



**NOVA**

NOVA SCHOOL OF  
SCIENCE & TECHNOLOGY

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA  
MECÂNICA E INDUSTRIAL

MAFALDA DA COSTA PALMA

Licenciada em Ciências da Engenharia

# OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS COM CONSTRANGIMENTOS DE TENSÃO, ENCURVADURA E COMPLIANCE

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Universidade NOVA de Lisboa

Abril, 2024





# OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS COM CONSTRANGIMENTOS DE TENSÃO, ENCURVADURA E COMPLIANCE

**MAFALDA DA COSTA PALMA**

Licenciada em Ciências da Engenharia

**Orientador:** Prof. Dr. Pedro Samuel Gonçalves Coelho,  
Professor Associado, NOVA-FCT-DEMI

**Coorientador:** Prof. Dr. Fábio Rúben Monteiro Conde,  
Professor Auxiliar Convocado, NOVA-FCT-DEMI

**Júri:**

**Presidente:** Prof. Dr. Hugo Emanuel Charrinho da Costa Biscaia,  
Professor Auxiliar, NOVA-FCT-DEMI

**Arguentes:** Prof. Dr. José Manuel Cardoso Xavier,  
Professor Associado, NOVA-FCT-DEMI

**Orientador:** Prof. Dr. Pedro Samuel Gonçalves Coelho,  
Professor Associado, NOVA-FCT-DEMI



**Otimização de Estruturas Reticuladas com Constrangimentos de Tensão, Encurvadura e *Compliance***

Copyright © Mafalda da Costa Palma, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



*À minha mãe,*



## AGRADECIMENTOS

Agradeço profundamente ao meu orientador, Professor Pedro Coelho, e ao coorientador, Professor Fábio Conde, pela orientação constante ao longo desta dissertação. A vossa dedicação e conhecimentos foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, fornecendo contribuições significativas e *feedback* valioso que enriqueceram cada etapa do trabalho.

Um agradecimento especial à Cláudia Almeida pela sua ajuda e apoio durante a elaboração desta tese. A sua orientação e contribuições foram muito apreciadas e fundamentais para o sucesso deste trabalho.

Meus sinceros agradecimentos aos Hamiginhos do Choco que se tornaram uma parte importante do meu percurso académico e pessoal. Catarina, Tavares, Daniel, Barbeiro, Matos e Bé, vocês contribuíram de maneiras únicas para o meu crescimento e desenvolvimento. As vossas conversas, apoio e amizade foram verdadeiramente inestimáveis.

Agradeço aos meus amigos de longa data, Inês S., Francisca, Rita, Ana e Gouveia, pela vossa amizade e por estarem ao meu lado há tantos anos. Agradeço especialmente à minha amiga Inês C., pela sua presença constante e amizade sincera, que têm sido uma fonte de conforto e felicidade para mim.

À minha família, que sempre esteve ao meu lado, oferecendo apoio incondicional, amor e incentivo, o meu mais profundo agradecimento. Agradeço especialmente aos meus pais, Ana e Miguel, por me proporcionarem a oportunidade de frequentar a faculdade e por trabalharem incansavelmente para isso. À minha avó, Alice, cuja sabedoria e amor são fontes de inspiração constantes, e à minha irmã, Inês, que todos os dias me chateia.

Por fim, gostaria de expressar a minha gratidão à instituição, aos docentes e aos funcionários da FCT, por proporcionarem um ambiente académico enriquecedor e pelos recursos disponíveis.



*I have not failed,  
I've just found 1000 ways that won't work.*

**Thomas A. Edison**



## RESUMO

A presente dissertação tem como objetivo apresentar uma metodologia para resolver problemas de minimização de massa de estruturas reticuladas (treliças), que incluem constrangimentos de tensão, encurvadura, *compliance* e densidades intermédias. Neste estudo, é aplicada uma otimização baseada no gradiente, utilizando o algoritmo de otimização MMA e funções contínuas e diferenciáveis. A metodologia utiliza dois tipos de variáveis: uma topológica, que considera a densidade artificial das barras, e uma dimensional, que consiste nas áreas das secções transversais das mesmas.

A presente dissertação visa solucionar problemas relacionados com o aparecimento de mecanismos em estruturas reticuladas, pois a sua deteção e resolução são essenciais para garantir a estabilidade e integridade estrutural.

A abordagem proposta inclui o uso de dois métodos de otimização topológica, um calcula o campo de deslocamentos para as cargas aplicadas e o outro calcula diretamente as forças instaladas nas barras através da formulação plástica. Com base nestes dois métodos averigua-se estabilidade cinemática da estrutura. Também foram investigadas soluções para garantir a conectividade adequada entre os elementos da estrutura, surgindo a função de penalização da densidade proposta no final desta dissertação.

Adicionalmente, foi realizada uma verificação da formulação de Euler para análise de encurvadura em elementos de barra à compressão. Concluiu-se que o programa prevê de maneira aceitável a carga e a tensão crítica, fortalecendo a confiança na precisão das análises estruturais realizadas pelo programa para os exemplos apresentados nesta dissertação.

**Palavas chave:** Otimização Topológica, *Compliance*, Treliças, Mecanismos, Cinemática, MMA



## ABSTRACT

This dissertation presents a methodology for solving mass minimization problems in truss structures, which include constraints such as stress, buckling, compliance, and intermediate densities. The study employs a gradient-based optimization approach using the MMA optimization algorithm and continuous and differentiable functions. The methodology utilizes two types of variables: topological, considering the artificial density of bars, and dimensional, consisting of the cross-sectional areas of the bars.

The main aim of this dissertation is to address issues related to the occurrence of mechanisms in structures, as their precise detection and effective resolution are crucial for ensuring structural stability and integrity.

The proposed approach involves the use of two topological optimization methods, one of which calculates the displacement field for applied loads, and the other directly computes the forces exerted on the bars through plastic formulation. Based on these two methods, the kinematic stability of the structure is assessed. Additionally, solutions were investigated to ensure adequate connectivity among the elements of the structure, leading to the proposed density penalization function outlined at the end of this dissertation.

Furthermore, a verification of the Euler formulation for buckling analysis in compressive bar elements was conducted. It was concluded that the program adequately predicts the load and critical stress, thereby strengthening confidence in the accuracy of the structural analyses performed by the program for the examples presented in this dissertation.

**Keywords:** Topological Optimization, Compliance, Truss, Mechanisms, Kinematics, MMA



# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1	Contexto e motivação.....	1
1.2	Problema e objetivos .....	2
1.3	Organização do documento .....	3
<b>2</b>	<b>ESTADO DA ARTE .....</b>	<b>5</b>
2.1	Enquadramento histórico.....	5
2.2	Formulação de problemas de otimização.....	7
2.3	Otimização topológica .....	8
2.4	Análise de Sensibilidades .....	8
2.5	Constrangimentos.....	9
2.6	Análise de Encurvadura em Barras.....	10
2.6.1	Fórmula de Euler.....	11
2.6.2	Eurocódigo.....	11
2.6.3	Parábola de Jonhson.....	13
2.6.4	Comprimento equivalente .....	14
2.7	Estabilidade Cinemática .....	15
2.7.1	Formulação elástica .....	15
2.7.2	Formulação plástica.....	16
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E ANÁLISE DOS CONSTRANGIMENTOS.....</b>	<b>17</b>
3.1	Programa Nova Truss TopOpt.....	17

3.2	<i>Ground Structure</i> .....	19
3.3	Variáveis de Projeto.....	20
3.4	Função Objetivo.....	21
3.5	Constrangimentos.....	22
3.5.1	Encurvadura.....	22
3.5.2	Tensão.....	25
3.5.3	Densidades Intermédias.....	25
3.5.4	<i>Compliance</i> .....	26
3.6	Formulação do Problema.....	28
3.7	Estratégia de penalização.....	29
<b>4</b>	<b>CÁLCULO DE SENSIBILIDADES .....</b>	<b>35</b>
4.1	Função objetivo.....	35
4.2	Constrangimento de tensão.....	35
4.2.1	Derivada do constrangimento de tensão.....	35
4.2.2	Derivada da tensão.....	36
4.3	Constrangimento de encurvadura.....	39
4.3.1	Derivada do constrangimento de encurvadura.....	39
4.3.2	Derivada da tensão crítica de encurvadura.....	40
4.4	Constrangimento de <i>Compliance</i> .....	41
4.4.1	Derivada do constrangimento de <i>Compliance</i> .....	41
4.4.2	Derivada da <i>Compliance</i> .....	41
4.5	Constrangimento das densidades intermédias.....	42
<b>5</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>43</b>
5.1	Dados dos problemas e propriedades.....	43
5.2	Validação da veracidade da fórmula de Euler.....	44
5.2.1	Enquadramento.....	44
5.2.2	Eurocódigo 3.....	44

5.2.3	Eurocódigo 9 .....	47
5.2.4	Nova curva de Johnson.....	49
5.3	<i>Compliance</i> .....	50
5.3.1	Enquadramento.....	50
5.3.2	Exemplo 2x4 com dois apoios.....	51
5.3.3	Exemplo 2x4 com três apoios.....	57
5.3.4	Exemplo 4x3 .....	64
5.3.5	Exemplo 4x4 .....	67
5.3.6	Exemplo 8x8 .....	70
5.4	Estabilidade Cinemática .....	71
5.5	Equação de penalização da densidade - Conectividade .....	76
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>81</b>
6.1	Conclusões .....	81
6.2	Trabalhos futuros.....	82
<b>A</b>	<b>APÊNDICE.....</b>	<b>85</b>
<b>B</b>	<b>APÊNDICE.....</b>	<b>89</b>



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Esquema com as variações do programa NOVA Truss Opt.....	6
Figura 2.2 Comprimento equivalente: a) barra encastrada e outro apoio livre; b) Apoio simples com móvel; c) barra encastrada com apoio móvel; d) barra encastrada nas duas pontas. ....	14
Figura 3.1 Exemplo de uma <i>ground structure</i> 2x2 com a numeração os elementos.....	19
Figura 3.2 Formação de cadeias.....	23
Figura 3.3 Gráfico da estratégia de penalização.....	31
Figura 3.4 Estratégia de penalização da <i>compliance</i> , $\zeta$ .....	32
Figura 5.1 <i>Ground Structure</i> 6x1.....	44
Figura 5.2 a) Gráfico com as curvas de dimensionamento de colunas para aço. b) ampliação. ....	46
No gráfico, os pontos retirados do programa NOVA Truss TopOpt estão representados com "+". Como esperado, os pontos 1 e 2 estão sobre a curva de Euler, pois estão no limite de encurvadura. O ponto 3 está abaixo das duas linhas, pois não está em seu limite de encurvadura. Para uma análise mais detalhada, uma ampliação do gráfico pode ser vista na	
Figura 5.2 b).....	46
Figura 5.4 a) Gráfico com as curvas de dimensionamento de colunas para alumínio. b) ampliação. ....	48
No gráfico, os pontos retirados do programa NOVA Truss TopOpt estão representados com "+". Como esperado, o ponto 1 está sobre a curva de Euler, pois está no limite de encurvadura. O ponto 2 está abaixo das duas linhas, pois não está em seu limite de encurvadura. Para uma análise mais detalhada, uma ampliação do gráfico pode ser vista na	
Figura 5.4 b).....	48
Figura 5.6 Gráfico com as novas curvas de Jonhson.....	49
Figura 5.7 <i>Ground structure</i> 2x4 com dois apoios.....	52
Figura 5.8 Histórico das <i>compliances</i> para o exemplo 2x4 com 2 apoios.....	54

Figura 5.9 Janela Pop Up de aviso de a) mecanismo; b) não mecanismo. ....	55
Figura 5.10 Documento da análise estática para o exemplo 2x4 com dois apoios e <i>compliance</i> .....	56
Figura 5.11 <i>Ground structure</i> 2x4 com três apoios. ....	57
Figura 5.12 Histórico das <i>compliances</i> para o exemplo 2x4 com 3 apoios e com carga de 30kN. ....	60
Figura 5.13 Histórico das <i>compliances</i> para o exemplo 2x4 com 3 apoios e com carga de 120kN. ....	62
Figura 5.14 Resultado da otimização sem <i>compliance</i> , com carga 150kN .....	63
Figura 5.15 <i>Ground structure</i> 4x3. ....	64
Figura 5.16 Histórico da <i>compliance</i> 4x3. ....	66
Figura 5.17 <i>Ground Structure</i> 4x4. ....	67
Figura 5.18 Histórico das <i>compliances</i> para o exemplo 4x4. ....	69
Figura 5.19 Resultado da otimização da estrutura 8x8. ....	70
Figura 5.20 Exemplo de uma otimização realizada com o código GRAND [14], a) domínio de projeto e condições de fronteira; b) malha usada para construir a <i>ground structure</i> ; c) estrutura otimizada; d) foto de uma claytonia caroliniana. ....	72
Figura 5.21 <i>Ground Structure</i> 2x2. ....	73
Figura 5.22 Otimização do exemplo 2x2 com o NOVA Truss TopOpt e com constrangimento de <i>compliance</i> . ....	74
Figura 5.23 Otimização do exemplo 2x2 utilizando diferentes códigos a) NOVA Truss TopOpt sem constrangimento de <i>compliance</i> ; b) GRAND. ....	74
Figura 5.24 Ilustração de um nó e as respetivas possíveis barras vizinhas conectadas. ....	77

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1 Intervalo de variação dos parâmetros de penalização.....	30
Tabela 5.1 Propriedades dos materiais utilizados nesta dissertação.....	43
Tabela 5.2 Gráficos da otimização de uma estrutura 6x1 a aço.....	45
Tabela 5.3 Valores retirados do programa NOVA Truss TopOpt dos elementos em análise. ..	46
Tabela 5.4 Gráficos da otimização de uma estrutura 6x1 a alumínio.....	47
Tabela 5.5 Valores retirados do programa NOVA Truss TopOpt dos elementos em análise. ..	48
Tabela 5.6 Resultados da otimização da Estrutura 2x4 com dois apoios. ....	53
Tabela 5.7 Resultados da otimização da Estrutura 2x4 com três apoios com carga de 30 kN.	58
Tabela 5.8 Resultados da otimização da Estrutura 2x4 com três apoios com carga de 120 kN. .....	61
Tabela 5.9 Resultados da otimização da Estrutura 3x2.....	65
Tabela 5.10 Resultados da otimização da Estrutura 4x4. ....	68
Tabela 5.11 Resultados das otimizações realizadas pelo GRAND e NOVA Truss TopOpt com e sem constrangimentos de <i>compliance</i> . ....	75
Tabela 5.12 Exemplos com os valores de densidade e da função delta, para 7 casos. ....	78



## SIGLAS

<b>AG</b>	Algoritmo Genético
<b>GCMMA</b>	<i>Globally Convergent of Method of Moving Asymptotes</i>
<b>GS</b>	<i>Ground Structure</i>
<b>KKT</b>	<i>Karush-Kuhn-Tucker</i>
<b>MEF</b>	Método dos Elementos Finitos
<b>MMA</b>	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
<b>MMTO</b>	<i>Multi Material Topology Optimization</i>
<b>SIMP</b>	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
<b>SMTO</b>	<i>Single Material Topology Optimization</i>
<b>SQP</b>	<i>Sequential Quadratic Programming</i>
<b>TO</b>	<i>Topology Optimization</i>



# SÍMBOLOS

## Latim

$A_e$	Área da secção transversal do elemento $e$
$A_i$	Área da secção transversal do elemento $i$
$A_{min}$	<i>Lower bound</i> da áreas da secção transversal dos elementos
$a_0, a_i, d_i$	Parâmetro do MMA para cada constrangimento $i$
$c_i, c_{MMA}$	Parâmetro de violação dos constrangimentos do MMA
$\underline{\mathbf{B}}$	Matriz da derivada das funções de forma do elemento finito do tipo barra
$\mathbf{B}$	Matriz de conectividade
$C$	<i>Compliance</i>
$C^*$	Limite de <i>compliance</i>
$C^{padrão}$	<i>Compliance</i> padrão
$C^1, C^2$	<i>Compliances</i> de controlo
$E$	Módulo de Young
$E_e$	Módulo de Young do elemento $e$
$E^0$	Módulo de Young da fase de vazio
$E^1$	Módulo de Young da fase de material sólido
$E_{ijkl}$	Tensor da rigidez
$\mathbf{f}$	Vetor de cargas
$f, f_0$	Função objetivo

$\tilde{f}_0$	Função aproximada da função objetivo
$f_i$	Constrangimento de desigualdade $i$
$\tilde{f}_i$	Função aproximada do constrangimento de desigualdade $i$
<b>G</b>	Matriz geométrica
$g$	Constrangimento de desigualdade
$g^{stress}$	Constrangimento de tensão
$g^{buck}$	Constrangimento de encurvadura
$g^C$	Constrangimento de <i>compliance</i>
$g^n$	Constrangimento das densidades intermédias
$h$	Constrangimento de igualdade
$i$	Momento de inercia de giração
$I$	Segundo momento de área da secção transversal das barras
$I_{Total}$	Número total de iterações
$I_1$	Número de iterações no primeiro intervalo
$I_2$	Número de iterações no segundo intervalo
$I_3$	Número de iterações no terceiro intervalo
$I_4$	Número de iterações no quarto intervalo
$i_{start}^\eta$	Iteração que inicia a variação de $\eta$
$i_{end}^\eta$	Iteração que termina a variação de $\eta$
<b>K</b>	Matriz de rigidez global
<b>K<sub>e</sub></b>	Matriz de rigidez em coordenadas globais do elemento $e$
<b>L</b>	Vetor das funções de forma do elemento barra
$L_e$	Comprimento do elemento $e$
$L_{Enc}$	Comprimento de encurvadura a considerar
$L_{eq}$	Comprimento do elemento $e$ tendo em conta as condições de apoio
$L$	Função Lagrangeana

$M$	Massa
$m$	Número total de constrangimentos
$m^{crit}$	Número total de constrangimentos críticos
$NE$	Número total de elementos finitos
$N_l$	Número de elementos da cadeia à esquerda do elemento $e$
$N_r$	Número de elementos da cadeia à direita do elemento $e$
$N_{Rd}$	Resistência à força axial de compressão
$n$	Número total de variáveis de projeto
$P$	Carga aplicada
$P^{+1}$	Carga aplicada com a adição de uma pequena carga positiva
$P^{-1}$	Carga aplicada com a adição de uma pequena carga negativa
$P_{CR}$	Carga crítica
$p^{cr}$	Carga crítica de encurvadura
$p$	Expoente de penalização do modelo SIMP
$p_1$	Expoente de penalização da densidade específica
$p_2$	Expoente de penalização do módulo de Young
$p_3$	Expoente de penalização da tensão admissível
$p_4$	Expoente de penalização do módulo de Young para a <i>compliance</i>
$p_E$	Expoente da tensão de encurvadura
$p_L$	Expoente de penalização do comprimento equivalente de encurvadura
$r$	Raio da secção transversal
$s_i$	Variável artificial associada ao constrangimento de desigualdade $i$
$\mathbf{T}$	Matriz de transformação de coordenadas
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos no referencial global do elemento
$\mathbf{u}_e$	Vetor de deslocamentos do elemento $e$
$\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*$	Multiplicadores de Lagrange

$\mathbf{v}_b$	Vetor constituído pelo volume de cada barra
$w_e$	Função de peso contínua
$\mathbf{x}$	Vetor das variáveis de projeto
$\mathbf{x}_A$	Vetor das variáveis de área
$x_{A_e}$	Variável da área associada ao elemento $e$
$\mathbf{x}_\rho$	Vetor das variáveis de densidade artificial
$x_{\rho_e}$	Variável de densidade artificial associada ao elemento $e$
$\bar{x}_i, x_j^{max}$	Limite superior das variáveis de projeto
$\underline{x}_i, x_j^{min}$	Limite inferior das variáveis de projeto
$x_{A_{max}}$	Limite superior da variável área
$x_{A_{min}}$	Limite inferior da variável área
$\mathbf{y}$	Vetor das variáveis artificiais do subproblema do MMA
$\mathbf{z}$	Vetor de carga fictícia, <i>dummy load vector</i>
$z$	Variável artificial do subproblema do MMA

### Grego

$\alpha$	Ângulo de Transformação de Coordenadas
$\alpha_E$	Parâmetro da Tensão Crítica
$\beta$	Função de Ramos do Comprimento Equivalente de Encurvadura
$\gamma_{M1}$	Fator de segurança (Eurocódigo)
$\Gamma_{adj}$	Elementos Adjacentes
$\delta\%$	Porcentagem de Iterações Iniciais da <i>Continuation Approach</i>
$\epsilon$	Parâmetro do $\epsilon$ -Relaxation
$\epsilon_e$	Extensão do Elemento $e$
$\epsilon_{kl}$	Tensor das Deformações
$\eta$	Tolerância em Relação aos Valores Intermédios
$\kappa$	Fator para permitir o efeito de enfraquecimento da soldadura

$\lambda_{crit}$	Fator de Carga Crítica
$\lambda, \lambda_e$	Vetor Adjunto
$\lambda$	Esbelteza
$\bar{\lambda}$	Esbelteza normalizada
$\bar{\lambda}_0$	Limite do patamar horizontal das curvas de encurvadura
$\mu$	Função Hiperbólica da Tensão Crítica
$\varsigma$	Função para o constrangimento de encurvadura
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho_e$	Densidade Específica do Elemento $e$
$\rho^1$	Densidade Específica da Fase de Material Sólido
$\rho^0$	Densidade Específica da Fase de Vazio
$\rho_{adj}$	Somatório das Densidades dos Elementos Adjacentes
$\sigma_e$	Tensão Axial no Elemento $e$
$\sigma_{adm_e}$	Tensão Admissível no Elemento $e$
$\sigma_{adm}^1$	Tensão Admissível da Fase de Material Sólido
$\sigma_{adm}^0$	Tensão Admissível da Fase de Vazio
$\sigma_{crit_e}$	Tensão Crítica no Elemento $e$
$\sigma_c$	Tensão de cedência
$\sigma_{Enc_e}$	Tensão de Encurvadura no Elemento $e$
$\varphi$	Somatório dos Termos Quadráticos
$\phi$	Fator Escala Associado às Áreas
$\chi$	Fator de redução à encurvadura
$\chi_e$	Valor da Propriedade Arbitrária do Elemento $e$
$\chi^1$	Valor da Propriedade Arbitrária da Fase de Material Sólido
$\chi^0$	Valor da Propriedade Arbitrária da Fase de Vazio
$\Psi$	Função Genérica



# INTRODUÇÃO

## 1.1 Contexto e motivação

A otimização de estruturas reticuladas (treliças) emerge como uma área de investigação essencial, impulsionada pela necessidade de projetos que sejam simultaneamente económicos, seguros e sustentáveis. O aumento da demanda por estruturas mais leves e eficientes, aliado ao crescente foco na sustentabilidade e aos custos elevados de materiais, instiga a busca por soluções que minimizem o impacto ambiental [1].

A eficiência económica, a sustentabilidade e a segurança estrutural são os pilares que motivam esta dissertação. O uso eficiente de materiais, através da otimização de estruturas reticuladas, permite a minimização de custos.

A evolução tecnológica, com avanços em computação de alto desempenho e algoritmos de otimização, impulsiona este campo, possibilitando a resolução eficaz de problemas complexos. Isso torna a otimização de estruturas reticuladas um terreno empolgante para pesquisas.

A aplicabilidade diversificada é outra faceta motivadora. Desde edifícios altos até pontes, estruturas de veículos e *design* de móveis, a otimização de estruturas reticuladas demonstra versatilidade, destacando-se como um campo relevante e adaptável [2].

A presente dissertação, desempenha um papel crucial na busca por soluções de engenharia mais eficientes, sustentáveis e seguras. Contribui para a evolução da engenharia mecânica e civil, alinhando-se às crescentes demandas da sociedade por estruturas mais inteligentes, económicas e sustentáveis. A presente dissertação não apenas responde aos desafios contemporâneos, mas também delinea um caminho promissor para o futuro da conceção e construção de estruturas.

## 1.2 Problema e objetivos

A presente dissertação tem como objetivo principal o desenvolvimento do programa NOVA Truss Opt, uma iniciativa que tem sido progressivamente refinada ao longo dos últimos trabalhos conduzidos por Pratas, Almeida, Eugénio e Pereira [3-6]. Ao longo de cinco anos de dedicada pesquisa e desenvolvimento, notáveis avanços foram alcançados, culminando em um programa robusto e com uma *interface* refinada para a análise de estruturas reticuladas.

Apesar dos sucessos progressos, a presente dissertação visa abordar desafios persistentes identificados nos trabalhos anteriores. Três problemas específicos foram destacados como foco principal: mecanismos, barras sem ligações (conectividade) e a solução trivial de ausência de estrutura.

- Os mecanismos presentes em algumas estruturas, embora já tenham sido objeto de trabalho, demandam uma atenção mais aprofundada. A detecção precisa e a resolução eficaz de mecanismos são essenciais para garantir a estabilidade e integridade estrutural.

- Outro ponto crítico a ser abordado diz respeito às barras sem ligações, que surgem quando uma cadeia de barras ultrapassa o limite de encurvadura e é introduzida uma barra como apoio, para reduzir o comprimento de encurvadura, mas não tem ligação à restante parte da treliça. O otimizador acrescenta uma barra para satisfazer o constrangimento de encurvadura, à custa da redução do comprimento equivalente. A aplicação de cargas exteriores de baixa intensidade pode, por vezes, resultar no desaparecimento das barras, levando a uma solução de ausência de estrutura. Este fenómeno é devido ao baixo valor de tensão em cada elemento e à inexistência de qualquer controlo da flexibilidade (*compliance*) ou da rigidez da treliça.

Os objetivos delineados nesta dissertação concentram-se na implementação de um constrangimento de *compliance* no programa NOVA Truss Opt, visando aprimorar a detecção e correção de mecanismos. Além disso, a verificação abrangente em todos os pontos da estrutura, análise pós-ótimo, especialmente por aplicação de pequenas cargas nodais, procura confirmar ou não a estabilidade estrutural em todas as circunstâncias.

Para assegurar a credibilidade dos dados obtidos através da análise de encurvadura pela fórmula de Euler, será realizada uma comparação entre diferentes métodos, como Eurocódigo, a fórmula de Euler e a parábola de Johnson. O objetivo é garantir que o programa esteja a utilizar um método admissível.

## 1.3 Organização do documento

A presente dissertação aborda desafios e objetivos no campo da otimização topológica de estruturas reticuladas, delineados ao longo de cinco capítulos. No presente capítulo, a introdução contextualiza a relevância do trabalho, apresentando o cenário que motiva a pesquisa, destacando os problemas fundamentais que impulsionaram a busca por soluções inovadoras em otimização topológica.

O capítulo 2 realiza uma revisão do estado da arte, explorando o enquadramento histórico do tema e discutindo conceitos-chave, como formulação de problemas de otimização, otimização topológica, análise de sensibilidades, constrangimentos, análise de encurvadura em barras e estabilidade cinemática. Esta revisão oferece uma base sólida para compreensão das contribuições e inovações apresentadas ao longo da dissertação.

O terceiro capítulo detalha a formulação do problema central do trabalho, apresentando o programa NOVA Truss TopOpt, a Ground Structure, a função objetivo, as variáveis de projeto, e os constrangimentos de tensão, encurvadura, *compliance* e densidades intermédias. A formulação do problema é apresentada e a estratégia de penalização é discutida, proporcionando uma visão abrangente da abordagem adotada na otimização topológica.

A metodologia para calcular as sensibilidades na função objetivo e nos diferentes constrangimentos é detalhada no quarto capítulo, contribuindo para a compreensão detalhada do processo analítico subjacente à otimização.

No quinto capítulo, apresentam-se os resultados relacionados à aplicação da metodologia proposta. Discute-se as métricas da *compliance*, verificação da veracidade da fórmula de Euler, estabilidade cinemática e função densidade - conectividade, fornecendo uma avaliação abrangente do desempenho do programa NOVA Truss TopOpt.

Finalmente, no sexto capítulo, são apresentadas as conclusões e trabalhos futuros.



## ESTADO DA ARTE

### 2.1 Enquadramento histórico

A otimização estrutural tem sido uma presença constante ao longo do tempo, mas somente após o desenvolvimento computacional no século XX é que se pôde evidenciar um marco no surgimento da otimização estrutural. A utilização do método dos elementos finitos em conjunto com algoritmos de otimização viabilizou análises de comportamento estrutural mais rigorosas e a busca por soluções de ótimo. A introdução de ferramentas de *software* especializadas em otimização estrutural, como os algoritmos genéticos, permitiu a exploração de múltiplas soluções no espaço de projeto [3].

No contexto atual, a otimização estrutural desempenha um papel de destaque no planeamento e análise de uma variada gama de estruturas, abrangendo desde edifícios e pontes até os componentes de aeronaves e veículos espaciais. As abordagens de otimização avançada capacitam os engenheiros a explorar uma ampla diversidade de alternativas de projeto, com o propósito de identificar soluções que atendam aos critérios de desempenho, eficiência e sustentabilidade.

Como referido anteriormente, o programa NOVA Truss TopOpt tem vindo a ser desenvolvido ao longo dos anos, na Figura 2.1 pode-se observar um breve esquema dos pontos principais ao longo das dissertações anteriores.

