos conceitos mais elementares e que já deveriam ser objectos nesta nova construção.

Esta abordagem conduz a uma organização em hierarquia, onde os alunos para resolverem um problema de nível superior têm que recorrer a uma coordenação sequencial de processos bastante complexa e difícil de coordenar. Estas hierarquias acabam por colapsar devido à dificuldade em lidar com longas cadeias de processos e desta forma os conceitos acabam por ser representados por alguns desses mesmos processos, realizados fora do seu contexto e por vezes de forma arbitrária.

Uma segunda implicação, que decorre da anterior, está relacionada com o facto de se privilegiar uma abordagem estrutural dos conceitos no ensino superior. A implementação de uma concepção estrutural dos conceitos, abordando-os a partir da sua definição formal, causa algumas dificuldades em termos de compreensão. Esta abordagem pressupõe que os alunos consigam entender um novo objecto matemático partindo da sua definição para a descoberta dos processos e outros objectos que estão na sua base. A coordenação destes vários elementos torna-se bastante complexa quando alguns deles não estão presentes. Uma vez que os conceitos mais elementares não se encontram devidamente reificados, apenas é possível observar uma compreensão parcial do conceito pretendido que depende dos processos que são activados em cada situação. Favorece-se assim a ocorrência do fenómeno de compartimentação onde apenas são reveladas concepções parciais do conceito em estudo.

Outra questão que se coloca a partir dos resultados deste estudo está relacionada com o desempenho dos alunos na realização de processos algébricos. Embora o ensino e a avaliação das aprendizagens tenha incidido sobretudo na realização de processos de cálculo, os alunos continuam a manifestar grandes dificuldades na realização de procedimentos mais ou menos rotineiros, tais como o cálculo algébrico de limites, operações com funções envolvendo módulos, ou o cálculo de determinados pontos críticos das funções. Tal desempenho parece relacionar-se com o facto de haver uma tendência para memorizar os processos, em vez de os mesmos serem realizados com base na compreensão dos seus pressupostos.

Outra implicação que é possível retirar deste estudo para o ensino e a aprendizagem dos conceitos matemáticos mais avançados está relacionada com a capacidade de abstracção manifestada pelos alunos. Dado que a abordagem dos conceitos se centra numa concepção operacional dos mesmos, os alunos sentem grandes dificuldades quando se pretende que deixem de operar com objectos matemáticos concretos para passarem a operar com outros objectos mais abstractos que apenas são representados a partir da sua definição simbólica. É o caso das definições simbólicas de sucessão convergente, limite de uma função ou de infinitamente grande. Nestas situações eles tentam estabelecer relações com os casos concretos, privilegiando a concepção operacional envolvida no conceito e negligenciando o carácter mais abstracto que o conceito adquire, representado nos exemplos anteriores pelo papel desempenhado pelos quantificadores.

4.2. Recomendações para futuras investigações

Uma das questões que este estudo não aborda está relacionada com a compreensão dos conceitos quando os alunos terminam o ensino secundário. Será importante saber que tipo de conceitos imagem os alunos manifestam no final deste ciclo para poder avaliar sobre a sua permanência ou alteração quando os mesmos conceitos voltam a ser abordados do ponto de vista da matemática do superior. Neste estudo apenas conseguimos ter a segunda perspectiva, não se sabendo ao certo a que se deve o desempenho manifestado. Ele pode estar relacionado com uma alteração das suas concepções e representações preconizada pelo tipo de ensino mais formal ministrado no início do superior ou pode dever-se à compreensão dos conceitos no nível secundário que não suporta a transição para uma abordagem formal.

Outra questão prende-se com a utilização de diferentes representações, nomeadamente o recurso a representações gráficas. Os alunos manifestam uma grande tendência para recorrer a esboços gráficos quando se referem aos conceitos. Esta abordagem parece ser privilegiada no ensino secundário, tendo em atenção as orientações curriculares que são propostas. Ao fazer a transição para a matemática do superior esta orientação deixa de ser predominante, sendo o ensino baseado numa abordagem mais formal. Parece ser de interesse a realização de investigações que incidam sobre a utilização das tecnologias no ensino e aprendizagem dos conceitos mais avançados, de modo a poder estabelecer a sua influência na compreensão destes mesmos conceitos.

