NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Ana Beatriz da Silva Claro

Licenciada em Matemática

RESOLUÇÃO E FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

UMA ABORDAGEM À PROPORCIONALIDADE INVERSA

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO E NO ENSINO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa

Outubro, 2025

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RELATÓRIO DE ESTÁGIO

RESOLUÇÃO E FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ABORDAGEM À PROPORCIONALIDADE INVERSA

Ana Beatriz da Silva Claro

Licenciada em Matemática

Orientadora: Doutora Paula Cristina Antunes Teixeira
Professora Auxiliar Convidada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

Júri:

Presidente: Doutora Maria do Céu Cerqueira Soares,
Professora Auxiliar da NOVA FCT

Arguentes: Doutor António Manuel Águas Borralho,
Professor Associado do Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora

Orientador: Doutora Paula Cristina Antunes Teixeira,
Professora Auxiliar convidada da NOVA FCT

Membros: Licenciada Ana Custódio,
Professora no Agrupamento de Escolas Eça de Queirós

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO E NO ENSINO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa
Outubro, 2025

Resolução e formulação de problemas: uma abordagem à proporcionalidade inversa

AGRADECIMENTOS

À Universidade NOVA de Lisboa, e em particular à Faculdade de Ciências e Tecnologia (NOVA FCT) pelos recursos disponibilizados e pelo contínuo incentivo durante o meu percurso académico.

À minha orientadora, Professora Paula, pela orientação científica rigorosa, pela constante disponibilidade e pelos contributos valiosos que foram determinantes para o desenvolvimento deste trabalho. A sua exigência e dedicação constituíram um apoio essencial ao longo de todo o processo de investigação.

À minha orientadora de estágio, Professora Ana, expresso igualmente o meu reconhecimento pela partilha de saberes e pelas palavras de encorajamento neste que foi o meu primeiro contacto com uma escola da perspetiva docente.

À minha família, em particular à minha mãe e avó, pelo apoio incondicional, pela confiança permanente e pela presença constante, que constituíram uma base sólida ao longo de todo o meu percurso académico.

Ao Daniel por representar o meu porto seguro em particular durante esta fase do meu percurso académico. Por todas as noites passadas a ler e reler este documento, por todo o carinho e pelas palavras sempre afetuosas.

À Francisca e à Carolina, por me mostrarem que estes anos de aprendizagem têm espaço para muitas gargalhadas.

A todos os que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho, o meu mais sincero agradecimento.

RESUMO

O estágio pedagógico revela-se um ano de aprendizagem constante com o desenvolvimento de competências pessoais e profissionais, as quais são os alicerces para o desempenho dos futuros docentes. Nesse âmbito foi desenvolvido o presente relatório que se encontra dividido em duas partes.

A primeira parte, referente à prática pedagógica supervisionada onde se encontra a descrição das turmas atribuídas à professora estagiária, os planos de aula elaborados e aplicados nas turmas, bem como o trabalho desenvolvido na prática não letiva, onde consta uma breve descrição das reuniões assistidas e das atividades que organizou e participou com os alunos da escola. Por último é apresentada uma reflexão sobre a importância do trabalho desenvolvido ao longo do ano de estágio.

A segunda parte refere-se ao trabalho de investigação desenvolvido ao longo do ano letivo e está dividida em cinco capítulos. O primeiro capítulo contém a introdução onde são apresentados o objetivo e as questões de investigação. O segundo e terceiro capítulos dizem respeito à revisão de literatura e à metodologia da investigação, respetivamente. A análise e discussão dos dados encontram-se no quarto capítulo. No último capítulo são apresentadas as conclusões da investigação realizada. O objetivo foi compreender os processos de resolução e formulação de problemas no tema proporcionalidade inversa e foi desenvolvido numa turma do 9.º ano de escolaridade do ensino básico de uma escola da área metropolitana de Lisboa. As questões de investigação são: "De que forma se caracteriza o processo de resolução de problemas que envolvem a proporcionalidade inversa?" e "De que forma se caracteriza o processo de formulação de problemas que envolvem a proporcionalidade inversa?". Para a investigação seguiu-se uma metodologia qualitativa de carácter interpretativo baseada em estudos de caso. Os dados recolhidos foram as resoluções dos alunos a duas tarefas criadas para este estudo, as observações e registos da investigadora nas aulas. No que diz respeito à resolução de problemas, os dados evidenciam que as três díades que constituíram os estudos de caso leram e compreenderam os enunciados, elaboraram e executaram um plano e nem sempre verificaram o resultado obtido. As estratégias de resolução utilizadas pelas díades foram: numérica, simbólica e mista. No que diz respeito à formulação de problemas, as três díades formularam e resolveram os problemas propostos, mas apenas uma melhorou o enunciado que apresentou.

Palavas chave: Ensino Básico, Resolução de Problemas, Formulação de Problemas, Proporcionalidade Inversa.

ABSTRACT

The teaching practicum proves to be a year of constant learning, marked by the development of personal and professional skills that serve as the foundation for the performance of future teachers. Within this scope, the present report was developed and is divided into two parts.

The first part, concerning the teaching practicum, including a description of the classes assigned to the trainee teacher, the lesson plans developed, as well as the non-teaching practice, with a brief description of the meetings in which the trainee teacher attended and the activities organized with the school's students. Finally, a reflection on the importance of the practicum year.

The second part refers to the research project carried out throughout the school year and is divided into five chapters. The first chapter contains the introduction, where the research goals and questions are outlined. The second and third chapters concern the literature review and the research methodology, respectively. The fourth chapter presents the analysis and discussion of the data. The final chapter sets out the study's conclusions. The aim of this study is to understand the processes of problem solving and problem posing within the topic of inverse proportionality, developed in a 9th grade class at a school in the Lisbon metropolitan area. The research questions are: "How can the process of solving problems involving inverse proportionality be characterized?" and "How can the process of posing problems involving inverse proportionality be characterized?". A qualitative methodology was followed, based on case studies. The data collected included the students' solutions to two tasks created for this study, as well as the researcher's classroom observations and records. Regarding problem solving, the data shows that the three dyads that take parts in study cases read and understood the statements, designed and carried out a plan and they did not always verify the solution. The problem-solving strategies used by the dyads were numerical, symbolic, and mixed. The three dyads that formed the case studies feigned and solved problems for the situations created for data collection, but only one of the three dyads analysed improved the problems they presented.

Keywords: Basic Education, Problem Solving, Problem Posing, Inverse Proportionality.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

PRIMEIRA PARTE

1. PRÁTICA PEDAGÓGICA SUPERVISIONADA

No ano letivo de 2024/2025 a professora estagiária desenvolveu o seu ano de estágio numa escola de 3.º ciclo e Ensino Secundário da área metropolitana de Lisboa. A prática pedagógica foi desenvolvida durante o ano letivo com uma turma de 9.º ano (turma principal) e uma turma de 10.º ano (turma secundária). A professora estagiária foi supervisionada por uma professora cooperante.

No decorrer do estágio foram lecionados 21 tempos letivos de 50 minutos, cujos temas e datas foram escolhidos livremente pela professora estagiária. Cada aula lecionada foi alvo de uma planificação detalhada, colocada à consideração da professora cooperante. Em algumas das planificações de aula apresentadas foi necessário a professora estagiária proceder a alterações (tanto no seu plano de aula como nas tarefas propostas). A professora orientadora assistiu a 2 aulas na turma principal e 1 aula na turma secundária.

Cada aula lecionada foi alvo de uma discussão entre os membros do núcleo de estágio com o objetivo de refletir sobre os pontos positivos e as áreas que deviam ser melhoradas, indo de encontro às necessidades de aprendizagem dos alunos. A professora orientadora esteve presente em todas as discussões das aulas assistidas.

1.1. Prática pedagógica supervisionada no 9.º ano

A turma do 9.º ano era constituída por vinte e oito alunos de entre os quais dezoito raparigas e dez rapazes com média de idades de 14,1 anos. No geral, a turma apresentou um bom desempenho em sala, ainda que o comportamento possa ser classificado apenas como suficiente, o que foi refletido na avaliação final de alguns dos alunos. Relativamente à disciplina de Matemática os alunos tiveram, semanalmente, dois blocos de 50 minutos e um bloco de 100 minutos. Durante o primeiro período foram anotadas algumas dificuldades à disciplina como o ritmo de trabalho lento, dependência na orientação por parte da professora para executarem as tarefas propostas e dificuldade no trabalho em grupo.

Durante as aulas lecionadas pela professora estagiária, foi frequente a formação de grupos de forma aleatória. Nestes momentos, é de destacar que existiram alunos que se mostraram pouco colaborativos com os colegas de grupo, sendo necessária a intervenção da professora estagiária. No total, lecionou 15 dos tempos letivos de 50 minutos da turma.

No decorrer do ano letivo, a realização dos instrumentos de avaliação e a sua respetiva correção ficaram ao cargo da professora estagiária.

A professora estagiária conseguiu criar uma boa relação com os alunos que manteve e desenvolveu durante todo o ano letivo. Disponibilizou também um contacto direto via Microsoft Teams para esclarecimento de dúvidas fora do tempo letivo.

O manual adotado na escola e utilizado na turma foi o MX9, da Porto Editora.

1.1.1. Aulas lecionadas

A primeira aula teve lugar no dia 21 de outubro e teve como tema os intervalos de números reais. Nas duas aulas de 21 de novembro foram lecionados os casos notáveis da multiplicação: quadrado de um binómio e diferença de quadrados. Nas duas aulas do dia 12 de dezembro abordaram-se os temas: equações do 2.º grau e lei do anulamento do produto. Nas aulas do dia 16 de janeiro foi aplicada uma tarefa de introdução ao tema das funções. Nos três tempos letivos do dia 6 de março e 11 de março, a professora estagiária aplicou as tarefas que serviram para recolher dados para o estudo de investigação que constitui a segunda parte desta dissertação. No dia 13 de março (100 minutos), iniciou-se a trigonometria com uma tarefa com recurso ao ambiente de geometria dinâmica GeoGebra. Para dar continuidade a este tema, a professora estagiária lecionou a aula de dia 24 de março (50 minutos). No dia 15 de maio a professora estagiária lecionou dois tempos letivos de introdução ao tema estatística.

As aulas de dia 16 de janeiro e 13 de março foram assistidas pela professora orientadora.

Seguidamente são apresentadas as planificações de 3 das aulas lecionadas.

1.1.1.1. Aula de 21 de novembro

As aulas de dia 21 de novembro tiveram como tema os casos notáveis da multiplicação.

Nesta aula, a tarefa proposta teve como objetivo que os alunos descobrissem os casos notáveis de forma autónoma e elaborassem uma proposta de demonstração. De um modo geral, os alunos reagiram de forma positiva, tendo a maioria conseguido concluir com sucesso as propriedades dos casos notáveis da multiplicação.

No quadro seguinte é possível observar um resumo da planificação da aula, cujo desenvolvimento completo se encontra no anexo 1, nomeadamente a tarefa aplicada.

TEMA	Expressões algébricas. Equações do 2.º grau.
SUMÁRIO:	Quadrado de um binómio e diferença de quadrados: demonstração geométrica. Resolução de exercícios.

OBJETIVOS:	• Perceber as demonstrações geométricas dos casos notáveis; • Aplicar os casos notáveis em situação de exercício.
DESENVOLVIMENTO DA AULA:	• Realização da primeira parte da tarefa. • Discussão da primeira parte da tarefa: oral e escrita no quadro de forma a encadear as ideias para a demonstração. • Conclusão em grupo que o que funciona para $(a+b)^2$ funciona também para $(a-b)^2$. • Realização da segunda parte da tarefa. • Discussão da segunda parte da tarefa: oral e escrita no quadro de forma a encadear as ideias para a demonstração. • Esquematização no quadro de todos os casos notáveis falados na aula: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ • Escrita do sumário e trabalho de casa.

Tabela 1 - Resumo da planificação da aula de dia 21 de novembro ao 9.º ano

Para estes dois tempos letivos, a professora estagiária optou pela criação de uma tarefa em que os alunos trabalhassem de forma autónoma extraindo conclusões sobre os casos notáveis (Anexo 1).

Apesar das demonstrações não serem um tópico muito abordado neste ciclo de estudos, esta tarefa permitiu aos alunos o contacto com as demonstrações geométricas dos casos notáveis.

Os alunos mostraram empenho na resolução da tarefa, fruto da diferenciação da mesma, ficando surpreendidos com o facto de ser necessário recortar e colar na aula de matemática. A diferenciação inerente a esta tarefa permitiu que todos os alunos conseguissem resolver as questões propostas e, no momento da discussão dos resultados obtidos, foi possível observar alunos que não costumam ter uma participação oral muito ativa a sentirem-se à vontade para intervir e responder ao solicitado.

No que diz respeito à prática pedagógica da professora estagiária, destacou-se o bom relacionamento com a turma o que permitiu a elaboração deste tipo de dinâmica em aula.

Em suma, o balanço final desta aula foi positivo uma vez que os alunos se envolveram na resolução da tarefa proposta.

1.1.1.2. Aula de 16 de janeiro

As aulas lecionadas neste dia foram as primeiras do tema funções. Desta forma serviram como uma revisão do que já tinha sido lecionado em anos transatos. A tarefa proposta estava dividida em três partes: as duas primeiras para relembrar conceitos, e uma terceira em que os alunos foram convidados a resolver alguns problemas envolvendo funções.

No quadro abaixo é possível observar um resumo da planificação da aula. No anexo 2 é possível ver a planificação completa e a tarefa proposta aos alunos.

TEMA	Funções
SUMÁRIO:	Tarefa de revisão do tema "Funções".
OBJETIVOS:	· Relembrar os conceitos associados às funções trabalhadas no passado.
DESENVOLVIMENTO DA AULA:	· Início com projeção de vídeo sobre a importância de funções. · Formação de grupos de 2 alunos com software para que os grupos sejam aleatórios. · 5 minutos para a realização da Parte I - O que é uma função? · Conclusão da primeira parte da tarefa com projeção de um resumo para os alunos copiarem para os seus cadernos. · 10 minutos para a realização da Parte II - Funções afim, linear e constante. · Conclusão da segunda parte da tarefa com projeção de um esquema. · 20 minutos para a realização da Parte III – Problemas com funções. · Conclusão da tarefa com esquema resumo realizado no quadro para que os alunos copiem para os seus cadernos. · Registo do sumário e do trabalho de casa pelos alunos no seu caderno diário.

Tabela 2 - Resumo da planificação da aula de 16 dia janeiro ao 9.º ano

Nos dois tempos letivos lecionados neste dia, a professora estagiária elaborou uma tarefa cujo objetivo era relembrar os conceitos das funções.

Os conceitos abordados deveriam ser dominados pelos alunos, uma vez que se trata de uma parte do programa curricular de anos transatos. Tal não se veio a verificar uma vez que os alunos apresentaram muitas lacunas. Por esse motivo, os alunos revelaram alguma dificuldade na realização das duas primeiras partes. Estas dificuldades foram promotoras de diversas intervenções por parte da professora estagiária, no sentido de esclarecer os alunos para que conseguissem terminar a tarefa proposta.

Após a discussão, tanto da primeira como da segunda parte da tarefa, a professora estagiária projetou uma síntese para que os alunos retivessem novamente os conceitos (Anexo 2).

A terceira parte da tarefa, permitia aos alunos o contacto com a resolução e formulação de problemas (tema abordado pela professora estagiária no trabalho de investigação).

Nesta parte da tarefa, destacaram-se duas resoluções para o exercício 2. A primeira situação que relacionava o número de moscas que um sapo comia durante o dia com o número de vezes que comia. A segunda situação relacionava o número de penas perdidas por uma galinha com o número de vezes que a mesma se abanava.

Apesar das dificuldades sentidas, os alunos mostraram-se envolvidos na execução da tarefa proposta. As dificuldades demonstradas levaram a que a planificação não fosse seguida na integra ficando o último exercício da tarefa para trabalho autónomo.

Em síntese, a aula constituiu um momento de bastante aprendizagem pois permitiu aos alunos ultrapassar as dificuldades provenientes de outros anos letivos. A aprendizagem foi transversal à professora estagiária, uma vez que os alunos não mostraram o conhecimento previsto o que a levou a alterar a sua planificação durante a aula adequando-a às necessidades de aprendizagem dos alunos.

1.1.1.3. Aula de 13 de março

No dia 13 de março, os alunos iniciaram o estudo da trigonometria. No início da aula, a professora estagiária projetou uma apresentação com o objetivo de sintetizar os conteúdos necessários para o desenvolvimento do tema: Teorema de Pitágoras e relação entre a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Após a síntese, estava na planificação a visualização de um vídeo que não foi possível devido a problemas de rede. Assim, a professora estagiária referiu a importância dos triângulos no dia a dia e apelou a que os alunos assistissem ao vídeo em casa.

No quadro abaixo é possível observar um resumo da planificação da aula. No anexo 3 é possível ver a planificação completa e a tarefa proposta aos alunos.

TEMA	Razões trigonométricas no triângulo retângulo.
SUMÁRIO:	Início do estudo da trigonometria com atividade exploratória.
OBJETIVOS:	• Perceber as razões trigonométricas e as suas relações.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:	· Início da aula com projeção de PowerPoint introdutório. · Relembrar o teorema de Pitágoras. · Relembrar a relação entre os ângulos internos de um triângulo. · Vídeo introdutório sobre a importância dos triângulos: https://www.youtube.com/watch?v=hx-iZrBSkZ0 · Resolução de uma atividade exploratória com o auxílio do GeoGebra. · Esquematização no quadro, pelos alunos, das conclusões obtidas pelos vários grupos. · Registo do sumário e do trabalho de casa, pelos alunos, no seu caderno diário.

Tabela 3 - Resumo da planificação da aula de dia 13 de março ao 9.º ano

Nestes dois tempos letivos, o tema abordado foram as razões trigonométricas e foi realizada uma tarefa com recurso à tecnologia (GeoGebra).

Após o momento introdutório, os alunos foram organizados em grupos aleatórios para a resolução da tarefa. Na utilização do GeoGebra surgiram dificuldades no acesso à atividade criada para a tarefa. Por esse motivo, os alunos iniciaram a resolução da tarefa de forma faseada. Apesar dos constrangimentos, a professora estagiária conseguiu gerir a turma permitindo a continuidade da resolução do problema. Esta atitude teve por base a prática pedagógica desenvolvida ao longo do ano letivo.

Na realização da tarefa, cada grupo trabalhou apenas com uma das razões trigonométricas, o que permitiu uma dinâmica final diferenciada. Cada grupo refletiu e registou no quadro as conclusões obtidas para que todos os alunos as registassem nos seus cadernos diários.

1.2. Prática pedagógica supervisionada no 10.º ano

A turma do 10.º ano era constituída por vinte e dois alunos de entre os quais onze raparigas e onze rapazes. No geral, a turma apresentou um bom desempenho em sala ainda que o comportamento seja classificado apenas como suficiente.

A turma apresentou algumas dificuldades no trabalho de grupo quer em grupos aleatórios, quer em grupos escolhidos pelos alunos.

No decorrer do ano letivo, a professora estagiária colaborou na elaboração dos testes de avaliação, na sua correção e lecionou um total de 5 tempos letivos de 50 minutos. O manual adotado na escola e utilizado pela turma foi o 360º, da Raiz Editora.

1.2.1. Aulas lecionadas

A primeira aula lecionada pela professora estagiária nesta turma foi no dia 13 de novembro e teve como tema os percentis. As aulas dos dias 11 de dezembro (onde foram abordados os temas: reta de regressão, coeficiente de correlação e gráfico de linhas) e de dia 26 de fevereiro (onde foi abordado o tema: função definida por ramos) foram planificadas pelo núcleo de estágio, tendo ficado cada uma das professoras estagiárias com 50 minutos de aula para lecionar. A última aula lecionada ocorreu no dia 28 de maio e abordou as equações vetoriais da reta no plano e no espaço.

Os tempos letivos de dia 28 de maio foram assistidos pela professora orientadora.

Em seguida encontram-se as planificações de 3 das aulas lecionadas.

1.2.1.1. Aula de 13 de novembro

Na aula de dia 13 de novembro, a professora estagiária baseou-se numa tarefa da sua autoria. Esta tinha como objetivo que os alunos explorassem de forma autónoma as diferentes formas de trabalhar os percentis. Para aproximar a tarefa da realidade dos alunos, o conjunto de dados fazia referência às médias dos exames nacionais das escolas na região de Lisboa.

No início, os alunos mostraram alguma relutância a trabalhar com os seus grupos, mas com o decorrer da aula todos os grupos concluíram a tarefa.

No quadro abaixo é possível observar um resumo da planificação da aula. No anexo 4 é possível ver a planificação completa e a tarefa proposta aos alunos.

TEMA	Estatística
SUMÁRIO:	Resolução e discussão da tarefa: Média da Escola no Exame de Matemática.
OBJETIVOS:	· Estabelecer ligação entre o conceito de quartil, mediana e percentil. · Utilizar diversas estratégias para o cálculo de percentis.
DESENVOLVIMENTO DA AULA:	· Início da aula com a distribuição da tarefa. · Construção de pares de trabalho de forma aleatória.

	• Leitura da introdução da tarefa com o objetivo de acalmar os alunos. • Resolução da tarefa a pares. • Discussão dos resultados obtidos na tarefa: as perguntas que não envolvem cálculos de forma oral e as restantes no quadro. • Registo do sumário no caderno diário.

Tabela 4 - Resumo da planificação da aula de dia 13 de novembro ao 10.º ano

Os dois tempos letivos de dia 13 de novembro tiveram como tema os percentis. Desta forma foi realizada uma tarefa em que os alunos tiveram contacto com dados reais.

O comportamento desta turma sempre foi bastante inconstante nas aulas lecionadas com a professora cooperante. Em virtude disso, durante a planificação desta aula a professora estagiária sentiu a necessidade de partilhar o seu nervosismo com o núcleo de estágio. Esta reflexão proporcionou ferramentas para a professora estagiária lidar com o comportamento da turma.

Os alunos facilitaram o cumprimento do plano de aula, uma vez que se mostraram bastante aplicados e participativos na resolução da tarefa. Durante a aula, os alunos foram colocando questões pontuais e, de um modo geral, todos resolveram a tarefa sem dificuldades.

1.2.1.2. Aula de 11 de dezembro

A aula de dia 11 de dezembro foi planificada pelo grupo de estágio.

A tarefa proposta aos alunos tinha um fator que a diferenciava: os alunos teriam de fazer a recolha dos próprios dados utilizando uma fita métrica. Como os dados da tarefa eram os dos próprios alunos, estes mostraram mais interesse em resolver as etapas seguintes.

Durante a recolha de dados, existiram alguns erros de medição que provocaram alguma agitação entre os alunos. As professoras estagiárias aproveitaram o momento para referir que tais erros são normais em estudos estatísticos e que os alunos devem utilizar o seu pensamento crítico na resolução das tarefas propostas.

No quadro abaixo é possível observar um resumo da planificação da aula. No anexo 5 encontra-se a planificação completa e a tarefa proposta aos alunos.

TEMA	Estatística
SUMÁRIO:	Realização da tarefa: "Relação entre a altura e a envergadura dos alunos do 10C1".

OBJETIVOS:	• Determinar o coeficiente de correlação e a equação da reta de regressão recorrendo à tecnologia. • Construir um gráfico de linhas.
DESENVOLVIMENTO DA AULA:	• Projeção do site gerador aleatório para a formação de grupos de trabalho. • Distribuição dos enunciados da tarefa. • Realização da Parte I – Recolha de Dados: • Realização da Parte II - Coeficiente de correlação e regressão linear. Discussão dos resultados obtidos pelos grupos na Parte II. • Realização da Parte III - Gráfico de linhas. • Discussão dos resultados obtidos pelos grupos na Parte III. • Conclusão e reflexão sobre a tarefa realizada.

Tabela 5 - Resumo da planificação da aula de dia 11 de dezembro ao 10.º ano

A aula decorreu dentro da normalidade, mostrando-se a turma bastante envolvida, tendo intercalado a resolução de cada uma das partes da tarefa com a sua posterior discussão em grande grupo.

1.2.1.3. Aula de 27 de maio

Na aula de dia 27 de maio, a professora estagiária guiou-se por uma tarefa da sua autoria, que tinha como objetivo estabelecer a relação entre a equação vetorial no plano e no espaço.

Novamente, os alunos mostraram alguma relutância a trabalhar nos grupos que lhes foram atribuídos, contudo após iniciarem a resolução trabalharam com um ritmo bastante satisfatório.

No quadro seguinte é possível observar um resumo da planificação da aula. No anexo 6 encontra-se a planificação completa e a tarefa proposta aos alunos.

TEMA	Geometria
SUMÁRIO:	Resolução de uma tarefa sobre equações de retas vetoriais.
OBJETIVOS:	• Perceber como definir uma reta com o auxílio de vetores.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:	· Inicio da aula com a formação de pares para a resolução da tarefa. · Resolução da primeira parte da tarefa. · Correção da primeira parte da tarefa no quadro. · Introdução às equações vetoriais de retas no espaço. · Resolução da segunda parte da tarefa. · Correção da segunda parte da tarefa no quadro. · Realização de uma síntese final com a terceira parte da tarefa. · Conclusão da aula com a resolução da mesma.

Tabela 6 - Resumo da planificação da aula de dia 27 de maio ao 10.º ano

Apesar da aula ter sido lecionada numa fase final do ano letivo, em que os alunos estão menos focados e menos concentrados devido à existência de atividades não letivas a acontecer em simultâneo (debates políticos). Por esse motivo, na parte final da execução da tarefa a professora estagiária teve de estabelecer limites na turma para dar términus à sua aula, concretizando assim a tarefa com sucesso.

2. PRÁTICA NÃO LETIVA

O presente capítulo pretende dar evidência às atividades não letivas realizadas pela professora estagiária durante o ano letivo. Destas atividades podem ser destacadas as múltiplas reuniões em que participou, assim como atividades didáticas para a comunidade escolar.

2.1. Reuniões

2.1.1. Reunião geral de professores

No início do ano letivo, a professora estagiária foi convidada a estar presente em todas as reuniões.

Para dar início ao período escolar, o agrupamento promoveu uma reunião geral com todos os professores. Esta sessão atuou como receção de acolhimento para os novos docentes. Para além de dar a conhecer os órgãos que operam nas três escolas que formavam o agrupamento, também foram referidas as linhas que deveriam orientar o percurso dos docentes durante o ano letivo a ser iniciado.

2.1.2. Reuniões de Grupo

Nas reuniões de grupo estiveram presentes os docentes do grupo de matemática de todas as escolas que fazem parte do agrupamento. Nestas reuniões, foram tidos em consideração temas relacionados com as atividades tanto letivas como não letivas referentes à disciplina de Matemática. Alguns exemplos desses assuntos foram: os testes da Sociedade Portuguesa de Matemática, as provas-ensaio realizadas pelo 9.º ano de escolaridade e as atividades interescolares.

Durante as reuniões de grupo o núcleo de estágio foi delegado para elaboração das atas. Esta responsabilidade refletiu-se num momento de aprendizagem para a professora estagiária, visto que nunca tinha tido contacto com este tipo de documentos.

2.1.3. Reuniões de conselho de turma

Nas reuniões de conselho de turma participaram todos os professores que acompanharam a turma.

Nestas reuniões, os professores discutiram temas como o comportamento, a assiduidade e as avaliações de cada aluno.

Estas reuniões foram marcadas a meio de cada período (reuniões intercalares) e no fim do mesmo. Note-se que as avaliações intercalares do segundo período tinham um cariz opcional, o que levou a que em nenhuma das turmas acompanhadas pela professora estagiária tivesse ocorrido essa reunião.

Além das reuniões mencionadas, existiu ainda uma de carácter excecional para discutir o comportamento da turma de 9.º ano.

A professora estagiária colaborou na realização das atas das reuniões da sua turma principal.

2.1.4. Reuniões no âmbito do estágio

Com o decorrer do ano letivo foram realizadas reuniões com o núcleo de estágio. Nas reuniões estiveram presentes a professora cooperante, as professoras estagiárias e, por vezes, a professora orientadora.

Nestas reuniões definiram-se as datas das aulas a serem lecionadas pelas professoras estagiárias, foram analisadas as planificações para futuras aulas e, posteriormente, refletiu-se sobre o desempenho nas mesmas. Também, as atividades não letivas foram alvo de discussão nestas reuniões.

Nestas sessões também foram abordados os instrumentos de avaliação e respetivas correções. Para além disso, este espaço serviu para pequenas reflexões sobre que atitudes tomar face a comportamentos de indisciplina por parte dos alunos.

Estas reuniões foram importantes na medida em que se tornaram uma aprendizagem para as professoras estagiárias, uma vez que eram momentos de reflexão sobre como atuar em contexto de sala de aula.

2.2. Atividades para a comunidade escolar

2.2.1. Advento da Matemática

O núcleo de estágio dinamizou uma atividade inspirada nos calendários do advento. Durante o mês de dezembro, os alunos do 3.º ciclo tinham a oportunidade de, diariamente, ler um *QR Code*, transmitido na televisão presente no átrio da escola, que os conduzia a um questionário via Google Forms onde tinham acesso a uma pergunta matemática.

Cada vez que um aluno acertava, o núcleo de estágio oferecia um pequeno brinde que funcionou como incentivo à participação

A atividade foi bem acolhida pela comunidade escolar, assinalando uma forte adesão por parte dos alunos e pode ser consultada no anexo 7.

2.2.2. Canguru Matemático

O núcleo de estágio organizou o concurso Canguru Matemático na escola. Os alunos mostraram-se entusiasmados com o concurso levando a uma grande adesão por parte dos mesmos.

A correção das provas foi realizada pelas professoras estagiárias, o que permitiu aprofundar os conhecimentos neste tipo de atividades.

O envolvimento no Canguru Matemático permitiu perceber como estas atividades se tornam numa motivação para os alunos no que diz respeito à disciplina.

3. Reflexão Sobre o Estágio Pedagógico

O ano letivo de estágio pedagógico constitui uma etapa fundamental na formação de professores. Este ano foi sinónimo de aprendizagem constante sobre o papel do professor tanto dentro como fora da sala de aula.

Durante este intervalo de tempo, foi dada a oportunidade de vivenciar a teoria que nos foi transmitida ao longo deste percurso numa perspetiva que apenas se tem a oportunidade de experienciar dentro da sala de aula. A oportunidade de intervir num contexto real de sala de aula foi um ponto fulcral para entender o sentido dos temas abordados ao longo do mestrado.

Neste ano de estágio, as turmas atribuídas foram bastante distintas. A turma principal, 9.º ano, apresentava um comportamento favorável à realização das planificações de aula, enquanto a turma de 10.º ano por vezes não colaborava, colocando a professora estagiária numa posição de desconforto que foi essencial para o seu crescimento enquanto docente. A diversidade de alunos com que foi possível contactar neste estágio pedagógico tornou a experiência bastante enriquecedora do ponto de vista pessoal, dado que forneceu ferramentas para a melhor gestão da sala de aula.

Com as situações de indisciplina percebe-se que o papel do professor vai muito além de ensinar a sua disciplina. Desta forma, para além da assimilação de estratégias para o ensino da Matemática, também foram preocupações constantes dentro da sala de aula a transmissão de hábitos de trabalho, incutir a necessidade de estudo e ensinar de que forma se podem transformar as adversidades em motivação para melhorar.

Durante o ano de estágio, foi também possível contactar com o trabalho de direção de turma. Nas reuniões, quer intercalares quer de final de período, a realização da ata ficou a cargo da professora estagiária. Este contacto com a parte burocrática do papel dos professores tornou-se uma experiência bastante relevante para a perceção das decisões que um professor toma fora das salas de aula.

Para além do papel desempenhado dentro da escola, a professora estagiária tomou conhecimento sobre o trabalho de casa de um professor. Em primeiro lugar, a planificação das aulas que se revelou fundamental a cada dia, ainda que muitas vezes, no contexto da aula com os alunos, se torna necessário a existência de um plano alternativo. Também a preparação dos testes e a correção dos mesmos são trabalhos realizados em casa pelos professores. Outro grande exemplo foi a atribuição de uma classificação final aos alunos. Para além de preencher os documentos necessários como grelhas, com todos os momentos de avaliação, existe a necessidade de dispêndio de tempo significativo na reflexão das classificações finais, uma vez que podem fazer a diferença no percurso escolar de cada aluno.

Em suma, este estágio permitiu que cada dia fosse um motivo para uma nova reflexão. Os desafios que os professores têm pela frente transformam-se a cada dia que passa, e este ano foi um grande exemplo para o que irá ser a vida profissional daqui para diante. No que diz respeito aos sentimentos que predominaram neste estágio, algo que se destacou foi a sensação de crescimento pessoal fruto dos momentos de insegurança provocados pela falta de conhecimento, no que diz respeito à gestão de uma turma em sala de aula. A realidade é que o contacto direto com uma escola se torna bastante relevante, pois simboliza a inquietante passagem da teoria para a prática.

SEGUNDA PARTE

1. INTRODUÇÃO

As funções são um conceito matemático importante uma vez que integram o currículo desta disciplina desde o 3.ºciclo do ensino básico até ao ensino secundário, em Portugal.

Este é um tema que apresenta interligações com situações do quotidiano que se assemelham às vivenciadas pelos alunos. Por esse motivo, acredito que se o colocarmos a favor da aprendizagem muitas das dúvidas colocadas pelos alunos poderão ser esclarecidas.

O primeiro capítulo inclui: uma introdução relativamente ao tema em estudo, a descrição da motivação e pertinência do estudo, o objetivo de investigação e as respetivas questões de investigação.

O segundo capítulo é constituído pela revisão de literatura. Neste capítulo são discutidas temáticas fundamentais que contribuíram para responder às questões de investigação como a definição de função de proporcionalidade inversa no currículo do 3.º ciclo do ensino básico, em Portugal e os conceitos de problema, resolução de problemas e formulação de problemas, segundo alguns investigadores.

No terceiro capítulo são caracterizadas as opções metodológicas que foram adotadas no estudo, bem como a fundamentação destas escolhas. De forma a dar cumprimento ao objetivo e às questões de investigação, utilizou-se uma metodologia qualitativa com carácter interpretativo que envolveu três estudos de caso com recurso às técnicas de observação e de recolha documental.

O quarto capítulo tem como objetivo a apresentação, análise e discussão dos dados recolhidos, bem como as considerações que deles se retiram de acordo com os autores discutidos na revisão de literatura.

Por fim, no último capítulo, são apresentadas as conclusões da investigação realizada, dando respostas às questões de investigação deste estudo.

1.1. Contexto e motivação

A disciplina de Matemática acompanha a maioria dos alunos desde o 1.º ano de escolaridade até ao ensino secundário. Apesar das possíveis ligações desta com o quotidiano, continua a revelar-se como uma das disciplinas que mais suscita a questão "Para que é que isto serve?".

No decorrer do meu percurso académico, esta questão assoberbou-me o pensamento em diversos momentos e, apesar da minha prática pedagógica ser recente, também já ouvi alunos a questionar a aplicabilidade dos conceitos adquiridos durante as aulas. Assim sendo, ainda que não seja passível dar uma resposta completa à questão, reconheço a sua importância e a necessidade de contribuir para a investigação, no que se refere ao estudo da função de proporcionalidade inversa com alunos do 9.ºano.

No documento *Aprendizagens Essenciais* para o ensino de matemática no 9.º ano de escolaridade (DGE, 2021), no subtópico funções de proporcionalidade inversa salienta-se que os alunos devem "Resolver problemas com recurso a funções de proporcionalidade inversa." (p. 25). Nesse documento, refere-se ainda que os alunos devem "Formular problemas a partir de uma situação dada, em contextos diversos" (p. 12). Desta forma, para complementar a resolução de problemas envolvendo a proporcionalidade inversa deve-se trabalhar também a formulação de problemas nesta temática.

Os problemas podem ser divididos em duas categorias: os rotineiros e os que não o são (Pólya, 1945). Os problemas não rotineiros revelam uma maior possibilidade de desenvolvimento intelectual por parte dos alunos (Vale e Pimentel, 2012). No que diz respeito à incorporação da resolução de problemas em sala de aula, existem autores que afirmam ser o principal meio de ensino (Guimarães, 2014).

Na minha perspetiva, confrontar os alunos com problemas que revelem utilidade permite a criação de ligações entre a matemática e o seu dia a dia. Desta forma, a aprendizagem pode tornar-se mais significativa, para os alunos.

A formulação de problemas desempenha um papel tão relevante quanto a resolução de problemas na disciplina de matemática (Vale et al., 2015). Apesar da formulação de problemas ser mencionada nas *Aprendizagens Essenciais* (DGE, 2021), a realidade é que a sua prática se revela pouco comum no contexto de sala de aula (Miranda & Mamede, 2023).

Dado que os alunos não estão familiarizados com a formulação de problemas, torna-se relevante compreender como é que reagem a tarefas que envolvam esta estratégia de ensino.

Por estes motivos e pelo interesse para com estas temáticas, torna-se motivador analisar o desempenho dos alunos na resolução de problemas e na formulação de problemas envolvendo a proporcionalidade inversa.

1.2. Objetivos e questões de investigação

Este trabalho de investigação tem como objetivo compreender os processos desenvolvidos pelos alunos na resolução e formulação de problemas que envolvem a proporcionalidade inversa.

Nesse sentido refinou-se o objetivo em duas questões de investigação:

1. Como se caracteriza o processo de resolução de problemas que envolvem a proporcionalidade inversa?

2. Como se caracteriza o processo de formulação de problemas que envolvem a proporcionalidade inversa?

2. Revisão de Literatura

As funções constituem um dos tópicos presentes no currículo de Matemática em Portugal desde o ensino básico até ao ensino secundário. Esta dissertação tem o foco, num estudo realizado com uma turma do 9.ºano de uma escola da área metropolitana de Lisboa, sobre as funções de proporcionalidade inversa.

A revisão de literatura encontra-se divida em quatro secções onde são apresentados os resultados da investigação de alguns autores sobre a temática desta dissertação. Em primeiro lugar, destaca-se o que está previsto no currículo oficial de matemática, que os alunos devem saber sobre a função de proporcionalidade inversa. De seguida são apresentadas algumas abordagens ao conceito de problema em matemática e em educação matemática e, por último, são discutidos os conceitos de resolução e formulação de problemas no mesmo âmbito do anterior.

2.1. A função de proporcionalidade inversa no currículo do ensino básico em Portugal

As funções são um tema presente no currículo da disciplina de Matemática desde o terceiro ciclo até ao ensino secundário e constituem um conceito essencial para analisar e modelar situações em que exista uma dependência entre variáveis.

O conceito de função tem vindo a desenvolver-se ao longo dos tempos, sendo considerado como um dos mais importantes na Matemática, não pela sua antiguidade, mas pelo papel que desempenha na disciplina (Ponte, 1990). No ano letivo de 2024/25 entraram em vigor no 9.º ano de escolaridade as *Aprendizagens Essenciais*, resultado do documento "Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática" publicado pela Direção Geral de Educação (DGE) a 27 de março de 2020. Neste relatório estão presentes orientações curriculares com a respetiva fundamentação para melhorar o desempenho dos alunos. No que diz respeito ao tópico funções, refere-se a importância das relações entre as representações gráficas e algébricas. No documento, destaca-se ainda a importância da interdisciplinaridade e o uso da tecnologia no ensino da matemática.

Em termos matemáticos, como é possível observar mais à frente, os termos "relação de proporcionalidade inversa" e "função de proporcionalidade inversa" complementam-se. Os alunos devem ser esclarecidos acerca desta relação para que a possam compreender melhor.

Desta forma, torna-se relevante proceder à comparação entre o programa antigo (2018) e a reformulação mencionada (DGE, 2021). No que diz respeito à definição e à expressão matemática que define a função de proporcionalidade inversa e a sua representação, não existem alterações nos dois programas referidos.

As *Aprendizagens Essenciais* em vigor (DGE, 2021), fazem referência à necessidade de os alunos serem capazes de interpretar e resolver problemas que envolvam tanto a relação de proporcionalidade inversa como as funções de proporcionalidade inversa.

Uma alteração entre os documentos das Aprendizagens Essenciais é que, no documento publicado em 2018, a função de proporcionalidade inversa é abordada com o auxílio de problemas como a relação entre a velocidade e o tempo de uma viagem. Com a revisão deste documento, publicada em 2021, verifica-se um incremento nos exemplos com uma perspetiva clara sobre a interdisciplinaridade. Alguns dos exemplos passiveis de utilizar em sala de aula são: a relação entre a pressão e o volume dos gases (interdisciplinaridade com físico-química) ou a relação entre o número de indivíduos e os recursos disponíveis (interdisciplinaridade com ciências). Embora a alteração não seja muito significativa, estes exemplos vêm de encontro ao documento publicado pela DGE no ano de 2020 onde é referida a importância da utilização de contextos significativos para os alunos.

Outro tópico que distingue os dois documentos das *Aprendizagens Essenciais* é a utilização da tecnologia. No documento *"Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática"* (DGE, 2020), é referida a importância da utilização da tecnologia na visualização de todos os conceitos matemáticos como é o caso dos gráficos de funções. No programa publicado em 2018, a tecnologia aparece apenas como uma sugestão de ferramenta ao dispor do professor para observar a curva hiperbólica. Com a reformulação publicada em 2021, a utilização da tecnologia passou a ser encarada como uma prioridade porque permite aos alunos uma visualização dinâmica. Em relação aos recursos tecnológicos, o documento da DGE (2021), contempla a utilização de calculadoras gráficas ou programas de funções ou de modelação, como por exemplo o GeoGebra.

As alterações visíveis entre estes dois documentos são o reflexo de que se pretende um ensino e uma aprendizagem da matemática mais contextualizado com a realidade dos alunos. Desta forma, contribuir para a divulgação da ideia de que a matemática tem um impacto no quotidiano e vice-versa.

Os manuais escolares assumem uma presença constante tanto na sala de aula como no estudo dos alunos. Por esse motivo, seguem-se quatro abordagens sobre as funções de proporcionalidade inversa presentes nos manuais mais adotados pelas escolas: *MX 9 – Parte 2* (Neves et al., 2024), *Espiral – Parte 1* (Costa et al., 2024), *Prisma 9.º ano – Volume 2* (Magro et al., 2024) e *MatPower 9 – Volume 2* (Andrade et al., 2024).