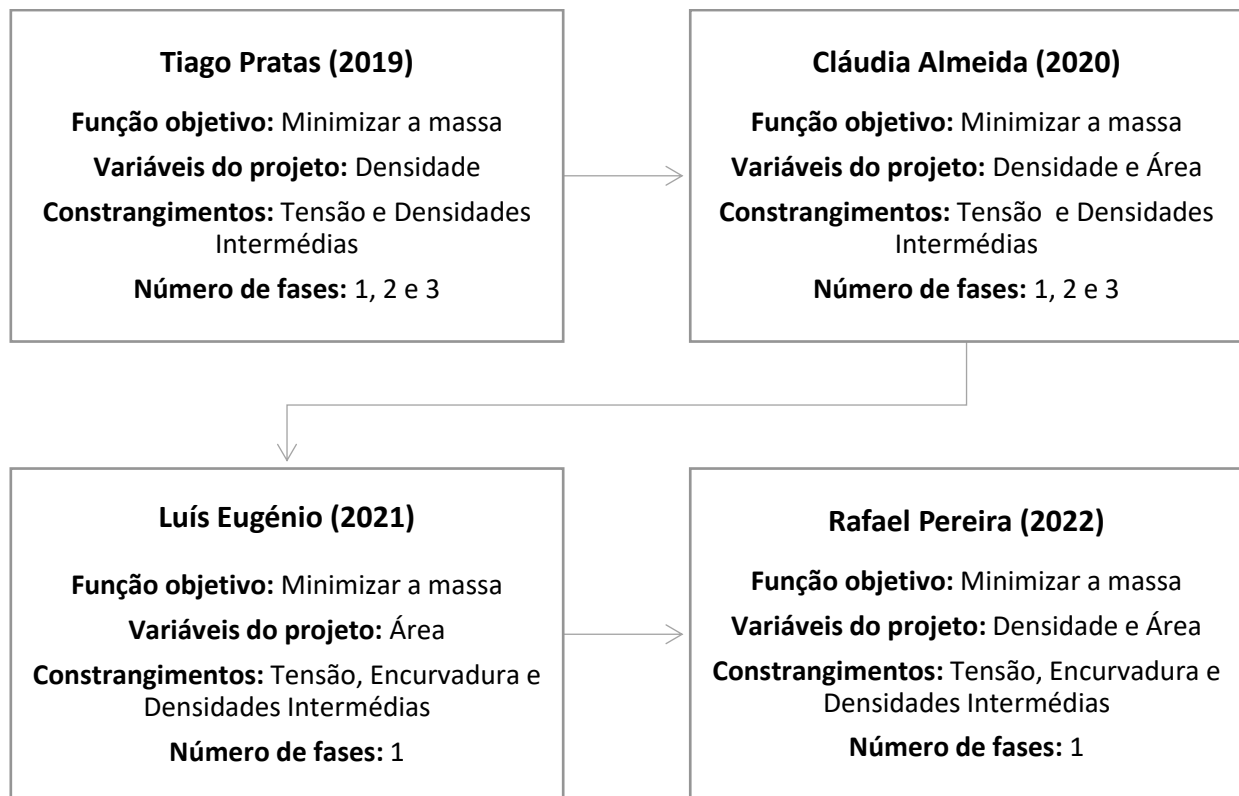


Figura 2.1 Esquema com as variações do programa NOVA Truss Opt.

Em 2019, Tiago Pratas começou por uma metodologia de otimização topológica baseada na variável de densidade capaz de resolver problemas de minimização da massa de estruturas retículas com constrangimentos de tensão, considerando múltiplas fases de material [4].

Em 2020, Cláudia Almeida continuou a resolver problemas de minimização da massa de estruturas reticuladas planas sujeitas a constrangimentos de tensão, com a diferença de ter duas variáveis de projeto, a densidade artificial e área das secções das barras [5]. É fundamental enfatizar que a introdução das duas variáveis acrescenta complexidade, no entanto, possibilita a obtenção da configuração final da estrutura com melhor desempenho.

Em 2021 Luís Eugénio, implementou uma metodologia de otimização topológica baseada apenas na variável de área capaz de resolver problemas de minimização da massa de estruturas reticuladas com constrangimentos de tensão e de encurvadura locais [6]. Considerar o constrangimento de encurvadura na otimização ajuda a assegurar que a estrutura otimizada seja capaz de resistir a cargas compressivas sem entrar em colapso devido a instabilidade elástica. Deste modo ao impor restrições de encurvadura incorpora-se critérios de segurança para garantir que a estrutura permaneça estável sob carga. É importante notar que neste trabalho a utilização de uma variável de projeto para lidar com o problema da encurvadura revelou-se limitadora.

Em 2022, Rafael Pereira juntou os dois últimos trabalhos formando uma metodologia capaz de resolver problemas de minimização de massa em treliças, que incluem constrangimentos de tensão e de encurvadura locais. Foram utilizadas duas variáveis de projeto, onde a variável topológica é a densidade (artificial) das barras e, a variável dimensional, consiste nas áreas das secções transversais das mesmas [7]. Ao introduzir duas variáveis de projeto, juntamente com os constrangimentos de tensão e de encurvadura local, foi possível obter uma variedade de estruturas otimizadas, mas não foi verificado o Eurocódigo 9 para confirmar que o estudo da encurvadura de Euler bastava e, também, algumas soluções obtidas com a versão do código desenvolvida podem resultar facilmente em mecanismos.

Na presente dissertação procura-se desenvolver uma metodologia capaz de resolver problemas de minimização de massa em treliças, utilizando variáveis de densidade e de área, e incluindo constrangimentos de tensão, de encurvadura locais, densidades intermédias e de *compliance*, por forma a resolver, em parte, o problema da obtenção de mecanismos.

## 2.2 Formulação de problemas de otimização

Existem várias formulações de problemas de otimização, no entanto, neste contexto, utilizar-se-á a formulação *standard*, expressada na equação (2.1).

$$\begin{array}{ll}
 \min & f(\mathbf{x}) \\
 \mathbf{x} & \\
 \text{s.a.} & \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & ; j = 1, \dots, m \\ h_k(\mathbf{x}) = 0 & ; k = 1, \dots, p \\ \bar{x}_i \leq x_i \leq \underline{x}_i & ; i = 1, \dots, n \end{cases}
 \end{array} \tag{2.1}$$

Nesta classe de problemas queremos minimizar a função objetivo,  $f(\mathbf{x})$ , fazendo variar o vetor  $\mathbf{x}$  das  $n$  variáveis de projeto. Os  $m$  constrangimentos de desigualdade são representados por  $g_j(\mathbf{x})$  e os  $p$  constrangimentos de igualdade por  $h_k(\mathbf{x})$ . E  $\bar{x}_i$ ,  $\underline{x}_i$  são os limites superior e inferior de variação das variáveis de projeto, respetivamente.

Nesta dissertação a função objetivo será minimizar a massa, onde teremos a densidade e a área como variáveis do projeto. Nos constrangimentos de desigualdade incluem-se tensão, encurvadura e *compliance*. Para além destes constrangimentos, temos as densidades intermédias de forma que os valores das variáveis de densidade convirjam para 0 e 1.

## 2.3 Otimização topológica

A otimização topológica é uma técnica utilizada na engenharia e no *design* para encontrar a distribuição mais eficiente de material em uma estrutura, minimizando o peso ou maximizando o desempenho, enquanto atendendo a requisitos de carga e restrições específicos. A otimização topológica é aplicada em projetos de peças, componentes e estruturas, como chassis de veículos, peças de aeronaves e até mesmo em *designs* de produtos de consumo.

O processo de otimização topológica começa com uma forma inicial da estrutura e, em seguida, usa algoritmos computacionais para remover material de áreas menos solicitadas, resultando em uma estrutura mais leve. O objetivo pode ser alcançar uma topologia ideal que minimize o peso ou maximize a rigidez, considerando constrangimentos de tensões, de deslocamento, para condições de fronteira de força e de deslocamento aplicado.

A otimização topológica pode apresentar soluções estruturais com apenas um material (SMTO - *Single Material Topology Optimization*) na estrutura ou com diferentes materiais (MMTO - *Multi-Material Topology Optimization*). MMTO é uma técnica que apresenta maior potencial. Em diversos trabalhos pode-se ver a comparação entre ambas as otimizações. Em [8], é realizada uma otimização do chassis de um autocarro elétrico, onde o objetivo é a minimização do seu peso. Observou-se que o MMTO apresenta resultados 8% mais leves do que o SMTO.

No trabalho de Pratas [4] e Almeida [5] apresentou-se um estudo comparativo entre SMTO e MMTO. O trabalho de Eugénio [6] concentra-se apenas em SMTO, considerando o alumínio como material base e foi ainda feita a comparação de algoritmos de otimização, MMA e GCMMA. Com base nas decisões feitas nos trabalhos de Eugénio [6] e Pereira [7], esta dissertação está focada em SMTO, onde o material é alumínio e recorre-se ao algoritmo de otimização MMA.

## 2.4 Análise de Sensibilidades

Para algoritmos de otimização baseados no gradiente é necessário proceder à análise de sensibilidade das funções objetivo e dos constrangimentos. O cálculo dos gradientes por derivação simples é, neste caso, impraticável.

Para o problema em causa existe, por exemplo, uma função  $f$  que depende de  $x$  e de  $\mathbf{u}(x)$ , ou seja, tem-se  $f(x, \mathbf{u}(x))$ , sendo que a função depende da variável  $x$ , não só explicitamente, mas também implicitamente através da função  $\mathbf{u}(x)$ .

O método adjunto é mais eficiente em casos em que o número de variáveis,  $n$ , é superior ao número de funcionais,  $m$ . Nesta dissertação, o número de funcionais é igual ao número de elementos,  $NE$ , i.e.  $m = NE$ , e o número de variáveis é o dobro do número de elementos, i.e.  $n = 2NE$ , uma vez que cada elemento possui duas variáveis, a área e a densidade. Visto que  $2NE > NE$  para  $\forall NE, n, m \in \mathbb{N}$  podemos concluir que  $n > m$ . Portanto, o método adjunto é a escolha mais apropriada para ser utilizado na análise de sensibilidade.

Com base nas dissertações anteriores e seguindo a implementação do programa, podemos expressar a sensibilidade de  $\Psi$  relativa a  $x$  na Equação (2.2) [1-4].

$$\frac{d\Psi}{dx}(x, \mathbf{u}(x)) = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \left[ \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} - \frac{\partial\mathbf{K}(x)}{\partial x} \mathbf{u} \right] \quad (2.2)$$

Além do motivo já mencionado, no contexto dos constrangimentos de tensão e de encurvadura, temos a mesma função  $\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)$ . Quando aplicamos o método adjunto, não é necessário derivar a função duas vezes, uma vez que a derivação é feita inicialmente para o constrangimento de tensão, e, posteriormente, a mesma informação é aproveitada para o constrangimento encurvadura. Isso não apenas economiza tempo, mas também é um dos benefícios notáveis desse método, pois elimina a necessidade de derivar a função duas vezes.

O Capítulo 4 irá conter o cálculo das sensibilidades que estão implementadas no programa.

## 2.5 Constrangimentos

Como referido em capítulos anteriores, os constrangimentos de tensão, encurvadura e densidades intermédias foram extensivamente estudados, desenvolvidos e incorporados no programa NOVA Truss Opt [1-4]. Dado que desempenham um papel crucial nas otimizações topológicas, esta dissertação continuará a utilizar esses constrangimentos, com a adição do constrangimento de *compliance* como uma melhoria.

Por definição, um mecanismo é composto por um conjunto de estruturas, isto é, estruturas rígidas interligadas por articulações, permitindo movimento entre elas. Trabalhos anteriores demonstraram que o programa produzia uma estrutura final que parecia ser isostática. No entanto, quando uma pequena força era aplicada, a estrutura começava a mover-se, tornando essa solução inaceitável. Neste contexto, a presente dissertação concentra-se na

introdução do constrangimento de *compliance*, com o objetivo de resolver os problemas associados aos mecanismos.

A *compliance* é utilizada na engenharia mecânica para descrever a capacidade de um componente ou sistema de se deformar ou ceder em resposta a uma carga aplicada. Em essência, a *compliance* representa a medida da flexibilidade de uma estrutura diante de uma força ou carga específica. Esse conceito é importante na análise de sistemas mecânicos, projetos de engenharia e controlo de qualidade. Por sua vez um mecanismo pode ser capaz de se mover facilmente, e, ao calcular a *compliance* desse mecanismo, o valor resultante tende a ser muito elevado, indicando que é altamente flexível. Por outro lado, quando se trata de uma estrutura rígida, o valor da *compliance* é pequeno. Assim, ao controlar a *compliance* durante o processo de otimização, podemos orientar a solução para se desviar de um mecanismo excessivamente flexível em direção à obtenção da estrutura desejada.

Em artigos anteriores, a *compliance* já foi incorporada na função objetivo, como exemplificado em [9]. Contudo, no artigo [2], são introduzidos constrangimentos de *compliance* e encurvadura global. Ao comparar com a situação sem o constrangimento de *compliance* a treliça ótima seria mais leve, porém muito instável sob carga. No entanto, com a implementação da *compliance*, não se perde nada na rigidez da treliça [2].

No Capítulo 3, serão apresentadas de forma explícita as equações utilizadas para os constrangimentos no programa.

## 2.6 Análise de Encurvadura em Barras

Quando uma barra está á compressão, é suscetível de encurvar. A este fenómeno já foi extensivamente estudado por diversos matemáticos. Euler, matemático e físico do século XVIII, propôs uma equação para a carga crítica de barras nessas condições. No entanto, muitos investigadores subsequentes questionaram a validade dessa equação para diferentes tipos de barras, incluindo, por exemplo, o Eurocódigo e a Parábola de Johnson.

A análise de encurvadura desempenha um papel essencial no projeto de estruturas, assegurando a sua estabilidade e segurança sob cargas aplicadas. Assim, é de extrema importância garantir que, durante essa análise, as barras estejam dentro de uma zona admissível, onde os parâmetros de segurança e desempenho sejam atendidos de maneira satisfatória.

## 2.6.1 Fórmula de Euler

A fórmula de Euler é uma equação que descreve a carga crítica de uma barra, geralmente relacionada ao seu comprimento e às propriedades do material que a constitui. Ela é frequentemente empregue para avaliar a estabilidade de uma barra, determinando se esta está sujeita a encurvar ou não.

Uma das vantagens da fórmula de Euler reside na sua versatilidade, pois é aplicável a diversos materiais, tornando-a uma ferramenta útil em diferentes contextos de engenharia. Além disso, a sua simplicidade facilita a derivação e o uso prático, tornando-a uma escolha frequente em análise de barras. A fórmula de Euler para a encurvadura está representada na equação (2.3).

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eq}^2} \quad (2.3)$$

Na equação (2.3),  $P_{CR}$  é a carga crítica,  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $I$  é o momento de inércia da secção transversal da barra,  $L_{eq}$  é o comprimento equivalente.

## 2.6.2 Eurocódigo

Para além da fórmula de Euler existe outras fórmulas que são capazes de calcular a tensão crítica de uma barra como, por exemplo, o Eurocódigo que é feito com base na recolha experimental de valores e posteriormente traçada uma curva de falha.

O Eurocódigo é uma série de normas técnicas europeias que estabelece diretrizes e procedimentos para o projeto estrutural de edifícios e estruturas civis na União Europeia, com o objetivo de padronizar os requisitos de projeto, construção e manutenção. Os Eurocódigos cobrem várias áreas da engenharia e promovem padrões elevados de segurança e qualidade em projetos e construções em toda a União Europeia.

### 2.6.2.1 Eurocódigo 3 (EN 1993)

O Eurocódigo 3 [10] é uma parte específica da série de Eurocódigos que trata das estruturas de aço. Ele fornece diretrizes detalhadas para o projeto e dimensionamento de estruturas de aço, abrangendo uma ampla variedade de aplicações, desde edifícios e pontes até estruturas industriais. O Eurocódigo 3 estabelece padrões para garantir a segurança e a eficiência das estruturas de aço em toda a União Europeia.

Na parte relevante do Eurocódigo, a análise de encurvadura foi realizada em várias barras com diferentes tamanhos, determinando a tensão limite que cada uma podia suportar. Em seguida, um gráfico de dispersão foi gerado com os resultados e, a partir disso, a curva de ajuste mais próxima foi calculada.

A equação (2.4) expressa a esbelteza,  $\lambda$ , de um elemento, esta é dada pelas características da barra.

$$\lambda = \frac{L_{eq}}{i} \quad (2.4)$$

Onde,

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} ; \quad I = \frac{\pi}{4} r^4 ; \quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (2.5)$$

A esbelteza normalizada,  $\bar{\lambda}$ , é dada pela equação (2.9).

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}}} \quad (2.6)$$

A equação (2.7) apresenta a fórmula para o cálculo da carga crítica de acordo com o Eurocódigo 3.

$$N_{Rd} = \frac{\chi A \sigma_c}{\gamma_{M1}} \quad (2.7)$$

Onde  $N_{Rd}$  é o esforço axial resistente,  $A$  é a área da secção transversal da barra,  $\sigma_c$  é a tensão de cedência,  $\gamma_{M1}$  é o fator de segurança e  $\chi$  é o fator de redução à encurvadura dado pela equação (2.8).

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1 \quad (2.8)$$

Onde  $\bar{\lambda}$  é esbelteza normalizada e  $\phi$  é obtido pela equação (2.9).

$$\phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}^2] \quad (2.9)$$

Onde  $\alpha$  é o fator de imperfeição com o valor de 0,49 e  $\bar{\lambda}_0$  é 0,2.

### 2.6.2.2 Eurocódigo 9 (EN 1999)

O Eurocódigo 9 [11] é uma parte da série de Eurocódigos que lida com as estruturas de alumínio. Assim como o Eurocódigo 3, ele fornece diretrizes detalhadas para o projeto e dimensionamento de estruturas de alumínio, abrangendo uma ampla gama de aplicações, desde edifícios até estruturas marítimas e aeroespaciais. O Eurocódigo 9 visa garantir que as estruturas de alumínio sejam seguras e duráveis em toda a União Europeia.

A equação (2.10) apresenta a fórmula para o cálculo da carga crítica de acordo com o Eurocódigo 9 [12].

$$N_{Rd} = \frac{k\chi Af_0}{\gamma_{M1}} \quad (2.10)$$

Onde  $N_{Rd}$  é o esforço axial resistente,  $A$  é a área da seção,  $\gamma_{M1}$  é coeficiente de segurança,  $\chi$  é o fator de redução devido à encurvadura dado pela equação (2.8) e (2.9),  $f_0$  é o valor característico da tensão limite de proporcionalidade 0,2% e  $k$  é dado pela equação (2.11). Na equação (2.9) o fator de imperfeição,  $\alpha$ , assume o valor de 0,32 e  $\bar{\lambda}_0$  é 0 [10].

$$\begin{cases} k = 1 + 0,04(4\bar{\lambda})^{0,5-\bar{\lambda}} - 0,22\bar{\lambda}^{1,4(1-\bar{\lambda})} & \text{se } \bar{\lambda} > 0,2 \\ k = 1 & \text{se } \bar{\lambda} \leq 0,2 \end{cases} \quad (2.11)$$

### 2.6.3 Parábola de Johnson

Como alternativa, temos a Parábola de Johnson [9], que combina duas partes distintas, sendo a primeira uma parábola e a segunda a fórmula de Euler. Essa função é diferenciável e aproxima-se do Eurocódigo no primeiro segmento, fornecendo uma maior margem de segurança, especialmente para as barras menos esbeltas. Na equação (2.12), podemos observar a equação da tensão crítica conforme definida por Johnson no primeiro segmento, enquanto a fórmula de Euler é aplicada no segundo segmento [11].

$$\begin{cases} \sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_y}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{l}{k} \right)^2, & 0 \leq \frac{l}{k} \leq \left( \frac{l}{k} \right)_{cr} \\ \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left( \frac{l}{k} \right)^2}, & \frac{l}{k} > \left( \frac{l}{k} \right)_{cr} \end{cases} \quad (2.12)$$

Onde  $\sigma_{cr}$  é a tensão crítica,  $\sigma_y$  é a tensão de cedência,  $E$  é o módulo de Young,  $l = L_{eq}$  será o comprimento equivalente da barra,  $\frac{l}{k}$  é a esbelteza  $\lambda$  e  $\left( \frac{l}{k} \right)_{cr}$  é dado pela equação (2.13).

$$\left(\frac{l}{k}\right)_{cr} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \quad (2.13)$$

No artigo de Bahtiar [11] foi conduzido um estudo experimental para avaliar o comportamento de encurvadura de 190 colunas de bambu *Guadua* de diferentes comprimentos. Essas colunas foram submetidas a uma carga axial compressiva até a falha. As propriedades geométricas e físicas de cada colmo foram medidas, assim como a sua resistência à compressão e capacidade de carga.

O artigo discute o comportamento de colunas longas em bambu *Guadua* em relação à encurvadura. Colunas com alta esbelteza seguem a curva de Euler, enquanto colunas intermediárias seguem a fórmula da parábola de Johnson. Quando se utiliza o fator de redução de encurvadura em conjunto com o valor característico, a capacidade de carga e a resistência de colunas de bambu *Guadua* de qualquer comprimento podem ser usadas com segurança no projeto [11].

## 2.6.4 Comprimento equivalente

É fundamental observar que o comprimento efetivo de uma barra pode variar significativamente, dependendo dos tipos de apoio utilizados. Isso ocorre porque diferentes configurações de apoio induzem diferentes comportamentos de encurvadura na barra. Na

Figura 2.2 podemos observar os 4 tipos de apoios mais comuns e o respectivo comprimento equivalente.

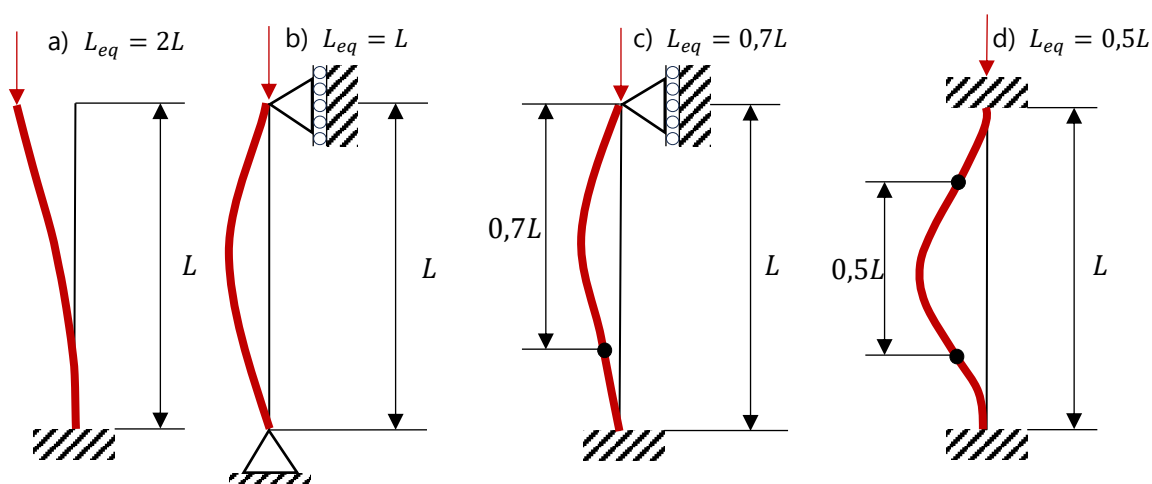


Figura 2.2 Comprimento equivalente: a) barra encastada e outro apoio livre; b) Apoio simples com móvel; c) barra encastada com apoio móvel; d) barra encastada nas duas pontas.

Na presente dissertação o comprimento equivalente será dado para os apoios da Figura 2.2. b) onde temos um  $L_{eq}$  igual ao  $L$  da barra.

## 2.7 Estabilidade Cinemática

Os mecanismos representam um desafio significativo na otimização de estruturas, e diversos autores exploraram esse tópico. Muitos concordam que a chave para resolver esse problema está na análise da estabilidade cinemática.

A estabilidade cinemática refere-se à capacidade de um sistema mecânico de manter seu equilíbrio em repouso ou seguir um caminho desejado de forma constante durante o movimento. É um conceito fundamental que se concentra em evitar desvios indesejados, garantindo que o sistema permaneça na sua posição de equilíbrio ou siga a sua trajetória planejada com precisão. A análise da estabilidade cinemática é crucial para o desenvolvimento de estratégias de controlo e algoritmos que assegurem o comportamento confiável e previsível desses sistemas.

Em 2014, dois dos autores que contribuíram para essa área são Zegard e Paulino. Eles demonstram a diferença entre a formulação elástica, que é normalmente utilizada, e a formulação plástica. Esses autores asseguram que mecanismos indesejados não ocorrem. No entanto, uma diferença entre esse trabalho e o programa NOVA Truss Opt é que apenas utilizam o estrangimento de tensão. Em outras palavras, o programa NOVA Truss Opt incorpora uma maior variedade de critérios essenciais para a otimização de estruturas [12].

### 2.7.1 Formulação elástica

A formulação elástica, equação (2.14), com  $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ , onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez,  $\mathbf{u}$  é o vetor dos deslocamentos e  $\mathbf{f}$  é o vetor das cargas aplicadas. Neste caso temos a minimização do volume sendo a variável de projeto a área e a tensão do elemento está a ser limitada superiormente e inferiormente.

$$\begin{array}{ll} \min & V = \mathbf{l}^T \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{Ku} = \mathbf{f} \\ \text{s.a.} & -\sigma_c \leq \sigma_i \leq \sigma_T \quad \text{se } a_i > 0 \\ & a_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N_b \end{array} \quad (2.14)$$

Nesta dissertação, assim como em trabalhos anteriores, optou-se por utilizar esta formulação por ser mais comum na otimização estrutural.

## 2.7.2 Formulação plástica

A formulação plástica, equação (2.15), tem como objetivo minimizar o volume verificando a equação  $\mathbf{B}^T \mathbf{n} = \mathbf{f}$ , onde  $\mathbf{B}$  é a matriz de compatibilidade,  $\mathbf{n}$  é o vetor as forças internas das barras e  $\mathbf{f}$  é o vetor das cargas aplicadas. Também é importante de referir que esta formulação deve ser usada apenas quando temos  $m \geq N$ , sendo  $m$  o número de elementos e  $N$  o número de graus de liberdade GDL [13].

$$\begin{array}{ll} \min & V = \mathbf{l}^T \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{B}^T \mathbf{n} = \mathbf{f} \\ \text{s.a.} & -\sigma_c a_i \leq n_i \leq \sigma_T a_i \quad i = 1, \dots, N_b \end{array} \quad (2.15)$$

No livro de Bendsøe e Sigmund sobre *Topology Optimazation* fazem referência que formulações elásticas podem resultar em mecanismos. Nesse mesmo livro referem que a formulação (2.15) é puramente estática, sem a inclusão de compatibilidade cinemática na formulação. No entanto, uma solução básica para esse problema de programação linear automaticamente satisfará a compatibilidade cinemática [13].

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E ANÁLISE DOS CONSTRANGIMENTOS

### 3.1 Programa Nova Truss TopOpt

O programa Nova Truss TopOpt foi desenvolvido com o objetivo de resolver problemas de otimização estrutural envolvendo estruturas reticuladas. Este programa não apenas lida com as especificações utilizadas nesta dissertação, mas também oferece ao usuário a liberdade de escolher os constrangimentos, variáveis, otimizador, e outras características. Essa flexibilidade confere versatilidade ao programa, permitindo a sua adaptação a diferentes contextos e requisitos específicos do usuário.

O programa é composto por diversas funções escritas em MATLAB, e para que o utilizador possa obter uma otimização, são necessárias três etapas: pré-processamento, processamento e pós-processamento.

O pré-processamento consiste no utilizador fornecer todos os dados do problema. Isso é realizado através da função inicial, `NOVA_TrussTopOpt.m`, que permite ao usuário escolher vários aspetos anteriormente referidos. Nesta etapa, é necessário ainda recorrer à função `TrussTopOpt_Example.m`, onde o usuário define os dados do problema, ajustando o número de barras na vertical e horizontal, o comprimento das barras, assim como as cargas aplicadas. Caso o usuário queira modificar o material ou verificar as propriedades em uso, pode recorrer à função `MatProp.m`.

Após todas as configurações estarem conforme desejado, execução da função `NOVA_TrussTopOpt.m` apresenta um monitor com a estrutura e gráficos da função objetivo e dos constrangimentos, que variam a cada iteração. Esta é a etapa do processamento, onde o programa procura a solução ótima para o problema.

Ao concluir a execução, existe o pós-processamento, onde o programa salva ficheiros em formato .txt e .mat para análises futuras.

A seguir, apresenta-se um resumo conciso das funções mais relevantes que ainda não foram abordadas, descrevendo as suas funcionalidades específicas em relação ao contexto do problema.

Main.m - Recolhe os valores da função objetivo, dos constrangimentos e das suas sensibilidades, de acordo com a formulação do problema.

TrussTopOpt\_obj.m - Fornece o valor da função objetivo, assim como as suas sensibilidades.

TrussTopOpt\_con.m - Fornece os valores dos constrangimentos e das sensibilidades associadas.

ConBuck.m - Realiza o cálculo dos valores dos constrangimentos de encurvadura, das suas sensibilidades e o cálculo do comprimento equivalente de encurvadura de cada barra ao longo do processo iterativo de otimização.

ConStress.m - Calcula os valores dos constrangimentos de tensão e das suas sensibilidades correspondentes.

MEF\_MA.m - Implementa o método dos elementos finitos, o método adjunto na derivada da tensão e calcula a *compliance* da estrutura.

CEAnalysis.m - Identifica as cadeias presentes na *ground structure*.

MMA\_sub.m, MMA\_subsol.m e kktcheck.m - Funções relacionadas com o algoritmo de otimização utilizado (MMA), que é frequentemente utilizado em problemas de otimização de topologia.

Na presente dissertação, implementou-se o constrangimento de *compliance* nas funções MEF\_MA.m e TrussTopOpt\_con.m. Além disso, foi criada uma função chamada verificacao.m, que, ao final da otimização, verifica se a estrutura obtida é um mecanismo, exibindo uma caixa de diálogo com essa informação. Durante a implementação, foi identificado e corrigido um erro na equação da derivada da tensão crítica na parcela que contém o comprimento equivalente, relativamente à versão anterior do programa desenvolvida por Pereira [7].

Adicionalmente, com o objetivo de analisar a estabilidade da estrutura no final da otimização, é gerado um arquivo .txt contendo dados sobre a classificação da estrutura reticulada em termos de ser interior, exterior e globalmente isostática, hipostática e hiperestática.

## 3.2 Ground Structure

A *ground structure* é a estrutura inicial com o máximo de conectividades possíveis (barras ligando os nós entre si), ao longo do domínio definido, sendo que as barras criadas apenas têm ligações de primeira ordem, i.e., apenas ligam os nós imediatamente vizinhos. Isto ocorre na função `Ground_StructureIII.m`.

Assim que a função é iniciada, são utilizados os aspectos definidos pelo usuário na função `TrussTopOpt_Example.m`. Nessa função, as barras exteriores formam sempre um quadrilátero retângulo, permitindo que a proporção do retângulo varie, tanto como o comprimento das barras. Essa abordagem proporciona uma maior adaptabilidade ao *design* da estrutura, possibilitando ajustes na disposição e comprimento das barras de acordo com as preferências do usuário.

A função começa definindo os nós da estrutura, começando no canto inferior esquerdo, conforme ilustrado na Figura 3.1.