Uma outra questão que parece dever ser objecto de investigação prende-se com uma abordagem de ensino dos conceitos que privilegie inicialmente uma concepção operacional destes. Esta é a perspectiva defendida pelas várias teorias de aprendizagem, mas que tradicionalmente não encontra eco nas abordagens feitas em muitas das instituições de ensino superior. O tempo dispendido por uma abordagem deste tipo parece ser um dos factores que condicionam a sua implementação. Parece assim ser necessário proceder a trabalhos de investigação que revelem as potencialidades e deficiências deste tipo de ensino, sendo mesmo necessário estudar em simultâneo o que acontece ao nível do ensino secundário. Embora as recomendações metodológicas dos programas do secundário apontem neste sentido, é necessário caracterizar as práticas desenvolvidas nos anos terminais de ciclo para poder compreender com que grau de profundidade é que a concepção operacional prevalece sobre a estrutural e de que forma isso se traduz na compreensão dos conceitos estudados.

O próprio objecto de estudo nesta investigação, pode também ele ser alvo de futuras investigações. Dado que o espaço temporal em que se desenrola a investigação é bastante curto, não se pode prever de que forma os conceitos imagem observados evoluem ou regridem com o passar do tempo. Uma investigação mais prolongada no tempo poderá clarificar este ponto e trazer uma mais valia ao tema agora estudado.

Referências bibliográficas

Alibert, D. e Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Dordrecht: Kluwer.

Artigue, M. (1991). Analysis. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer.

Artigue, M. (1998). What can we learn from didactic research carried out at university level?, *On the Teaching and Learning of Mathematics at University Level (Pre-proceedings)* (pp. 9-15). Singapura: ICMI.

Bass, H. (1998). Research on university-level mathematics education: (Some of) what is need, and why?, *On the Teaching and Learning of Mathematics at University Level (Pre-proceedings)* (pp. 7-8). Singapura: ICMI.

Beth, E. W. e Piaget, J. (1961). *Épistémologie mathématique et psychologie*. Paris: Presses Universitaires de France.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Carpenter, T. P. e Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. Em E. Fennema e T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. e Steffe, L. P. (1983). The construtivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94.

Cornu, B. (1991). Limits. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Costa, A. F. (1986). A pesquisa de terreno em sociologia. Em A. S. Silva e J. M. Pinto (Eds.), *Metodologia das Ciências Sociais* (pp. 129-148). Lisboa: Edições Afrontamento.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingerdorf, K., Thomas, K. e Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Davis, R. B., e Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 281-303.

Diener, F. e Diener, M. (1995). Tutorial. Em F. Diener e M. Diener (Eds.), *Nonstandard analysis in practice* (pp. 1-19). Nice: Springer.

Domingos, A. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Em D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (2003). *Ed Dubinsky's Home Page*. [Acesso electrónico]. Disponível: http//trident.mcs.kent.edu/~edd/.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dordrecht: Kluwer.

Ghiglione, R. e Matalon, B. (1970). *Les enquêtes sociologiques, théories et pratiques*. Paris: Armand Colin.

Gray, E. e Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. Em F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteeenth Psychology of Mathematics Education Conference - PME XV* (Vol. 2, pp. 72-79). Assisi, Itália.

Gray, E. M. e Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-140.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Kluwer.

Herscovics, N. e Bergeron, J. C. (1984). A constructivist vs. formalist approach in the teaching of mathematics. Em B. Southwell e outros (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference of PME* (pp. 190-196). Sydney: University of Sydney.

Hiebert, J. e Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Howe, K. R. (2001). Qualitative educational research: the philosophical issues. Em V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching (4ª edição)* (pp. 201-208). Washington: American Educational Research Association.