Segundo Neves et al. (2024), as grandezas x e y representam uma relação de proporcionalidade inversa quando o seu produto é igual a uma constante, que designamos por constante de proporcionalidade inversa. Reforçam que uma função de proporcionalidade inversa é definida pela expressão $f(x) = \frac{k}{x}, k > 0$ com o seu domínio apenas formado por valores reais positivos. Costa et al. (2024) apresentam definições idênticas para ambos os conceitos. Magro et al. (2024) também apresentam definições idênticas fazendo apenas uma nota no que diz respeito à função de proporcionalidade inversa, onde acrescentaram que a constante de proporcionalidade é o valor da função no ponto de abcissa um. Andrade et al. (2024), definem a relação de proporcionalidade inversa da mesma forma que os autores anteriores. No que diz respeito à função de proporcionalidade inversa, diferenciam-se dos autores anteriores por definirem a função de proporcionalidade inversa para valores de $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Em suma, a maioria dos autores destes manuais apresentam a função de proporcionalidade inversa de forma idêntica. A diferença mais considerável reside no intervalo a que pertence a constante de proporcionalidade inversa. Nos manuais escritos por Neves et al. (2024), Costa et al. (2024) e Magro et al. (2024) definem a função para valores positivos da constante de proporcionalidade enquanto Andrade et al. (2024) definem para qualquer valor diferente de zero.

Um dos exemplos sobre funções, no que se refere às de proporcionalidade inversa que encontramos nos manuais escolares é a velocidade média em função do tempo com o estudo da função da proporcionalidade inversa (Neves et al. 2024).

Sintetizando, uma função de proporcionalidade inversa, para além dos conceitos típicos associados às funções (domínio, contradomínio, objeto, imagem, entre outros) pode ainda modelar uma situação da vida real. Por exemplo, consideremos um problema em que um empreiteiro tem 30 dias para construir uma parede. À priori, podemos afirmar que quanto mais trabalhadores menor o tempo de execução da parede, o que representa uma relação de proporcionalidade inversa. Esta situação pode ser modelada por uma função, apesar disso não faz sentido definir o seu domínio para todo o conjunto dos números reais. Como esta é uma situação que envolve pessoas, apenas faz sentido dentro dos números naturais não nulos. Do ponto de vista matemático, podemos afirmar que se trata de uma função de natureza discreta. Desta forma é possível concluir que, neste caso, a proporcionalidade inversa é a relação entre as duas grandezas que verificam a condição do seu produto ser igual e que a função de proporcionalidade inversa é o conceito matemático que permite modelar a situação.

2.2. O conceito de problema em educação matemática

Os estudos realizados por investigadores sobre o conceito de problema têm gerado uma diversidade de interpretações da palavra no contexto educacional e matemático.

Kahney (1993) afirma que um aluno está perante um problema sempre que tenha um objetivo e que se encontre bloqueado por algum motivo. Singer et al. (2011) afirmam que existe uma necessidade de estar ciente dos problemas para que seja possível desbloquear os motivos que se encontram a bloquear as soluções. Os autores fazem um paralelismo entre a era pré-histórica e os dias de hoje. Por exemplo, as primeiras civilizações a habitar na Terra tinham problemas associados à necessidade de se alimentarem, desta forma aprimoraram as suas técnicas de caça. O mesmo acontece nos dias de hoje, devem ser dadas aos alunos oportunidades para que possam desenvolver o raciocínio matemático na resolução de problemas que envolvam contextos próximos da sua realidade, conexões dentro da matemática e com as outras ciências.

Vale et al. (2015) não fazem referência direta a um motivo que bloqueie o sujeito de atingir a solução. As autoras definem problema como uma situação na qual o indivíduo é envolvido numa atividade para a qual não conhece, à priori, o caminho que deve percorrer até ser possível obter a solução. As autoras reconhecem a possibilidade desta definição transformar alguns dos enunciados que se intitulam de problemas em meros exercícios.

Ponte (1992), distingue os conceitos de exercícios e problema. Enquanto um problema é uma tarefa para a qual o aluno não dispõe de um método imediato para a resolver, um exercício exige apenas a aplicação de um método de resolução já dominado pelo aluno. Mais tarde, em 2005, o autor afirma que os problemas são um exemplo bastante conhecido de tarefa matemática e apresenta-nos dois tipos de tarefas: as fechadas (são aquelas em que os alunos sabem exatamente o que lhes é pedido no enunciado e qual o caminho que deverão seguir) e as abertas (são aquelas que apresentam um grau de indeterminação nos dados, no que é pedido ou em ambos). O autor refere ainda o nível de desafio das tarefas propostas, subdividindo-o em grau baixo e grau elevado. Por fim, conclui que os problemas são tarefas fechadas com um grau de dificuldade elevado.

Outros autores, como é o caso de Pólya (1945), divide os problemas em duas categorias. Os primeiros, que o autor denomina como problemas rotineiros, são aqueles onde os alunos sabem aplicar um procedimento, como por exemplo resolver uma equação ou calcular uma área. Assim, os principais erros ocorridos durante a resolução de problemas rotineiros são de cálculo. Por outro lado, os restantes problemas, aqueles que o autor denomina como problemas de terminologia, envolvem um nível de compreensão maior. Consequentemente, os erros mais comuns neste tipo de problemas prendem-se com a interpretação dos mesmos.

Por exemplo, no enunciado de um problema é plausível depararmo-nos com a palavra "constante" com diferentes interpretações: pode referir-se a uma função que é constante ou a um valor fixo como uma constante de proporcionalidade.

Associando as ideais de Ponte (1992) e Polya (1945) podemos sintetizar que um problema não rotineiro é uma tarefa aberta com um grau de dificuldade elevado, uma vez que, os alunos não conhecem à partida uma estratégia para a sua resolução.

Kilpatrick citado em Guimarães (2014) reconhece que não é possível um professor utilizar problemas para ensinar todo o currículo de matemática. Apesar disso, o autor afirma que existe lugar dentro da sala de aula para todo o tipo de problemas, sejam estes rotineiros ou não. No entanto, é importante que os professores assegurem que nem todos os problemas têm um cariz rotineiro e propor também aos alunos situações cuja resolução não siga padrões conhecidos.

Vale e Pimentel (2012), definem os problemas não rotineiros como aqueles que revelam uma maior possibilidade de contribuir para o desenvolvimento intelectual do aluno. Estes problemas permitem uma abordagem diversificada e enquadrada no contexto dos alunos. Apesar de estes problemas serem o foco, a realidade é que são aqueles em que os alunos têm revelado maior dificuldade, em comparação com os problemas tradicionais que se resolvem aplicando conhecimentos rotineiros.

Díaz e Poblete (2005) classificam os problemas tendo por base o seu contexto. Os autores enumeram quatro tipos de problemas: os problemas reais (que envolvem ações dos alunos, por exemplo, realizar uma determinada medição), os problemas realistas (quando se trata de uma simulação de algo que realmente existe, por exemplo utilizando distâncias realistas), os problemas fantasiosos (aqueles que não existe fundamento com a realidade, por exemplo um problema em que o sujeito seja o super-homem) e, por último, os problemas puramente matemáticos (quando fazem referência unicamente a objetos matemáticos, como um problema de trigonometria para determinar a área de um triângulo).

Posteriormente, Boavida et al. (2008) propõem a divisão dos problemas em três categorias: problemas de cálculo (que são aqueles em que os alunos após lerem e perceberem o problema aplicam conceitos previamente aprendidos), problemas de processo (que diferem dos anteriores no sentido em que não se resolvem apenas com uma seleção de conhecimentos previamente adquiridos) e problemas abertos (os autores utilizam este termo como sinónimo de investigação, são aqueles que têm vários caminhos para chegar à solução podendo até ter mais do que uma solução correta).

O conceito de problema tem sido amplamente discutido no contexto da educação matemática. De um modo geral, define-se problema como uma situação em que o aluno não conhece, à priori, o percurso a seguir para encontrar a solução. Os problemas podem ainda variar quanto ao grau de complexidade e ao seu contexto.

2.3. A resolução de problemas em educação matemática

A resolução de problemas no ensino da matemática tem sido discutida por vários autores, nesta secção apresentam-se algumas das suas ideias.

A reforma do sistema de ensino da década de 60, favoreceu atividades de desenvolvimento mais complexas nesta área (Ponte, 1992). Vale e Pimentel (2012), fazem referência à necessidade de propor aos alunos experiências diversificadas de forma a conseguirem retirar benefícios da matemática que poderão utilizar ao longo das suas vidas.

No documento *Aprendizagens Essenciais* de matemática para o 9.º ano de escolaridade (DGE, 2021) é referido que a resolução de problemas é uma das capacidades matemáticas que devem ser desenvolvidas pelos alunos. Estes devem ser capazes de reconhecer e aplicar o processo de resolução de problemas e também aplicar diferentes estratégias tendo em conta os diferentes contextos.

Apesar de não definir propriamente o conceito de problema, Skemp (1978) estabelece uma ligação entre a forma como se resolvem os problemas e os diversos tipos de compreensão. O autor destaca dois tipos de compreensão: a compreensão instrumental e a compreensão relacional. A compreensão instrumental é aquela em que o aluno assimila determinadas regras ou procedimentos, muitas vezes sem entender o que as originou. A compreensão relacional acontece quando o aluno percebe as conexões que dão origem aos resultados a ser utilizados. Desta forma, a compreensão relacional revela-se mais eficaz na resolução de problemas pois os alunos têm noção dos conceitos que estão por detrás da sua resolução.

Na sala de aula, o professor desempenha um papel crucial na escolha dos problemas que irá colocar à sua turma. Estes não devem pertencer aos extremos, nem muito fáceis nem muito difíceis, permitindo que os alunos evoluam com a sua resolução (Pólya, 1945). Mais tarde, Kilpatrick citado em Guimarães (2014), alega que os professores são o coração da matemática e que os problemas, seja com a resolução ou com a formulação como é possível constatar mais à frente, representam o principal meio de ensino. Apesar disso, Kilpatrick afirma que tem a consciência de que nem todos os temas da matemática podem ser explorados utilizando problemas.

A resolução de problemas tem suscitado o interesse de vários autores sobre as abordagens que se podem tomar para chegar a uma solução. Destas abordagens, destacam-se alguns modelos como, por exemplo, o modelo heurístico de Pólya (1945). Este modelo encontra-se dividido em quatro etapas para a resolução de um problema.

Em primeiro lugar, surge a compreensão do problema. Nesta etapa deve-se, por exemplo, definir qual é a incógnita e escolher a notação que irá ser utilizada na resolução. Para

Vieira e Vieira (2013), este passo é uma das dimensões do pensamento crítico: é necessário formular de forma clara e precisa a questão ou o problema a resolver.

A segunda etapa tem como objetivo final definir o plano de resolução, é aqui que devem confrontar-se os dados com as incógnitas definidas, com o objetivo de encontrar uma relação entre os mesmos. Caso essa relação não seja direta, devem reconhecer-se pequenos problemas, que Pólya define como "problemas auxiliares", para que se consiga estabelecer a conexão e o plano de resolução.

Na terceira etapa operacionaliza-se o que ficou definido à priori. Neste passo do método é importante verificar se o encadeamento faz sentido e é claro. Pólya defende que dificilmente se operacionaliza de forma linear todo o plano delineado até este passo, contudo refere a necessidade da persistência para esta etapa.

Por último, surge a etapa da verificação. Para verificar que a resolução se encontra enquadrada no problema, devem-se ter em atenção alguns aspetos como: se é possível chegar ao mesmo resultado por outro método ou se é possível resolver outro problema com o método utilizado.

O autor reconhece a importância de questionar cada momento durante cada uma das etapas do método descrito. Na tabela seguinte, sistematizam-se as etapas do método para a resolução de problemas descrito acima.

Primeiro Compreensão do problema	Procure compreender o problema.
Segundo Estabelecimento de um plano	Descubra a conexão entre os dados e a incógnita. Pode ser forçado a considerar problemas auxiliares se não conseguir encontrar uma conexão imediata. Deverá chegar, eventualmente, a um plano de resolução.
Terceiro Execução do plano	Execute o plano.
Quarto Verificação	Examine a solução obtida.

Tabela 7 - Etapas da resolução de problemas segundo Pólya (1945)

Boavida et al. (2008), afirmam que nem sempre se torna obvia a distinção entre a segunda e a terceira etapa do método, uma vez que o procedimento apresentado por Pólya tem por base problemas mais complexos que aqueles que são apresentados aos alunos ao nível do 3.º ciclo. Assim sendo, propõem apenas três etapas para a resolução de problemas. Em primeiro lugar, os alunos devem ler e compreender o problema. Posteriormente devem elaborar e executar o plano para o resolver. E, por último, devem verificar a resposta que obtiveram. Os autores acrescentam ainda algumas estratégias para facilitar a resolução de problemas, por exemplo: fazer uma simulação do problema, realizar tentativas para obter a solução final, repartir o problema em pequenos problemas mais simples, ou simplesmente tentar trabalhar no sentido oposto (do fim para o início).

Lester (2013), afirma que a maioria das definições de resolução de problemas não auxiliam os docentes a ensinar como resolver problemas ou a identificar as competências necessárias. Posto isto, sugere uma definição que considera útil: resolução de problemas é uma atividade onde os alunos se envolvem num conjunto vasto de ações cognitivas (algumas não rotineiras).

Freire et al. (2004), referem que os alunos têm à sua disposição quatro estratégias para resolver problemas algébricos. Desta forma, uma resolução pode ser simbólica (quando utiliza equações e manipulações algébricas), numérica (quando envolve operações com números, não envolvendo variáveis), icónica (quando o aluno utiliza figuras ou esquemas para visualizar os dados) e mista (quando a solução do problema surge da combinação dos anteriores). Os autores fazem referência a outras formas de resolver, contudo como aparecem de forma residual, não as categorizam.

Em síntese, a resolução dos problemas deve assumir um papel de destaque no ensino da matemática. Tal como é evidenciado pela literatura presente ao longo desta secção, torna-se importante apresentar problemas aos alunos com diferentes graus de dificuldade e que sejam promotores da utilização de estratégias diversificadas. O papel do professor dentro de sala de aula é de destaque uma vez que este pode refletir sobre quais os problemas que se adaptam melhor à sua turma.

2.4. A formulação de problemas em educação matemática

No documento *Aprendizagens Essenciais* de matemática para o 9.º ano de escolaridade (DGE, 2020) é referido que os alunos devem ser capazes de formular problemas a partir de uma situação dada em diversos contextos. Boavida et al. (2008), suportam a necessidade da formulação de problemas integrar os programas curriculares com a ideia de que a resolução de problemas se torna empobrecida quando não existe articulação com a formulação dos mesmos. Kilpatrick citado em Guimarães (2014) vai ao encontro do defendido anteriormente quando afirma que ganhar experiência na formulação permite que os alunos visualizem certos aspetos de um problema (como a existência de incógnitas ou condições) que são parte fundamental da sua compreensão.

Stoyanova (1998), admite três espécies de formulação de problemas. A primeira, que designa como situações livres em que os alunos são convidados a formular um problema a partir de uma situação que lhes é entregue e com algumas orientações do que devem alcançar. A segunda, que denomina de situações semiestruturadas na qual é entregue aos alunos uma situação em aberto e estes são convidados a completá-la com base na sua experiência matemática. Por último, as situações estruturadas onde os alunos criam um problema através da reformulação de problemas ou através da alteração da sua finalidade.

Vale et al. (2004), reconhecem a importância da inclusão da formulação de problemas nas aulas de matemática e salientam algumas diferenças entre a resolução e a formulação de problemas. Por exemplo, na resolução de problemas, o professor limita à priori o trabalho escolar, enquanto na formulação de problemas os alunos têm liberdade para incluir o seu contexto social. Vale et al. (2015) afirmam que desenvolver a formulação de problemas é, pelo menos, tão relevante quanto a resolução dos mesmos. Desta forma, a resolução e a formulação de problemas têm um cariz indissociável.

Na tabela abaixo, é possível observar cinco estratégias para a formulação de problemas que são referidas por Vale e Pimentel (2004).

Aceitar os dados	A partir de uma situação estática, por exemplo, uma tabela ou uma figura, o indivíduo formula o seu problema.
E se em vez de	A partir de uma situação, o indivíduo identifica as suas propriedades e nega uma ou mais dessas propriedades formulando perguntas.
Variação de um problema	A partir do enunciado de um problema, o indivíduo obtém novos problemas, por exemplo, por decomposição ou particularização do primeiro.
De problema para problema	Esta estratégia pode ser interpretada como um caso particular da anterior. Neste caso, o indivíduo parte de um problema original e muda algumas condições e atributos para obter o seu novo problema.
Recontextualização	A partir da resolução de um problema, o indivíduo altera o contexto e mantém a característica que resolveu o primeiro problema.

Tabela 8 - Estratégias de formulação de problemas segundo Vale e Pimentel (2004)

Boavida et al. (2008), referem duas das estratégias de formulação de problemas referidas pelas autoras supramencionadas. A primeira, baseia-se em "e se em vez de", ou seja, o aluno formula o problema a partir da modificação de um enunciado anterior ou aproveita o contexto referido no problema para a sua formulação. A segunda consiste em "aceitar os dados", isto é, os alunos formulam problemas a partir de dados pré-estabelecidos. Note-se que para Boavida et al. (2008) as estratégias apresentadas são colocadas pela ordem inversa que Vale e Pimentel (2004) haviam exposto.

Segundo Ramírez (2006) o processo de formulação de novos problemas divide-se em três etapas: formular, resolver e melhorar (Figura 1).

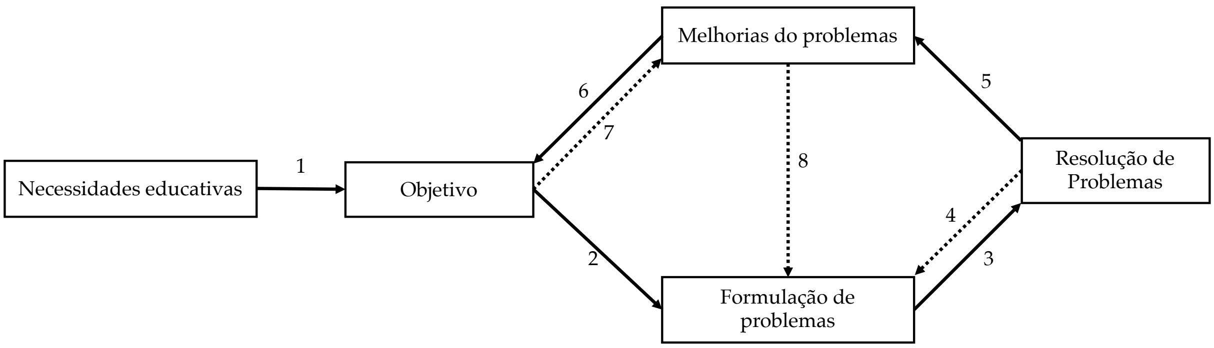


Figura 1 - Formulação de problemas segundo Ramírez (2006)

O esquema apresentado anteriormente diz respeito ao processo de formulação de problemas segundo Ramírez (2006). O autor afirma que a estrutura de formulação de um problema, seja este real ou fictício, surge a partir das necessidades educativas que darão origem a um objetivo para ser cumprido. (1). Numa primeira etapa, elabora-se o problema (2) e descobre-se a sua resolução (3). O autor defende que poderão existir retrocessos ou mudanças nos passos anteriores (4). A próxima etapa é a de melhoria (5), é aqui que se altera a complexidade do problema. Por último, é necessário verificar se o problema proposto satisfaz o objetivo para o qual tinha sido definido (6). Caso a resposta seja negativa existem duas possibilidades: recomeçar novamente a partir da formulação de problemas (8) ou recuar à fase de melhoria do problema (7).

Apesar do esforço para que a formulação de problemas faça parte das salas de aula, a realidade é que existem alguns obstáculos significativos. Por exemplo, o facto de os alunos não estarem familiarizados com este tipo de tarefas pode levar a que existam algumas dificuldades a concretizá-las (Miranda & Mamede, 2023).

Concluindo, a formulação de problemas revela-se tão essencial como a resolução dos mesmos para a aprendizagem dos alunos. Desta forma, o professor assume um papel fulcral na seleção, adaptação ou elaboração de tarefas que promovam a formulação de problemas em contexto de sala de aula.

3. METODOLOGIA

Neste capítulo apresenta-se a revisão de literatura associada à metodologia de investigação qualitativa, aos estudos de caso, às técnicas de recolha de dados e aos participantes, que servem de fundamentação às escolhas feitas para o estudo que sustenta esta dissertação.

3.1. Investigação qualitativa

Segundo Bogdan e Biklen (1994), uma das características da investigação qualitativa é o facto de todo o processo de recolha de dados ser realizado no ambiente natural, sendo o próprio investigador o instrumento principal. A investigação presente neste relatório será realizada no ambiente natural dos alunos, isto é, a sala de aula. O investigador insere-se no contexto e, com recurso a equipamentos vários, recolhe informação através de um contacto direto. Segundo os autores, este tipo de investigação entende que as ações devem ser observadas onde normalmente acontecem, daí a importância do contexto.

Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo caminho percorrido pelo individuo, do que propriamente pelos resultados que o mesmo obteve. Neste ponto, os autores fazem uma ponte com a investigação quantitativa.

Segundo os mesmos autores os investigadores qualitativos têm tendência para analisar os seus dados de forma indutiva, isto é, numa avaliação qualitativa, os investigadores não procuram provar algo, mas sim construir as suas ideias ao longo da recolha de dados. Os autores descrevem o processo como sendo construído "de baixo para cima". Por último, Bogdan e Biklen (1994), afirmam que a investigação qualitativa procura dar significado às diversas abordagens, tendo em conta as perspetivas individuais de cada um dos participantes.

Este tipo de investigação é descritivo, o que significa que os dados recolhidos são na forma de palavras ou imagens e não em números. Os relatórios que nascem deste tipo de investigação, tentam descrever situações que ocorreram onde constam por exemplo citações. É essencial perceber que para uma investigação deste cariz nada é trivial, ou seja, tudo tem potencial para ser um caminho para retirar conclusões.

Sumariando, Bogdan e Biklen (1994) referem cinco pilares da investigação qualitativa: os dados são recolhidos no ambiente natural, têm um cariz descritivo, valoriza-se o percurso em prol dos resultados obtidos, os investigadores recolhem dados sem o objetivo de provar algo e, por último, os investigadores pretendem perceber os diferentes significados atribuídos por diferentes pessoas.

Os autores terminam o capítulo sobre as características da investigação qualitativa, declarando que este tipo de investigação assenta num diálogo entre os investigadores e os respetivos interlocutores, sendo que os investigadores assumem uma postura neutra face à situação em estudo.

3.2. Estudo de caso

O estudo de caso é uma das várias formas de fazer uma pesquisa no ramo das ciências sociais. Segundo Merriam (1988) um estudo de caso baseia-se na observação pormenorizada de um contexto, um individuo, um conjunto de documentos ou um determinado acontecimento.

Yin (2003), enumera algumas outras: experimentos, pesquisa e análise de informações de arquivos. O mesmo autor relata que o estudo de caso é adequado quando as perguntas a que se pretende responder iniciam com: "Como" ou "Porquê". O autor aponta falhas presentes nos livros de ciências sociais, por exemplo, a desvalorização do estudo de caso como método formal de pesquisa. Este tipo de método foi considerado como uma etapa de outros métodos. Narra ainda outra falha: a confusão entre estudo de caso e observação de participantes. O autor enumera ainda os três tipos de estudo de caso que considera existir: os exploratórios (quando pouco se conhece do tema e não procuramos apenas dados, mas também procuramos os problemas e objetivos de estudo), os descritivos (quando os participantes fornecem relatos descritivos e aprofundados) e os explicativos (quando os dados representam uma relação de causa-efeito, isto é, os factos acontecem uns em função dos outros).

Cohen et al. (2007), definem como uma investigação sobre um fenómeno específico da vida real e afirmam que para escrever um estudo de caso, o investigador necessita de deixar bem claro os dados que deram origem ao seu relatório. Assim, os leitores podem depreender a validade do que estão a ler. Afirma ainda que, durante um estudo de caso, deve-se evitar fazer jornalismo, isto é, escolher os dados mais marcantes distorcendo o estudo para que este fique com um cariz mais apelativo.

De forma a suportar a sua posição relativamente ao estudo de caso, os autores enumeram alguns pontos fortes e fracos que se encontram sistematizados na tabela abaixo.

Pontos fortes	Pontos fracos
Em comparação com outros tipos de estudo, os dados recolhidos são fiéis à realidade	Em comparação com outros tipos de estudo, os dados recolhidos são de difícil organização.
Fornece um exemplo único, baseado em pessoas e situações reais, permitindo a quem o lê uma ideia clara. Em oposição aos estudos que se baseiam em teorias ou princípios abstratos.	Como este tipo de pesquisa é definida a nível temporal, geográfico e institucional faz com que sejam traçados limites no que a generalizações diz respeito.
Podem ser realizados apenas por um investigador, isto é, não é necessária uma equipa para a recolha de dados.	Os resultados obtidos do estudo de caso podem não ser generalizáveis.
Captam características únicas, que em outros estudos eram plausíveis de não serem identificados, e que podem ser a chave para perceber o estudo.	Não são de uma verificação simples, logo podem ser tendenciosos, pessoais ou subjetivos.
Os estudos são facilmente entendidos pelo publico geral, uma vez que são frequentemente escritos em linguagem do quotidiano.	São propícios a que os observadores problematizem apesar da tentativa de reflexão inerente.

Tabela 9 - Pontos fortes e fracos do estudo de caso segundo Cohen et al. (2007)

O estudo de caso tem pouca visibilidade como método de investigação, ainda que seja decisivo na captação de características únicas que permitem obter resultados diferenciados.

Nesta investigação optou-se por estudos de caso de observação (Bogdan e Biklen, 1994), uma vez que, a recolha dos dados envolveu a observação participante da investigadora e o foco do estudo centrou-se em duas aulas de uma turma do 9.º ano.

3.3. Técnicas de recolha de dados

Numa investigação qualitativa utilizando o estudo de caso existem vários instrumentos de recolha de dados ao nosso dispor. A escolha destes instrumentos deve ser ponderada e direcionada às necessidades do estudo que queremos efetuar. Aires (2015), refere a importância desta etapa e afirma que a falta de ponderação na mesma pode levar a que os objetivos de investigação não se concretizem. Tendo em conta que este tipo de investigação se baseia em dados recolhidos, é necessário garantir a qualidade dos mesmos. O autor distribui as técnicas de recolha de dados em dois conjuntos: as técnicas diretas (ou interativas) e as técnicas indiretas (ou não interativas). No conjunto das técnicas diretas encontramos, por exemplo, a observação dos participantes, as entrevistas e a história de vida. Por outro lado, exemplos de técnicas indiretas são documentos como é o caso de registos, diários ou cartas.

Para responder ao objetivo, desenvolveu-se uma investigação qualitativa com recurso ao estudo de caso para a análise e recolha de dados. Foi efetuada a recolha de dados numa turma do 9.º ano de escolaridade, onde foram utilizadas a técnica de observação, o diálogo entre investigador e alunos e, por fim, a recolha documental.

No total foram utilizados 4 tempos letivos de 50 minutos para a resolução das tarefas planificadas para a recolha de dados. A tarefa de resolução de problemas foi aplicada a 6 de março e a tarefa de formulação de problemas a 11 de março. Durante as aulas de aplicação das tarefas a investigadora esclareceu dúvidas relacionadas com os enunciados e, no fim de cada aula de 100 minutos, a investigadora recolheu os enunciados com as respetivas resoluções.

3.3.1. Observação

Yin (2003) faz a distinção entre dois tipos de observação: observação direta (o investigador observa o ambiente em estudo sem interferir no mesmo) e observação participante (o investigador participa de forma ativa no ambiente em estudo).

Aires (2015) define observação como o contacto direto com situações especificas. Acrescenta que a observação no contexto científico se distingue da observação do quotidiano pelo facto de ser intencional e orientada consoante o estudo a realizar.

Como desvantagem deste método é apontada a subjetividade no olhar do investigador, bem como a influência do comportamento do investigador. Aires (2015), refere que conjugação entre a observação e outros métodos atenua as desvantagens mencionadas.

Durante o estudo em curso, este método esteve presente em cada momento de recolha de dados. O papel da investigadora foi essencialmente o de observadora participante, nas aulas onde foram recolhidos os dados para este estudo. O apoio facultado aos alunos no desenvolvimento das suas atividades com as tarefas consistiu essencialmente na orientação das suas dúvidas e questões para a resolução dos problemas e não na resposta final. Desta forma, procurou-se não comprometer as estratégias de resolução que os alunos foram encontrando resultantes da sua leitura e compreensão dos enunciados das tarefas.

3.3.2. Recolha documental

Bogdan e Biklen (1994), apresentam duas categorias para os documentos redigidos: os documentos pessoais (documentos escritos na primeira pessoa como é o caso de autobiografias) e os documentos oficiais (por exemplo *dossiers* ou registos dos estudantes).

Yin (2003) enumera vantagens deste método, como por exemplo a facilidade destes documentos serem revistos várias vezes. Por outro lado, indica também desvantagens, como por exemplo a seleção dos documentos para o estudo poder refletir a opinião do investigador, tornando os dados enviesados.

Neste estudo, privilegiou-se a recolha documental para a recolha dos dados. Esta envolveu as resoluções dos alunos, as notas de campo que a investigadora redigiu no final de cada aula e nas quais registou os diálogos que foi mantendo com as díades durante a atividade dos alunos. Quatro das díades registaram em áudio as suas conversas durante a resolução das tarefas. Desta forma, as notas de campo incluíram, também, a transcrição dos diálogos das díades obtidas nas gravações áudio.

3.3.3. As tarefas

Um dos focos centrais da análise de dados foram tarefas. A investigadora optou por dividir os momentos de recolha de dados em duas tarefas distintas: a primeira sobre resolução de problemas e a segunda sobre a formulação de problemas.

Como referido anteriormente, Díaz e Poblete (2005) classificaram os problemas em quatro tipos: reais, realistas, fantasiosos e puramente matemáticos.

A primeira tarefa proposta aos alunos divide-se em três itens e encontra-se no anexo 9. O primeiro item relaciona o preço a pagar pelo aluguer de uma quinta com o número de alunos que nela ficam alojados. O enunciado começa por referir o preço da quinta por noite e que, inicialmente, um grupo de vinte alunos iria permanecer por quatro noites. No final, é proposto aos alunos que verifiquem o número de participantes que devem incrementar o grupo para que não se verifique um aumento do custo. O segundo item tem como tema a viagem até à quinta. Neste enunciado, os alunos têm informação sobre os quilómetros a percorrer bem como a velocidade de alguns meios de transporte. Encontra-se também um diálogo entre dois jovens sobre qual o meio de transporte mais rápido. Assim, o objetivo é mostrar qual dos jovens terá razão e, consequentemente, qual será o meio de transporte escolhido. O terceiro item refere-se às refeições que o grupo irá fazer na quinta. No enunciado consta o número total de alunos, o número de alunos que deverá ficar em cada mesa e o tempo que cada empregado demora a servir cada mesa. O objetivo deste item é determinar quantos empregados tinha o restaurante sabendo que demoraram 26 minutos a servir o grupo. No anexo 9 encontra-se uma proposta de resolução para cada um dos itens da primeira tarefa. Apesar dos problemas apresentados se caracterizarem todos como realistas, todos diferem na forma de resolução, o que faz com que esta tarefa seja composta por problemas não rotineiros. A investigadora optou por este tipo de problemas, dado que estes estão preconizados nas propostas curriculares para o ensino da matemática. Note-se que os problemas apresentados podiam ser resolvidos utilizando diversas estratégias, assim não se esperava que os alunos utilizassem apenas a função de proporcionalidade inversa nas suas resoluções, mas sim que existisse uma diversidade de estratégias nas suas respostas.

Como já referido na revisão de literatura, Stoyanova (1998) dividiu as formulações de problemas em três categorias: estruturada, semiestruturada e livre.

A segunda tarefa proposta aos alunos também está dividida em três itens e encontra-se no anexo 10. A primeira situação classifica-se como estruturada, uma vez que o enunciado contém um problema que os alunos deveriam resolver e depois utilizá-lo para a formulação. Este problema faz referência a uma visita de estudo realizada por uma escola. Os dados do enunciado são: o custo total da viagem que seria dividido pelos alunos e o valor máximo que um aluno poderia pagar para ir à viagem. Desta forma, o objetivo do problema é determinar quantos alunos deveriam ir à viagem de modo que esse aluno também fosse. A segunda situação designa-se por semiestruturada dado que no enunciado consta uma imagem de dois cilindros com alguns dados (altura, raio da base e volume) que orienta os alunos. Por último, os alunos formulam um problema a partir de uma situação livre uma vez que no enunciado apenas consta a expressão de uma função de proporcionalidade inversa. No anexo 10, encontra-se uma proposta de resolução para cada um dos itens da segunda tarefa.

3.4. Os participantes do estudo

Os participantes deste estudo foram os alunos de uma turma do 9.º ano de uma escola da área metropolitana de Lisboa com idades compreendidas entre os 13 e os 15 anos. Nesta turma existiam dezasseis raparigas e onze rapazes. Durante o ano letivo, os alunos demonstraram empenho e interesse pela disciplina. O comportamento da turma foi classificado como suficiente pela professora de matemática e pelos restantes professores do conselho de turma nas reuniões de avaliação, uma vez que nos momentos de trabalho se revelavam bastante barulhentos. Apesar de pequenas lacunas de anos anteriores, o seu aproveitamento foi também classificado como suficiente.

Todos os alunos da turma realizaram as tarefas em contexto de sala de aula. Previamente à realização da primeira tarefa, os alunos foram convidados a formar grupos de dois elementos. O facto de os alunos escolherem a sua díade permitiu que se mantivesse a regularidade de outras aulas, uma vez que, na maioria das díades, foi possível observar que escolheram colegas com quem estavam habituados a trabalhar em aula. De entre os alunos, nove díades obtiveram a autorização por parte dos encarregados de educação, para recolher dados para o estudo e quatro díades disponibilizaram áudios gravados com os seus dispositivos móveis. Os estudos de casos são constituídos por três das nove díades e foram escolhidos por serem os que asseguravam uma maior diversidade de resoluções, sustentadas na revisão de literatura.

Para garantir o anonimato dos alunos, foram utilizados os seguintes nomes fictícios para referência aos mesmos: Ana e Beatriz, Carolina e Daniel e, por último, Eugénio e Frederico. De seguida, serão apresentadas as três díades que constituíram os estudos de caso.

3.4.1. Estudo de caso um: díade Ana e Beatriz

Esta díade é constituída por dois elementos do sexo feminino que apresentam uma boa relação no contexto de sala de aula. Esta relação traduz-se na forma como trabalham em conjunto e se esforçam para ultrapassar as suas dificuldades, por vezes de forma bastante criativa.

A Ana é uma aluna que apresenta algumas dificuldades na disciplina. Ao longo do ano letivo, apresentou predisposição em superar-se tendo revelado algumas melhorias. Durante as aulas distrai-se facilmente e apresenta algumas lacunas de anos anteriores.

A Beatriz é uma aluna que apresenta uma postura bastante atenta à aula e energia para se superar e perceber os conteúdos lecionados.

As alunas apresentaram melhorias no seu desempenho ao longo do ano letivo. Durante a realização das tarefas, mostraram resiliência na procura do plano a seguir e partilharam várias ideias, quer entre o par, quer com a investigadora.

3.4.2. Estudo de caso dois: díade Carolina e Daniel

Esta díade é constituída por um elemento do sexo feminino e outro do sexo masculino e revela-se um grupo com visões distintas no que à disciplina diz respeito.

A Carolina é uma aluna que se destaca pelo seu bom desempenho académico e embora se depare com algumas dificuldades na disciplina, está sempre predisposta a superá-las. Dentro da sala de aula demonstra algum receio em não estar correta.

O Daniel é um aluno bastante participativo que também se destaca pelo seu bom desempenho académico. Este revela uma postura bastante determinada, o que, por vezes, compromete a sua colaboração no trabalho em equipa.

3.4.3. Estudo de caso três: díade Eugénio e Frederico

Esta díade é constituída por dois elementos do sexo masculino. Os alunos apresentam uma boa relação em contexto de sala de aula. No trabalho em equipa apresentam ambos dificuldade em cooperar com outros colegas, mas entre os dois existe uma dinâmica de entreajuda e juntos realizam trabalhos com bastante qualidade.

Durante as aulas, os dois elementos da díade apresentam uma postura participativa e empenhada na realização das tarefas propostas. Os alunos demonstram facilidade na aquisição de novos conceitos e aplicam estratégias de resolução de forma autónoma.

No que diz respeito ao seu desempenho académico, permanecem entre os alunos com melhor aproveitamento na disciplina.

Na realização das tarefas de investigação, mantiveram uma discussão bastante crítica quer entre o par, quer com a investigadora. Os alunos mostraram interesse nas resoluções solicitadas tendo elegido a primeira tarefa como a mais cativante e admitindo que a segunda foi a mais trabalhosa.

4. Análise e Discussão dos Dados

Neste capítulo apresenta-se uma análise detalhada das resoluções de cada uma das díades às tarefas propostas. A tarefa de resolução de problemas será analisada segundo: Freire et al (2004) e Boavida et al. (2008). A tarefa de formulação de problemas será analisada segundo: Stoyanova (1998), Ramírez (2006) e Vale & Pimentel (2004).

4.1. A recolha dos dados

Como foi referido anteriormente, as duas tarefas foram aplicadas em dias distintos. No dia 6 de março de 2025, as díades resolveram a primeira tarefa referente à resolução de problemas. No dia 11 de março de 2025, as díades resolveram a segunda tarefa referente à formulação de problemas. De forma a manter o ambiente natural de sala de aula, as díades mantiveram consigo todo o material que é normal utilizar nas aulas de matemática (manual, calculadora e caderno diário). As díades resolveram as tarefas no enunciado para facilitar o trabalho de recolha das suas resoluções e posterior análise das mesmas.

Durante as sessões de trabalho, a investigadora observou as díades, maioritariamente de modo não participante. Quando as díades interpelavam a investigadora, esta respondeu às questões e dúvidas sem guiar a resolução. Estes momentos de diálogo foram sobretudo para esclarecer dúvidas no enunciado ou para colocar questões que os impediam de continuar a resolução. No final de cada aula, procedeu-se à recolha da resolução das tarefas e dos áudios gravados pelas díades.

Nove díades utilizaram os seus dispositivos móveis e posteriormente partilharam as suas gravações via Microsoft Teams.

4.2. Resolução de problemas

Os dados recolhidos da resolução dos problemas propostos (tarefa 1) pelas díades serão caracterizados de acordo com a etapas definidas por Pólya (1945) que posteriormente foram reorganizadas por Boavida et al (2008): ler e compreender o problema, fazer e executar o plano e, por último, verificar as respostas.

As estratégias utilizadas na fase da execução do plano serão analisadas tendo por base dois referenciais. Em primeiro lugar, o proposto por Freire et al (2004) que definiram as seguintes estratégias: simbólica (quando as resoluções apresentam variáveis, por exemplo resoluções que envolvam equações ou proporções), numérica (quando as resoluções incluem operações numéricas, sem envolver variáveis), icónica (quando as resoluções envolvem esquemas para visualizar o problema) e mista (quando as resoluções surgem da combinação de estratégias enumeradas anteriormente). Em segundo lugar, o apresentado por Boavida et al. (2008) que enunciam as estratégias: fazer uma simulação do problema, realizar tentativas, repartir o problema em outros mais pequenos e trabalhar no sentido oposto. A complexidade da tarefa aplicada, não justificava a sua divisão em problemas mais simples, pelo que na análise são caracterizadas como etapas da resolução.

O contexto da primeira tarefa é uma viagem de finalistas, tema escolhido por se adequar à realidade escolar vivida pelos alunos do 9.º ano da turma participantes neste estudo.

4.2.1. Item um da primeira tarefa

O primeiro item com o qual as díades se depararam nesta tarefa, fazia referência à planificação de uma viagem de finalistas onde o preço a pagar por noite variava consoante o número de alunos. No enunciado foram facultados dados referentes ao número de alunos, ao valor da estadia na quinta por noite e ao número de noites. Posteriormente, foi questionado quantos alunos deveriam ir à viagem para conseguirem aumentar o número de noites, sem alterar o valor que cada aluno iria pagar por noite.

> **1.** Para a sua viagem de finalistas, as turmas do 9.ºD e do 9.ºE vão arrendar uma quinta na Figueira da Foz. A quinta terá um custo de 250 euros por noite. O grupo inicial, constituído por 20 alunos, concordaram com uma estadia de 4 noites. Depois da turma pesquisar um pouco sobre o destino escolhido, surgiram de imediato mais alguns alunos interessados.
> A Maria Inês, que fazia parte do grupo de alunos responsável pela seleção da quinta, ao perceber a forte adesão, teve de imediato a ideia de que poderiam ficar mais alguns dias pela cidade!
> **Qual é o número de elementos que se devem juntar ao grupo, para que a estadia seja de 13 noites sem que se verifique um aumento do custo por noite?**
> Mostrem como chegaram ao vosso resultado.

Figura 2 - Enunciado do item um da primeira tarefa

4.2.1.1. Estudo de caso um: díade Ana e Beatriz

A díade Ana e Beatriz apresentou a seguinte resolução para o item um da primeira tarefa.

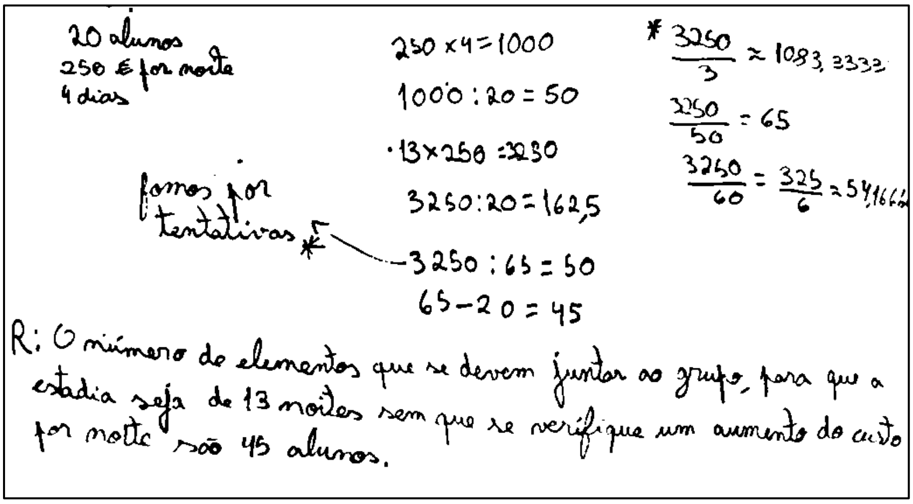


Figura 3 - Proposta de resolução da díade Ana e Beatriz para o item um da primeira tarefa

Esta díade procedeu à organização dos dados relevantes para a resolução deste item, o que permite inferir que a díade leu e compreendeu o problema.