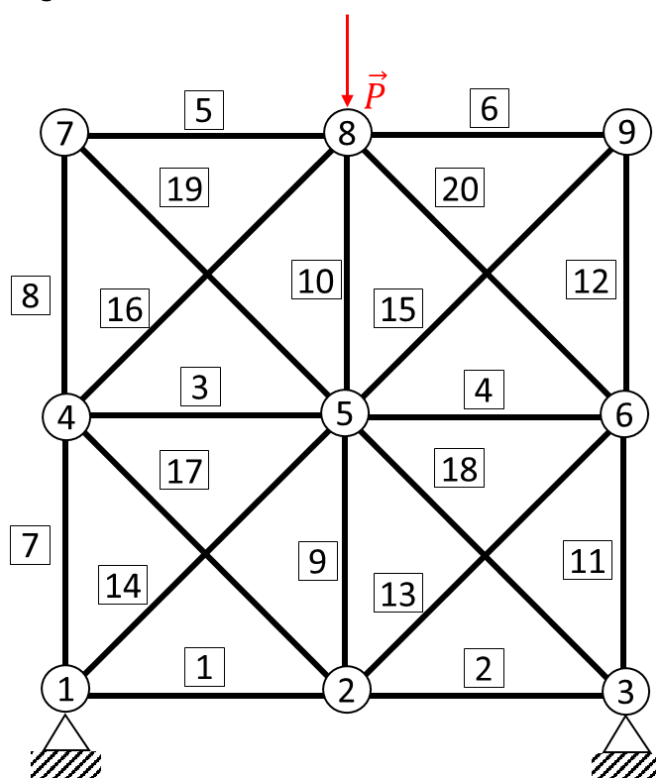


Figura 3.1 Exemplo de uma *ground structure* 2x2 com a numeração os elementos.

Em seguida a criação das barras é feita pela seguinte ordem: (1º) horizontais {1,2,3,4,5,6}, (2º) verticais {7,8,9,10,11,12}, (3º) diagonais com 45º {13,14,15,16} e (4º) diagonais com 135º {17,18,19,20}.

### 3.3 Variáveis de Projeto

De maneira semelhante à abordagem empregada no trabalho de Pereira [7], o programa opera considerando duas variáveis para cada barra, uma de natureza topológica e outra dimensional. O número de variáveis é igual ao dobro do número de elementos,  $NE$ . A variável topológica, denominada densidade artificial e representada pelo vetor  $\mathbf{x}_\rho$  de dimensão  $1 \times NE$ , desempenha o papel crucial de determinar a presença ou ausência de uma barra na estrutura final. Notavelmente, essa variável assume valores contínuos, variando no intervalo de 0 a 1. No entanto, ao atingir a fase final da otimização, incorporam-se técnicas de penalização, designadamente por meio de constrangimentos relacionados com as densidades intermédias, de forma que estas sejam penalizadas e não se figurem no *layout* final.

A variável dimensional refere-se à área da secção transversal da barra, representada pelo vetor  $\mathbf{x}_A$  de dimensão  $1 \times NE$ , com a sua variação restrita aos limites definidos por  $A_{min}$  e  $A_{max}$ .

O vetor de variáveis de projeto,  $\mathbf{x}$ , de dimensão  $1 \times 2NE$ , incorpora ambas as variáveis, como pode ser observado na equação (3.1).

$$\mathbf{x} = [x_{\rho_1}, x_{A_1}, x_{\rho_2}, x_{A_2}, \dots, x_{\rho_{NE}}, x_{A_{NE}}] \quad (3.1)$$

O uso de um fator de escala, representado por  $\phi$  na equação (3.2), torna-se imperativo devido às recomendações de utilização do algoritmo MMA. Este algoritmo sugere que as variáveis sejam dimensionadas de acordo com a faixa de valores  $0,1 \leq x_i^{max} - x_i^{min} \leq 100$ . Portanto, ao introduzir o fator de escala  $\phi$  na equação (3.2), procura-se garantir que as variáveis estejam em uma escala adequada para a eficácia e convergência apropriada do algoritmo MMA durante o processo de otimização. Isso contribui para uma execução mais eficiente e estável do algoritmo.

$$A_i = \phi x_{A_i} \quad (3.2)$$

Na expressão (3.3), a lei SIMP atua como método de interpolação entre as duas fases, material e "vazio", neste caso.

$$\chi_e(x_{\rho_1}) = x_{\rho_1}^p \chi^1 + (1 - x_{\rho_1}^p) \chi^0 \quad (3.3)$$

As propriedades do material sólido são representadas por  $\chi^1$  enquanto  $\chi^0$  denota as propriedades do material "vazio". A interpolação segundo a lei SIMP será aplicada à massa específica do material ( $\rho_e$ ), ao módulo de Young ( $E_e$ ) e à tensão admissível, ( $\sigma_{adm}$ ), de acordo com as equações (3.4), (3.5) e (3.6), respetivamente.

$$\rho_e(x_{\rho_e}) = x_{\rho_e}^{p_1} \rho^1 + (1 - x_{\rho_e}^{p_1}) \rho^0 \quad (3.4)$$

$$E_e(x_{\rho_e}) = x_{\rho_e}^{p_2} E^1 + (1 - x_{\rho_e}^{p_2}) E^0 \quad (3.5)$$

$$\sigma_{adm_e}(x_{\rho_e}) = x_{\rho_e}^{p_3} \sigma_{adm}^1 + (1 - x_{\rho_e}^{p_3}) \sigma_{adm}^0 \quad (3.6)$$

Para evitar matrizes de rigidez singulares, o valor de  $E^0$  não é zero, mas sim muito pequeno,  $1 \times 10^{-5}$ , de modo a não interferir na solução. É essencial destacar que o módulo de Young utilizado na análise de *compliance*,  $E_e$ , também é dado pela equação (3.5), no entanto o seu expoente de penalização,  $p_4$ , é contínuo. No subcapítulo 3.7 irá ser abordado a estratégia de penalização.

### 3.4 Função Objetivo

Como anteriormente referido o programa tem como objetivo minimizar a massa da estrutura, cumprindo com os constrangimentos de tensão, encurvadura, *compliance* e densidades intermédias. Pode-se representar a função objetivo pela equação (3.7).

$$M(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A) = \sum_{e=1}^{NE} \rho_e(x_{\rho_e}) L_e x_{A_e} \phi \quad (3.7)$$

Onde  $NE$  é o número de elementos e  $\phi$  é o fator escala.  $L_e$  e  $x_{A_e}$  representam, respetivamente o comprimento e a variável área do elemento finito. Conforme evidenciado na equação (3.4),  $\rho_e$  é a densidade específica do material no elemento  $e$ , dependendo da variável densidade artificial  $x_{\rho_e}$ .

## 3.5 Constrangimentos

### 3.5.1 Encurvadura

De modo a seguir o trabalho de Pereira [7], a metodologia do constrangimento encurvadura foi implementado.

O constrangimento de encurvadura tem como base a equação (3.8), que envolve a tensão do elemento,  $\sigma_e$ , e a tensão crítica de Euler para elementos de secção circular articulados nas extremidades,  $\sigma_{crit_e}$ , definidas pelas equações (3.9) e (3.10), respetivamente.

$$-\frac{\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{crit_e}(x_{\rho_e}, x_{A_e})} - 1 \leq 0 \quad (3.8)$$

Com,

$$\sigma_{crit_e}(x_{\rho_e}, x_{A_e}) = \frac{\pi E_e(x_{\rho_e}) x_{A_e} \phi}{4L_e^2} \quad (3.9)$$

$$\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e) = E_e(x_{\rho_e}) \varepsilon_e(\mathbf{u}_e) \quad (3.10)$$

Onde,  $E_e(x_{\rho_e})$  é o módulo de Young definido na equação (3.5),  $L_e$  é o comprimento do elemento e  $\varepsilon_e(\mathbf{u}_e)$  é a extensão do elemento.

Quando uma barra tende a desaparecer ao longo das iterações, a sua densidade diminui e a tensão crítica também diminui, sendo que estes valores tornam-se muito próximos. Isso pode violar o constrangimento de encurvadura, impedindo a eliminação da barra. Para evitar essa possível violação, quando a densidade tende para zero, é implementado um termo adicional na função da tensão crítica, resultando na equação (3.11). Para valores de densidade elevados, a contribuição desta parcela torna-se desprezável.

$$\sigma_{ENC_e} = \sigma_{crit_e} + \frac{1}{(x_{\rho_e} + \mu)^{p_E}} \quad (3.11)$$

Com,

$$\mu = \left( \frac{1}{\alpha_E \cdot \sigma_{adm}(x_{\rho_e})} \right)^{\frac{1}{p_E}} \quad (3.12)$$

Na equação (3.12), o valor de  $\alpha_E$  é constante. A equação (3.13) define o constrangimento de encurvadura, incorporando o parâmetro de relaxamento  $\epsilon$ .

$$g_e^{buck}(\mathbf{x}_p, x_{A_e}, \mathbf{u}_e) = \left[ -\frac{\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{ENC_e}(x_{\rho_e}, x_{A_e})} - 1 \right] x_{\rho_e} - \epsilon \leq 0 \quad (3.13)$$

No âmbito desta dissertação e no contexto de encurvadura de barras, quando se usa o termo "cadeias" isso refere-se à situação de num nó da treliça apenas existirem duas barras, i.e., dois elementos finitos de barra, colineares. Dessa forma, esses dois membros colineares são para ser interpretados como definindo apenas uma única barra, com um comprimento de encurvadura equivalente igual à soma dos comprimentos dos dois membros. O nó entre estes dois membros colineares é, na verdade, suportado pelas barras da *ground structure* conectadas a este embora com rigidez associada muito baixa de modo a poderem-se desprezar. A análise deste fenómeno de cadeias é essencial, pois a resistência à encurvadura é muito sensível à variação do comprimento equivalente que se considera para a barra que está a ser calculada.

As cadeias podem surgir ao longo da otimização à medida que barras da *ground structure* vão sendo "eliminadas" ou ficam com a rigidez mínima considerada para interpretar ausência de barra. Ademais, tais cadeias podem conter mais de dois elementos finitos de barra, dependendo do problema.

Para uma melhor explicação da formação das cadeias, apresenta-se a Figura 3.2. Nesta figura, observamos uma pequena parte de uma estrutura, onde analisaremos apenas as barras 1, 2, 3 e 4, bem como as barras adjacentes nos nós 2, 3 e 4. As barras a tracejado representam as possíveis barras adjacentes. As barras 1, 2, 3, 4 podem formar seis cadeias diferentes: a (1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 2, 3), (2, 3, 4), ou a (1, 2, 3, 4). Sendo possível as cadeias (1, 2) e (3, 4) estarem formadas e não estar formada a cadeia (1, 2, 3, 4).

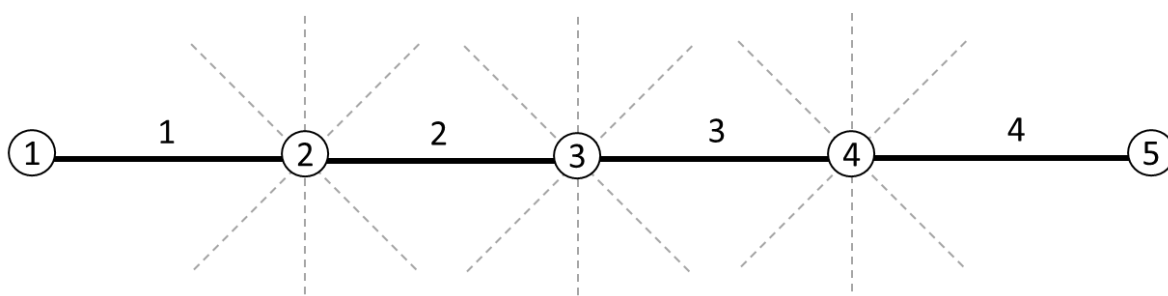


Figura 3.2 Formação de cadeias.

Analise-se o elemento de barra 2, pois tem barras adjacentes à direita e à esquerda.

O  $L_{eq}$  considerado no cálculo à encurvadura desse elemento de barra é em função da existência das barras adjacentes nos nós 2 e 3, e isso é feito através do somatório das densidades adjacentes,  $\rho_{adj(n)}^*$  dado pela equação (3.14).

$$\rho_{adj(n)}^* = \sum_{j \in \Gamma_{adj(n)}} x_{\rho_j} \quad (3.14)$$

Onde  $\Gamma_{adj(n)}$  são os elementos adjacentes (a tracejado) do nó  $n$ . Se este somatório for inferior à unidade ( $<1$ ) pode considerar-se que o nó não é suportado e, portanto, uma cadeia de pelo menos dois elementos é formada com comprimento igual à soma dos comprimentos desses elementos.

Para garantir que a variação do valor do comprimento equivalente seja contínua, foi desenvolvida a equação (3.15), na qual, à medida que  $\rho_{adj(n)}^*$  diminui, a percentagem do comprimento  $L_j$  aumenta na definição do comprimento equivalente  $L_{eq_i}$ .

$$L_{eq_i} = L_i + (1 - \rho_{adj(n)}^*)L_j \quad (3.15)$$

No entanto, quando  $\rho_{adj(n)}^*$  é maior que a unidade ( $>1$ ), a equação (3.15) não funciona adequadamente. Para contornar isso, adiciona-se uma função  $\beta(\rho_{adj(n)}^*)$  conforme definida pela equação (3.17), resultando em um comprimento equivalente ajustado pela equação (3.16).

$$L_{eq_i} = L_i + \beta(\rho_{adj(n)}^*)L_j \quad (3.16)$$

$$\beta(\rho_{adj(n)}^*) = \begin{cases} (1 - \rho_{adj(n)}^*)^{p_L} & , \rho_{adj(n)}^* < 1 \\ 0 & , \rho_{adj(n)}^* \geq 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

Onde  $p_L$  é o expoente de penalização do comprimento equivalente de encurvadura.

No entanto, considerando que a barra 2 está situada entre a barra 1 à esquerda e as barras 3, 4 e 5 à direita, o cálculo final do comprimento de encurvadura leva em conta ambos os lados, resultando na equação (3.18).

$$L_{Enc_e}(\mathbf{x}_\rho) = L_e + \sum_{i=1}^{N_l} \left( L_{e-i} \prod_{n=1}^i \beta(\rho_{adj_n}^*) \right) + \sum_{j=1}^{N_r} \left( L_{e+j} \prod_{k=1}^j \beta(\rho_{adj_k}^*) \right) \quad (3.18)$$

Onde  $e$  é o elemento de barra atual,  $i$  e  $n$  são o elemento e o nó à esquerda respectivamente e  $j$  e  $k$  são os elementos e os nós à direita respectivamente.

Voltando ao exemplo anterior para a barra 2, o comprimento de encurvadura é calculado utilizando a equação (3.19) considerando os elementos e nós adjacentes. Para a barra 4, o comprimento de encurvadura é calculado pela equação (3.20).

$$L_{Enc_2} = L_2 + \beta(\rho_{adj(2)}^*)L_1 + \beta(\rho_{adj(3)}^*)[L_3 + \beta(\rho_{adj(4)}^*)L_4] \quad (3.19)$$

$$L_{Enc_4} = L_4 + \beta(\rho_{adj(4)}^*)[L_3 + \beta(\rho_{adj(3)}^*)[L_2 + \beta(\rho_{adj(2)}^*)L_1]] \quad (3.20)$$

### 3.5.2 Tensão

A presente dissertação segue a metodologia proposta por Pereira [7] para a implementação do constrangimento de tensão. A equação (3.21) foi escolhida devido à sua característica de continuidade e diferenciabilidade em todo o domínio.

$$\left( \frac{\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{adm_e}(x_{\rho_e})} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (3.21)$$

Onde,  $\sigma_{adm_e}$  é a tensão admissível do elemento expressa na equação (3.6) e  $\sigma_e$  é a tensão do elemento é dada pela equação (3.10).

A introdução do parâmetro de relaxamento,  $\epsilon$ , conclui o constrangimento de tensão representado na equação (3.22).

$$g_e^{stress}(x_{\rho_e}, x_{A_e}, \mathbf{u}_e) = \left[ \left( \frac{\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{adm_e}(x_{\rho_e})} \right)^2 - 1 \right] x_{\rho_e} - \epsilon \leq 0 \quad (3.22)$$

### 3.5.3 Densidades Intermédias

Foi implementado o constrangimento das densidades intermédias,  $g^\eta$ , com o objetivo de melhorar a aproximação das variáveis de densidade aos seus valores discretos, 0 e 1. Esse constrangimento, definido pela equação (3.23), consiste num somatório de termos quadráticos,  $\varphi$ , normalizado e controlado pelo parâmetro  $\eta$ .

$$g^\eta(\mathbf{x}_\rho) = \frac{\varphi(\mathbf{x}_\rho)}{\eta} - 1 = \frac{\sum_{e=1}^{NE} [(\bar{x}_\rho - x_{\rho_e})(x_{\rho_e} - \underline{x}_\rho)]}{\eta} - 1 \leq 0 \quad (3.23)$$

Onde  $\bar{x}_\rho$  e  $\underline{x}_\rho$  são, respetivamente, o limite superior e o limite inferior da variável densidade no contexto do problema. Quanto mais intermédios forem os valores das variáveis,  $\mathbf{x}_\rho$ , maior será o somatório dos termos quadráticos,  $\varphi(\mathbf{x}_\rho)$ , o que, por sua vez, aumenta a probabilidade de violação do constrangimento. O parâmetro  $\eta$  controla a tolerância em relação aos valores intermédios, sendo que quanto menor o valor de  $\eta$ , menor é a tolerância do constrangimento. Contudo, é importante definir um valor mínimo para  $\eta$  e utilizar uma *continuation approach* para facilitar a satisfação do constrangimento e melhorar a convergência do algoritmo [4, 7].

### 3.5.4 Compliance

A *compliance*, representada pela equação (3.24), é utilizada para descrever a capacidade de um componente ou sistema mecânico de se deformar em resposta a uma carga aplicada. Em essência, a *compliance* representa a medida da flexibilidade de uma estrutura mediante a aplicação de uma força ou carga específica.

$$C(\mathbf{u}_e) = \mathbf{f}^T \mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e^T \mathbf{K} \mathbf{u}_e \quad (3.24)$$

Onde  $\mathbf{u}_e$  é o vetor dos deslocamentos e  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez total, conforme definido pela equação (3.25).

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A) = \sum_{i=1}^{NE} \mathbf{K}_e \quad (3.25)$$

Com,

$$\mathbf{K}_e = \frac{E_e(x_{\rho_e})x_{A_e}\phi}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

O módulo de Young utilizado na análise de *compliance*,  $E_e$ , é dado pela equação (3.5), no entanto o seu expoente de penalização,  $p_4$ , é contínuo. No subcapítulo 3.7 irá ser abordado a estratégia de penalização. Como se pode observar, ao contrário dos constrangimentos de tensão e encurvadura, o constrangimento de *compliance* não é aplicado por elemento, mas sim para toda a estrutura, medida de desempenho global e não local. Portanto, a introdução

da *compliance* na formulação do problema resultará no envio de apenas mais dois constrangimentos adicionais para o otimizador o que representa um incremento de custo computacional desprezível.

As *compliances* que desejamos restringir são designadas por  $C_1$  e  $C_2$ , pois essas *compliances* não são calculadas apenas com base nos dados originais do problema. Correspondem à introdução de uma pequena carga fictícia, com direção perpendicular à carga original  $P$  no mesmo ponto de aplicação, e o seu valor é proporcional a  $P$ , garantindo que, ao modificar os dados do problema, o constrangimento da *compliance* permaneça eficaz em retirar eventuais mecanismos da solução do problema e também evitar, no problema da tensão, a solução de ausência de estrutura.

As *compliances*  $C_1$  e  $C_2$  são diferentes porque a carga extra associada a cada uma delas é aplicada de forma simétrica em relação à carga original no mesmo ponto de aplicação. Podemos dizer que  $C_1$  tem uma carga  $P^{+1}$  enquanto  $C_2$  tem uma carga  $P^{-1}$ .

O  $C_2$  foi introduzido como um mecanismo de controlo em estruturas com simetria, uma vez que, nestes casos, é necessário que  $C_1$  e  $C_2$  tenham o mesmo valor. Durante esse processo, foi identificada a falta de simetria, que levou à descoberta de um erro, anterior à presente dissertação, na implementação da derivada da tensão crítica, conforme mencionado anteriormente. Após o erro ter sido corrigido os valores de  $C_1$  e  $C_2$  para estruturas com dados simétricos eram sempre iguais.

A grande importância de ter dois constrangimentos de *compliance* é evidente em problemas não simétricos, nos quais uma força de sentido diferente pode fazer uma grande diferença. É nesse contexto que se observa se as *compliances*  $C_1$  e  $C_2$  permanecem iguais.

A equação (3.27) representa o constrangimento de *compliance*.

$$g_i^C(\mathbf{u}_e) = \frac{C_i(\mathbf{u}_e)}{C^*} - 1 \leq 0 \quad , \quad i = \{1, 2\} \quad (3.27)$$

Onde,

$$C^* = C_{padr\tilde{a}o} \cdot \zeta \quad (3.28)$$

$C_{padr\tilde{a}o}$  é a *compliance* da estrutura apenas com os dados originais. Este parâmetro padrão é utilizado juntamente com uma equação composta por ramos,  $\zeta$ , para definir o limite superior,  $C^*$ . A função  $\zeta$  atua como uma estratégia de penalização e será definida no subcapítulo 3.7.

O maior desafio ao criar este constrangimento foi definir o seu limite,  $C^*$ . Foi necessário analisar o comportamento da *compliance* ao longo das iterações e em várias estruturas, o que se revelou um processo muito demorado. Inicialmente, testou-se um limite superior e inferior, que foram ajustados para reduzir a *compliance*. No entanto, concluiu-se que essa abordagem não era a melhor. Por fim, optou-se por definir apenas um limite superior que não fosse muito restritivo nem muito flexível, de modo a permitir que a otimização prosseguisse. Esta função  $\zeta$  passou por várias versões até a sua forma final e foi testada em inúmeras estruturas, como será discutido no Capítulo 5.

### 3.6 Formulação do Problema

Após a explicação anterior, as variáveis do problema e a sua função objetivo são representadas pela equação (3.29). Em seguida, encontra-se os constrangimentos de tensão, encurvadura, *compliance* e densidades intermédias nas equações (3.31) a (3.34), respetivamente. As equações restantes, (3.30) e de (3.35) a (3.42), são utilizadas para definir os parâmetros dos constrangimentos.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A} \\ & x_{\rho_e} \in ]0,1] \\ & x_{A_e} \in [x_{A_{min}}, x_{A_{max}}] \\ & \text{s. a.} \end{aligned} \quad M(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A) = \sum_{e=1}^{NE} \rho_e(x_{\rho_e}) L_e x_{A_e} \phi \quad (3.29)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.30)$$

$$g_e^{stress}(x_{\rho_e}, x_{A_e}, \mathbf{u}_e) = \left[ \left( \frac{\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{adm_e}(x_{\rho_e})} \right)^2 - 1 \right] x_{\rho_e} - \epsilon \leq 0 \quad (3.31)$$

$$g_e^{buck}(x_{\rho_e}, x_{A_e}, \mathbf{u}_e) = \left[ -\frac{\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{ENC_e}(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A)} - 1 \right] x_{\rho_e} - \epsilon \leq 0 \quad (3.32)$$

$$g_i^C(\mathbf{u}_e) = \frac{C_i(\mathbf{u}_e)}{C^*} - 1 \leq 0, \quad i = \{1, 2\} \quad (3.33)$$

$$g^\eta(\mathbf{x}_\rho) = \frac{\varphi(\mathbf{x}_\rho)}{\eta} - 1 \leq 0 \quad (3.34)$$

Onde,

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A) = \sum_{i=1}^{NE} \mathbf{K}_e; \quad \mathbf{K}_e = \frac{E_e(x_{\rho_e}) x_{A_e} \phi}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\sigma_{ENC_e}(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A) = \frac{\pi E_e(x_{\rho_e}) x_{A_e} \phi}{4 L_{ENC_e}^2(\mathbf{x}_\rho)} + \left[ x_{\rho_e} + \left( \alpha_E \sigma_{adm_e}(x_{\rho_e}) \right)^{-\frac{1}{pE}} \right]^{-pE} \quad (3.36)$$

$$L_{ENC_e}(\mathbf{x}_\rho) = L_e + \sum_{i=1}^{N_l} \left( L_{e-i} \prod_{n=1}^i \beta(\rho_{adj_n}^*) \right) + \sum_{j=1}^{N_r} \left( L_{e+j} \prod_{k=1}^j \beta(\rho_{adj_k}^*) \right) \quad (3.37)$$

$$\beta(\rho_{adj_n}^*) = \begin{cases} (1 - \rho_{adj_n}^*)^{pL}, & \rho_{adj_n}^* < 1 \\ 0, & \rho_{adj_n}^* \geq 1 \end{cases}; \quad \rho_{adj_n}^* = \sum_{j \in \Gamma_{adj_k}} x_{\rho_j} < 1 \quad (3.38)$$

$$\varphi(\mathbf{x}_\rho) = \sum_{e=1}^{NE} \left[ (\bar{x}_\rho - x_{\rho_e}) (x_{\rho_e} - \underline{x}_\rho) \right] \quad (3.39)$$

$$C(\mathbf{u}_e) = \mathbf{f}^T \mathbf{u}_e \quad (3.40)$$

$$C^* = C_{padr\tilde{a}o} \cdot \zeta \quad (3.41)$$

$$e = 1, \dots, NE \quad (3.42)$$

Através das equações (3.29) a (3.42), conseguimos ter uma formulação completa do problema.

### 3.7 Estratégia de penalização

A estratégia de penalização é um conjunto de métodos para garantir que a solução de um problema contínuo de otimização se aproxime da solução discreta, onde se pretende que as variáveis de densidade tomem os valores de 0 ou 1. Isso é essencial para evitar soluções com valores intermédios de densidade. Duas técnicas principais são empregadas: a interpolação SIMP, que penaliza, mas não evita completamente, valores intermédios de densidade, e o constrangimento de penalização de densidades intermédias  $g^\eta$ , que impede a seleção desses valores como solução final.

Para evitar que o algoritmo fique preso em mínimos locais, é adotada uma *continuation approach*. Os expoentes de penalização aumentam gradualmente ao longo das iterações, enquanto o parâmetro  $\eta$  do constrangimento  $g^\eta$  diminui progressivamente até atingir um valor mínimo.

Essa estratégia é baseada em trabalhos anteriores e é dividida em quatro intervalos do histórico de iterações:  $I_1, I_2, I_3$  e  $I_4$ . No primeiro intervalo, os expoentes de penalização aumentam até atingir um máximo estipulado de 4, enquanto  $\eta$  permanece constante em um valor elevado para evitar a ativação do constrangimento  $g^\eta$ . No segundo intervalo, os expoentes

permanecem constantes, assim como  $\eta$ . Este intervalo permite ao programa estabilizar a convergência com os valores dos parâmetros tomados no final do primeiro intervalo.

O comprimento do intervalo  $I_2$  foi implementado como uma pequena percentagem do comprimento do  $I_1$  para permitir uma convergência mais rápida do programa. Embora esse intervalo seja significativamente menor, é necessário para uma transição suave. Geralmente, os valores de  $I_1$  variam entre 10 e 30, enquanto os valores de  $I_2$  variam entre 5 e 10.

No intervalo  $I_3$ , equivalente ao  $I_2$  nos trabalhos anteriores, os valores dos expoentes de penalização permanecem constantes, enquanto o parâmetro  $\eta$  começa a diminuir.

O intervalo  $I_4$  permite que o programa convirja para a estrutura ótima, onde os expoentes de penalização e  $\eta$  permanecem constantes. Durante esse intervalo, permitimos que o programa faça as últimas iterações para a convergência final. Geralmente,  $I_4$  é definido como 10.

Na Tabela 3.1, são apresentados os valores dos quatro expoentes de penalização, juntamente com o parâmetro  $\eta$ , que permanecem constantes ao longo de todo o processo de otimização, desde o início até o final. Esses valores são essenciais para determinar a penalização das densidades intermédias e garantir a convergência adequada do algoritmo de otimização.

Tabela 3.1 Intervalo de variação dos parâmetros de penalização.

Expoente	$p_1, p_2, p_3$	$p_4$	$\eta$
Intervalo de valores	[1; 4]	[4; 4]	$\left[ (1 + \delta) \varphi_{i_{start-1}}^\eta ; 0,001 \right]$

Os valores  $p_1, p_2$  e  $p_3$  correspondem aos expoentes de penalização da densidade específica, rigidez e da tensão admissível, respetivamente. O valor  $p_4$  representa o expoente de penalização da *compliance*, o qual permanece constante em 4, uma vez que é utilizado um método diferente de penalização para a *compliance*. Esses valores desempenham um papel crucial na formulação do problema de otimização e na garantia da convergência adequada do algoritmo.

Na Figura 3.3, é apresentada a representação dos expoentes  $p_1, p_2, p_3$  e  $p_4$ , juntamente com o parâmetro  $\eta$ , ao longo das iterações do processo de otimização.

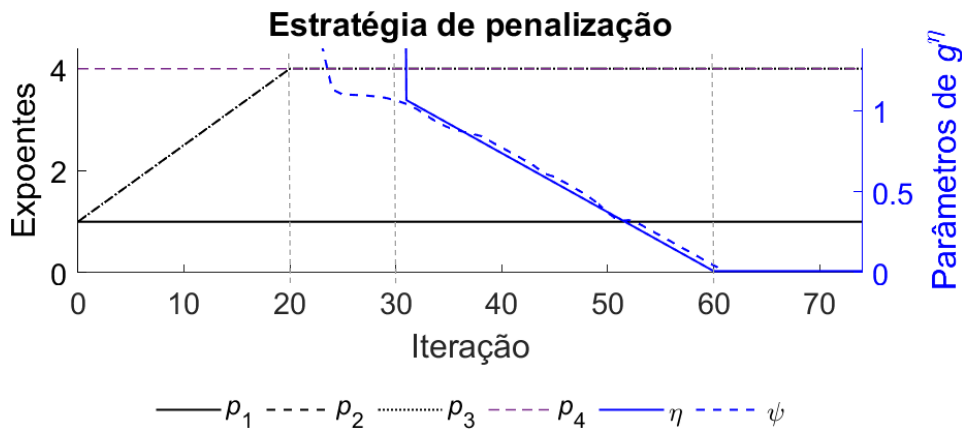


Figura 3.3 Gráfico da estratégia de penalização.

As linhas cinzas tracejadas (---) representam os diferentes intervalos, nomeadamente  $I_1 = [0, 20]$ ,  $I_2 = [20, 30]$ ,  $I_3 = [30, 60]$  e  $I_4 = [60, 75]$ .

O expoente de penalização da densidade específica,  $p_1$ , está representado pela linha preta sólida (—). Os expoentes da rigidez e da tensão admissível,  $p_2$  e  $p_3$ , estão representados pela linha preta tracejada (---) e a linha preta tracejada curta (⋯), respetivamente.

A linha tracejada roxa (---) representa o expoente de penalização da rigidez da *compliance*,  $p_4$ .