Kantowski, M. G. (1978). The teaching experiment and Soviet studies of problem solving. Em L. L. Hatfield (Ed.), *Mathematical problem solving* (pp. 43-52). Columbus, Ohio: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdade, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and leraning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Lakoff, G., e Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.

Matos, J. M., e Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Patton, M. (1980). *Qualitative evaluation methods*. Beverly Hills: Sage.

Piaget, J. (1977). *O desenvolvimento do pensamento. Equilibração das estruturas cognitivas*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Piaget, J., e Gracia, R. (1987). *Psicogénese e história das ciências*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Pinto, M. (1998). *Students understanding of real analysis.* Tese doutoramento não publicada, University of Warwick, UK.

Pinto, M. M. F. e Tall, D. (2001). Following students' development in a traditional university analysis course. Em M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 57-64). Utreque - Holanda.

Schnotz, W. e Ballstaedt, S.-P. (1988). Teaching and testing for comprehension. Em T. Husén, T. N. Postlethwaite, B. R. Clark, e G. Neave (Eds.), *Education: The complete encyclopedia (CD-ROM)*. Oxford: Pergamon Press.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. Em J. C. Bergeron, N. Herscovics e C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference Psychology of Mathematics Education. PME-XI* (Vol. 3, pp. 162-169). Montreal.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. Em G. Vergnaud, J. Rogalski e M. Artigue (Eds.), *Actes de la 13éme Conference Internationale Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 151-158). Paris, France.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: On processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 59-84). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Sfard, A. e Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. Em M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching (3ª edição)* (pp. 3-36). Nova Yorque: Macmillan.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Londres: Flamer Press.

Skemp, R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Harmondsworth, England: Penguin Books.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.

Steen, L. A. (1998). Redefining university mathematics: The stealth campaign, *On the teaching and learning of mathematics at university level (Pre-proceedings)* (pp. 1-6). Singapura: ICMI.

Tall, D. (1977). Conflits and catastrophes in the learning of mathematics. *Mathematical Education for Teaching, 2*(4), 2-18.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. Em L. Meira e D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 61-75). Recife, Brasil.

Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. Em O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 111-118). Haifa, Israel.

Tall, D. (2003). Concept image and concept definition. Em *David Tall Home Page*. [Acesso electrónico]. Disponível: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html.

Tall, D. e Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Tall, D., Gray, E., Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. e Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*, 81-104.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology, 14*, 293-305.

Vinner, S. (1987). Continuous functions — Images and reasoning in college students. Em J. C. Bergeron, N. Herscovics e C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference Psychology of Mathematics Education. PME-XI* (Vol. 3, pp. 177-183). Montreal.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S. e Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 356-366.

Vinner, S., Hershkowitz, R. e Bruckheimer, M. (1981). Some cognitive factors as causes of mistakes in addition of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(70-76).

Vygotsky, L. S. (1988). *A formação social da mente. O desenvolvimento dos processos superiores*. S. Paulo: Martins Fontes.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action*. Hempstead: Harvester Wheatsheaf.

Anexos

Anexo 1

Situações da primeira entrevista relativas às sucessões

Situação 1

Colocar a seguinte questão:

Se tivesses que explicar a um colega teu o que era uma sucessão o que é que lhe dizias?