Na fase de elaborar e executar o plano, fizeram-no de forma progressiva, isto é, foram executando alguns cálculos conforme definiam o caminho a seguir. Para tal utilizaram uma estratégia numérica e optaram por realizar tentativas até obterem a resposta.

Quando concluíram que o número de alunos era sessenta e cinco a Ana referiu que deveriam retirar os vinte que estavam inscritos inicialmente, como é visível na transcrição do áudio da aula (Anexo 11, página 138). Desta forma, obtiveram o valor de quarenta e cinco alunos que é a solução correta do primeiro item.

No que diz respeito à etapa de verificação, trocaram apenas uma breve impressão sobre o valor obtido.

Conclui-se que a díade leu e compreendeu o problema, elaborou e executou um plano recorrendo a uma estratégia numérica utilizando tentativas e validaram o resultado oralmente, sem uma verificação formal.

4.2.1.2. Estudo de caso dois: díade Carolina e Daniel

A díade Carolina e Daniel apresentou a seguinte resolução para o item um da primeira tarefa.

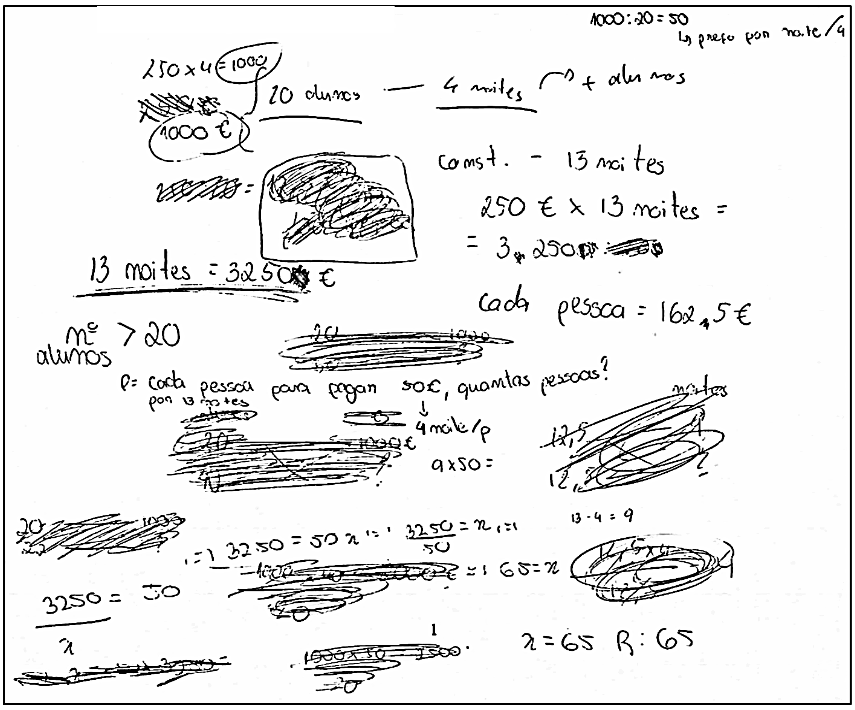


Figura 4 - Proposta de resolução da díade Carolina e Daniel para o item um da primeira tarefa

Na primeira etapa, a Carolina demonstrou dificuldade na compreensão do que o enunciado pretendia. O trabalho em grupo mostrou-se benéfico pois na gravação de áudio efetuada é possível assistir ao Daniel a explicar-lhe a questão (Anexo 11, página 140). Desta forma, é possível inferir que leram e compreenderam o enunciado.

Na etapa de execução do plano, a díade utilizou uma estratégia simbólica dado que representou o número de alunos que seria necessário irem à viagem pela variável x e escreveram a equação que traduzia o problema. A díade optou por fragmentar o problema em duas etapas de forma a tornar mais simples a resolução (analisaram o caso das 4 noites e o caso das 13 noites).

Das etapas definidas por Boavida et al (2008) ficou em falta a da verificação.

Conclui-se que a díade leu e compreendeu o problema e de seguida elaborou e executou um plano, recorrendo a uma estratégia simbólica dividiu o problema em duas etapas e não fez uma verificação do resultado obtido. A ausência desta etapa pode estar relacionada com a resposta incompleta apresentada pela díade, uma vez que não consideraram os vinte alunos já inscritos.

4.2.1.3. Estudo de caso três: díade Eugénio e Frederico

A díade Eugénio e Frederico apresentou a seguinte resolução para o item um da primeira tarefa.

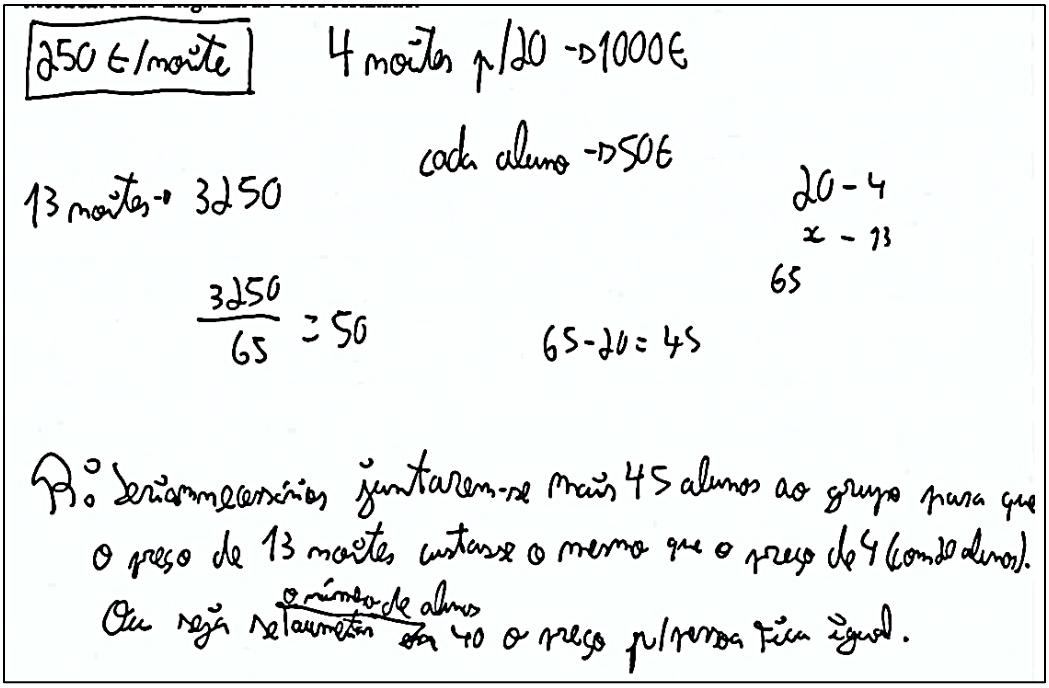


Figura 5 - Proposta de resolução da díade Eugénio e Frederico para o item um da primeira tarefa

Esta díade organizou os dados relevantes para a resolução, o que permite inferir que leu e compreendeu o problema, em particular que seriam necessários mil euros para as quatro noites.

Durante a elaboração do plano, a díade repartiu o problema em duas partes de forma a simplificar a resolução (abordaram o caso das 4 noites e o caso das 13 noites). Na etapa da execução do plano, a díade resolveu o problema utilizando uma proporção, ou seja, recorreu a uma estratégia simbólica.

No diálogo seguinte, é possível observar que a díade procedeu à verificação oral da sua resposta, concluindo que esta estava correta.

> E: Ya, então tá certo.
>
> F: Três mil duzentos e cinquenta a dividir por sessenta e cinco é igual a cinquenta. Resposta seria necessário... dá três mil duzentos e cinquenta que é o preço de treze noites, a conta deu-nos certa. Seriam necessários para juntar ao grupo.... o grupo tem vinte. Então sessenta e cinco menos vinte é igual a quarenta e cinco. Seriam necessários juntar-se ao grupo mais quarenta e cinco alunos.

Desta forma, conclui-se que esta díade leu e compreendeu, elaborou e executou um plano utilizando uma estratégia simbólica dividindo o problema em duas etapas e, por fim, verificou oralmente a resposta obtida.

4.2.2. Item dois da primeira tarefa

O segundo problema tinha como base a viagem dos finalistas até à cidade onde ficariam alojados (Figueira da Foz). Neste enunciado, era apresentada uma tabela onde constavam as velocidades médias de alguns meios de transporte, bem como a distância percorrida por cada um deles. É apresentado um diálogo entre dois alunos onde cada um expressa a sua opinião sobre o meio de transporte mais rápido para a viagem. Os alunos devem mostrar qual dos dois tem razão.

Após interpelada pelas díades, a investigadora sentiu a necessidade de explicar que o comboio alfa faria a deslocação dos alunos desde a estação do Oriente até à estação de Coimbra-B e que o percurso restante seria operado por um comboio urbano.

2. Para realizarem a viagem os alunos têm as seguintes opções: comboio ou autocarro alugado. Na tabela abaixo está a velocidade média de cada um dos meios de transporte. Sabe-se que a distância entre a estação do Oriente (ponto de encontro) e a estação de Coimbra-B é de 180 km e que a distância entre Coimbra-B e a Figueira da Foz é de 48 km. O tempo de espera entre os comboios é de uma hora.
Se a viagem for feita por um autocarro alugado, o autocarro percorre 195 km sem paragens.

Meio de transporte	Comboio alfa	Comboio urbano	Autocarro
Velocidade média	150km/h	80 km/h	75 km/h

O Duarte e o Joaquim fazem parte da organização da viagem e pensaram no seguinte:
Joaquim: O comboio atinge uma velocidade muito superior à do autocarro, com toda a certeza que é mais rápido.
Duarte: Apesar de a viagem de comboio ser mais rápida, acabamos por demorar mais tempo uma vez que teremos de contar com o tempo de espera em Coimbra-B. Ir de autocarro será o mais rápido!

Qual dos dois amigos tem razão?
Mostrem como chegaram aos vossos resultados.

Figura 6 - Enunciado do item dois da primeira tarefa

4.2.2.1. Estudo de caso um: díade Ana e Beatriz

A díade Ana e Beatriz apresentou a seguinte resolução para o item dois da primeira tarefa.

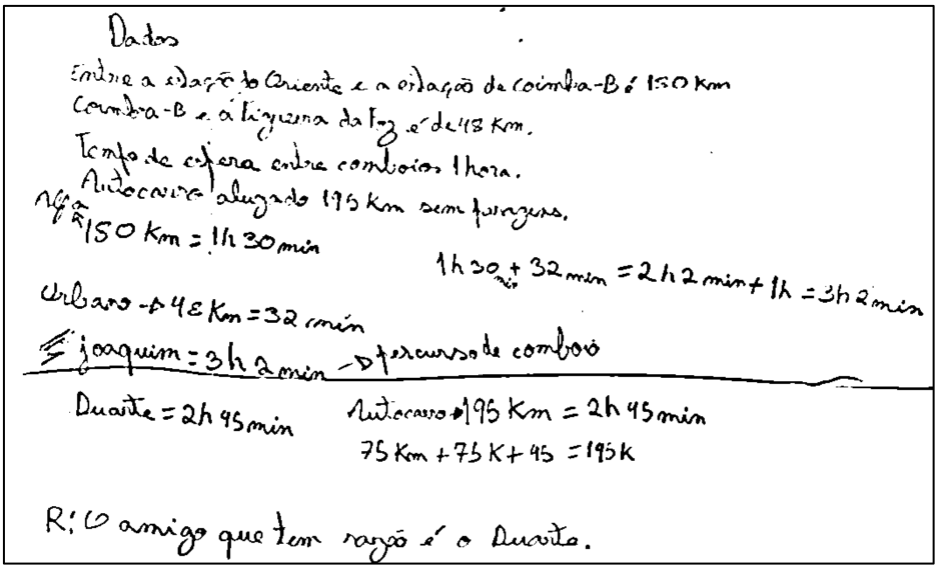

Dados
Entre a estação do Oriente e a estação de Coimbra-B é 150 Km
Coimbra-B e a Figueira da Foz é de 48 Km.
Tempo de espera entre comboios 1 hora.
Autocarro alugado 195 Km sem paragens.
Vq
150 Km = 1h 30 min
1h 30 + 32 min = 2h 2 min + 1h = 3h 2 min
Urbano → 48 Km = 32 min
Joaquim = 3h 2 min → percurso de comboio
Duarte = 2h 45 min
Autocarro → 195 Km = 2h 45 min
75 Km + 75 K + 45 = 195 K
R: O amigo que tem razão é o Duarte.

Figura 7- Proposta de resolução da díade Ana e Beatriz para o item dois da primeira tarefa

Da gravação áudio conclui-se que a díade começou por uma primeira leitura em voz alta, durante a qual escreviam os dados conforme os liam no enunciado (Anexo 11, página 147).

De forma a elaborar e executar o plano a seguir, a díade discutiu o tempo que cada um dos transportes iria demorar e chegaram à conclusão de que o Duarte tinha razão. Para tal utilizaram uma estratégia numérica e optaram por repartir o problema em duas etapas de forma a tornar a resolução mais simples (o tempo que demorava a viagem de comboio e o tempo que a viagem demorava de autocarro).

Nesta resolução, existe um erro que se interliga com a dificuldade visível no diálogo que se segue, onde subtraíram à velocidade média o número de quilómetros realizados pelo comboio e admitiram esse número como o tempo despendido na viagem.

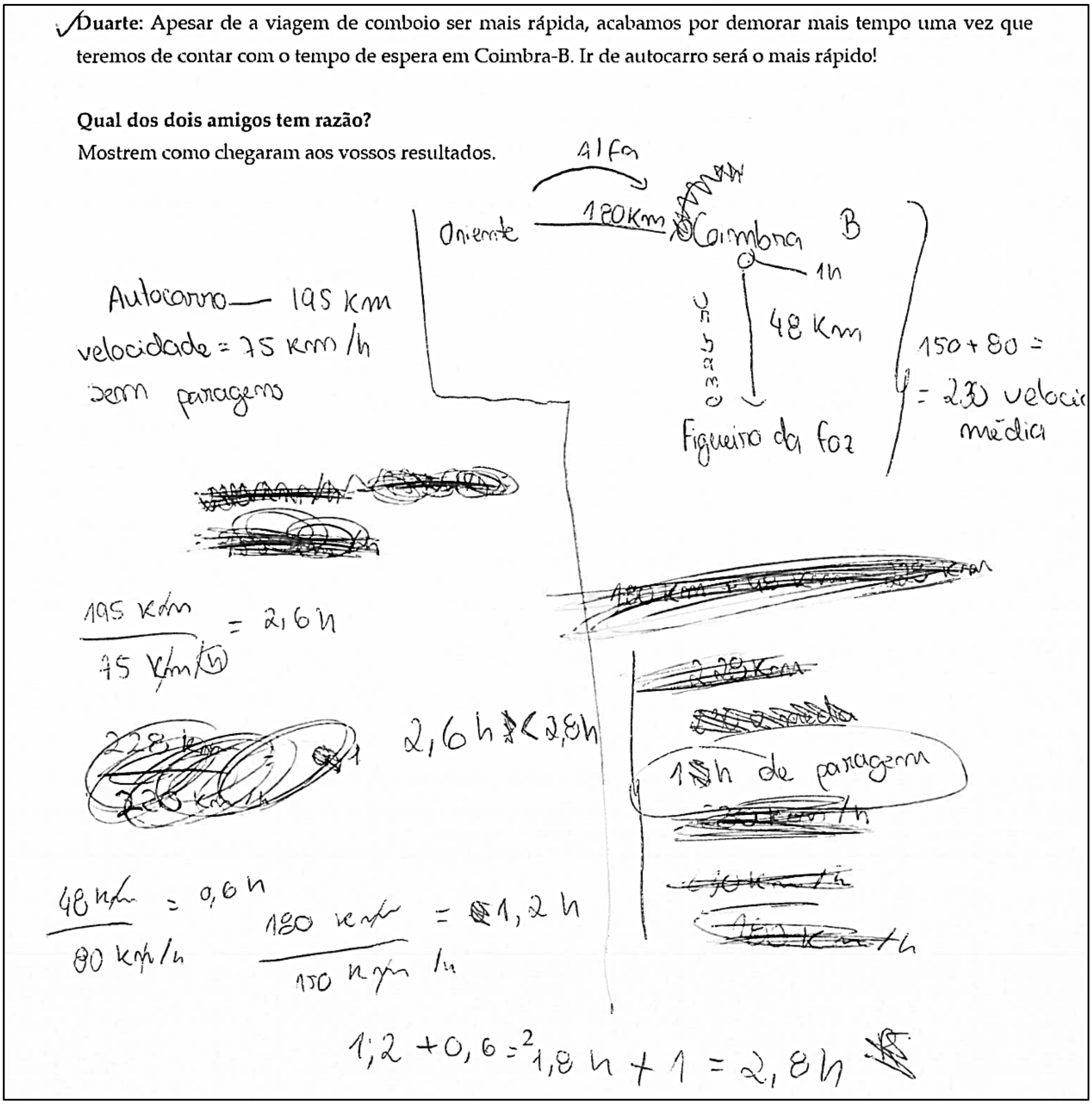
> A: Não, vamos fazer assim oitenta menos quarenta e oito que dá trinta e dois, portanto são trinta e dois minutos.
>
> B: Ya. Agora calma, temos de juntar. Uma hora e trinta mais trinta e dois minutos certo? É isso. Vai dar duas horas e dois minutos.

No que diz respeito à última fase, verificaram que o Duarte estava correto.

A resolução evidencia que a díade leu e não compreendeu o problema, elaborou e executou um plano utilizando uma estratégia numérica repartindo o problema em duas etapas. E, por fim, verificou que o Duarte tinha razão.

4.2.2.2. Estudo de caso dois: díade Carolina e Daniel

A díade Carolina e Daniel apresentou a seguinte resolução para o item dois da primeira tarefa.


Duarte: Apesar de a viagem de comboio ser mais rápida, acabamos por demorar mais tempo uma vez que teremos de contar com o tempo de espera em Coimbra-B. Ir de autocarro será o mais rápido!

Qual dos dois amigos tem razão?
Mostrem como chegaram aos vossos resultados.

Figura 8 - Proposta de resolução da díade Carolina e Daniel para o item dois da primeira tarefa

Da gravação de áudio é possível inferir que a díade leu o enunciado destacando os dados que consideravam relevantes para a resolução (Anexo 11, página 152).

Durante a elaboração e execução do plano, a díade apresentou uma estratégia numérica e fragmentou o problema em duas etapas de forma a simplificar a sua resolução, trabalhando cada um dos meios de transporte independentemente.

A díade verificou que o Duarte estava correto, como é possível observar pelo sinal que a díade realizou junto do enunciado e pelo excerto de diálogo seguinte.

> D: Ou seja, dois virgula oito ou dois virgula seis qual é que é menor? Esse. Então de autocarro é mais rápido. Logo o Duarte está certo.

Assim sendo, conclui-se que a díade leu e compreendeu o problema, elaborou e executou um plano utilizando uma estratégia numérica dividindo o problema em duas etapas. E, por fim, verificaram que o Duarte era o aluno com razão.

4.2.2.3. Estudo de caso três: díade Eugénio e Frederico

A díade Eugénio e Frederico apresentou a seguinte resolução para o item dois da primeira tarefa.

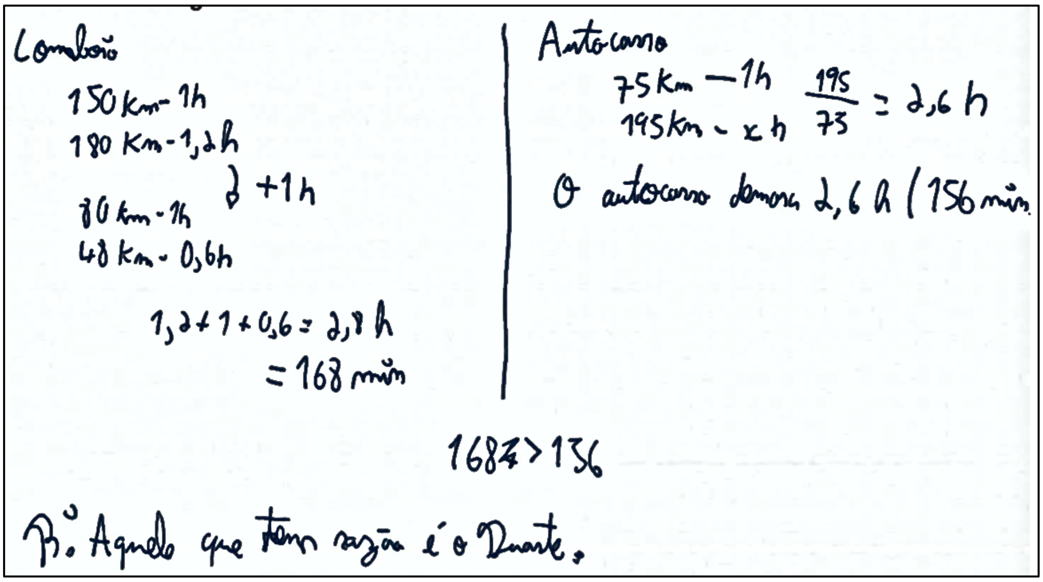


Figura 9 - Proposta de resolução da díade Eugénio e Frederico para o item dois da primeira tarefa

Esta díade iniciou a resolução com a leitura e compreensão do problema.

Na fase de elaboração e execução do plano, a díade obteve o tempo que seria necessário para a viagem de autocarro utilizando uma estratégia simbólica, uma vez que utilizaram uma proporção. Posteriormente, converteram o resultado obtido para minutos de forma a tornar mais simples a comparação final. De seguida, a díade interpelou a investigadora para perceberem como deviam proceder ao cálculo do tempo para a viagem de comboio. Após um pequeno debate entre a díade e a investigadora, mostraram-se capazes de apresentar uma estratégia idêntica ao que fizeram para o autocarro, mas desta vez para a viagem de comboio. Assim, infere-se que repartiram o problema em duas etapas.

Para finalizar, a díade realizou uma verificação formal uma vez que apresentam uma desigualdade que comprova a resposta dada ao problema.

Em síntese infere-se que esta díade leu e compreendeu o problema, apresentou uma estratégia numérica na sua resolução dividindo o problema em duas etapas e a desigualdade escrita no final permite concluir que verificaram que o Duarte tinha razão, ou seja, realizaram a verificação do resultado obtido.

4.2.3. Item três da primeira tarefa

Seguindo com o tema da viagem de finalistas, o último problema fazia referência às refeições dos alunos. No enunciado eram fornecidos os seguintes dados: os sessenta e cinco alunos sentar-se-iam em mesas de cinco lugares e cada empregado demoraria oito minutos a servir cada uma das mesas. O objetivo do problema era calcular o número de empregados necessários para servir todos os alunos num tempo de vinte e seis minutos.

3. Durante a estadia, os alunos decidiram fazer as suas refeições na quinta. O restaurante da quinta tem mesas de 5 pessoas. Os 65 alunos demoram 20 minutos até estarem todos sentados e a escolher a sua refeição.
Após isso os empregados dirigem-se às mesas. Cada empregado demora 8 minutos por mesa a anotar os pedidos e a trazê-los para os alunos.
O número de empregados da quinta permitiu servir todos os alunos (anotar os pedidos e trazê-los para as respetivas mesas) em 26 minutos.
Quantos empregados tinha o restaurante da quinta?
Mostrem como chegaram aos vossos resultados.

Figura 10 - Enunciado do item três da primeira tarefa

4.2.3.1. Estudo de caso um: díade Ana e Beatriz

A díade Ana e Beatriz apresentou a seguinte resolução para o item três da primeira tarefa.

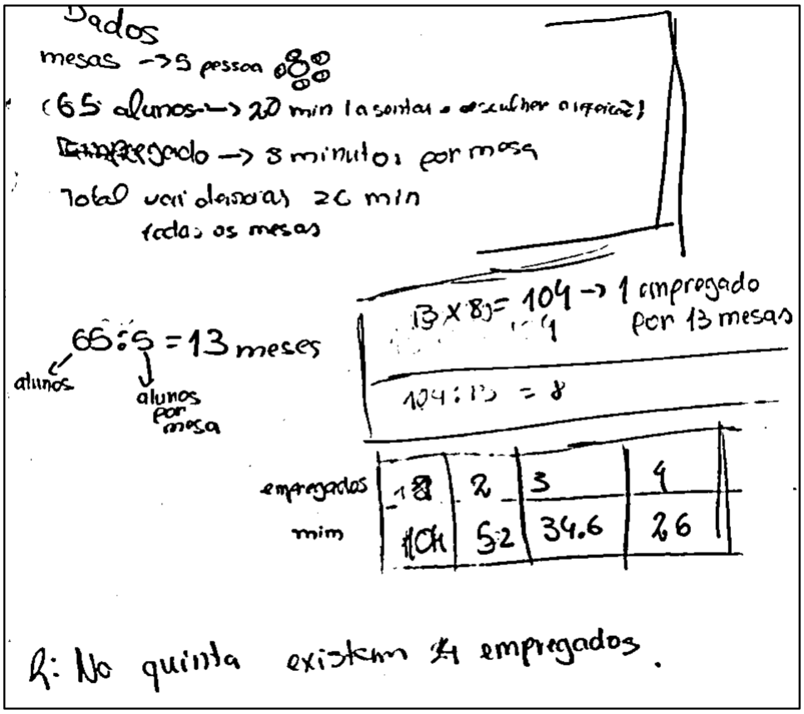


Figura 11 - Proposta de resolução da díade Ana e Beatriz para o item três da primeira tarefa

A organização dos dados permite inferir que a díade leu e compreendeu o problema. Como é visível na figura 8, a díade utilizou um esquema para representar as mesas que eram referidas no enunciado.

Durante a etapa de elaboração e execução do plano a díade procedeu várias vezes à leitura de partes do enunciado, como é possível concluir da gravação de áudio (Anexo 11, página 156). A díade utilizou uma estratégia numérica e optou por dividir o problema em etapas: o cálculo do número de mesas necessárias para sentar os sessenta e cinco alunos e o tempo que um empregado demoraria a servir todos os alunos. Posteriormente, a díade interpelou a investigadora sobre a etapa seguinte e esta devolveu-lhes a questão de quanto tempo é que seria necessário para que dois empregados realizassem todo o serviço. Ao que prontamente responderam que teriam de dividir os cento e quatro, minutos por dois.

Em síntese, a díade leu e compreendeu o problema, elaborou e executou um plano repartindo o problema em duas etapas, utilizou uma estratégia numérica para determinar o número de mesas e o tempo que um empregado demoraria a servir todas as mesas. Não apresentaram qualquer verificação.

4.2.3.2. Estudo de caso dois: díade Carolina e Daniel

Esta díade apresentou duas resoluções diferentes para este item, segue-se primeiro a resolução da Carolina e em seguida a do Daniel.

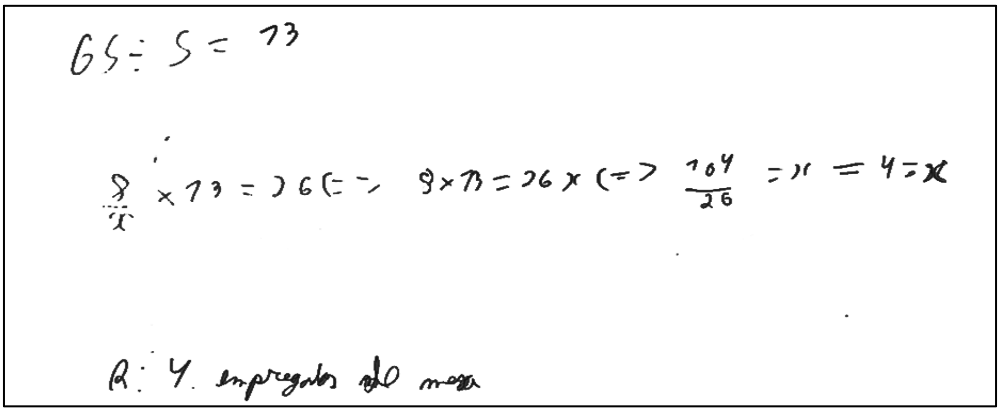


Figura 12 - Proposta de resolução do Daniel para o item três da primeira tarefa

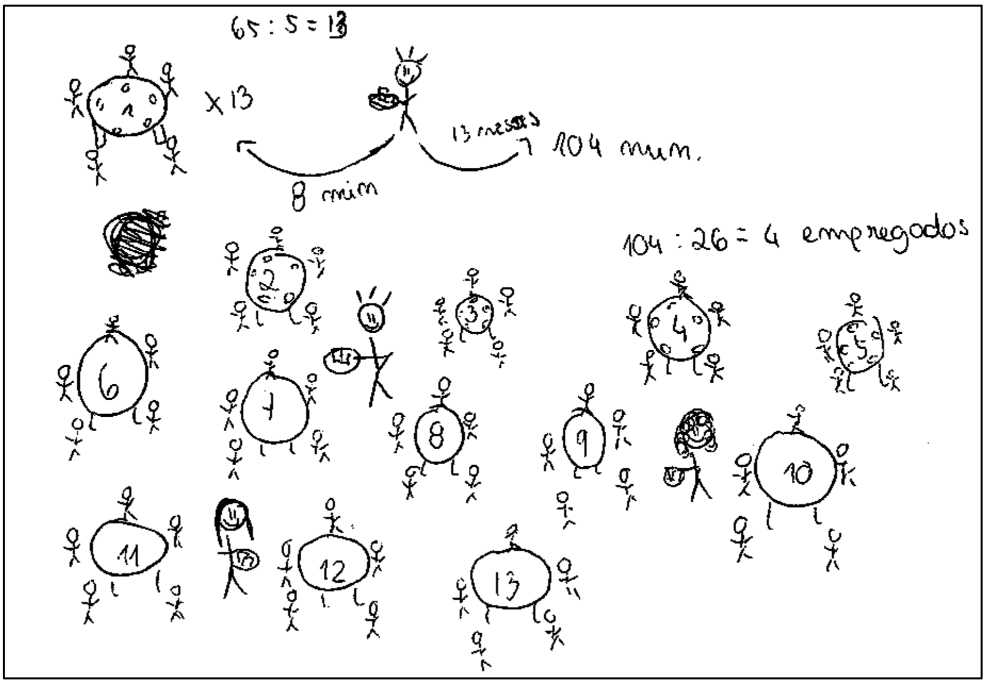


Figura 13 - Proposta de resolução da Carolina para o item três da primeira tarefa

A díade iniciou a resolução do problema com a leitura em conjunto do enunciado. Prontamente, a Carolina sugeriu elaborarem um esquema do problema, contudo o Daniel não concordou e continuou a realizar os seus cálculos de forma independente. Desta forma, a etapa de elaborar e executar um plano revelou-se distinta para cada elemento da díade.

Por um lado, o Daniel na sua resolução utiliza exclusivamente uma estratégia simbólica dado que optou pela utilização de equações. O Daniel optou por repartir o problema em duas etapas: primeiro descobriu quantas mesas de cinco lugares seriam necessárias para sentar os sessenta e cinto alunos e depois respondeu à questão de quantos empregados seriam necessários para que todas as mesas fossem servidas em vinte e seis minutos.

Por outro lado, a Carolina utilizou uma estratégia mista, apresentando um esquema da sala de refeições (icónica) e alguns cálculos complementares (numérica). A Carolina optou por realizar uma simulação do problema com base no seu esquema.

Apesar das estratégias adotadas serem distintas, o grupo continuou a discutir os resultados que foram obtendo.

No final das duas resoluções, ambos obtiveram o valor correto para a resposta verificando assim o mesmo.

Em síntese, a díade leu e compreendeu o problema. Na etapa de elaboração e execução de um plano, a Carolina utilizou uma estratégia mista realizando uma simulação do problema, enquanto o Daniel utilizou uma estratégia simbólica repartindo o problema em etapas. Por fim, verificaram que a solução obtida estava correta.

4.2.3.3. Estudo de caso três: díade Eugénio e Frederico

A díade Eugénio e Frederico apresentou a seguinte resolução para o item três da primeira tarefa.

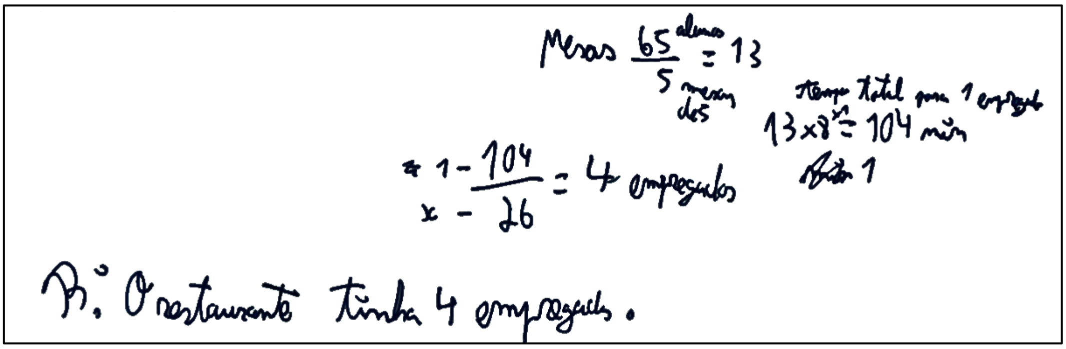


Figura 14 - Proposta de resolução da díade Eugénio e Frederico para o item três da primeira tarefa

Na etapa de leitura e compreensão do problema, a díade não apresentou dificuldades seguindo para a elaboração e execução de um plano. Nesta fase, a dupla ponderou a utilização da estratégia de tentativa erro com o qual obtiveram o valor pretendido, como é possível verificar na transcrição do áudio da aula (Anexo 11, página 161). Apesar de terem alcançado uma solução, não obtiveram consenso para apresentarem um resultado proveniente de uma estratégia de tentativa erro. Consequentemente, estabeleceram outro plano onde utilizaram uma razão de proporção, ou seja, utilizando uma estratégia simbólica. Esta díade repartiu o problema em três etapas: primeiro determinaram o número de mesas necessárias, determinaram quanto demoraria um empregado a servir todas as mesas e, verificaram o número de empregados necessários para servir os alunos em vinte e seis minutos.

No que diz respeito à etapa de verificação, esta ficou concluída, uma vez que obtiveram o mesmo resultado por via de duas estratégias de resolução distintas.

Para a resolução deste problema a díade leu e compreendeu o problema e optou por utilizar uma estratégia simbólica repartindo o problema em três etapas. Por fim, a díade verificou formalmente o resultado obtido.

4.2.4. Considerações finais

Durante a resolução do primeiro item, as díades Ana e Beatriz e Eugénio e Frederico não apresentaram dificuldades na leitura e compreensão. A díade Carolina e Daniel, que revelou dificuldades, conseguiu superá-las através do diálogo entre o grupo. A díade Ana e Beatriz elaborou um plano a seguir constituído por uma estratégia numérica em que, através da realização de tentativas, chegaram ao resultado pretendido. No que diz respeito à etapa de verificação, a díade realizou um breve diálogo tendo concluído que a resposta estaria correta. A díade Carolina e Daniel na elaboração do percurso a seguir optou por fragmentar o problema e utilizaram uma estratégia simbólica. Esta díade não realizou a verificação do problema o que pode estar interligado com o facto de não obter o resultado pretendido. A díade Eugénio e Frederico também fragmentou o problema e utilizou uma estratégia simbólica. Para terminar, esta dupla realizou a verificação do seu resultado tendo concluído que estava correto.

Na resolução do segundo item, as díades apresentaram dificuldades em entender como se procedia a viagem de comboio tendo em conta que existia um transbordo. A primeira díade optou por uma estratégia de cariz numérico e procederam através da fragmentação do problema inicial em problemas mais simples. A segunda díade apresentou uma estratégia numérica e procedeu através da fragmentação do problema inicial. A terceira díade utilizou uma estratégia simbólica e também fragmentou o problema. Todas as díades nomearam o aluno com raciocínio correto, desta forma procederam à verificação.

Na resolução do terceiro item, nenhum dos grupos apresentou dificuldades na primeira etapa, a de leitura e compreensão do problema. No que diz respeito à etapa de elaboração e execução do plano, as díades apresentaram estratégias distintas. Por um lado, a primeira díade repartiu o problema inicial em duas etapas mais simples e utilizou uma estratégia numérica. A segunda díade, apresentou algumas divergências nas estratégias a utilizar: a Carolina optou por uma estratégia mista (icónica e numérica) de forma a simular o problema em questão; o Daniel optou por uma estratégia simbólica e repartiu o seu problema em duas partes de forma a tornar a resolução mais simples. O terceiro grupo, seguiu o mesmo raciocínio que o Daniel, repartiu o problema inicial em etapas mais simples e utilizou uma estratégia simbólica. No que diz respeito à etapa de verificação, apenas os dois últimos grupos a realizaram. Por um lado, o segundo grupo resolveu o problema com duas estratégias diferentes chegando ao mesmo resultado, desta forma verificaram que o mesmo se encontrava correto. Por outro lado, a última díade resolveu o problema utilizando cálculos e utilizou a estratégia de tentativa erro para confirmar o valor obtido.

4.3. Formulação de problemas

Na tarefa proposta aos alunos existiram três situações: livres, semiestruturadas e estruturadas (Stoyanova, 1998).

As produções da tarefa 2 das díades, sobre a formulação de problemas envolvendo a proporcionalidade inversa, serão analisadas de acordo com as etapas: formular, resolver e melhorar (Ramírez, 2006).

As estratégias utilizadas nas formulações serão caracterizadas de acordo com as seguintes cinco denominações: aceitar os dados, e se em vez de, variação de um problema, de problema para problema e recontextualização (Vale & Pimentel, 2004).

4.3.1. Formulação do problema 1

Para a primeira proposta de formulação de problema, foi entregue às díades um enunciado onde já constava um problema devidamente formulado de forma que o utilizassem como base para a formulação do seu problema.

A cada díade foi proposta a resolução do problema apresentado, a formulação de um novo problema e a resolução do mesmo. Desta forma, depararam-se com uma situação estruturada.

A análise da resolução do problema será breve, uma vez que o objetivo desta tarefa se foca na formulação de problemas.

1. Leia atentamente o problema:

A direção da escola decidiu organizar uma visita de estudo a um parque aventura com o objetivo de premiar os alunos pelas suas excelentes notas. Para alugar o parque aventura e o transporte até ao mesmo, a escola pagou 1450€. *Este valor será dividido por todos os alunos. O Duarte só pode ir à viagem se o valor for 25 euros. Quantos alunos terão de se inscrever para que o Duarte consiga ir à viagem?*

A partir do enunciado acima, formulem um novo problema.
Apresentem uma proposta de resolução para ambos os problemas.

Figura 15 - Enunciado do item um da segunda tarefa

4.3.1.1. Estudo de caso um: díade Ana e Beatriz

A díade Ana e Beatriz apresentou a seguinte resolução para o primeiro item da segunda tarefa.

Dados:
pagaram 1450€ → do transporte e a estadia
O Duarte só vai à viagem se o valor for 25 euros

$\frac{1450}{58} = 25$, fomos por tentativas.

R: Tem de ir 58 pessoas ao passeio, para que o Duarte possa ir.

Figura 16 - Proposta de resolução da díade Ana e Beatriz para o item um da segunda tarefa

Durante a resolução do problema é possível inferir que a díade leu e compreendeu o problema e elaborou e executou um plano com recurso a uma estratégia numérica. A díade não apresentou qualquer verificação do resultado.

A díade Ana e Beatriz apresentou a seguinte formulação para o primeiro item da segunda tarefa.

1- E se o valor da Viagem fosse 2000 €, quantas pessoas eram necessárias para que cada um só paga-se 20€?

$\frac{2000}{100} = 20$, tentativa erro.

Figura 17 - Proposta de formulação da díade Ana e Beatriz para o item um da segunda tarefa

Em relação à formulação de um novo problema, a díade demonstrou algumas dificuldades. Por esse motivo, levaram algum tempo a decidir o caminho a seguir para elaborarem a formulação visível na imagem acima. Após algum diálogo com a investigadora, a díade optou por alterar um dos valores presentes no enunciado de forma a criar um novo problema, ainda que bastante similar ao anterior.

Assim, na etapa de formulação a díade utilizou uma estratégia "de problema para problema" dado que alteraram uma das condições do problema inicial, neste caso o custo total da viagem.

A díade apresentou uma resolução para o problema, mas não conseguiu melhorar o problema proposto.

Em síntese, esta díade formulou o problema utilizando uma estratégia "de problema para problema", resolveu-o, mas não melhorou o seu enunciado.

4.3.1.2. Estudo de caso dois: díade Carolina e Daniel

A díade Carolina e Daniel apresentou a seguinte resolução para o item um da segunda tarefa.

$$\frac{1450}{x} = 25 \Leftrightarrow 1450 = 25x \Leftrightarrow \frac{1450}{25} = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 58 = x$$

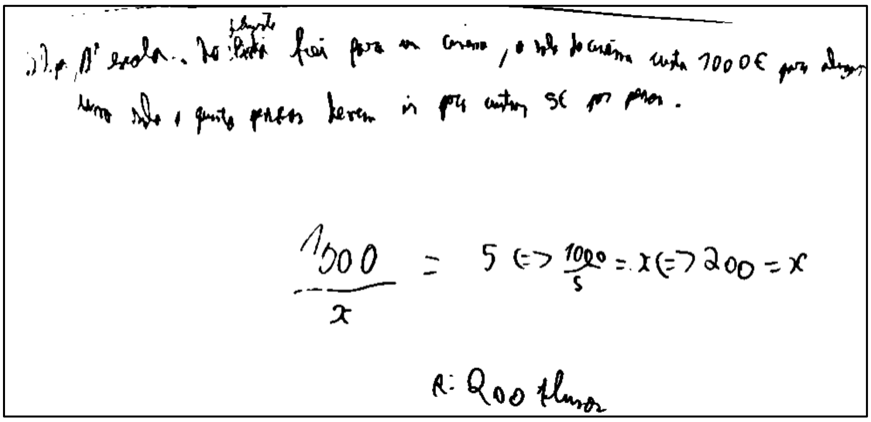
Figura 18 - Proposta de resolução da díade Carolina e Daniel para o item um da segunda tarefa

Na resolução do problema apresentado, a díade leu e compreendeu o problema e elaborou e executou um plano utilizando uma estratégia simbólica dado que utilizaram uma proporção. De forma a finalizar as etapas da resolução de problemas ficou em falta a verificação.

No que diz respeito à segunda parte do enunciado, a díade Carolina e Daniel apresentou as seguintes formulações para o primeiro enunciado da segunda tarefa.