A linha azul sólida (—) representa o parâmetro  $\eta$ . É importante notar que o gráfico não está em escala, é apenas esquemático, visto que o  $\eta$  tem um valor muito elevado no início. As linhas tracejadas são as linhas de separação dos diferentes intervalos ao longo do processo de otimização.

Em relação à penalização dos expoentes de densidade, rigidez e tensão  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ , observamos um crescimento de 0 até  $I_1$ . De  $I_1$  até o final, os valores permanecem constantes em seu máximo, que é 4.

Analisando a evolução temporal do valor de  $\eta$ , observamos que ele permanece constantemente elevado até  $I_1 + I_2$ , onde começa a diminuir até  $I_1 + I_2 + I_3$ , mantendo-se constante no seu valor mínimo a partir desse ponto.

Como mencionado anteriormente, a penalização para a *compliance* é realizada multiplicando-se uma equação  $\zeta$  ao valor de referência do parâmetro de *compliance*, que é calculado com base nos dados da estrutura. Esta equação  $\zeta$  é definida por três ramos, onde o primeiro ramo representa o intervalo  $I_1$ , o segundo ramo engloba os intervalos  $I_2$  e  $I_3$ , e o terceiro ramo representa o intervalo  $I_4$ .

A equação (3.43) representa a função  $\zeta$ .

$$\zeta = \begin{cases} -\frac{0,3}{I_1}i + 1,5 & i < I_1 \\ \frac{-0.15}{I_2 + I_3}(i - I_1) + 1,2 & I_1 \leq i < I_1 + I_2 + I_3 \\ 5 & I_1 + I_2 + I_3 \leq i < I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{cases} \quad (3.43)$$

Na Figura 3.4, encontra-se um gráfico representando a função  $\zeta$ .

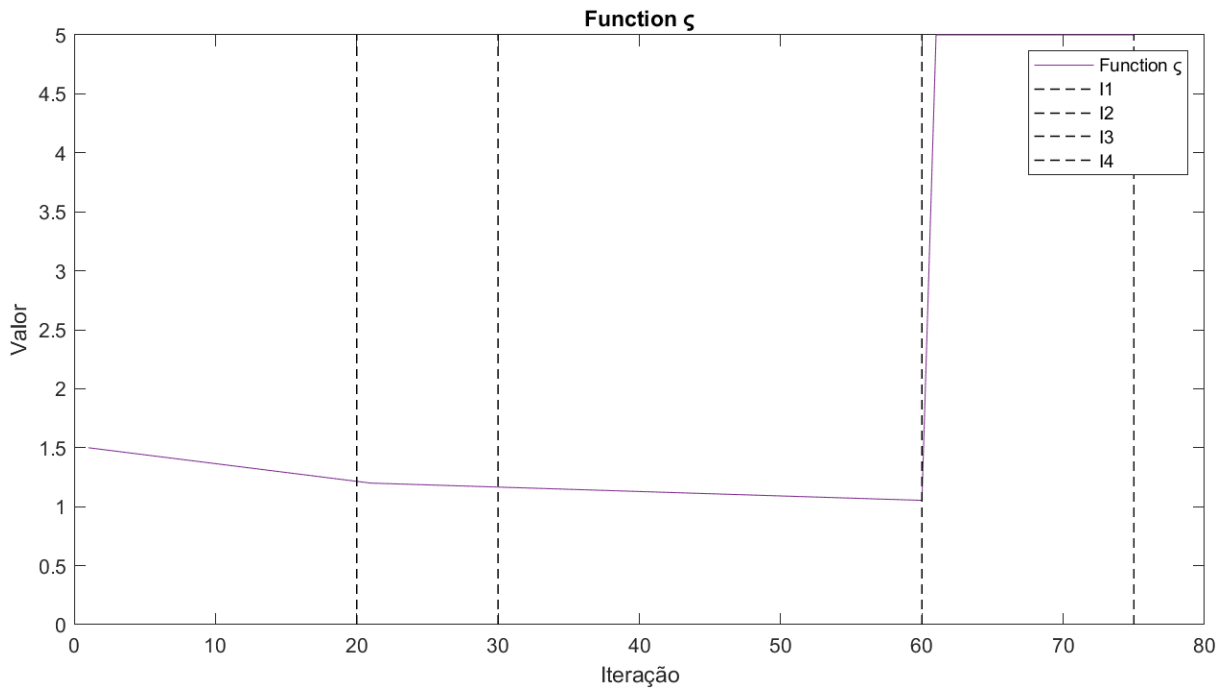


Figura 3.4 Estratégia de penalização da *compliance*,  $\zeta$ .

No último intervalo, já vamos ter uma estrutura que não é um mecanismo, o que significa que não são necessárias mais intervenções como o constrangimento da *compliance*. Deste modo o  $C_{padrão}$  é multiplicado por 5 o que torna o  $C^*$  um valor elevado, permitindo que o constrangimento de *compliance* não influencie o MMA. Desta forma possibilita que a estrutura convirja considerando apenas o constrangimento das densidades intermédias.

Para garantir que o  $C^*$  não aumente ao longo das iterações, mesmo quando pode ocorrer oscilações no  $C_{padrão}$ , foi implantado uma condição. Esta condição verifica se o  $C^*$  da iteração atual,  $C^*_{novo}$ , é menor do que o  $C^*$  da iteração anterior,  $C^*_{antigo}$ . Se  $C^*_{novo} < C^*_{antigo}$  então  $C^* = C^*_{novo}$ . Caso contrário,  $C^*_{novo} > C^*_{antigo}$ , e  $C^* = C^*_{antigo}$ .

No entanto, para os casos em que o  $C^*_{antigo}$  é menor, existe um mecanismo de *safety fall* que verifica o desvio entre o  $C^*_{novo}$  e o  $C^*_{antigo}$ . No primeiro intervalo, se o desvio for menor que 40% a condição referida no paragrafo anterior irá se manter,  $C^* = C^*_{antigo}$ . Se o desvio for

superior a 40%, o  $C^*$  será atualizado com o valor novo,  $C^* = C_{novo}^*$ . Para os intervalos  $I_2$  e  $I_3$  o *safety fall* é feito com base se o desvio é maior ou menor de 20%. A razão pela qual o primeiro intervalo ter 40% é porque este intervalo é quando a estrutura é mais frágil pois, cadeias estão a ser formadas, barras está com densidades quase muito pequenas, e é normal o constrangimento ser violado, no entanto é necessário permanecer na rota certa de otimização. Isto é importante para evitar que o otimizador entre num caminho de onde não consegue sair e acabar com uma estrutura inadmissível.



## CÁLCULO DE SENSIBILIDADES

### 4.1 Função objetivo

A derivada da função objetivo em relação à variável área de um elemento finito,  $x_{A_e}$ , conforme expressa na equação (4.1), é obtida diretamente por métodos analíticos. Porém, a derivada da função objetivo em relação à variável densidade artificial de um elemento finito,  $x_{\rho_e}$ , como definida na equação (4.2), é um pouco mais elaborada devido à necessidade de derivar a função de interpolação que relaciona a massa específica.

$$\frac{\partial M(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A)}{\partial x_{A_e}} = \rho_e(x_{\rho_e}) L_e \phi = (\rho^1 \cdot x_{p_e}^{p_1} + \rho^0 (1 - x_{p_e}^{p_1})) L_e \phi \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial M(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{x}_A)}{\partial x_{\rho_e}} = \frac{\partial \rho_e(x_{\rho_e})}{\partial x_{\rho_e}} L_e x_{A_e} \phi = (p_1 x_{p_e}^{p_1-1} (\rho^1 - \rho^0)) L_e x_{A_e} \phi \quad (4.2)$$

### 4.2 Constrangimento de tensão

#### 4.2.1 Derivada do constrangimento de tensão

Para o cálculo das sensibilidades do constrangimento de tensão para ambas as variáveis, foram utilizadas as regras de derivação direta. Fazendo referência ao constrangimento de tensão, conforme anteriormente definido na equação (3.22), as equações (4.3) e (4.4) referem-se às derivadas do constrangimento de tensão em relação à variável de área e de densidade, respetivamente.

$$\frac{\partial g_e^{stress}(x_{\rho_e}, x_{A_e}, \mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}_A} = 2 \frac{d\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{d\mathbf{x}_A} \left( \frac{\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{adm_e}(x_{\rho_e})} \right) x_{\rho_e}, \quad e = 1, \dots, NE \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_e^{stress}(x_{\rho_e}, x_{A_e}, \mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}_\rho} &= 2 \frac{\frac{d\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{d\mathbf{x}_\rho} \sigma_{adm_e}(x_{\rho_e}) - \frac{\partial \sigma_{adm_e}(x_{\rho_e})}{\partial \mathbf{x}_\rho} \sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{adm_e}(x_{\rho_e})} \left( \frac{\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{adm_e}(x_{\rho_e})} \right) x_{\rho_e} \\ &+ \left[ \left( \frac{\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{adm_e}(x_{\rho_e})} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial x_{\rho_e}}{\partial \mathbf{x}_\rho} \end{aligned}, \quad e = 1, \dots, NE \quad (4.4)$$

A derivada da densidade do elemento em relação ao vetor das densidades,  $\frac{\partial x_{\rho_e}}{\partial \mathbf{x}_\rho}$ , é igual a 1 quando a derivada é em relação à densidade do próprio elemento, e é 0 para os demais casos. Para calcular as derivadas da tensão,  $\frac{d\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{d\mathbf{x}_\rho}$  e  $\frac{d\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{d\mathbf{x}_A}$ , utiliza-se o método adjunto, que será detalhado posteriormente. A derivada da tensão admissível em relação ao vetor das densidades,  $\frac{\partial \sigma_{adm_e}(x_{\rho_e})}{\partial \mathbf{x}_\rho}$ , é zero para todas as densidades, exceto para a variável do próprio elemento. Neste último caso, é necessário derivar a lei de interpolação da tensão admissível, resultando na equação (4.5) [7].

$$\frac{\partial \sigma_{adm_e}(x_{\rho_e})}{\partial x_{\rho_e}} = (\sigma_{adm}^1 - \sigma_{adm}^0) x_{\rho_e}^{p_3-1} p_3 \quad (4.5)$$

## 4.2.2 Derivada da tensão

Como já mencionado, a tensão no elemento finito  $e$  é calculada conforme a expressão (3.10). Por sua vez, a extensão axial do elemento,  $\varepsilon_e$ , é derivada utilizando a transformação de coordenadas indicada na equação (4.6).

$$\begin{aligned} \varepsilon_e(\mathbf{u}_e) &= \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \\ u_{II} \\ v_{II} \end{Bmatrix} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_e(\mathbf{u}_e) &= \frac{(u_{II} - u_I) \cos \alpha + (v_{II} - v_I) \sin \alpha}{L_e} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Onde  $\mathbf{B}$  é a matriz das derivadas das funções de forma do elemento finito do tipo barra,  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação de coordenadas e  $\mathbf{u}_e$  é o vetor dos deslocamentos do elemento em coordenadas globais [7].

Ao substituir a equação (4.6) na expressão (3.10), obtém-se a formulação apresentada em (4.7) [7].

$$\sigma_e(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{u}_e) = E_e(\mathbf{x}_\rho) \frac{(u_{II} - u_I) \cos \alpha + (v_{II} - v_I) \sin \alpha}{L_e} \quad (4.7)$$

Como mencionado anteriormente, para calcular a derivada da tensão do elemento, será utilizado o método adjunto conforme anteriormente descrito pela equação (2.2). É importante ressaltar que, nesta dissertação, estamos considerando cargas constantes, sem qualquer dependência das variáveis de projeto. Portanto,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é igual a zero. Isso resulta em uma derivada de tensão utilizando o método adjunto, conforme mostrado na equação (4.8) [7].

$$\frac{d\sigma_e(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{u}_e)}{d\mathbf{x}} = \frac{\partial \sigma_e(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}} - \lambda_e^T \frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}_e \quad (4.8)$$

Onde,  $\lambda_e$ , é o vetor adjunto que resulta do problema definido em (4.9) [7].

$$\mathbf{K}\lambda_e = \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = \left( \frac{\partial \sigma_e(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{u}_e} \right)^T \quad (4.9)$$

O vetor,  $\mathbf{z}$ , é conhecido como o vetor de cargas fictícias, sendo determinado pela equação (4.10) [7].

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \left[ \frac{\partial \sigma_e(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{u}_e} \right]^T = \left[ E_e(x_{\rho_e}) \frac{\partial \varepsilon_e(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{u}_e} \right]^T ; \quad \frac{\partial \varepsilon_e(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{u}_e} = \frac{1}{L_e} \begin{Bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{z} = \left[ \frac{E_e(x_{\rho_e})}{L_e} \begin{Bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \right]^T \end{aligned} \quad (4.10)$$

Aplica-se a equação (4.8) à derivada da tensão em relação à variável área do próprio elemento, resultando assim na expressão (4.11). A parte explícita da derivada é nula, uma vez que a tensão não depende diretamente da variável área [7].

$$\frac{d\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{dx_{A_e}} = -\lambda_e^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{A_e}} \mathbf{u}_e \quad (4.11)$$

A matriz de rigidez,  $\mathbf{K}$ , de um determinado elemento finito do tipo barra é definida pela equação (3.26) anteriormente apresentada. A derivada da matriz de rigidez em ordem à área,  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{A_e}}$ , é calculada de acordo com (4.12) [7].

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{A_e}} = \frac{E_e(x_{\rho_e})\phi}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

A formulação da derivada da tensão em ordem à área do elemento é apresentada na equação (4.13), uma vez que resulta da substituição da equação (4.12) na equação (4.11) [7].

$$\frac{d\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{dx_{A_e}} = -\lambda_e^T \frac{E_e(x_{\rho_e})\phi}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_e \quad (4.13)$$

A derivada da lei de interpolação associada ao módulo de Young,  $E_e$ , é necessária para obter a derivada da tensão em relação à variável de densidade artificial do elemento,  $\frac{\partial \sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\partial x_{\rho_e}}$ . A derivada,  $\frac{\partial E_e(x_{\rho_e})}{\partial x_{\rho_e}}$ , é apresentada na equação (4.14). A derivada da matriz de rigidez em relação à variável densidade artificial do elemento é expressa na equação (4.15), onde já foi aplicada a equação (4.14) [7].

$$\frac{\partial E_e(x_{\rho_e})}{\partial x_{\rho_e}} = (E_e^1 - E_e^0)x_{\rho_e}^{p_1-1}p_1 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{\rho_e}} = \frac{\left( (E_e^1 - E_e^0)x_{\rho_e}^{p_2-1}p_2 \right) \phi x_{A_e}}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

A equação (4.8) é aplicada à derivada da tensão em relação à variável densidade artificial do próprio elemento,  $\frac{\partial \sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\partial x_{\rho_e}}$ , resultando na expressão (4.16). A parte explícita é diferente de 0 porque a tensão depende diretamente da variável densidade [7].

$$\frac{\partial \sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\partial x_{\rho_e}} = \frac{\partial E_e(x_{\rho_e})}{\partial x_{\rho_e}} \varepsilon_e(\mathbf{u}_e) - \lambda_e^T \frac{\left( (E_e^1 - E_e^0)x_{\rho_e}^{p_1-1}p_1 \right) \phi x_{A_e}}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_e \quad (4.16)$$

## 4.3 Constrangimento de encurvadura

### 4.3.1 Derivada do constrangimento de encurvadura

Para o cálculo das sensibilidades do constrangimento de encurvadura para ambas as variáveis, foram utilizadas as regras de derivação direta. Fazendo referência ao constrangimento de encurvadura, conforme anteriormente definido na equação (3.13), as equações (4.17) e (4.18) referem-se às derivadas do constrangimento de encurvadura em relação à variável de área e de densidade, respetivamente.

$$\frac{\partial g_e^{buck}(x_{\rho_e}, x_{A_e}, \mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}_A} = 2 \frac{\frac{d\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{d\mathbf{x}_A} \sigma_{Enc_e}(\mathbf{x}_\rho, x_{A_e}) - \frac{\partial \sigma_{Enc_e}(x_{\rho_e}, x_{A_e})}{\partial \mathbf{x}_A} \sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{Enc}^2(x_{\rho_e}, x_{A_e})} x_{\rho_e} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_e^{buck}(x_{\rho_e}, x_{A_e}, \mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}_\rho} &= \\ &= 2 \frac{\frac{d\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{d\mathbf{x}_\rho} \sigma_{Enc_e}(\mathbf{x}_\rho, x_{A_e}) - \frac{\partial \sigma_{Enc_e}(x_{\rho_e}, x_{A_e})}{\partial \mathbf{x}_\rho} \sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{Enc}^2(x_{\rho_e}, x_{A_e})} x_{\rho_e} + \left[ -\frac{\sigma_e(x_{\rho_e}, \mathbf{u}_e)}{\sigma_{Enc_e}(x_{\rho_e}, x_{A_e})} - 1 \right] \frac{\partial x_{\rho_e}}{\partial \mathbf{x}_\rho} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Uma das razões para aplicar o método adjunto apenas na derivada da tensão é por essa ser necessária tanto nos constrangimentos de tensão e como de encurvadura. Assim, o método adjunto é aplicado apenas uma vez, simplificando o cálculo das sensibilidades.

Como mencionado anteriormente, a derivada  $\frac{\partial x_{\rho_e}}{\partial \mathbf{x}_\rho}$  assume o valor de 1 apenas quando a derivada é em relação à densidade do próprio elemento, e assume o valor de 0 nos demais casos [7].

### 4.3.2 Derivada da tensão crítica de encurvadura

No cálculo das sensibilidades da tensão crítica de encurvadura para ambas as variáveis, foram utilizadas as regras de derivação direta. Fazendo referência à tensão crítica de encurvadura, conforme anteriormente definido na equação (3.36), as equações (4.19) e (4.20) referem-se às derivadas da tensão crítica de encurvadura em relação à variável de área e à de densidade, respetivamente.

$$\frac{\sigma_{Enc_e}(\mathbf{x}_\rho, x_{A_e})}{\partial \mathbf{x}_A} = \frac{\pi E_e(x_{\rho_e}) \phi}{4 L_{Enc_e}^2(\mathbf{x}_\rho)} \frac{\partial x_{A_e}}{\partial \mathbf{x}_A} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{Enc_e}(\mathbf{x}_\rho, x_{A_e})}{\partial \mathbf{x}_\rho} &= \frac{\pi x_{A_e} \phi}{4} \left( \frac{\partial E_e(x_{\rho_e})}{\partial \mathbf{x}_\rho} L_{Enc_e}^{-2}(\mathbf{x}_\rho) - 2 E_e(x_{\rho_e}) \frac{\partial L_{Enc_e}(\mathbf{x}_\rho)}{\partial \mathbf{x}_\rho} L_{Enc_e}^{-3}(\mathbf{x}_\rho) \right) \\ &+ \left[ -p_E \left[ x_{\rho_e} + (\alpha_E \cdot \sigma_{adm_e}(x_{\rho_e}))^{-\frac{1}{p_E}} \right]^{-(p_E+1)} \left[ \frac{\partial x_{\rho_e}}{\partial \mathbf{x}_\rho} - \frac{1}{p_E} (\alpha_E \cdot \sigma_{adm_e}(x_{\rho_e}))^{-\frac{1}{p_E+1}} \alpha_E \frac{\partial \sigma_{adm_e}(\mathbf{x}_\rho)}{\partial \mathbf{x}_\rho} \right] \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Quando a tensão crítica de um elemento é derivada em relação à sua própria variável densidade, o termo  $\frac{\partial x_{\rho_e}}{\partial \mathbf{x}_\rho}$  assume o valor de 1. Por outro lado, o termo  $\frac{\partial L_{Enc_e}(\mathbf{x}_\rho)}{\partial \mathbf{x}_\rho}$  é 0, uma vez que o comprimento equivalente do elemento varia com a densidade dos elementos adjacentes à cadeia, mas não varia com a densidade do próprio elemento.

No caso da derivada da tensão crítica em relação à variável de densidade de um elemento não relacionado, os termos  $\frac{\partial x_{\rho_e}}{\partial \mathbf{x}_\rho}$  e  $\frac{\partial L_{Enc_e}(\mathbf{x}_\rho)}{\partial \mathbf{x}_\rho}$  são iguais a 0.

No caso da derivada da tensão crítica em relação à variável de densidade de um elemento adjacente à cadeia, o termo  $\frac{\partial x_{\rho_e}}{\partial \mathbf{x}_\rho}$  é igual a 0, enquanto o termo  $\frac{\partial L_{Enc_e}(\mathbf{x}_\rho)}{\partial \mathbf{x}_\rho}$  é diferente de 0 [7].

Recorda-se o comprimento equivalente de encurvadura, conforme anteriormente descrito através da equação (3.18).

As derivadas do comprimento equivalente de encurvadura do elemento  $e$  em relação aos elementos adjacentes do nó  $w$ , para os casos quando o nó  $w$  encontra-se à esquerda e à direita do elemento  $e$ , são calculadas conforme as equações (4.21) e (4.22), respetivamente.

$$\frac{\partial L_{Enc_e}}{\partial \rho_{adj_w}^*} = \left( \prod_{n=1}^{w-1} \beta(\rho_{adj_n}^*) \right) \frac{\partial \beta(\rho_{adj_w}^*)}{\partial \rho_{adj_w}^*} \left( L_{e-w} + \sum_{i=w+1}^{N_l} \left( L_{e-i} \prod_{n=w+1}^i \beta(\rho_{adj_n}^*) \right) \right) \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial L_{Enc_e}}{\partial \rho_{adj_w}^*} = \left( \prod_{k=1}^{w-1} \beta(\rho_{adj_k}^*) \right) \frac{\partial \beta(\rho_{adj_w}^*)}{\partial \rho_{adj_w}^*} \left( L_{e+w} + \sum_{j=w+1}^{N_r} \left( L_{e+j} \prod_{k=w+1}^j \beta(\rho_{adj_k}^*) \right) \right) \quad (4.22)$$

Onde,

$$\frac{\partial \beta(\rho_{adj_w}^*)}{\partial \rho_{adj_w}^*} = -p_L (1 - \rho_{adj_w}^*)^{p_L - 1} \quad (4.23)$$

## 4.4 Constrangimento de *Compliance*

### 4.4.1 Derivada do constrangimento de *Compliance*

Para o cálculo das sensibilidades do constrangimento de *compliance* para ambas as variáveis, foram utilizadas as regras de derivação direta. Fazendo referência ao constrangimento de *compliance*, conforme anteriormente definido na equação (3.27), as equações (4.25) e (4.26) referem-se às derivadas do constrangimento de tensão em relação à variável de área e de densidade, respetivamente.

$$\frac{\partial g_{1,2}^c(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}_A} = \frac{\partial C_{1,2}(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}_A} \frac{1}{C^*} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial g_{1,2}^c(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}_\rho} = \frac{\partial C_{1,2}(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}_\rho} \frac{1}{C^*} \quad (4.25)$$

### 4.4.2 Derivada da *Compliance*

Relembrando a expressão da *compliance* anteriormente apresentada através da equação (3.24), a derivada da *compliance* em relação ao vetor de variáveis  $\mathbf{x}$  resulta na equação (4.26) [3].

$$\frac{\partial C_{1,2}(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{u}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}_e \quad (4.26)$$

A derivadas das *compliances*  $\frac{\partial C_1(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}}$  e  $\frac{\partial C_2(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}}$ , ambas têm a mesma expressão, no entanto como têm cargas aplicadas diferentes o vetor  $\mathbf{u}_e$  é diferente, resultado a valores diferentes. As derivadas da *compliance* em relação à variável de área e densidade, (4.27) e (4.28), são obtidas utilizando as equações das derivadas da matriz rigidez em relação à variável de área e densidade, equações (4.12) e (4.15), respetivamente.

$$\frac{\partial C_{1,2}(\mathbf{u}_e)}{\partial x_{A_e}} = -\mathbf{u}_e^T \frac{E_e(x_{\rho_e})\phi}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_e \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial C_{1,2}(\mathbf{u}_e)}{\partial x_{\rho_e}} = -\mathbf{u}_e^T \frac{\left((E_e^1 - E_e^0)x_{\rho_e}^{p_4-1} p_4\right)\phi x_{A_e}}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_e \quad (4.28)$$

Como referido anteriormente as derivadas  $\frac{\partial C_1(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}}$  e  $\frac{\partial C_2(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{x}}$  não tem o mesmo valor, pois possuem diferentes vetores de deslocamentos,  $\mathbf{u}_e$ , devido ao facto de que em  $C_1$  e  $C_2$  é aplicado a carga original mais uma pequena,  $P^{+1}$  e  $P^{-1}$ , respetivamente, como anteriormente referido no subcapítulo 3.5.4.

## 4.5 Constrangimento das densidades intermédias

O constrangimento das densidades intermédias é um somatório de termos quadráticos que depende apenas das variáveis de densidade e, portanto, a sua derivada em relação às variáveis de área,  $\frac{\partial g^\eta}{\partial x_A}$ , é igual a 0. Conforme observado em (4.29), o cálculo da derivada em relação às densidades é realizado pela aplicação direta das regras de derivação [7].

$$\frac{\partial g^\eta}{\partial x_{\rho_e}}(\mathbf{x}_\rho) = \frac{\partial}{\partial x_{\rho_e}} \left( \frac{\sum_{e=1}^{NE} [(\bar{x}_\rho - x_{\rho_e})(x_{\rho_e} - \underline{x}_\rho)] - \eta}{\eta} \right) = \frac{2x_{\rho_e} + \bar{x}_\rho + \underline{x}_\rho}{\eta} \quad (4.29)$$

## RESULTADOS

### 5.1 Dados dos problemas e propriedades

Os exemplos dos próximos subcapítulos apresentam várias propriedades em comum, e esta secção está destinada a destacar essas similaridades. O programa NOVA Truss TopOpt utiliza exclusivamente alumínio 150-H14 [7], mas também incluiu-se o aço ASTM A36 [14] para verificar a validade da fórmula de Euler. Na Tabela 5.1, estão listadas as propriedades tanto da fase do material sólido (alumínio e aço) quanto da fase do material "vazio", aqui também modelado no contexto do modelo numérico utilizado na otimização de topologia.

Tabela 5.1 Propriedades dos materiais utilizados nesta dissertação.

Material	Fase de material sólido		Fase de material do Vazio
	Alumínio	Aço	
Módulo de Young, $E$ [GPa]	69	200	$1 \times 10^{-5}$
Tensão admissível, $\sigma_{adm}$ [MPa]	103	250	1
Densidade específica, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2705	7850	0

Os parâmetros do otimizador MMA para penalizar a violação dos constrangimentos,  $c$ , diferem dos trabalhos anteriores. Neste caso,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$ , correspondem aos constrangimentos de tensão, encurvadura, *compliance* e densidades intermédias, foram definidos com o mesmo valor,  $1 \times 10^2$ .

As *ground structures* utilizadas em cada exemplo, assim como as dimensões e cargas aplicadas, variam conforme o exemplo em questão. Portanto, essas informações são apresentadas no início de cada subcapítulo.

## 5.2 Validação da veracidade da fórmula de Euler

### 5.2.1 Enquadramento

O objetivo deste subcapítulo é verificar se a da fórmula de Euler dá ou não uma boa previsão do valor de tensão crítica de encurvadura. Para isso, foi desenvolvido em MATLAB um código que gera o gráfico da tensão crítica conforme calculada pelo Eurocódigo 3 (para estruturas de Aço), Eurocódigo 9 (para estruturas de Alumínio), a fórmula de Euler e a parábola de Johnson. O arquivo referente a esse código está disponível no Apêndice A.

Para a verificação em relação ao aço, foi essencial modificar o material sólido utilizado no NOVA Truss TopOpt, conforme as propriedades apresentadas na Tabela 5.1. Após a implementação das funções que consideram a tensão e a esbeltez normalizadas, utilizando as equações do Capítulo 2, foi necessário ajustar o código para introduzir os dados obtidos do programa NOVA Truss TopOpt. Esses dados precisaram ser normalizados para permitir comparações no gráfico.

Em ambas as verificações, no programa NOVA Truss TopOpt, foi utilizada uma *ground structure* de 6x1, como ilustrado na Figura 5.1. No entanto, devido às diferentes propriedades do aço e do alumínio, foram utilizadas dimensões e cargas distintas.

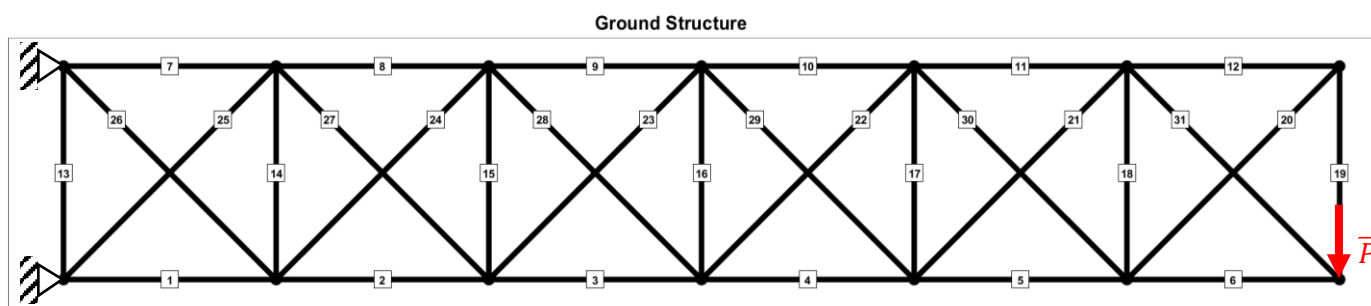
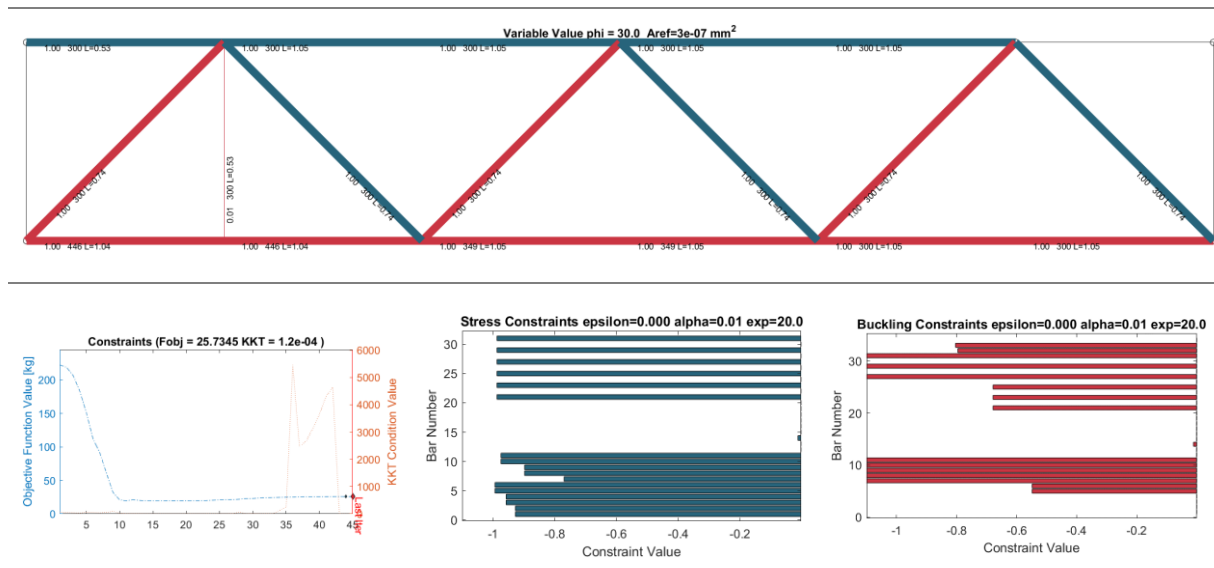


Figura 5.1 *Ground Structure* 6x1.

