UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Faculdade de Economia

MEDIDAS DE BEM ESTAR: ALGUNS COMENTÁRIOS

Vítor Gaspar

Working Paper nº 9

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Faculdade de Economia
Campo Grande, nº 185
1 700 LISBOA

Novembro, 1983

O objectivo deste trabalho(*) é a construção de medidas apropriadas para variações de bem-estar e o seu cálculo a partir de informação observável no mercado: as funções procura ordinárias ou marshallianas. Neste sentido grande parte da nossa atenção vai centrar-se no conceito de métrica monetária, sugerido originariamente por Samuelson, [1974].

A métrica monetária dá-nos uma medida de bem-estar comensurável com o rendimento para um dado nível de preços de referência.

Começaremos, assim, por demonstrar a possibilidade de construir um índice de utilidade, a partir da relação de ordem de preferências (dadas as condições habituais de regularidade), associando a um cabaz x o mínimo do produto interno, de um vector estritamente positivo p, por um elemento do conjunto dos cabazes preferidos ou indiferentes a x, designaremos esta função por $\xi(p,x)$. É claro que podemos interpretar $\xi(p,x)$ como uma função despesa em que o vector dos preços, p, é dado. A demonstração deste resultado pode ser comparativamente simples.

Na segunda parte do trabalho apresentaremos um "survey" de algumas contribuições recentes para o problema da avaliação da métrica monetária a partir das funções procura ordinárias. A ideia mais importante parece ser a determinação das condições que asseguram movimentos ao longo de uma curva de indiferença. Outro resultado importante é que podemos obter uma variação da métrica monetária $\xi(p,x)$ considerando a variação do excedente do consumidor ao longo de uma trajectória apropriadamente escolhida.

Na terceira parte apresentaremos uma interpretação gráfica para o caso bi-dimensional de alguns resultados.

(*) Trabalho apoiado pelo Prof. Diogo Lucena e realizado no âmbito da cadeira de Teoria Microeconómica I do curso de Mestrado da Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa.

1. Comecemos por definir o espaço de consumo como o subconjunto do espaço n dimensional dos bens, $\mathbb{R}^n$, constituído pelos cabazes de consumo possível: $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Este espaço de consumo será designado por X. Iremos, neste trabalho, identificar X com o ortante não negativo de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$.

Admitimos que, sobre X, o consumidor tem definida uma relação binária de preferências " $\succsim$". Para dois cabazes x e y, "$x \succsim y$" significa que "x é preferido ou indiferente em relação a y"

A relação de preferências pode dar origem a duas outras relações: relação de preferência estrita (a que corresponde o símbolo "$\succ$") e a relação de indiferença (a que corresponde o símbolo "$\sim$"). Assim um cabaz x diz-se estritamente preferido a um cabaz y sse "$x \succsim y$" e "$\neg(y \succsim x)$". Por outro lado um cabaz x diz-se indiferente a um cabaz y sse "$x \succsim y$" e "$y \succsim x$".

Podemos definir função utilidade: uma função real definida sobre X é uma função de utilidade se verificar:

$$\text{"}x \succsim y\text{"} \iff u(x) \geq u(y) \tag{1}$$

Teorema: Suponha-se que a relação de preferências "$\succsim$" definida sobre o espaço de consumo $X = \mathbb{R}^n_+$ é transitiva e completa e satisfaz as seguintes condições adicionais de regularidade:

$$U_+(x) = \{x' \in \mathbb{R}^n_+ : x' \succsim x\}$$

$$U_-(x) = \{x' \in \mathbb{R}^n_+ : x' \precsim x\}$$

são conjuntos fechados e $\forall x \; \mathbb{R}^n_+$, $0 \precsim x$ (que quer dizer que todo o cabaz de consumo é preferido ou indiferente ao cabaz nulo).

Nestas condições se definirmos $\xi(x)$ como:

$$\xi(x) = \min_{x'} \{px' : x' \in U_+(x)\} \tag{2}$$

em que p é um vector n-dimensional estritamente positivo $(p \gg 0)$, $\xi(x)$ satisfaz:

$$\text{"}x \succsim y\text{"} \iff \xi(x) \geq \xi(y)$$

i.e. $\xi(x)$ é uma função de utilidade representativa das preferências. $\xi(x)$ é uma função contínua.

Demonstração: vamos dividir o argumento em três partes.

a) Pretendemos mostrar que existe uma solução para o problema (2) verificando-se num ponto de fronteira do conjunto $U_+(x)$.

Dado um cabaz de consumo $x=(x_1, \ldots, x_n)$ podemos considerar um cabaz $Z=(z_1, \ldots, z_n)$ em que $z_i = x_i + g$, $g > 0$ e definir o conjunto $0 = \{x' : pz \geq px'\}$. Consideremos agora $0 \cap U_+(x)$ que é não vazio uma vez que inclui necessariamente x. Como $pz > px \geq \xi(x)$ a solução de (2) sobre $0 \cap U_+(x)$ é igual à solução de (2) sobre $U_+(x)$. Mas $0 \cap U_+(x)$ é fechado e limitado (e, consequentemente, compacto uma vez que se trata de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$). Nestas condições, a existência de uma solução para (2) está assegurada pelo teorema de Weirstrass.

Que a solução de (2) se dá num ponto de fronteira de $U_+(x)$ pode ver-se da seguinte forma: Admitamos que x' é uma solução de (2) interior a $U_+(x)$. Então existe uma vizinhança de raio ∂ de x' totalmente em $U_+(x)$:

$$B(x', \partial) \subset U_+(x)$$

mas então existe $z \in U_+(x)$, tendo z todas as componentes menores que x'. Sendo assim $pz < px'$, uma contradição.

b) Vamos agora demonstrar que $\xi(x)$ é uma função de utilidade.

se $x \succsim y$ então $U_+(x) \subseteq U_+(y)$ pelo que:

$$\xi(x) = \min_{x'} \{px' : x' \in U_+(x)\} \geq \min_{x'} \{px' : x' \in U_+(y)\} = \xi(y)$$

o que mostra que $x \succsim y \Longrightarrow \xi(x) \geq \xi(y)$. Para demonstrar o consenso, $(\xi(x) \geq \xi(y) \Longrightarrow x \succsim y)$ suponhamos pelo contrário que $\xi(x) \geq \xi(y) \wedge y \succ x$. Mas então $U_+(y) \subset U_+(x)$, em particular, $U_+(y) \subseteq U_{++}(x)$, em que:

$$U_{++}(x) = \{x' : x' \succ x\}$$

mas $U_{++}(x)$ é um conjunto aberto uma vez que é complementar de $U_-(x)$, mas então:

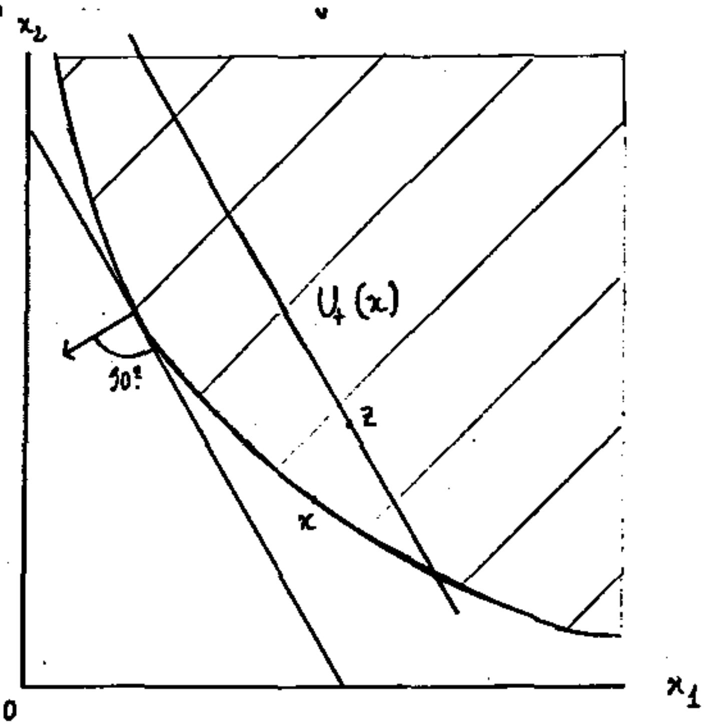
$$\xi(y) \geq \min_{x'} \{px' : x' \in U_{++}(x)\} > \xi(x) \qquad (3)$$

umá vez que o óptimo (2) sobre $U_+(x)$ se verifica num ponto de fronteira. (3) constitui a contradição com a hipótese de partida que procurávamos.

c) Como $\xi(x) \geq M$ e $\xi(x) \leq M$ definem conjuntos fechados (uma vez que $U_{+}(x)$ e $U_{-}(x)$ são conjuntos fechados), então $\xi(x)$ é semi-contínua superior e inferiormente sendo, portanto, contínua.

Uma nota importante é que se x' é uma solução para (2) então $x'-x$. Este resultado é intuitivo se pensarmos que $U_{++}(x)$ é um conjunto aberto.

Fig. 1



Sabemos que se uma determinada função é uma função utilidade, correspondente a uma determinada relação de preferências, então a representação permanece válida se considerarmos uma sua transformação monótona crescente.

Podemos definir função despesa como:

$$e(p,u) = \min_{x}\{px : x \in X \wedge u(x) \geq u\}$$

em que u representa o nível de utilidade.

Suponhamos que dispomos de uma função de utilidade $u(x)$ então:

$$U_{+}(x) = \{x' \in \mathbb{R}^{n}_{+} : x' \succsim x\} = \{x' \in \mathbb{R}^{n}_{+} : u(x') \geq u(x)\}$$

por definição de função de utilidade. Mas, nestas condições, se considerarmos um vector n-dimensional de preços $(p \gg 0)$, temos:

$$\xi(p,x) = \min_{x'} \{px' : x' \in U_+(x)\} = \min_{x'} \{px' : u(x') \geq u(x)\} =$$

$$= e[p,\ u(x)] \qquad (4)$$

em que $\xi(x)$ passa a $\xi(p,x)$ uma vez que depende do vector $p \gg 0$ escolhido.

Da expressão (4) acima conluímos que $\xi(p,x)$ nos dá a despesa mínima que, tomando o vector de preços $p \gg 0$ como dado, permite ao consumidor o usufruto do mesmo nível de bem-estar que atingia com o consumo de x. Temos então um índice de utilidade com um significado particularmente palpável.

Podemos definir função indirecta de utilidade como:

$$v(p,y) = \max_{x} \{u(x) : x \in X \wedge px \leq y\}$$

em que y representa, aqui, o rendimento. A função de utilidade indirecta dá-nos o máximo de utilidade alcançável dados os preços, p, e o rendimento y. (p,y) determinam um conjunto orçamental $B(p,y) = \{x \in X : px \leq y\}$ a que é atribuído o índice de utilidade máximo alcançável com o consumo de um cabaz pertencente ao conjunto.

O objectivo do consumidor racional tradicionalmente postulado é o da maximização da sua função utilidade sobre o conjunto orçamental. Para simplificar a exposição iremos admitir a não saciedade (que corresponde a uma função de utilidade estritamente crescente em todos os seus argumentos) e a convexidade estrita das preferências (que garante a unicidade da solução óptima para o problema do consumidor).

Suponhamos que a solução para o problema do consumidor $\max u(x)$ s.a. $px \leq y$, $x \in X$ é $x(p,y)$, vector de funções procura ordinárias ou marshallianas, então:

$$u[x(p,y)] = v(p,y)$$

mas então:

$$e(p',\ u[x(p,y)]) = e[p',\ v(p,y)] = \xi(p',x) \qquad (5)$$

A equação (5) confirma o resultado, esperado, de que a função $\xi(.)$ para além de permitir a construção directa de uma função utilidade é também uma transformação monótona crescente da função de utilidade indirecta.

Por outro lado verifica-se a identidade:

$$e(p,v(p,y)) \equiv y \tag{6}$$

Consideremos agora que queremos comparar duas situações (p,y) e $(p,y+\Delta y)$. Qual a variação na indicador $\xi(p,.)$?

Por (5) e (6) vemos que:

$$\Delta\xi(p,.) = \Delta y \tag{7}$$

daí poder concluir-se que ξ é um indicador de utilidade comensurável a variações no rendimento mantendo-se o vector de preços p. Podemos então denominar $\xi(.)$ como métrica monetária.

O último ponto que iremos considerar é o da interpretação de ξ como uma variação equivalente generalizada (McKenzie(1983], Stahl II (1983)):

$$\begin{aligned} EV &= e(p_0,\ u(x_1)) - e(p_1,\ u(x_1)) + \Delta y = \qquad (8) \\ &= e(p_0,\ u(x_1)) - e(p_1,\ u(x_1)) + e(p_1, u_1(x_1)) - e(p_0, u(x_0)) = \\ &= e(p_0,\ u(x_1)) - e(p_0,\ u(x_0)) = \xi(p_0,\ x_1) - \xi(p_0,\ x_0) \end{aligned}$$

Note-se que com $\Delta y=0$ temos a definição habitual de variação equivalente e a confirmação (desnecessária) de que se trata de uma medida apropriada de variações de bem-estar nessas condições.

A variação da métrica monetária, associada com o vector de preços inicial, p_0, tem um significado particularmente interessante: assim o consumidor estará indiferente entre a passagem de $B(p_0,y_0)$ para $B(p_1,y_1)$ — variação quer no vector de preços quer no rendimento — e uma variação no rendimento no montante $\xi(p_0,x_1) - \xi(p_0,x_0)$ — em que x_0 é o cabaz escolhido sobre $B(p_0,\ y_0)$ e x_1 o cabaz escolhido sobre $B(p_1,y_1)$ — mantendo-se os preços constantes.