P: A Beatriz queria comprar um nº de aparelhos eletrónicos. O total deu 145€ Cada aparelho custa 50€. Quantos aparelhos é que ela comprou?

Figura 19 - Proposta de formulação da Carolina para o item um da segunda tarefa



$$\frac{1000}{x} = 5 \Leftrightarrow \frac{1000}{5} = x \Leftrightarrow 200 = x$$

R: 200 alunos

Figura 20 - Proposta de formulação do Daniel para o item um da segunda tarefa

A díade demonstrou algumas divergências na interpretação do enunciado, o que levou a que cada um formulasse um problema distinto.

Por um lado, a Carolina formulou utilizando a recontextualização do problema, isto é, a partir dos dados disponibilizados criou um novo contexto. No problema formulado, fez referência a aparelhos eletrónicos.

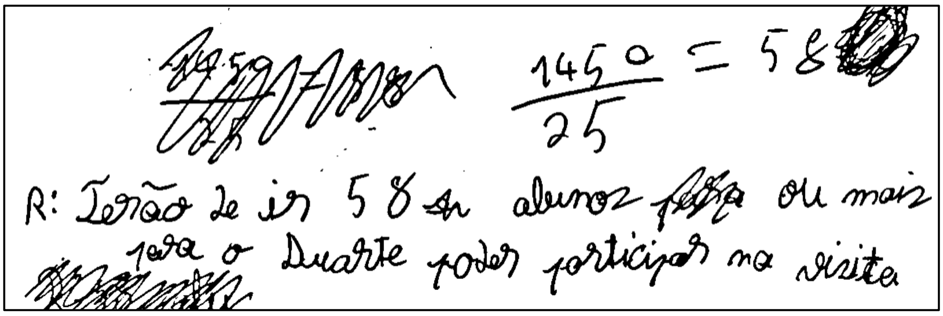
Por outro lado, o Daniel formulou utilizando uma estratégia de variar um problema. A partir do enunciado disponibilizado, o aluno obteve a sua formulação (transcrição do problema formulado pelo Daniel: "Depois, a escola do Duarte foi para um cinema, a sala de cinema custa 1000€ para alugar uma sala, quantas pessoas devem ir para custar 5€ por pessoa.").

No que diz respeito às etapas da formulação de problemas, o Daniel formulou e resolveu o seu problema enquanto a Carolina apenas formulou.

Em síntese, os dois elementos da díade formularam, mas apenas um elemento resolveu o seu problema. A díade não apresentou melhorias no seu problema.

4.3.1.3. Estudo de caso três: díade Eugénio e Frederico

A díade Eugénio e Frederico apresentou a seguinte resolução para o primeiro item, da segunda tarefa.

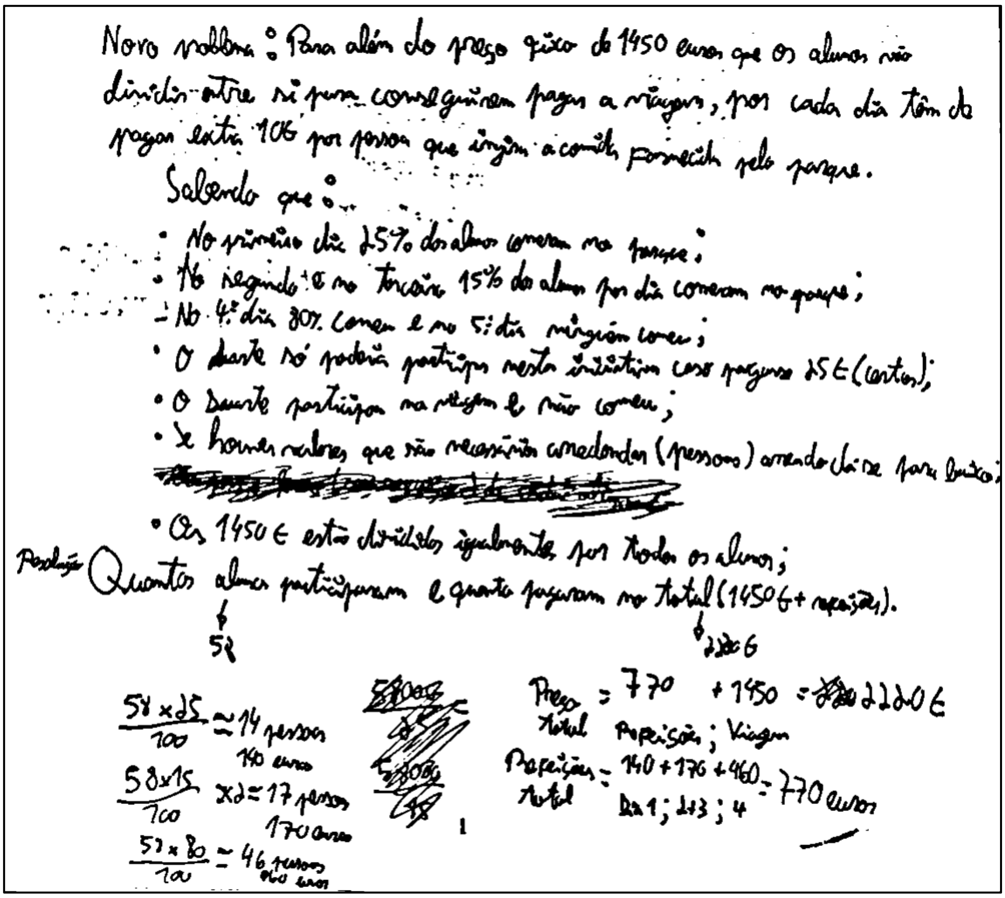

$\frac{1450}{25} = 58$

R: Terão de ir 58 alunos ou mais para o Duarte poder participar na visita

Figura 21 - Proposta de resolução da díade Eugénio e Frederico para o item um da segunda tarefa

Para a resolução do problema, a díade leu e compreendeu o problema e elaborou e executou um plano utilizando uma estratégia numérica. De forma a terminar as etapas da resolução de problemas, ficou em falta a verificação do resultado obtido.

A díade Eugénio e Frederico apresentou a seguinte formulação para o primeiro item da segunda tarefa.


Novo problema: Para além do preço fixo de 1450 euros que os alunos vão dividir entre si para conseguirem pagar a viagem, por cada dia têm de pagar extra 10€ por pessoa que ingira a comida fornecida pelo parque.

Salbendo que:

- No primeiro dia 25% dos alunos comeram no parque;
- No segundo e no terceiro 15% dos alunos por dia comeram no parque;
- No 4.º dia 80% comeu e no 5.º dia ninguém comeu;
- O Duarte só poderia participar nesta iniciativa caso pagasse 25€ (certos);
- O Duarte participou na viagem e não comeu;
- Se houver valores que são necessários arredondar (pessoas) arredonda-se para baixo;
- Os 1450€ estão divididos igualmente por todos os alunos;

Perdução: Quantos alunos participaram e quanto pagaram no total (1450€ + refeições).

58

2220€

$\frac{58 \times 25}{100} \simeq 14$ pessoas
140 euros

$\frac{58 \times 15}{100}$ x2 = 17 pessoas
170 euros

$\frac{58 \times 80}{100} = 46$ pessoas
460 euros

Preço Total = 770 + 1450 = 2220€
Refeições; Viagem

Refeições Total = 140 + 170 + 460 = 770 euros
Dia 1; 2+3; 4

Figura 22 - Proposta de formulação da díade Eugénio e Frederico para o item um da segunda tarefa

Para dar início à etapa de formulação, a díade começou por discutir quais as alterações que pretendiam realizar ao problema inicial. A díade discutiu quais as possíveis situações que poderiam colocar dentro do contexto do problema para que a sua formulação ficasse enriquecida. Durante a elaboração e resolução do seu problema, a díade realizou algumas melhorias como é visível na transcrição de áudio (Anexo 12, página 171) e optou por utilizar um caso particular da estratégia de variação de um problema: a estratégia de problema para problema, dado que particularizaram o problema inicial alterando algumas das condições do mesmo.

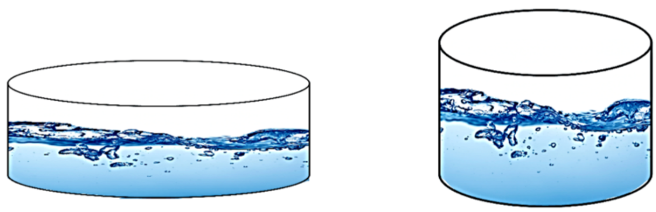
Para finalizar a díade resolveu o problema e verificou que não seriam necessárias melhorias.

Em síntese, a díade formulou um problema utilizando uma estratégia "de problema para problema", resolveu-o e realizou as melhorias necessárias.

4.3.2. Item dois da segunda tarefa

No segundo item, era apresentada uma figura com dois cilindros com indicação da altura, do raio da base e do volume (comum aos dois cilindros). Desta forma, as díades estavam perante uma situação semiestruturada.

2. Com base nas figuras abaixo, **formulem um problema** que possa ser resolvido com uma função proporcionalidade inversa, sabendo que a constante é o volume dos cilindros.
Apresentem uma proposta de resolução para o vosso problema.



- $altura = 4$
- $raio\ da\ base = 7$
- $Volume = 196\pi$

- $altura = 7$
- $raio\ da\ base = \sqrt{28}$
- $Volume = 196\pi$

Figura 23 - Enunciado do item dois da segunda tarefa

4.3.2.1. Estudo de caso um: díade Ana e Beatriz

A díade Ana e Beatriz apresentou a seguinte formulação para o segundo item da segunda tarefa.

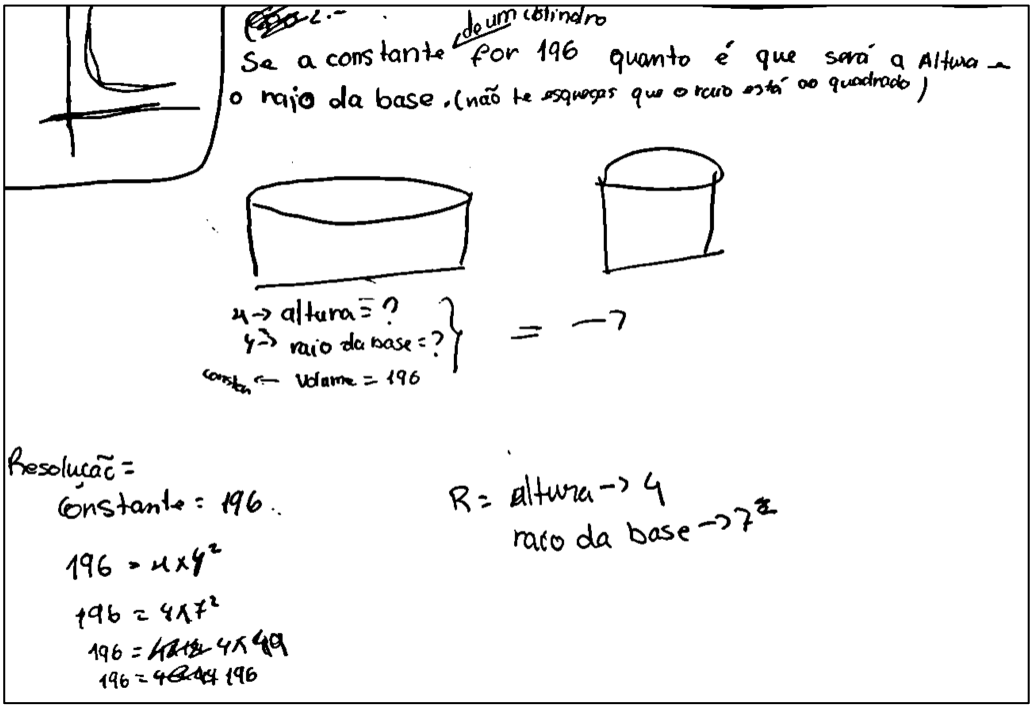


Figura 24 - Proposta de formulação da díade Ana e Beatriz para o item dois da segunda tarefa

No sentido de iniciar a formulação do problema e após uma discussão entre a díade, as alunas sentiram a necessidade de interpelar a investigadora com o intuito de esclarecer o significado de formular um problema. Com este diálogo a díade percebeu que existia uma lacuna na resolução do primeiro exercício.

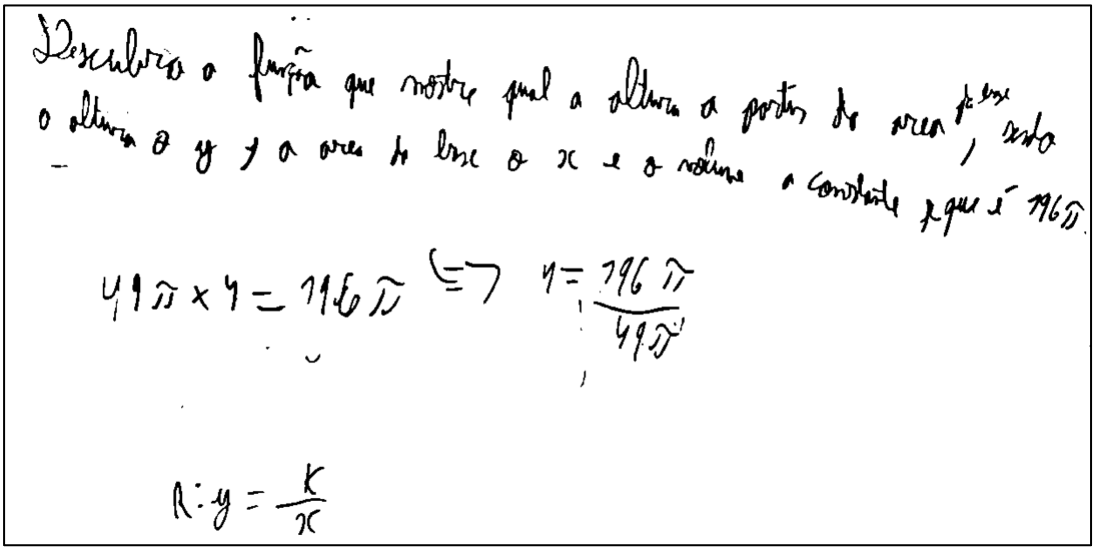
A formulação apresentada não tem questão. Apesar disso, a díade apresentou uma proposta de resolução para o problema. Para a formulação deste problema a díade utilizou uma estratégia de aceitar os dados e formulou um problema onde a constante era o volume do cilindro.

A díade não apresentou melhorias ao seu resultado.

Em síntese, a díade percorreu duas das etapas da formulação de problemas a formulação (utilizando a estratégia de aceitar os dados) e a resolução. No entanto não apresentou melhorias ao problema que propôs.

4.3.2.2. Estudo de caso dois: díade Carolina e Daniel

A díade Carolina e Daniel apresentou novamente duas formulações para o item dois da segunda tarefa, como é possível observar de seguida.


Descubra a função que mostra qual a altura a partir da área da base, sendo a altura a y, a área da base o x e o volume a constante k que é 196π.

$$49\pi \times 4 = 196\pi \Leftrightarrow 4 = \frac{196\pi}{49\pi}$$

$$R: y = \frac{k}{x}$$

Figura 25 - Proposta de formulação do Daniel para o item dois da segunda tarefa

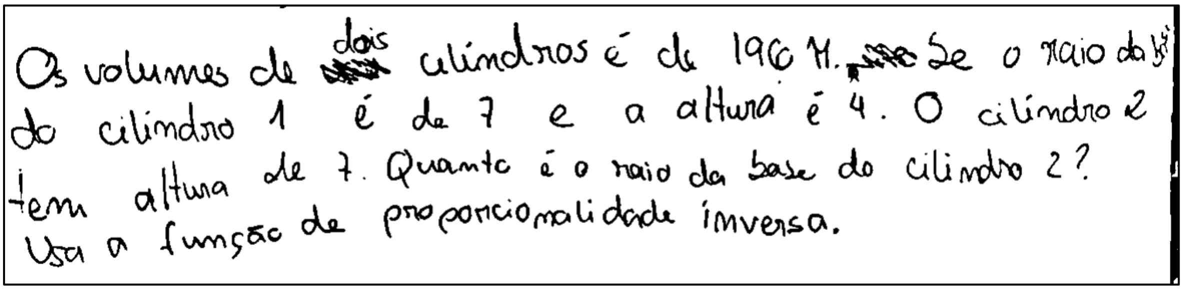

Os volumes de dois cilindros é de 196π. Se o raio da base do cilindro 1 é de 7 e a altura é 4. O cilindro 2 tem altura de 7. Quanto é o raio da base do cilindro 2? Usa a função de proporcionalidade inversa.

Figura 26 - Proposta de formulação da Carolina para o item dois da segunda tarefa

Para a formulação deste problema, a díade optou por aceitar os dados e, a partir das figuras apresentadas, formulou o problema.

Durante esta formulação não existiu diálogo significativo entre a díade o que levou a que, novamente, apresentassem dois problemas distintos.

Por um lado, a Carolina formulou um problema em que o objetivo era calcular o raio da base do cilindro tendo a altura e o volume. Após a formulação não resolveu o seu problema e não exibiu qualquer melhoria ao problema formulado.

Por outro lado, o Daniel apresentou um problema cujo objetivo é determinar a expressão de uma função de proporcionalidade inversa. O Daniel apresentou uma proposta de resolução para o mesmo, mas não exibiu qualquer melhoria ao problema formulado.

Em síntese, ambos os elementos da díade formularam problemas utilizando uma estratégia de aceitar os dados, mas apenas o Daniel apresentou a resolução do seu problema. No que diz respeito à etapa de melhorar o problema, nenhum dos elementos a executou.

4.3.2.3. Estudo de caso três: díade Eugénio e Frederico

A díade Eugénio e Frederico apresentou a seguinte formulação para o item dois da segunda tarefa.

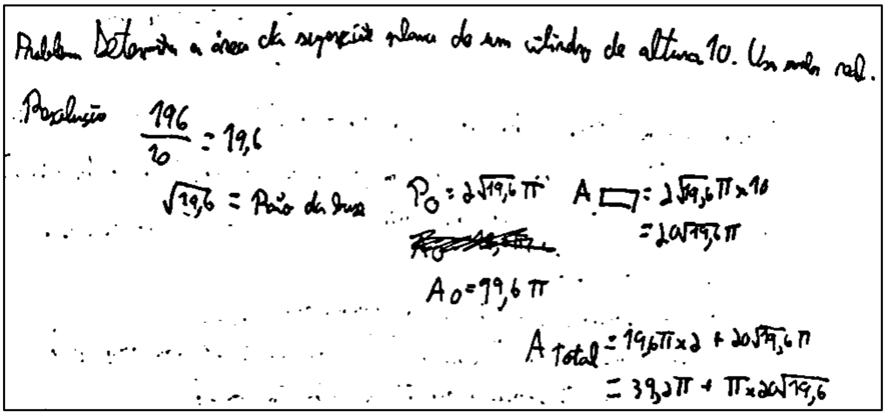


Figura 27 - Proposta de formulação da díade Eugénio e Frederico para o item dois da segunda tarefa

Dado o tempo dispensado para a formulação do primeiro problema, a díade mostrou-se bastante decidida na formulação e resolução do problema apresentado, como é visível na transcrição do áudio (Anexo 12, página 175). No problema formulado pela díade, o termo "superfície plana de um cilindro" refere-se à área da superfície do cilindro composta por dois círculos e um retângulo. Como estratégia para a formulação deste problema a díade aceitou os dados pois a partir das figuras disponibilizadas formularam o seu problema.

De forma a concretizar as três etapas da formulação de problemas, ficou em falta melhorar o problema.

Em síntese, esta díade formulou e resolveu o problema ficando em falta a etapa correspondente à melhoria do problema. Para a formulação a díade utilizou uma estratégia de aceitar os dados.

4.3.3. Item três da segunda tarefa

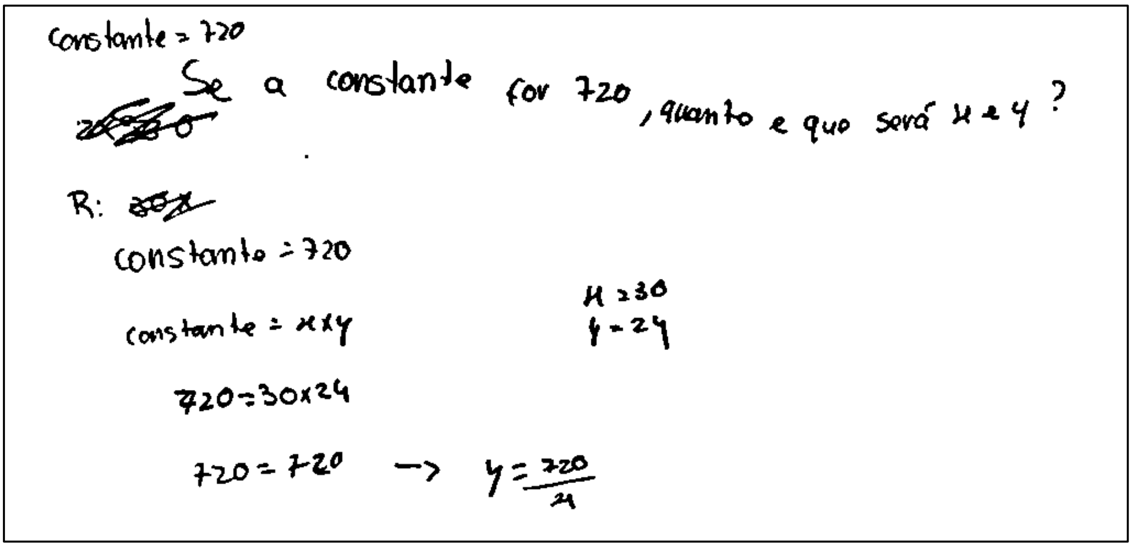
O último item desta tarefa apresentou uma situação livre, uma vez que, apenas estava a expressão designatória de uma função de proporcionalidade inversa.

> 3. **Formulem um problema** que possa ser traduzido matematicamente pela seguinte expressão:
>
> $$y = \frac{720}{x}$$
>
> Definam o significado de x, y e do 720 no contexto do vosso problema.
>
> **Apresentem uma proposta de resolução para o vosso problema.**

Figura 28 – Enunciado do item três da segunda tarefa

4.3.3.1. Estudo de caso um: díade Ana e Beatriz

A díade Ana e Beatriz apresentou a seguinte resolução para o item três da segunda tarefa.


Constante = 720

Se a constante for 720, quanto e quo será x e y?

R:

constante = 720

constante = x × y

720 = 30 × 24

720 = 720 → $y = \frac{720}{24}$

x = 30

y = 24

Figura 29 - Proposta de formulação da díade Ana e Beatriz para o item três da segunda tarefa

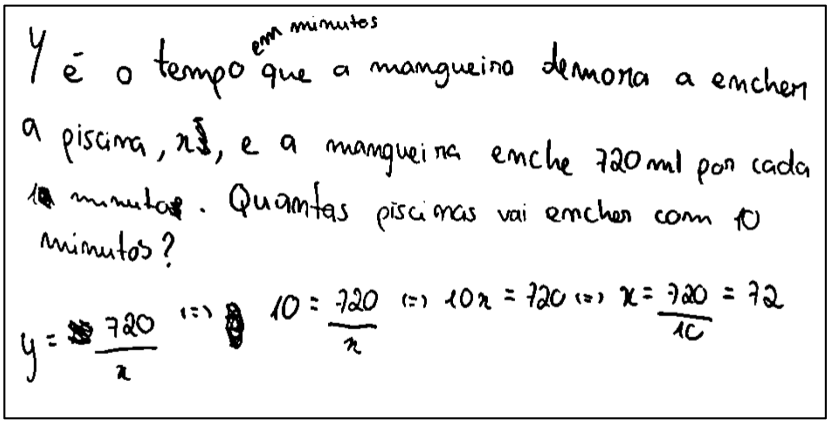
Para a formulação deste problema, a díade utilizou uma estratégia de aceitar os dados. Como já se refletiu na formulação do problema anterior, a díade não criou um contexto sobre o qual o problema se iria desenvolver. Apesar disso, a díade resolveu o problema que apresentou.

Das etapas da formulação de problemas, a díade não melhorou o seu enunciado.

Em síntese, a díade formulou o seu problema utilizando uma estratégica de aceitar os dados e resolveu-o, mas não apresentou qualquer melhoria ao seu enunciado.

4.3.3.2. Estudo de caso dois: díade Carolina e Daniel

A díade Carolina e Daniel apresentou a seguinte resolução para o item três da segunda tarefa.



y é o tempo em minutos que a mangueira demora a encher a piscina, x, e a mangueira enche 720 ml por cada 10 minutos. Quantas piscinas vai encher com 10 minutos?

$y = \frac{720}{x} \Leftrightarrow 10 = \frac{720}{x} \Leftrightarrow 10x = 720 \Leftrightarrow x = \frac{720}{10} = 72$

Figura 30 - Proposta de formulação da díade Carolina e Daniel para o item três da segunda tarefa

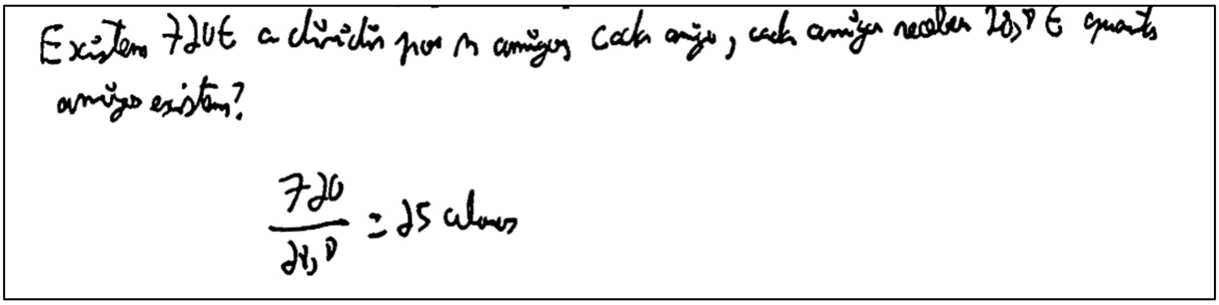
No momento da formulação, esta díade tentou recriar um exercício que surgiu num momento de avaliação. Assim, a díade formulou e resolveu o seu problema corretamente.

Contrariando a postura que esta díade revelou ao longo da tarefa, na formulação do último problema trabalharam em conjunto e apresentaram o mesmo problema. Para estratégia de formulação, optaram por aceitar os dados e criar um contexto em que o problema se inserisse. Não foi efetuada qualquer melhoria ao problema.

Sintetizando, a díade formulou o problema utilizando a estratégia de aceitar os dados e, por fim, resolveu-o. Não apresentou melhorias ao enunciado que propuseram.

4.3.3.3. Estudo de caso três: díade Eugénio e Frederico

A díade Eugénio e Frederico apresentou a seguinte resolução para o item três da segunda tarefa.



Existem 720€ a dividir por n amigos cada amigo, cada amigo recebe 28,8 € quantos amigos existem?

$\frac{720}{28,8} = 25$ alunos

Figura 31 - Proposta de formulação da díade Eugénio e Frederico para o item três da segunda tarefa

A díade não apresentou uma discussão relevante durante a formulação do seu problema. Consequentemente, limitaram-se a aceitar os dados e contextualizaram o seu problema com a divisão de uma quantia de dinheiro por um grupo de amigos.

Esta díade resolveu o seu problema e verificou que o número de amigos pelo qual se distribuía a quantia deveria ser um número natural pelo facto de não fazer sentido, num contexto real, afirmar que iriam dividir a quantia de dinheiro por meia pessoa. Assim sendo, no fim de formularem o problema, realizaram a melhoria de garantir que o número de amigos fosse representado por um número natural (neste caso vinte e cinco amigos).

Em síntese, a díade formulou o problema tendo por base a estratégia de aceitar os dados, resolveu-o e melhorou-o.

4.3.4. Considerações finais

Para a formulação do primeiro problema foi disponibilizado aos alunos um enunciado que seria o ponto de partida para realizarem a tarefa. A primeira díade foi a que demonstrou mais dificuldade em iniciar o processo de formulação. Esta díade utilizou a estratégia de problema para problema tendo conseguido formular e resolver o problema, no entanto não demonstraram qualquer melhoria. A segunda díade demonstrou algumas divergências nos enunciados apresentados, por um lado o Daniel utilizou a estratégia de variar o problema e posteriormente resolveu-o. Por outro lado, a Carolina elaborou uma recontextualização do problema e não apresentou a resolução do mesmo. No que diz respeito à melhoria dos problemas apresentados, nenhum dos alunos a realizou. A última díade elaborou um problema com recurso a uma estratégia de problema para problema, apresentou a sua resolução e manteve uma reflexão durante todo o processo levando à conclusão de que o problema não carecia de melhorias. Todas as díades apresentaram formulações corretas para os problemas.

Na formulação do segundo problema, as díades tinham ao seu dispor uma imagem com dois cilindros e alguns dados. Todas as díades optaram por utilizar a estratégia de aceitar os dados. A Ana e a Beatriz demonstraram algumas dificuldades na formulação, apesar disso apresentaram um problema com a respetiva resolução. O enunciado apresentado por esta díade não deixou claro qual o objetivo do problema. A segunda díade mostra novamente duas formulações distintas. No que diz respeito às etapas da formulação ambos formularam, contudo apenas o Daniel apresentou uma resolução para o seu problema. Ambos os elementos apresentaram formulações de problemas corretos. Por último, o Eugénio e o Frederico formularam e resolveram o seu problema, que demonstrou um grau de dificuldade inferior ao problema anteriormente formulado por esta díade, o que se pode explicar pelo tempo dispensado na formulação do primeiro problema. Nenhuma das díades apresentou melhorias aos seus problemas, o que se tornou mais evidente na formulação do problema da díade constituída pela Ana e Beatriz.

Para a última formulação as díades partiram de uma expressão de uma função de proporcionalidade inversa. Novamente, todas as díades optaram pela estratégia de aceitar os dados e apresentaram uma resolução para os seus problemas. No que diz respeito à etapa de melhorar, apenas a díade Eugénio e Frederico realizaram ajustes para tornar o seu problema o mais correto possível. Ao contrário do que mostraram nas formulações anteriores, a díade Carolina e Daniel apresentou o mesmo enunciado que se revelou um problema corretamente formulado.

5. Considerações Finais

Esta investigação tem como objetivo compreender de que forma os alunos do 9.º ano de escolaridade resolvem e formulam problemas que envolvam a proporcionalidade inversa. Para atingir este objetivo, foi proposta a resolução de duas tarefas aos alunos: resolução de problemas e formulação de problemas. De forma a concretizar o objetivo desta investigação, foi adotada uma metodologia qualitativa e foram selecionados três grupos, sendo cada grupo constituído por dois alunos. Uma vez que os elementos escolhidos apresentavam características distintas, conclui-se que a escolha dos participantes teve por base a perspetiva de variedade e relevância das respostas dadas por cada grupo. Por conseguinte, pretendeu-se dar resposta às seguintes questões de investigação:

1. De que forma se caracteriza o processo de resolução de problemas que envolvem a proporcionalidade inversa?

2. De que forma se caracteriza o processo de formulação de problemas que envolvem a proporcionalidade inversa?

No que diz respeito à organização desta secção serão abordadas primeiramente as conclusões a propósito da resolução de problemas. Seguidamente, serão apresentadas as conclusões relativas à formulação de problemas. De forma a concluir esta secção, serão tecidas algumas considerações finais.

5.1. Caracterização do processo de resolução de problemas que envolvam a proporcionalidade inversa

Na resolução da tarefa um, as díades depararam-se com três problemas realistas dado que todos eram baseados na realidade do quotidiano (Díaz & Poblete, 2005). Durante a resolução dos problemas as díades leram e compreenderam os mesmos, elaboraram e executaram um plano e para terminar verificaram as respostas que obtiveram (Boavida et al., 2008).

Para as díades, as duas primeiras etapas da resolução de problemas tornam-se intuitivas, nesse sentido realizaram-nas, parcialmente, em todos os problemas. A última etapa, revelou-se na etapa mais questionada pelas díades e por vezes foi descurada por parte das mesmas. As díades mostraram várias formas de a realizar, nomeadamente por via oral, escrita ou até utilizando uma estratégia diferente daquela que foi utilizada para chegar ao resultado. A falta desta etapa revelou-se fundamental para atingir o resultado adequado. Subsequentemente, está representada uma tabela onde são detalhadas as etapas que cada díade utilizou para solucionar os itens propostos na primeira tarefa.

	Ana e Beatriz	Carolina e Daniel	Eugénio e Frederico
Item 1	Leram e compreenderam Elaboraram e executaram um plano Verificaram a resposta	Leram e compreenderam Elaboraram e executaram um plano Não verificaram a resposta	Leram e compreenderam Elaboraram e executaram um plano Verificaram a resposta
Item 2	Leram e não compreenderam Elaboraram e executaram um plano Verificaram a resposta	Leram e compreenderam Elaboraram e executaram um plano Verificaram a resposta	Leram e compreenderam Elaboraram e executaram um plano Verificaram formalmente a resposta
Item 3	Leram e compreenderam Elaboraram e executaram um plano Não verificaram a resposta	Leram e compreenderam Elaboraram e executaram um plano Verificaram formalmente a resposta	Leram e compreenderam Elaboraram e executaram um plano Verificaram formalmente a resposta

Tabela 10 - Etapas do processo de resolução de problemas, segundo Boavida et al. (2008)

Na fase de elaboração do plano a seguir para determinar a solução do problema, as díades utilizaram três estratégias: numérica (as resoluções das díades incluíam apenas operações com números, isto é, não envolviam variáveis), simbólica (as resoluções das díades continham equações ou manipulações algébricas) e icónica (as resoluções das díades possuíam figuras ou esquemas para visualizar os dados) (Freire et al., 2004). Como é possível observar na tabela abaixo que relata as estratégias utilizadas na resolução dos problemas, as estratégias mais comuns foram a simbólica e a numérica. Uma das díades realizou uma abordagem mista, isto é, para atingir a solução do problema utilizou duas das estratégias referidas anteriormente.

	Ana e Beatriz	Carolina e Daniel	Eugénio e Frederico
Item 1	Numérica	Simbólica	Simbólica
Item 2	Numérica	Numérica	Simbólica
Item 3	Numérica	Mista (icónica e numérica)	Simbólica

Tabela 11- Estratégias de resolução de problemas segundo Freire et al. (2004)

Durante a resolução dos itens, algumas das díades revelaram dificuldades na interpretação dos enunciados o que foi impulsionador de várias leituras (primeira etapa). Os problemas entregues às díades foram problemas não rotineiros, isto é, problemas que vão além da aplicação de regras (Pólya, 1945). O motivo da escolha deste tipo de problemas deve-se ao facto de se revelarem mais construtivos para o desenvolvimento intelectual dos alunos (Vale e Pimentel 2012). Todos os problemas deveriam ser resolvidos com conhecimentos previamente adquiridos, desta forma caracterizam-se como problemas de cálculo (Boavida, 2008).

5.2. Caracterização do processo de formulação de problemas que envolvam a proporcionalidade inversa

Na tarefa dois foram propostas três formulações distintas às díades. A primeira, designada como situação estruturada, em que as díades a partir do enunciado de um problema são convidadas a elaborar um novo problema. A segunda, designada por situação semiestruturada, em que as díades a partir de uma imagem com alguns dados são solicitadas para elaborar um problema. Por último, a terceira designa-se por situação livre e as díades são levadas a formular um problema tendo por base uma expressão de uma função de proporcionalidade inversa (Stoyanova, 1998).

Na formulação dos problemas, as díades deveriam percorrer três etapas: formular o problema, resolvê-lo e por último melhorá-lo (Ramírez, 2006). Mais uma vez, a etapa final foi aquela que as díades não concretizaram de forma tão intuitiva levando até à sua falta em algumas formulações. Na tabela seguinte são expostas as etapas que as díades percorreram na resolução da segunda tarefa.

	Ana e Beatriz	Carolina e Daniel[1]		Eugénio e Frederico
Item 1	Formularam Resolveram Não melhoraram	Formulou Não resolveu Não melhorou	Formulou Resolveu Não melhorou	Formularam Resolveram Melhoraram
Item 2	Formularam Resolveram Não melhoraram	Formulou Não resolveu Não melhorou	Formulou Resolveu Não melhorou	Formularam Resolveram Não melhoraram
Item 3	Formularam Resolveram Não melhoraram	Formularam Resolveram Não melhoraram		Formularam Resolveram Melhoraram

Tabela 12 - Etapas do processo de formulação de problemas, segundo Ramírez (2006)

No que concerne às estratégias utilizadas para a formulação de problemas, as díades utilizaram quatro distintas. A mais utilizada consiste nas díades a partir de uma situação estática, como é o caso de uma figura, formularem o seu problema, designando-se de "Aceitar os dados". A "Variação de um problema" que consiste nas díades formularem um novo problema através da decomposição ou particularização do mesmo. Um caso particular da variação de um problema é "De problema para problema" que consiste nas díades alterarem algumas das condições do problema para obter o seu novo problema. E, por último, a recontextualização onde as díades através de um problema alteram o contexto, mas mantêm características comuns ao inicial (Vale e Pimentel, 2004). Na tabela abaixo, estão identificadas as estratégias da formulação de problemas utilizadas pelas díades.

[1] Dado que a díade não realizou as duas primeiras formulações em conjunto, a tabela encontra-se separada, sendo a informação do lado esquerdo referente à Carolina e a do lado direito referente ao Daniel.

	Ana e Beatriz	Carolina e Daniel		Eugénio e Frederico
Item 1	De problema para problema	Recontextualização	Variação de um problema	De problema para problema
Item 2	Aceitar os dados	Aceitar os dados	Aceitar os dados	Aceitar os dados
Item 3	Aceitar os dados	Aceitar os dados		Aceitar os dados

Tabela 13 - Estratégias de formulação de problemas, segundo Vale e Pimentel (2004)

Como pode ser observado na tabela, a situação estruturada (problema 1) foi aquela que apresentou maior diversidade de estratégias de formulação. Todas as díades utilizaram a estratégia de aceitar os dados tanto na situação semiestruturada (problema 2) como na situação livre (problema 3).

Tal como anteriormente mencionado, a etapa da melhoria do problema foi aquela em que as díades apresentaram maior dificuldade e foi a menos conseguida. Por exemplo, a primeira díade formulou e resolveu o seu problema, ainda assim não lhes foi percetível que este necessitava de ser melhorado. Naturalmente, pelo fato desta tipologia de tarefa não ser recorrente, as díades não conseguiram encontrar estratégias para melhorar os seus enunciados iniciais.

Durante o ano letivo, sempre que os alunos foram confrontados com a formulação de problemas, mostraram incertezas que admitiram ser resultado da falta de prática nos anos transatos (Miranda & Mamede, 2023).

Finalizando o estudo em questão, pode concluir-se que o mesmo decorreu conforme o expectável e que permitiu caracterizar o processo de resolução e formulação de problemas referentes à proporcionalidade inversa. Os três estudos de caso escolhidos apresentaram uma variedade de resoluções que facilitaram a confirmação dos resultados obtidos pelos autores apresentados na revisão de literatura.

Os alunos acolheram bem o projeto de investigação demonstrando empenho na resolução das tarefas propostas. Esta dedicação por parte dos alunos, resultou no desenvolvimento da comunicação matemática entre os elementos da díade durante a sua atividade.

As tarefas propostas envolviam um contexto próximo da realidade vivenciada pelos alunos, uma vez que no presente ano letivo realizaram uma viagem de finalistas. Com esta aproximação da realidade pretendia-se que os alunos se envolvessem em tarefas com aplicabilidade à sua realidade.

Na sequência do estudo realizado com esta turma, futuras investigações poderão debruçar-se sobre a resolução e formulação de problemas envolvendo outros tópicos do currículo, como por exemplo, outras famílias de funções estudadas nos anos seguintes.

BIBLIOGRAFIA

Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional* (Universidade Aberta). Universidade Aberta. http://hdl.handle.net/10400.2/2028

Amado, J. (2017). Manual de Investigação Qualitativa em Educação (3ª edição). Em *Coimbra University Press* (3.ª edição). Imprensa da Universidade de Coimbra. https://doi.org/10.14195/978-989-26-1390-1

Ana Paula Canavarro, Carlos Albuquerque, Célia Mestre, Hélder Martins, Jaime Carvalho e Silva, João Almiro, Leonor Santos, Luís Gabriel, Olga Seabra, & Paulo Correia. (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática – Grupo 2020*.

Ana Paula Canavarro, Célia Mestre, Dulce Gomes, Elvira Santos, Leonor Santos, Lina Brunheira, Manuela Vicente, Maria João Gouveia, Paulo Correia, & Pedro Macias Marques. (2021). *Aprendizagens Essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 9.º ano. 3.º Ciclo do Ensino Básico—Matemática A*. Ministério da Educação – DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/aemat_9a_2021-08-19.pdf

Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues, & Lara Martins Rodrigues. (2025). *Espiral—Matemática A - 10.º ano* (Porto Editora).

Bento de Jesus Caraça. (1984). *Conceitos fundamentais da matemática* (1.ª ed.). Livraria Sá da Costa Editora. https://bndigital.bnportugal.gov.pt/viewer/267138/download?file=sa-35786-p_0000.pdf&type=pdf&navigator=1

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. http://hdl.handle.net/10400.26/5566

Bruner, J. S. (1977). *The Process of Education: Revised Edition*. Harvard University Press.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). Research Methods in Education. *http://lst-iiep.iiep-unesco.org/cgi-bin/wwwi32.exe/[in=epidoc1.in]/?t2000=011160/(100)*. https://doi.org/10.4324/9780203029053

Direção-Geral da Educação. (2018). *Aprendizagens essenciais: Matemática – 9.º ano*. Ministério da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/mat_9_ae.pdf

Fátima Cerqueira Magro, Pedro Louçano, & Fernando Fidalgo. (2024). *Prisma—Matemática 9.º ano*. Edições Asa.

Freire, R. S., José Aires de Castro Filho, & Cabral, B. de S. (2004). Estratégias e erros utilizados na resolução de problemas algébricos. *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*.

Kahney, H. (1993). *Problem Solving: Current Issues*. Open University Press.

Kilpatrick, J. (2014). Como vamos de resolução de problemas? Uma conversa escrita com Jeremy Kilpatrick. *Educação e Matemática*, *130*, 3–9.