### 5.2.2 Eurocódigo 3

É utilizada a estrutura base apresentada na Figura 5.1, com o comprimento da barra 1 igual a 0.525m. A área da secção transversal das barras pode variar entre 300 e 3000 mm<sup>2</sup>. A carga P tem um valor de 6kN. Os resultados obtidos do Programa Nova Truss TopOpt, considerando as propriedades mencionadas, estão ilustrados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 Gráficos da otimização de uma estrutura 6x1 a aço.



Note-se que, apesar de aparecer visível na Tabela 5.2 uma barra vertical no nó de conexão das barras 1 e 2, estas barras formam uma cadeia pois o valor da variável densidade da barra vertical é muito baixo ( $\rho_{14} = 0,01$ ), podendo-se na prática desprezar a sua presença na estrutura ótima obtida. As barras 1 e 2 estão no limite de encurvadura, como evidenciado pelo gráfico do constrangimento de encurvadura, onde o valor é zero (constrangimento ativo). A partir da figura da estrutura otimizada a área transversal é  $A_1=446 \text{ mm}^2$ .

As barras 3 e 4 também formam uma cadeia e estão no limite de encurvadura. Para a análise, considerar-se  $A_2=349 \text{ mm}^2$ , correspondendo à área das barras 3 e 4.

Por último, irá se analisar as barras 5 e 6, que também formam uma cadeia, com uma área da seção transversal  $A_3=300 \text{ mm}^2$ . No entanto, essas barras no gráfico da encurvadura apresentam valores inferiores a zero (entre -0,6 e -0,4), o que nos garante que não estão no limite de encurvadura (constrangimento inativo). Portanto, esse ponto no gráfico do Eurocódigo deve estar abaixo das linhas de tensão crítica.

Um ponto a ser destacado é que esta estrutura foi gerada com a introdução do constrangimento de *compliance* para análise, e é importante notar que não foi identificado nenhum mecanismo presente na estrutura resultante.

Na Tabela 5.3, estão listados os valores do constrangimento de encurvadura,  $g_e^{buck}$ , da tensão,  $\sigma_e$ , da área da seção transversal,  $x_{A_e}$ , e do comprimento equivalente dos elementos 1 a 6,  $L_{eq_e}$ .

Tabela 5.3 Valores retirados do programa NOVA Truss TopOpt dos elementos em análise.

Barra $e$	1	2	3	4	5	6
$g_e^{buck}$	$-1,2 \times 10^{-7}$		$-1,1 \times 10^{-7}$			$-0,55$
$\sigma_e$ [MPa]	$-67 \times 10^6$		$-51 \times 10^6$			$-20 \times 10^6$
$x_{A_e}$ [mm <sup>2</sup> ]	$A_1 = 446$		$A_2 = 349$			$A_3 = 300$
$L_{eq_e}$ [m]	1,04		1,05			1,05

Após a recolha dos valores, os mesmos foram introduzidos no ficheiro MATLAB com a implementação do Eurocódigo, resultando no gráfico apresentado na Figura 5.2.

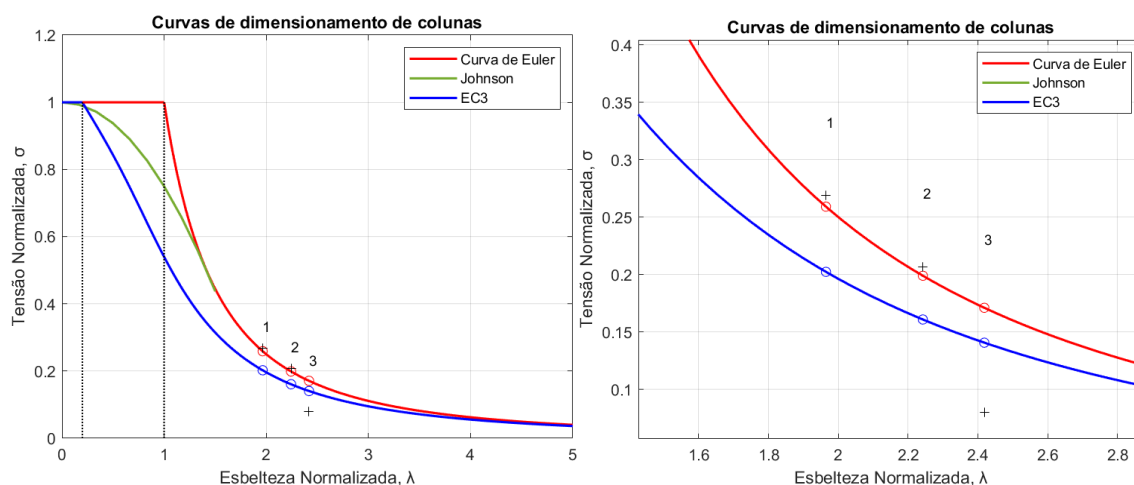


Figura 5.2 a) Gráfico com as curvas de dimensionamento de colunas para aço. b) ampliação.

O grupo de pontos 1 corresponde à primeira cadeia, composta pelas barras 1 e 2. O grupo de pontos 2 corresponde à segunda cadeia, composta pelas barras 3 e 4. E o grupo de pontos 3 corresponde à terceira cadeia, composta pelas barras 5 e 6.

No gráfico, os pontos retirados do programa NOVA Truss TopOpt estão representados com "+". Como esperado, os pontos 1 e 2 estão sobre a curva de Euler, pois estão no limite de encurvadura. O ponto 3 está abaixo das duas linhas, pois não está em seu limite de encurvadura. Para uma análise mais detalhada, uma ampliação do gráfico pode ser vista na Figura 5.3 b).

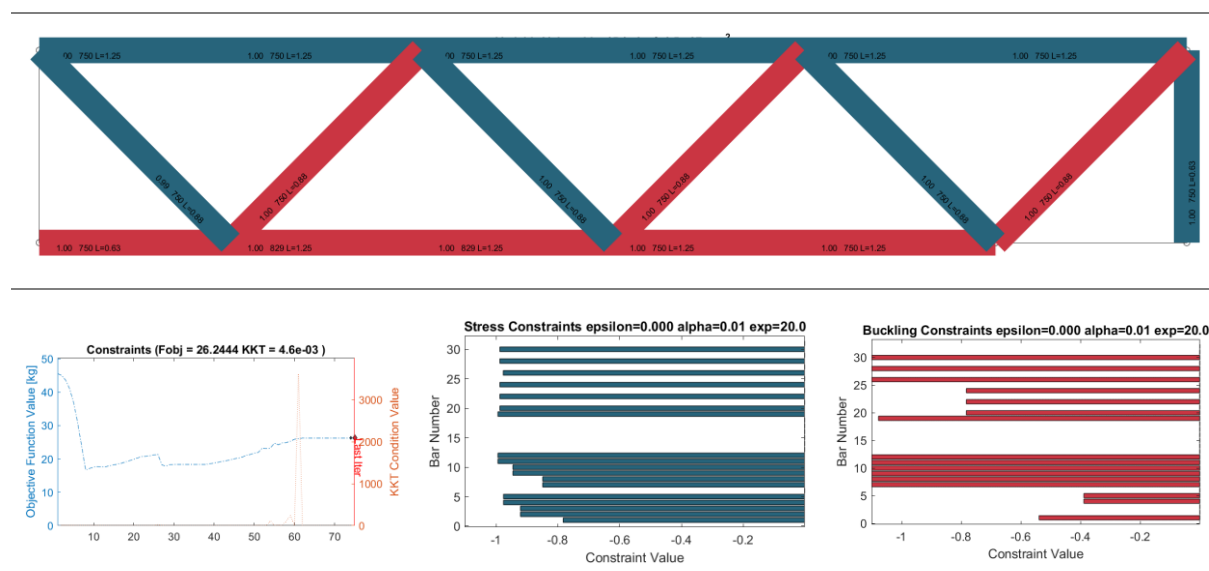
Com a ampliação, observa-se que os pontos 1 e 2 obtidos pelo programa NOVA Truss TopOpt (sinalizados por "+") estão ligeiramente acima da curva de Euler, visto que o valor do constrangimento é muito próximo de zero, mas não igual a zero. É normal haver uma violação insignificante nestes casos em que o constrangimento é muito próximo de zero. A fórmula de Johnson não faz diferença neste caso pois apenas corrige o valor da tensão crítica para uma

gama de valores de esbelteza inferiores às esbeltezas das barras em apreço. O desvio entre a fórmula de Euler e a do Eurocódigo é considerável, tendo-se obtido um valor máximo de 39% correspondente à cadeia 1. Para reduzir esse desvio, seria necessário aumentar a esbelteza das barras

### 5.2.3 Eurocódigo 9

É utilizada a estrutura base apresentada na Figura 5.1, com o comprimento da barra 1 igual a 0,625m. A área da secção transversal das barras pode variar entre 750 e 1500 mm<sup>2</sup>. A carga P tem um valor de 6kN. Os resultados obtidos do Programa NOVA Truss TopOpt, considerando as propriedades mencionadas, estão ilustrados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 Gráficos da otimização de uma estrutura 6x1 a alumínio.



As barras 2 e 3 formam uma cadeia, com um comprimento equivalente de 1,25m e área de  $A_1=829 \text{ mm}^2$ . As mesmas estão no limite de encurvadura, como evidenciado pelo gráfico do constrangimento de encurvadura, onde o valor é zero.

As barras 4 e 5 também formam uma cadeia, mas não estão no limite de encurvadura. Para a análise, considerar-se  $A_2=750 \text{ mm}^2$ , correspondendo à área das barras 4 e 5.

Um aspeto crucial a ser destacado é que esta estrutura foi gerada sem o constrangimento de *compliance*, ao contrário da estrutura anterior. É importante observar que foi identificado que essa estrutura apresenta um mecanismo devido a apresentar a barra 19, onde a carga está aplicada, apenas articula em um nó.

Na Tabela 5.5, estão listados os valores do constrangimento de encurvadura, da tensão, da área da seção transversal e do comprimento equivalente dos elementos 2 a 5.

Tabela 5.5 Valores retirados do programa NOVA Truss TopOpt dos elementos em análise.

Barra $e$	2	3	4	5
$g_e^{buck}$		$-1,4 \times 10^{-7}$		$-0,39$
$\sigma_e$ [MPa]		$-29 \times 10^6$		$-16 \times 10^6$
$x_{A_e}$ [mm <sup>2</sup> ]		$A_1 = 829$		$A_2 = 750$
$L_{eq_e}$ [m]		1,25		1,25

Após a recolha dos valores, os mesmos foram introduzidos no ficheiro MATLAB que implementa o Eurocódigo 9, resultando no gráfico apresentado na Figura 5.2.

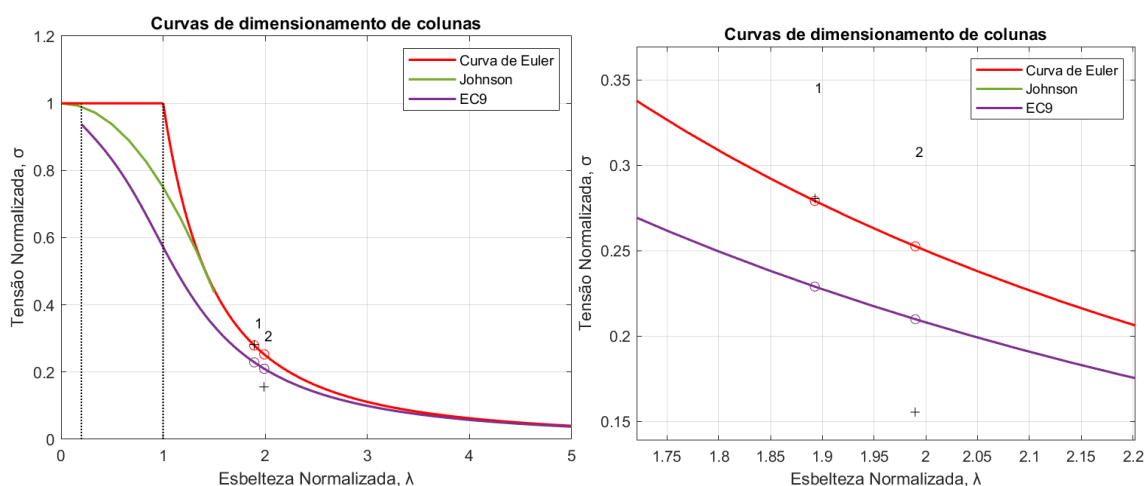


Figura 5.4 a) Gráfico com as curvas de dimensionamento de colunas para alumínio. b) ampliação.

O grupo de pontos 1 corresponde à primeira cadeia, composta pelas barras 2 e 3. E o grupo de pontos 2 corresponde à segunda cadeia, composta pelas barras 4 e 5.

No gráfico, os pontos retirados do programa NOVA Truss TopOpt estão representados com "+". Como esperado, o ponto 1 está sobre a curva de Euler, pois está no limite de encurvadura. O ponto 2 está abaixo das duas linhas, pois não está em seu limite de encurvadura. Para uma análise mais detalhada, uma ampliação do gráfico pode ser vista na Figura 5.5 b).

De forma similar aos resultados do Eurocódigo 3, observa-se que o ponto 1 obtido pelo programa NOVA Truss TopOpt (sinalizado por "+") está ligeiramente acima da curva de Euler, visto que o valor do constrangimento é praticamente zero. Esta violação é insignificante, como referido no Eurocódigo 3. A abordagem da fórmula de Johnson continua a não ser uma solução

alternativa, uma vez que o intervalo de valores com que estamos a trabalhar não é abrangido pela parábola de Johnson. No entanto, o desvio entre a fórmula de Euler e a do Eurocódigo é considerável. Para reduzir esse desvio, seria necessário aumentar o comprimento das barras, afastando assim os nós.

Esta verificação serviu para analisar a validade da fórmula de Euler em contexto de diferentes materiais de construção e por comparação com os respetivos Eurocódigos.

Uma hipótese de modificação da parábola de Johnson de modo a que o ponto de junção entre a mesma e a curva de Euler avançasse para gamas de esbelteza mais elevadas será ,abordado no próximo subcapítulo

## 5.2.4 Nova curva de Johnson

Como referido anteriormente, propõe-se a hipótese de avançar o ponto de junção entre a parábola de Johnson e a curva de Euler. Esta abordagem não tem como objetivo modificar a fórmula deixando de ser dependente das diferentes variáveis. Apenas pretende acrescentar constantes ou multiplicadores que garantam a integridade da fórmula.

Na Figura 5.6, pode-se observar a nova curva de Johnson, com os pontos do resultado do Eurocódigo 3, no Apêndice A está o código com a implementação das curvas.

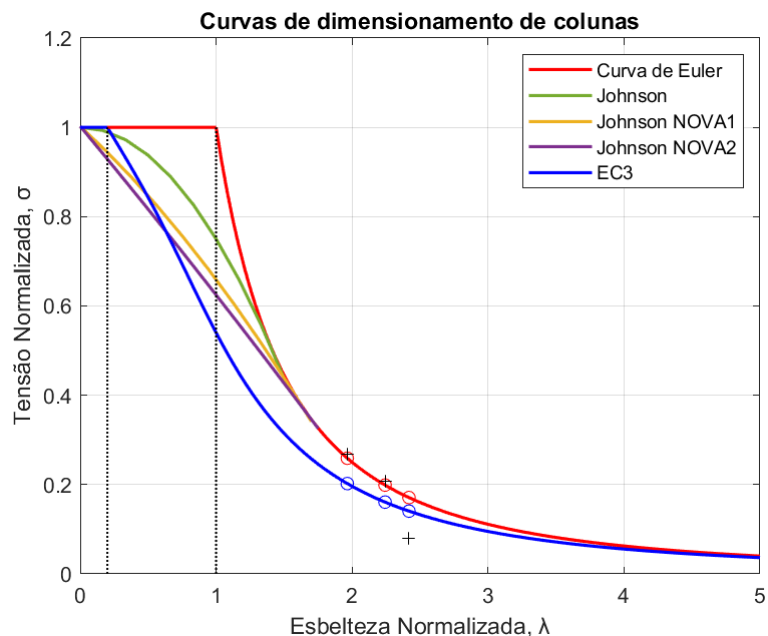


Figura 5.6 Gráfico com as novas curvas de Johnson.

Como evidenciado na Figura 5.6, os pontos continuam fora do intervalo onde a parábola de Johnson é válida, portanto, esta abordagem não é relevante para o presente problema, mas poderá ser para outros.

Uma alternativa à fórmula de Euler seria a implementação do Eurocódigo no programa NOVA Truss TopOpt. No entanto, isso apresenta as suas próprias limitações. Primeiramente, o Eurocódigo envolve uma série de equações interdependentes, tornando a sua diferenciação uma tarefa complexa e demorada.

Além disso, as equações do Eurocódigo são concebidas para cada material específico, o que restringiria o programa a trabalhar exclusivamente com um único tipo de material. Isso limitaria a aplicabilidade do programa, já que não existe Eurocódigo para todos os materiais utilizados na prática. Essa restrição é especialmente problemática, considerando que no futuro pode ser necessário trabalhar com estruturas compostas por múltiplos materiais.

Dado que o objetivo principal desta dissertação é abordar os mecanismos por meio da implementação do constrangimento de *compliance*, conforme exposto a partir da secção seguinte, não foram realizadas pesquisas adicionais nem foram consideradas alternativas relativamente à previsão da tensão crítica de encurvadura.

## 5.3 *Compliance*

### 5.3.1 Enquadramento

O objetivo deste subcapítulo é testar o comportamento do constrangimento de *compliance* por meio de um conjunto de exemplos de estruturas reticuladas com diferentes níveis de complexidade, cargas e proporções. Todas as estruturas utilizam alumínio e "vazio" como duas fases de material e com as propriedades listadas na Tabela 5.1. Foram analisados quatro exemplos de estruturas, nos quais será realizada uma comparação entre otimização sem e com o constrangimento de *compliance*. Em cada exemplo, serão apresentados os resultados obtidos, seguidos de uma discussão sobre esses resultados.

Nesta dissertação, os exemplos selecionados foram caracterizados pela simetria tanto das barras quanto das cargas e apoios. Optou-se por destacar apenas esses exemplos, uma vez que dissertações anteriores concentraram-se amplamente em estruturas do estilo apresentado nos Eurocódigos.

Para fornecer uma breve contextualização sobre os exemplos de trabalhos anteriores, pode-se observar na Tabela 5.2 que a estrutura obtida não é um mecanismo devido à presença do constrangimento de *compliance*. Por outro lado, na Tabela 5.4, a estrutura obtida era muito recorrente em trabalhos anteriores. No entanto, dado o foco em exemplos diferentes nesta dissertação, não haverá uma análise detalhada desses casos mencionados.

### 5.3.2 Exemplo 2x4 com dois apoios

Este exemplo é representado pela *ground structure* mostrada na Figura 5.7. A estrutura é composta por 38 barras, seguindo uma proporção de 2x4. O comprimento base das barras é de 0,625m. A variável de área das barras varia entre 200 e 2000 mm<sup>2</sup>.

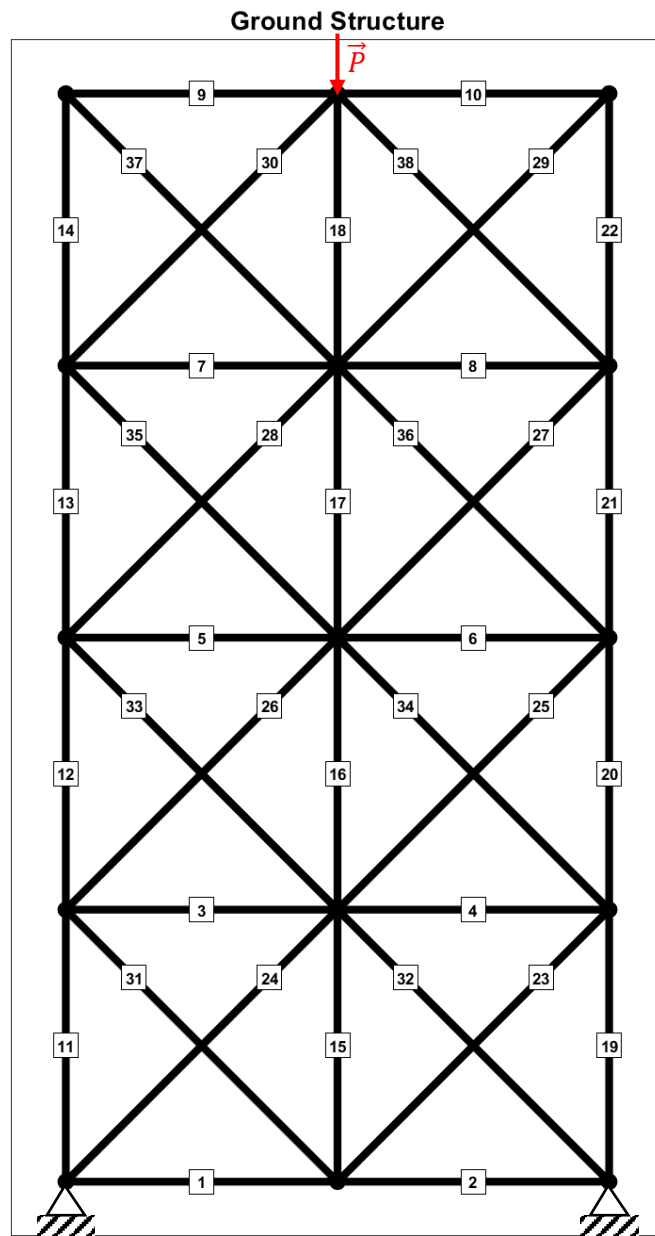
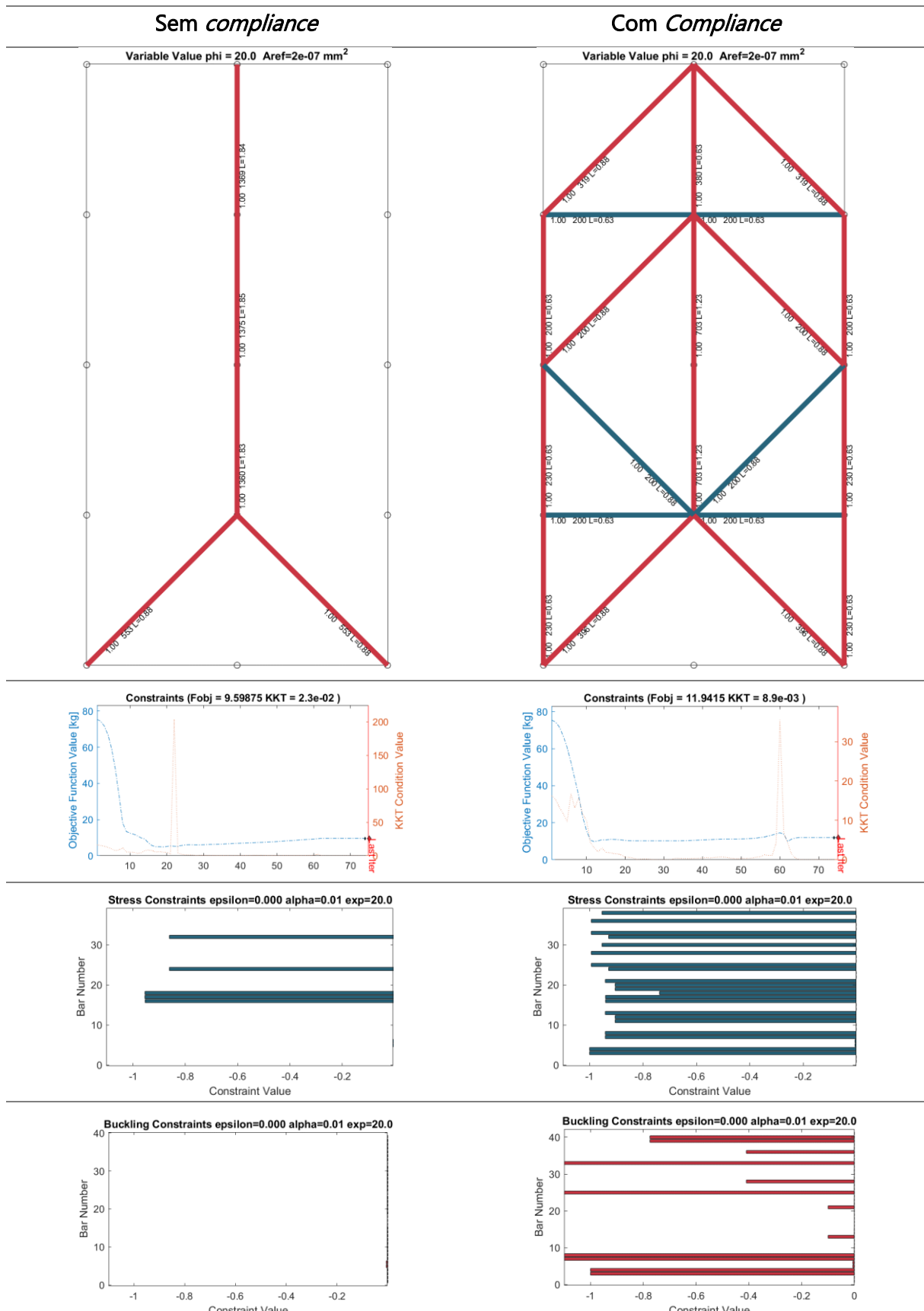


Figura 5.7 *Ground structure 2x4* com dois apoios.

Para este exemplo, a carga  $P$  tem um valor de 30kN. Os resultados das otimizações, com e sem o constrangimento de *compliance*, estão detalhados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 Resultados da otimização da Estrutura 2x4 com dois apoios.



A diferença entre os dois resultados é notória. Na estrutura sem *compliance*, observa-se a formação de um "Y" invertido, uma configuração bastante conhecida que também será vista em outros exemplos. Enquanto esse padrão de "Y" invertido seria aceitável para vigas, o programa trabalha com barras, o que significa que as rotações nos nós não estão bloqueadas. Isso permite que a cadeia {16, 17, 18} gire no nó central do "Y", o que pode comprometer a estabilidade da estrutura.

Por outro lado, na estrutura obtida com a aplicação da *compliance*, observa-se que a treliça forma malhas fechadas, com a presença de triângulos, o que contribui para uma distribuição mais uniforme das cargas e uma estabilidade estrutural aprimorada.

Pode-se observar que tanto os constrangimentos de tensão quanto os de encurvadura não estão a ser violados em nenhum dos casos analisados. Os constrangimentos de *compliance* e de densidades intermédias são representados pelas últimas três barras {39, 40 e 41} no gráfico do constrangimento de encurvadura, respetivamente.

É importante notar que, apesar de a estrutura obtida com constrangimentos de *compliance* ter muito mais barras, as barras presentes na estrutura sem constrangimentos de *compliance*, barras {16, 17, 18, 24, 32}, também estão presentes na estrutura com *compliance*, com áreas maiores que o mínimo, enquanto as restantes barras estão com a área mínima ou perto desse valor. Isso sugere que as barras que formam o "Y" invertido são os pilares da estrutura, enquanto as restantes servem para estabilizar a estrutura.

Na Figura 5.8, encontra-se o histórico das *compliances* para este caso.

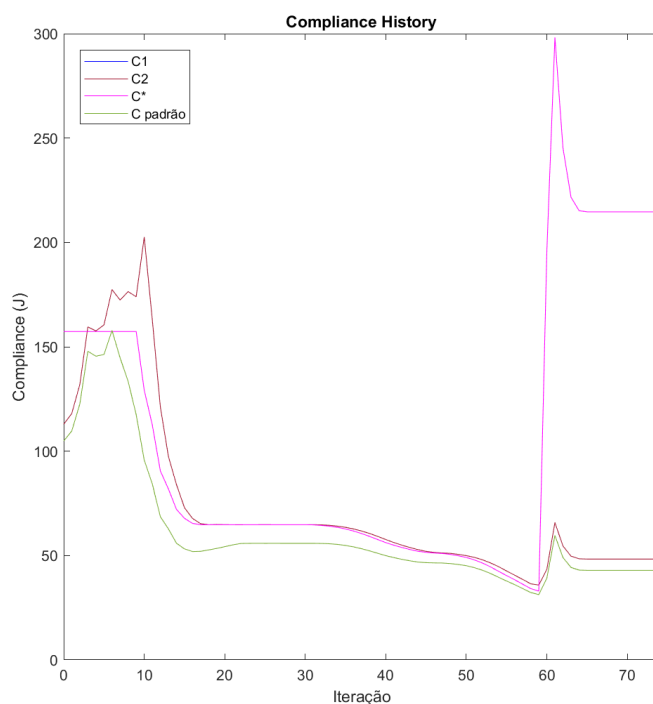


Figura 5.8 Histórico das *compliances* para o exemplo 2x4 com 2 apoios.

Na Figura 5.8, a linha verde representa a *compliance* padrão, que, quando multiplicada pela função  $\zeta$ , resulta na linha rosa, representando  $C^*$ . As *compliances* de  $C_1$  e  $C_2$  sempre têm o mesmo valor, pois a estrutura é simétrica em relação aos apoios e cargas.

Observando o histórico da *compliance* para este exemplo, nota-se que  $C^*$  permanece constante durante algumas iterações. Isso ocorre porque o valor do  $C_{padr\tilde{a}o}$  aumenta, no entanto, o objetivo é o  $C^*$  descer ao longo das iterações. Por isso é que se implementou esta condição que garante que o  $C^*$  permaneça constante quando o  $C_{padr\tilde{a}o}$  aumenta.