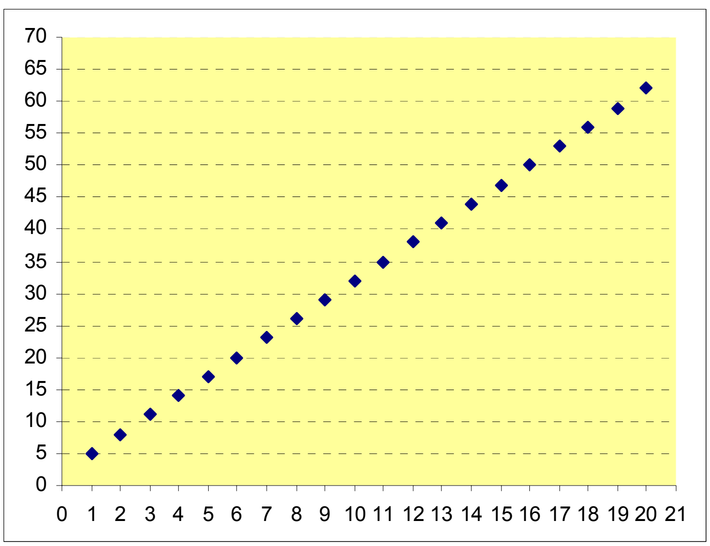
Situação 2

2.1. Colocar a seguinte questão:

O que significa para ti dizer que uma sucessão u_n tende para $+\infty$?   **Como escreverias isso simbolicamente?**

2.2. Após a escrita simbólica da definição de infinitamente grande apresentar a seguinte tarefa:

Considera a sucessão de termo geral $u_n = 3n+2$, cujo gráfico se encontra abaixo. O que podes dizer sobre o limite desta sucessão?



Consegues verificar se esta sucessão obedece à condição seguinte?

$$\forall L \in \mathrm{R}^+ \quad \exists \quad p \in N : n > p \Rightarrow u_n > L$$

Nota: Caso o aluno não consiga escrever a definição simbólica, apresentar-lhe esta parte da tarefa, relembrando-lhe que era esta a escrita pretendida.

Situação 3

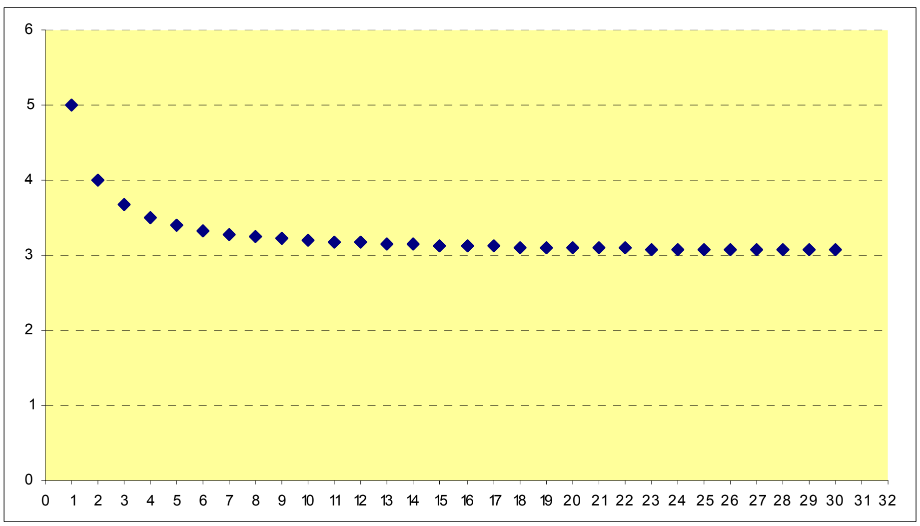
3.1. Colocar as seguintes questões:

O que significa para ti dizer que uma sucessão u_n tende para *a*?

Como escreverias isso simbolicamente?

3.2. Após a escrita simbólica da definição de sucessão convergente apresentar a seguinte tarefa:

Considera a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{3n+2}{n}$, cujo gráfico se encontra abaixo. O que podes dizer sobre o limite desta sucessão?



Consegues verificar se esta sucessão obedece à condição seguinte?

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in N : n > p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$

Situação 4

Colocar a seguinte questão:

O que consegues dizer sobre a convergência de uma sucessão constante (por exemplo $u_n = 2$). Será que ela obedece a alguma das definições anteriores?

Situação 5

5.1. Colocar a seguinte questão:

Provar por definição que $u_n = \frac{n+3}{n}$ **converge para 1.**

5.2. No caso de o aluno não conseguir realizar a tarefa proposta, fornecer-lhe a resolução seguinte, pedindo-lhe que explique os passos desta.