Lester, F. (2013). Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 245–278. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1267

L.Morgan, D. (1997). *Focus Groups as Qualitative Research*. SAGE Publications, Inc. https://doi.org/10.4135/9781412984287

Maria Augusta Ferreira Neves, João de Sá Duarte, José Martins, & Pedro Rocha Almeida. (sem data). *MX - Matemática—9.º Ano* (Vols. 1–2). Porto Editora.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach* (pp. xx, 226). Jossey-Bass.

Miranda, P., & Mamede, E. (2023). Desafiando as Crianças na Formulação de Problemas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *37*, 754–772. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a18

Nacarato, A. (2004). O professor e o desenvolvimento curricular. *Quadrante*, *13*(2), 87–93. https://doi.org/10.48489/quadrante.22778

Pedro Pimenta, Simone Azevedo, & Carlos Andrade. (2025). *MatPower 9—Matemática—9.º ano*. Raiz Editora.

Pinheiro, S. C. da C. (2013). *A criatividade na resolução e formulação de problemas: Uma experiência didáctica numa turma do 5º ano de escolaridade* [masterThesis]. http://repositorio.ipvc.pt/handle/20.500.11960/1414

Polya, G. (2004). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

Pólya, G., & Guimarães, H. M. (2014). Para este número seleccionámos: O ensino por meio de problemas. *Educação e Matemática*, *130*, 44–50.

Ponte, J. P. da. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *15*, 3–9.

Ponte, J. P. M. da. (2006). Estudos de Caso em Educação Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *19*(25), 105–132.

Ponte, J. (1992). *Problemas de Matemática e situações da vida real*.

Ramírez, M. C. (2006). A mathematical problem-formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *7*, 79–90.

Renata Carvalho. (sem data). Criatividade com estes programas? *Revista da Associação de Professores de Matemática*, *135*, 8.

Richard R. Skemp. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9–15.

Robert Bogdan & Sari Biklen. (1994). *Investigação qualitativa em Educação* (11.ª ed.). Porto Editora.

Saraiva, M. (2016). A Resolução de Problemas: O legado de Pólya e uma leitura do CERME 2015. *Quadrante*, *25*(1), 83–96. https://doi.org/10.48489/quadrante.22932

Siegel, H. (1989). The rationality of science, critical thinking, and science education. *Synthese*, *80*, 9–41. https://doi.org/10.1007/BF00869946

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, *29*(3), 75–80. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Singer, F., Ellerton, N., Cai, J., & Leung, E. (2011a). *Problem Posing in Mathematics Learning and Teaching: A Research Agenda*.

Singer, F., Ellerton, N., Cai, J., & Leung, E. (2011b). *Problem Posing in Mathematics Learning and Teaching: A Research Agenda*.

Tenreiro-Vieira, C., & Vieira, R. M. (2013). Literacia e pensamento crítico: Um referencial para a educação em ciências e em matemática. *Revista Brasileira de Educação, 18*, 163–188. https://doi.org/10.1590/S1413-24782013000100010

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*, 7–51.

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: Da resolução de problemas à criatividade em matemática. *Investigação em educação matemática*, 347–360.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, *24*(2), 39–60. https://doi.org/10.48489/quadrante.22923

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: Design and Methods*. SAGE.

ANEXOS

Anexo 1 – Aulas de dia 21 de novembro (9.º Ano)

2. Expressões algébricas. Equações do 2.º grau.	**Aula nº 34 & 35 9.ºA (100 min)**
Sumário: Quadrado de um binómio e diferença de quadrados: demonstração geométrica. Resolução de exercícios.	**Material e recursos:** · Manual adotado. · Papel, lápis e borracha. · Vídeo projetor. · Quadro branco e marcadores.

OBJETIVOS	**AÇÕES A DESENVOLVER COM O ALUNO**
· Perceber as demonstrações geométricas dos casos notáveis; · Aplicar os casos notáveis em situação de exercício.	· Incentivar os alunos a resolverem autonomamente os exercícios propostos. · Incentivar a exposição e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos.

Desenvolvimento da aula

- Realização da primeira parte da tarefa
- Discussão da primeira parte da tarefa: oral e escrita no quadro de forma a encadear as ideias para a demonstração
- Conclusão em grupo que o que funciona para $(a+b)^2$ funciona também para $(a-b)^2$
- Realização da segunda parte da tarefa
- Discussão da segunda parte da tarefa: oral e escrita no quadro de forma a encadear as ideias para a demonstração
- Esquematização no quadro de todos os casos notáveis falados na aula:
  - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- Escrita do sumário e trabalho de casa

Notas importantes para a aula

Os alunos que terminem mais cedo deverão começar a resolver os exercícios da página: 75 e 79.

Competências transversais	**Áreas de competência do perfil dos alunos**
· Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e o raciocínio matemático. · Incentivar a comunicação, em particular a comunicação matemática entre os alunos e entre os alunos e a docente.	· B. Informação e comunicação · C. Raciocínio e resolução de problemas. · D. Pensamento crítico e pensamento criativo. · F. Desenvolvimento pessoal e autonomia.

Observações/Aprendizagem complementar

- Os alunos deverão trabalhar em grupos de dois alunos.

Trabalho autónomo (TPC)

- Página 76 e 80.

Referências

- DGE (2018). Aprendizagens essenciais do ensino básico. Matemática, 3.º ciclo, 9.º ano. Julho 2018.
- Neves, M., Duarte, J., Martins, J. & Faria, L. (2024). MX 9 – Parte 1. Lisboa: Porto Editora.

QUADRADO DE UM BINÓMIO

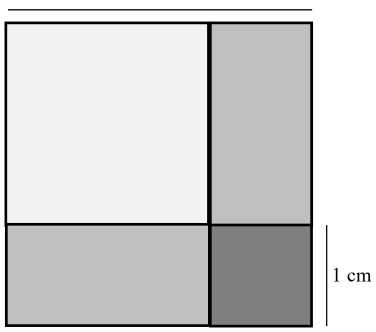
Tarefa – Uma viagem às demonstrações geométricas da Grécia Antiga

A Matemática na Grécia Antiga vai muito além de números e cálculos. Os matemáticos gregos, como Euclides e Pitágoras utilizavam a geometria como base do seu conhecimento e, por isso, as suas demonstrações não vinham de cálculos algébricos, mas sim de raciocínios geométricos.

Na tarefa de hoje seremos autênticos Matemáticos Gregos e iremos demonstrar geometricamente alguns dos chamados casos notáveis.

PARTE I – QUADRADO DE UM BINÓMIO

1. Considere a figura abaixo que representa a divisão de um quadrado em dois retângulos iguais e dois quadrados.



1.1. Calcule a área total da figura.

1.2. Calcule a área de cada retângulo.

1.3. Calcule a área de cada um dos quadrados obtidos através da divisão do primeiro quadrado.

1.4. Que relação existe entre a área total e as áreas calculadas em 1.2. e 1.3.?

2. Complete a tabela com os polinómios que representam as áreas de cada uma das figuradas recortadas.

	Quadrado maior	Retângulo	Quadrado menor
Polinómio que descreve a área			

3. Cole, abaixo, os recortes de forma a obteres um quadrado com todas as figuras recortadas.

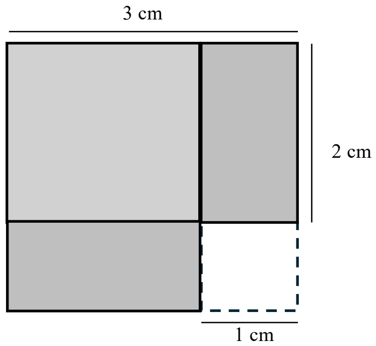
3.1. Escreva um polinómio que represente a sua área.

3.2. Escreva uma relação entre a área obtido em 3.1. e as áreas de cada uma das figuras.

4. Utilizemos a forma algébrica para validar o resultado obtido. Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição calcule um polinómio reduzido para a área do quadrado de lado $(x + y)$.

PARTE II – DIFERENÇA DE QUADRADOS

1. Considere a figura abaixo que representa a divisão de um quadrado em dois retângulos iguais e dois quadrados.



1.1. Calcule a área total da figura sombreada.

1.2. Calcule a área do quadrado a tracejado.

1.3. Calcule a área total contanto com o quadrado tracejado.

1.4. Qual a relação entre os três valores de área calculados?

2. Complete a tabela com os polinómios que representam as áreas de cada uma das figuras recortadas.

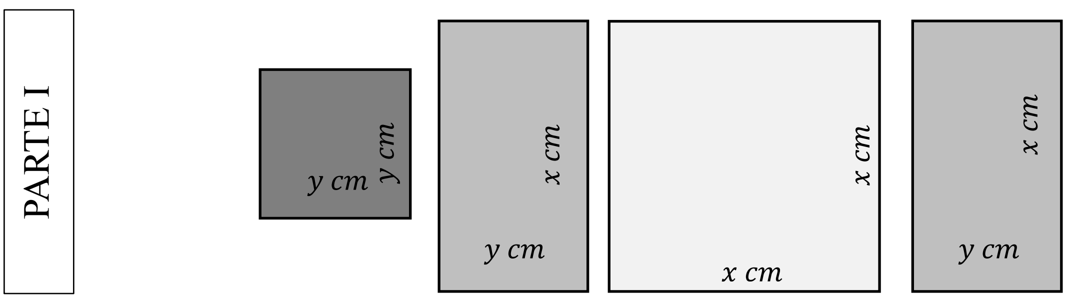
	Quadrado maior	Retângulo
Polinómio que descreve a área		

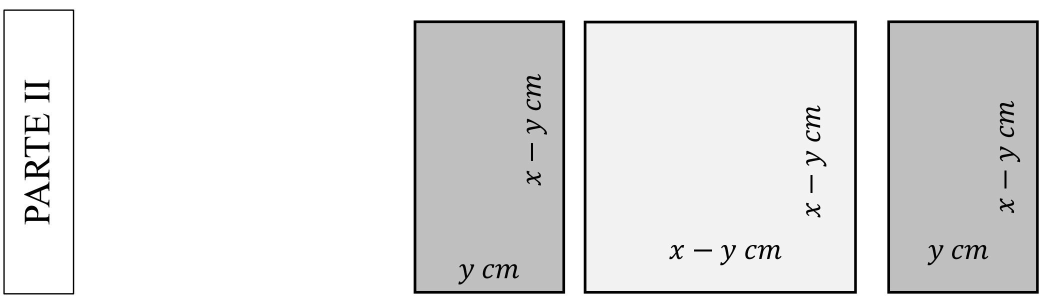
3. Cole, abaixo, os recortes de forma a obter um retângulo com todas as figuras.

3.1. Escreva um polinómio que represente a sua área.

3.2. Utilizando o exercício anterior, escreva uma expressão que relaciona a área do retângulo com as áreas dos quadrados de lado x e y.

4. Utilizemos a forma algébrica para validar o resultado obtido. Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e calcula um polinómio reduzido da multiplicação $(x+y)(x-y)$.





QUADRADO DE UM BINÓMIO - CORREÇÃO

Tarefa – Uma viagem às demonstrações geométricas da Grécia Antiga

PARTE I – QUADRADO DE UM BINÓMIO

1.

1.1. $A_{total} = 3 \times 3 = 9\ cm^2$

1.2. $A_{retângulo} = 2 \times 1 = 2\ cm^2$

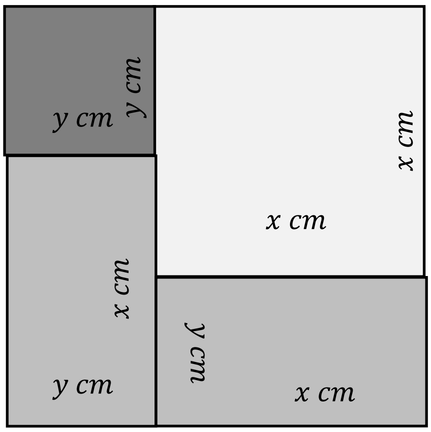
1.3. $A_{quadrado\ maior} = 2 \times 2 = 4\ cm^2$
$A_{quadrdo\ menor} = 1 \times 1 = 1\ cm^2$

1.4. $A_{total} = A_{quadrado\ maior} + A_{quadrado\ menor} + 2 \times A_{retângulo}$

2.

Polinómio que descreve a área	Quadrado maior	Retângulo	Quadrado menor
	x^2	$x \times y = xy$	y^2

3.



3.1. $A_{quadrado} = (x + y) \times (x + y) = (x + y)^2$

3.2. $(x + y)^2 = x^2 + 2 \times xy + y^2$

4. $(x + y) \times (x + y) = x \times x + x \times y + y \times x + y \times y = x^2 + 2xy + y^2$

PARTE II – DIFERENÇA DE QUADRADOS

1.

1.1. $A_{sombreada} = 2 \times 2 + 2 \times (2 \times 1) = 8\ cm^2$

1.2. $A_{quadrado\ tracejado} = 1^2 = 1\ cm^2$

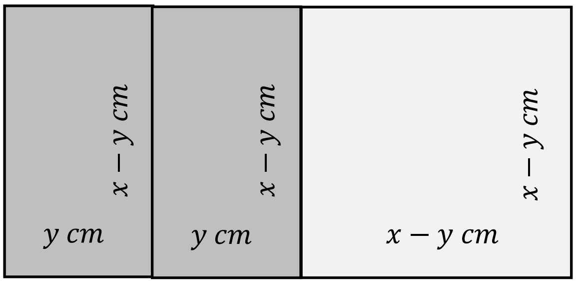
1.3. $A_{total} = 3^2 = 9\ cm^2$

1.4. $A_{sombreada} = A_{total} - A_{quadrado\ travejado}$

2.

Polinómio que descreve a área	Quadrado maior	Retângulo
	$(x-y)^2$	$y(x-y)$

3.



3.1. $A_{retângulo} = (x+y) \times (x-y)$

3.2. $A_{retângulo} = x^2 - y^2$

4. $(x+y) \times (x-y) = x^2 + xy - yx - y^2 = x^2 - y^2$

Anexo 2 – Aulas de dia 16 de janeiro (9.º Ano)

3. Funções	**Aula nº 57 & 58 9.ºA (100 min)**
Sumário: Tarefa de revisão do tema "Funções".	**Material e recursos:** · Papel, lápis e borracha. · Vídeo projetor. · Quadro branco e marcadores.

OBJETIVOS	**AÇÕES A DESENVOLVER COM O ALUNO**
· Relembrar os conceitos associados às funções trabalhadas no passado.	· Incentivar os alunos a resolverem autonomamente os exercícios propostos. · Incentivar a exposição e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos.

Desenvolvimento da aula

- Início com projeção de vídeo sobre a importância de funções
- Formação de grupos de 2 alunos com software para que os grupos sejam aleatórios.
- 5 minutos para a realização da Parte I - O que é uma função?
- Conclusão da primeira parte da tarefa com projeção de um resumo para os alunos copiarem para os seus cadernos.
- 10 minutos para a realização da Parte II - Funções afim, linear e constante
- Conclusão da segunda parte da tarefa com projeção de um esquema
- 20 minutos para a realização da Parte III – Problemas com funções
- Conclusão da tarefa com esquema resumo realizado no quadro para que os alunos copiem para os seus cadernos.
- Registo do sumário e do trabalho de casa pelos alunos no seu caderno diário.

Notas importantes para a aula

Os alunos deverão trabalhar em grupos de dois criados aleatoriamente por um site.
Os alunos que apresentarem um ritmo de trabalho mais acelerado deverão realizar os exercícios das páginas: 6 e 8.

Competências transversais	**Áreas de competência do perfil dos alunos**
· Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e o raciocínio matemático. · Incentivar a comunicação, em particular a comunicação matemática entre os alunos e entre os alunos e a docente.	· B. Informação e comunicação · C. Raciocínio e resolução de problemas. · D. Pensamento crítico e pensamento criativo. · F. Desenvolvimento pessoal e autonomia.

Observações/Aprendizagem complementar

- Os alunos deverão trabalhar em grupos de dois alunos.

Trabalho autónomo (TPC)

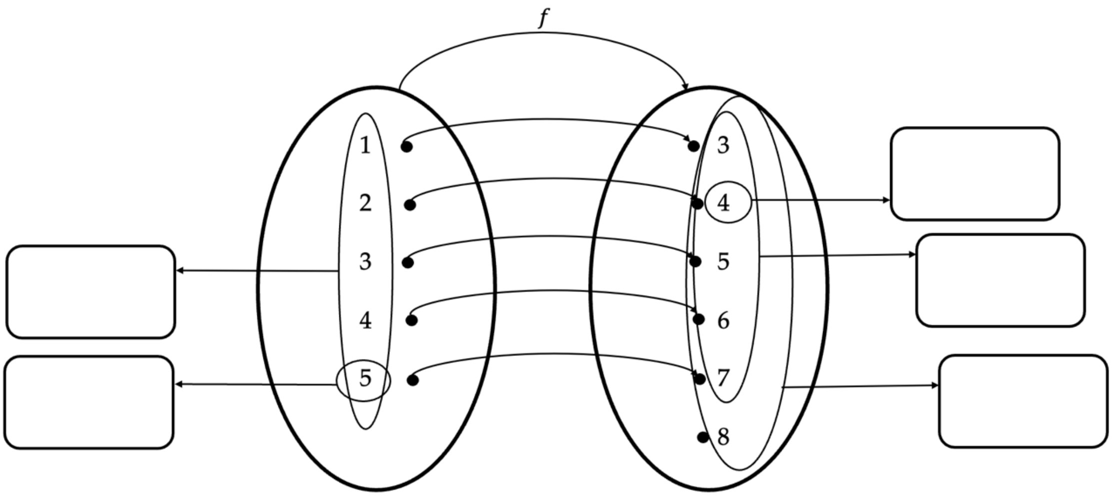
- Página 7 e 9 do manual.

TAREFA – AS FUNÇÕES

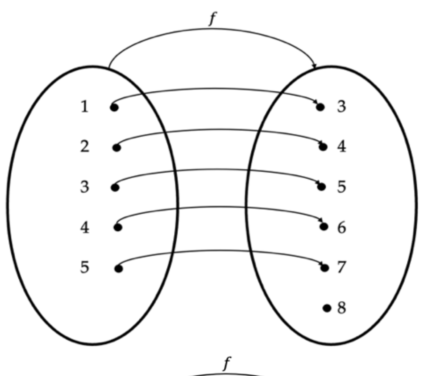
PARTE I – O QUE É UMA FUNÇÃO?

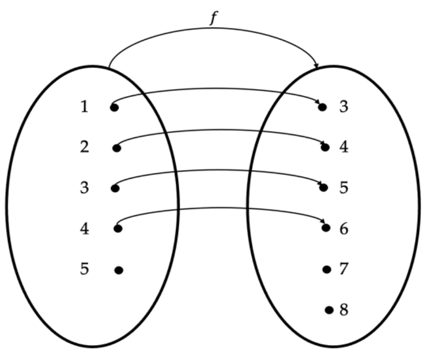
Uma **função** é uma correspondência entre dois conjuntos que a cada elemento do primeiro conjunto associa um e um só elemento do segundo conjunto.

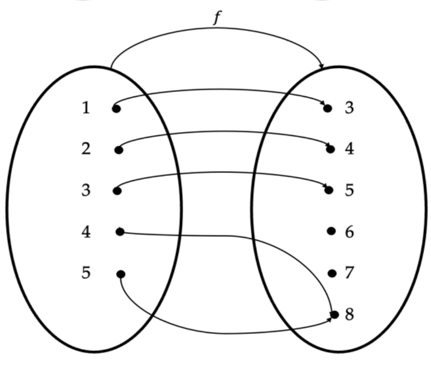
1. Faça corresponder a cada espaço em branco os seguintes termos: imagem, objeto, domínio, contradomínio e conjunto de chegada.

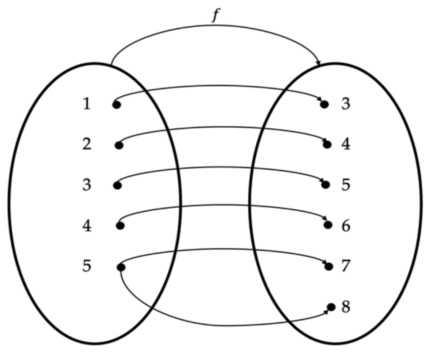


1.1. Rodeie quais das seguintes representações são funções.









PARTE II – FUNÇÕES AFIM, LINEAR E CONSTANTE

1. Complete a tabela, agrupando pelo tipo de função.

$f(x) = 2x + 3$ $\quad f(x) = \frac{1}{2}x + 7{,}3$ $\quad f(x) = x + 0$ $\quad f(x) = 3x + \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{3}{4}$ $\quad f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{9}{3}$ $\quad f(x) = \frac{4}{5}x$ $\quad f(x) = 0x + \frac{1}{2}$

FUNÇÃO ______________	FUNÇÃO ______________	FUNÇÃO ______________

PARTE III – PROBLEMAS COM FUNÇÕES

1. Um certo tarifário rege-se pelas seguintes indicações:

seja x a quantidade de dados móveis, em GB, utilizados;
cada GB tem um custo de 0,10€;
15€ é o valor de prestação do tarifário.

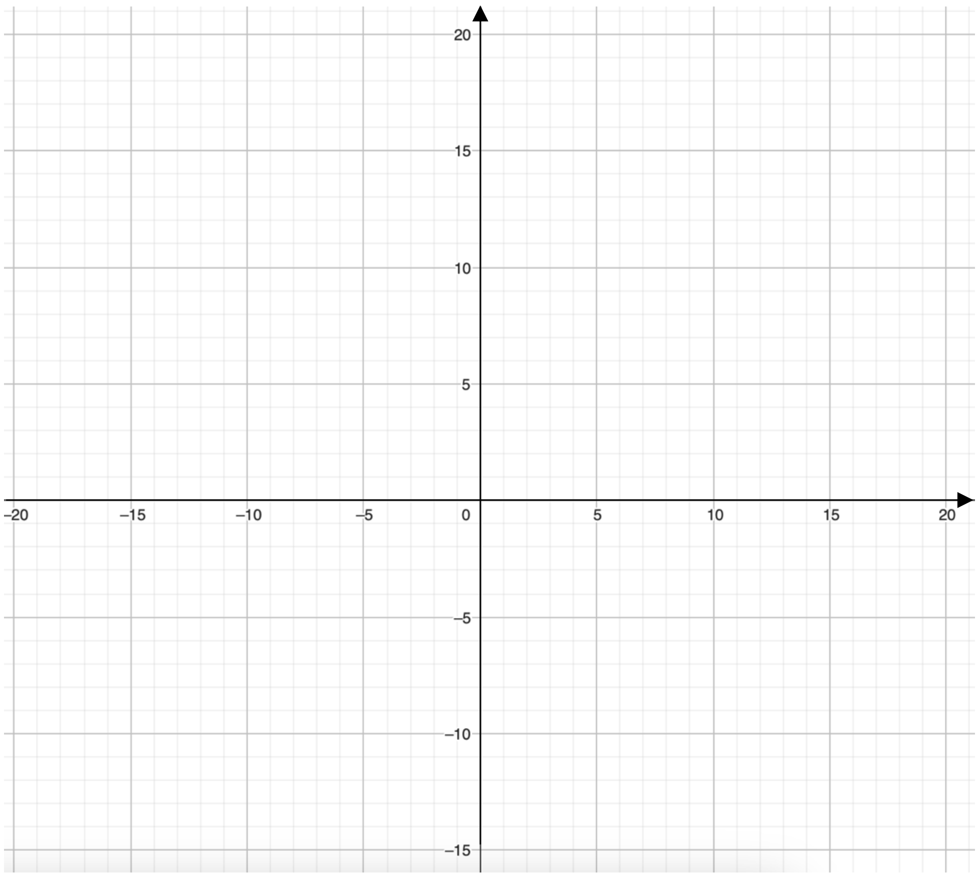
1.1. Complete a tabela com os valores do custo total do tarifário com as seguintes GB:

GB utilizadas	Preço
0 GB	$15 + 0 \times 0{,}1 = 15$
1 GB	
5 GB	
10 GB	
x GB	

1.2. Com base no enunciado anterior, qual é o declive e a ordenada na origem da função que espelha o consumo de dados móveis. O que cada valor significa no contexto do problema?

1.3. Quantos GB são necessários utilizar para que a fatura exceda os 20€.

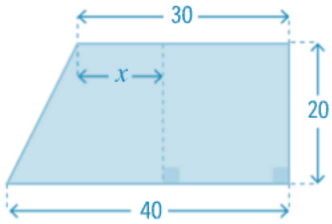
1.4. Represente graficamente a função.



2. Com os dados da tabela abaixo, formule um problema que se adeque aos dados. Complete a primeira linha da tabela com as unidades.

0	0
1	7
5	27
10	52
x	$5x + 2$

3. Um terreno com a forma de um trapézio retângulo vai ser dividido em duas partes (uma parte retangular e outra mantendo a forma de um trapézio), como mostra a figura. As dimensões estão em metros.



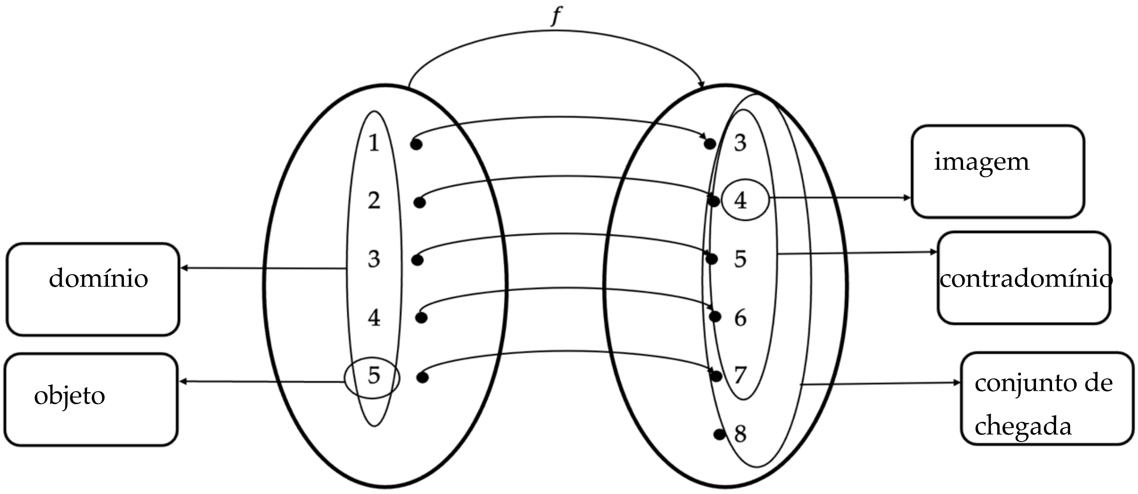
3.1. Mostre que a área da parte retangular é dada em metros quadrados e em função de x, por $a(x) = -20x + 600$.

3.2. Determine x de forma que as duas partes tenham a mesma área.

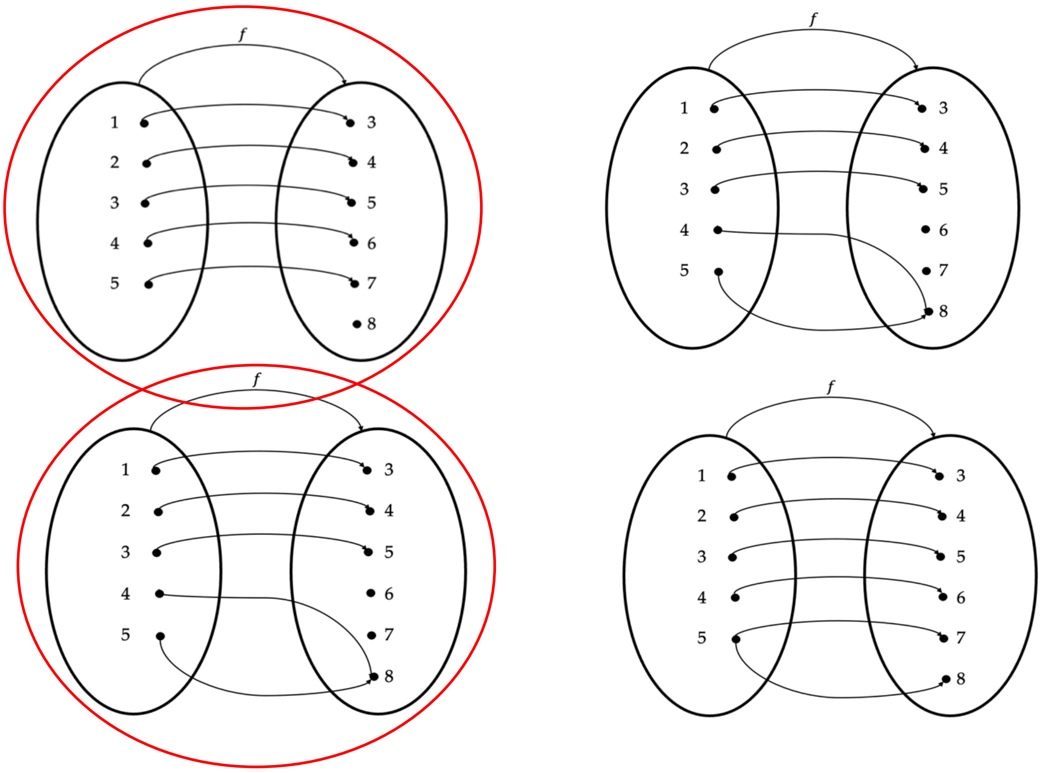
Exercício retirado do Manual MX8 – Porto Editora

CORREÇÃO DA TAREFA – AS FUNÇÕES
PARTE I – O QUE É UMA FUNÇÃO?

1.



1.1.



PARTE II – FUNÇÕES AFIM, LINEAR E CONSTANTE

1.

FUNÇÃO CONSTANTE	FUNÇÃO LINEAR	FUNÇÃO AFIM
$\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{4}}$ $\boldsymbol{f(x) = 0x + \frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{f(x) = +0}$ $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{5}x}$	$\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$ $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x + 7,3}$ $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{9}{3}}$ $\boldsymbol{f(x) = 3x + \frac{1}{2}}$

PARTE III – PROBLEMAS COM FUNÇÕES

1. Um certo tarifário rege-se pelas seguintes indicações:
seja x a quantidade de dados móveis, em GB, utilizados;
cada GB tem um custo de 0,10€;
15€ é o valor de prestação do tarifário.

1.1.

GB utilizadas	Preço
0 GB	$15 + 0 \times 0{,}1 = 15$
1 GB	15,1
5 GB	15,5
10 GB	16
x GB	$15 + 0{,}1 \times x$

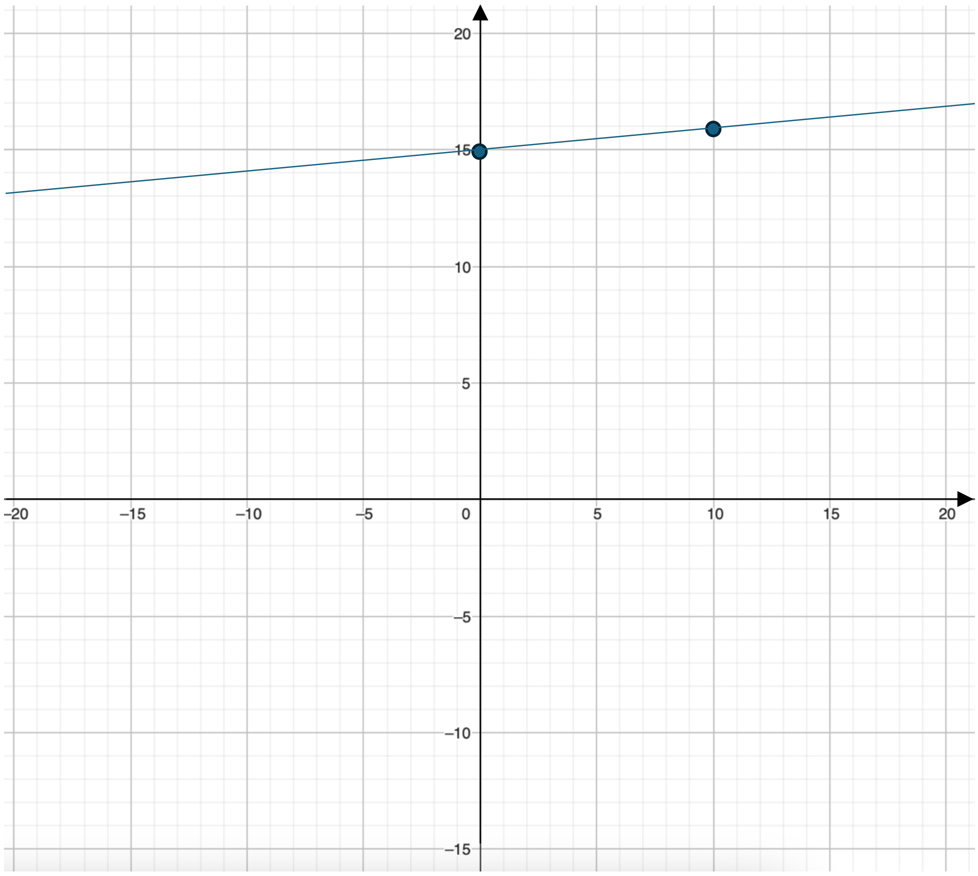
1.2. Declive: 0,1 – representa o custo de cada GB
Ordenada na origem: 15 – representa o valor da prestação do tarifário

1.3.

$$15 + 0{,}1x > 20 \Leftrightarrow 0{,}1x > 20 - 15 \Leftrightarrow 0{,}1x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{0{,}1} \Leftrightarrow x > 50\ GB$$

Será necessário utilizar mais de 50 GB.

1.4. Represente graficamente a função.



2. Um atleta demora 2 minutos a executar o seu aquecimento. Após esse tempo, cada 5 minutos, o atleta percorre 1 quilometro corrido. Qual será a expressão que relaciona o tempo com o número de quilómetros percorrido?

3.1.

$base = 30 - x$

$altura = 20$

$A_{retângulo} = base \times altura = (30 - x) \times 20 = 30 \times 20 - x \times 20 = 600 - 20x$

3.2.

$A_{trapézio} = \frac{(40-30+x)+x}{2} \times 20 = \frac{400+40x}{2} = 200 + 20x$

$A_{trapézio} = A_{retângulo} \Leftrightarrow 200 + 20x = 600 - 20x \Leftrightarrow 40x = 400 \Leftrightarrow x = 10$

Para que tenham a mesma área o x deve ser igual a 10 metros.

Anexo 3 – Aulas de dia 13 de março (9.º Ano)

<table>
<tr><th>2. Trigonometria</th><th>Aula nº 84 & 85 9.ºA (100 min)</th></tr>
<tr><td>Sumário: Início do estudo da trigonometria com atividade exploratória.</td><td>Material e recursos:
· Papel, lápis e borracha.
· Vídeo projetor.
· Quadro branco e marcadores.
· Computador e tarefa.</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS</th><th>AÇÕES A DESENVOLVER COM O ALUNO</th></tr>
<tr><td>· Perceber as razões trigonométricas e as suas relações.</td><td>· Incentivar os alunos a resolverem autonomamente os problemas propostos.
· Incentivar a exposição e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desenvolvimento da aula
· Início da aula com projeção de PowerPoint introdutório
· Relembrar o teorema de Pitágoras
· Relembrar a relação entre os ângulos internos de um triângulo
· Vídeo introdutório sobre a importância dos triângulos
· Resolução de uma atividade exploratória com o auxílio do GeoGebra
· Esquematização no quadro, pelos alunos, das conclusões obtidas pelos vários grupos
· Registo do sumário e do trabalho de casa, pelos alunos, no seu caderno diário.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Notas importantes para a aula
Os alunos que apresentarem um ritmo de trabalho mais acelerado deverão realizar os exercícios das páginas: 49 e 50.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Competências transversais</th><th>Áreas de competência do perfil dos alunos</th></tr>
<tr><td>· Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e o raciocínio matemático.
· Incentivar a comunicação, em particular a comunicação matemática entre os alunos e entre os alunos e a docente.</td><td>· B. Informação e comunicação
· C. Raciocínio e resolução de problemas.
· D. Pensamento crítico e pensamento criativo.
· F. Desenvolvimento pessoal e autonomia.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observações/Aprendizagem complementar
· Os alunos deverão trabalhar em grupos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Trabalho autónomo (TPC)
· Página 51 do manual.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Possíveis dificuldades
Como os alunos irão utilizar uma ferramenta pouco utilizada até ao momento em contexto de aula (o Geogebra), espera-se que alguns se deparem com dificuldade na sua utilização.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Referências
· DGE (2018). Aprendizagens essenciais do ensino básico. Matemática, 3.º ciclo, 9.º ano. Julho 2018.
· Neves, M., Duarte, J., Martins, J. & Faria, L. (2024). MX 9 – Parte 2. Lisboa: Porto Editora.</td></tr>
</table>

Grupo 1 – Relação entre o comprimento dos lados e o sen de um ângulo agudo num triângulo retângulo

1. Comece por desenhar um triângulo retângulo no Geogebra.
   1.1. Coloque o vértice A na origem do referencial.
   1.2. Coloque o vértice B sobre o semieixo positivo Ox.
   1.3. Coloque o vértice C sobre o semieixo positivo Oy

2. Com o auxílio das ferramentas de medição do Geogebra, complete a tabela abaixo fazendo variar as medidas dos catetos.
   Com o auxílio da ferramenta de calculo algébrico, calcule o seno do ângulo. (Atenção para que o triângulo tem de se manter retângulo).

Triângulo	Cateto oposto	Cateto adjacente	Hipotenusa	$sen(C\hat{B}A)$
Triângulo 1				
Triângulo 2				
Triângulo 3				
Triângulo 4				
Triângulo 5				

3. Realize o quociente entre o cateto oposto e a hipotenusa de cada um dos triângulos.

Triângulo	$\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}$
Triângulo 1	
Triângulo 2	
Triângulo 3	
Triângulo 4	
Triângulo 5	

4. Tendo em conta as tabelas preenchidas, quais as conclusões que consegue retirar?

Grupo 2 – Relação entre o comprimento dos lados e o cos de um ângulo agudo num triângulo retângulo

1. Comece por desenhar um triângulo retângulo no Geogebra.
   1.1. Coloque o vértice A na origem do referencial.
   1.2. Coloque o vértice B sobre o semieixo positivo Ox.
   1.3. Coloque o vértice C sobre o semieixo positivo Oy

2. Com o auxílio das ferramentas de medição do Geogebra, complete a tabela abaixo fazendo variar as medidas dos catetos.
   Com o auxílio da ferramenta de calculo algébrico, calcule o cosseno do ângulo. (Atenção para que o triângulo tem de se manter retângulo).

Triângulo	Cateto oposto	Cateto adjacente	Hipotenusa	$cos(C\hat{B}A)$
Triângulo 1				
Triângulo 2				
Triângulo 3				
Triângulo 4				
Triângulo 5				

3. Realize o quociente entre o cateto adjacente e a hipotenusa de cada um dos triângulos.

Triângulo	$\frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$
Triângulo 1	
Triângulo 2	
Triângulo 3	
Triângulo 4	
Triângulo 5	

4. Tendo em conta as tabelas preenchidas, quais as conclusões que consegue retirar?

Grupo 3 – Relação entre o comprimento dos lados e a tg de um ângulo agudo num triângulo retângulo

1. Comece por desenhar um triângulo retângulo no Geogebra.
    1.1. Coloque o vértice A na origem do referencial.
    1.2. Coloque o vértice B sobre o semieixo positivo Ox.
    1.3. Coloque o vértice C sobre o semieixo positivo Oy.

2. Com o auxílio das ferramentas de medição do Geogebra, complete a tabela abaixo fazendo variar as medidas dos catetos.
   Com o auxílio da ferramenta de calculo algébrico, calcule a tangente do ângulo. (Atenção para que o triângulo tem de se manter retângulo).

Triângulo	Cateto oposto	Cateto adjacente	Hipotenusa	$tg(C\hat{B}A)$
Triângulo 1				
Triângulo 2				
Triângulo 3				
Triângulo 4				
Triângulo 5				

3. Realize o quociente entre o cateto oposto e o cateto adjacente de cada um dos triângulos.

Triângulo	$\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$
Triângulo 1	
Triângulo 2	
Triângulo 3	
Triângulo 4	
Triângulo 5	

4. Tendo em conta as tabelas preenchidas, quais as conclusões que consegue retirar?

Correção - Grupo 1 – Relação entre o comprimento dos lados e o *sen* de um ângulo agudo num triângulo retângulo

1.

2.

Triângulo	Cateto oposto	Cateto adjacente	Hipotenusa	$sen(C\hat{B}A)$
Triângulo 1	4	4	5,66	0,71
Triângulo 2	5	3	3,6	0,86
Triângulo 3	1,99	3	3,6	0,55
Triângulo 4	0,95	7	7,06	0,13
Triângulo 5	6	3	6,71	0,86

3.

Triângulo	$\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}$
Triângulo 1	$\frac{4}{5{,}66} = 0{,}71$
Triângulo 2	$\frac{5}{5{,}83} = 0{,}86$
Triângulo 3	$\frac{1{,}99}{3{,}6} = 0{,}55$
Triângulo 4	$\frac{0{,}95}{7{,}06} = 0{,}13$
Triângulo 5	$\frac{6}{6{,}71} = 0{,}89$

4.

$$sen(C\hat{B}A) = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Correção - Grupo 2 – Relação entre o comprimento dos lados e o *cos* de um ângulo agudo num triângulo retângulo

1.

2.

Triângulo	Cateto oposto	Cateto adjacente	Hipotenusa	$cos(C\hat{B}A)$
Triângulo 1	4	4	5,66	0,71
Triângulo 2	5	3	3,6	0,51
Triângulo 3	1,99	3	3,6	0,83
Triângulo 4	0,95	7	7,06	0,99
Triângulo 5	6	3	6,71	0,45

3.

Triângulo	$\frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$
Triângulo 1	$\frac{4}{5,66} = 0,71$
Triângulo 2	$\frac{3}{5,83} = 0,51$
Triângulo 3	$\frac{3}{3,6} = 0,83$
Triângulo 4	$\frac{7}{7,06} = 0,99$
Triângulo 5	$\frac{3}{6,71} = 0,45$

4.

$$cos(C\hat{B}A) = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

Correção - Grupo 3 – Relação entre o comprimento dos lados e a tg de um ângulo agudo num triângulo retângulo

1.

2.

Triângulo	Cateto oposto	Cateto adjacente	Hipotenusa	$tg(C\hat{B}A)$
Triângulo 1	4	4	5,66	1
Triângulo 2	5	3	3,6	1,67
Triângulo 3	1,99	3	3,6	0,66
Triângulo 4	0,95	7	7,06	0,14
Triângulo 5	6	3	6,71	2

3.