2. O tópico que vamos considerar nesta secção é o da recuperação da função $\xi(p,x)$ a partir da informação acessível nos mercados. Concretamente podemos obter uma variação da função de $\xi(p,x)$ se dispusermos das funções procura ordinárias dos bens cujos preços variarem no intervalo relevante. Antes de discutir especificamente esse ponto importa referir algumas propriedades e resultados de carácter geral.

Consideremos as seguintes hipóteses sobre a função de utilidade:

H1: (diferenciabilidade): $u(x)$ é uma função da classe C^2 sobre X;

H2: (monotonia): o gradiente de $u(x)$ ($\nabla u(x)$) tem todas as suas componentes estritamente positivas ($\nabla u(x) \gg 0$), para todo o x pertencente ao ortante estritamente positivo de $\mathbb{R}^n$ ($x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n: x \gg 0\}$);

H3: (convexidade): Seja $\nabla^2 u(x)$ a matriz das segundas derivadas de u, então para qualquer $x \in P$, e um vector n-dimensional v tal que $\nabla u(x).v=0$, $v\nabla^2 u(x)v < 0$;

H4: $x_i = 0 \Longrightarrow u(x) = 0, \quad i=1,\ldots,n.$

As hipóteses 1 e 3 são de carácter técnico não criando perdas de generalidade significativas de um ponto de vista económico. A hipótese 3 exige que a matriz $\nabla^2 u(x)$ seja definida negativa sobre um hiperplano perpendicular a $\nabla u(x)$.

Considerando o problema do consumidor max $u(x)$, $x \in B(p,y)$ temos que a hipótese 3 assegura a unicidade da solução óptima.

A hipótese 4 é uma hipótese de regularidade bastante forte na medida em que tem como consequência que, em geral, os agentes irão escolher um cabaz com quantidades estritamente positivas de todos os bens. Esta hipótese é tanto mais razoável quanto mais agregada for a análise. A hipótese 4 assegura que o óptimo do consumidor se verifica num ponto interior.

Pode demonstrar-se que as hipóteses 1 - 4 implicam as seguintes propriedades para as funções procura:

P1: $x(p,y)$ uma função definida sobre $\Omega = \{(p,y): p \gg 0, y \gg 0\}$ e $x(p,y) \geq 0$ para todo o (p,y) Ω;

P2: a restrição orçamental é estritamente satisfeita, i.e. $px(p,y) = y$ para todo o (p,y) Ω;

P3: para todo o $i = 1,\ldots,n$ $x_i(p,y)$ é uma função da classe C^1 sobre Ω;

Definindo a matriz de Slutsky (S) como agrupando os termos s_{ij} tais que:

$$sij = \frac{\partial x_i(p,y)}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i(p,y)}{\partial y}$$

podemos considerar duas propriedades adicionais:

P4: sendo $S = [s_{ij}]$ $i = 1,\ldots, n$; $j=1,\ldots n$ então $S = S^T$ para todo o (p,y) Ω i.e. $s_{ij}(p,y) = s_{ij}(p,y)$, $\forall_{i,j}$;

P5: a matriz de Slutsky (S) é semi-definida negativa: $v\, S(p,y)\, v \leq 0$ para todo o (p,y) Ω e qualquer vector n-dimensional v.

Convém notar que, embora menos interessantes para os nossos objectivos, as propriedades de homogeneidade de grau zero nos preços e no rendimento e de aditividade (condições de agregação de Engel e Cournot), estão também asseguradas neste contexto.

As propriedades P1 - P5 são, por sua vez, suficientes para garantir a existência de uma função de utilidade estritamente quasi-concâva e monotona que racionalize o sistema de funções procura. Dizemos que a função de utilidade $u(x)$, $X \rightarrow \mathbb{R}$ racionaliza um sistema de funções procura $x(p,y)$, se $x(p,y)$ é uma solução para o problema do consumidor: max $u(x)$ s.a. $x \in B(p,y)$.

2.1. Existem várias formas de procurar avaliar uma variação na métrica monetária. Podemos seguir McKenzie (1983) e considerar um desenvolvimento em série de Taylor.

A forma da métrica monetária que nos vai interessar aqui é:

$$\xi(p^o, x) = e(p^o, v(p,y))$$

ver (5). Em que $x = x(p,y)$. É esta a forma que nos interessa dado que pretendemos determinar a variação de ξ correspondente a alterações dos preços e do rendimento:

$$\Delta\xi(p^o;\ x^1,\ x^o)$$

$x^1 = x(p^1, y^1)$; $x^o = x(p^o, y^o)$. Estamos a considerar o vector de preços inicial p^o, como padrão.

Assim:

$$\Delta\xi(p^o;\ x^1;\ x^o) = \frac{\partial e(p^o, v(p^o, y^o))}{\partial y}\ \Delta y + \sum_i \frac{\partial e(p^o, v(p^o, y))}{\partial p_i}\ \Delta p_i +$$

$$+ \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 e(p^o, v(p^o, y^o)}{\partial y^2}\ (\Delta y)^2 + \frac{1}{2}\ \sum_i\sum_j \frac{\partial^2 e(p^o, v(p^o, y^o))}{\partial p_i \partial p_j}\ \Delta p_i \Delta p_j +$$

$$+ \sum_i \frac{\partial^2 e(p\ , v(p\ , y\ ))}{\partial p_i \partial y}\ \Delta p_i \Delta y + \text{termos de ordem superior} \qquad (9)$$

em termos gerais pode desenvolver-se a série até à ordem n. Para que esta aproximação faça sentido temos que admitir adicionalmente que $\xi(.)$ é uma função analítica.

A equação (9), por si só, tem um interesse limitado uma vez que não permite a obtenção de $\Delta\xi$ a partir de informação observável no mercado. Mas acontece que podemos transformar (9) de forma a cumprir esse objectivo.