Só no caso quando  $C_{padr\tilde{a}o}$  da iteração atual é 40% (no primeiro intervalo) superior ao  $C_{padr\tilde{a}o}$  da iteração anterior é que o valor do  $C^*$  aumenta, no entanto isso não acontece neste caso.

Observa-se que os valores  $C_1$  e  $C_2$  são forçados a descer com o  $C^*$ , indicando que o programa está a cumprir com o objetivo. No entanto, também se nota que o limite aumenta, proporcionando liberdade para a estrutura minimizar a massa, o que resulta num ligeiro aumento da *compliance*.

Conforme mencionado anteriormente, foi implementada uma verificação de existência de mecanismo no final da otimização. Essa verificação consiste na aplicação de pequenas forças com uma inclinação de  $45^\circ$  em todos os nós da estrutura, com exclusão dos nós de conectividade de cadeias e dos pontos de apoio. De seguida, é realizada uma análise de elementos finitos para calcular a *compliance*. Se essa *compliance* for superior ao último valor de  $C^*$  registado, então a estrutura é considerada um mecanismo e o algoritmo retorna uma mensagem de aviso para o utilizador, Figura 5.9 a). Caso contrário, o algoritmo retorna uma mensagem informativa a dizer que estrutura não é considerada um mecanismo, Figura 5.9 b).

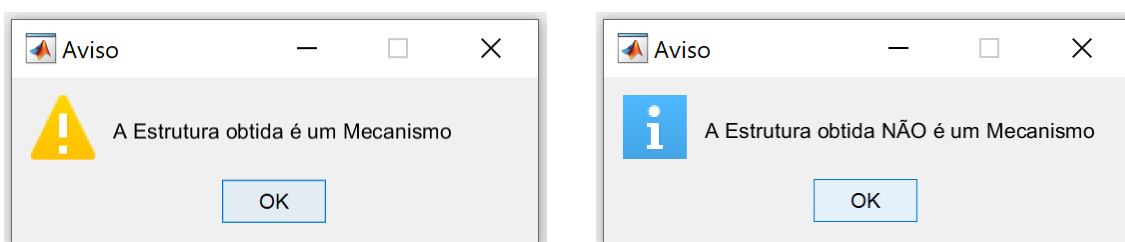


Figura 5.9 Janela Pop Up de aviso de a) mecanismo; b) não mecanismo.

Após a conclusão do programa, para o exemplo sem *compliance*, foi exibida a Figura 5.9 a). Já para o exemplo com *compliance*, a Figura 5.9 b) foi apresentada. Além dessas adições, durante a verificação também foi implementado uma análise estática das estruturas obtidas.

Figura 5.10 apresenta o documento com a análise estática, classificação da estrutura internamente, externamente e globalmente, para o exemplo com *compliance*.

```
The number of reactions (r) is 4.  
The number of bars      (m) is 21.  
The number of nodes    (n) is 11.
```

```
The structure is HYPO-static of the degree 2 Internally/Inwardly.  
The structure is HYPO-static of the degree 1 Outwardly.  
The structure is HYPER-static of the degree -1 Globally.
```

Figura 5.10 Documento da análise estática para o exemplo 2x4 com dois apoios e *compliance*

### 5.3.3 Exemplo 2x4 com três apoios

Este exemplo é representado pela *ground structure* mostrada na Figura 5.11. A estrutura é composta por 38 barras, seguindo uma proporção de 2x4 com 3 apoios fixos. O comprimento base das barras é de 0,625m. A variável de área das barras varia entre 200 e 2000 mm<sup>2</sup>.

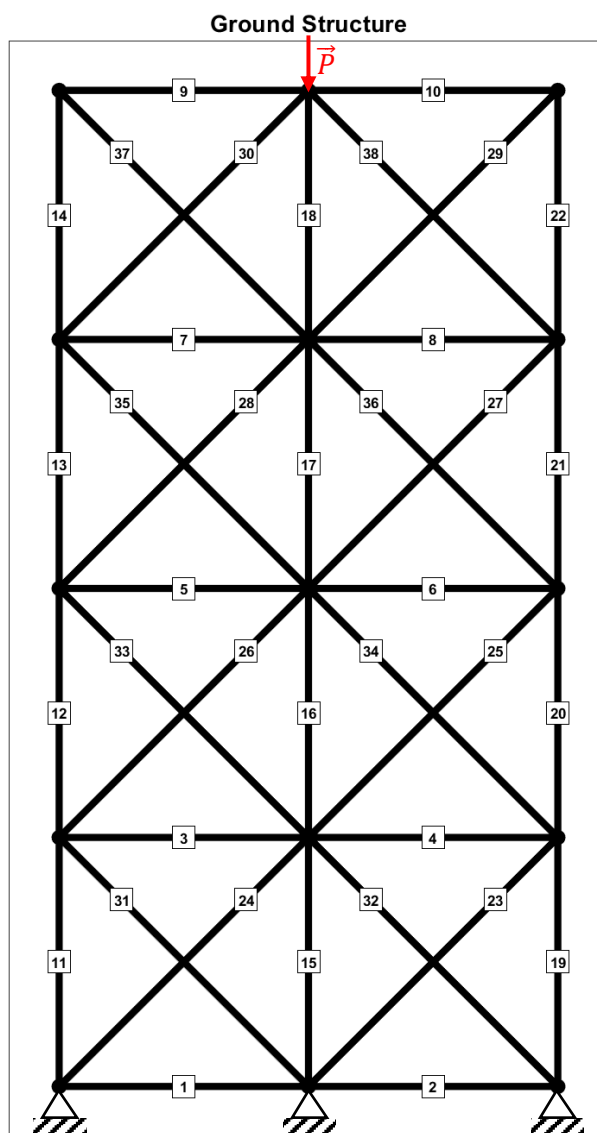


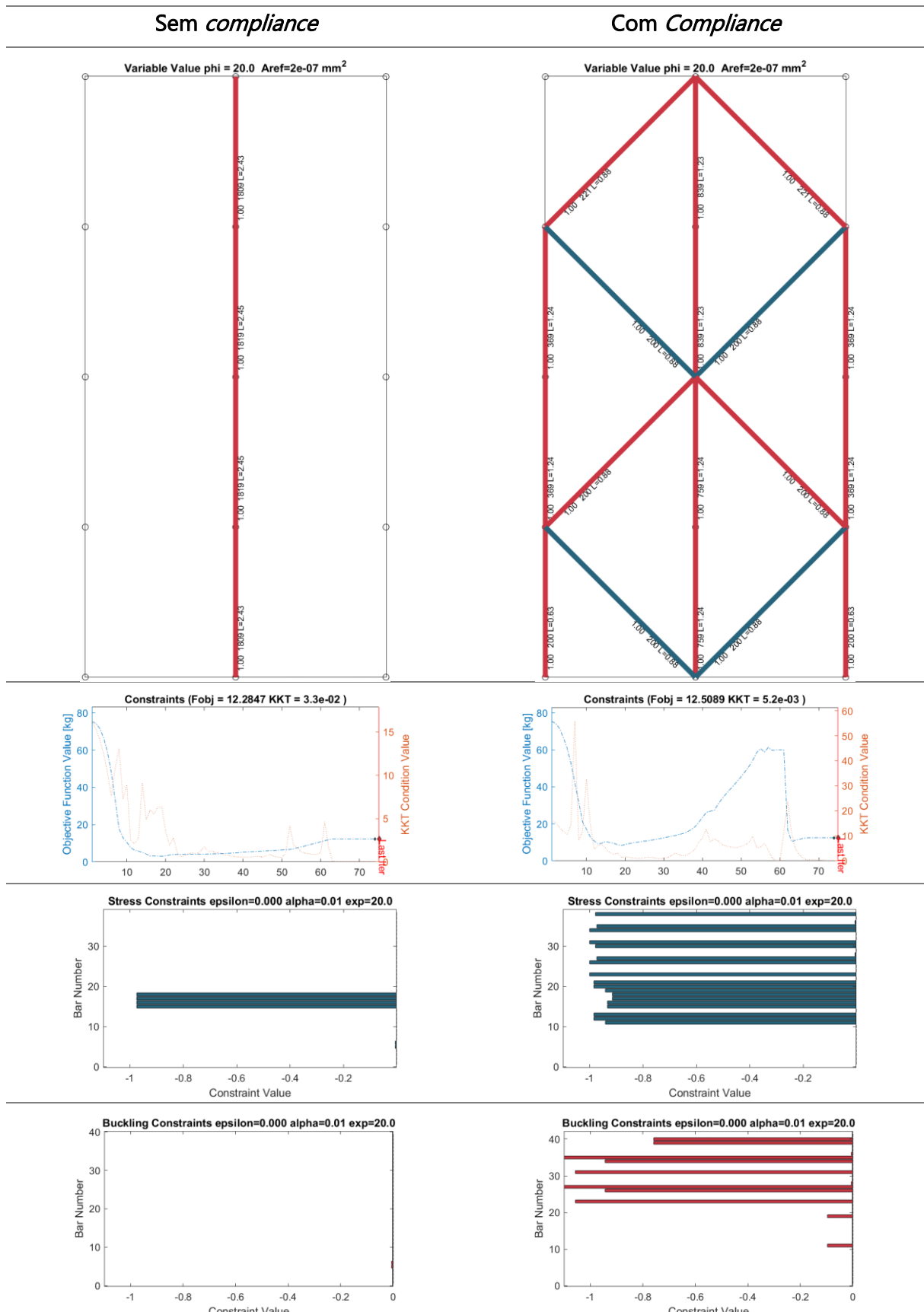
Figura 5.11 *Ground structure* 2x4 com três apoios.

Para este exemplo, há dois casos de cargas um de 30kN e outro com 120kN.

#### 5.3.3.1 Carga 30 kN

Os resultados das otimizações para o caso de carga 30kN, com e sem o constrangimento de *compliance*, estão detalhados na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 Resultados da otimização da Estrutura 2x4 com três apoios com carga de 30 kN.



Tal como no exemplo anterior, a diferença entre os dois resultados é notória. Por outro lado, na estrutura sem o constrangimento de *compliance*, ocorre a formação de uma cadeia com 4 elementos finitos de barra localizada no segundo apoio, resultando em um mecanismo, uma vez que o apoio fixo não restringe os movimentos de rotação em torno do nó.

Por outro lado, na estrutura obtida com a aplicação do constrangimento de *compliance*, a treliça forma malhas fechadas, com a presença de triângulos. Essa configuração é considerada estável, pois as 3 barras que compõem o triângulo configuram uma situação de treliça isostática interior, enquanto no caso de 4 barras formando um losango, as barras não estão restringidas de movimento nos nós, verificando-se um mecanismo.

É relevante observar que as barras {15, 16, 17 e 18} na estrutura obtida com constrangimento de *compliance* possuem uma área superior em comparação com as outras que se distribuem lateralmente. Apesar disso, essas barras {15, 16, 17 e 18} não apresentam valores tão grandes quanto na estrutura obtida sem constrangimento de *compliance*. O reforço na estrutura obtida com o constrangimento de *compliance* não apenas garante estabilidade, mas também distribui a carga pelas restantes barras, possibilitando a redução de áreas em {15, 16, 17 e 18}.

Em ambos os casos analisados, não há violação dos constrangimentos de tensão ou de encurvadura. As restrições de *compliance* são exemplificadas pelas antepenúltima e penúltima barras {39, 40}, ambas com um valor -0,76, no gráfico de constrangimento de encurvadura. O constrangimento de densidade intermédias, é representado no gráfico de constrangimento de encurvadura pela última barra {41}, no entanto neste caso o valor do constrangimento é aproximadamente 0.

Na Figura 5.12, encontra-se o histórico das *compliances* para este caso, com carga de 30kN.

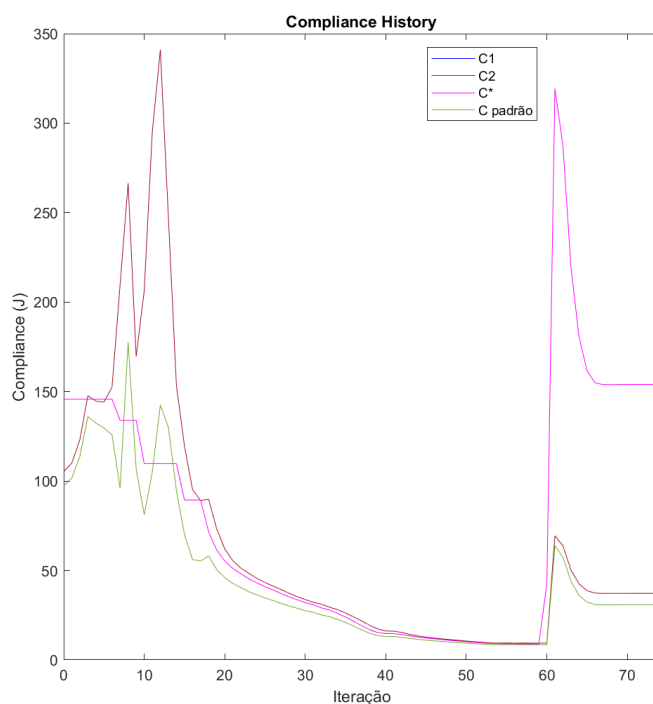


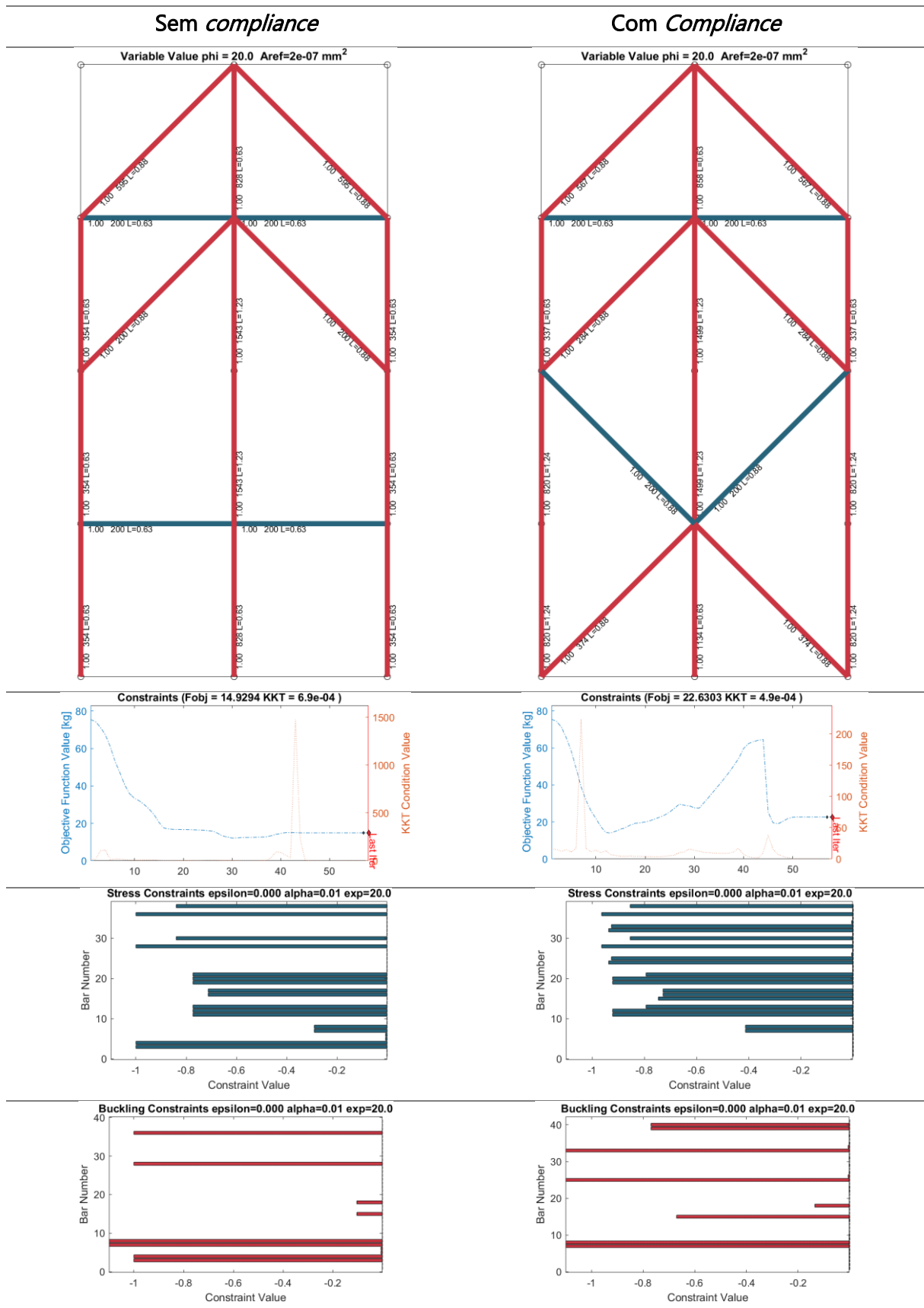
Figura 5.12 Histórico das *compliances* para o exemplo 2x4 com 3 apoios e com carga de 30kN.

Durante uma parte do primeiro intervalo  $[0, 20]$ , o constrangimento de *compliance* estava constantemente a ser violado. Nos intervalos subsequentes, ainda era evidente a resistência que a estrutura oferecia para evitar a remoção de barras que poderiam causar instabilidade. No entanto, no intervalo 4, quando o limite da *compliance* aumentou, notou-se um ligeiro aumento na *compliance* da estrutura, tanto na *compliance* do problema normal  $C_{padr\tilde{a}o}$  quanto nas *compliances*  $C_1$  e  $C_2$  devido ao carregamento extra, mas depois permaneceram constantes e dentro dos limites aceitáveis. Este último intervalo é crucial, pois a estrutura já está definida e, com esse aumento de  $C^*$ , a estrutura pode minimizar a sua massa sem comprometer a sua estabilidade. Além disso, na Tabela 5.7, no gráfico da função objetivo do problema com constrangimento de *compliance*, observa-se que foi nesse último intervalo que o valor da função objetivo diminuiu consideravelmente, tornando-o quase igual ao valor obtido pela otimização sem constrangimento *compliance*.

### 5.3.3.2 Carga 120 kN

Os resultados das otimizações para o caso de carga 120kN, com e sem o constrangimento de *compliance*, estão detalhados na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 Resultados da otimização da Estrutura 2x4 com três apoios com carga de 120 kN.



Este exemplo tem como objetivo mostrar o que acontece quando o limite de encurvadura de uma cadeia começa a ser muito violado. Como mencionado anteriormente, quando o constrangimento começa a ser violado, o programa retorna soluções com barras sem conectividade (barras plantadas). No entanto, quando o constrangimento é muito violado, o programa reforça a estrutura adicionando várias barras novas, como é o caso presente. Nessas situações, o programa encontra outras soluções, porém várias são mecanismos.

Com o aumento da carga  $P$ , é possível observar que a estrutura sem *compliance* foi reforçada. No entanto, também é possível notar a formação de um mecanismo, onde as barras nos apoios podem se deslocar paralelamente.

A estrutura obtida com o constrangimento de *compliance* é diferente daquela quando  $P$  igual a 30kN, pois foi necessário reforçá-la. No entanto, apresenta semelhanças nas conectividades das barras.

Na Figura 5.13, encontra-se o histórico das *compliances* para este caso, com carga de 120kN.

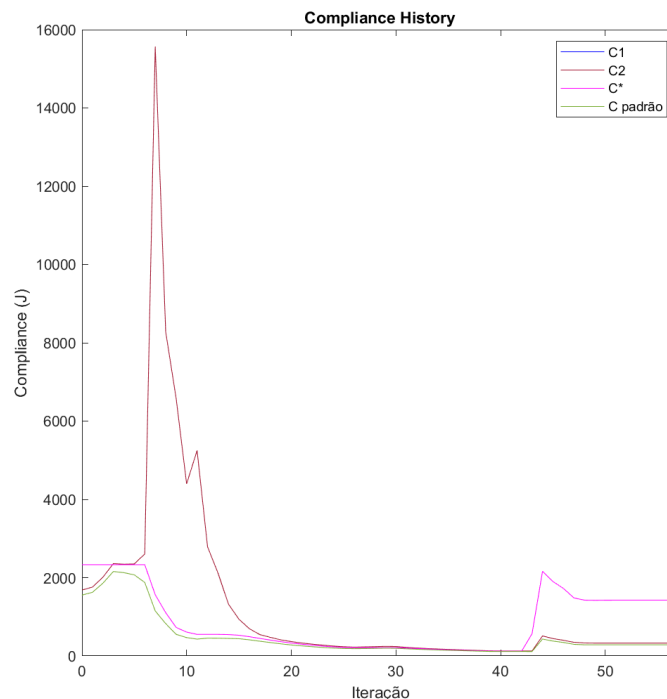


Figura 5.13 Histórico das *compliances* para o exemplo 2x4 com 3 apoios e com carga de 120kN.

O constrangimento de *compliance* foi significativamente violado no primeiro intervalo. No entanto, a partir do segundo intervalo, pode-se observar que a estrutura foi reforçada, aumentando a sua rigidez.

Com o constrangimento de *compliance*, pequenas variações na carga ou no número de iterações geralmente resultam em soluções semelhantes. Embora possam ocorrer ajustes e



### 5.3.4 Exemplo 4x3

Este exemplo é representado pela *ground structure* mostrada na Figura 5.15. A estrutura é composta por 55 barras, seguindo uma proporção de 4x3. O comprimento base das barras é de 0,625m. A variável de área das barras varia entre 150 e 1500 mm<sup>2</sup>.

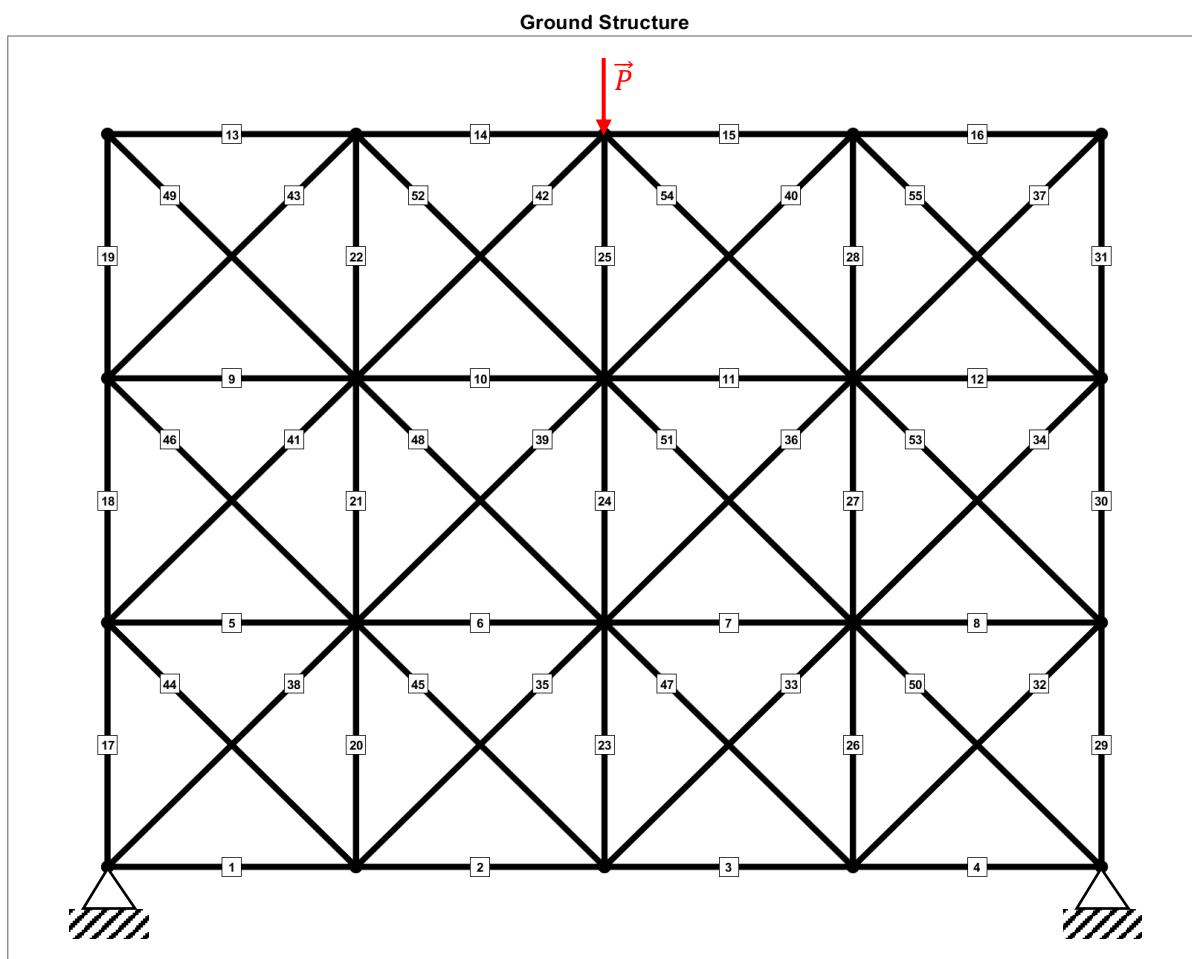
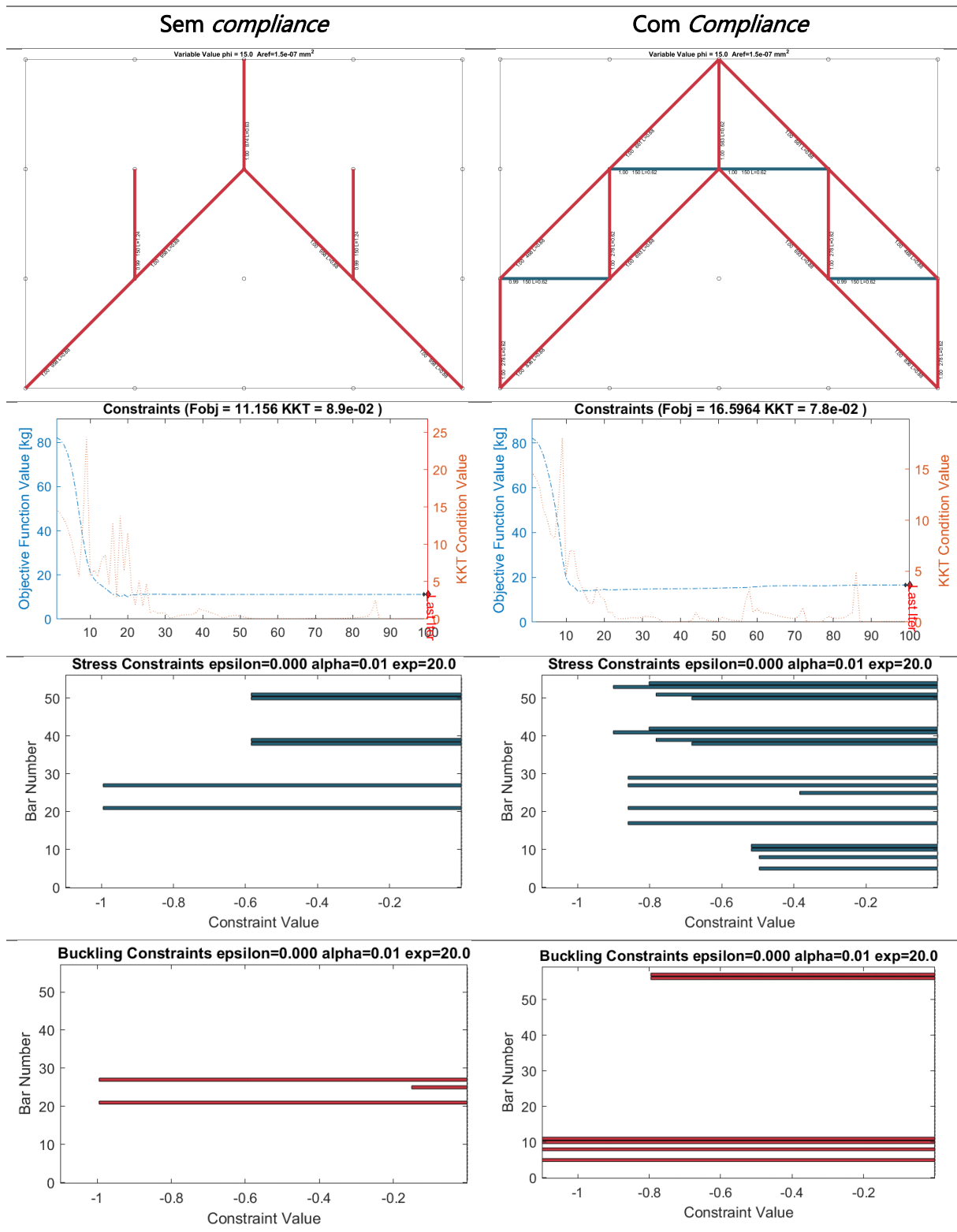


Figura 5.15 *Ground structure* 4x3.

Para este exemplo, a carga  $P$  tem um valor de 90kN. Os resultados das otimizações, com e sem o constrangimento de *compliance* estão detalhados na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 Resultados da otimização da Estrutura 3x2.



No apêndice B encontram-se as duas estruturas otimizadas representadas na Tabela 5.9, com uma maior qualidade.

É evidente que as estruturas obtidas pelo otimizador com e sem o constrangimento de *compliance* apresentam resultados muito diferentes. Na estrutura obtida sem o constrangimento de *compliance*, observa-se uma configuração em que a base é um "Y" invertido. No entanto, devido à violação do constrangimento de encurvadura na cadeia formada pelas barras {38 e 39}, e nas barras {50 e 51}, o algoritmo acabou por adicionar uma barra para reduzir o comprimento de encurvadura da cadeia. Infelizmente, essa barra ficou desconectada em uma das suas extremidades, tornando a solução não aceitável.

Por outro lado, na estrutura obtida com o constrangimento de *compliance*, observa-se uma estrutura bem formada, com malhas triangulares e um "Y" invertido na base. Essa configuração é uma configuração ótima encontrada pelo algoritmo, pois é altamente resistente, estável, e leve, com o valor da função objetivo de 16kg . Em comparação, na estrutura sem *compliance*, o valor da função objetivo é 11kg, explicada pela diferença significativa na quantidade de barras.

Na estrutura obtida com o constrangimento de *compliance*, nota-se que as barras estão quase todas no limite de encurvadura.

Na Figura 5.16, é apresentado o histórico das *compliances* para este caso.