Triângulo	$\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$
Triângulo 1	$\frac{4}{4} = 1$
Triângulo 2	$\frac{5}{3} = 1,67$
Triângulo 3	$\frac{1,99}{3} = 0,66$
Triângulo 4	$\frac{0,95}{7} = 0,14$
Triângulo 5	$\frac{6}{3} = 2$

4.

$$tg(C\hat{B}A) = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$$

Anexo 4 – Aulas de dia 13 de novembro (10.º Ano)

2. Estatística	Aula nº 34 e 35_10.ºC1_100 min
Sumário: Resolução e discussão da tarefa: Média da Escola no Exame de Matemática.	**Material e recursos:** · Papel, lápis e borracha. · Enunciado da tarefa. · Quadro branco, projetor e marcadores.

OBJETIVOS	AÇÕES A DESENVOLVER COM O ALUNO
· Estabelecer ligação entre o conceito de quartil, mediana e percentil. · Utilizar diversas estratégias para o cálculo de percentis.	· Incentivar os alunos a resolverem autonomamente a tarefa proposta. · Incentivar a exposição e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos.

Desenvolvimento da aula

- Início da aula com a distribuição da tarefa.
- Construção de pares de trabalho de forma aleatória (utilizar https://pt.rakko.tools/tools/59/)
- Leitura da introdução da tarefa com o objetivo de acalmar os alunos.
- Resolução da tarefa a pares.

[Fim dos primeiros 50 minutos de aula]

- Discussão dos resultados obtidos na tarefa: as perguntas que não envolvem cálculos de forma oral e as restantes no quadro.
- Registo do sumário no caderno diário.

Notas importantes para a aula

- Caso a tarefa não fique concluída nos primeiros 50 minutos, os alunos terão 10 minutos do 2.º tempo de aula.
- Se existirem grupos que terminem antes devem resolver os exercícios da página 90 do manual.

Competências transversais	Áreas de competência do perfil dos alunos
· Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e o raciocínio matemático. · Incentivar a comunicação, em particular a comunicação matemática entre os alunos e entre os alunos e a docente.	· B. Informação e comunicação · C. Raciocínio e resolução de problemas. · D. Pensamento crítico e pensamento criativo. · F. Desenvolvimento pessoal e autonomia.

Observações/Aprendizagem complementar

- Os alunos serão distribuídos em grupos de 2 elementos, no caso de os presentes serem número ímpar um dos grupos ficará com 3 elementos.

Trabalho autónomo (TPC)

- Página 90 – Exercícios 23 e 24

Referências

- DGE (2018). Aprendizagens essenciais do ensino secundário. Matemática A, Ensino Secundário, 10.º ano. Janeiro 2023.
- Andrade, C., Pereira, J., & Pimenta, P. (2024). Matemática 360 10.º – Volume 1. Lisboa: Raiz Editora.

PERCENTIS

Tarefa – Média da Escola no Exame de Matemática

No nosso dia a dia os percentis estão presentes de várias formas, por exemplo:

- Na medicina, os percentis ajudam a acompanhar o crescimento da criança. A altura e o peso de uma criança são comparados com os percentis específicos para a sua idade e sexo, indicando assim se o seu crescimento está dentro do esperado.
- Na área dos recursos humanos, para analisar os salários dentro de uma determinada empresa. Perceber em que percentil se encontra o salário de um funcionário permite que a empresa faça ajustes salariais justos.
- Na área da educação, os percentis são utilizados para classificar estudantes em testes e exames.

Na tarefa de hoje vamos analisar as médias das notas do Exame Nacional de Matemática das diferentes escolas do concelho de Lisboa.

Nome da escola	Média no exame de Matemática
Escola Secundária do Restelo	13,01
Escola Básica e Secundária D. Filipa de Lencastre	12,82
Escola Secundária Pedro Nunes	12,23
Escola Secundária Rainha Dona Amélia	12,07
Escola Secundária António Damásio	11,91
Escola Artística de Música do Conservatório Nacional	11,90
Escola Secundária Rainha Dona Leonor	11,45
Escola Secundária Vergílio Ferreira	11,13
Escola Secundária Camões	10,81
Colégio Militar	10,76
Escola Secundária D. Luísa de Gusmão	10,42
Escola Secundária José Gomes Ferreira	10,24
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho	10,18
Escola Básica e Secundária Josefa de Óbidos	9,84
Escola Secundária Eça de Queirós	9,20
Escola Secundária D. Pedro V	8,96
Escola Secundária Padre António Vieira	8,76
Instituto Militar dos Pupilos do Exército	8,07
Escola Secundária D. Dinis	7,92
Escola Artística António Arroio	7,64
Escola Secundária Fonseca Benevides	7,48
Escola Básica e Secundária Gil Vicente	7,28
Escola Secundária do Lumiar	6,92
Escola Básica e Secundária Passos Manuel	5,01
Escola Secundária Marquês de Pombal	3,60

Fonte: Jornal Público, https://www.publico.pt/ranking-escolas/lugar-sua-escola#-1106

1. Quantas escolas fazem parte do estudo?

2. Relembre o conceito de mediana e calcule a mediana deste conjunto de dados.

3. A mediana dividiu a amostra em quantas partes?

4. Relembre o conceito de quartil. Indica o Q_2 e o Q_3.

5. Qual o significado dos resultados obtidos acima.

Os **percentis** dividem uma amostra ordenada em **cem partes iguais**, ajudando a compreender a posição relativa de um determinado valor. Cada percentil representa a posição de um dado em relação ao total, indicando a percentagem de valores que se encontra abaixo desse valor.
Por exemplo: Se uma criança estiver no percentil 80 (P_{80}) relativamente à altura, significa que 80% das crianças com a mesma idade são mais baixas ou da mesma altura.
Os percentis ajudam-nos a perceber melhor se um dado valor é baixo, médio ou alto.

6. Sem efetuar cálculos, indique o P_{50} e P_{75}.

Dada uma amostra ordenada com ***n* elementos** e $k \in \mathbb{N}$, tal que $0 < k < 100$, o **percentil de ordem *k*** é:

- se $\frac{k}{100} \times n$ não for inteiro, pelo valor de ordem $\boldsymbol{\left[\frac{k}{100} \times n\right] + 1}$ **(*)**
- se $\frac{k}{100} \times n$ for inteiro, pela média dos valores de ordem $\boldsymbol{\frac{k}{100} \times n}$ e $\boldsymbol{\left(\frac{k}{100} \times n\right) + 1}$

(*) $x \in \mathbb{R}$, então $[x]$ é o valor aproximado por defeito

7. Calcule o valor de P_{32}.

8. Calcule o valor de k para o qual P_k =11,90.

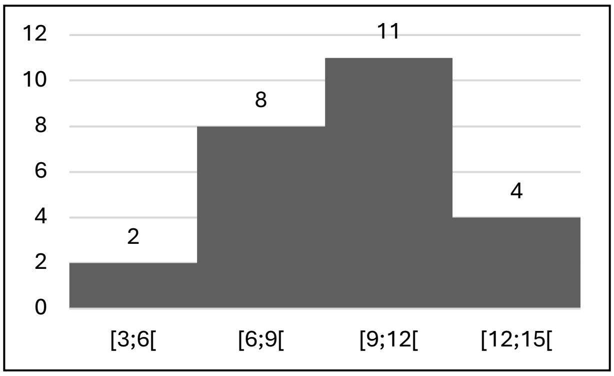
9. Complete a tabela abaixo para obter os dados organizados por classes.

Classes	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada
[3; 6[	2		0,08
[6; 9[			
[9; 12[	11	$\frac{11}{25} = 0{,}44$	0,84
[12; 15[	4		1
Total	25	1	

Para determinar percentis a partir de frequências relativas acumuladas basta enquadrar entre elas o percentil pretendido.
Por exemplo, se quisermos saber onde se situa P_{90}. Pensaríamos da seguinte forma:

- A frequência relativa acumulada da terceira classe é 84% e a da quarta classe é 100%.
- Como $84\% < 90\% < 100\%$, então o percentil de ordem 90 situa-se na quarta classe.

10. Indique onde se situa o percentil de ordem 56 e P_{32}.



Quando os dados são apresentados na forma de histograma é possível determinar os percentis através das áreas das barras respetivas.
A área de cada barra é calculada utilizando a seguinte fórmula:

$$Área = c \times l$$

Onde c representa a amplitude de cada classe e l o número de observações por classe.
O percentil de ordem k está na classe que ocupa $k\%$ da área total.

11. Utilizando o método da área indique em que classe se situa o percentil 74.

PERCENTIS - RESOLUÇÃO

Tarefa – Média da Escola no Exame de Matemática

1. 25 escolas

2. Mediana é o valor central, pois o número de escolas é ímpar.
$\frac{25+1}{2} = 13$, logo a mediana está na posição 13. Assim, a mediana é 10,18 (Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho).

3. Em duas partes iguais.

4. Os quartis dividem a amostra em 4 partes iguais.
$Q_2 = Mediana = 10{,}18$
$Q_3 = \frac{11{,}45+11{,}90}{2} = 11{,}675$

5. $Q_2 = 10{,}18$: significa que 50% das escolas tiveram nota inferior ou igual a 10,18
$Q_3 = 11{,}675$: significa que 75% das escolas tiveram nota inferior ou igual a 11,675

6. $P_{50} = Q_2 = 10{,}18$
$P_{75} = Q_3 = 11{,}675$

7. $\frac{32}{100} \times 25 = 8$ e $\frac{32}{100} \times 25 + 1 = 8 + 1 = 9$, logo teremos que calcular a média dos valores das posições 8 e 9.

$$\frac{8{,}07 + 8{,}76}{2} = 8{,}415 = P_{32}$$

8. 11,90 está na posição 20. Desta forma, $\frac{k}{100} \times 25 + 1 = 20 \Leftrightarrow k = \frac{19\times100}{25} \Leftrightarrow k = 76$. Logo é o P_{76}.

9.

Classes	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada
$[3; 6[$	2	$\frac{2}{25} = 0{,}08$	0,08
$[6; 9[$	8	$\frac{8}{25} = 0{,}32$	0,40
$[9; 12[$	11	$\frac{11}{25} = 0{,}44$	0,84
$[12; 15[$	4	$\frac{4}{25} = 0{,}16$	1
Total	25	1	

10. Como $40\% < 56\% < 84\%$, então o percentil 56 situa-se na classe $[9; 12[$.
Como $4\% < 32\% < 40\%$, então o percentil 32 situa-se na classe $[6; 9[$.

11.

$A_1 = 3 \times 1 = 3$
$A_2 = 3 \times 9 = 27$
$A_3 = 3 \times 11 = 33$
$A_4 = 3 \times 4 = 12$
$A_{total} = 3 + 27 + 33 + 12 = 72$

$74\% \times 75 = 55{,}5$

Então, $A_1 + A_2 < 55{,}5 < A_1 + A_2 + A_3$ logo o percentil 74 está na classe [6; 9[.

Anexo 5 – Aulas de dia 11 de dezembro (10.º Ano)

2. Estatística	Aula nº 54 e 55 10.ºC1 100 min
Sumário: Realização da tarefa: "Relação entre a altura e a envergadura dos alunos do 10C1".	**Material e recursos:** · Enunciado da tarefa para cada aluno · Calculadoras gráficas · Projetor · Fitas métricas

OBJETIVOS	AÇÕES A DESENVOLVER COM O ALUNO
· Determinar o coeficiente de correlação e a equação da reta de regressão recorrendo à tecnologia. · Construir um gráfico de linhas.	· Incentivar os alunos a resolverem autonomamente a tarefa proposta. · Incentivar a exposição e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos.

Desenvolvimento da aula

- Projeção do site gerador aleatório para a formação de grupos de trabalho.
- Distribuição dos enunciados da tarefa.
- Realização da Parte I – Recolha de Dados:
  - Cada grupo recolhe os dados dos respetivos elementos;
  - Cada grupo coloca os seus dados na tabela que estará projetada no quadro.
- Realização da Parte II - Coeficiente de correlação e regressão linear.

[fim dos primeiros 50 minutos]

- Discussão dos resultados obtidos pelos grupos na Parte II.
- Realização da Parte III - Gráfico de linhas.
- Discussão dos resultados obtidos pelos grupos na Parte III.
- Conclusão e reflexão sobre a tarefa realizada.

Notas importantes para a aula

- A tarefa será realizada com os alunos agrupados aleatoriamente (Random Team Generator: free online random group maker | RAKKOTOOLS) em dois grupos de 3 e os restantes em grupos de 4.

Competências transversais	Áreas de competência do perfil dos alunos
· Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e o raciocínio matemático. · Incentivar a comunicação, em particular a comunicação matemática entre os alunos e entre os alunos e a docente.	· B. Informação e comunicação · C. Raciocínio e resolução de problemas. · D. Pensamento crítico e pensamento criativo. · F. Desenvolvimento pessoal e autonomia.

Observações/Aprendizagem complementar

- No caso de os alunos terminarem a tarefa mais cedo, devem resolver os exercícios da página 114 a 117.

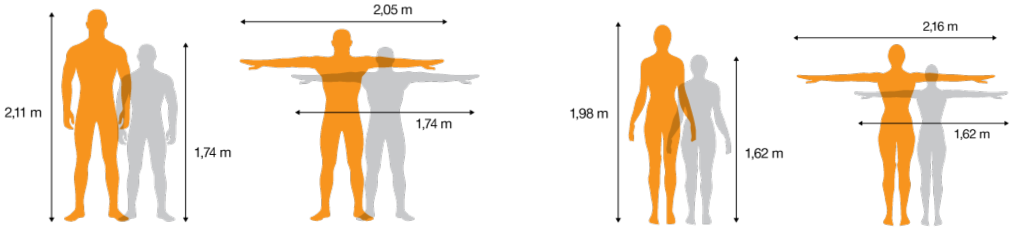
Trabalho autónomo (TPC)

- Página 115 - Exercício 40
- Página 116 - Exercício 41

Referências

- DGE (2018). Aprendizagens essenciais do ensino secundário. Matemática A, Ensino Secundário, 10.º ano. Janeiro 2023.
- Andrade, C., Pereira, J., & Pimenta, P. (2024). Matemática 360 10.º – Volume 1. Lisboa: Raiz Editora.

Relação entre as alturas e as envergaduras dos alunos do 10C1



Nesta tarefa, vamos estudar a relação entre as vossas alturas e envergaduras. Para isso, em primeiro lugar, precisamos de recolher os dados para os podermos analisar. De seguida, encontrar o coeficiente de correlação e a reta de regressão linear e, por último, construir gráficos de linhas.

PARTE I – Recolha de dados

Usando as fitas métricas disponíveis, meçam a altura e a envergadura de cada um (como mostram as imagens acima) e completem a tabela abaixo.

Nome	Altura (cm)	Envergadura (cm)

PARTE II - Coeficiente de correlação e regressão linear

1. Utilizando a calculadora gráfica, representem os dados recolhidos num diagrama de dispersão.

Temos analisado a relação linear entre duas variáveis estatísticas, considerada uma amostra bivariada, com alguma intuição. Para medir, com mais rigor, o grau desta associação linear, a medida que se utiliza com mais frequência é o **coeficiente de correlação** (de Pearson), que se representa por r.

2. Recorrendo às capacidades da máquina, calculem o coeficiente de correlação linear entre a altura e a envergadura.

3. Como se classifica a correlação entre estas duas variáveis?

Para se estudar a relação linear entre duas variáveis estatísticas, considerada uma amostra bivariada, pode utilizar-se o método designado por ajustamento da **reta de mínimos quadrados**, também designada por **reta de regressão** (linear). O objetivo deste método é, dada uma nuvem de pontos, determinar a reta que melhor se lhe ajusta. Vamos determinar as equações das retas de regressão recorrendo à tecnologia.

4. Utilizando a nuvem de pontos obtida anteriormente. Determinem, com o auxílio da tua calculadora, a equação da reta de regressão linear.

5. Supondo que chegaria um colega novo com 210 cm de altura, qual preveem que seria a sua envergadura?

NOTA: Nas páginas 174, 175 e 176 do manual, encontram indicações de como resolver estes exercícios utilizando a vossa calculadora.

PARTE III - Gráficos de linhas

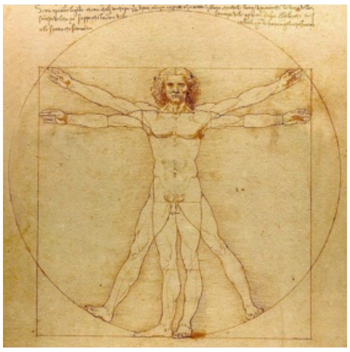
No 7.º ano, estudaram que pode ser útil recorrer a um gráfico de linhas para representar informação que varia ao longo do tempo. O gráfico de linhas é um caso particular de um diagrama de dispersão, em que se pretende estudar a evolução de uma das variáveis relativamente a outra, em vez da correlação entre as variáveis representadas. Para construir um gráfico de linhas, começa-se por marcar um sistema de eixos onde é representada no eixo horizontal a variável independente. Depois representam-se os pontos relativos aos dados da tabela e traçam-se segmentos de reta, de forma a unir cada ponto ao seguinte.

1. Vamos focar-nos, primeiramente, nos dados relativos ao sexo feminino da turma. Construam um referencial com as variáveis altura (x) e envergadura (y). No referencial, coloquem os pontos relativos aos dados em estudo. Para obter o gráfico de linhas, tracem segmentos de reta entre os pontos.

2. Utilizando os passos do exercício anterior, construam um gráfico de linhas para os dados do sexo masculino.

SABER MAIS…

A medida da extensão dos braços é utilizada como uma <u>alternativa para estimar a altura</u>, particularmente em indivíduos que não conseguem realizar a medida direta, devido a problemas na coluna ou dificuldades em manter a postura. Para idosos, a envergadura pode fornecer uma estimativa da altura máxima antes da perda óssea, relacionada com a idade. Assim, este método de medição é útil para medir pessoas em cadeiras de rodas, por exemplo, sendo uma <u>vantagem o facto de este poder ser realizado com a pessoa em pé, sentada ou deitada</u>.



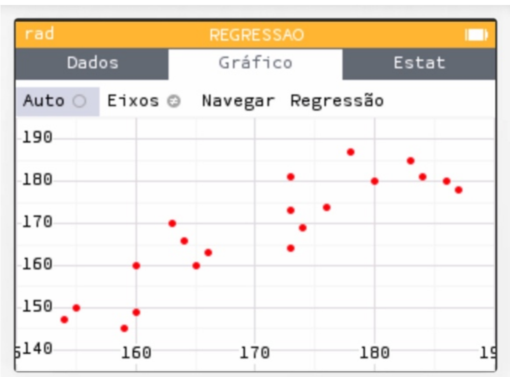
Correção - Relação entre as alturas e as envergaduras dos alunos do 10C1

PARTE I – Recolha de dados

Nome	Altura (cm)	Envergadura (cm)
[redacted]	173	173
[redacted]	164	166
[redacted]	187	178
[redacted]	178	187
[redacted]	166	163
[redacted]	154	147
[redacted]	183	185
[redacted]	173	181
[redacted]	173	164
[redacted]	160	160
[redacted]	163	170
[redacted]	165	160
[redacted]	186	180
[redacted]	155	150
[redacted]	174	169
[redacted]	159	145
[redacted]	-	-
[redacted]	-	-
[redacted]	180	180
[redacted]	160	149
[redacted]	176	174
[redacted]	184	181

PARTE II - Coeficiente de correlação e regressão linear

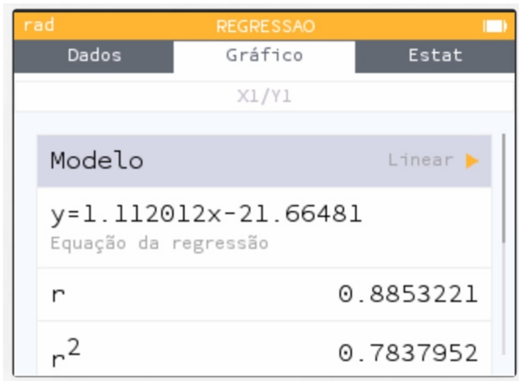
1.



2.

3. É uma correlação positiva forte.

4.



5. $210 = 1{,}112012x - 21{,}66481$

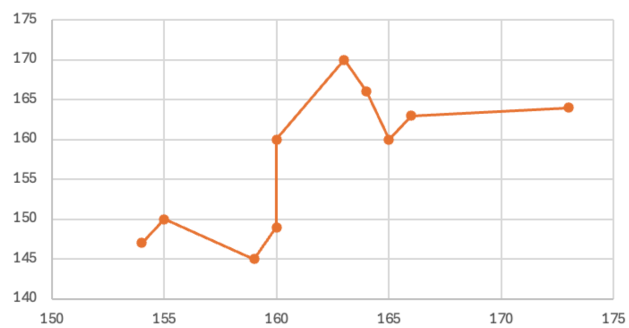
$\Leftrightarrow 231{,}66481 = 1{,}112012x$

$\Leftrightarrow \frac{231{,}66481}{1{,}112012} = x$

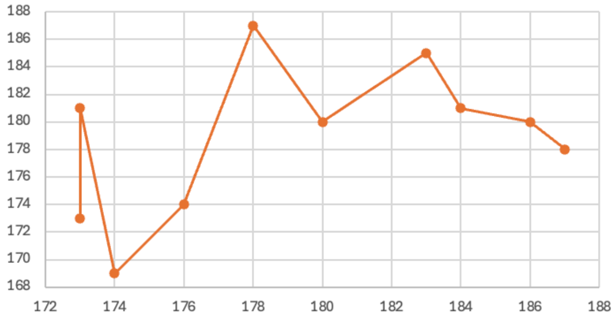
$\Leftrightarrow x = 208{,}33\ cm$

PARTE III - Gráficos de linhas

1.



2.


188
186
184
182
180
178
176
174
172
170
168
172
174
176
178
180
182
184
186
188

Anexo 6 – Aulas de dia 27 de maio (10.º Ano)

4. Geometria analítica	Aula nº 139 e 140 10.ºC1 100 min
Sumário: Resolução de uma tarefa sobre equações de retas vetoriais.	**Material e recursos:** · Enunciado da tarefa para cada aluno · Computador · Projetor · Manual

OBJETIVOS	AÇÕES A DESENVOLVER COM O ALUNO
· Perceber como definir uma reta com o auxílio de vetores.	· Incentivar os alunos a resolverem autonomamente a tarefa proposta. · Incentivar a exposição e a discussão de ideias, processos e resultados matemáticos.

Desenvolvimento da aula

- Inicio da aula com a formação de pares para a resolução da tarefa.
- Resolução da primeira parte da tarefa.
- Correção da primeira parte da tarefa no quadro
- Introdução às equações vetoriais de retas no espaço
- Resolução da segunda parte da tarefa.
- Correção da segunda parte da tarefa no quadro
- Realização de uma síntese final com a terceira parte da tarefa
- Conclusão da aula com a resolução da mesma

Notas importantes para a aula

- Os alunos devem realizar a tarefa a pares.
- Sempre que os alunos terminem a parte da tarefa a ser trabalhada devem iniciar a resolução dos exercícios de trabalho de casa até que essa mesma parte seja corrigida.

Competências transversais	Áreas de competência do perfil dos alunos
· Incentivar a comunicação, em particular a comunicação matemática entre os alunos e entre os alunos e a docente.	· B. Informação e comunicação · C. Raciocínio e resolução de problemas. · D. Pensamento crítico e pensamento criativo. · F. Desenvolvimento pessoal e autonomia.

Trabalho autónomo (TPC)

- Página 133, 134 e 163.

Referências

- DGE (2018). Aprendizagens essenciais do ensino secundário. Matemática A, Ensino Secundário, 10.º ano. Janeiro 2023.
- Andrade, C., Pereira, J., & Pimenta, P. (2024). Matemática 360 10.º – Volume 3. Lisboa: Raiz Editora.

TAREFA – EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

Parte I – Equação vetorial da reta no plano

1. Considere, num referencial o.n., a reta definida por

$$(x, y) = (-2,3) + k(1,7), k \in \mathbb{R}$$

1.1. Escreva as coordenadas de um ponto da reta com ordenada diferente de 3.

1.2. Escreva as coordenadas do ponto da reta cuja abcissa é igual a zero.

1.3. Escreva um ponto da reta que pertença ao 3.º quadrante.

1.4. Justifique que a reta não interseta a origem do referencial.

1.5. Calcule o declive da reta.

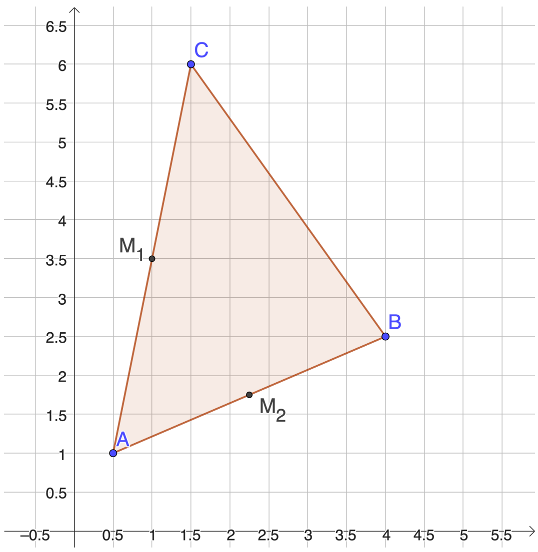
1.6. Qual a relação entre o declive da reta e o vetor diretor da reta?

1.7. Justifique a razão pela qual não é possível determinar pontos da reta no 4.º quadrante.

2. Na figura está representado no referencial o.n. o triângulo $[ABC]$. Os pontos M_1 e M_2 são os pontos médios dos segmentos de reta $[AC]$ e $[AB]$, respetivamente.

O ponto A tem coordenadas $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, o ponto B tem coordenadas $\left(4; \frac{10}{4}\right)$, o ponto M_1 tem coordenadas $\left(1, \frac{7}{2}\right)$ e $\overrightarrow{M_2C} = \left(-\frac{3}{4}; \frac{17}{4}\right)$.

Determine as coordenadas do baricentro do triângulo $[ABC]$.



NOTA: o baricentro é a interseção das medianas (segmento de reta que une o ponto médio ao vértice oposto).

Parte II - Equação vetorial da reta no espaço

1. Defina a reta que tem como vetor diretor $\vec{v} = (1,1,1)$ e passa pelo ponto $(3,2,4)$.

2. Defina a reta que contém os pontos $(2,1,0)$ e $(3,4,7)$.

3. Defina a reta s que passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, 3, \frac{4}{5}\right)$ e é paralela à reta definida no exercício 2.

4. Averigue se os pontos $(-2,2,-2)$, $(3,7,5)$ e $(9,2,4)$ se encontram sobre a mesma reta.

PARTE III - EM SÍNTESE...

1. Complete a síntese abaixo.

No plano:

O vetor $\overrightarrow{AB} =$ ___ $-$ ___, tem coordenadas $(x_B - x_A,$ ___ $-$ ___$)$.

Dada uma reta não vertical de declive m, o vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ é um vetor diretor da reta se, e só se, o declive da reta é $m =$ ____, com $u_1 \neq 0$.

Uma equação vetorial da reta que passa no ponto $A(x_A, y_A)$ e tem vetor diretor $\vec{v}(v_1, v_2)$ é:

____

No espaço:

Uma equação vetorial da reta que passa no ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e tem vetor diretor $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ é:

____

CORREÇÃO DA TAREFA – EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA

Parte I – Equação vetorial da reta no plano

1.

1.1. Para $k = 1$ tem-se que $(x, y) = (-2{,}3) + 1(1{,}7) = (-1{,}10)$

1.2. $\begin{cases} 0 = -2 + k \\ y = 3 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 3 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 3 + 7 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 17 \end{cases}$ logo o ponto de abcissa nula é $(0{,}17)$.

1.3. Para que um ponto pertença ao terceiro quadrante tem-se que $x < 0$ e $y < 0$ o que acontece caso $k = -1$.

$$(x, y) = (-2{,}3) + (-1)(1{,}7) = (-3, -4)$$

Logo um ponto da reta que está no terceiro quadrante é o ponto $(-3, -4)$.

1.4. $\begin{cases} 0 = -2 + k \\ 0 = 3 + 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ -7k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -\frac{3}{7} \end{cases}$, logo a reta não interseta a origem do referencial.

1.5. $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-4-17}{-3-0} = \frac{-21}{-3} = 7$

1.6. Seja $\vec{u}(u_1, u_2)$ vetor diretor da reta, então $m = \frac{u_2}{u_1}$

1.7. Para que um ponto pertença ao quarto quadrante tem-se que $x > 0$ e $y < 0$, ou seja,

$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + k > 0 \\ 3 + 7k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 2 \\ k < -\frac{3}{7} \end{cases}$ o que representa uma condição impossível.

2.

1.º - Determinar o ponto M_2

$$M_{[AB]} = \left(\frac{\frac{1}{2} + 4}{2} ; \frac{1 + \frac{10}{4}}{2} \right) = \left(\frac{9}{4} ; \frac{7}{4} \right)$$

2.º - Determinar a reta r que interseta o triângulo no ponto C e no ponto M_2

$$(x, y) = \left(\frac{9}{4} ; \frac{7}{4} \right) + k \left(-\frac{3}{4} ; \frac{17}{4} \right), k \in \mathbb{R}$$

3.º - Determinar o vetor $\overrightarrow{M_1B}$

$$\overrightarrow{M_1B} = B - M_1 = \left(4; \frac{10}{4} \right) - \left(1; \frac{7}{2} \right) = (3; -1)$$

4.º - Determinar a reta s que interseta o triângulo no ponto B e no ponto M_1

$$(x,y) = \left(1;\frac{7}{2}\right) + k(3;-1), k \in \mathbb{R}$$

5.º - Determinar o ponto de interseção das retas

$$\begin{cases} \frac{9}{4} - \frac{3}{4}k = 1 + 3k \\ \frac{7}{4} + \frac{17}{4}k = \frac{7}{2} - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{4} - \frac{3}{4}k = \frac{4}{4} + \frac{12}{4}k \\ \frac{7}{4} + \frac{17}{4}k = \frac{14}{4} - \frac{4}{4}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3k = 4 + 12k \\ 7 + 17k = 14 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4 = 12k + 3k \\ 7 - 14 = -4k - 17k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 15k \\ -7 = -21k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = k \\ \frac{1}{3} = k \end{cases}$$

$$(x,y) = \left(1;\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{3}(3;-1) = \left(1;\frac{7}{2}\right) + \left(1;-\frac{1}{3}\right) = \left(2;\frac{19}{6}\right)$$

O baricentro é o ponto $\left(2;\frac{19}{6}\right)$.

Parte II - Equação vetorial da reta no espaço

1. $(x,y,z) = (3,2,4) + k(1,1,1), k \in \mathbb{R}$

2. A (2,1,0) B (3,4,7)

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,4,7) - (2,1,0) = (1,3,7)$

$(x,y,z) = (2,1,0) + k(1,3,7), k \in \mathbb{R}$

3. $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, 3, \frac{4}{5}\right) + k(1,3,7), k \in \mathbb{R}$

4. $A(-2,2,-2)$ B(3,7,5) C(9,2,4)

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,2,-2) - (3,7,5) = (-5,-5,-7)$
$(x,y,z) = (-2,2,-2) + k(-5,-5,-7), k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} 9 = -2 - 5k \\ 2 = 2 - 5k \\ 4 = -2 - 7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 = -5k \\ 0 = -5k \\ 6 = -7k \end{cases}$, logo os pontos não estão sobre a mesma reta.

PARTE III - EM SÍNTESE...

No plano:

O vetor $\overrightarrow{AB} = B - A$, tem coordenadas $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Dada uma reta não vertical de declive m, o vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$ é um vetor diretor da reta se, e só se, o declive da reta é $m = \frac{u_1}{u_2}$, com $u_1 \neq 0$.

Uma equação vetorial da reta que passa no ponto $A(x_A, y_A)$ e tem vetor diretor $\vec{v}(v_1, v_2)$ é:

$$(x, y) = (x_A, y_A) + k(v_1, v_2), k \in \mathbb{R}$$

No espaço:

Uma equação vetorial da reta que passa no ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e tem vetor diretor $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ é:

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + k(v_1, v_2, v_3), k \in \mathbb{R}$$

Anexo 7 – Advento da Matemática

Na noite em que a família Eça montou a sua árvore de Natal, o Elfo andou a passear junto dela e, claro, teve uma ideia incrível: mexer nos enfeites da árvore!

Por cada bola que o Elfo tirou (), nasceram dois brócolos na árvore e, por cada estrela tirada (), teve de comer um dos brócolos. No entanto, quando o Elfo acendeu as luzes da árvore (), todos os brócolos desapareceram.

A sequência de ações realizadas pelo Elfo foi a seguinte:

PERGUNTA: Quantos brócolos tinha a árvore quando a família Eça acordou?

Na segunda noite, o Elfo estava com fome e, por isso, decidiu ir à cozinha.

Visto que a mãe da Família Eça gosta de antiguidades, o Elfo deparou-se com uma balança de pratos, decidindo sentar-se na mesma como mostra a imagem.

Sabe-se que o Elfo pesa 0,445 quilos (kg) e que os números inscritos nos pesos abaixo representam a massa em gramas (g) de cada um.

PERGUNTA: Qual é o menor número de pesos que a mãe da família Eça tem de colocar na balança para esta ficar equilibrada?

Na terceira noite, o Elfo andou a passear pelo armário de canecas da Família Eça e retirou as suas favoritas, deixando-as como a figura indica.

PERGUNTA: O Elfo quer colocar uma caneca em cima de cada pires. De quantas maneiras diferentes o pode fazer?

Na madrugada da véspera de Natal, O Elfo tem de regressar com o Pai Natal.

O comprimento do conjunto do trenó com três renas é de 8,6 metros (m). Se o Pai Natal levar seis renas, este comprimento passa a 15,2 metros.

PERGUNTA: Quantos metros de comprimento tem o trenó?

(Ignorando as distâncias entre cada rena e o trenó)

Alguns dias depois, a Família Eça pendurou na lareira as suas meias de Natal. Durante a noite, o Elfo descobriu 5 latas de spray e resolveu tornar as meias mais coloridas!

PERGUNTA: De quantas formas diferentes pode o Elfo pintar as meias de Natal, sabendo que utilizou cada spray apenas uma vez em cada meia?

A mãe e o pai da família Eça acabaram as compras das prendas de Natal. Depois de as embrulharem, colocaram-nas debaixo da árvore.

Sabe-se que cada laço precisa de 30 centímetros (cm) de fita e que cada prenda ficou num embrulho cúbico de 20 centímetros de lado.

PERGUNTA: Quantos centímetros de fita são necessários para decorar cada prenda?

Esta noite o Elfo quis fazer algo mais radical e pensou: “Nada melhor do que escalada!”. Como se vê na figura, utilizou os laços das prendas da família Eça para trepar a parede.

Sabe-se que a parede da sala tem 2 metros (m) de altura e que o Elfo colocou os laços de 12 em 12 centímetros (cm), usando todos os laços das prendas para chegar ao topo.

PERGUNTA: Quantas prendas tem a Família Eça debaixo da sua árvore?

Para apanhar a menina e o menino da Família Eça desprevenidos, o Elfo decidiu colocar pasta de dentes nas bolachas preferidas deles!

PERGUNTA: O tubo da pasta de dentes que a família Eça utiliza tem 75 mililitros (ml). Sabendo que esta tinha um terço do seu conteúdo e que o Elfo gastou 3 mililitros em cada bolacha, quantas bolachas conseguiu o Elfo fazer?

Numa das noites, o Elfo estava aborrecido e lembrou-se de chamar o seu irmão para o ajudar…

Resolveram pegar nos chocolates que estavam guardados no armário da cozinha e construir uma torre!

Pergunta: Sabendo que cada chocolate se assemelha a um prisma quadrangular com 6x6 (base) por 2 (altura) centímetros (cm) e que o volume da torre construída foi de 672 cm^3, que altura (em centímetros) tinha a torre?

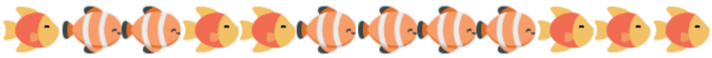
Antes de se ir deitar, a mãe Eça preparou uns bolinhos de mirtilo. Cada bolinho levou 6 mirtilos.

Como o Elfo se ia despedir do seu irmão mais novo nesta noite, decidiu servir-lhe alguns dos deliciosos bolinhos. O Elfo comeu 4 bolinhos sozinho, partilhou 7 com o seu irmão e o seu irmão ainda comeu mais meio bolinho.

Pergunta: Quantos mirtilos comeram os Elfos?

Quase a acabar as suas aventuras, o Elfo encontrou a comida do gato da casa e pôs-se à pesca com ela na casa de banho da família Eça… Mas deixou uma sequência bonita!

A sequência de biscoitos em forma peixinhos que o Elfo deixou na sanita foi a seguinte:

 ...

Pergunta: Supondo que o Elfo deixava 21 peixinhos, quantos seriam às riscas?

No jantar de Natal, o menino e a menina da família Eça ficaram na mesa com os primos.

Algumas das sobremesas existentes eram sonhos e rabanadas, 20 e 30 unidades, respetivamente.

Pergunta: Sabendo que a menina e um dos primos comeram, cada um, 3 sonhos e 2 rabanadas e que os restantes da mesa juntos comeram o dobro deles (total da menina e um dos primos), quantas unidades sobraram para o dia seguinte?

Anexo 8 – Autorização trabalho de investigação

Caro(a) Encarregado de Educação do(a) aluno(a) ______________________________________,

Venho por este meio solicitar a sua autorização para a participação do seu educando numa investigação, no âmbito do Estágio Curricular do Mestrado em Ensino da Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa.

Durante o período letivo dedicado ao estudo de Funções, serão realizadas tarefas em sala e as resoluções das mesmas serão recolhidas e analisadas para investigação. Também serão efetuadas algumas gravações de áudio de momentos de trabalho.

Salienta-se que o anonimato do seu educando estará sempre garantido.

Estamos à disposição para qualquer informação adicional.

A Professora de Matemática, A Professora Estagiária/Investigadora,

____ ____

Eu, ____, Encarregado de Educação do aluno ____, n.º_______, da turma 9.º A, autorizo a participação do meu educando na investigação dentro dos moldes que me foram descritos.

____

(Assinatura Encarregado de Educação)

Anexo 9 – Tarefa de investigação

TAREFA I – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1. Para a sua viagem de finalistas, as turmas do 9.ºD e do 9.ºE vão arrendar uma quinta na Figueira da Foz. A quinta terá um custo de 250 euros por noite. O grupo inicial, constituído por 20 alunos, concordaram com uma estadia de 4 noites. Depois da turma pesquisar um pouco sobre o destino escolhido, surgiram de imediato mais alguns alunos interessados.
   A Maria Inês, que fazia parte do grupo de alunos responsável pela seleção da quinta, ao perceber a forte adesão, teve de imediato a ideia de que poderiam ficar mais alguns dias pela cidade!
   Qual é o número de elementos que se devem juntar ao grupo, para que a estadia seja de 13 noites sem que se verifique um aumento do custo por noite?
   Mostrem como chegaram ao vosso resultado.

Resolução:

A quinta tem um custo de 250€ por noite.

Inicialmente, os alunos iriam passar 4 noites logo a constante de proporcionalidade inicial é dada por $4 \times 250 = 1000$€.

A função que relaciona o valor que cada aluno pagará (y) com o número de alunos (x) é:

$$y = \frac{1000}{x}$$

Assim conseguimos concluir o valor que cada um dos 20 aluno iria pagar: $y = \frac{1000}{20} = 50$€.

Assim, cada um dos 20 alunos teria de pagar 50€.

Para passarem 13 noites, a constante de proporcionalidade altera-se para $13 \times 250 = 3250$€.

A função que relaciona o valor que cada aluno pagará (y) com o número de alunos (x) é:

$$y = \frac{3250}{x}$$

$$50 = \frac{3250}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3250}{50} \Leftrightarrow x = 65 \text{ alunos}$$

Assim, teremos de subtrair aos 65 alunos os 20 que já estavam inscritos. $65 - 20 = 45$.

Resposta: Para que o valor por pessoa se mantenha, terão de se juntar 45 alunos ao grupo inicial.

2. Para realizarem a viagem os alunos têm as seguintes opções: comboio ou autocarro alugado. Na tabela abaixo está a velocidade média de cada um dos meios de transporte. Sabe-se que a distância entre a estação do Oriente (ponto de encontro) e a estação de Coimbra-B é de 180 km e que a distância entre Coimbra-B e a Figueira da Foz é de 48 km. O tempo de espera entre os comboios é de uma hora.
Se a viagem for feita por um autocarro alugado, o autocarro percorre 195 km sem paragens.

Meio de transporte	Comboio alfa	Comboio urbano	Autocarro
Velocidade média	150km/h	80 km/h	75 km/h

O Duarte e o Joaquim fazem parte da organização da viagem e pensaram no seguinte:
Joaquim: O comboio atinge uma velocidade muito superior à do autocarro, com toda a certeza que é mais rápido.
Duarte: Apesar de a viagem de comboio ser mais rápida, acabamos por demorar mais tempo uma vez que teremos de contar com o tempo de espera em Coimbra-B. Ir de autocarro será o mais rápido!

Qual dos dois amigos tem razão?
Mostrem como chegaram aos vossos resultados.

Resolução:

Comboio:

Oriente – Coimbra-B

$$y = \frac{180}{x}$$

$$150 = \frac{180}{x} \Leftrightarrow x = \frac{180}{150} \Leftrightarrow x = 1{,}2 \text{ horas}$$

Coimbra-B – Figueira da Foz

$$y = \frac{48}{x}$$

$$80 = \frac{48}{x} \Leftrightarrow x = \frac{48}{80} \Leftrightarrow x = 0{,}6 \text{ horas}$$

Assim, para as viagens de comboio seriam necessárias 1,8 horas. Adicionando o tempo de espera na estação de Coimbra-B temos que, no total, os alunos demorariam 2,8 horas para chegarem ao seu destino.

Autocarro:

$$y = \frac{195}{x}$$

$$75 = \frac{195}{x} \Leftrightarrow x = \frac{195}{75}$$

Assim, de autocarro os alunos demorariam 2,6 horas a chegar ao seu destino.

Resposta: O Duarte tem razão uma vez que de comboio demorariam mais 0,2 horas.