Em primeiro lugar, de (7), podemos concluir que:

$$\frac{\partial e(p^o, v(p^o, y))}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^n e(p^o, v(p^o, y))}{\partial y^n} = 0 \quad (n = 2, \ldots, \infty) \qquad (10)$$

Agora, usando o facto de que $e(p^o, v(p^o, y))$ é uma transformação monótona crescente da função indirecta de utilidade, a identidade de Roy, e (10), obtemos:

$$\frac{\partial e(p^o, v(p^o, y^o))}{\partial p_i} = - \frac{\partial e(p^o, v(p^o, y^o))}{\partial y}\ .\ x_i(p^o, y^o) = -x_i(p^o, y^o) \qquad (11)$$

ainda,

$$\frac{\partial^2 e(p^o, v(p^o, y^o))}{\partial p_i \partial y} = \frac{\partial^2 e(p^o, v(p^o, y^o))}{\partial y \partial p_i} = - \frac{\partial x_i(p^o, y^o)}{\partial y} \qquad (12)$$

usando (11) e (10). Por último:

$$\frac{\partial^2 e(p^o,v(p^o,y^o))}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial(-\lambda(p^o,y^o).x_i(p^o,y^o))}{\partial p_j} =$$

$$= -\lambda(p^o,y^o)\ \frac{\partial x_i(p^o,y^o)}{\partial p_j} + x_i(p^o,y^o).\frac{\partial x_j(p^o,y^o)}{\partial y}$$

$$= -\frac{\partial x_i(p^o,y^o)}{\partial p_j} + x_i(p^o,y^o)\ \frac{\partial x_j(p^o,y^o)}{\partial y} \qquad (13)$$

Note-se que todos os componentes das expressões (11)-(13) dizem respeito a curvas de procura ordinárias. Substituindo em (9) obtemos $\Delta\xi$, em termos aproximados, a partir de dados fornecidos pelo sistema de funções procura ordinárias.

O defeito desta aproximação é que não permite o contrôle do erro associado com a utilização de um número finito de termos na série Taylor.

2.2. Vamos agora preocupar-nos com as condições que garantem movimentos ao longo de uma curva de indiferença. Neste ponto seguimos Vartia (1983).

Sendo v(p,y) a função de utilidade indirecta podemos diferenciá-la para obter:

$$dv(p,y) = \sum_i^n \frac{\partial v(p,y)}{\partial p_i}\, dp_i + \frac{\partial v(p,y)}{\partial y}\, dy$$

podemos introduzir uma variável auxiliar t ($t \in [0,1]$ tal que $p(0)=p^o$ e $p(1)=p^1$ e $y(0)=y^o$), de tal forma que p(t) descreve uma trajectória diferenciável. Nestas condições podemos escrever a expressão acima como:

$$\frac{dv(p,y)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(p,y)}{\partial p_i(t)}\ \frac{dp_i(t)}{\partial dt} + \frac{\partial v(p,y)}{\partial y(t)}\ \frac{dy(t)}{dt}$$

usando a identidade de Roy:

$$\frac{d(y(p,y))}{dt} = \lambda(p(t),y(t)) \left[\frac{dy(t)}{dt} - \sum_i x_i(p(t),y(t)\ \frac{dp_i(t)}{dt}\right]$$

como $\lambda(p(t),y(t))>0$ em virtude de propriedades de monotonia (i.e. não saciedade) da função utilidade. Para que $d(v(p,y))/dt = 0$ — para assegurar movimentos ao longo de uma curva de indiferença — é necessário que:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \Sigma x_i(p(t),\ y(t))\ \frac{dp_i(t)}{dt} \qquad (14)$$

A questão a que procuramos responder é: dado que queremos deslocar-nos de p^o para p^1 ao longo de uma curva de indiferença, qual a trajectória do rendimento que o assegura? Ou, em termos mais precisos, dada uma trajectória para os preços, $p(t)$, qual a trajectória para o rendimento, $y(t)$, que assegura movimentos ao longo de uma curva de indiferênca?

Integrando (14) entre o e t obtemos:

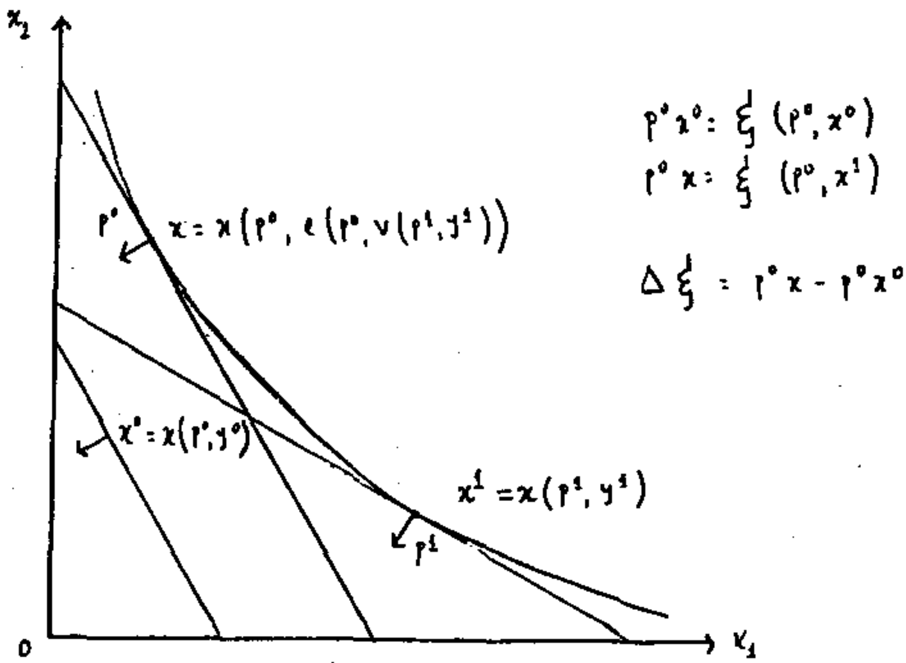
$$y(t) - y^o = \Sigma \int_o^t x_i(p(t))\ \frac{dp_i(t)}{dt}\ dt \qquad (15)$$

(15) é uma solução para uma equação diferencial de 1ª ordem. A solução $y(t)$ é a única correspondente ao valor inicial y_o. Em particular (com $t \in [0,1]$) podemos determinar, $y(1)$.

Um ponto importante é que dada a propriedade p4 das funções procura ordinárias (simetria da matriz de Slutsky) o integral do lado direito de (15) é indepente da trajectória escolhida (é um integral de um diferencial exacto).

Vejamos agora como (15) nos pode ser útil para o cálculo de $\Delta\xi(p^o;\ x^1;\ x^o)$.

Fig. 2



Pretendemos comparar duas situações: (p^0, y^0) e (p^1, y^1), conhecemos os cabazes escolhidos em cada uma destas situações $x^0 = x(p^0, y^0)$ e $x^1 = x(p^1, y^1)$ e dispomos de um sistema completo de funções procura ordinárias ou marshalianas (o problema é ilustrado para o caso de dois bens na fig. 2).

Note-se que dispomos de $\xi(p^0, x^0) = p^0 x(p^0, y^0) = y^0$. Para obtermos $\xi(p^0, x^1)$ usamos (15) de p^1 para p^0 partindo do rendimento base y^1.

Indo um pouco mais longe podemos indicar que (15) pode não admitir uma solução explícita. Nesse caso teremos de considerar a utilização de métodos numéricos aproximados.

Apresentaremos apenas um dos métodos possíveis (para detalhes sobre métodos mais expeditos ver Vartia (1983)).

A razão da escolha deste método prende-se quer com a sua simplicidade, quer com o facto de ter significado de um ponto de vista económico, quer ainda porque permite uma visualização fácil dos limites máximos de erro permitidos pelo processo.

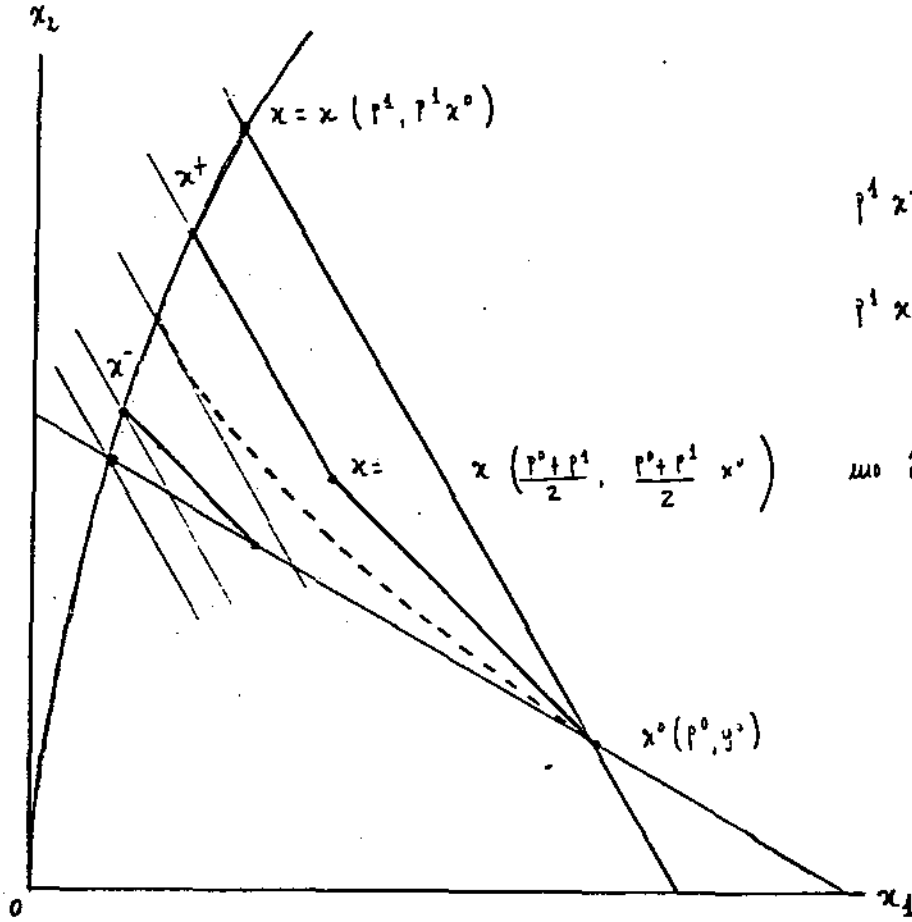


Fig. 3

A ideia do método proposto tem que ver com a construção de sequências de cabazes estritamente preferidos (por um lado) e estritamente preteridos (por outro). A primeira vez que este método foi utilizado foi por Houthakker (1950).

As condições da discussão são as habituais. A partir de um cabaz de consumo inicial $x^o = x(p^o, y^o)$ pretendemos "mover-nos ao longo de uma curva de indiferença" até obtermos uma aproximação suficiente do cabaz escolhido aos preços p^1. Vamos construir duas sequências que resultam da divisão do intervalo de variação $[p^o, p^1]$ em k segmentos iguais:

$$(16') \quad y(t_r) - y(t_{r-1}) = x(p(t_{r-1}), y(t_{r-1})(p(t_r) - p(t_{r-1})$$

$$(16'') \quad y(t_r) - y(t_{r-1}) = x(p(t_r), y(t_r))(p(t_r) - p(t_{r-1}))$$

Note-se que (16') vai determinar uma sequência de cabazes estritamente preferidos ao cabaz inicial uma vez que o rendimento, a que é escolhido cada cabaz na sequência, permitiria a aquisição do cabaz imediatamente anterior. Pelo contrário (16'') assegura que o cabaz inicial é estritamente preferido a qualquer cabaz na sequência. Para um exemplo com apenas dois bens e k=1, k=2 ver Fig.3.

Podemos transformar (16'):

$$\Delta_r y = x(p(t_{r-1}), y(t_{r-1}))\Delta_r p \qquad (17')$$

e (16'')

$$\Delta_r y = x(p(t_{r-1}), y(t_{r-1}) + \Delta_r x \, \Delta_r p \qquad (17'')$$

em que r se refere ao número de iteracções. Fazendo o limite de (17') e (17'') quando $k \longrightarrow \infty$, obtemos:

$$dy = x(p(t), y(t))dp \qquad (18)$$

que como já referimos admite, dadas as condições de regularidade supostas, uma solução única. Este resultado assegura a convergência das aproximações obtidas por (16') e (16'') para um valor comum.

Nas condições presentes pertendemos obter $\xi(p', u(x^0))$. Designemos a aproximação obtida por (16') como ξ^+ e a obtida por (16'') por ξ^-. É intuitivamente óbvio que:

$$\xi^- \leq \xi(p^1, u(x^0)) \leq \xi^+$$

mas então, usando este método, podemos tomar como o limite superior para o erro cometido:

$$\delta = \xi^+ - \xi^-$$

2.3. Nesta secção vamos considerar problemas relacionados com a trajectória de integração do excedente do consumidor. Iremos seguir Zajac (1979) e, fundamentalmente, Stahl II (1983).

O resultado de que o excedente do consumidor depende da trajectória de integração é bem conhecido (ver p. ex. Silberberg (1978)). A ideia, nesta secção, é mostrar que podemos obter uma variação da métrica monetária, através do cálculo do excedente do consumidor, considerando uma trajectória apropriadamente escolhida.

Podemos definir um excedente do consumidor, generalizado para ter em conta variações no rendimento como:

$$CS = -\int x(p,y)dp + (y_1 - y_0) \tag{19}$$

cujo diferencial é:

$$dCS = dy - x(p,y)dp \tag{20}$$

mas sendo $v(p,y)$ a função de utilidade indirecta sabemos que:

$$dV = \frac{\partial v(p,y)}{\partial p} dp + \frac{\partial v(p,y)}{\partial y} dy = -\lambda x(p,y)dp + \lambda dy$$

pelo que:

$$dCS = dV/\lambda = dy - x(p,y)dp$$

uma vez que, dadas as hipóteses admitidas, $\lambda > 0$, se v for monotonamente crescente então CS será igualmente monotonamente crescente. Se v for constante então CS será constante. Assim se escolhermos uma curva de indiferença como parte da trajectória de integração para o excedente do consumidor obtemos uma variação nula deste indicador. Temos aqui uma semelhança clara com a secção anterior.

Podemos, em particular, considerar a trajectória de integração para o excedente do consumidor que permite a recuperação da variação métrica monetária $\Delta\xi(P;\ x^1,\ x^0)$. Como habitualmente $x^0 = x(p^0, y^0)$, $x^1 = x(p^1, y^1)$.

(i) designemos por ϕ_a o conjunto das trajectórias que asseguram a variação nos preços de p^0 a p, variando o rendimento de forma a nos mantermos na curva de indiferença inicial. Sendo t uma variável auxiliar de integração ($t \in [0,1]$) tal que $p(0) = p^0$ e $p(1) = p$ e $y(0) = y^0$, de tal forma que $p(t)$ descreva uma trajectória diferenciável temos:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \Sigma x_i(p(t),\ y(t))\ \frac{dp_i(t)}{dt}$$

que é semelhante à equação (14) acima. Integrando dos dois lados e tendo em conta (19) e (20) concluimos que o excedente do consumidor é nulo sobre este segmento da trajectória. Este resultado estava assegurado à partida uma vez que impusémos a constância do nível de utilidade.

(ii) consideremos ϕ_b como o conjunto singular que inclui a trajectória que mantém os preços fixos em p e faz variar o rendimento de $\Delta y = \xi(p, u^1) - \xi(p, u^0)$. Como sobre ϕ_b os preços são constantes a variação do excedente do consumidor iguala por (19) a variação no rendimento.

(iii) por último tomemos o conjunto ϕ_c das trajectórias que asseguram a variação nos preços de p a p^1 variando o rendimento de forma a manter-nos na curva de indiferença inicial. Por um argumento semelhante ao de (i) acima concluímos que a variação no excedente do consumidor é nula.

Se considerarmos $p = p^0$ obtemos $\Delta\xi(p^0;\ x^1, x^0)$ que é a medida que discutimos nas secções 2.1. e 2.2. Por outro lado note-se que o cálculo de $\xi(p, u^1)$ e $\xi(p, u^0)$ necessário para o cálculo de (ii) acima pode conseguir-se através dos processos discutidos em 2.2..

3. Vamos tentar interpretar os resultados anteriores. Para isso vamos socorrer-nos de uma técnica gráfica devida a Danough and Southey (1977) e usada p. ex. por Weymark (1980).

A ideia é que existe uma relação entre as curvas de indiferença da função de utilidade directa, definidas no espaço dos bens, e as curvas de indiferença da função de utilidade indirecta, que iremos definir no espaço dos preços normalizados, de tal forma que se pode recuperar um a partir do outro.

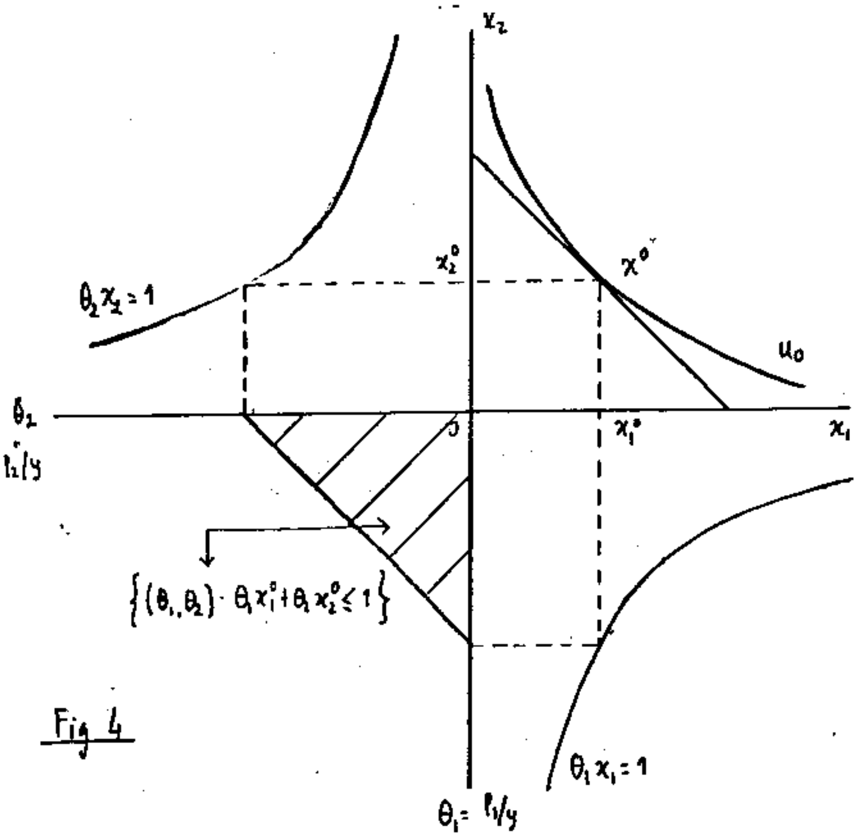


Fig 4

Consideremos a Fig. 4:

Tomemos um cabaz x^0 de bens. Podemos identificar o conjunto:

$\{(\theta_1, \theta_2): \theta_1 x_1^0 + \theta_2 x_2^0 \leq 1\}$

em que $\theta_1 = P_1/y$ e $\theta_2 = P_2/y$ são preços normalizados. Trata-se do conjunto dos preços normalizados que permitem a aquisição do cabaz x^0. (Fig. 4).

Nesse conjunto podemos identificar os preços normalizados a que x é escolhido através do problema:

$$\min_{\theta} \{v(\theta): \theta x^0 \leq 1\}$$

em que $V(\theta)$ é a função de utilidade indirecta em função dos preços normalizados. (Fig. 5). Note-se que este ponto θ é ùnicamente determinado pelo conhecimento do conjunto orçamental.

É igualmente possível fazer o caminho inverso.

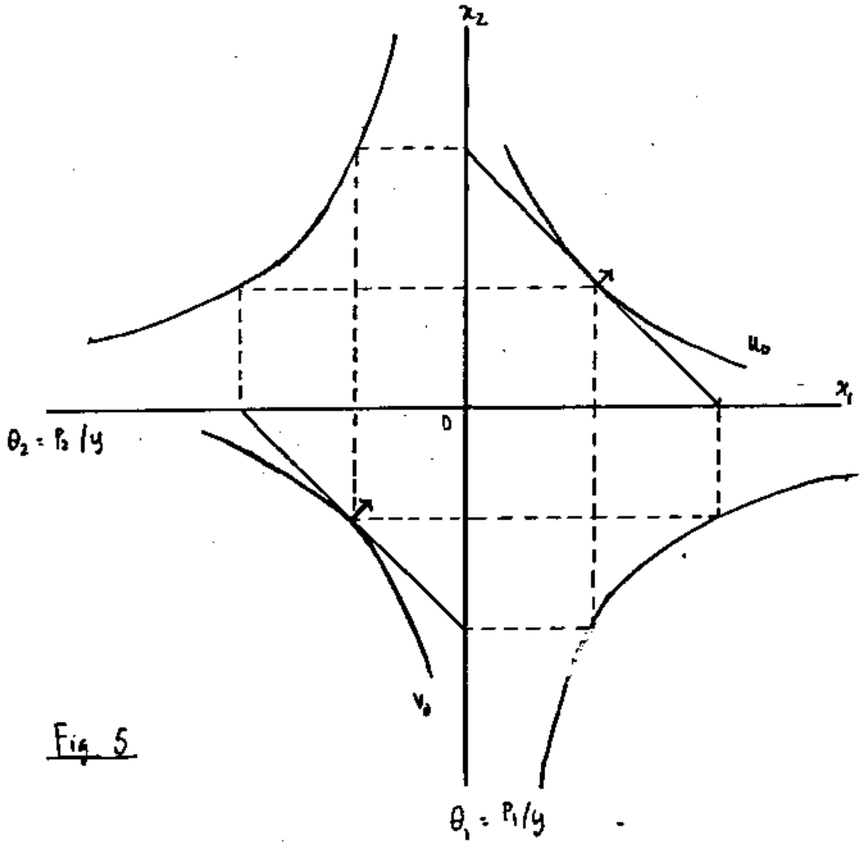


Fig 5

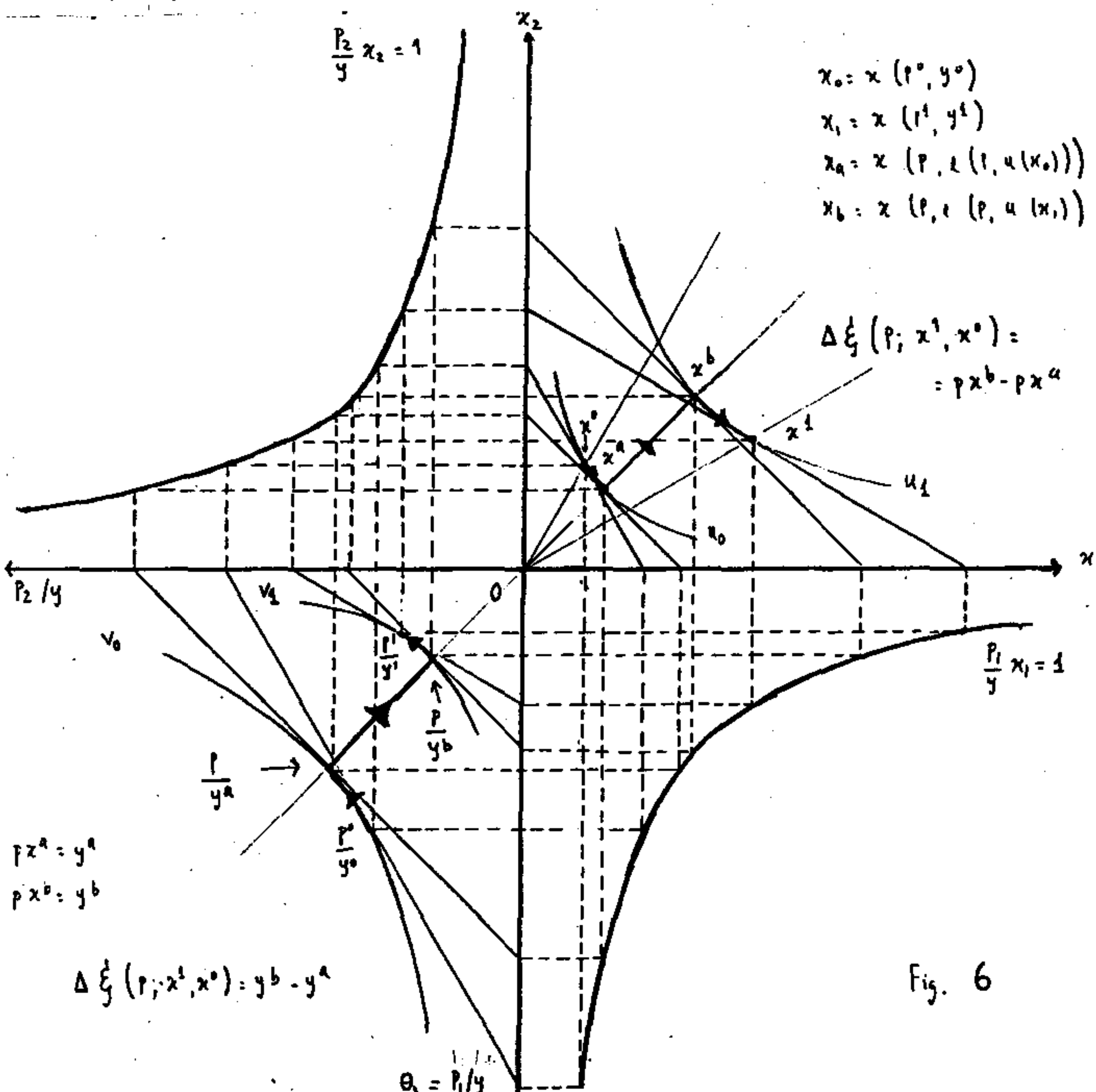

P2/y x2 = 1
x2
x0 = x (p0, y0)
x1 = x (p1, y1)
xa = x (p, e (p, u(x0)))
xb = x (p, e (p, u (x1)))
Δ ξ (p; x1, x0) =
= px^b - px^a
x^b
x^1
x^0
x^a
u1
u0
x1
θ2 = p2 /y
v1
0
v0
p1/y1
p/y^b
p/y^a
p0/y0
p1/y x1 = 1
px^a = y^a
px^b = y^b
Δ ξ (p; x1, x0) = y^b - y^a
θ1 = p1/y

Fig. 6

A fig. 6 mostra, no terceiro quadrante, uma trajectória possível para os preços normalizados de forma a cumprir as restrições impostas na secção 2.3.. É interessante seguir a trajectória correspondente no espaço dos bens.

Partimos do ponto (p^o/y^o) a que corresponde o ponto x^o no espaço primal. Movemo-nos ao longo da curva de indiferença inicial até (P/y^a) - alteração dos preços relativos e do rendimento - a que corresponde o ponto x^a no espaço primal. Em seguida, considerando os preços constantes ao nível p podemos variar o rendimento até atingir o nível final de utilidade $(\Delta y = y^b - y^a)$. Atingimos o ponto (p/y^b) a que corresponde x^b no primeiro quadrante. Por último vamos deslocar-nos ao longo de V_1 de (p/y^b) até (p_1/y^1) a que corresponde um movimento de x^b para x^1 no primeiro quadrante.

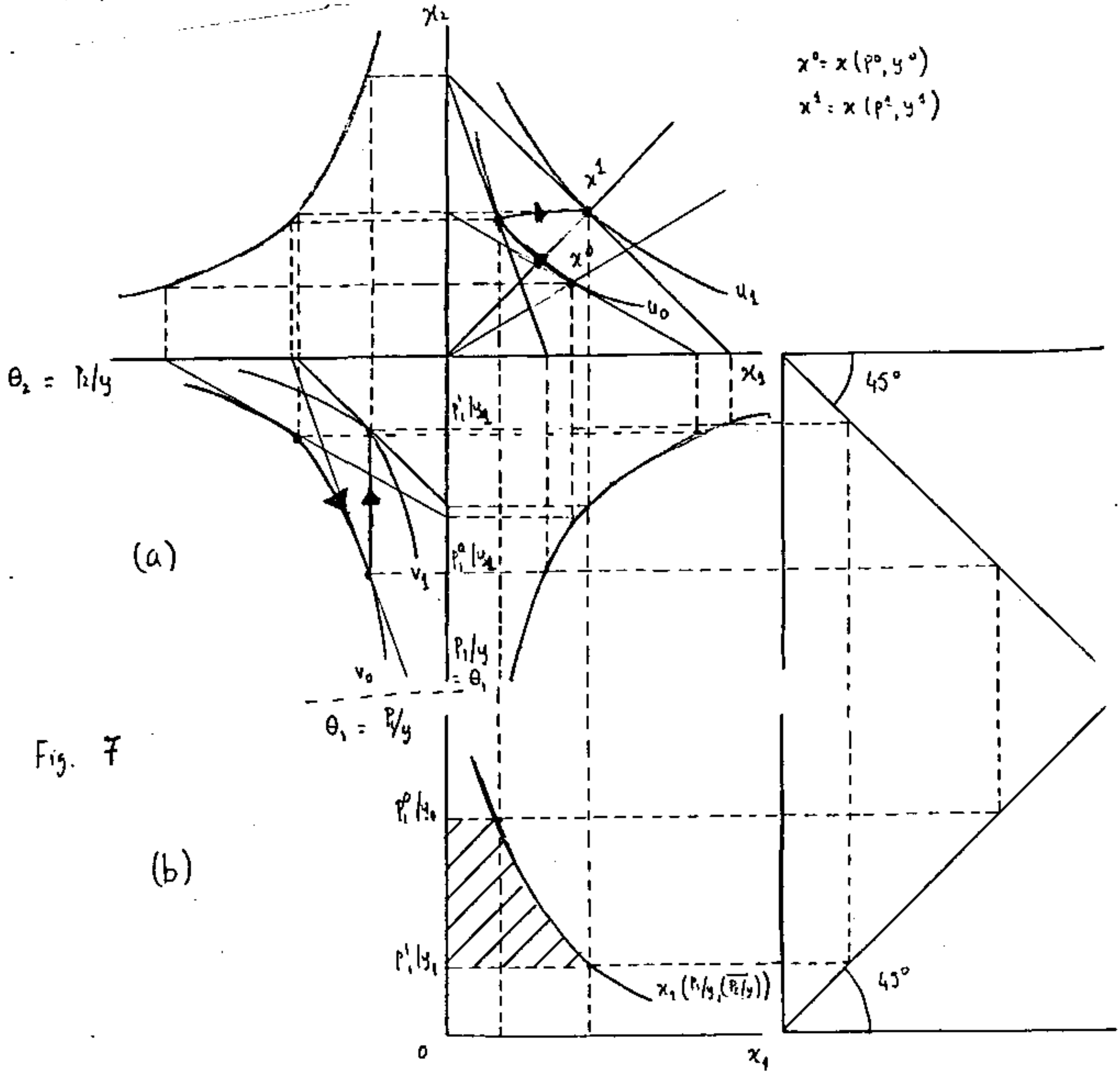
Podemos terminar a análise da fig. 6 fazendo duas observações: Em primeiro lugar, a trajectória sugerida na fig. 2 é um caso particular da discussão que estamos a considerar, em segundo lugar, a integração do excedente do consumidor generalizado, que considerámos na secção 2.3., ao longo da trajectória da fig. 6 daria como resultado $y^b - y^a = \Delta\xi(p; x^1, x^o)$.

Para concluir note-se que se podem considerar trajectórias com propriedades semelhantes às indicações na secção 2.3. que não conduzem a uma variação na métrica monetária. Ilustramos esta questão graficamente na fig. 7.

Para que esta análise tenha validade para quaisquer duas situações consideradas precisamos de admitir a seguinte hipótese adicional sobre a função de utilidade:

. H5: $\|x\| \to \infty$, $u(x) \to \infty$, onde $\|.\|$ é a norma euclidiana.

A ideia da fig. 7 é semelhante à da figura anterior. No caso figurado vamos deslocar-nos ao longo da curva de indiferença v_o até podermos atingir x_1 através de variações no preço normalizado do bem 1 mantendo constante o preço normalizado do bem 2. Se integrarmos ao longo da trajectória indicada obdemos como excedente do consumidor a área a tracejado, medida por baixo de uma curva de procura ordinária.



$x^0 = x(p^0, y^0)$
$x^1 = x(p^1, y^1)$
x_2
x^1
x^0
u_1
u_0
x_1
45°
$\theta_2 = p_2/y$
p_1^1/y_1
p_1^0/y_0
v_1
v_0
$p_1/y = \theta_1$
$\theta_1 = p_1/y$
(a)
(b)
p_1^0/y_0
p_1^1/y_1
$x_1(p_1/y, (\overline{p_2/y}))$
0
x_1
45°

Fig. 7

BIBLIOGRAFIA

Darrough, M. N. and C. Southey (1977), Duality in consumer theory made simple. The revealing of Roy's identity, Canadian Journal of Economics, 10, 307 - 317.

Houthakker, H. (1950), Revealed Preference and the utility function, Econometrica, 17, 159 - 174.

Mc Kenzie, George W. (1983) Measuring economic welfare:new methods Cambridge.

Samuelson, P. A. (1974), Complementarity: an essay on the 40 th anniversary of the Hicks - Allen Revolution in Demand Theory, Journal of Economic Literature, vol. 12, nº 4, 1255 - 1289.

Silberberg, E. (1978), The Structure of economics: a matematical analysis, Mc Graw - Hill

Stahl, D. O. (1983), A note on the consumer suplus Parth-of-Integration Problem, Economica, 50, 95 - 98.

Vartia, Y.O. (1983), Efficient Methods of Measuring welfare change and compensated income in terms of ordinary demand functions, Econometrica, vol. 51, nº 1, p.p. 79 - 98.

Zajac, E.E. (1979), Dupuit - Marshall consumer's suplus, utility and revealed preference, Journal of Economic Theory 20, 260 - 270.