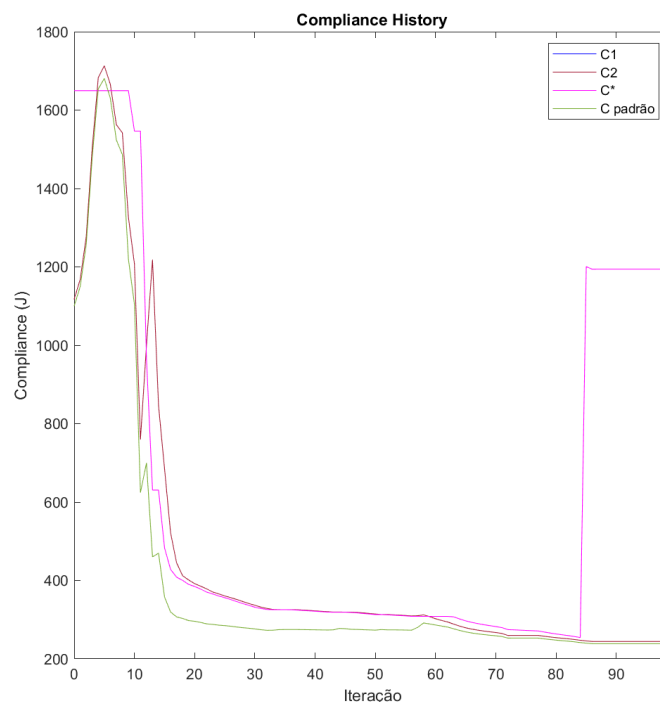


Figura 5.16 Histórico da *compliance* 4x3.

### 5.3.5 Exemplo 4x4

Este exemplo é representado pela *ground structure* mostrada na Figura 5.17 *Ground Structure 4x4*. A estrutura é composta por 72 barras, seguindo uma proporção de 4x4. O comprimento base das barras é de 0,625m. A variável de área das barras varia entre 200 e 2000mm<sup>2</sup>.

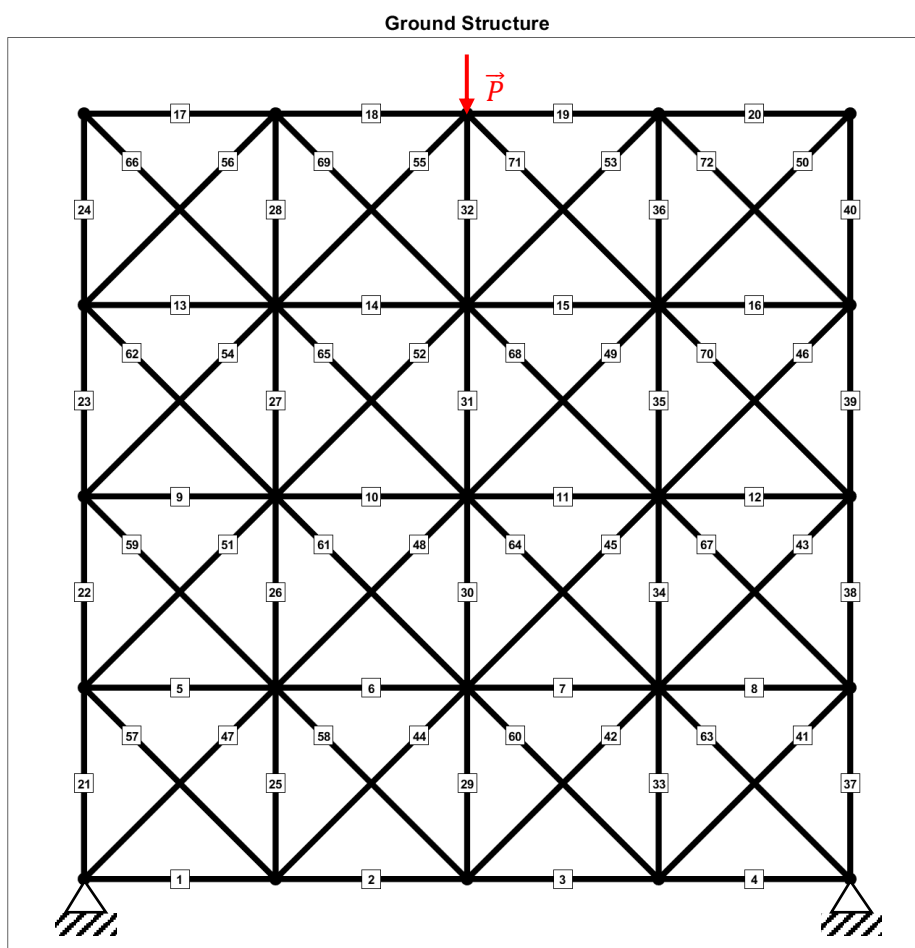
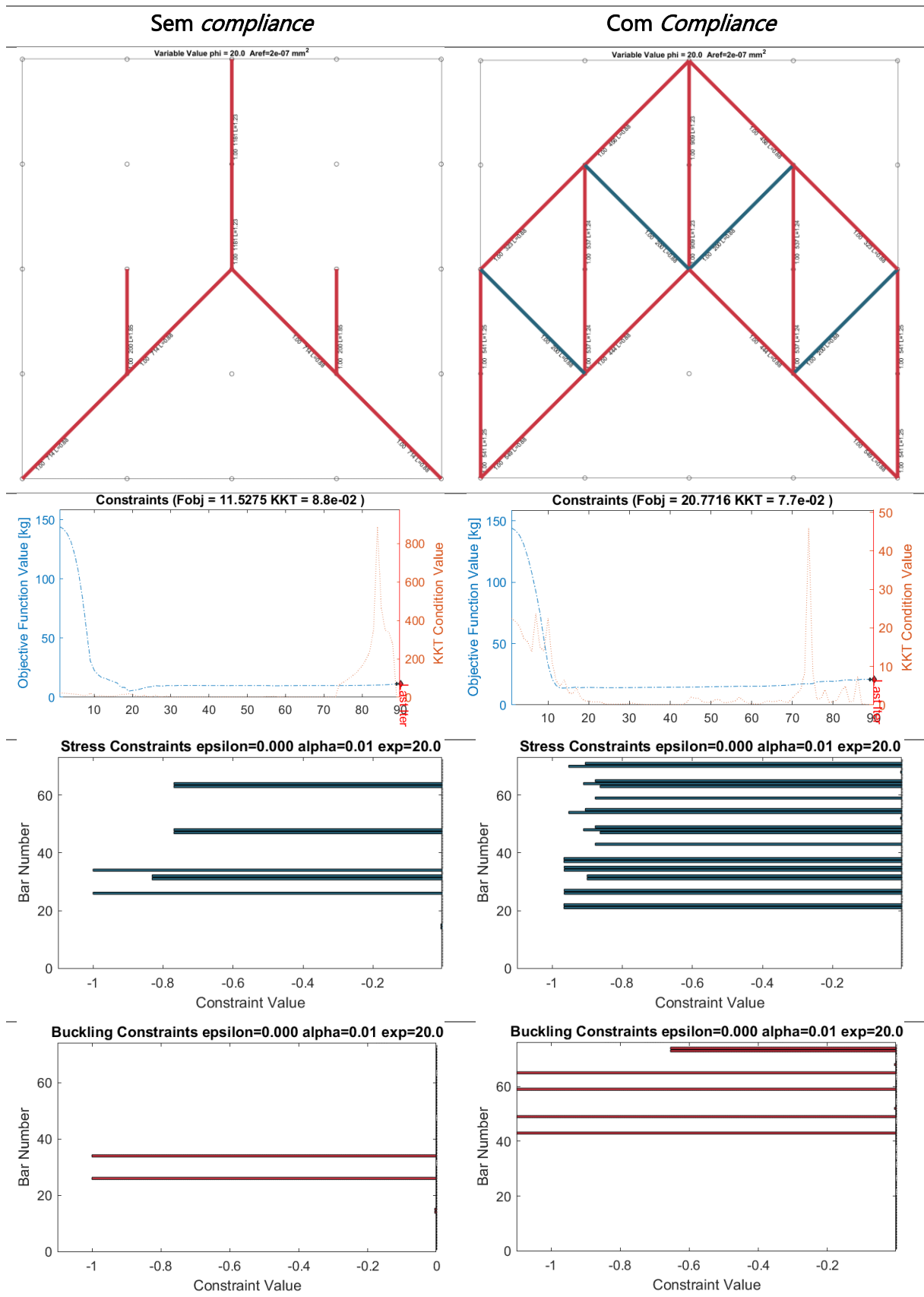


Figura 5.17 *Ground Structure 4x4*.

Para este exemplo, a carga  $P$  tem um valor de 50kN. Os resultados das otimizações, com e sem o constrangimento de *compliance*, estão detalhados na Tabela 5.10.

Tabela 5.10 Resultados da otimização da Estrutura 4x4.



Nos exemplos de otimização sem *compliance*, tanto para 4x3 quanto para 4x4, obteve-se estruturas muito semelhantes. A única diferença entre eles é que no caso do 4x4, há uma barra vertical adicional, formando uma cadeia vertical. No entanto, ambos os exemplos apresentam a formação de um "Y" invertido e a adição de barras para mitigar o constrangimento de encurvadura, resultando em barras desconectadas.

Por outro lado, nos exemplos de otimização com constrangimento de *compliance* para 4x3 e 4x4, as estruturas são diferentes. No entanto, ambas formam um *layout* semelhante, que é uma espécie de "V" invertido ou "Y" invertido reforçado. A maior diferença entre eles é que, no exemplo 4x3, existem malhas triangulares formadas apenas por uma barra em cada lado do triângulo, enquanto no exemplo 4x4, nas malhas triangulares um dos lados do triângulo é composto por dois elementos de barra formando uma cadeia.

Na Figura 5.18, encontra-se o histórico das *compliances* para a estrutura 4x4.

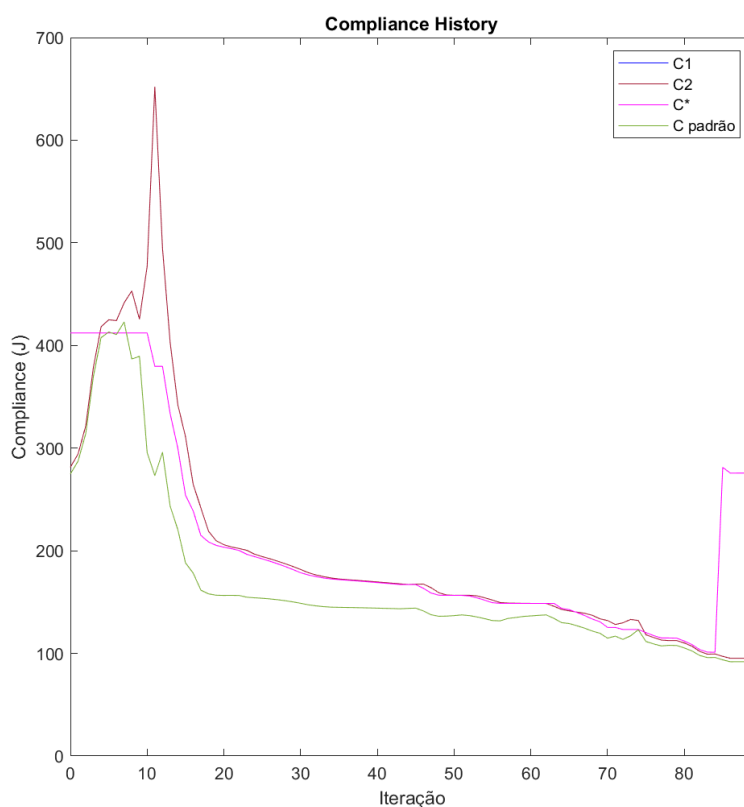


Figura 5.18 Histórico das *compliances* para o exemplo 4x4.

Observando o histórico das *compliances* para este exemplo 4x4, observa-se que  $C_{padr\tilde{a}o}$  começou num valor baixo e começou a aumentar. Devido a esse aumento o  $C^*$  manteve-se num patamar constante para assegurar que o constrangimento seria atendido. Logo a seguir ao pico atingido pela linha vermelha ( $C_2 = C_1$ ) podemos ver que o valor começou a descer e manteve-se sempre muito perto do  $C^*$ .

### 5.3.6 Exemplo 8x8

Este exemplo não será analisado da mesma forma que os outros, mas servirá para destacar algumas fragilidades da versão atual da formulação do problema implementada em código. Para contextualização, o exemplo seguinte é uma estrutura 8 por 8 com dois apoios nas extremidades inferiores e uma carga vertical,  $P = -70\text{kN}$ , dirigida para baixo. Na Figura 5.19, é possível visualizar essa estrutura.

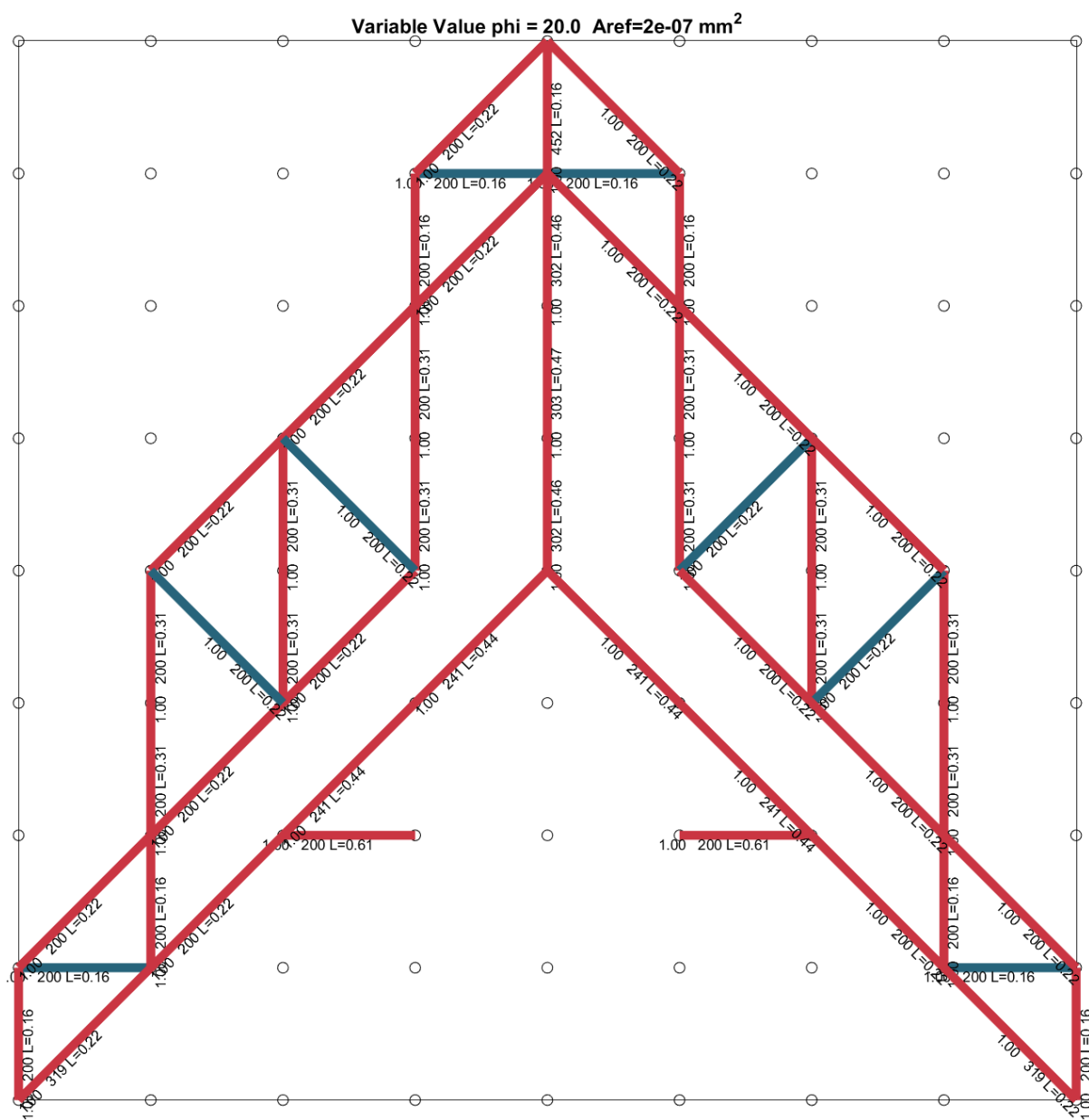


Figura 5.19 Resultado da otimização da estrutura 8x8.

Até ao momento, todas as otimizações foram concluídas em menos de 10 minutos. No entanto, como era de esperar, à medida que o número de barras de uma estrutura aumenta, o número de constrangimentos é a multiplicação de 4 pelo número de barras, aproximadamente.

Portanto, neste caso com 272 barras, levará mais de duas horas para ser concluído com o constrangimento de *compliance*. Sem o constrangimento de *compliance*, o tempo de execução seria ainda maior, pois o *compliance* ajuda o otimizador a identificar as barras essenciais da estrutura. Este facto pode parecer insignificante em estruturas menores, mas conforme a malha aumenta, a diferença é significativa.

Também é importante notar que a estrutura obtida é um mecanismo, pois o problema das barras sem conectividade continua a aparecer na presença do constrangimento de *compliance*. No entanto, ao realizar a verificação final, o programa emite o aviso indicando que é um mecanismo.

Nos gráficos dos constrangimentos, o constrangimento de *compliance* não se distingue dos de densidades intermédias e de encurvadura, tornando a análise impossível através dos gráficos. Esta análise só pode ser realizada através das tabelas de dados.

## 5.4 Estabilidade Cinemática

De modo a estudar a formulação plástica, descrita anteriormente na equação (2.15), foi analisado o artigo e o código GRAND publicados em [14]. O GRAND é um programa em MATLAB que realiza uma otimização topológica com base na formulação plástica de estruturas reticuladas, envolvendo elementos de tipo barra e viga, com diversos apoios e formas de *ground structure*. Na Figura 5.20, pode-se observar uma malha usada para criar a *ground structure* com a forma de "donut" e a sua estrutura ótima comparada com uma forma encontrada na natureza.

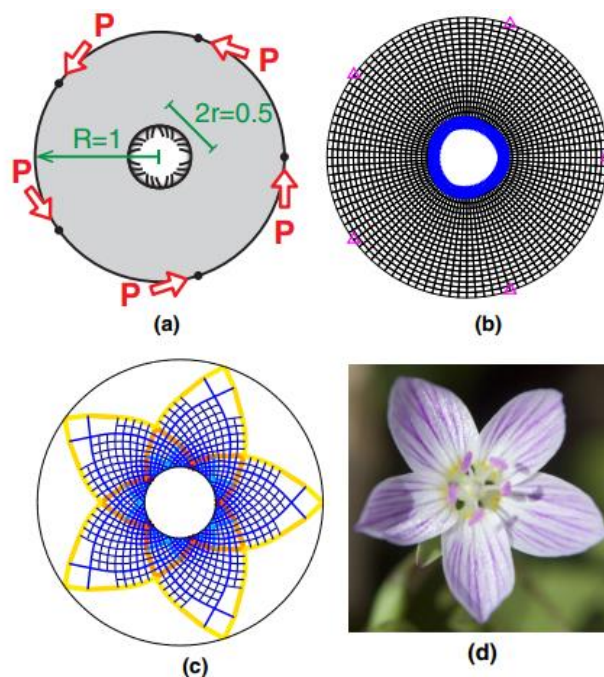


Figura 5.20 Exemplo de uma otimização realizada com o código GRAND [14], a) domínio de projeto e condições de fronteira; b) malha usada para construir a *ground structure*; c) estrutura otimizada; d) foto de uma claytonia caroliniana.

O GRAND trabalha com uma enorme quantidade de nós, esta a malha inicialmente é criada e depois são gerados elementos tipo barra pequenos para a *ground structure*, e ainda há barras que criam os elementos vigas. Este exemplo é atípico, mas serve para demonstrar como formas ótimas são encontradas na natureza. O artigo GRAND apresenta vários exemplos, como um gancho, uma placa retangular com um furo semicircular e uma viga encastrada. Para além destes, disponibilizados com o código são ainda disponibilizados outros exemplos.

Na primeira abordagem, foi utilizado o código GRAND mas inserindo os dados dos problemas desta dissertação, garantindo que a *ground structure* fosse a mesma. Logo de início, notou-se a rapidez do GRAND ao gerar estruturas de menor complexidade, como as deste estudo, em questão de segundos.

O GRAND utiliza matrizes simplificadas e pouco densas por isso, é possível resolver os problemas rapidamente com um otimizador de equações lineares. Apenas é possível utilizar este otimizador na formulação plástica, pois a equação a otimizar é linear.

A implementação da abordagem do GRAND no contexto de trabalho realizado no programa NOVA Truss TopOpt, não é trivial, pois torna-se necessário eliminar funções utilizadas pelo GRAND e criar matrizes com os dados do problema em um formato compatível tanto com o GRAND como com o NOVA Truss TopOpt, evitando conflitos e duplicação de matrizes. Esta implementação não afeta a otimização realizada pelo MMA no NOVA Truss TopOpt. No

programa NOVA Truss TopOpt, ambas as otimizações são executadas, porém, a equivalente ao GRAND é apenas executada como opcional.

Esta abordagem foi testada em vários problemas, incluindo o problema da Figura 5.1, bem como em outros exemplos, como uma estrutura de 1x2 com dois apoios nas extremidades esquerda e uma carga vertical no nó central direito, e outra estrutura, já analisada em trabalhos anteriores [6, 7], de 1x1 com dois apoios nas extremidades esquerda e uma carga vertical no nó situado no canto inferior direito. Essas soluções foram bastante satisfatórias, resultando em estruturas idênticas com áreas iguais tanto no GRAND quanto no NOVA Truss TopOpt.

No entanto, durante o processo de teste sobre a eficiência da formulação plástica, identificou-se também fragilidades do código nomeadamente ao ser executado para resolver o problema de uma estrutura de 2x2, que possui dois apoios nas extremidades inferiores e uma carga vertical no nó central superior, Figura 5.21.

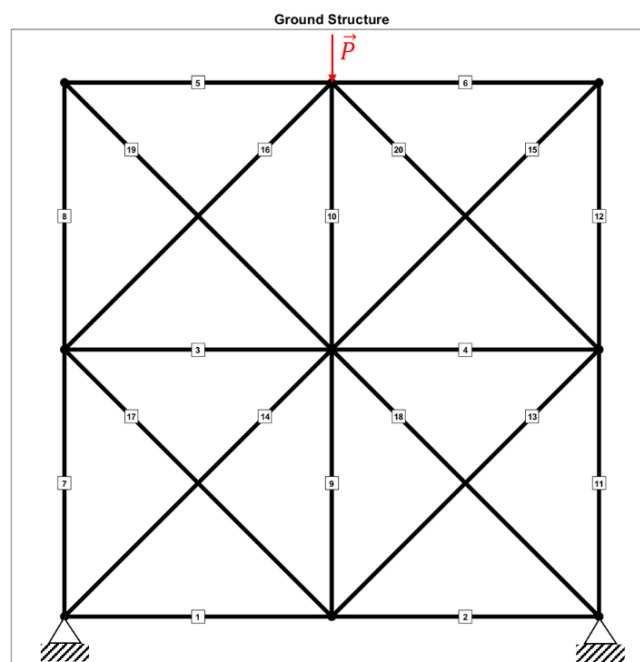


Figura 5.21 *Ground Structure 2x2*.

O problema a ser analisado apresenta as condições de fronteira mostradas na Figura 5.21. A carga  $P$  possui um valor de 50kN, com  $L=0,625m$ . É importante realçar que existe uma condição para o uso da formulação plástica, que é  $m \geq N$ , onde  $m$  é o número de elementos 20 e  $N$  é o número de graus de liberdade, 14. Neste caso, verifica-se que a condição é satisfeita.

Os resultados obtidos pelo programa NOVA Truss TopOpt, com a inclusão do constrangimento de *compliance*, são apresentados na Figura 5.22.

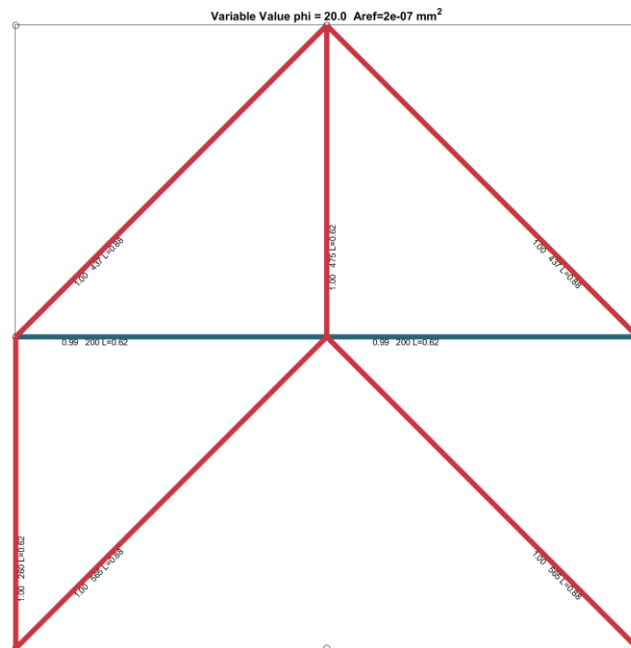


Figura 5.22 Otimização do exemplo 2x2 com o NOVA Truss TopOpt e com constrangimento de *compliance*.

A estrutura resultante não forma um mecanismo e é reforçada com várias barras no formato de um "Y" invertido, além das barras no nó de aplicação de carga.

A Figura 5.23 mostra a estrutura obtida com o NOVA Truss TopOpt sem o constrangimento de *compliance*, juntamente com a estrutura gerada pelo programa GRAND.

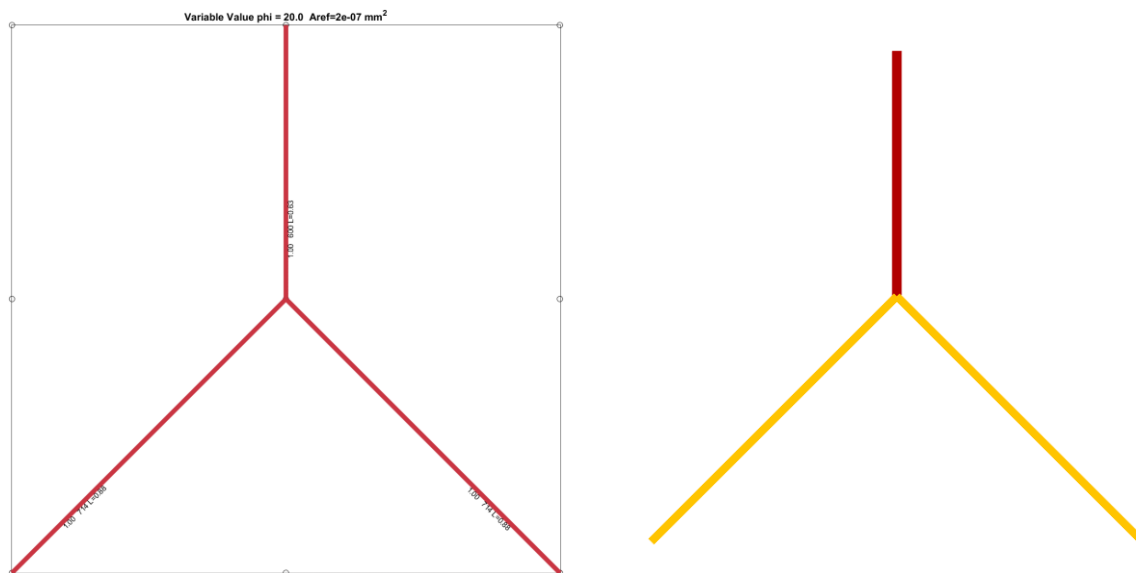


Figura 5.23 Otimização do exemplo 2x2 utilizando diferentes códigos a) NOVA Truss TopOpt sem constrangimento de *compliance*; b) GRAND.

Observa-se o mesmo resultado tanto no GRAND como no programa NOVA Truss TopOpt sem constrangimento de *compliance*. Isso deve-se ao facto de que o GRAND apenas

considera a tensão na formulação para encontrar um *full stressed design*, sem levar em conta durante o processo de otimização a tensão crítica de encurvadura e controlo de *compliance*.

Para uma análise mais aprofundada dos resultados, a Tabela 5.11 fornece os valores das áreas, forças internas e tensões em cada elemento de barra e para cada caso.

Tabela 5.11 Resultados das otimizações realizadas pelo GRAND e NOVA Truss TopOpt com e sem constrangimentos de *compliance*.

Barra	Sem <i>Compliance</i>			Com <i>Compliance</i>			GRAND		
	Área [mm <sup>2</sup> ]	Força interna [N]	Tensão [MPa]	Área [mm <sup>2</sup> ]	Força interna [N]	Tensão [MPa]	Área [mm <sup>2</sup> ]	Força interna [N]	Tensão [MPa]
1	200	1.1E-24	5.3E-21	200	6.8E-25	3.4E-27	0	0	0
2	200	-1.1E-24	-5.3E-21	200	-6.8E-25	-3.4E-27	0	0	0
3	200	4.5E-09	2.3E-05	200	9348	46.74	0	0	0
4	200	4.5E-09	2.3E-05	200	9348	46.74	0	0	0
5	200	-1.7E-09	-8.5E-06	200	-1.8E-09	-8.8E-12	0	0	0
6	200	-1.7E-09	-8.5E-06	200	-1.8E-09	-8.8E-12	0	0	0
7	200	-1.2E-08	-5.8E-05	260	-9348	-36.01	0	0	0
8	200	-1.7E-09	-8.5E-06	200	-1.8E-09	-8.8E-12	0	0	0
9	200	-5.3E-09	-2.7E-05	200	-7.5E-09	-3.7E-11	0	0	0
10	600	-50000	-83.29	475	-31304	-65.90	759	-50000	-65.90
11	200	-1.2E-08	-5.8E-05	260	-9348	-36.01	0	0	0
12	200	-1.7E-09	-8.5E-06	200	-1.8E-09	-8.8E-12	0	0	0
13	200	3.7E-09	1.9E-05	200	5.3E-09	2.6E-11	0	0	0
14	714	-35355	-49.52	565	-22135	-39.19	902	-35355	-39.19
15	200	2.4E-09	1.2E-05	200	2.5E-09	1.2E-11	0	0	0
16	200	-1.0E-08	-5.1E-05	437	-13220	-30.28	0	0	0
17	200	3.7E-09	1.9E-05	200	5.3E-09	2.6E-11	0	0	0
18	714	-35355	-49.52	565	-22135	-39.19	902	-35355	-39.19
19	200	2.4E-09	1.2E-05	200	2.5E-09	1.2E-11	0	0	0
20	200	-1.0E-08	-5.1E-05	437	-13220	-30.28	0	0	0

Os valores em cinzento representam as barras que têm densidade 0. Observa-se que tanto o GRAND como o NOVA Truss TopOpt com constrangimento de *compliance* apresentam

os mesmos valores de tensão para as barras {10, 14, 18}, que são as barras que formam o "Y" invertido. É esperado que as áreas dessas barras comparadas sejam diferentes visto que a estrutura obtida com o programa NOVA Truss TopOpt com constrangimento *compliance* possui mais barras, distribuindo assim a força entre as barras de maneira diferente.

A abordagem pelo GRAND não é uma solução definitiva para os problemas de mecanismos, pois o programa NOVA Truss TopOpt já leva em consideração uma variedade maior de fatores do que o GRAND. No entanto, é importante destacar que, em determinadas situações, essa abordagem pelo GRAND pode oferecer uma eficiência superior. Portanto, manter o GRAND incorporado no programa NOVA Truss TopOpt, com os resultados armazenados em uma base de dados, é uma vantagem significativa. Isso permite aos utilizadores que enfrentam dificuldades com o programa possam examinar a otimização por meio da formulação plástica, consultando as tabelas de resultados diretamente. Além disso, a capacidade de visualizar as forças internas para identificar as barras existentes é uma vantagem adicional do GRAND.

Ao obter as tabelas de resultados do GRAND após apenas uma iteração, podemos aproveitar essa vantagem, especialmente em estruturas com uma *ground structure* maior. Essas tabelas podem servir como um ponto de partida valioso, economizando tempo computacional e facilitando o processo de otimização.

## 5.5 Equação de penalização da densidade - Conectividade

Após a implementação e verificação do constrangimento de *compliance*, ainda se observaram barras sem conectividade em alguns casos. Essas situações foram mostradas anteriormente, como por exemplo nas Tabela 5.9, Tabela 5.10 e Figura 5.19. Assim, o objetivo deste subcapítulo é apontar uma possível solução.

Foi desenvolvida uma função  $\Delta$  que verifica em cada nó se existe alguma barra desconectada. Na Figura 5.24, é apresentado um exemplo de um nó com as 8 barras máximas vizinhas possíveis em 2D, a fim de explicar melhor esta parte.

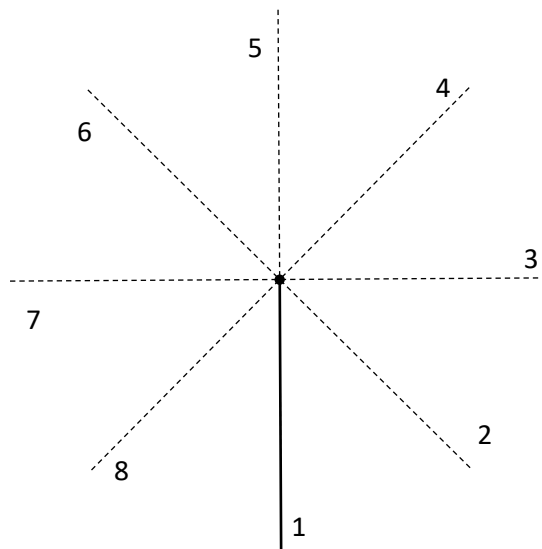


Figura 5.24 Ilustração de um nó e as respectivas possíveis barras vizinhas conectadas.

A barra 1 é a referência e será sempre considerada como uma barra sólida, enquanto as outras podem ou não ver "vazio", dependendo do caso.

O objetivo é penalizar quando temos a barra 1 com densidade igual a 1 e as outras barras com densidade igual a 0. A equação (5.1) apresenta a função proposta de penalização. Esta equação foi implementada no programa, mas ainda não é utilizada como parte integrante do problema de otimização. Uma possibilidade seria considerar-se a função  $\Delta$  na formulação do problema como constrangimento ou termo de penalidade na função objetivo.

$$\Delta = \rho_1 \prod_{i=2}^8 (1 - \rho_i) \tag{5.1}$$

$$\rho_1 = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \Delta = 0 \\ 1 & \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 & , \text{ se } \rho_i = 1 \\ \Delta = 1 & , \text{ se } \rho_i = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Considerando agora que as barras têm densidade de 1 ou 0 para simplificar, existem dois casos, quando  $\rho_1 = 1$ .

No primeiro caso, a barra 1 possui material sólido e as restantes têm material "vazio". No segundo caso, tanto a barra 1 quanto outra barra, por exemplo, a barra 2, são de material sólido com densidade 1, enquanto as restantes são de material "vazio" com densidade 0.

No primeiro caso, como as barras de 2 a 8 têm densidade 0, a parcela  $(1 - \rho_i)$  é igual a 1. Portanto, o produto disso será 1 também. Ao multiplicar pela densidade da barra 1, podemos concluir que o delta é igual a 1, o que indica um problema de conectividade.

No segundo caso, quando a barra 2 tem densidade igual a 1, a parcela  $(1 - \rho_i)$  será igual a 0. Ao multiplicar isso pelas outras parcelas e pela densidade da barra 1, o valor do delta será 0, indicando a ausência do problema de conectividade.

Podemos então concluir que, para que esta função possa entrar no futuro para o otimizador, o valor 0 será aceitável, enquanto o valor 1 indicará a necessidade de resolver o problema de conectividade.

Agora, considerando que as barras ainda não estão em seu limite final e ainda têm valores intermédios de densidade, podemos observar alguns casos na Tabela 5.12.

Tabela 5.12 Exemplos com os valores de densidade e da função delta, para 7 casos.

Barra	Casos						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	0,7	1	0,7	1	0,99
2	1	0,2	0,2	0	0	0	0,07
3	0	0,2	0,2	0	0,3	0,3	0,01
4	0	0,2	0,2	0	0	0	0,05
5	0	0,2	0,2	0	0	0	0,06
6	0	0,2	0,2	0	0	0	0,02
7	0	0,2	0,2	0	0,3	0,3	0,03
8	0	0,2	0,2	0	0	0	0,01
$\Delta$	0	0,21	0,15	1	0,34	0,49	0,77

No primeiro caso, podemos observar o exemplo em que duas barras têm densidade igual a 1, representando a solução ótima, onde o delta é igual a zero. No segundo caso, a barra 1 tem densidade igual a 1, enquanto as outras estão a desaparecer e têm densidade igual a 0,2. Nesta situação, o delta não será zero e será calculado como 0,21. É importante entender esses valores, pois, se forem implementados como constrangimentos, ao longo das iterações, esses valores serão considerados pelo MMA.

No terceiro caso, temos uma situação muito semelhante ao caso anterior, exceto que a barra 1 tem densidade de 0,7. É normal que a densidade de uma barra não esteja definida nas primeiras iterações, por sua vez o valor do delta será consideravelmente menor do que no exemplo anterior.

No quarto caso, temos a situação em que o delta é igual a 1, indicando que apenas a barra 1 é um material sólido, enquanto as outras têm densidade 0. No quinto caso, temos uma situação com uma barra com densidade de 0,7 e duas outras barras que estão a desaparecer com densidade de 0,3. Nesta situação, o delta tem um valor de 0,34, que é relativamente baixo.

No entanto, no sexto caso, mantendo as mesmas condições e apenas mudando a densidade da barra 1, podemos ver que o valor aumenta para 0,49, mostrando que, conforme o programa avança nas iterações e elimina as densidades intermédias, o delta ganha mais peso.

Por último, o caso 7 mostra a barra 1 com uma densidade de 0,99 e as restantes barras com valores inferiores a 0,1. Podemos observar que a função delta tem um valor de 0,77. Neste caso, temos uma das barras quase com densidade 1 e as restantes com densidade próximas de 0, i.e., consideradas com "vazio" pelo programa. É importante notar que o valor da função delta é menor do que gostaríamos, porque mesmo que cada uma das barras de 2 a 8 tenha uma densidade muito pequena, como são várias, acabam por contribuir significativamente para a função.



## CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

### 6.1 Conclusões

A presente dissertação teve como objetivo principal contribuir para o progresso científico na utilização topológica de estruturas reticuladas pelo método de *ground structure*, com o objetivo de minimizar a massa total da estrutura. A investigação concentrou-se na análise e prevenção de soluções de mecanismos, abordando três pontos-chave: constrangimento de *compliance*, estabilidade cinemática e equação de penalização de densidade.

Numa primeira fase, procedeu-se a uma breve revisão bibliográfica dos principais temas relacionados com otimização estrutural, de forma a estabelecer o contexto histórico e enquadrar os trabalhos anteriores relevantes para o desenvolvimento desta dissertação. Destacaram-se temas como a otimização topológica, análise de sensibilidades, constrangimentos, análise de encurvadura em barras e estabilidade cinemática.

No que diz respeito à formulação do problema, foi dada especial atenção à explicação do programa NOVA Truss TopOpt, incluindo uma descrição detalhada da geração da *ground structure* e uma análise das diversas componentes do problema, como variáveis de projeto, função objetivo, constrangimentos de encurvadura, tensão, densidades intermédias e *compliance*, finalizando com a estratégia de penalização.

Adicionalmente, foi dedicado espaço ao cálculo das sensibilidades, com destaque para a função objetivo e os constrangimentos de tensão, encurvadura, *compliance* e densidade intermédia, abordando todas as componentes relevantes envolvidas no processo de otimização.

Na secção de resultados, verificou-se que, de uma maneira geral, os resultados foram satisfatórios em relação aos diversos pontos abordados, tais como o constrangimento de

*compliance*, estabilidade cinemática, equação de penalização de densidade e a verificação da validade da fórmula de Euler.

No que diz respeito ao constrangimento de *compliance*, a sua implementação e estudo visaram eliminar as soluções de mecanismos e promover a integridade estrutural. O sucesso dessa abordagem foi evidente, com a maioria dos mecanismos a serem eliminados ou minimizados através da utilização do constrangimento de *compliance*. No entanto, ainda assim, em alguns casos específicos, observou-se a formação de mecanismos, para as quais ainda não foi explorada uma solução alternativa à *compliance*, deixando-se isso com um dos aspetos para trabalho futuro. Apesar disso, o constrangimento de *compliance* demonstra ser sempre eficaz em impedir a solução trivial de "ausência de estrutura". A estrutura mesmo quando sujeita a cargas pequenas, o constrangimento de *compliance* assegura que a estrutura, nunca "desapareça".

Para lidar com a existência de alguns mecanismos, mesmo após a implementação do constrangimento de *compliance*, introduziu-se a equação de penalização de densidade. Esta equação foi concebida para controlar os nós com apenas uma barra conectada, com resultados promissores na identificação desses casos e penalização dos mesmos. Embora ainda não tenha sido implementada como parte integrante do problema de otimização, esta equação de penalidade parece ser promissora.

Além disso, foi realizada uma verificação da fórmula de Euler para análise de encurvadura em elementos de barra, concluindo-se que o programa prevê de maneira aceitável a carga e a tensão crítica para as esbeltezas das barras em compressão analisadas. Essa validação reforça a confiança na precisão das análises estruturais realizadas pelo programa para os exemplos cobertos por esta dissertação.

Em resumo, esta dissertação proporcionou avanços significativos no entendimento e na abordagem dos desafios enfrentados na otimização topológica de estruturas reticuladas. Embora alguns problemas persistam, como a formação ocasional de mecanismos, as ferramentas e técnicas desenvolvidas ao longo deste estudo representam contribuições importantes para a área de otimização topológica.

## 6.2 Trabalhos futuros

Como proposta para trabalhos futuros, sugere-se a implementação da função de penalização da densidade (secção 5.5) como um constrangimento adicional ou como termo de penalidade na função objetivo do problema. Esta abordagem poderia permitir uma maior

precisão no controlo da distribuição de material dentro da estrutura, levando a *designs* mais eficientes e adaptáveis. Além disso, explorar a inclusão desta função de penalização no processo de otimização poderia proporcionar uma maneira mais eficaz de lidar com problemas de conectividade e garantir a integridade estrutural das soluções obtidas.

Outra linha de investigação interessante seria testar a metodologia do constrangimento de *compliance*, desenvolvida na presente dissertação, para exemplos de estruturas reticuladas mais complexas e ou com múltiplos materiais. Além disso, seria importante investigar o impacto das cargas de temperatura nos resultados da otimização estrutural. Isso permitiria a conceção de estruturas mais versáteis e adaptáveis, capazes de responder a diferentes condições ambientais e requisitos de desempenho. Ao incorporar a capacidade de trabalhar com materiais variados e considerar os efeitos da temperatura, seria possível otimizar o *design* de estruturas para uma ampla gama de aplicações, desde componentes aeroespaciais até estruturas de edifícios.

Dado o custo computacional elevado associado à formulação, seria valioso explorar técnicas de processamento paralelo para lidar com estruturas mais complexas e reduzir os tempos de otimização. O uso de recursos de computação paralela poderia acelerar significativamente o processo de otimização, permitindo a análise de estruturas de maior escala e complexidade em um tempo viável. Isso abriria novas oportunidades para a aplicação do programa em projetos de grande porte e exigentes, onde a eficiência computacional é crucial para o sucesso do processo de *design*.



## APÊNDICE

```

clc %Limpeza da janela de comandos
clear all
close all
%Limpeza do ambiente de trabalho
%%%% DIMENSIONAMENTO DE COLUNAS %%%%
% PARÂMETROS EDITÁVEIS
E = 69e9; % Módulo de elasticidade
sigma_y = 103e6; % Tensão de cedência
L = 0.625; % Comprimento
L_eq = [1.25,1.25]; % Comprimento de encurvadura
alpha = 0.49; % Parâmetro de imperfeição
alpha9 = 0.32;
A1=829E-6;
A2=750E-6;

A = [A1,A2]; % Área da secção circular
norm = pi*sqrt(E/sigma_y); % Fator de normalização
sigma=[289E5,16e6];
r=eye(1,2); % Raio
I=eye(1,2);
i=eye(1,2);
esb=eye(1,2);
esb_norm=eye(1,2);
sigma_cr=eye(1,2);
N=eye(1,2);
N_rd=eye(1,2);
desvio=eye(1,2);
chi=eye(1,2);
for j = 1:2
    r(1,j) = sqrt(A(1,j)/pi);
    I(1,j) = (pi/4)*r(1,j)^4; % 2º Momento de área da secção circular
    i(1,j) = sqrt(I(1,j)/A(1,j)); % Raio de giração
    esb(1,j) = (L_eq(1,j)/i(1,j)); % Esbelteza
    esb_norm(1,j) = esb(1,j)/norm % Esbelteza normalizada
    % TENSÃO CRÍTICA DE EULER
    if (esb_norm(1,j)<= 1)
        sigma_cr(1,j) = sigma_y
    elseif (esb_norm(1,j) > 1)
        sigma_cr(1,j) = (E*pi^2)/esb(1,j)^2;

```

```

end
sigma_norm(1,j) = sigma_cr(1,j)/sigma_y;
% FATOR DE REDUÇÃO DO EC3
if (esb_norm(1,j) <= 0.2)
    chi = 1;
    kapa = 1;
elseif (esb_norm(1,j) > 0.2)
    phi = 0.5*(esb_norm(1,j)^2+alpha*(esb_norm(1,j)-0.2)+1);
    phi9 = 0.5*(esb_norm(1,j)^2+alpha9*(esb_norm(1,j)-0)+1);
    chi(1,j) = 1/(phi+sqrt(phi^2-esb_norm(1,j)^2));
    chi9(1,j) = 1/(phi9+sqrt(phi9^2-esb_norm(1,j)^2));
    kapa(1,j) = 1+0.004*(4*esb_norm(1,j))^(0.5-esb_norm(1,j))-
(0.22*esb_norm(1,j))^(1.4*(1-esb_norm(1,j)));
end
% ESFORÇO AXIAL
N(1,j) = A(1,j)*sigma_cr(1,j); % Euler
FS = 1.1;
N_rd(1,j) = chi(1,j)*A(1,j)*sigma_y/FS; % EC3
N_rd9(1,j) = -kapa(1,j)*chi(1,j)*A(1,j)*sigma_y/FS; % EC9
desvio(1,j) = 100*(N(1,j)-N_rd9(1,j))/N_rd9(1,j); % Erro relativo
end
% CURVA DE EULER
x = linspace(norm,5*norm,100);
plot(x/norm,((E*pi^2)./x.^2)/sigma_y, 'color', 'r', 'linewidth', 1.5);
hold on
% CURVA DE JOHNSON original
x = linspace(0,1.5,10);
plot(x, (1-sigma_y*x.^2/(E*(2*pi)^2)*norm^2), 'color', '#77AC30', 'linewidth', 1.5);
hold on
% CURVA DE EC9
x = linspace(0.2,5,100);
plot(x, ((0.5*(x.^2+alpha9*(x-0)+1))+sqrt((0.5*(x.^2+alpha9*(x-0)+1)).^2-x.^2)).^-1, 'color', '#7E2F8E', 'linewidth', 1.5);
hold on
% CURVA DO EC3
x = linspace(0.2,5,100);
plot(x, ((0.5*(x.^2+alpha*(x-0.2)+1))+sqrt((0.5*(x.^2+alpha*(x-0.2)+1)).^2-x.^2)).^-1, 'color', 'b', 'linewidth', 1.5);
% PERSONALIZAÇÃO DO GRÁFICO
xlim([0,5]);
ylim([0,1.2]);
grid on
line([0 1],[1 1], 'linestyle', '-','color', 'r', 'linewidth', 1.5);
line([0 0.2],[1 1], 'linestyle', '-','color', 'r', 'linewidth', 1.5);
line([1,1],[0,1], 'linestyle', ':','color', 'k', 'linewidth', 1);
line([0.2,0.2],[0,1], 'linestyle', ':','color', 'k', 'linewidth', 1);
title('Curvas de dimensionamento de colunas');
hold on
for j=1:2
    plot(esb_norm(1,j),sigma_norm(1,j), 'ro');
    plot(esb_norm(1,j),sigma(1,j)/sigma_y, 'k+');
    i = num2str(j)
    m = 0.35 - j*0.035
    text(esb_norm(1,j)-0.03,chi(1,j)+0.15-j*0.02,i,FontSize=9);
    plot(esb_norm,chi9, 'bo', 'color', '#7E2F8E');
end
legend('Curva de Euler', 'Johnson', 'EC9', 'EC3');

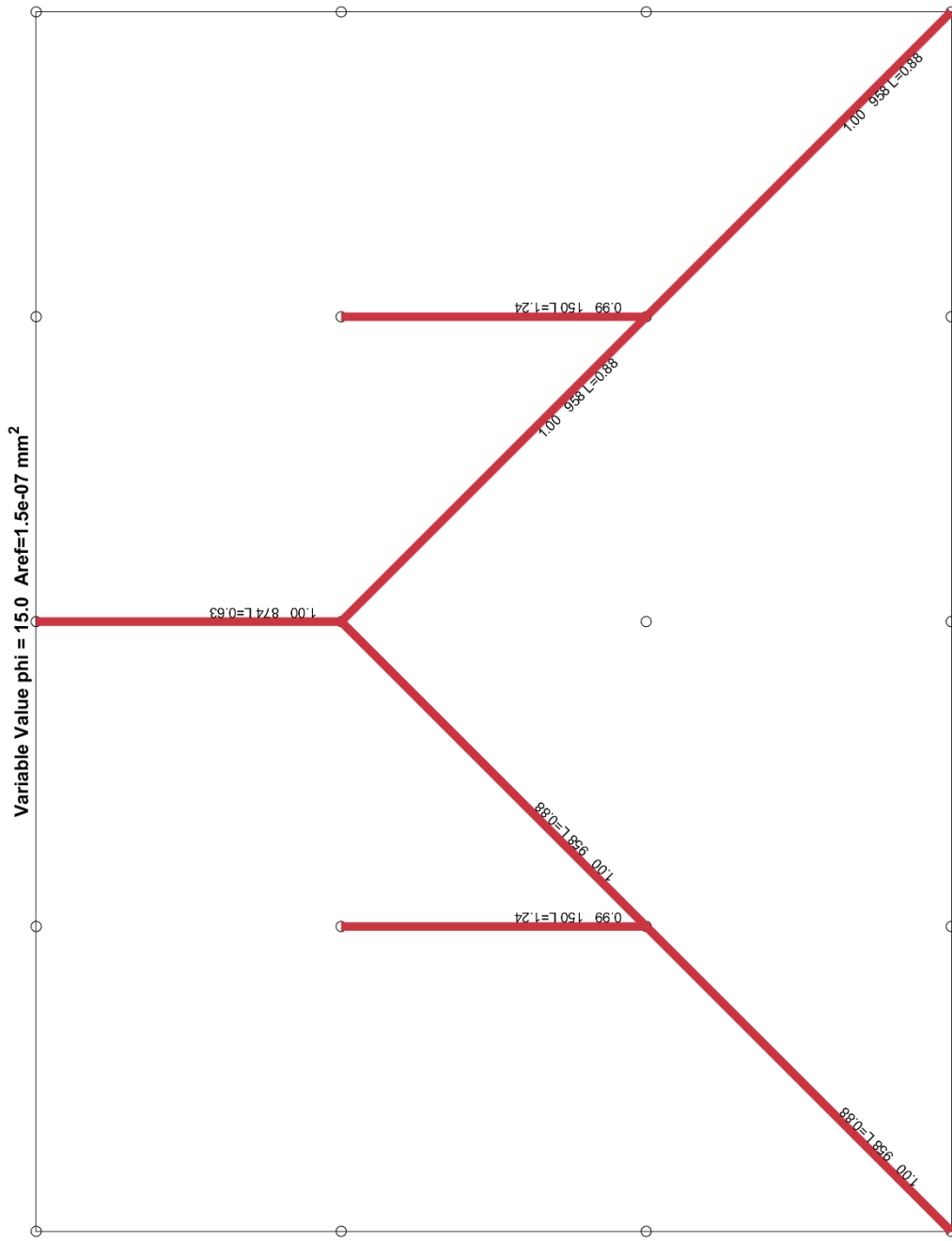
```

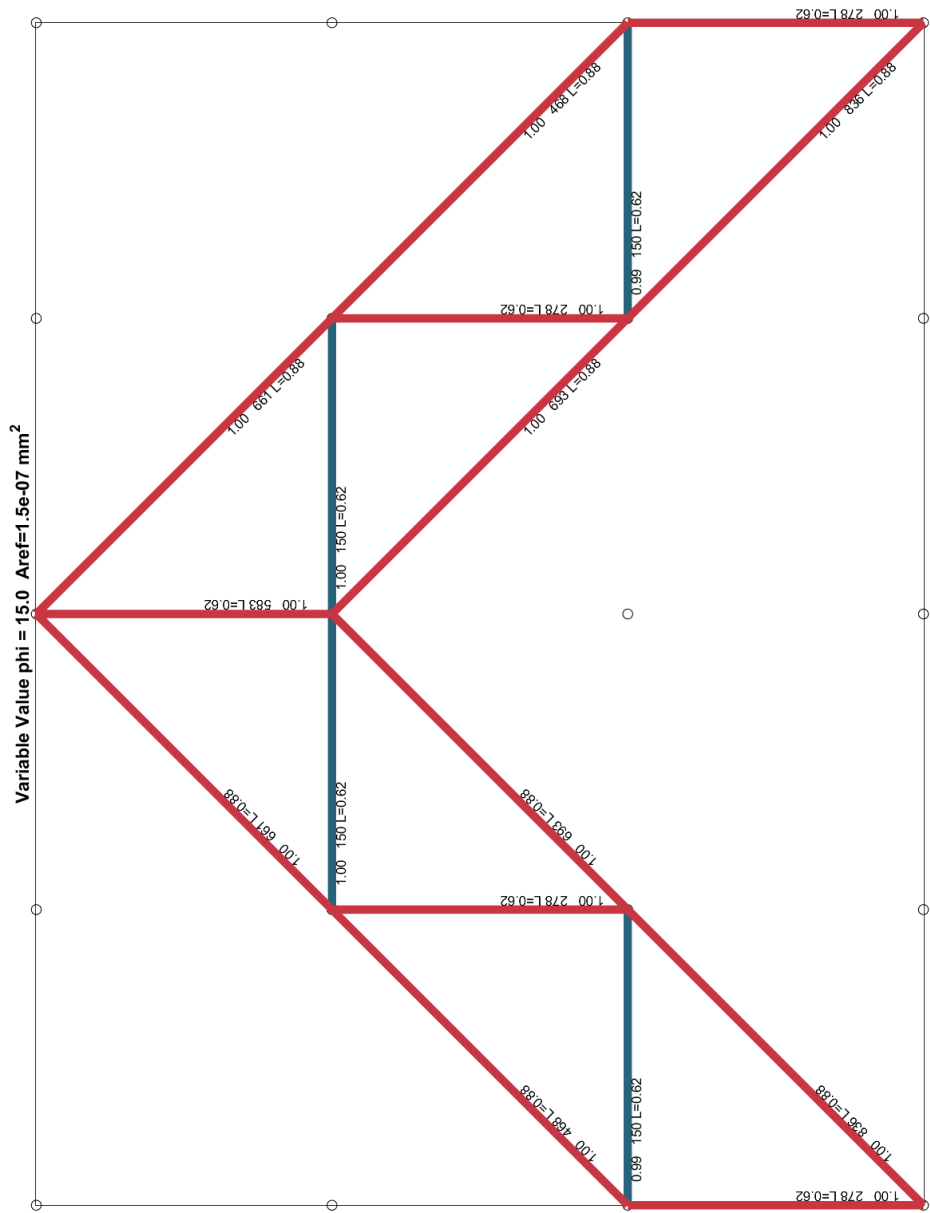
```
% RESULTADOS
fprintf('Esbelteza normalizada = %f\n',esb_norm);
fprintf('Esforço axial (EULER) = %f\n',N);
fprintf('Esforço axial (EC3)   = %f\n',N_rd);
fprintf('Esforço axial (EC9)   = %f\n',N_rd9);
fprintf('Erro relativo (percentagem) = %f\n',desvio);
% fim do ficheiro
```



B

APÊNDICE





## REFERÊNCIAS

- [1] C.-H. L. Kyu-Hong Han, "Elastic flange local buckling of I-shaped beams considering effect of web restraint," em *Thin-Walled Structures*, 2016.
- [2] A. Ben-Tal, F. Jarre, M. Kocvara, A. Nemirovski e J. Zowe, "Optimal Design of Trusses Under a Nonconvex Global".2000.
- [3] P. Coelho, "Tópicos Avançados em Mecânica Estrutural," 2019.
- [4] T. M. L. Pratas, "Otimização topológica multimaterial de estruturas reticuladas com constrangimentos de tensão," Setembro 2019.
- [5] C. S. J. d. Almeida, "Projeto de estruturas reticuladas leves e resistentes utilizando variáveis de área e de seleção de material," Novembro 2020.
- [6] L. P. A. Eugénio, "Gradient-Based Truss Topology Optimization with local stress and buckling constraints considering chain effects," Novembre 2021.
- [7] R. J. d. S. Pereira, "Otimização topológica de estruturas reticuladas resistentes com constrangimentos de encruvadura utilizando variáveis de área e densidade," Setembro 2022.
- [8] Y. Jung, S. Lim, J. Kim e S. Min, "Lightweight design of electric bus roof structure using multi-material," p. 13, 2020.
- [9] W. Aichtlger, "Truss topology optimization including bar properties different," 1996.
- [10] G. D. Pena, "Análise e dimensionamento de colunas de alumínio segundo o Eurocódigo 9," 2012.
- [11] E. T. Bahtiar, D. Malkowska, D. Trujillo e N. Nugroho, "Engineering Structures," *Experimental study on buckling resistance of Guadua angustifolia bamboo column*, 2021.

- [12] T. Zegard e G. H. Paulino, "GRAND — Ground structure based topology optimization," 2014.
- [13] M. Bendsøe e O. Sigmund, "Topology Optimization," em *Theory, Methods and Applications*, Springer, pp. 221-229.
- [14] Metal Supermarkets, "Grade Guide: A36 Steel," 14 Novembro 2017. [Online]. Available: <https://www.metalsupermarkets.com/grade-guide-a36-steel/>. [Acedido em Janeiro 2024].
- [15] J. B. Cardoso, Métodos Computacionais em Engenharia Mecânica, FCT/UNL, 2018/2019.
- [16] E. C. f. Standardization, "EN 1993-1-1 (2005): Eurocode 3: Design of steel structures," pp. 56 - 60, 2004.
- [17] E. C. f. Standardization, "EN 1999-1-1 (2007): Eurocode 9: Design of aluminium structures," pp. 70 - 73, 2006.
- [18] Á. F. M. Azevedo, "MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS," Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 2003.
- [19] H. Ozbasaran, "A kinematic stability repair algorithm for planar truss topology via geometric decomposition," em *Computers and Structures*, 2021.
- [20] R. F. W. L. ., T. T. L. Z. Mohammad Shahabsafa, "Truss topology design optimization with guaranteed," em *Industrial and*, 2019.
- [21] J. K. G. May Thu Nwe Nwe, "Topology Optimization of Truss Structures Considering Stress and Stability Constraints," 2019.
- [22] D. M. d. T. N. N. Effendi Tri Bahtiar, "Experimental study on buckling resistance of Guadua angustifolia bamboo column," em *Engineering Structures*, 2021.
- [23] E. T. B. Naresworo Nugroho, "Buckling formulas for designing a column with Gigantochloa apus," em *Case Studies in Construction Materials*, 2021.
- [24] M. P. B. AHARON BEN-TAL, "A NEW METHOD FOR OPTIMAL TRUSS TOPOLOGY DESIGN," em *SIAM J. OPTIMIZATION*, 1993.
- [25] S. A. P. B. R. F. C. James N. Richardson, "Multiobjective topology optimization of truss structures with kinematic stability repair," em *Struct Multidisc Optim (2012)*, 2011.
- [26] G. H. Paulino, "The Ground Structure Method," em *A computational method for optimal frames (pin-jointed frames)*, 2016.

- [27] T. Sokół, "A 99 line code for discretized Michell truss optimization written in Mathematica," *Struct Multidisc Optim (2011)*, 2010.
- [28] W. Aichtziger, "Local stability of trusses in the context of topology optimization Part I: Exact modelling," em *Structural Optimization* 17, 1999.
- [29] W. Aichtziger, "Local stability of trusses in the context of topology optimization Part II: A numerical approach," em *Structural Optimization* 17, 1999.
- [30] O. A. Hazem Madah, "Concurrent structural optimization of buckling-resistant trusses and," *International Journal of Solids and Structures*, 2019.
- [31] M. J. Navid Changizi, "Topology optimization of steel frame structures with constraints on overall and individual member instabilities," *Finite Elements in Analysis and Design*, 2018.



2024

MAFALDA PALMA

Otimização de Estruturas Reticuladas com Constrainjmentos de Tensão, Encurvadura e Compliance