Provar que $u_n = \frac{n+3}{n}$ **converge para 1.**

Explica por palavras tuas cada um dos passos da demonstração abaixo:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in N : n > p \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in N : n > p \Rightarrow \left|\frac{n+3}{n} - 1\right| < \varepsilon .$$

Dado $\varepsilon > o$ qualquer, tem-se

$$\left|\frac{n+3}{n} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n+3-n}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow 3 < \varepsilon \text{n} \Leftrightarrow \text{n} > \frac{3}{\varepsilon}$$

$\therefore$ basta considerar $p = Int(\frac{3}{\varepsilon}) \in N$, tem-se $n > p \Rightarrow \left|\frac{n+3}{n} - 1\right| < \varepsilon$

c.q.d.

Anexo 2

Situações da segunda entrevista relativas às funções e à diferenciabilidade

Situação 1

Colocar a seguinte questão:

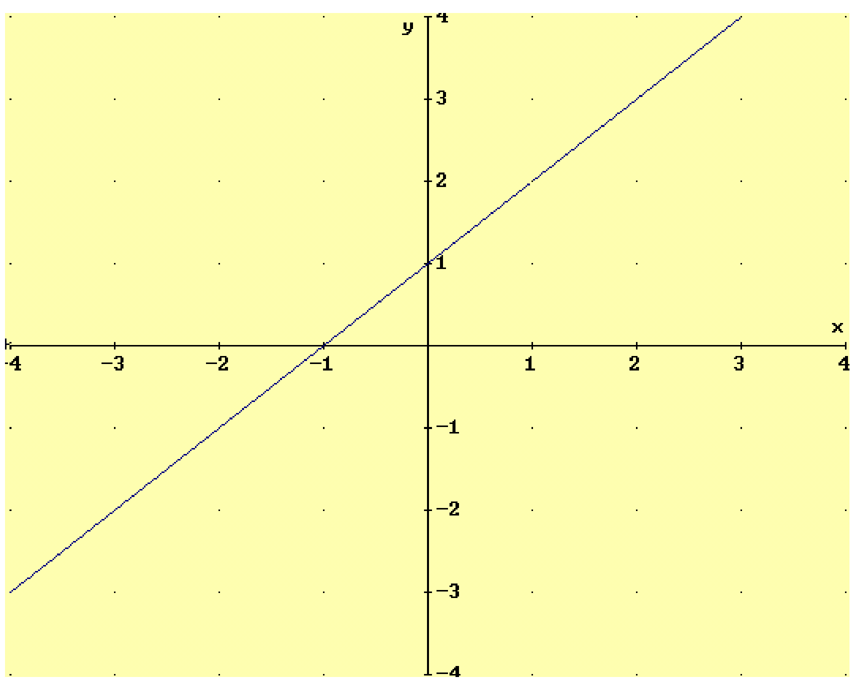
Se tivesses que explicar a um colega teu o que é uma função o que lhe dizias?