3. Durante a estadia, os alunos decidiram fazer as suas refeições na quinta. O restaurante da quinta tem mesas de 5 pessoas. Os 65 alunos demoram 20 minutos até estarem todos sentados e a escolher a sua refeição.
Após isso os empregados dirigem-se às mesas. Cada empregado demora 8 minutos por mesa a anotar os pedidos e a trazê-los para os alunos.
O número de empregados da quinta permitiu servir todos os alunos (anotar os pedidos e trazê-los para as respetivas mesas) em 26 minutos.
Quantos empregados tinha o restaurante da quinta?
Mostrem como chegaram aos vossos resultados.

Resolução:

Para distribuir 65 alunos por mesas de 5 são necessárias $\frac{65}{5} = 13$ mesas.
Se 1 empregada demora, no total, 8 minutos por mesa, para descobrir a constante de proporcionalidade devemos multiplicar esse tempo pelo número de mesas, ou seja, $13 \times 8 = 104$.

Deste forma, a função que relaciona o tempo que demoraram no serviço (y) com o número de empregados (x) é:

$$y = \frac{104}{x}$$

Para demorarem apenas 26 minutos:

$$26 = \frac{104}{x} \Leftrightarrow x = \frac{104}{26} \Leftrightarrow x = 4 \text{ empregados}$$

Resposta: O restaurante da quinta tem 4 empregados.

Anexo 10 – Tarefa de investigação 2

TAREFA 2 – FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

1. Leia atentamente o problema:

   A direção da escola decidiu organizar uma visita de estudo a um parque aventura com o objetivo de premiar os alunos pelas suas excelentes notas. Para alugar o parque aventura e o transporte até ao mesmo, a escola pagou 1450€. *Este valor será dividido por todos os alunos. O Duarte só pode ir à viagem se o valor for 25 euros. Quantos alunos terão de se inscrever para que o Duarte consiga ir à viagem?*

   A partir do enunciado acima, formulem um novo problema.
   Apresentem uma proposta de resolução para ambos os problemas.

Resolução do problema apresentado:

Sabemos que a constante de proporcionalidade é 1450€.
Então, a função que representa o valor a pagar por aluno (y) em função do número de alunos (x) é dada por:

$$y = \frac{1450}{x}$$

Como o Duarte só pode gastar 25€, então

$$25 = \frac{1450}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1450}{25} \Leftrightarrow x = 58 \text{ alunos}$$

Resposta: Para que o Duarte possa ir à viagem, deverão inscrever-se 57 alunos.

Formulação de um problema

Alguns jovens querem ir passar uma semana das suas férias num parque aventura.
Sabe-se que no total pagaram 994€ e que cada um pagou 71€.
Quantos jovens foram ao parque aventura?

Resolução do problema formulado

Sabemos que a constante de proporcionalidade é 994€.

Então, a função que relaciona o valor pago por cada um (y) em função do número de jovens (x) é dada por:

$$y = \frac{994}{x}$$

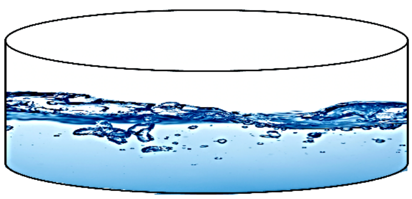
Como cada jovem pagou 71€,

$$71 = \frac{994}{x} \Leftrightarrow x = \frac{994}{71} \Leftrightarrow x = 14 \text{ jovens}$$

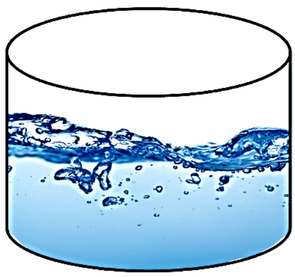
Resposta: Foram ao parque aventura 14 jovens.

2. Com base nas figuras abaixo, **formulem um problema** que possa ser resolvido com uma função proporcionalidade inversa, sabendo que a constante é o volume dos cilindros.

Apresentem uma proposta de resolução para o vosso problema.



- $altura = 4$
- $raio\ da\ base = 7$
- $Volume = 196\pi$



- $altura = 7$
- $raio\ da\ base = \sqrt{28}$
- $Volume = 196\pi$

Formulação de um problema

Para guardar o seu sumo preferido, o Daniel utiliza um copo cilíndrico com um volume de 196π, como os apresentados na figura.

As prateleiras onde guarda o sumo têm de largura $2\sqrt{14}$ cm que fica totalmente preenchida pelo copo.

Qual é, em centímetros, a altura do copo do Daniel?

Resolução do problema formulado

Sabemos que a constante de proporcionalidade é dada pelo volume 196π.

Então, a função que relaciona a altura do copo (y) com a área da sua base (x) é dada por:

$$y = \frac{196\pi}{x}$$

Como a parteleira têm de largura $2\sqrt{14}$ cm, então o raio da base do copo é dada por $\frac{2\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$ cm.

Desta forma, a área da base é dada por $A_{base} = \left(\sqrt{14}\right)^2 \pi = 14\pi$.

$$y = \frac{196\pi}{14\pi} \Leftrightarrow y = \frac{196}{14} \Leftrightarrow y = 14 \text{ jovens}$$

Resposta: a altura do copo do Daniel é de 14 cm.

3. **Formulem um problema** que possa ser traduzido matematicamente pela seguinte expressão:

$$y = \frac{720}{x}$$

Definam o significado de x, y e do 720 no contexto do vosso problema.

Apresentem uma proposta de resolução para o vosso problema.

Formulação de um problema

Para adquirir uma máquina de lavar e secar roupa de 720€, o Daniel resolveu pagar em algumas prestações.

Escreva uma expressão que relacione o número de prestações com o preço a pagar e indique quanto pagará por prestação se demorar 4 meses a pagar a máquina.

Resolução do problema formulado

O valor da constante de proporcionalidade é 720€, pelo que a função é

$$y = \frac{720}{x}$$

Como o Daniel vai dividir em quatro prestações, basta calcular $f(4)$.

$$f(4) = \frac{720}{4} = 180€$$

Resposta: O Daniel terá de pagar 180 euros por prestação.

Anexo 11 – Transcrição dos diálogos da primeira tarefa

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

ESTUDO DE CASO UM: ANA E BEATRIZ – ITEM UM

Ana (A): Nós metemos os dados que no caso são: vinte alunos, duzentos e cinquenta euros por noite, isso no caso de quatro dias. Então agora vais fazer, calma. Duzentos e cinquenta, né?
Beatriz (B): Vezes quatro.
A: Calma... como é que é? Ah, ok aqui.
B: É ok.
A: Calma.
B: Duzentos e cinquenta...
A: Duzentos e cinquenta vezes quatro, isto era suposto fazermos de cabeça que é...
A e B: Mil!
B: Mil euros. Portanto quatro noites vai ficar mil euros. Escreve aí quatro noites equivale a mil euros.
A: Exato.
B: O que é que ele nos pede mais?
A: Agora é...
A: Antes só havia vinte alunos. Então agora mil a dividir por vinte né?
B: Pode ser sim.
A: Mil a dividir por vinte... acho que não vai dar um número....
A e B: Cinquenta!
A: Pronto. Mil a dividir por vinte...
B: Dá cinquenta euros.
A: Dá cinquenta euros por cada aluno. Não está caro! Mas depois... cada um vai ter de pagar vinte euros por quatro noites.
B: Não, mas eles pensaram assim: poderíamos ficar mais alguns dias.
A: Eles querem ficar mais tipo... treze dias, mas querem que o valor seja cinquenta na mesma, então temos que fazer...
B: Não é isso.
A: Sim, sim olha lá. Qual é o número de elementos que se deve juntar ao grupo para que a estadia seja de treze noites sem que se verifique o aumento do custo.... eles iam pagar cinquenta euros pelos quatro dias. Então agora temos que fazer treze vezes duzentos e quarenta...

B: Cinquenta! Duzentos e cinquenta!

A: Não, não... aí é duzentos e cinquenta?

B: Treze vezes duzentos e cinquenta!

A: Eita... dá três mil duzentos e cinquenta.

B: Pera, o que é que estás a fazer? Eu acho que está aí...

A: Calma, temos de ver quanto daria isto.

B: Portanto, estás a dizer que em.... não isto está errado!

A: Não. Agora, calma. Pelo que eu entendi eles querem ver quantos alunos é que têm de juntar, tipo imagina estes vinte...

B: Sim! Vai ficar cinquenta...

A: Para dar cinquenta durante esses treze dias.

B: Então vá, vinte a dividir por...

A: Então agora...

B: Dá cá!

A: Não!

B: Pera aí! Agora fazes vinte...

A: Trezentos e vinte. Não, não. Três mil duzentos e cinquenta a dividir por vinte. Depois vais ver quanto é que isso vai dar e tens de aumentar, eu acho.

B: Três mil duzentos e cinquenta a dividir por vinte.

A: Dá cento e sessenta e dois euros vírgula cinco. Tá, calma. Pronto, então agora deu cento e sessenta e dois... agora esses vinte alunos temos de aumentar para dar cinquenta euros.

B: Então vá, vamos por tentativas agora.... Três mil duzentos e cinquenta...

A: A dividir por trinta, mete a dividir por trinta agora.

B: Aí, errei. Pera aí.

A: Eia, vai ter de ser a dividir por cinquenta! Para dar um número mais pequenino...

B: Três mil duzentos e cinquenta...

A: Aposto que vai ser sessenta alunos, vais ver! Vês! Mete lá a dividir por sessenta. Oh...

B: Está quase.

A: Sessenta e quatro! Sessenta e quatro alunos. Eu não disse?

B: Mas está errado.

A: Oh... sessenta e cinco alunos então.

A e B: Yeah!!!

A: Então vão ser precisos sessenta e cinco alunos, tá? Tentativa erro, né? Mas como é que chegámos aos sessenta e cinco?

B: Então vais por tentativas... Resposta! O número de elementos que se devem juntar ao grupo para que a estadia.... tens de fazer a resposta!

A: Tá bem...

B: Estadia seja...

A: São quarenta e cinco, né?

B: Não, sessenta e cinco.

A: Não! Os alunos que se devem juntar, eles já estão aí vinte! Lembraste?

B: Ahhh. Sessenta e cinco menos vinte!

A: Sim, então que é quarenta e cinco né?

B: É melhor fazermos na calculadora!

A: Resposta... devem juntar-se, né? Não calma, é o número...

B: O número de elementos que se devem juntar ao grupo para que a estadia seja treze noites sem que se verifique o aumento...

A: Espera! Está errado, não está bem. Não está errado. Não, não está bem.

B: Não está errado, nós fizemos mil euros por cada dia.

A: .... sem que se verifique o aumento do custo por noite é quarenta e cinco. Só que nós aqui não explicámos como chegámos aos sessenta e cinco...

B: Escreve assim, fomos por tentativas.

A: Tá bem. Fomos por tentativa erro.

B: Agora metes aqui entre parenteses.

A: Agora mete um asterisco e mete aqui de lado as tentativas.

B: Não, eu estou a meter aqui. Tá?

ESTUDO DE CASO DOIS: CAROLINA E DANIEL – ITEM UM

Daniel (D): Vamos começar. Cada noite é duzentos e cinquenta euros.

Carolina (C): Hum hum, ou seja, mil a dividir...

D: Se eu tiver vinte alunos, eu pago duzentos e cinquenta euros por noite.

C: Por noite, ou seja, vinte alunos por quatro noites é mil euros.

D: Sim. Mil euros, quatro noites.

C: Qual é o número de elementos que se deve juntar ao grupo para que a estadia seja de treze noites sem que se verifique um aumento do custo... desculpa, mas isto é impossível, se tu vais adicionar dias e cada dia é duzentos e cinquenta.

D: Não vai aumentar o valor por noite, vai manter-se igual.

C: Não, vai aumentar...

D: Não. O valor por noite é igual.

C: Ah... temos de adicionar bué alunos. Imagina com trinta alunos vai ficar...

D: Não, se ficar menos alunos...

C: Não, a constante é treze. Pronto. Agora já temos vinte alunos por isso, duzentos e cinquenta vezes treze.
D: Esse é o preço dos vinte alunos.
C: Ou seja, duzentos e cinquenta euros vezes treze noites.
D: Se tivesse vinte alunos seria esse preço.
C: Não!
D: Sim, esse é o preço por noite. Eu dividi isso aí por vinte para descobrir o preço que cada pessoa paga. Doze virgula cinco é o preço que cada pessoa paga.
C: Cada pessoa, agora...
D: Qual é o número de elementos? São dezanove.
C: Não é nada.
D: É sim, faz com dezanove. Com dezanove elementos vai ficar mais caro.
C: Sem que se verifique um aumento do preço. Não é dezanove.
D: Porque é que não é dezanove? Fica mais caro.
C: Mas é suposto ficar igual...
D: Não, tem de ficar mais caro.
C: Sem que se verifique um aumento do custo por noite!
D: Ah... Então... pronto vinte e um.
C: Mete para trinta.
D: Vinte e um!
C: Cala-te! Já não te consigo ouvir.
D: Qualquer número maior que vinte! É qualquer número maior que vinte.
C: Duzentos e cinquenta a dividir por vinte igual a doze virgula cinco euros por pessoa. Ou seja, cada pessoa no início pagava isto.
D: Sim, são vinte pessoas.
C: Ou seja, as contas. Que temos de fazer para aqui tem de dar doze virgula cinco.
D: O quê?
C: Para se manter constante.
D: Sim... Não!
C: Sem que se verifique um aumento de custo.
D: Pode baixar...
C: Não! Pode ficar igual ou baixar.
D: Sim, então qualquer número maior que vinte.
C: Se para quatro noites uma pessoa pagava doze virgula cinco quantas noites é que são?... Regra de três simples. Doze virgula cinco vezes quatro a dividir por doze virgula cinco... dá quatro. O que estávamos a tentar descobrir?
D: Boa.... Não sei.

C: Opa claro que sim! Para!!!

D: Boa....

C: Para!!!

D: Então espera, qualquer número maior que vinte, não é qualquer número maior que dezanove. Qualquer número maior que dezanove dá certo.

C: Não! Estás-me a baralhar.

D: Qualquer um!

C: Isto aqui foi... tu baralhaste-me.

D: Vinte, vinte e um, vinte e dois, vinte e três, vinte e quatro... qualquer número vai dar certo.

C: Não! Como é que vinte vai dar isto?

D: Pode dar um número maior que isso.

C: Ok, mas se nós dividirmos isto por vinte e dá isto, então se dividirmos por vinte e um dá menos.

D: Sim, exatamente é o que importa. Dá menos. Eu só não quero que aumente.

C: A tua calculadora está estragada. Eu vou buscar a minha.

D: Meu deus... Se eu dividir por um número maior, o resultado vai ser menor.

C: Sim, eu percebo isso... só que esta parte está mal.

D: Tá mal, não é a calculadora que está estragada?

C: Não, fui eu que meti mal.

D: Ahhh!

C: E agora? Três mil duzentos e cinquenta a dividir por vinte e um, não dá estás a ver?

D: Dá menor.

C: Mas é suposto dar isto...

D: Não é suposto dar menor que isto.

C: Doze virgula cinco...

D: Aumentou o custo?

C: Não...

D: Isso é por noite... não, isso é por pessoa. Espera aí, han? O que nós estamos a fazer?

C: Não, vá. Não sei.

D: Qualquer número menor que dezanove dá certo.

C: Não dá! Porque as noites também aumentaram então eles vão pagar mais pelas noites.

D: Então... por noite... isto aqui é por aluno. Agora divide pelas noites!

C: Não! Então... tens vinte alunos e eles pagam duzentos e cinquenta por noite. Ou seja, duzentos e cinquenta vezes quatro que dá mil. Que é o custo que vinte alunos vão pagar por quatro noites.

D: Sim.

C: Pronto. Então agora fazemos…Não fazemos isto, não fazemos isto. Já percebi, treze noites vão ser três mil duzentos e cinquenta.
D: Sim. É qualquer número maior que vinte e um.
C: Não é...
D: Porque não?
C: Não estás a apresentar nada, eu é que estou para aqui a escrever...
D: Se for vinte e um vezes cinquenta... não.
C: Estás a calcular pelas noites.... ouve duzentos e cinquenta euros por noite. Por noite!
D: Sim... vinte e um vezes cinquenta...
C: E eles querem saber treze noites.
D: Treze vezes duzentos e cinquenta... isso a dividir por vinte e um, a dividir por treze.
C: O que é que estás a fazer?
D: É onze euros por noite.
C: Tu não podes fazer só na calculadora, tens de me explicar.
D: Eu tenho o preço por noite, né?
C: Sim.
D: Duzentos e cinquenta euros por noite vezes treze dias...
C: Sim, já fiz isto, está aqui. Isso está errado!
D: Isso é o preço por noite...
C: Não, é nada.
D: É como então?
C: Duzentos e cinquenta vezes treze que é o que está aqui.
D: Agora a dividir por quanto? Vinte e um...
C: Onde foste buscar os vinte e um.
D: Vai dar um número menor, a dividir por treze. Este aqui é o preço por noite.
C: Mas eu não quero saber o preço por noite. Está aqui a dizer o número de elementos.
D: Maior que vinte.
C: Jura que tem de ser maior que vinte.
D: Então essa é a resposta.
C: Não... tens de dizer qual é o número.
D: Duzentos e cinquenta vezes treze... a dividir por vinte e um, a dividir por treze. Vai ser igual a, aproximadamente, um virgula cento e noventa. E um virgula nove é menor que... qual é o valor dos vinte alunos?
C: Eu não estou a perceber isso.
D: Não estás a perceber porquê? Vai dar doze virgula cinco. Pronto.
C: Não é assim.
D: O que a gente não sabe, passa.

C: Tens de dar um número certo...
D: Não tenho nada.
C: Qual é o número.
D: Tem vários... vinte e um, vinte e dois, vinte e três, vinte e quatro, vinte e cinco.
C: Oh professora, mas estes duzentos e cinquenta são por pessoa?
Investigadora (I): Não... os duzentos e cinquenta são por noite!
D: Pela casa, ou seja, não aumenta.
I: Não aumenta, eu posso levar dez, vinte, trinta pessoas vou pagar sempre duzentos e cinquenta.
C: Duzentos e cinquenta por noite, vezes quatro noites. Vinte alunos vão pagar mil euros. Quantos alunos é que... espera eu vou chegar lá. Vamos por tentativas, vamos meter quarenta. Mil vezes quarenta a dividir por vinte.
D: Mostra lá!
C: O Daniel está-me a irritar. O que dá menos, vinte vezes... Isto não faz sentido...
D: Se forem quatro noites para os vinte alunos, é vinte a dividir por... duzentos e cinquenta vezes quatro é mil. Vinte a dividir por mil, não é ao contrário. Mil a dividir por vinte é...
C: Cinquenta!
D: Sim, cinquenta. Esse é o preço que eles pagam por noite. Agora, quantas pessoas é preciso adicionar para que em treze noites, eles continuem a pagar cinquenta euros.
C: Muitas...
D: Eu sei que cinquenta é o valor que eles pagam, ou seja, x sobre cinquenta vezes treze. Calma, estou a pensar.
C: Cinquenta significa o quê?
D: É o preço se forem quatro noites. Quanto é cinquenta vezes treze? Seiscentos e cinquenta a dividir por x é igual a...
C: O que é que eu preciso de descobrir?
D: Quantas pessoas é preciso adicionar para que cada pessoa pague cinquenta euros. Eu sei que.... Quanto é o valor de treze noites? Três mil duzentos e cinquenta a dividir por x é igual a cinquenta. Eu acho que é isso! Três mil duzentos e cinquenta a dividir por cinquenta é igual a x. Eu sei que sessenta e cinco é igual a x.
C: Hãn?
D: Sessenta e cinco elementos, sessenta e cinco pessoas.
C: Espera... Preço por noite... em quatro dias... são quatro noites... é suposto descobrir. quê? Treze noites?
D: Treze noites, cinquenta euros.
C: Cinquenta vezes nove.

D: Porquê nove?

C: Porque nove mais quatro é treze.

D: Não vais fazer vezes treze. Porquê treze?

C: Pessoas... Noites!

D: Pera, você sabe que... temos de fazer uma equação com o x.

C: Não.

D: Porquê? Não gosta de equações?

C: Nove vezes...

D: Porquê nove? São treze noites e não nove.

C: Mas já estão quatro noites...

D: Mas porquê nove?

C: Nove mais quatro são treze noites. Não podes multiplicar por treze porque são nove noites!

D: Mas, o que eu quero saber é... se eu tiver x pessoas, cada pessoa paga cinquenta euros por treze noites.

C: Hãn?

D: Em treze noites, se forem vinte pessoas. Vão ser mil a dividir por vinte que é igual a cinquenta. Não é mil é três mil duzentos e cinquenta.... Três mil duzentos e cinquenta a dividir por vinte é o preço que se vinte pessoas forem vai pagar isso. Agora quantas pessoas precisam de ir para ser cinquenta. Ou seja, três mil duzentos e cinquenta a dividir por x dá cinquenta!

C: Hãn?

D: Ou seja, três mil duzentos e cinquenta a dividir por x dá cinquenta, certo?

C: Deixa ver a equação. Passa para cá vezes igual a cinquenta. x igual a três mil duzentos e cinquenta vezes cinquenta.

D: Hãn?

C: Então, está a dividir passa a multiplicar.

D: Não! O x está a dividir! Três mil duzentos e cinquenta é igual cinquenta vezes x. Ponho no mesmo denominador, lembraste?

C: Não... uma simples equação como é que é possível

D: É do primeiro grau essa

C: Pera... mas...

D: Agora é normal....

C: Espera.

D: Sim, dá sessenta e cinco.

C: Dá quanto?

D: Sessenta e cinco.

C: x é o número de pessoas?

D: Sim, sessenta e cinco é a resposta.

ESTUDO DE CASO TRÊS: EUGÉNIO E FREDERICO – ITEM UM

Eugénio (E): Igual a duzentos e cinquenta vezes quatro. Para quatro noites é preciso mil euros.
Frederico (F): Para vinte é mil euros.
E: Como assim para vinte?
F: São vinte alunos e os vinte alunos têm dinheiro para as quatro noites. O objetivo é achar quantos alunos é que são precisos por treze noites. É só dividirmos por cinco os alunos, não é?
E: Mas a noite é duzentos e cinquenta euros por noite, não tem a ver com os alunos.
F: Não está nada, é para te confundir.
E: A noite é duzentos e cinquenta, tu tens vinte alunos. Os alunos é que mudam! Os alunos é que vão pagar menos.
F: Quantos dinheiros... elementos é que tem de estar para treze noites? É o mesmo dinheiro, essa é a questão! Estás a perceber?
E: Não está a fazer sentido....
F: Eles têm de continuar a pagar mil euros.
E: Para mais quatro noites, sim...
F: Para mais... não são quatro noites. São nove.
E: Não mil euros dá quatro.
F: Certo. Mas agora com mais alunos conseguem cada um pagar menos.
E: Não, cada um banca mais. Está certo!
F: Certo, e cada aluno tem cinquenta euros.
E: Para treze noites, divides vinte por cinco.
F: O quê?
E: Calma, isso não faz sentido. Pera!
F: Sabes que cada aluno tem de pagar cinquenta euros.
E: Certo. Ya, divides vinte por quatro depois duzentos e cinquenta pelo resultado e depois fazes vezes treze.
F: Cada aluno quer pagar cinquenta euros.
E: Cinquenta vezes treze?
F: Boa pergunta.... Cinquenta vezes treze dá seiscentos e cinquenta.
E: Não, calma. Não fez sentido...
F: Não faz sentido.
E: Enganei-me, desculpa. Cinquenta vezes cinco. Não, calma. Estás-me a confundir, calma. É que eu não escrevi. Pera. Então vinte a dividir por cinco igual a não... a dividir por quatro igual

a cinco. Duzentos e cinquenta a dividir por cinco igual a cinquenta. Ou seja, duzentos e cinquenta é quatro dias né? Não, duzentos e cinquenta euros é quatro noites?
F: Não, duzentos e cinquenta euros é quatro noites. É mil euros por quatro noites e três mil duzentos e cinquenta por treze noites.
E: Então calma. Duzentos e cinquenta é por noite.
F: Certo.
E: Ou seja, vinte está para quatro... regra de três simples.
F: Certo!
E: Vinte está para quatro...
F: Como x está para treze.
E: Treze vezes vinte.
F: Boa pergunta.
E: É fácil, duzentos e sessenta.
F: Duzentos e sessenta a dividir por quatro que dá sessenta e cinco.
E: Sessenta e cinco alunos.
F: Achas que é isso?
E: Não sei, estou com preguiça de pensar.
F: Sessenta e cinco vezes cinquenta dá quanto? Três mil duzentos e cinquenta que foi o que me deu.
E: Ya, então tá certo.
F: Três mil duzentos e cinquenta a dividir por sessenta e cinco é igual a cinquenta. Resposta seria necessário... dá três mil duzentos e cinquenta que é o preço de treze noites, a conta deu-nos certa. Seriam necessários para juntar ao grupo.... o grupo tem vinte. Então sessenta e cinco menos vinte é igual a quarenta e cinco. Seriam necessários juntar-se ao grupo mais quarenta e cinco alunos.

ESTUDO DE CASO UM: ANA E BEATRIZ – ITEM DOIS

A: Vá, dados...
B: Comboio urbano demora mais tempo que o autocarro... como é que é possível?
A: Vamos! Porque ele para mais vezes.
B: Verdade!
A: Vá, vamos meter os dados.
B: Não demora nada, isto é, quilómetros por hora que ele está a andar não é a distância.
A: Vá, vamos...
B: Dados!
A: Entre a estação do Oriente...

B: Calma, mete só estação do Oriente a Coimbra, cento e...

A: Faz uma setinha assim, é cento e oitenta. Tá... E agora, Coimbra-B... estou a fazer assim e Figueira da Foz.

B: Coimbra-B... que é cento e oitenta quilómetros. E depois de Coimbra-B e Figueira da Foz...

A: Tempo de espera é de uma hora.

B: É de quarenta e oito quilómetros, então tempo de espera entre comboios é de uma hora. Eia, o tempo de espera... mete tempo de espera!

A: Sim e autocarro alugado...

B: Tens de meter entre comboios.

A: Eu sei...

B: Fogo uma hora é muito.

A: Ok, já está.

B: E, depois é autocarro alugado, cento e noventa e cinco quilómetros sem paragens.

A: Vá, o que é que queremos saber?

B: Nós queremos saber qual dos dois amigos tem razão. Se é o Joaquim ou se é o Duarte.

I: O alfa é o que vai do Oriente para Coimbra e o urbano é o que vai de Coimbra para a Figueira.

B: Mas eles vão partir de onde?

I: O alfa vai do oriente até Coimbra, depois eles em Coimbra têm de esperar, não é? E depois vão de urbano até à Figueira.

B: Quanto é que é cento e cinquenta quilómetros por hora? Demora quanto tempo?

A: Deve ser uma hora e cinquenta.

B: Mais uma hora, mete aqui mais uma hora. Eles ainda têm de trocar, é uma hora.

A: Bem pensado!

B: Temos de ver quanto é que é isto aqui para lá e isto aqui para lá e depois este aqui para lá.

A: Boa!

B: Cento e cinquenta quilómetros por hora é quanto tempo? Como é que nós descobrimos?

A: Nós temos de fazer a regra de três simples.

B: Eu sei. Então se é cento e cinquenta...

A: Professora, como é que se faz... Como é que eu descubro cento e cinquenta quilómetros. Em hora?

I: Está aí... cento e cinquenta quilómetros por cada hora. O que é que eu quero agora saber?

B: Hãn?

I: Cento e cinquenta quilómetros por cada hora.

B: E como é que nós sabemos quanto tempo é que isto demora a chegar lá?

I: Então, qual é a distância?

B: Cento e cinquenta quilómetros por hora, temos de fazer uma regra de três simples.

I: Já leram o enunciado?

A: Já.
I: Então leiam lá para mim, vá.
A: Para realizarem a viagem os alunos têm as seguintes opções comboio ou autocarro alugado. Na tabela abaixo está a velocidade média de cada um dos meios de transporte. Sabe-se que a distância entre Lisboa Oriente, ponto de encontro, e a estação de Coimbra-B é de cento e cinquenta quilómetros e que a distância entre a estação de Coimbra-B e a Figueira da Foz é de quarenta e oito quilómetros. O tempo de espera entre os comboios é de uma hora. Se a viagem for feita de autocarro alugado, o autocarro percorre cento e... Ah... cento e cinquenta quilómetros mais quarenta e oito quilómetros.
I: Então é isso que têm de fazer.
A: Não entendi. Ok, mas quanto é que vale esta hora, professora?
B: Isso não é preciso saber.
I: Esta hora vale sempre uma hora. Por cada hora, este comboio percorre oitenta quilómetros. Por cada hora, a hora é sempre uma hora. Que pergunta é essa, quanto é que vale uma hora?
B: Então, já estou a entender.
A: Podes-me explicar?
B: Cento e cinquenta...
A: Ahhh... Entendi.
B: Duzentos e vinte e oito, então... oh stôra e agora? Este duzentos e vinte e oito, nós sabemos que quando o comboio alfa chegar a Coimbra demora 1 hora para chegar...
A: Está errado, porque não é cento e cinquenta este aqui é quarenta e oito.
B: Mais quarenta e oito do outro.
A: Mas este aqui é daqui. Oh meu deus.
B: Não! Os cento e cinquenta quilómetros é do Oriente até Coimbra. E depois de Coimbra até à Figueira da Foz são quarenta e oito quilómetros.
A: Que é daqui não é daqui.
B: Então, tá bem. Mas tens de somar as duas: a viagem de comboio toda à mesma.
A: Não é nada.
B: A professora disse que a viagem de comboio tinhas de apanhar os dois para lá chegar.
A: O comboio alfa percorre cento e cinquenta numa hora, então cento e cinquenta...
B: Em uma hora, mas ele vai fazer cento e cinquenta quilómetros até chegar ao sítio. Portanto, cento e cinquenta quilómetros é quantas horas? Temos de descobrir.
A: Cinquenta, portanto cinco, seis, sete vai ser uma hora e trinta. Porque isto já tem aqui uma hora dá cento e cinquenta, para cento e cinquenta dá trinta minutos. Faz sentido, não é?
B: Sim, é uma hora e trinta.
A: Ok, então.
B: Porque é que para cento e cinquenta e não duzentos.

A: Porque isto aqui...
B: São quilómetros por hora, mas ele vai demorar cento e cinquenta quilómetros a chegar lá.
A: Então, já temos que vai ser uma hora que é cento e cinquenta aqui temos cento e cinquenta e depois mais trinta minutos.
B: Então é uma hora e trinta que ele demora a chegar lá.
A: Sim.
B: Comboio alfa cento e cinquenta quilómetros é igual a uma hora e trinta minutos.
A: Mete assim: comboio alfa.
B: Não é preciso pores comboio alfa, dá para ver pelos dados.
A: Uma hora e trinta, porque...
B: E agora... quarenta e oito quilómetros é quanto? Quarenta minutos né?
A: Como é que nós vamos explicar isto, nós temos de explicar.
B: Mas quem vai estar certo aqui é o Duarte.
A: Então vá espera aí, cento e cinquenta quilómetros por hora é igual a uma hora e trinta minutos.
B: Então agora, urbano...
A: Agora vamos fazer do comboio urbano, a mesma coisa que fizemos. Nós sabemos que oitenta é uma hora, portanto quarenta e oito não chega a uma hora.
B: Pois não, então é quarenta minutos.
A: Não.
B: Eu acho que é quarenta e tal.
A: Dá vinte. Portanto tem de ser...
B: Trinta.
A: Não, espera aí.
B: Está alguma coisa errada nisto.
A: Não, vamos fazer assim oitenta menos quarenta e oito que dá trinta e dois, portanto são trinta e dois minutos.
B: Ya. Agora calma, temos de juntar. Uma hora e trinta mais trinta e dois minutos certo? É isso. Vai dar duas horas e dois minutos. Ya.
A: Calma o que é que o Duarte está a dizer.
B: É duas horas e dois minutos, não é? Calma, trinta mais trinta e dois dá sessenta e dois minutos. Dá?
A: Uma hora e trinta mais zero virgula trinta e dois mais um.
B: Não, olha é assim. Uma hora e trinta mais trinta e dois minutos dá duas horas e dois minutos.
A: Mais o tempo que têm de esperar.
B: Mais uma hora, então três horas e dois minutos.

A: Faz diferença.

B: Pronto três horas e dois minutos. Comboios...

A: Pera.

B: Joaquim dois pontos três horas... porque o Joaquim é que é o apoiante dos comboios. Joaquim igual a três horas e dois minutos. E agora o Duarte? Temos de calcular o Duarte.

A: Isso está errado, dos comboios não vai dar isso.

B: Está sim, vamos fazer o do Duarte e depois vemos isso. Estás a pôr na calculadora é claro que não. Não sabes como é que se faz.

A: Como é que se faz, diz lá.

B: Uma hora tem quantos minutos?

A: Ahhh... sessenta.

B: Então e dá para dar duas horas e sessenta e dois minutos? Vá a sério...

A: Opah podes parar de me...

B: Estás a querer somar horas na calculadora.

A: Calma. Não dá para somar horas na calculadora, stôra?

B: Não! Ela tá-me a dizer que uma hora e trinta mais trinta e dois minutos é duas horas e sessenta e dois minutos, claro que não. É duas horas e dois minutos.

A: Desculpa!

B: E, depois duas horas e dois minutos mais uma hora é três horas e dois minutos.

A: Chata!

B: Pronto agora o Duarte, temos de ver quanto é que é cento e noventa e cinco quilómetros.

A: Pera aí.

B: Agora, cento e noventa e cinco quilómetros é igual...

A: Tá e agora o que é que nós precisamos de saber? Isto é o que vai dar...

B: O percurso do Joaquim dá três horas e dois minutos. Vou por percurso de comboio.

A: Ok, o Joaquim vai-nos dar três horas e...

B: Então agora cento e noventa e cinco quilómetros é quantas horas?

A: Espera quanto é que...

B: A fazer setenta e cinco quilómetros por hora a velocidade.

A: Então sabemos que setenta e cinco é uma hora. Ok, então quanto é que é setenta e cinco...

B: É setenta e cinco menos noventa, não é?

A: Não...

B: Então?

A: Calma, deixa me pensar. Nós sabemos que o autocarro percorre numa hora setenta e cinco quilómetros e aqui está a dizer que percorre cento e noventa e cinco sem paragens. Portanto supostamente...

B: Não, não. Vai dar três horas e tal.

A: Portanto está errado. Espera, mais... dá quanto?
B: Porquê vinte e cinco?
A: Porque é só até chegar....
B: Até chegar a cento e noventa e cinco, então é setenta e cinco mais setenta e cinco...
A: Mais quanto?
B: Mais trinta.
A: Setenta e cinco mais setenta e cinco dá cento e cinquenta. Cento e cinquenta mais...
B: Mais trinta!
A: Não é trinta!
B: Cinquenta, então sessenta, setenta, oitenta, noventa... é quarenta. Não, quarenta e cinco. Vês?
A: Uau! Tu fazes aí as contas que eu fazia na calculadora.
B: Pois... tu fazes na calculadora, não confias na minha cabeça.
A: Então vá, é uma hora mais uma hora mais quarenta e cinco minutos. Entendeste? Nós sabemos que setenta e cinco é uma hora...
B: Ahhh! Já percebi então vai dar duas horas e quarenta e cinco minutos.
A: Faz assim, setenta e cinco quilómetros mais setenta e cinco quilómetros mais quarenta e cinco quilómetros é igual a cento e noventa e cinco quilómetros. Ok? E depois fazemos assim isto aqui é igual a duas horas mais quarenta e cinco minutos.
B: Pronto.
A: Nós escrevemos assim setenta e cinco mais setenta e cinco que é igual a duas horas mais quarenta e cinco. Isto tudo vai dar cento e noventa e cinco quilómetros que fica duas horas e quarenta e cinco minutos.
B: Quem tem razão é o Duarte, pronto. Resposta, eu vou pôr Duarte.
A: O amigo que tem razão é o Duarte.

ESTUDO DE CASO DOIS: CAROLINA E DANIEL – ITEM DOIS

D: O que é que é para fazer, resume!
C: Não, lê... Espera.
D: Estou esperando.
C: Então, a distância entre a estação do Oriente e a estação de Coimbra é cento e cinquenta quilómetros.
D: Qual é a pergunta?
C: Espera! E a distância entre Coimbra e Figueira da Foz é quarenta e oito quilómetros. E eles têm o intervalo de uma hora. Por isso, daqui para aqui...
D: Hum?

C: Quando tu trocas de comboio em Coimbra para Figueira da Foz é uma hora. Pronto. Se a viagem for feita de autocarro alugado, o autocarro percorre cento e noventa e cinco quilómetros sem paragens. Pronto.
D: Eu já descobri que é o autocarro a resposta, mas eu não sei porquê. Vamos lá. Basicamente.... Quantos são os quilómetros total? A distância entre Lisboa Oriente e Coimbra-B... ou seja a distância total é duzentos e vinte e oito quilómetros, certo?
C: Cento e cinquenta mais oitenta...
D: Sabe-se que entre a estação do Oriente e a estação de Coimbra-B... a distância total é de duzentos e vinte e oito quilómetros. Certo?
C: Cento e cinquenta mais oitenta... Pera! Estou a ver a velocidade média. Vai dar duzentos e trinta de velocidade média. E aqui eles vão ter de fazer cento e cinquenta quilómetros mais quarenta e oito quilómetros... duzentos e vinte e oito quilómetros..., mas vão esperar mais duas horas, ou seja...
D: O autocarro vai fazer cento e noventa e cinco.
C: Velocidade média.
D: O que é que estás a fazer?
C: Pronto...
D: Quanto demora para fazer uma paragem?
C: Uma hora...
D: O autocarro é sem paragens, mas eu preciso de duzentos e vinte e oito. E de carro?
C: Não há carro!
D: E de autocarro? Ok...
C: Mas óbvio que o autocarro é mais rápido.
D: Cento e noventa e cinco a dividir por setenta e cinco dá dois virgula seis. Ou seja, ele demora dois virgula seis horas para ir de autocarro e de trem? Calma aí, está dividido em dois, ou seja...
C: Quilómetros por hora.
D: Calma, o alfa vai de onde até onde?
C: Do Oriente até Coimbra.
D: E é cento e cinquenta, cento e cinquenta a dividir por cento e cinquenta é igual a... Um virgula dois e quarenta e oito a dividir por setenta é zero virgula seis. Zero virgula seis mais um virgula dois é igual um virgula oito. Cento e noventa e cinco a dividir por setenta e cinco é dois virgula seis. Somam-se os dois. Este aqui é mais rápido, o comboio. Ahhh... falta o tempo, mais uma hora. Ok...
C: Estou cansada.
D: Resposta é o Duarte.
C: Mas como é que chegaste a isso?

D: Já te mostro. Duarte está certo. Olha aqui 195...
C: Espera.
D: Estou esperando, estou calmo. Sem pressa. Cento e noventa e cinco é o número de quilómetros de ónibus, a setenta e cinco quilómetros por hora. Cento e noventa e cinco a dividir por setenta e cinco, certo? Que dá dois virgula seis. Duas virgula seis horas é o tempo que vou demorar.
C: Sim.
D: Agora de comboio, cento e cinquenta é o número de quilómetros que demoro no meu comboio alfa a dividir por cento e cinquenta...
C: Mas tens de meter cento e cinquenta mais quarenta e oito.
D: Sim. Não, um virgula dois agora o outro. Quarenta e oito a dividir por oitenta...
C: Ok, tanto faz.
D: Dá zero virgula seis.
C: Um virgula dois mais zero virgula seis vai dar a mesma coisa.
D: Um virgula dois mais zero virgula seis dá quanto? Um virgula oito. Agora um virgula oito mais um que é uma hora. Um virgula oito mais um...
C: Não, mais duas horas.
D: São duas?
C: É uma de cada.
D: É só uma...
C: Entre os comboios é uma hora.
D: Entre os comboios, então é só uma.
C: Não, há duas horas.
D: Entre os comboios é no meio dos dois. Ou seja, dois virgula oito.
C: Hum, hum.
D: Ou seja, dois virgula oito ou dois virgula seis qual é que é menor? Esse. Então de autocarro é mais rápido. Logo o Duarte está certo.
C: Espera. Cento e noventa e cinco quilómetros a dividir por setenta e cinco quilómetros por hora, corta quilómetros com quilómetros dois virgula seis por hora. Agora duzentos e vinte e oito quilómetros a dividir por duzentos e trinta quilómetros por hora, corta, corta. Igual a um... Como é que vai dar um virgula oito?
D: Foi?
C: Não, está-me a dar errado. Estás-me a ouvir?
D: Tá? Porquê? Duzentos e trinta?
C: Porque eu juntei o quarenta e oito também.
D: Qual destes é o autocarro.
C: Espera! Deixa-me explicar. Este é o autocarro este o comboio

D: Não pode juntar assim!
C: Porquê?
D: Não pode juntar assim tudo junto. Tem de separar.
C: Não era isto para riscar, era isto.
D: Meu deus.
C: Duzentos e trinta quilómetros por hora.
D: Duzentos e trinta? É cento e cinquenta!
C: Cento e cinquenta quilómetros por hora...
D: A dividir...
C: Vamos lá. Cento e cinquenta quilómetros a dividir por cento e cinquenta quilómetros por hora, corta, corta.
D: Cortaste os quilómetros?
C: Sim. Agora quarenta e oito quilómetros a dividir por oitenta quilómetros por hora, corta, corta. Zero virgula seis horas. Um virgula dois mais zero virgula seis vai dar um virgula oito horas. Ah. Mais a uma hora de paragem igual a dois virgula oito horas. Dois virgula seis horas maior, não... menor que dois virgula oito horas. Resposta... não vou fazer isto, o Duarte está certo.

ESTUDO DE CASO TRÊS: EUGÉNIO E FREDERICO – ITEM DOIS

F: Começamos por dividir a folha ao meio e fazemos os cálculos para cada um.
E: Hã?
F: Percebeste a pergunta?
E: A pergunta é qual deles é mais rápido.
F: Então fazemos...
E: Mas porque é que dividimos a folha ao meio?
F: Dividimos a folha ao meio para fazermos um de cada lado.
E: Ah. Não estava à espera de que fizesses um risco ao meio da folha.
F: Vamos começar pelo autocarro que é mais fácil.
E: Então, o autocarro percorre cento e noventa e cinco quilómetros. O comboio percorre cento e cinquenta...
F: Cento e noventa e cinco a dividir por setenta e cinco...
E: O comboio percorre cento e cinquenta mais quarenta e oito. Que é igual a duzentos e vinte e oito.
F: Cento e noventa e cinco a dividir por setenta e cinco...
E: O autocarro vai a setenta e cinco quilómetros por hora. Ora cento e noventa e cinco sobre...
F: O autocarro demora duas virgula seis horas.