Situação 2

2.1. Colocar as seguintes questões:

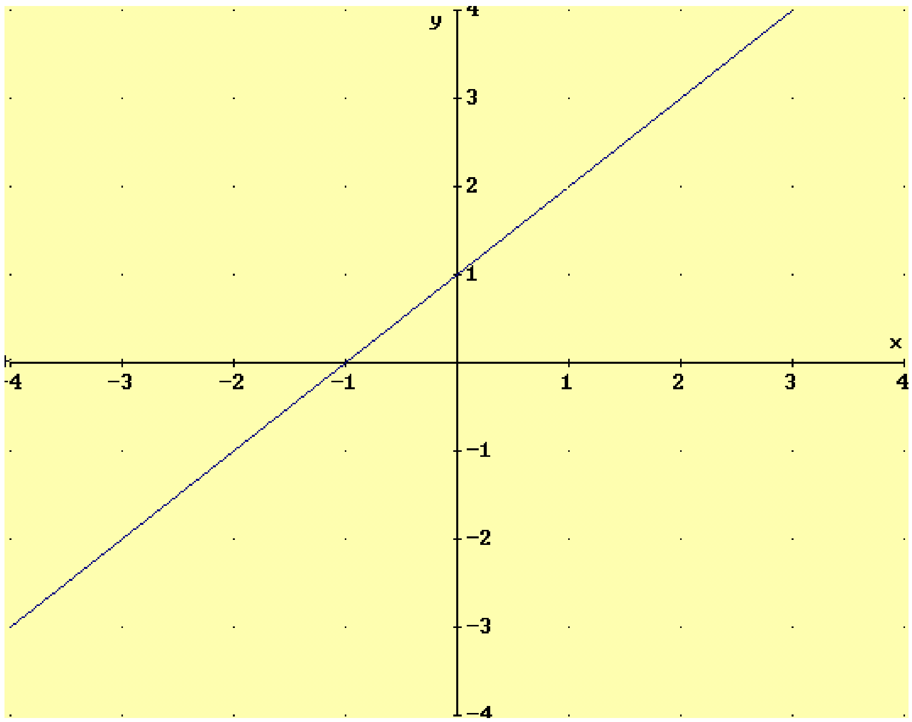
O que significa para ti dizer que $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=2$ **?** **Como podes escrever simbolicamente este limite?**

2.2. Caso o aluno não consiga chegar ao gráfico da função, mostrar-lhe o gráfico seguinte, pedindo-lhe para justificar se ele pode ou não representar a função dada no limite anterior:



2.3. No caso de o aluno não conseguir chegar ao gráfico da função nem à representação simbólica do limite anterior, fornecer-lhe ambos, tendo a tarefa proposta o aspecto seguinte:

Considera o gráfico da função anterior ($f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ **) abaixo.**



Explica, no gráfico, como podemos verificar a condição seguinte:

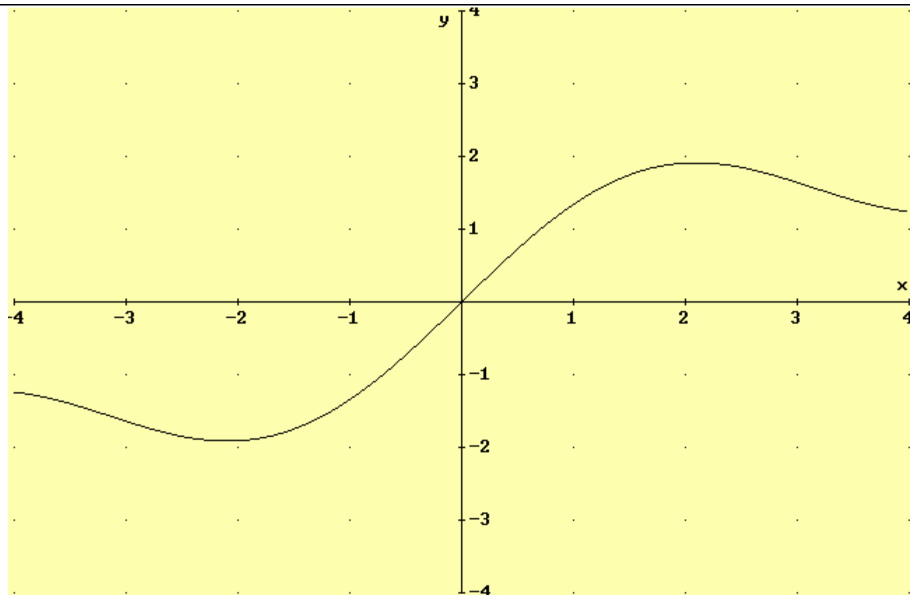
$\forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 : \mathrm{x} \in \mathrm{D} \wedge |\mathrm{x} - 1| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 2| < \delta$

Situação 3

3.1. Colocar a seguinte questão:

O que significa dizer que uma função *f* tem derivada num ponto *a*?

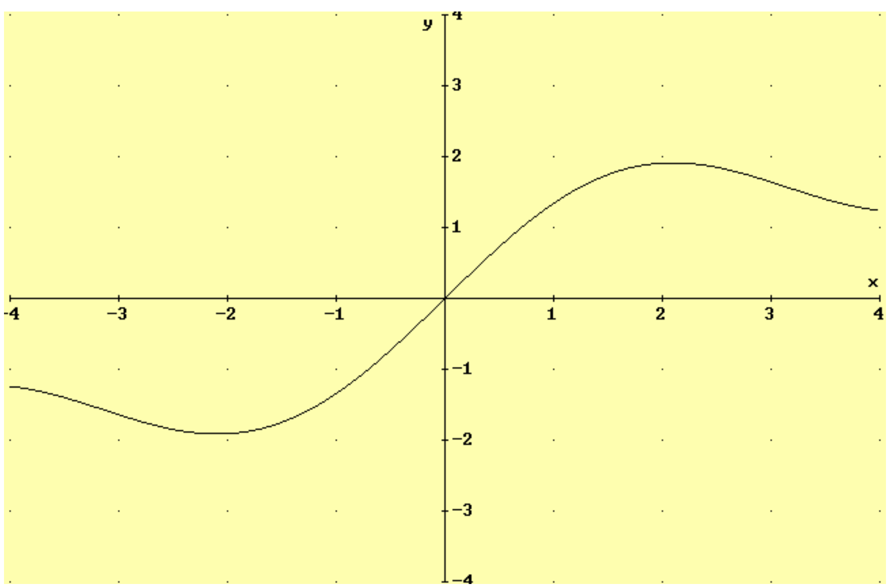
3.2. Se o aluno não conseguir utilizar nenhum esboço gráfico para dar uma interpretação geométrica da derivada fornecer-lhe o gráfico seguinte:



Situação 4

4.1. Esta situação engloba duas tarefas. A primeira é baseada na questão seguinte:

Qual o enunciado do teorema de Lagrange? Dá uma interpretação geométrica do mesmo.



Nota: Nesta tarefa é fornecido um gráfico para o aluno fazer a interpretação geométrica do teorema, deve no entanto ser inicialmente convidado a esboçar um gráfico à sua escolha.

4.2. Colocar a seguinte questão:

Como podemos usá-lo (teorema de Lagrange) para verificar a desigualdade seguinte:

$|sen(\theta) - sen(\alpha)| \leq |\theta - \alpha|$, $\forall \theta, \alpha \in R$

4.3. No caso de o aluno não conseguir resolver a tarefa anterior, apresentar-lhe a resolução seguinte, pedindo-lhe para explicar os vários passos desta.

Provar que $|sen(\theta) - sen(\alpha)| \leq |\theta - \alpha|$, $\forall \theta, \alpha \in R$

Sejam $\theta, \alpha \in R$ quaisquer

Se $\theta = \alpha$ vem $|sen(\theta) - sen(\alpha)| = |\theta - \alpha| = 0$, nada mais havendo a provar.

Se $\theta \neq \alpha$, podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha < \theta$

Sejam $f(x) = sen(x)$ e o intervalo $[\alpha, \theta]$

f é contínua e diferenciável em R, em particular, f é contínua em $[\alpha, \theta]$ e diferenciável em $]\alpha, \theta[$

Então, pelo teorema de Lagrange

$$\exists c \in \left]\alpha, \theta\right[: f'(c) = \frac{f(\theta) - f(\alpha)}{\theta - \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \cos(c) = \frac{sen(\theta) - sen(\alpha)}{\theta - \alpha}$$

$$\Rightarrow |\cos(c)| = \left|\frac{sen(\theta) - sen(\alpha)}{\theta - \alpha}\right|$$

$$\Rightarrow |\cos(c)| = \frac{|sen(\theta) - sen(\alpha)|}{|\theta - \alpha|}$$

Como $|\cos(c)| \leq 1$ então $\frac{|sen(\theta) - sen(\alpha)|}{|\theta - \alpha|} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; |sen(\theta) - sen(\alpha)| \leq |\theta - \alpha|$