E: Duas virgula seis. Duas virgula seis horas é o quê?

F: Sessenta a dividir por seis dá dez. Sessenta a dividir por zero virgula seis?

E: É dez.

F: Mas não é isso que eu quero.

E: Então queres o quê?

F: Dois virgula seis horas é quanto?

E: Uma hora é quanto?

F: Sessenta minutos.

E: Dois vezes... não dois não. Sessenta vezes dois virgula seis.

F: Zero virgula cinco horas é trinta.

E: Sessenta vezes dois virgula seis. Cento e cinquenta e seis... ok, está errado. Então fazes sessenta vezes dois mais sessenta a dividir por zero virgula seis que dá... igual a um virgula oito. Agora sessenta vezes um virgula oito mais sessenta... cento e sessenta e oito minutos.

F: Dá dois virgula oito.

E: É possível, é que eu fiz em minutos.

F: Seis vezes oito dá quarenta e oito. Cento e vinte mais quarenta e oito dá cento e sessenta e oito que foi o que te deu.

E: Então queres que eu descubra as horas, né? É um virgula oito horas.

F: Não, dá dois virgula oito horas.

E: Não, dá um virgula oito horas. Ah, ok certo. Dá dois virgula oito. Porque tens de somar aquela de espera. Agora, qual dos dois amigos tem razão? O Duarte...

F: Porque é que somaste uma hora aqui e uma hora aqui?

E: Eu não somei!

F: Porque é que está aqui mais sessenta?

E: Então porque é mais uma hora.

F: Porque é que somas um virgula oito horas com sessenta?

E: Eu estou a somar isto com isto

F: Isto é uma multiplicação? Ah... o teu sinal de vezes parece-se com um mais.

E: Está meio inclinado, eu não tenho quadriculas! Resposta: Duarte.

F: Aquele que tem razão é o Duarte. Aquele que tem a razão do seu lado...

E: Não... tens de ser mais direto Frederico.

ESTUDO DE CASO UM: ANA E BEATRIZ – ITEM TRÊS

A: Vamos meter então os dados.

B: Dados: sessenta e cinco alunos.

A: Não! Mesas com cinco pessoas.

B: Não... sessenta e cinco alunos e depois é mesas.
A: Primeiro é mesas com cinco pessoas.
B: Isso não interessa. Posso meter a ordem errada. Sessenta e cinco alunos demoram vinte minutos a sentar e a escolher a refeição. Cada empregado demora oito minutos por mesa. Nós precisamos de dizer quantos empregados havia no restaurante da quinta sabendo que são sessenta e cinco alunos e eles demoraram a estarem sentados e a escolherem a refeição. E os empregados demoram oito minutos por mesa e cada mesa tem... tem de ser sessenta e cinco a dividir por...
A: Cada mesa tem cinco pessoas.
B: Sessenta e cinco pessoas, quantas mesas precisamos para sessenta e cinco pessoas? Temos de começar por aí e depois é bué fácil de fazer. Temos de ver quantas mesas precisamos para sessenta e cinco alunos.
A: Espera, estou baralhada. Calma.
B: Vou por demoraram vinte e seis minutos a servir todos os alunos.
A: Tá.
B: Então para sessenta e cinco quantas mesas de cinco pessoas é preciso? Mete aqui... calma. Não dá para fazer sessenta e cinco a dividir por...
A: É oito vezes... Oh professora, nós não estamos a perceber uma coisa, aqui é o número total também dos alunos que demoraram a sentar ou é...
I: Eles demoraram vinte e seis minutos. Mas reparem uma coisa, após isso, ou seja, depois deles se sentarem é que os empregados vão fazer o serviço de mesa.
A: Então isto aqui... ok.
I: Ou seja, estes vinte minutos entram aqui nestes vinte e seis?
A e B: Não.
B: Calma estou a tentar chegar, acho que é preciso treze mesas. Ya! É preciso treze mesas.
A: Para quê?
B: Então, vão haver treze mesas de cinco pessoas.
A: Então, nós chegámos à conclusão vão haver treze mesas de cinco pessoas. Eram só treze mesas?
B: Não, eram cinco a dividir por treze mesas. Ah, não. Está errado.
A: É só sessenta e cinco a dividir por cinco, que é igual a treze mesas.
B: É só sessenta e cinco a dividir por cinco. Eu cheguei à mesma resolução.
A: Que é igual a treze mesas.
B: Vou escrever aqui: os alunos ocupam treze mesas. Pronto. Agora, Ana essas treze mesas eles demoram... tem de ser treze vezes oito.
A: Ok. Boa.
B: Dá cento e quatro. Então é uma hora e 4 minutos.

A: Uma hora?!

B: Não, uma hora nada. Está errado! Esquece.

A: Se calhar é uma hora.

B: É uma hora.

A: Não vai dar uma hora, vai dar uma hora e tal.

B: Hã? Isso é impossível. Não, nós temos de ver qual é o número de empregados que é preciso para eles só demorarem vinte e seis minutos. Ya... devia ter muitos.

A: Pronto, está errado. Esquece o treze vezes oito.

B: Não, mas é.... Tem de ser o treze vezes oito. Isto vai dar para alguma coisa. Estou-te a dizer. Então há treze mesas, cada uma tem cinco pessoas e eles dizem que demoram oito minutos por mesa a anotar os pedidos e a trazer os pedidos. Há treze mesas...

A: Nós temos de descobrir o número de empregados da quinta.

B: Que permitiu servir todos os alunos. E quantos empregados tinha o restaurante da quinta.

A: Em vinte e seis minutos, quer dizer que vai ser vinte e seis não vai ser uma hora.

B: Então... tens de ter calma né? Agora vais descobrir o número de empregados.

A: Beatriz, isso não é preciso.

B: Tá bem. Então não é preciso. Fogo. Então vá calma. Haviam treze mesas. Eles só podem demorar vinte e seis minutos. Mas olha sabes que cada empregado demora oito minutos por mesa e se houver mais que um empregado por mesa? Calma. Isto é muito confuso, muito...

A: Vai dar três...

B: Oh stôra, isto aqui está muito confuso. Nós fizemos primeiro.... quisemos saber quantas mesas é que havia para os sessenta e cinco alunos. Fizemos sessenta e cinco a dividir por cinco que vai dar treze. Pronto, temos treze mesas para os sessenta e cinco alunos. E depois eu fiz, a Ana diz que está errado, mas eu fiz os treze vezes oito. Porque eles demoram oito minutos por cada mesa. Mas isso está a dar cento e quatro...

I: Mas isso é se for um empregado demora cento e quatro minutos.

A e B: Ahhh!

B: Eu não te disse, então há mais que um empregado por mesa.

A: Temos de fazer oito vezes cinco empregados... dá quarenta...

B: Não, mas tem de dar vinte e seis. Faz oito por dez.

A: Oito a dividir por dez?

B: Oito a dividir por dez nada, oito a dividir por sete. Não por oito. Não, oito a dividir por sete. Não é a dividir é vezes. Então oito vezes sete.

A: Calma. Tens treze mesas. É um empregado por cada mesa, certo?

B: Não, mas estes cento e quatro minutos é se fosse um empregado para as treze mesas. Estás a entender?

A: Exato.

B: Então nós precisamos disto...

A: Os oito minutos é um empregado. Tens de fazer oito vezes, por exemplo, sete que vai dar cinquenta e seis. Que vai ser sete empregados.

B: Então... oito vezes treze. Um empregado para cada mesa. Não achas que fica melhor?

A: Pera aí. Dá cento e quatro.

B: Sim...

A: Treze a dividir por cento e quatro...

B: Não... cento e quatro minutos é o que uma pessoa demora a servir uma mesa toda. E nós precisamos de dizer quantos é que demoram... quantos empregados é que é necessário para demorarem apenas vinte e seis minutos.

A: Beatriz, o número oito aqui...

B: É o tempo do empregado demora em uma mesa.

A: Beatriz, esquece o tempo. O oito é tipo um empregado. Se fosse dezasseis eram dois empregados.

B: Então, isso já eu sei. Eu estou-te a dizer que este oito é o tempo que um empregado demora numa mesa.

A: Sim.

B: Então estás a dizer que não.

A: Calma. Então cento e quarenta... aí quanto é que dava?

B: Isso é se fosse um empregado sozinho em treze mesas, demorava cento e quatro minutos. Eu acho que devíamos dizer quantos empregados é que é preciso para dar apenas vinte e seis minutos.

A: Espera.

B: Então tens de fazer treze vezes dezasseis ou vezes sei lá quanto. Não, dezasseis nada esquece. Oh stôra...

A: Então, vamos fazer cento e quatro a dividir por treze dá oito no total.

B: Isso já sabias, oh stôra. Nós já sabemos, né? Aquilo que a stôra disse que os cento e quatro minutos é de um empregado ir às treze mesas. Mas imagine que há mais empregados, cada um está numa mesa. Cada um deles vai demorar pelo menos oito minutos, certo?

I: Um empregado demora cento e quatro minutos, se forem dois empregados quanto tempo vão demorar?

B: Então vai ser cento e quatro a dividir por dois.

I: Pronto!

B: A dividir por três...

A: Ah... já me lembro. Já percebi.

B: Agora é cento e quatro por oito. Então vá divide cento e quatro... pera, calculadora!

A: Beatriz, está errado.

B: Opa, que foi?

A: É ao contrário.

B: Hã?

A: É ao contrário. É assim. O empregado que é oito por treze mesas é igual a cento e quatro minutos. Ah.... Pera aí... não estou a perceber. Então, dois empregados por mesa. Calma aí.

B: Então cento e quatro a dividir por dois dá cinquenta e dois.

A: Cinquenta e dois...

B: Só que a dividir por três não dá um número certo. Dá aproximadamente trinta e quatro. Ah... depois é cinquenta e dois a dividir por três.

A: Não, é trinta e quatro está certo.

B: Porque é que aqui está dezasseis?

A: Porque eu fiz errado, aqui é dois.

B: Aqui é dois. Tá... então três não dá.

A: Três não dá.

B: A dividir por quatro é vinte seis minutos! Oh quatro empregados.

A: Boa!!!

ESTUDO DE CASO DOIS: CAROLINA E DANIEL – ITEM TRÊS

C: Vamos fazer desenhos.

D: Espera aí, ele demorou vinte minutos para sentar.

C: Sim, pelos vistos. Então, temos uma mesinha. Cada mesa tem um, dois, três, quatro, cinco.

D: Ou seja, há treze mesas.

C: Cala-te. Treze, é treze, não é? A dividir por treze. Por isso há treze mesas. Vezes treze. Achas muito mau eu fazer treze mesas.

D: O quê? Vai desenhar as mesas?

C: Vou. Não vou.

D: É melhor não.

C: Já está errado.

D: Calma aí, eu sei que...

C: Ou seja, um empregado. Vamos fazer aqui cabelo nos empregados para distinguir.

D: Calma, calma, calma.

C: Cada empregado demora oito minutos. O número de empregados da quinta permitiu servir os alunos... isto é para uma mesa. Por isso, oito vezes treze.

D: A equação resolve.

C: Eu estou a chegar lá, espera. Então este para treze mesas vai dar cento e quatro minutos. E agora? Cento e quatro a dividir por vinte e seis. Que dá quatro. Há quatro empregados.

D: Quatro empregados? Está bem. Quatro?
C: Está certo. Não está? Os desenhos resolveram tudo.
D: Há algo errado, espera aí. Estou a pensar.
C: Queres explicação com os desenhos?
D: Não, com os desenhos não. Porquê quatro? Ah.... já entendi.
C: Vais deixar assim?
D: Não, estou a pensar. Quero fazer de uma forma que não seja com desenhinhos,

ESTUDO DE CASO TRÊS: EUGÉNIO E FREDERICO – ITEM TRÊS

F: Vamos para o três?
E: Eu já estou no três. A mesa dá para cinco pessoas.
F: Oh professora, tenho aqui uma pergunta. Os alunos demoram vinte minutos a escolher as coisas e depois cada empregado demora oito minutos. E aqui diz que acabam tudo em vinte e seis, como é que isto faz sentido?
I: Não, calma. Eles demoram vinte minutos até estarem todos sentados e a escolher a refeição. Mas depois disso e agora é que começa a interessar, depois disso eles dirigem-se às mesas. Os empregados vão às mesas e demoram oito minutos a anotar os pedidos e a trazê-los para os alunos.
F: Então os vinte minutos não importa para nada? Ok. Há quantas mesas?
E: Sessenta e cinco a dividir por cinco que é... trinta.
F: O quê? Não é nada, é treze.
E: Ya. Isto está a haver muitas coincidências. Na primeira resposta também foi treze.
F: Eram treze noites.
E: Está muito esquisito. A próxima resposta é três mil duzentos e cinquenta euros.
F: Mas agora são empregados. Queres apostar que são quatro?
E: Ou seja, sessenta e cinco alunos.
F: São treze mesas e demoram oito minutos por mesa. Vinte e seis a dividir por oito dá quanto?
E: Calma. Há treze mesas.
F: Treze mesas em vinte e seis minutos dá dois minutos por mesa.
E: Dá o quê? Isso não interessa.
F: Pois não...
E: Então oito vezes quatro?
F: Quarenta e oito.
E: Oito vezes três?
F: Trinta e dois. Não, oito vezes quatro é que é trinta e dois.
E: Então isto está errado.

F: Vamos por tentativas?
E: Ou seja, independentemente de tudo vinte e seis tem de ser múltiplo de oito. Ou não, pelos vistos. Imaginando que são treze mesas com treze empregados.
F: São treze empregados!
E: Não são. Para demorar vinte e seis minutos não podem ser treze, tem de ser menos. Entendeste o problema? Então se forem treze empregados para treze mesas, demoram oito minutos. Certo? Olha regra de três simples outra vez.
F: São quatro empregados.
E: Pois, na calculadora a tentar todos os números também consigo. Porque é treze vezes oito que é igual a cento e quatro e depois fazemos cento e quatro...
F: A dividir por vinte e seis minutos.
E: O que tens de fazer aqui é pegar no cento e quatro que está para...
F: Queres que eu te diga?
E: Calma.
F: Estamos a fazer de maneiras diferentes. Eu estava a inverter as coisas.
E: Então, cento e quatro está para treze mesas. Não, cento e quatro é treze mesas e treze mesas para cento e quatro, para treze empregados. Algo assim. Fazes treze empregados está para cento e quatro minutos.
F: Cento e quatro a dividir por vinte e seis dá quatro. Demoraram vinte e seis minutos.
E: Sim, eu sei. Então e a regra de três simples?
F: Para que é que é preciso a regra de três simples?
E: Tu não podes aparecer aí e dizer que é quatro. Dá cento e quatro minutos se for um empregado. Um está para cento e quatro...
F: Assim como vinte e seis está para x. Que dá cento e quatro a dividir por vinte e seis. Imagina se não tivesse a regra de três simples, não é?
E: Mas é os cálculos, a professora pediu para escrever tudo e está aqui.

Anexo 12 – Transcrição dos diálogos da segunda tarefa

FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

ESTUDO DE CASO UM: ANA E BEATRIZ – ITEM UM

A: Então vá, primeiro vamos retirar os dados.
B: Os dados é pagaram mil quatrocentos e cinquenta euros.
A: Vai ser dividido.
B: Pelo transporte e estadia. O Duarte só vai à viagem...
A: Eu meti assim: pagaram mil quatrocentos e cinquenta, a dividir por todos, o Duarte só pode pagar vinte e cinco euros. E depois meti assim: quantos para que o Duarte vá?
B: Então primeiro o que temos de fazer é dividir por vinte e cinco, né?
A: Sim, para ver quanto é que é.
B: Mas nós não sabemos quantos é que são. Temos de ver quantos é que terão de se inscrever para que ele possa ir à viagem.
A: Fazemos, tenho aqui a calculadora. Mil e quatrocentos...
B: Tem de ser um número alto, este número é muito grande...
A: Fazemos então... a regra de três simples.
B: Não, não fazemos... acho que não.
A: Então?
B: Não sei...
A: É sim, Beatriz. A regra de três simples.
B: Eu não sei se é suposto fazer a regra de três simples. Nós temos é de ver que para mil e quatrocentos e cinquenta euros. Tem de se dividir por um x de alunos para dar vinte e cinco euros.
A: Pera aí, oh stôra... estas contas são para fazer equações?
B: Ou tipo...
A: É que assim...
I: É como vocês quiserem.
A: Ou é para fazer a regra de três simples.
I: É como vocês quiserem e se sentirem confortáveis.
A: Não sabemos.
B: É que olhe professora, nós fizemos no caso os mil quatrocentos e cinquenta a dividir por bué vários números até dar vinte e cinco euros. Nós depois metemos meio que assim.
A: Nós podemos meter assim?

B: Até dar o resultado.

I: Sim.

B: Então nós metemos só tipo assim.

I: Ok.

B: Se for assim está correto?

I: Sim.

B: Mas isto está bom?

A: Vamos, nós vamos fazer assim. Pensamos que é mil quatrocentos e cinquenta para uma data de pessoas. Fazemos mil quatrocentos e cinquenta a dividir por x porque x é a data de pessoas. Que depois isto tudo tem que dar pelo menos vinte e cinco euros...

B: Por pessoas.

A: Isto aqui igual a vinte e cinco. Não, tem de ser menor.

B: Sim, exato.

A: Menor...

B: Os mil quatrocentos e cinquenta a dividir por x tem de ser menor do que vinte e cinco. Então por isso é que nós metemos.

A: Não tem de ser igual. Só pode ser menor ou igual. Isto é mais, quer dizer que vinte e cinco euros é mais.

B: Não, este sinal é mais aonde? Não é nada. Tem o traço em baixo.

A: É igual, pode ser maior ou igual.

B: Então isto aqui tem de dividir menor ou igual a vinte e cinco.

A: Então, nós fazemos mil quatrocentos e cinquenta sobre x.

B: Maior ou igual que vinte e cinco eu acho.

A: E depois fazes o quê?

B: Oh stôra, então, mas...

A: Pronto, professora, nós fizemos mil quatrocentos e cinquenta é maior ou igual a vinte e cinco.

B: Se for esta conta está certo?

I: Só há uma coisa que eu não entendo, para onde foi o x?

B: O x é supostamente o número de alunos a multiplicar por este valor para dar vinte e cinco...

I: Vai ficar vezes x.

A: Ah... vai dar vinte e cinco vezes x.

I: Então vai ficar mil quatrocentos e cinquenta sobre vinte e cinco é menor ou igual que x.

A: Isto está certo? Eu não sei se isto está certo. Ah e depois é x, depois vai dar hã?

B: Deixa ver se isto está certo.

I: Eu não se isto está certo, eu estou-vos a ajudar a resolver uma inequação. Mil quatrocentos e cinquenta a dividir por vinte e cinco.
B: Isto não dá. Está tudo errado. Esqueça, esqueça...
I: Se vocês usarem tentativa erro está tudo bem.
B: Então, mas o número...
A: Professora, podemos usar uma regra aquela do três simples com os vinte e cinco euros?
I: Se vos ajudar, tudo bem. Têm de pensar se é isso que querem fazer, bora lá!
B: Não, não é.
I: Porque é que não é?
A: Porque só temos três... dois resultados e precisamos de três.
B: Como é que vamos fazer isso? Calma, é mil quatrocentos e cinquenta a dividir por cinquenta pessoas, dá vinte e nove estamos quase a chegar ao resultado.
A: Mas não é assim, é com um x.
B: Mil quatrocentos e cinquenta a dividir por cinquenta e cinco pessoas vamos ver quanto é agora. Ah quase, vinte e seis. Mil quatrocentos e cinquenta a dividir por sessenta, outra vez.
A: Cinquenta e oito.
B: Dá vinte e cinco euros se for... é vinte e cinco euros.
A: Sei lá, por tentativa erro.
B: Stôra, nos metemos no caso tipo nós primeiro metemos a dividir por cinquenta e deu tipo....
A: Pronto nós fomos por tentativos e erro e deu cinquenta e oito.
B: Cinquenta e oito que dá vinte e cinco euros. Só que não é assim que a stôra quer.
I: Não, quero quero. Escrevam isso e depois escrevam por tentativas que é para eu saber o que vocês fizeram.
A: Como é que tu fizeste?
B: Escreve só isto assim por tentativa erro. É cinquenta e oito. Resposta: Têm de ir cinquenta e oito pessoas.

B: Nós não sabíamos que era suposto escrever um novo problema a partir do que já tínhamos resolvido então vamos fazer isso agora.
A: Nós temos já, que dados é que nós lá temos? Vamos fazer um bué fácil.
B: Depois temos de resolver.
A: Vamos escrever assim: e se conseguisse pagar quinze euros, quantos alunos seriam? Não. Stôra, mas nós podemos mudar os números.
B: Nós também temos de resolver o nosso.
I: Sim.
B: Então vamos fazer um bué fácil.

A: Professora posso dizer que aqui é quinze alunos, aqui duzentos euros. Vamos dizer assim e se a escola pagou dois mil euros.
B: Quantas pessoas eram necessárias para que cada um só pagasse vinte euros?
A: Ok, agora temos de resolver né? Vamos por tentativas. Aí... não dá!
B: Estás a gozar, vamos trocar estes vinte euros então. Mete cem pessoas. Escreve outra vez tentativa erro. Duzentos a dividir por cem que é igual a vinte.
A: Fogo... cem pessoas.

ESTUDO DE CASO UM: ANA E BEATRIZ – ITEM DOIS

A: Então stôra disto tudo nós tiramos que tem de ser de proporcionalidade inversa e a constante é o volume.
B: O volume dos cilindros é cento e noventa e seis.
A: Stôra, a constante é o volume dos dois? Calcular o volume e depois somar.
B: Está aqui a dizer que é cento e noventa e seis pi.
I: Cento e noventa e seis vezes pi.
B: Então vou já meter aqui cento e noventa e seis vezes pi.
A: Então vá, nós aqui tiramos do enunciado que vai ser uma constante de proporcionalidade inversa...
B: O volume dos cilindros.
A: Mete só a fórmula da proporcionalidade inversa que é.... stôra, a fórmula da proporcionalidade inversa é $f(x) = a$ sobre...
I: x.
A: Ok.
B: Mas já aqui está o volume do cilindro, para que é que temos de calcular o volume do cilindro.
A: Porque o volume do cilindro mais o volume do cilindro vai dar a constante da conta.
B: Ah... então deixamos só assim. Então é raio ao quadrado vezes a.
A: Então vá, primeiro.
B: Temos de fazer os dois...
A: Nós vamos querer descobrir a constante.
B: Não, primeiro vamos dividir vais ter de fazer aquilo...
A: Primeiro vamos descobrir a constante. Como é que descobres a constante? Tens de somar os volumes.
B: Então, por isso mesmo. Tens de dividir primeiro.
A: Mas já estão a dizer na resposta o que é que nós queremos? Não estou a perceber.
B: Estão a dizer a altura e o raio.

A: E o volume. Não.

B: Calma.

A: Oh stôra, não estou a entender. É para calcular o volume?

I: Não, é para formularem um problema.

A: Formular?

I: Sim, formulem. É para formularem um problema. Vocês olham para aí e está um copo. O Manuel bebeu um copo de água.

B: Isto é um copo?

I: É um poço de rega.

A: Então nós fizemos mal isto aqui. Aqui nós fizemos mal isto. Aqui também era para formular?

I: Aí era para resolver e depois... vocês não estão a ler tudo? Formulem um novo problema, sim.

B: Aí, nós só resolvemos.

A: Já sei! Vamos meter assim: descobre a constante da proporcionalidade inversa.

B: Olha lá! Tem de ser resolvido com uma função de proporcionalidade inversa.

A: Mas está aqui!

B: Vais dizer o quê? Resolve a constante?

A: Sim.

B: Qual é que é a constante dos cilindros.

A: Quatro vezes sete...

B: Isso não dá para ser quatro vezes sete, Ana. Estás a fazer raio da base vezes altura em vez de ser raio ao quadrado vezes altura.

A: Espera aí. Não é isso que estou a dizer: isto seria x, isto seria y e x vezes y dá a constante e a constante é o volume. Estás a entender?

B: Estou.

A: Podia ser o nosso problema. Mas... Stôra, nós primeiro temos de descobrir a constante antes de fazermos o problema.

I: Vocês já sabem a constante.

A: É cento e noventa e seis. Mas é mesmo cento e noventa e seis?

I: Sim.

A: Já sei! Metemos assim: e se a constante é cento e noventa e seis quanto é que tem de ser x e y para que seja essa constante.

B: Tens de resolver a seguir!

A: É fácil, quatro vezes... nove vezes seis... vai ser tipo dez vezes dez é quanto? Cem... Vou por trinta vezes noventa.

B: Trinta? Está ali três.

A: Cento e oitenta... cinquenta... ok, calma. Está a dar certo, não acredito. Vai ser então cinquenta e quatro... então?

B: Mete setenta e cinco!

A: Professora, veja o meu problema. Era assim se a constante for cento e noventa e seis quanto é que tem de ser x e y para que dar essa constante?

B: Isso é impossível.

I: Pode ser, mas se calhar pode ser mais floreado.

A: Mas não dá stôra.

I: Não dá? Com um contexto?

B: Não dá para resolver aquilo que ela queria.

I: Então é quatro e sete.

A: Mas quatro vezes sete não vai dar.

I: Cento e noventa e seis?

A: Sim.

B: Cento e noventa e seis pi.

I: Sabem porquê? Porque é o raio ao quadrado.

B: Isso disse há bocado e tu não é isso.

A: Stôra, esse problema está muito...

B Difícil.

I: Não, façam lá o que estavam a falar.

A: Vai dar cento e noventa e seis! Professora, mas não dá certo.

I: Dá, dá. Bora!

A: Temos que fazer. Mas estamos a usar a proporcionalidade?

B: Estamos, bora!

I: Em vez de chamarem x e y porque é que não chamam altura e raio?

B: Ya, vamos chamar.

A: Vamos meter assim: se a constante for cento e noventa e seis...

B: Pi.

A: Não, não é pi porque o pi não faz nada aí.

B: Ok!

A: Cento e noventa e seis, quanto é que será a altura e o raio da base. E agora fazemos aqui as imagens. Agora vamos resolver. Vai ficar, nós sabemos que a constante é cento e noventa e seis e para dar cento e noventa e seis é x vezes y. Já estou a resolver. Sendo que o y está ao quadrado, não te esqueças disso. Então vai ficar cento e noventa e seis...

B: O raio não está ao quadrado, ele vai ficar ao quadrado para calcular o volume, mas ele não está ao quadrado. O raio não pode ser ao quadrado.

A: É assim, sete ao quadrado é quarenta e nove e quatro vezes quarenta e nove vai dar cento e noventa e seis. Se a constante for cento e noventa e seis, quanto é que será a altura e o raio da base. Não te esqueças que o raio da base está ao quadrado.
B: Essa parte eu não fiz, porque o raio não está ao quadrado.
A: Está sim!
B: Só está ao quadrado quando tu vais calcular.
A: Então isto está errado?
I: Não sei.
B: Essa parte está.
A: Oh stôra e para nós dizermos assim, constante é igual a cento e noventa e seis, cento e noventa e seis é igual a x vezes y ao quadrado, cento e noventa e seis é igual quatro vezes sete ao quadrado.
I: Mas porque é que vocês não dizem que isto dá o volume de uma coisa qualquer cilíndrica? Inventem um contexto!
B: Ah stôra isso é demasiada coisa.
A: Vamos por assim se a constante de um cone... cilindro porque é um cilindro for.… pronto, já está!

ESTUDO DE CASO UM: ANA E BEATRIZ – ITEM TRÊS

A: Então vá. Setecentos e vinte é a constante.
B: Isto é o mesmo problema.
A: Isto é literalmente o que nós fizemos no outro. Já sabes? Tem de ser algo que y vezes x dê...
B: Setecentos e vinte.
A: Pode ser... Eia bem vai demorar.
B: Pode ser setenta vezes.
A: Ok, não é seiscentos.
B: Mete já um número alto.
A: Quinhentos...
B: Não é quinhentos nada. É trezentos no máximo.
A: Ok.
B: Trezentos e sessenta, dois vezes trezentos e sessenta, pronto.
A: Não pode ficar assim, porque é um número muito pequenino e depois o outro número é gigante.
B: Não há problema.
A: É para formular um problema. Vamos meter igual ao outro.
B: É o quê? Se a constante for setecentos e vinte quanto é que será x e y. Pronto.

A: Já está. Mete assim trinta vezes vinte e quatro.
B: Não, mas isto é a forma mais fácil de chegar lá.
A: Acabámos!
B: Ah... defina o significado de x e y e setecentos e vinte no contexto do problema.
A: Setecentos e vinte é a constante.
B: E o x e o y são o que?
A: O que vai dar a constante, já está.

ESTUDO DE CASO DOIS: CAROLINA E DANIEL – ITEM UM

D: Este é fácil. É mais fácil que o outro.
C: Mil quatrocentos e cinquenta vezes...
D: Vezes?
C: A dividir.
D: Mil quatrocentos e cinquenta a dividir por x é igual a vinte e cinco. Quer dizer que é uma equação.
C: És mesmo chato! Uma equação?
D: Faz desenhinho, faz faz!
C: Vai dar cinquenta e sete, cada um vai pagar cinquenta e sete.
D: Cinquenta e oito alunos. Faz desenhinho. Desenha cinquenta pessoas.
C: Daniel!
D: Eu já fiz...
C: O que é que é o k e o que é que é o x?
D: O x é constante.
C: Como é que tu vais calcular? Se não sabes nem o $f(x)$.
D: O que é que é para descobrir também, já agora.
C: Olha fizemos mal o exercício um.
D: Stôra, o que é que é formular o problema?
I: Formular? Dizes-me um problema que é: o João foi comprar maçãs, bananas e laranjas. E depois eu digo-te assim: Ok, e agora vou formular eu um novo.
D: A Joana foi... Não a turma do boda...
C: É só dizeres...
D: A turma do boda foi ao cinema...
C: Não, houve o meu: a Beatriz queria comprar um número de aparelhos eletrónicos.
D: Não é suposto fazer isso.
C: O total deu mil e novecentos euros.

D: Só?

C: Sim. Cada aparelho custa.

D: Era para formular um parecido com este.

C: Não era nada.

D: A partir do enunciado acima...

C: Não estou a perceber. Ok, eu uso os mesmos números.

D: Tá barato.

C: Não, agora vou meter só vinte e cinco. Dá sessenta euros. Calma, não vai dar. Não vai dar número certo.

ESTUDO DE CASO DOIS: CAROLINA E DANIEL – ITEM DOIS

C: Eu não percebo isto. É para formular um problema.

D: Usando o volume como constante.

C: Tá bem e então? Primeiro sabemos que o volume é constante, não é? Então dizemos logo, o volume de um cilindro. Não os volumes de dois cilindros é cento e noventa e seis pi. Agora fazes... Se... calma... Se o raio da base do cilindro um é sete e a altura é quatro. Onde é que está o pi?

ESTUDO DE CASO DOIS: CAROLINA E DANIEL – ITEM TRÊS

C: Nós podemos dar um número a isto?

D: Sim.

C: Então é imitar a mesma coisa que no um.

D: Não, imita aquilo da água.

C: Não imita este.

D: A mangueira solta setecentos e vinte litros por segundo, o y é o tempo que demora, o x...

C: O x é quantas piscinas se pode encher.

D: É uma coisa assim, tens a questão aula aí?

C: Está em casa.

ESTUDO DE CASO TRÊS: EUGÉNIO E FREDERICO – ITEM UM

E: A partir do enunciado acima formule...

F: Para além do preço da visita têm de pagar uma refeição por dia.

E: Mas aí só estás a acrescentar coisas ao problema. Não estás a...

F: Tens mais uma pergunta.

E: Mas já tem aqui a pergunta.
F: Mas para formular o novo problema eu vou utilizar essa informação mais a informação dada.
E: Pode ser.
F: A escola esqueceu-se de pagar a comida e isso, queres fazer isso? Para além dos mil quatrocentos e cinquenta que representa a viagem e a estadia cada aluno tem de pagar vinte euros por dia...
E: Não, cada aluno irá pagar vinte e cinco euros e terá de pagar um extra para as refeições. Qual vai ser o custo da viagem no total?
F: Um extra pelas refeições como assim?
E: Os mil quatrocentos e cinquenta é para alugar o parque e o transporte. Os alunos pagaram pelo parque mil quatrocentos e cinquenta euros e cada um pagará vinte e cinco euros. Para além disso, cada aluno terá de pagar um extra pela refeição.
F: Um euro.
E: Não, um é pouco tem de ser de...
F: Cada pessoa tem de pagar dez euros.
E: Dez euros a mais por refeição. A viagem será...
F: Qual é o número mínimo de pessoas para que custe vinte e cinco euros? E passa a ser uma equação.
E: Não gostei, gostei mais da minha versão. A minha versão é mais...
F: A minha versão é mais divertida.
E: A minha versão é mil quatrocentos e cinquenta, cada aluno pagará dez euros a mais por dia para ter refeição. O Duarte só poderá ir à viagem se o valor...
F: Tiramos isso.
E: Deixamos os alunos pagarão cada um por alugar e a viagem vinte e cinco euros.
F: Quantos alunos irão à viagem? Temos de esperar que dê um número certo. Queres fazer diretamente as contas?
E: Isso fica muito simples, estás a ver?
F: É uma equação, ainda mais difícil que o problema original.
E: Eu estou a dizer que a maneira que estás a dizer, quantos alunos irão à viagem? Isso é só dividir mil quatrocentos e cinquenta por vinte e cinco.
F: Não tem não, porque agora tens dez euros por pessoa.
E: Mas isso é só pelas refeições por dia. É só se eles quiserem comer lá, se eles não quiserem comer lá isso sai do bolso deles.
F: Quantos euros têm de pagar para cada aluno pagar vinte e cinco euros.
E: Terão de ir cinquenta e oito alunos para... não cinquenta e oito alunos mais para o Duarte...
F: Cinquenta e oito pessoas.

E: Para o Duarte poder participar na visita.
F: Diz lá, mil quatrocentos e cinquenta euros a dividir por vinte e cinco euros dá?
E: Cinquenta e oito...
F: ...euros por pessoa. Cinquenta oito pessoas que vão pagar vinte e cinco euros, não são cinquenta e oito euros por pessoa.
E: Então agora fazemos um risco que é a dividir, não é? Fazemos nosso problema.
F: Para além do preço fixo mil quatrocentos e cinquenta euros que a escola está a pagar pelo parque e o transporte até ao mesmo.
E: Podemos complicar o problema muito, iria ser muito divertido.
F: Eu acho que era uma ótima maneira de nos exibirmos, vamos fazer uma equação do segundo grau.
E: Isso dá trabalho, pensar no problema não fazer a equação!
F: Para além do preço fixo de mil quatrocentos e cinquenta euros que os alunos terão a dividir entre si para conseguirem...
E: Para além dos mil quatrocentos e cinquenta euros, em que não estão incluídas refeições...
F: ... para conseguirem pagar a viagem. Têm de pagar dez euros por refeição.
E: Stôra, eu para resolver o primeiro fiz uma única conta. Cada dia pagam...
F: Não, tenho outra ideia, fazemos uma inequação. É mais fácil.
E: Uma inequação disto? Não tem graça nenhuma... Por cada dia, tem de pagar por pessoa dez euros que coma as refeições do parque. Sabendo que a viagem dura cinco dias o Duarte só poderia ir caso ele pagasse de vinte e cinco a setenta e cinco euros e o Duarte participou na viagem, quantos alunos foram e quantos comeram lá? Calma, parte por parte, estou-me a baralhar. Refeições à parte, sabendo que apenas doze alunos comeram as refeições de lá...
F: Doze é muito certinho.... Sabendo que no primeiro dia comeram sete pessoas, no segundo comeram dois, no terceiro comeram cinco... Não! Vamos fazer com percentagens. No primeiro dia cinquenta por cento das pessoas comeram. Achas que conseguimos fazer isso assim?
E: Não é difícil! Depois temos é de acrescentar o Duarte. Tanto que o Duarte só podia participar caso o aluguer e a viagem custassem vinte e cinco euros. Caso ele pagasse vinte e cinco euros sem a comida incluída. Aí sim podes meter percentagens e com esse valor podem descobrir o número de alunos e com o número de alunos podem fazer percentagens.
F: Pronto. No primeiro dia, vinte e cinco por cento dos alunos comeram. No segundo e no terceiro, comeram quinze que é menor do que vinte e cinco por cento. No final, metemos assim sendo que todos juntos pagaram menos que não sei quantos por refeição.
E: Isso estás a facilitar.
F: Não estou, não. Estou a pôr mais contas que não servem para nada.
E: Mas sabes que pagaram menos que isso de pessoas como algumas que temos aqui na turma que lhes fosse dar um valor menor que isso.

F: No primeiro dia vinte e cinco por cento dos alunos comeram no parque. No segundo dia quinze e no terceiro dez. Pode ser?
E: Calma. No segundo e no terceiro quinze por cento.
F: Por dia ou no total?
E: Por dia. No quarto dia oitenta por cento comeu e no quinto ninguém comeu, ou seja, zero por cento.
F: Sabendo que a viagem era constituída pelo menos por cinco adultos.
E: Mete o coiso do Duarte.
F: Sabendo que o Duarte só pode ir se a viagem for vinte e cinco. Pode ser um conjunto, um intervalo.
E: E como é que tu fazes as percentagens se não sabes o número certo?
F: Sabes que podes fazer percentagens de intervalos? Divides o intervalo por quatro e depois arranjamos quinze incógnitas diferentes.
E: Sabendo que o Duarte participou na viagem quanto dinheiro foi pago no total...
F: Isso não faz sentido. Eu estou a pensar agora numa coisa e que tal o Duarte não comer.
E: Ninguém aqui diz que o Duarte comeu. Sabendo que o Duarte participou na viagem qual foi o preço pago no total (incluindo refeições) ...
F: No caso de sessenta pessoas irem, incluído o Duarte.
E: Não, espera. Pago ...no total (incluindo refeições) e quantos alunos participaram? Esta parte de quantos alunos participaram, esta parte de quantos alunos participaram é só imagina que a pessoa é burra e chega aos alunos que é o menos difícil e depois não sabe a percentagem. Aí damos meio ponto aqui.
F: Como é que chegamos aos alunos?
E: Da mesma maneira que chegaste aqui. É só fazer isto.
F: Como é que sabemos o preço a partir dai?
E: O Duarte participou, logo são vinte e cinco euros. É vinte e cinco por cento de cinquenta e oito.
F: Dá para fazer, catorze pessoas virgula cinco. Em caso de emergência arredonda para baixo. Se a percentagem não for inteiro, arredonda abaixo.
E: O problema não tem de ser certo. Nós fazemos o que nós queremos.
F: Temos de escrever que foram cinquenta e oito pessoas.
E: Porquê?
F: Porque se forem mais pessoas lixamo-nos completamente.
E: Se forem mais pessoas ele não paga vinte e cinco. Mete o preço base está dividido igualmente por todos os alunos. Quanto foi pago no total? Mil quatrocentos e cinquenta a dividir por vinte e cinco dá cinquenta e oito. Cinquenta e oito vezes cem dá cinco mil e oitocentos.

F: Porque é que multiplicaste por cem?
E: Percentagem.
F: Eu faço regra de três simples.
E: Cinco mil e oitocentos a dividir por vinte e cinco...
F: Dá aproximadamente catorze.
E: Agora vamos fazer vezes quinze a dividir por cem vezes dois. Dá dezassete. E no quarto dia cinquenta e oito vezes oitenta por cento que é aproximadamente quarenta e seis. Agora somamos tudo. Dezassete mais catorze mais quarenta e seis é igual a setenta e sete. Mil quatrocentos e cinquenta mais setecentos e setenta. Dá dois mil duzentos e vinte. Que bom número! Agora é a resposta: foram cinquenta e oito alunos e pagaram no total dois mil duzentos e vinte euros.

ESTUDO DE CASO TRÊS: EUGÉNIO E FREDERICO – ITEM DOIS

E: Como é que o volume não muda se a altura e a base mudam.
F: É uma constante de proporcionalidade inversa.
E: Desculpa, isso não é possível.
F: É o que isto disse.
E: Ah, ok. Eu achei que estavas a dizer que querias o cilindro mais alto. Está certo. O volume vai ser sempre igual e agora ele vai ser maior? Mas assim ok, já entendi o que tu queres. Descobre o raio... Não, é mais fácil com altura. Eu não estou a perceber o que é o raio da base.
F: O raio da base é assim tens a área da base e depois fazes pi vezes raio ao quadrado.
E: Determine a altura do cilindro com uma base treze.
F: Não sei como se faz a conta. Determina o perímetro... determina a área da superfície plana.
E: Determine o raio da base de um perímetro com altura dez.
F: De um perímetro?
E: De um cilindro
F: Não, é melhor a área de uma superfície plana. Que é a área das bases...
E: ... mais a área à volta. Determina a área da superfície plana do cilindro de altura dez.
F: Cento e noventa e seis a dividir por dez dá dezanove virgula seis. Começa bem...
E: Estamos a fazer isto mal.
F: Cento e noventa e seis a dividir por nove dá vinte e oito, percebeste o padrão?
E: Mas como é que isso dá sete? Ahhh... raiz de dezanove virgula seis que é quanto?
F: Deixa raiz de dezanove virgula seis.
E: A resposta vai ser raiz de dezanove virgula seis vezes dez.
F: É raiz de dezanove virgula seis vezes pi. Temos a área e depois o perímetro.
E: Dois raiz de dezanove virgula seis vezes pi igual a...

F: Não aproximes, fica melhor assim.

E: Mas, depois precisas de apresentar o valor, apresenta o resultado arredondado às centésimas.

F: Já tenho o perímetro e a altura.

E: Mete o resultado arredondo às centésimas.

F: Não! Deixa assim que é mais bonito.

E: Então faz lá a conta.

F: Dezanove virgula seis vezes pi é a área.

E: Mas queres a área para quê? Eu só fiz o perímetro.

F: Eu também fiz o perímetro, está aqui. Preciso do perímetro vezes altura para saber esta área aqui. Agora somas isto e isto. É essa a resposta: trinta e nove virgula dois vezes pi mais pi vezes vinte raiz de dezanove.

ESTUDO DE CASO TRÊS: EUGÉNIO E FREDERICO – ITEM TRÊS

E: Há setecentos e vinte euros a dividir por x amigos quantos y euros.

F: O x é vinte?

E: O x é o que quiseres. x é o número de amigos quantos euros recebe cada um dos amigos.

2025

ANA BEATRIZ DA SILVACLARO

RESOLUÇÃO E FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY