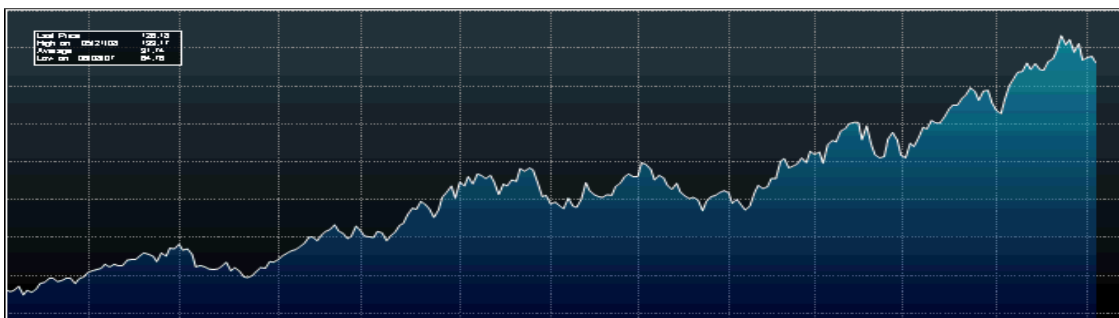


UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Departamento de Matemática

**Modelos de Apreçamento e Cobertura para derivados
sobre Matérias-primas (Commodities)**



Por

Isabel Maria Barroso Cabrera

**Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade Nova de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em
*Matemática e as suas aplicações-Ramo Ciências Actuarias.***

Presidente do júri: Professor Doutor João Tiago Mexia (FCT/UNL)

Orientador: Professor Doutor Manuel L. Esquível (FCT/UNL)

Vogal: Professora Doutora Raquel Gaspar (ISEG/UTL)

Vogal: Professora Doutora Marta Faias (FCT/UNL)

Lisboa

(2008)



Agradecimentos

Quando me encontro na recta final da dissertação do mestrado em Matemática e as suas Aplicações, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, não poderia deixar de agradecer a todos aqueles que me apoiaram e me ajudaram a chegar até aqui.

Desta forma, gostaria de expressar aqui o meu agradecimento à Intervalores pela oportunidade concedida, em particular ao Dr. Armando Nunes e ao Dr. Miguel Ramalho, por todo o incentivo e disponibilidade.

Agradeço também a todos os meus colegas de trabalho que de forma directa ou indirecta me ajudaram na conclusão desta tese, mais que não fosse com a sua boa disposição e companheirismo.

Quero ainda, fazer um agradecimento especial ao Professor Doutor Manuel Esquível por toda a disponibilidade, compreensão, bem como a força e a coragem que me transmitiu para prosseguir.

Gostava ainda de agradecer a todos os meus colegas e amigos, que ao longo deste período me apoiaram de forma incondicional em todos os momentos, desde o mais fácil, ao mais difícil.

Por último, mas não menos importantes, quero agradecer a quatro pessoas, que como parte integrante da minha vida que são, e por tudo o que representam para mim – o meu pai, a minha mãe, a minha irmã e o meu namorado – pelo seu contributo na minha formação, educação e, mais, por todo o afecto, paciência e compreensão que proporcionaram a conclusão desta etapa da minha vida com sucesso.



Resumo

Cabrera, Isabel – *Modelos de Apreçamento e Cobertura para Derivados sobre Matérias-primas (Commodities)*¹

O presente trabalho pretende introduzir uma visão do mercado das matérias-primas, em particular, o ouro, o petróleo, a soja e o milho.

Primeiramente, são apresentadas algumas definições importantes, bem como as principais diferenças/semelhanças entre Mercado *Spot* / Mercado Futuros e Contratos *Forward* / Contratos Futuros.

Apresentar-se-á um capítulo com a Teoria das Carteiras onde irá surgir a definição do CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) e a respectiva aplicação prática.

Para permitir um estudo mais detalhado dos modelos de apreçamento² e cobertura para derivados, optou-se por utilizar o modelo de *Black*.

Por último, teremos um capítulo com um Modelo Comparativo Spot/Futuros.

Será apresentado, ainda, um caso prático com ajustamento, simulação e calibração do modelo descrito.

Palavras-Chave

Modelo *Black*, carteira, matéria-prima, ouro, petróleo, soja, milho, contrato futuro

¹ Daqui em diante iremos sempre considerar matérias primas quando nos referimos às commodities

² Poderia ser colocado valorização, no entanto apreçamento é uma palavra que existe e é muito comum nos mercados financeiros



Abstract

Cabrera, Isabel – *On some pricing models for derivative products on futures Commodities*

This work is an introduction of a futures Commodities market view, particularly, the Gold, Oil, Soybean and Corn.

First we are going to introduce some important definitions such as Spot Market versus Futures Markets and Forward Contracts versus. Future Contracts.

Then, we present a chapter about the portfolio theory, where we have the definition of CAPM (Capital Asset Pricing Model) and its respective practical example.

We choose the Black option valuation Model and we submit it on the analysis of the pricing for derivative products on futures Commodities.

At last, we have a chapter that presents a model comparing Spot/Future prices.

We will present a practical case which adjust, simulate and calibrate the described model.

Key-words

Black Model, portfolio, Commodities, gold, oil, soybean, corn, future contract.



Índice

I - Introdução.....	9
II – Enquadramento Geral.....	11
1. Derivados.....	11
1.1 O que são os derivados.....	11
1.2 Principais Tipos de Produtos Derivados.....	12
2. Matérias-primas.....	13
2.1 Porque é que as matérias primas se negociam em futuros?.....	14
3. Mercados Spot e Mercados Futuros.....	16
4. Contratos de Futuros e Preços de Futuros.....	17
5. Contratos de Futuros versus Contratos <i>Forward</i>	18
III – Teoria das Carteiras.....	20
1. Modelos com carteiras.....	20
1.1 Notação.....	20
1.2 Média, Variância, Desvio Padrão e Coeficiente de Correlação dos Retornos mensais.....	21
1.3 Variância versus Coeficiente de Correlação.....	22
1.4 Média e Variância de uma carteira: Caso geral.....	23
1.5 Carteiras Eficientes.....	26



1.6 Algumas definições preliminares e notação.....	28
1.7 Alguns conceitos importantes.....	29
1.8 Alguns teoremas sobre carteiras eficientes e CAPM (<i>Capital Asset Pricing Model</i>).....	31
1.9 Cálculo da Fronteira Eficiente.....	35
1.10 Determinação da Carteira de Mercado: <i>The Capital Market Line</i> (CML).....	37
1.11 A SML(<i>Security Market Line</i>) quando existe um activo livre de risco.....	39
1.12 O rácio de <i>Sharpe</i>	39
IV – Aplicação Prática.....	41
1. Caso prático.....	41
1.1 Activos utilizados	41
1.2 Origem dos dados.....	42
1.3 Ficheiro Excel.....	42
1.4 Resultados.....	43
1.5 Conclusões.....	45
V – Modelo de <i>Black</i>.....	46
1.Modificações ao modelo de <i>Black-Scholes</i>	46
1.1 Introdução.....	46
1.2 Retornos.....	46



1.3 Volatilidade.....	48
1.4 Mercados de Futuros.....	50
1.5 Fórmula de Black para Contratos de Futuros.....	52
VI – Modelo Comparativo <i>Spot</i>-Futuros.....	54
1. O Modelo.....	54
1.1 A <i>convenience Yield</i>	56
1.2 A <i>convenience Yield</i> generalizada.....	56
1.3 Os modelos matemáticos.....	58
1.4 Conclusões e trabalhos futuros.....	59
1.5 Aplicação prática.....	60
Conclusão.....	63
Anexos.....	68



Índice Figuras

Figura 1 - Carteiras possíveis são todas as que se encontram na fronteira eficiente e dentro dos limites da hipérbole.....	30
Figura 2 - Como encontrar a carteira eficiente no conjunto das carteiras possíveis.....	32
Figura 3 – Fronteira Eficiente.....	36
Figura 4 - Fronteira Eficiente com a CML.....	38
Figura 5 – Gráfico que representa a fronteira eficiente mensal das combinações das carteiras x e y para as matérias-primas e acções, respectivamente.....	43
Figura 6 – Gráfico que representa a carteira única para as matérias-primas e para as acções, respectivamente.....	44
Figura 7 – Gráficos representativos dos preços dos futuros e <i>spot</i> para a prata e petróleo e a <i>convenience yield</i> generalizada.....	58
Figura 8 – Simulação dos preços dos futuros e <i>spot</i> para a prata e petróleo e para a <i>convenience yield</i> generalizada.....	59



Índice Tabelas

Tabela 1 – Tabela com os pesos das carteiras x e y para as matérias-primas e acções.....	43
Tabela 2 – Tabela com os pesos da carteira escolhida nas carteiras de mercado.....	44
Tabela 3 – Tabela de dados para a aplicação do modelo de <i>Black</i> ao futuro sobre o petróleo.....	61
Tabela 4 – Tabela de dados para a aplicação do modelo de <i>Black</i> ao futuro sobre o ouro.....	61
Tabela 5 – Tabela de variação do valor do preço de exercício K para o modelo habitual e para o modelo <i>spot/futuros</i> sobre o petróleo.....	62
Tabela 6 – Tabela de variação do valor do preço de exercício K para o modelo habitual e para o modelo <i>spot/futuros</i> sobre o ouro.....	62



I - Introdução

O objectivo desta dissertação centra-se nos modelos de apreçamento e cobertura de risco para derivados sobre matérias-primas.

Em particular, iremos desenvolver um estudo sobre contratos de futuros que são parte integrante dos chamados derivados, partilhando com estes muitas das suas características. Assim, numa primeira fase do trabalho iremos abordar algumas definições importantes (Derivados, Contratos de Futuros, Contratos *Forward*, Mercado *Spot* e Mercado de Futuros), bem como as características e principais diferenças/semelhanças entre ambos.

Numa segunda fase, faremos uma análise prática do mercado das matérias-primas, nomeadamente, ouro, milho, soja e petróleo através do ajustamento do CAPM. Para isso, iremos proceder à construção de uma carteira constituída pelas matérias-primas acima descritas e comparando com uma carteira que contenha quatro títulos constantes do PSI20 (EDP, GALP, MOTA/ENGIL e BES)

Em terceiro, iremos analisar o modelo de *Black* como caso particular do modelo de *Black Scholes*, como forma de apreçamento e cobertura para derivados sobre matérias-primas.

De seguida, é apresentado um modelo que compara os mercados Spot/Futuros, e que levámos a apresentação numa conferência internacional em Memphis, TN, nos EUA.



Por último, apresentar-se-á uma breve discussão e conclusões finais do trabalho.

Chama-se, ainda, a atenção do leitor para o facto de se encontrarem em anexo, num suporte digital as folhas Excel onde se realizaram os cálculos relativos às aplicações práticas.



II - Enquadramento Teórico Geral

1. Derivados

1.1 O que são os derivados?

Os derivados são produtos financeiros cujos *cash-flows*³ gerados dependem dos preços e outras características de activos financeiros denominados activos subjacentes ao derivado.

O valor de um derivado depende, essencialmente, do comportamento do preço do activo subjacente, mas também de outras variáveis, tais como: maturidade, factores económicos e políticos, variação das cotações das moedas (taxas de câmbio), taxas de juro, etc.

Nos últimos anos têm surgido novos instrumentos derivados devido, não só aos chamados bancos de investimento, como também à possibilidade que os agentes têm de “construir” novos produtos derivados com um simples acordo.

Este tipo de produtos é transaccionado em mercado de balcão (*Over the Counter*⁴ – OTC), onde as instituições financeiras disponibilizam aos seus clientes, ou em mercados bolsistas como é o caso dos Futuros e das Opções.

³ Cash-flows – significa fluxos de caixa.



O rápido crescimento dos mercados derivados conjuntamente com a publicidade feita a casos cuja sua utilização provocou perdas elevadas, tem sido a razão para o desenvolvimento de debates públicos importantes que incidem em três pontos fundamentais: os benefícios, os riscos e o nível de regulamentação a que devem estar sujeitos os mercados de derivados.

1.2 Principais tipos de Produtos Derivados

Tipicamente, em traços gerais:

- a) Opções – São contratos que dão ao comprador um direito, mas não uma obrigação, de comprar/vender um activo numa determinada data a um preço previamente fixado (preço de exercício).

- b) Contratos de Futuros – São acordos entre duas partes para compra/venda de um determinado activo num certo período de tempo e a um determinado preço mas no futuro. Este tipo de contratos é normalmente realizado sobre um determinado mercado, que tem como objectivo a regulamentação de pontos usuais do contrato para que este seja respeitado.

- c) Contratos *Forward* – São acordos para comprar/vender um activo num certo período no futuro, a um determinado preço. São contratos muito semelhantes com os contratos de futuros, mas não são

⁴ Over the Counter – significa Fora de Bolsa e daqui em diante iremos apenas usar a sigla OTC.



regulamentados e são geralmente transaccionados no mercado de balcão, acima referido (OTC).

- d) *Swaps* – Contratos de troca de séries de *cash-flows* entre duas entidades no futuro, segundo um plano previamente estabelecido. Incidem normalmente, sobre *cash-flows* associados a taxas de juro e taxas de câmbio.

2. Matérias-primas

As Matérias-primas desempenham um papel fundamental na nossa vida diária (na alimentação ou nos transportes), mas poucas vezes pensamos nelas como uma classe de activos em que é possível investir e que pode desempenhar um papel importante na correcta diversificação de uma carteira de investimentos.

Podemos designar por *Commodities* o conjunto de matérias – primas ou produtos primários negociados em bolsas de mercadorias, tais como:

- Energia: petróleo, gás natural
- Produtos Agrícolas: trigo, milho, soja, açúcar, cacau, café, algodão
- Produtos pecuários: gado, aves
- Metais industriais: alumínio, cobre, chumbo, níquel
- Metais preciosos: ouro, prata, platina

O interesse dos investidores por esta classe de activos aumentou de significativamente nos últimos anos, nomeadamente porque o preço médio das matérias-primas subiu mais de 150% desde o final de 2001. Em grande parte



influenciado pela evolução do preço do petróleo e das matérias-primas industriais, ultrapassando largamente a crescente evolução dos mercados accionistas e obrigacionistas no mesmo período.

A recente subida dos preços das matérias-primas pode sempre ser explicada pelo forte crescimento da procura das mesmas e também pela escassez da oferta:

- Do lado da procura, destaca-se o forte crescimento das importações de matérias-primas pelas economias asiáticas;
- Do lado da oferta, têm contribuído para pressionar os preços a escassez de matérias-primas industriais como o aço, cobre e níquel e também a instabilidade geopolítica nos principais países produtores de petróleo;
- Além disso, é de referir também, os movimentos especulativos do capital, o que leva à recente subida dos preços das matérias-primas.

Os contratos de futuros são aplicados numa série de matérias-primas (açúcar, lã, ouro, prata) e em activos financeiros (moeda, obrigações, índices bolsistas). Desta forma, uma questão que merece ser considerada é a seguinte:

2.1 Porque é que as matérias-primas se negociam em futuros?

As matérias-primas negociam-se em futuros por duas razões fundamentais: razões históricas, razões de segurança e conveniência.



Quando surgiu a bolsa, e até bem perto dos nossos dias, os títulos eram físicos. Assim, quando se contratava a compra, por exemplo de petróleo a um determinado preço, a parte vendedora tinha de entregar o número de barris pretendido pelo comprador no final do contrato. Este cenário verificou-se até há cerca de 10 anos atrás.

A segunda razão é que estes contratos são feitos de forma a garantir/salvaguardar ambas as partes (comprador e vendedor). Assim, e de acordo com as regras do mercado em questão, o comprador garante que lhe é entregue o activo negociado e o vendedor garante o dinheiro por eles acordado no final do prazo. Desta forma, estes contratos são normalizados e seguros.

Além das razões acima descritas, e apesar da incerteza quanto à evolução de preços no futuro próximo, as matérias-primas apresentam características interessantes como instrumento de diversificação das carteiras de investimentos (*Jornal de negócios, 2007*): Este tipo de produtos tem uma baixa correlação com as acções e obrigações, sendo das poucas classes de activos que tende a beneficiar com conflitos políticos ou catástrofes naturais; As matérias-primas são frequentemente utilizadas como protecção contra a inflação, dado que o seu preço acompanha a subida global dos preços; Nos últimos 30 anos, as matérias-primas apresentam um melhor desempenho que as demais classes de activos em períodos de subida de taxas de juro, podendo ser utilizadas como instrumentos de protecção contra este risco.



3. Mercados *Spot* e Mercados Futuros

O termo “*spot*” é usado nas bolsas de mercadorias para se referir a negócios realizados com pagamento à vista e perante a entrega da mercadoria, em oposição aos mercados de futuros e a termo. A entrega não é necessariamente física, mas sim a entrega de determinado montante em dinheiro correspondente à quantidade de mercadoria negociada.

As principais diferenças entre os mercados *spot* e os mercados futuros são:

- Nos mercados futuros existe um contrato padrão enquanto os mercados *spot* não são padronizados, o contrato é apenas comercial;
- Os mecanismos de liquidação de um mercado *spot* tiram o risco de crédito da contraparte. Já no caso dos mercados de *forward* este risco existe;
- Nos mercados *spot* é fácil reverter uma operação, nos futuros a posição dificilmente é revertida;
- Por último, nos *spot* nunca ocorre a entrega do activo, nos futuros esta entrega poderá ocorrer, caso a posição não seja fechada antes do vencimento do contrato.



4. Contratos de Futuros e Preços dos Futuros

Como já referimos anteriormente, um contrato de futuros é um acordo para comprar ou vender um activo, numa determinada data, a um certo preço no futuro. Um ponto importante nestes contratos é que estes são transaccionados em mercados bolsistas. Em consequência as autoridades têm de definir com precisão todas as características de cada contrato para que a negociação seja possível. Mais importante, o preço do futuro (preço ao qual o contrato de futuros é realizado) é determinado, num mercado de futuros, através da lei da procura e da oferta (tal como os preços *spot* das acções listadas). Os preços de futuros são cotados diariamente e reportados para a imprensa financeira.

Um contrato de futuros, de uma maneira geral, tem uma entrega mensal que é especificada pelo mercado onde decorre a transacção. É também este mercado que regula a data concreta da entrega, a quantidade do activo que deve ser entregue, bem como, quando necessário, todos os detalhes adicionais. Ao procedimento diário de liquidação dos contratos de futuros chama-se *marking to market*. Um contrato de futuros exige um investimento inicial zero, mas cada investidor é “obrigado” a depositar fundos numa conta margem. A este depósito chama-se margem inicial. No final de cada dia de transacções são feitos ajustes à conta margem que reflectem os movimentos diários dos preços dos futuros.



5. Contratos de Futuros versus Contratos *Forward*

Como já foi visto anteriormente, a grande diferença entre estes dois tipos de contratos é o mercado em que são transaccionados. No entanto, existem outras diferenças entre ambos sob as seguintes formas: Especificação do contrato e da entrega; Preços; Tipo de mercado e horas de negociação; Segurança nos depósitos e margens e Volumes, Liquidez e Mercados.

1. Especificação do contrato e da entrega

Contratos de Futuros: Este contrato especifica os principais instrumentos e preços. As datas de entrega são limitadas a um número específico de dias por ano, sempre em locais aprovados para o efeito. O objectivo principal da transacção não é a entrega e em apenas 2% dos casos existe este procedimento.

Contratos *Forward*: Existe um número ilimitado de instrumentos negociados e os seus preços são negociados caso a caso. Não existe uma data específica, nem um local de entrega. Neste caso, a entrega é o objectivo principal, com cerca de 90% destes contratos a serem liquidados pela entrega.

2. Preços:

Contratos de Futuros: A cotação é a mesma para todos os participantes. Tipicamente, existe um preço limite diário. Cada transacção é realizada ao melhor preço disponível a cada momento.



Contratos *Forward*: O preço varia com o tamanho da transacção, o risco de crédito, etc. Não existe um limite diário de preço. Não há garantias de que o preço da transacção seja o melhor disponível a cada momento.

3. Tipo de mercado e horas de negociação:

Contratos de Futuros: A negociação é centrada nos mercados bolsistas, durante as horas em que decorra a sessão.

Contratos *Forward*: A negociação é feita telefonicamente nos mercados OTC, ao longo de todo o dia.

4. Segurança nos depósitos e margens:

Contratos de Futuros: As regras de mercado requerem uma margem inicial e as variações da liquidação da mesma são diárias. É feita uma reavaliação diária das posições abertas, dos pagamentos e dos processos de entrega.

Contratos *Forward*: Não há qualquer ajuste diário para as flutuações dos preços.

5. Volume e liquidez de mercado:

Contratos de Futuros: Nestes contratos o volume de negociação é publicado diariamente. Existe bastante liquidez de mercado.

Contratos *Forward*: A informação sobre o volume de negócio não é publicada. A liquidez é limitada.



III - Teoria de carteiras

1. Modelos com Carteiras

Neste capítulo vamos rever o modo como se efectuam os cálculos dos modelos com carteiras. Desenvolvemos o caso geral com N activos; Neste caso torna-se conveniente usar notação matricial explorando as capacidades matriciais do Excel

1.1 Notação:

Cada activo i (pode ser uma acção, obrigação ou título do tesouro, embora no exemplo apresentado sejam consideradas matérias-primas), é caracterizado através de variáveis estatísticas:

- $E(r_i)$, o retorno esperado do activo i ;
- $Var(r_i)$, a variância do retorno do activo i ;
- $Cov(r_i; r_j)$ a covariância dos retornos do activo i e do activo j .

Designa-se $Cov(r_i; r_j)$ por σ_{ij} e $Var(r_i)$ por σ_{ii} em vez de σ_i^2 como é habitual.

A covariância dos retornos dos activo i com ele próprio é, de facto, a variância dos retornos desse activo, $Cov(r_i; r_i) = Var(r_i)$.



1.2 Média, Variância, desvio padrão e coeficiente de correlação dos retornos mensais

Em primeiro vamos mostrar como calcular o retorno mensal para cada activo. Tendo em conta que este retorno mensal representa a percentagem de retorno que seria ganha por um investidor que comprou um activo no fim do mês $t - 1$ e o vendeu no final do mês seguinte.

Para o mês t e activo A , o retorno mensal r_{At} será definido como:

$$r_{At} = \ln\left(\frac{P_{At}}{P_{A,t-1}}\right)$$

Notas acerca do cálculo dos retornos:

- O cálculo dos retornos dos activos é feito em tempo contínuo. Uma alternativa teria sido usar o retorno em tempo discreto, $\frac{P_{At}}{P_{A;t-1}} - 1$.
- Estamos a calcular o preço de retorno de cada activo. Se o activo tivesse pago um dividendo no mês t , o retorno total teria sido:

➤

$$r_{At} = \ln\left(\frac{P_{At} + Div_{At}}{P_{A;t-1}}\right)$$

No nosso exemplo são ignorados os dividendos.

É assumido que os dados dos retornos mensais num determinado mês j representam a distribuição dos lucros para o mês seguinte ($j + 1$). Assumimos



assim, que o passado nos dá alguma informação acerca do modo como os lucros se comportarão no futuro. Esta suposição permite-nos assumir que a média dos dados históricos representa o retorno esperado mensal de cada activo. Também é possível observar os dados históricos e aprender o que irá ser de futuro a variância dos retornos.

1.3 Covariância Versus Coeficiente de Correlação

A covariância (e o coeficiente de correlação respectivo) mede o grau para o qual os retornos nos dois activos se movimentam em conjunto.

A definição é:

$$Cov(r_A; r_B) = \frac{1}{M} \sum_i [r_{At} - E(r_A)] * [r_{Bt} - E(r_B)]$$

onde M é o número de pontos na distribuição.

Também podemos calcular o coeficiente de correlação ρ_{AB} que é definido como:

$$\rho_{AB} = \frac{Cov(r_i; r_j)}{\sigma_A \sigma_B}$$

O coeficiente de correlação é livre de unidade; Mede o grau de relação linear entre os retornos do activo A e os retornos do activo B .



Os seguintes factos podem ser mostrados sobre o coeficiente de correlação:

- O coeficiente de correlação está sempre entre -1 e 1: $-1 \leq \rho_{AB} \leq 1$

- Se o coeficiente de correlação é 1, então os retornos dos dois activos estão linearmente relacionados com declive positivo, quer dizer: se $\rho_{AB} = 1$ então: $r_{A_t} = c + dr_{B_t}$ se $d > 0$;

- Se o coeficiente de correlação é -1, então os retornos dos dois activos estão linearmente relacionados com declive negativo, quer dizer: se $\rho_{AB} = -1$ então: $r_{A_t} = c + dr_{B_t}$ se $d < 0$;

- Se o coeficiente de correlação é zero então os retornos são variáveis aleatórias normais e independentes. (Pelo contrário, se os retornos não forem variáveis aleatórias normais a equivalência anterior não é válida).

1.4 Média e variância de uma carteira: Caso geral

A notação matricial simplifica muito a escrita do problema com carteiras. No caso geral em que existem N activos supomos que a proporção investida no activo i na carteira é denotada por γ_i . É muito conveniente escrever as proporções da carteira como um vector coluna Γ :



$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

Costumamos escrever Γ^T como sendo a transposta de Γ :

$$\Gamma^T = [\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_N]$$

O retorno esperado de uma carteira cujas proporções são dadas por Γ é a média ponderada dos retornos esperados dos activos individuais.

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^N \gamma_i E(r_i)$$

Escrevemos $E(r_i)$ como um vector coluna dos retornos dos activos, e $E(r_i)^T$ como um vector linha dos retornos dos activos:

$$E(r) = \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \dots \\ E(r_N) \end{bmatrix} \quad E(r)^T = [E(r_1), E(r_2), \dots, E(r_N)]$$

de seguida escrevemos o **retorno esperado** de uma carteira em notação matricial como:



$$E(r_p) = \Gamma^T E(r) = E(r)^T * \Gamma$$

A **variância** de uma carteira é dada por:

$$Var(r_p) = \sum_{i=1}^N (\gamma_i)^2 Var(r_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N 2\gamma_i \gamma_j Cov(r_i; r_j)$$

A variância de cada activo aparece multiplicada pelo quadrado da proporção de activos na carteira; a covariância de cada par de activos aparece multiplicada duas vezes pelos produtos das proporções dos activos individuais.

Outro modo de escrever a variância é usando a notação:

$$Var(r_i) = \sigma_{ii}, \quad Cov(r_i; r_j) = \sigma_{ij}$$

podemos depois escrever

$$Var(r_p) = \sum_i \sum_j \gamma_i \gamma_j \sigma_{ij}$$

A representação mais económica da variância de uma carteira é aquela em que se usa a notação matricial. É também a representação mais fácil de implementar em Excel para uma carteira grande.



Nesta representação chamamos á matriz que contém σ_{ij} na i-ésima linha, j-ésima linha de **Matriz Variância-Covariância**:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

A **variância da carteira** será pois dada por: $Var(r_p) = \Gamma^T * S * \Gamma$,

Finalmente, se denotarmos por $\Gamma_1 = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N]$ as proporções da carteira 1 e por $\Gamma_2 = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N]$ as proporções da carteira 2, podemos mostrar que a covariância das duas carteiras é dada por: $Cov(1,2) = \Gamma_1^T * S * \Gamma_2^T$

1.5 Carteiras eficientes

Uma **Carteira Eficiente** é uma carteira composta pelos activos com risco que têm a menor variância dos retornos de todas as carteiras que têm o mesmo retorno esperado. Em alternativa, podemos dizer que uma carteira eficiente tem o maior retorno esperado de todas as carteiras que têm a mesma variância.

Matematicamente, vamos definir **carteiras eficientes** do seguinte modo: para um dado retorno m , uma carteira eficiente p é uma carteira que verifica:



$$\min \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij} = \text{Var}(r_p) \quad \text{Sujeita a: } \sum_i x_i r_i = \mu = E(r_p), \quad \sum_i x_i = 1$$

A **fronteira eficiente** é o conjunto de todas as carteiras de eficiência. Como foi mostrado por *Black* (1980) a **fronteira eficiente** é o lugar de todas as combinações convexas de quaisquer duas carteiras eficientes. Então, se $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $y = \{y_1, \dots, y_N\}$ forem carteiras eficientes e se a for uma constante, então a combinação convexa da carteira z definida por:

$$z = ax + (1-a)y = \begin{bmatrix} ax_1 + (1-a)y_1 \\ ax_2 + (1-a)y_2 \\ \dots \\ ax_N + (1-a)y_N \end{bmatrix}$$

é também eficiente. Então determinamos perfeitamente a fronteira eficiente se conseguirmos encontrar quaisquer duas carteiras eficientes. Por este teorema, uma vez que encontramos duas carteiras eficientes x e y sabemos que quaisquer outras carteiras eficientes são combinações convexas de x e de y . Se denotarmos a média e a variância de x e de y por: $\{E(r_x), \sigma_x^2\}$ e $\{E(r_y), \sigma_y^2\}$ e se $z = ax + (1-a)y$, então:

$$E(r_z) = aE(r_x) + (1-a)E(r_y)$$

$$\sigma_z^2 = a^2 \sigma_x^2 + (1-a)^2 \sigma_y^2 + 2a(1-a) \text{Cov}(x, y) = a^2 \sigma_x^2 + (1-a)^2 \sigma_y^2 + 2a(1-a) x^T S y$$



1.6 Algumas definições preliminares e notação

No decorrer deste capítulo vamos usar a seguinte notação: existem N activos com risco cada um dos quais com retorno esperado $E(r_i)$. A variável R é o vector coluna dos retornos esperados de cada activo:

$$R = \begin{bmatrix} E(R_1) = \bar{r}_1 \\ E(R_2) = \bar{r}_2 \\ \dots \\ E(R_N) = \bar{r}_N \end{bmatrix}$$

e S é a matriz $N * N$ de variância-covariância

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \sigma_{12} \dots \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} \sigma_{22} \dots \sigma_{2N} \\ \dots \\ \sigma_{N1} \sigma_{N2} \dots \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

Uma carteira de activos com risco é um vector coluna cuja soma das coordenadas é um.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \quad \sum_{i=1}^N \gamma_i = 1$$



Cada coordenada x_i representa a proporção investida em cada activo com risco da carteira.

O **retorno esperado** da carteira $E(r_x)$ de uma carteira é dado pelo produto de x por R ;

$$E(r_x) = x^T * R = \sum_{i=1}^N x_i E(r_i)$$

A **variância** dos retornos da carteira x , $\sigma_x^2 \equiv \sigma_{xx}$ é dada pelo produto

$$x^T S X = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$$

A **covariância** entre os retornos das duas carteiras x e y é dada por,

$$Cov(r_x, r_j) \text{ é definida pelo produto } \sigma_{xy} = x^T S y = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i y_j \sigma_{ij}. \text{ Note que } \sigma_{xy} = \sigma_{yx}.$$

1.7 Alguns conceitos importantes

O seguinte gráfico ilustra quatro conceitos. Uma **carteira possível** (*feasible portfolio*) é qualquer carteira cuja soma das proporções é 1. O **conjunto de carteiras possíveis** (*feasible set*) é o conjunto das médias e desvio padrão geradas por uma carteira possível; este conjunto de possibilidades é a área abaixo e à direita da curva. Também podemos definir o **conjunto das carteiras possíveis** como sendo: o conjunto das possíveis combinações para a formação de uma carteira a partir de um dado conjunto de



activos, graficamente ilustrada num universo bidimensional (rentabilidade esperada e desvio padrão).

Uma carteira eficiente pertence ao **conjunto das carteiras possíveis** se para um dado retorno esperado a sua variância é mínima.

Define-se o **conjunto das possibilidades** como sendo a linha que delimita esse conjunto, podendo uma carteira que esteja no conjunto das possibilidades ser eficiente ou não.

Finalmente, uma carteira x é uma **carteira eficiente** se maximiza o retorno dado pela variância da carteira (ou desvio padrão). Isto é: x é uma carteira eficiente se não houver outra carteira y tal que: $E(r_y) > E(r_x)$ e $\sigma_y \leq \sigma_x$. Ao conjunto de todas as carteiras eficientes chamamos **Frenteira eficiente**.

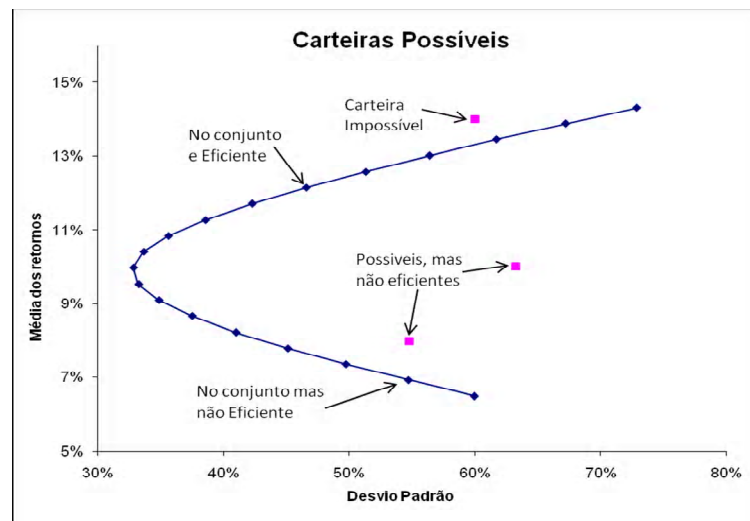


Figura 1: Carteiras possíveis são todas as que se encontram na frenteira eficiente e dentro dos limites da hipérbole



1.8 Alguns teoremas sobre carteiras eficientes e CAPM⁵ (*capital asset pricing model*)

As proposições seguintes (*Benninga, Simon; Financial modelling; Third Edition*) são usadas para derivar a **fronteira eficiente** (representação gráfica da rendibilidade esperada dos títulos existentes num dado mercado em função do respectivo risco sistemático), e a **security market line**⁶ (estimada a partir do coeficiente beta, a SML possibilita o reconhecimento da taxa de rentabilidade exigida a um investimento de acordo com o seu nível de risco).

Observação: De facto, nós procurámos a carteira de variância mínima para um dado retorno (carteira eficiente), isto é, procura-se minimizar a variância com duas restrições: a soma das componentes da carteira é igual a 1 e o retorno é determinado. Trata-se de um problema de minimização usual utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange obtém-se a solução indicada pelo sistema de equações que se segue (veja-se *Ingersoll, J. E., Theory of Financial Decision Making*).

PROPOSIÇÃO 1:

Seja c uma constante. Usamos a notação $R - c$ para denotar o seguinte vector coluna:

⁵ Capital Asset Pricing Model – Modelo clássico de avaliação de activos financeiros em equilíbrio, daqui para a frente sempre designado pela sigla CAPM

⁶ Security Market Line – Linha de Mercado de Activos, daqui para a frente designada por SML



$$R - c = \begin{bmatrix} E(r_1) - c \\ E(r_2) - c \\ \dots \\ E(r_N) - c \end{bmatrix}$$

Seja z o vector que resolve o sistema de equações linear $R - c = S_z$, então a solução deste sistema produz uma carteira x que pertence ao conjunto das carteiras possíveis da seguinte maneira:

$$Z = S^{-1}\{R - c\}, \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \quad \text{Com} \quad x_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^N z_j}$$

e além disso todas as carteiras que pertencem ao conjunto das carteiras possíveis são desta forma.

Intuição: Suponhamos que temos uma recta para a qual existe uma tangente à fronteira eficiente com ordenada na origem é igual a c . Chamamos ao ponto x a carteira eficiente no conjunto das carteiras possíveis.

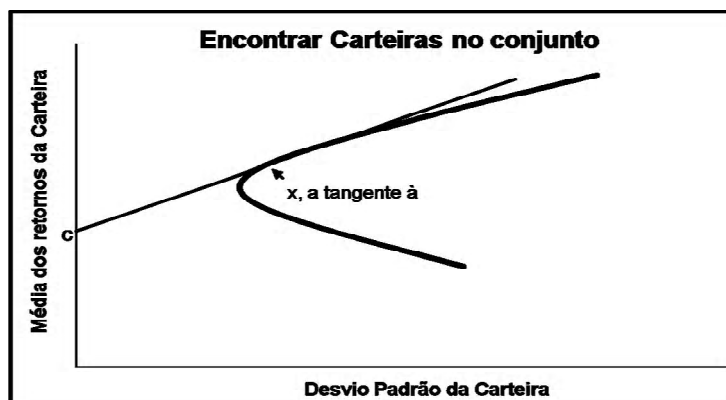


Figura 2: Como encontrar a carteira eficiente no conjunto das carteiras possíveis (Benninga, Simon; *Financial modelling; Third Edition*)



Esta proposição dá-nos um procedimento para encontrar x ; Além disso a proposição estabelece que todas as carteiras que pertencem ao conjunto das carteiras possíveis (em particular, todas as carteiras eficientes) são resultado do procedimento desenvolvido na proposição.

Demonstração: Escolhemos uma constante c , traçamos uma tangente a curva como se pode observar no gráfico acima e o ponto de intersecção é uma carteira que pertence ao conjunto das carteiras possíveis.

Se x é uma qualquer carteira no conjunto das carteiras possíveis, então existe uma constante c e um vector z tal que $S_z = R - c$ e $x = \frac{z}{\sum_{j=1}^N z_j}$

PROPOSIÇÃO 2:

Quaisquer duas carteiras que pertencem ao conjunto das carteiras eficientes são suficientes para determinar a fronteira eficiente.

Sejam $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ e $y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, duas quaisquer carteiras pertencentes ao conjunto a então todas as restantes carteiras que estão na curva são combinações convexas de x e de y .

Isto significa que dada qualquer constante a , a carteira

$$ax + (1-a)y = \begin{bmatrix} ax_1 + (1-a)y_1 \\ ax_2 + (1-a)y_2 \\ \dots \\ ax_N + (1-a)y_N \end{bmatrix}$$



pertence ao conjunto da fronteira eficiente.

PROPOSIÇÃO 3:

Seja y uma qualquer carteira pertencente ao conjunto das carteiras eficientes então para qualquer carteira x , tem-se a seguinte relação:

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c]$$

onde $\beta_x = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_y^2}$ e, além disso, c é o retorno esperado da carteira z

cuja covariância com y é zero:

$$c = E(r_z) \text{ quando } Cov(x, y) = 0$$

PROPOSIÇÃO 4:

Quando existe um activo sem risco, a proposição 3 generaliza-se e obtemos a SML do modelo clássico de avaliação de activos financeiros em equilíbrio (CAPM). Se existir um activo sem risco com retorno r_f então existe uma carteira pertencente ao conjunto das carteiras eficientes M tal que:

$$E(r_x) = r_f + \beta_x [E(r_M) - r_f], \text{ com } \beta_x = \frac{Cov(x, M)}{\sigma_M^2}$$



Nota: Se todos os investidores escolherem as suas carteiras apenas baseados na média e desvio padrão da carteira, então M é uma carteira composta por todos os activos com risco na economia, onde cada activo toma uma proporção do seu valor. Para tornar esta afirmação mais específica: suponhamos que existem N activos com risco e que o valor de mercado do activo i é V_i . Então a **carteira de mercado** tem os seguintes pesos:

$$\text{Proporção do activo } i \text{ em } M = \frac{V_i}{\sum_{h=1}^N V_h}$$

PROPOSIÇÃO 5:

O contrário da proposição 3 também é verdade. Suponhamos que existe uma carteira y tal que para cada carteira x se verifica a seguinte relação:

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c] \text{ com } \beta_x = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_y^2} \text{ então a carteira } y \text{ é uma}$$

carteira que pertence ao conjunto das carteiras possíveis.

1.9 Cálculo da fronteira eficiente

Da proposição 2 e das combinações convexas de duas carteiras calculadas anteriormente, podemos determinar todo um conjunto de carteiras possíveis (que obviamente inclui a fronteira eficiente).



Suponha-se que p é uma carteira com proporção a na carteira x e com proporção $(1-a)$ investida em y . Então a **média** e o **desvio padrão** dos retornos de p são dados por:

$$E(r_p) = E(r_x) + (1-a)E(r_y)$$

$$\sigma_p = \sqrt{a^2\sigma_x^2 + (1-a)^2\sigma_y^2 + 2a(1-a)\text{Cov}(x, y)}$$

Podemos fazer um gráfico com alguns valores para a média e desvio padrão, obtemos a seguinte figura:

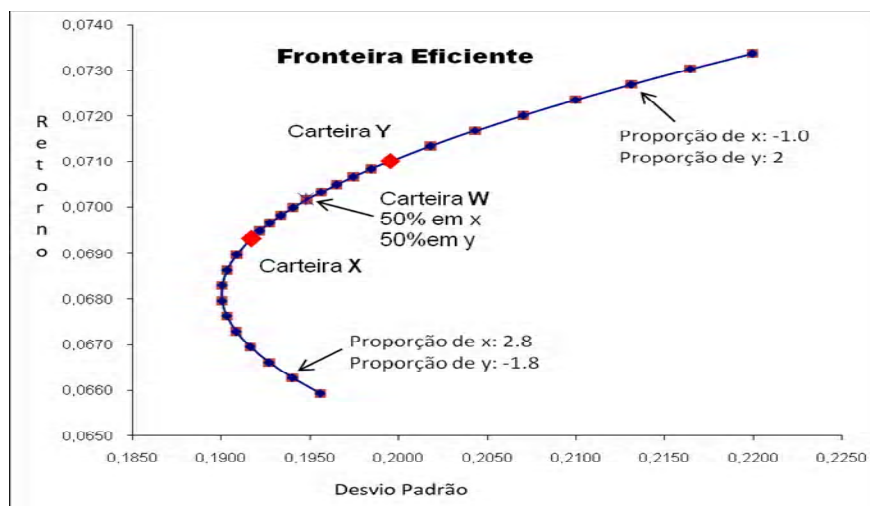


Figura 3: Fronteira Eficiente

Note que todas as combinações convexas que pertencem ao conjunto das carteiras possíveis, não têm necessariamente de ser eficientes. Seja por exemplo, w uma carteira eficiente que é combinação convexa de duas carteiras eficientes x e y ; Neste caso particular, a proporção de x é 50% e a proporção de y é 50%. Existem outras carteiras ilustradas que contêm posições curtas numa das duas carteiras x e y , e podem ou não ser



eficientes. Então, enquanto todas as carteiras eficientes são combinações convexas de quaisquer duas carteiras eficientes, não é verdade que toda a combinação convexa de quaisquer duas carteiras é eficiente.

1.10 Determinação da carteira de mercado: *The Capital Market Line*⁷ (CML)

Suponhamos que existe um activo sem risco, com retorno esperado r_f . Seja M a carteira eficiente que é solução do seguinte sistema de equações:

$$R - r_f = Sz$$

$$M_i = \frac{z_i}{\sum_{l=1}^N z_l}$$

Considere agora a combinação convexa da carteira M com o activo sem risco r_f , por exemplo, e suponha que o peso do activo sem risco numa carteira é a . Segue-se que a equação tipo do retorno e desvio padrão de uma carteira são:

$$E(r_p) = ar_f + (1-a)E(r_M)$$

⁷ Capital Market Line – Linha de Equilíbrio de Mercado, daqui para a frente denotada por CML

$$\sigma_p = \sqrt{a^2\sigma_{rx}^2 + (1-a)^2\sigma_M^2 + 2a(1-a)\text{Cov}(r_f, y)} = (1-a)\sigma_m$$

O conjunto de todas as combinações convexas com $a \geq 0$ é a CML.

Representada graficamente ao longo da fronteira eficiente da seguinte maneira:

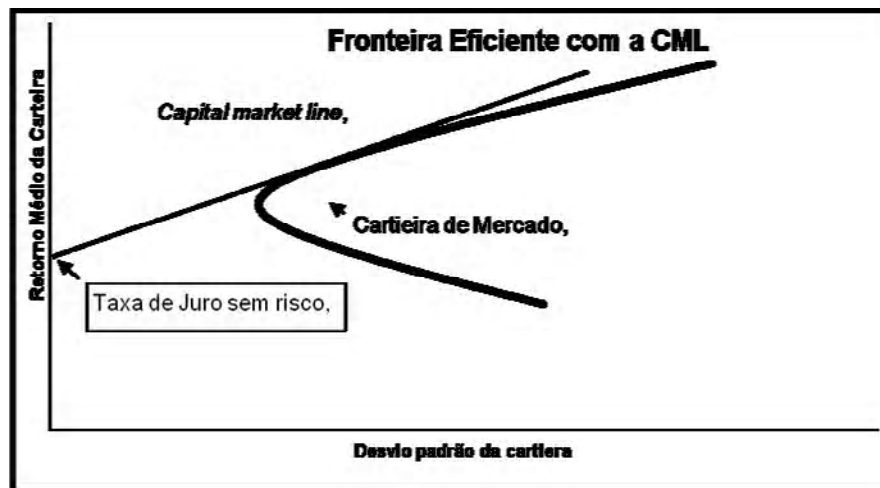


Figura 4: Fronteira Eficiente com a CML (Benninga, Simon; *Financial modelling; Third Edition*)

A carteira M é chamada a **Carteira de mercado** por várias razões:

- Suponhamos que os investidores concordam sobre a informação estatística da carteira (isto é, o vector dos retornos esperados R e a matriz de variância-covariância S). Suponhamos ainda que os investidores estão apenas interessados em maximizar o retorno esperado da carteira dado o seu desvio padrão. Então segue-se que toda a carteira óptima está na CML.



- Neste caso, a carteira M é a única carteira de activos com risco incluída em qualquer carteira óptima. Consequentemente, M deve incluir todos os activos com risco, cujo peso de cada activo está em proporção com o seu valor de mercado. Isto é:

O peso do activo i na carteira $M = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^N V_i}$ onde V_i é o valor de mercado

de cada activo i . Não será difícil determinar M quando se conhece r_f ; Temos apenas de resolver a carteira eficiente dada para a constante $c = r_f$. Quando r_f muda encontramos uma carteira de mercado diferente – que é apenas a carteira eficiente dada a constante r_f .

1.11 A SML quando existe um activo livre de risco

A proposição 4 garante que quando existe um activo livre de risco a seguinte relação linear é válida:

$$E(r_x) = r_f + \beta_x [E(r_M) - r_f] \text{ onde } \beta_x = \frac{Cov(x, M)}{\sigma_M^2}$$

1.12 O Rácio de Sharpe

O rácio de Sharpe estabelece uma relação entre o excesso de rentabilidade esperada de um determinado activo, relativamente à taxa de juro sem risco, e o seu risco, que é representado pelo desvio padrão da taxa de rentabilidade do activo



$$S = \frac{E[r] - r_f}{\sigma}$$

onde S é o rácio de Sharpe, $E[r]$ é a taxa de rentabilidade média do activo, r_f é a taxa de rentabilidade do activo sem risco e σ o desvio padrão da taxa de rentabilidade do activo. Naturalmente que, quanto maior é o valor do rácio de Sharpe melhor é o desempenho do activo.



IV - Aplicação Prática

1. Caso Prático

Neste capítulo vamos apresentar uma aplicação prática, em ambiente Excel, que tem por objectivo a construção de duas carteiras, uma investida em matérias-primas e outra investida em acções (que no nosso caso considerámos quatro títulos do PSI-20).

Ao longo deste trabalho foi sendo referida a importância das matérias-primas na bolsa e a inserção das mesmas na construção de carteiras de modo a fazer face a uma crise que se tem feito sentir desde o final de 2007.

1.1 Activos utilizados

Para efectuarmos a simulação utilizámos os seguintes activos:

- Petróleo (CLZ8 Comdty)
- Ouro (GoldPL Comdty)
- Soja (S A Comdty)
- Milho (C A Comdty)
- EDP (EDP PL EQUITY)
- BES (BES PL EQUITY)
- GALP (GALP PL EQUITY)
- MOTA/ENGIL (EGL PL EQUITY)



Escolhemos apenas quatro activos para cada carteira por se tratar de um exemplo de possibilidade de existência da mesma. Além disso, os activos foram escolhidos de forma a variar sectores, no caso das acções, e a variar matérias-primas e também de forma a emparelhar minimamente as acções e os futuros (por exemplo, Petróleo e GALP).

1.2 Origem dos dados

Os dados utilizados foram todos retirados da *Bloomberg*, o que no caso dos activos em questão se traduz em valores ao preço de fecho (PX CLOSE, PX LAST). Todos os valores dos activos em questão estão compreendidos num período de cerca de dois anos (30-11-2006 a 31-03-2008). No nosso exemplo vamos considerar uma base mensal por se tratar de matérias-primas cujos contratos são feitos apenas mensalmente devido à deterioração de determinados produtos.

Nota: Apesar de ser um período curto é um período suficiente para a análise demonstrativa e um período com alguma estabilidade nos comportamentos observados. Se estendesse mos mais o período teríamos comportamentos significativamente diferentes.

1.3 Ficheiro Excel

Os cálculos foram todos realizados com o auxílio do Microsoft Excel e são apresentados em anexo com a designação CARTEIRA.XLS.



1.4 Resultados

Com o objectivo de comparar a melhor rentabilidade possível no investimento em duas carteiras com activos financeiros distintos (uma investida em contratos de futuros sobre matérias-primas e outra sobre quatro acções do PSI-20) começámos pelo cálculo da fronteira eficiente, considerando os seguintes pesos escolhidos aleatoriamente para duas carteiras X e Y:

Carteira X	0,2	0,3	0,4	0,1
Carteira Y	0,2	0,1	0,1	0,6

Tabela 1: Tabela com os pesos das carteiras x e y para as matérias-primas e acções

Assim, a fronteira eficiente dos retornos das combinações das carteiras X e Y para matérias-primas e acções são dadas pelos gráficos seguintes:

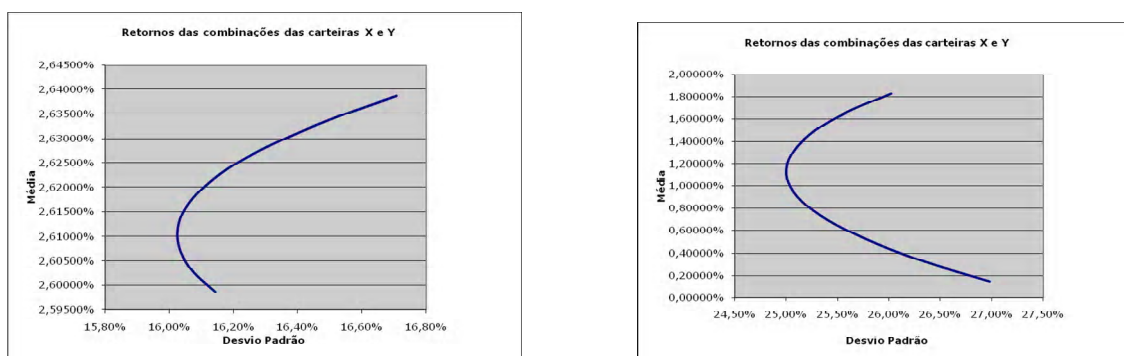


Figura 6 – Gráfico que representa a fronteira eficiente mensal das combinações das carteiras x e y para as matérias-primas e acções, respectivamente.

Seguidamente, passámos ao cálculo de uma carteira única e eficiente de mercado. A constante c foi escolhida de acordo com a taxa de juro fixa anual de 5%, que dividimos por 12, uma vez que estamos a trabalhar com dados



mensais. Então, $c = 0,42\%$. As nossas carteiras de mercados para os activos escolhidos têm os seguintes pesos:

A carteira escolhida nas carteiras de mercado M

Activos	Pesos	Activos	Pesos
Soja	0,164143936	EDP	0,623454343
Milho	0,148902501	BES	-2,443244381 ⁸
Petróleo	0,2714637	GALP	2,120206516
Ouro	0,415489863	MOTA/ENGIL	0,699583523

Tabela 2 – Tabela com os pesos da carteira escolhida nas carteiras de mercado

Além disso, a carteira investida em matérias primas tem como retorno 2,57% e como desvio padrão 15,63% e a carteira de acções tem 13,39% de média e 91,20% de risco. Com estes dados conseguimos a calcular a CML (*Capital Market Line*) conforme os gráficos em baixo:

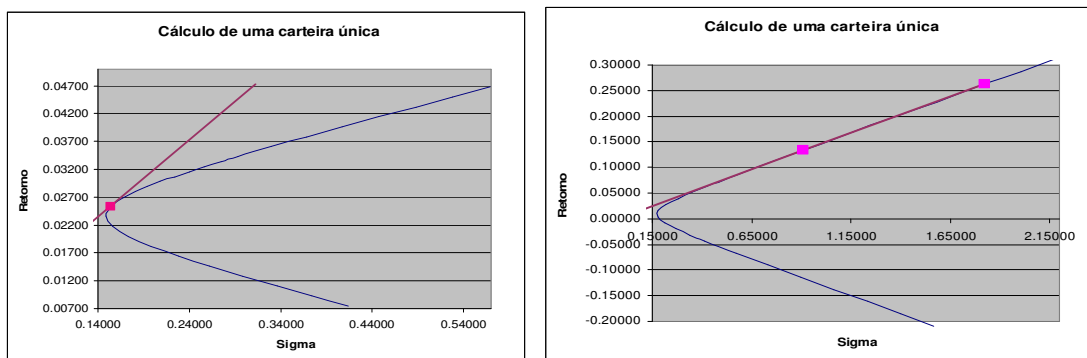


Figura 6 – Gráfico que representa a carteira única para as matérias-primas e para as acções, respectivamente

⁸ Note-se que, este valor é negativo. Já foi estudado no capítulo anterior a possibilidade da carteira eficiente conter posições curtas.



Assim, o ponto de intersecção entre a hipérbole e a recta tangente é a chamada carteira eficiente de mercado.

Por último, fizemos a verificação dos nossos dados, bem como das cinco proposições referidas no capítulo anterior na página do ficheiro cujo nome é TESTESML. Constatou-se que em ambos os casos, carteira de matérias primas e carteira de acções, a hipótese nula não é rejeitada, ou seja, a regressão que testa se o declive e a ordenada na origem (taxa de juro= c) são as que nós supusemos.

1.5 Conclusões

O CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) dá-nos uma previsão da relação existente entre risco e retorno. Para verificarmos qual a carteira mais atractiva utilizámos o chamado rácio de Sharpe (ver capítulo anterior). Através deste rácio concluímos que o $S_{\text{CMDTY}}=13,78\%$ e $S_{\text{STOCK}}=14,22\%$, o que significa que o investimento em ambas as carteiras seria comparável. No entanto, analisando empiricamente, poderíamos concluir que o melhor investimento para o caso de um investidor avesso ao risco seria na carteira de matérias-primas, uma vez que apesar do retorno ser menor (2,57%(CMDTY) versus 15,63%(STOCK)) também o risco é menor (13,39%(CMDTY) versus 91,20%(STOCK)). Com o mesmo argumento, para um investidor não avesso ao risco o melhor investimento seria na carteira de acções.



V - Modelo de *Black*

1. Modificações ao Modelo de *Black-Scholes*

1.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar o modelo de *Black* (1972) como forma de apreçamento para derivados sobre matérias-primas. Apresentamos duas definições importantes (retorno e volatilidade) e a construção do modelo até chegar à fórmula de *Black*. Por último, é feita uma aplicação prática em que os activos utilizados são os contratos de futuros sobre o petróleo e o ouro.

1.2 Retornos (Taxa de Rentabilidade)

A variável aleatória usada para medir o risco de mercado é a taxa de retorno ou taxa de rentabilidade de um dado activo financeiro.

Suponhamos, por exemplo, um horizonte temporal de um mês. As taxas de retorno são medidas desde o último mês, denotado por $t-1$, até ao final do mês corrente, denotado por t . O retorno aritmético é dado por:

$$r_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$



onde:

P_t - preço do activo no momento t

D_t - dividendo pago no momento t

Quando estamos a utilizar horizontes temporais mais longos, utiliza-se a taxa de retorno geométrica, que é definida em termos de logaritmo do rácio do preço:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right)$$

Daqui para a frente, por questões de simplicidade, vamos assumir que não são pagos dividendos e que sempre que referirmos taxas de rentabilidade ou retornos estaremos a falar dos retornos geométricos.

A utilização de taxas de rentabilidade geométricas apresentam as seguintes vantagens:

- Primeiro, dizem mais em termos económicos que as taxas de rentabilidade aritméticas. Se as taxas de rentabilidade geométricas são normalmente distribuídas, então a distribuição nunca pode ter preços negativos.
- A segunda vantagem é que permitem extensões em períodos múltiplos.



Na prática, a distribuição das taxas de rentabilidade é usualmente estimada recorrendo a dados históricos e que se assumem serem independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.). Se T é o número de observações podemos obter a seguinte estimativa:

- Retorno Esperado – o retorno esperado, μ , de um activo depende do risco do mesmo. Quanto maior for este risco, maior é o retorno esperado.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i$$

1.3 Volatilidade

A volatilidade mede a amplitude das variações da cotação de uma activo ao longo do tempo e à velocidade com que estas se produzem. Ou seja, a volatilidade, σ , é a medida da nossa incerteza acerca dos retornos de um activo.

Para estimar a volatilidade de um activo empiricamente, o preço do activo é observado em intervalos fixos no tempo (diário, semanal, mensal, anual).

Seja,

$n + 1$: N^o de observações

S_i : O preço do activo no final do i -ésimo ($i=1, \dots, n$) intervalo

τ : Prazo até ao vencimento

e seja,



$$\mu_i = Ln\left(\frac{S_i}{S_{i+1}}\right), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

A estimação usual de, S , para o desvio padrão de μ_i é dado por:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mu_i - \bar{\mu})^2}$$

ou

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \mu_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i\right)^2}$$

onde $\bar{\mu}$ é a média dos μ_i .

O próprio σ pode ser estimado como $\hat{\sigma}$, onde $\hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\tau}}$.

E o erro-padrão desta estimação pode ser mostrado pela aproximação

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2n}}.$$



1.2 Mercados de futuros

Seja $f_S(t, T^*)$, $t \in [0, T^*]$ a função de um preço de futuros de determinado activo S para a data T^* . A evolução dos preços $f_t = f_S(t, T^*)$ é dada pela expressão

$$df_t = \mu_f dt + \sigma_f f_t dW_t, \quad f_0 > 0 \quad (1)$$

com μ_f e $\sigma_f > 0$ são números reais, e W_t , $t \in [0, T^*]$ é função de um processo Browniano, definido num espaço de probabilidade (Ω, F, P) , onde $F = F^W$. A única solução para a Equação Diferencial Estocástica (SDE) (1) é igual a

$$f_t = f_0 \exp(\sigma_f W_t + (\mu_f - \frac{1}{2} \sigma_f^2) t), \quad \forall t \in [0, T] .$$

Pelo modelo de *Black-Scholes*, o preço futuro de um activo S é dado pela igualdade:

$$f_t = f_S(t, T^*) = F_S(t, T^*) = S_t e^{r(T^*-t)}, \quad \forall t \in [0, T^*]^9, \quad (2)$$

onde, como habitualmente, escrevemos $F_S(t, T^*)$ para denotar um preço *forward* do activo para a data T^* . Esta última igualdade (2) é facilmente

⁹ Observação: Podemos afirmar estas igualdades apenas porque a taxa de juro é determinística.



derivada com ausência de arbitragem nos mercados *spot / forward*; A segunda igualdade é uma consequência de que a taxa de juro é determinística. Se a dinâmica dos preços do activo S é dada pela SDE ($dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$) então pela fórmula de Itô

$$df_t = (\mu - r)f_t dt + \sigma f_t dW_t ,$$

com $f_0 = S_0 e^{rT^*}$, e desta forma satisfaz **(1)** com $\mu_f = \mu - r$ e $\sigma_f = \sigma$. Como os contratos de futuros não são necessariamente associados a um título físico, tais como acções ou obrigações, vamos apenas estudar o caso dos contratos de futuros de forma abstracta. Isto significa que consideramos **(1)** como a fórmula dinâmica dos preços dos futuros f . No entanto, podemos escrever $\mu = \mu_f$ e $\sigma = \sigma_f$ no que segue. Temos, então, por **(2)** que

$$f_S(t, T^*) = F_S(t, T^*) = E_{P^*}(S_{T^*} | F_t), \quad \forall t \in [0, T^*],$$

$$f_S(t, T^*) = F_S(t, T^*) = \frac{S_t}{B(t, T^*)}, \quad \forall t \in [0, T^*],$$

onde $B(t, T^*)$ é função do preço no momento t de uma obrigação de cupão zero com maturidade T^* .



1.5 Fórmula de *Black* para Contratos de Futuros

Seja $C^f : \mathfrak{R} \times [0, T] \mapsto \mathfrak{R}$ a função dada pela Fórmula de *Black* (MUSIELA, Marek; RUTKOWSKI, Marek; *Martingale Methods in Financial Modeling*; Springer) para contratos de futuros:

$$C^f(f, t) = e^{-rt} (fN(d_1(f, t)) - KN(d_2(f, T))), \quad (3)$$

onde $d_{1,2}(f, t) = \frac{\ln(f/k) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$

$$(4)$$

e N é a função de distribuição Gaussiana cumulativa.

Antes de formular o principal resultado deste capítulo, vamos considerar mais uma vez o contrato de futuros escrito sobre uma acção cuja dinâmica dos preços satisfaz

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (\text{Spot market})$$

Se $T = T^*$, o resultado da avaliação da opção de futuros (3)-(4) pode ser encontrada directamente da fórmula de *Black-Scholes* através de

$$S_t = f_t e^{-r(T-t)}$$



Intuitivamente, o resultado surge da simples observação que neste caso é $f_T = S_T$ quando a opção expira. Na prática, a data de expiração de uma opção de futuros usualmente é a seguir à data de liquidação do contrato de futuros associado, i.e., $T < T^*$. Nesse caso temos

$$C_T^f = (f_S(T, T^*) - K)^+ = e^{r(T^*-T)} (S_T - Ke^{-r(T^*-T)})^+,$$

e podemos avaliar a opção de futuros como se fosse a opção spot. Desta forma, temos a igualdade $f_S(t, T^*) = F_S(t, T^*)$, assumindo que a taxa de juro é uma função determinística.



VI - Modelo Comparativo Spot-Futuros

1. O Modelo

Como já foi sendo referido ao longo de todo o trabalho, um contrato de futuros na data T é um acordo bilateral, negociado num mercado de futuros, tal como o CBOT (*Chicago Board of Trade*) ou o NYMEX (*New York Mercantile Exchange*), celebrado num momento zero e com data de expiração T , sobre uma determinada quantidade de uma matéria-prima e com determinado preço. Um contrato forward na data T tem a mesma definição que o contrato de futuros mas é negociado, geralmente, em OTC.

Algumas observações acerca dos contratos de futuros e forward: os futuros são usados como substitutos para os mercados *Spot* pelos *hedge funds*; os mecanismos da *clearing house*, por detrás dos mercados de futuros, gera os preços de mercado; um investidor que antecipe uma subida dos preços vai comprar futuros; um investidor que antecipe uma queda nos preços vai vendê-los. As matérias-primas estão cada vez mais atractivas para os investidores que as vêem como uma alternativa às classes de activos tradicionais (acções, obrigações) justificadas pela grande liquidez, os baixos custos de transacção e a ausência de risco de crédito.

Existem algumas relações importantes entre os preços dos futuros e os preços forward que passamos a listar. Sob taxas de juro não-estocásticas, e com ausência de risco de crédito, os preços forward e de futuros para a mesma condição e maturidade são iguais. Também para taxas de juro estocásticas podemos, ainda, supor a igualdade desde que, a covariância entre a diferença no preço da matéria-prima e a taxa de juro seja zero.

Para modelar preços de futuros, o paradigma principal é o modelo *mean reverting* (GEMAN, Hélyette; *Mean Reversion Versus Random Walk in Oil and*



Natural Gas Prices; Birkbeck, University of London, United Kingdom; ESSEC Business School, Cergy-Pontoise, France). De facto, até recentemente (2002), para a maioria das matérias-primas acreditava-se, baseado em estudos empíricos, que os seus preços não crescem nem decrescem para a média ao longo do tempo; Estas tendem para a *mean revert* a um nível que pode ser visto como o custo de produção marginal (ver [Geman 05]). Um modelo *mean reverting* importante é dado por Ornstein Uhlenbeck, na equação diferencial estocástica (denominada daqui para a frente por SDE):

$$dS_t = K(\theta - S_t)dt + \sigma d\beta_t$$

$K, \theta > 0$, $(\beta_t)_{t \geq 0}$ é um processo Browniano. Neste modelo, S_t reverte em média para θ à velocidade K . Este modelo pode tomar valores negativos. Uma alternativa ao modelo para que os preços dos futuros tomem valores positivos, essencialmente para a energia e a agricultura, é o modelo parecer um processo Browniano geométrico enquanto tem a forma da *mean reversion*.

Este modelo é dado aplicando a *mean reverting* aos retornos e denomina-se por SDE Ornstein-Uhlenbeck geométrico:

$$\frac{dSt}{St} = k(\theta - \text{Log}(St)) dt + \sigma d\beta t$$

$K, \theta > 0$, $(\beta_t)_{t \geq 0}$ é um processo Browniano. Pelo lema de Itô $\text{Log}(St)$ reverte em média para $\theta - \frac{k^2}{2k}$ à velocidade K . Assim, este modelo não toma valores negativos.



1.1 A *convenience yield*

A *convenience yield* é a maneira de representar as vantagens do detentor dos bens físicos introduzida por *Kaldor* (1939) e *Working* (1948,1949). Uma definição informal de *convenience yield* é o benefício a que o detentor tem direito sobre uma determinada matéria-prima física, mas não para o detentor de um contrato *forward*. Isto é, a *convenience yield* y é uma taxa, tal que, se S_t é o preço spot, o benefício em dólares do detentor da matéria-prima no intervalo $[t, t + dt]$ é $S_t \times y \times dt$. Um resultado importante é que, com ausência de arbitragem, a taxa de juro constante r e a *convenience yield* y também constante, se F_t^T representa o preço dos futuros, então

$$F_t^T = S_t e^{(r-y)(T-t)}$$

1.2 A *convenience yield* generalizada

Os factos seguintes mostram como estão os mercados de futuros sobre as matérias-primas, nos dias que correm. Assim, o volume transaccionado até Abril de 2008 cresceu cerca de 54% passando dos $5,58 \cdot 10^6$ toneladas em 2007 para $8,63 \cdot 10^6$ em igual período de 2008; o nº de contratos que não liquidaram em 13 de Maio de 2008 foi de $2,9 \cdot 10^6$ barris e em 13 de Dezembro de 2007 tinha sido de $1,2 \cdot 10^6$ barris, o que representa 142% de crescimento. A percentagem de milho transaccionado nos EUA, incluída em fundos de investimento, foi de 40% em Janeiro e 60% em Maio, o que significa um crescimento de 50% em menos de 5 meses.

Estes factos conduzem-nos às seguintes conclusões e proposta para o estudo apresentado neste trabalho. Muitos acreditam que as acções dos



especuladores estão a causar um desconsenso entre o valor dos contratos de futuros e o valor subjacente ao activo que cada contrato é suposto representar. É importante e necessário estudar a evolução e a ligação entre os preços spot e os preços futuros. Propomos, então, o conceito da *conviniencia yield* generalizada para observar as diferenças na evolução dos preços spot e futuros.

Definição 1: A *conviniencia yield* generalizada é o processo estocástico $(y_t)_{t \geq 0}$ tal que, $(r_t)_{t \geq 0}$ sendo a taxa de juro spot, $(F_t^T)_{t \geq 0}$ o processo dos preços futuros na maturidade T e $(S_t)_{t \geq 0}$ o processo dos preços spot:

$$F_t^T = S_t e^{(r_t - y_t)(T-t)}$$

que é:

$$y_t := r_t + \frac{1}{T-t} \text{Ln} \left(\frac{S_t}{F_t^T} \right)$$

Nota 1: Observe-se que, como a *conviniencia yield* generalizada se aproxima da taxa de juro, o preço *spot* deve aproximar-se do preço dos futuros. Inversamente, se o preço *spot* se aproximar do preço dos futuros, a *conviniencia yield* generalizada aproxima-se da taxa de juro *spot*. Este fenómeno é verificado num número significativo de matérias-primas.

De acordo com esta definição é apresentada a **Figura 9** para os dados relativos ao petróleo e à prata.

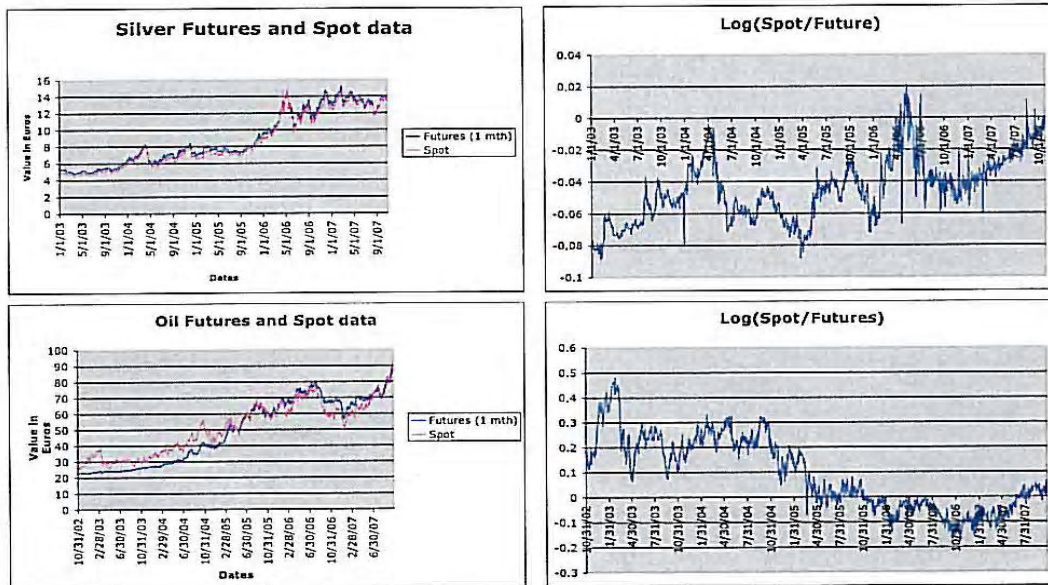


Figura 7 – Gráficos representativos dos preços dos futuros e *spot* para a prata e petróleo e a *convenience yield* generalizada

1.3 Os modelos matemáticos

Para reproduzir o comportamento do processo dos spot e futuros observado para as matérias-primas acima, propomos um modelo de difusão dado pelo sistema de SDE para analisar a evolução dos futuros e spot. Os preços dos spot e dos futuros é dado pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = k^S (\theta_S - \text{Log}(F_t^T))dt + \sigma^S dB_t \\ \frac{dF_t^T}{F_t^T} = k^F (\theta_F - \text{Log}(S_t))dt + \sigma^F dB_t \end{cases} \quad (1)$$

T é arbitrário. O modelo estabelece uma dinâmica acoplada entre o preço *spot* e o preço dos futuros de maturidade T. O modelo foi calibrado com dados para obter os seguintes parâmetros k^S , k^F , σ^S , σ^F que dependerão de T.

Os resultados são apresentados na figura seguinte:

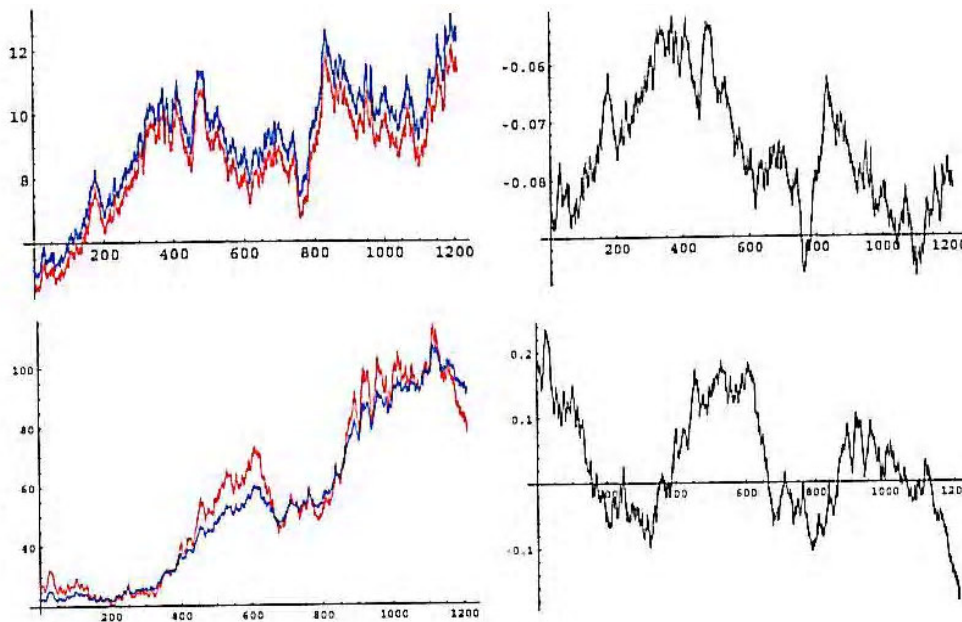


Figura 8 – Simulação dos preços dos futuros e *spot* para a prata e petróleo e para a *convenience yield* generalizada

1.4 Conclusões e trabalho futuro

O modelo proposto apresenta uma boa réplica de todo o comportamento da relação entre os preços dos futuros e *spot*. A *convenience yield* generalizada estimada, para ambas as matérias-primas, tende a decrescer. É observado,



ainda, que os retornos de longo prazo estimados verificam $\theta_F = 33 > \theta_S = 25$, o que confirma a desconexão entre o valor dos preços dos futuros e do spot.

No que diz respeito a futuros trabalhos sobre o modelo será importante estudar as propriedades assintóticas do mesmo, i.e., a existência de uma medida invariante, o desenvolvimento de métodos eficientes para a calibração e estimação do modelo e o *benchmarking* do modelo contra os preços de mercado de opções dadas por *traders* institucionais.

1.5 Aplicação Prática

Neste ponto, iremos apresentar uma aplicação prática onde utilizaremos o modelo de *Black* para o cálculo das *Call Options* sobre o ouro e o petróleo e cujas volatilidades são calculadas de modos diferentes (o primeiro modo é o habitual e descrito no ponto 1.2 do capítulo V, e o segundo é calculado de acordo com o modelo proposto ao longo deste capítulo).

Os dados que utilizámos foram retirados da Bloomberg a preços de fecho e estão compreendidos entre 02/01/2003 a 19/11/2008. Iremos trabalhar numa base diária.

As próximas figuras mostram os dados utilizados no cálculo da *Call Option* ($C(f, T)$) através do modelo de *Black*, quer para o modelo habitual, quer para o modelo *spot/futuros* em que a única variável que altera é o σ , referindo-se a primeira tabela ao petróleo e a segunda ao ouro:



Dados	Modelo de <i>Black</i> Habitual	Modelo de <i>Black</i> aplicado ao modelo <i>Spot</i> /Futuros
F_0	70,26	70,26
K	55	55
R	0,05	0,05
T	0,03968254	0,03968254
Σ	0,262790227	0,268599
$\text{Ln}(F_0/K)$	0,244869462	0,244869462

Tabela 3 – Tabela de dados para a aplicação do modelo de *Black* ao futuro sobre o petróleo

Dados	Modelo de <i>Black</i> Habitual	Modelo de <i>Black</i> aplicado ao modelo <i>Spot</i> /Futuros
F_0	804,5	804,5
K	790	790
R	0,05	0,05
T	0,099206349	0,099206349
Σ	0,194988184	0,19847
$\text{Ln}(F_0/K)$	0,018188021	0,018188021

Tabela 4 – Tabela de dados para aplicação do modelo de *Black* ao futuro sobre o ouro

Note-se que, a variação do σ é mínima de um modelo para o outro o que fará com que o valor da *Call Option* calculada seja semelhante em ambos os casos. Além disso, note-se que nos casos práticos estudados é condição que, no caso do petróleo o $T \leq 10$ dias e para o ouro $T \leq 25$ dias (ver justificação em anexo).

As próximas tabelas representam o preço da *Call Option* quando fazemos variar o valor do preço de exercício K .



Tabela de Variação dos K

K	70	65	60	55
$C(f,T)_{\text{Modelo habitual}}$	1,59	5,36	10,24	15,23
$C(f,T)_{\text{Modelo Spot/Futuros}}$	1,63	5,37	10,24	15,23

Tabela 5 – Tabela de variação do valor do preço de exercício K para o modelo habitual e para o modelo *spot/futuros* sobre o petróleo

Tabela de Variação dos K

K	795	790	785	780
$C(f,T)_{\text{Modelo habitual}}$	24,58	27,49	30,60	33,90
$C(f,T)_{\text{Modelo Spot/Futuros}}$	24,93	27,83	30,92	34,20

Tabela 6 – Tabela de variação do valor do preço de exercício K para o modelo habitual e para o modelo *spot/futuros* sobre o ouro



Conclusão

Os instrumentos derivados quando compreendidos e utilizados adequadamente podem gerar grandes benefícios para a economia em geral.

O trabalho apresentado foi realizado ao longo de um ano, daí que tenhamos que fazer uma breve descrição histórica dos factos ocorridos durante este período.

Nos finais de 2007 avizinhava-se uma crise financeira que à data da entrega desta dissertação, muitos avaliavam como a maior crise de sempre só comparável à de 1929.

Em meados de Março de 2008, com os riscos globais negativos para a actividade económica que se tinha feito sentir nos últimos tempos, tais como: o arrastamento de condições anormais nos mercados financeiros (clima de desconfiança entre instituições financeiras, alargamento de spreads de crédito, descalagem das taxas de juro monetário face às taxas de juro de referência), continuação da escalada dos preços dos bens energéticos e alimentares; aumento da procura de matérias primas e um aumento generalizado do grau de aversão ao risco, apontava-se para uma maior exposição, por parte dos gestores de activos e fundos de pensões, em matérias primas para mais de 10% das suas carteiras durante pelo menos 3 anos. Por outro lado, um número crescente de investidores planeava aumentar as suas posições curtas (*short selling*).

As matérias-primas superavam as acções e as obrigações em termos de desempenho, atraindo planos de pensão, hedge funds e outros investidores.

Em Portugal, produtos como o ouro, petróleo e os cereais representavam uma alternativa de investimento, levando a rentabilidades que ultrapassavam os 20% em 2007.



A oferta de matérias-primas disponível em Portugal era cada vez mais diversificada e a apetência dos portugueses por este mercado em desenvolvimento aumentava.

É neste contexto que nos surge a ideia de criar uma carteira de investimento cuja sua aplicação é feita em futuros sobre matérias primas. Através do CAPM, construímos uma carteira que se baseava em matérias-primas diversificadas (ouro, petróleo, milho e soja) e que comparámos com o investimento numa carteira de acções sobre quatro activos do PSI-20 (EDP, BES, MOTA/ENGIL e GALP).

Concluimos que o investimento em qualquer uma seria equivalente. Mas, para um investidor avesso ao risco seria preferível o investimento em matérias-primas pois a relação retorno/risco seria mais favorável. No caso de um investidor não avesso ao risco, o investimento na carteira de acções seria provavelmente a melhor escolha, mas teria que ter uma posição curta em BES.

Numa próxima fase terá de ser desenvolvido o mesmo trabalho para valores desde Março de 2008 até aos nossos dias, para verificar se neste momento ainda se mantém a decisão de investimento.

Propusemos ainda, um modelo (este referente a dados desde 2003 até Novembro de 2008) de evolução acoplado para spot/futuros que nos permitiu a comparação de apreçamento entre o modelo de Black e um modelo estendido de Black através de σ estimados. Aqui, concluimos que estimando o σ pela forma habitual ou através do nosso modelo spot/futuros, os valores são semelhantes variando apenas a partir da terceira casa decimal o que leva a que o valor da Call Option calculada também seja muito aproximado.

No que respeita a trabalhos futuros teremos que desenvolver detalhadamente a estimação dos parâmetros do modelo, em particular as propriedades estatísticas do σ (não enviesado, consistente, assintoticamente normal).



Bibliografia

- BENNINGA, Simon; Financial Modeling; Third Edition
- HULL, John C.; Options , Futures, and Other Derivatives; Fifth Editon
- BJÖRK, Tomas; Arbitrage Theory in Continuous Time; Second Edition; Oxford University Press
- MUSIELA, Marek; RUTKOWSKI, Marek; Martingale Methods in Financial Modeling; Springer
- BRAZ, André; MARTINS, Eduardo; OLIVEIRA, Luís; VENES, Nuno; Os instrumentos derivados; Simulação de um mercado de futuros de produtos agrícolas para Portugal; Junho de 2000
- BAXTER, Martin; RENNIE, Andrew; Financial Calculus; An introduction to derivative pricing; Cambridge University Press
- KLEINMAN, George; Trading Commodities & Financial Futures; Third Edition
- GEMAN, Hélyette; Commodities and Commodity Derivatives; Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy
- GEMAN, Hélyette; Mean Reversion Versus Random Walk in Oil and Natural Gas Prices; Birkbeck, University of London, United Kingdom; ESSEC Bussiness School, Cergy-Pontoise, France
- OKSENDAL, B.; Stochastic Differential Equations; 6th Edition; Springer 2007
- IACUS, S.M.; Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations; Springer 2008



- INGERSOLL, J.E.; Theory of Financial Decision Making; Rowman & Littlefield Publishers, Inc; 1987
- KALDOR, N.; Speculation and Economic Stability; The Review of Economic Studies; 7; 1-27; 1939
- WORKING, H.; Theory of the Inverse Carrying Charge in Futures Markets; Journal Farm Economics; 30; 1-28; 1948
- WORKING, H.; The Theory of the Price of Storage; American Economic Review; 39; 1254 – 1262; 1949
- WORKING, H.; Futures Trading and Hedging; American Economic Review; 43; 314-343; 1953



Links Interessantes

- www.bloomberg.com
- <http://diarioeconomico.com>
- <http://www.thinkfn.com/content/view/264/>
- <http://jornaldenegocios.pt>
- www.scotiamocatta.com
- www.nsfutures.com
- <http://aeiou.expresso.pt>
- <http://www.agenciafinanceira.iol.pt>
- www.growinvest.com
- www.activobank7.pt



Anexos



O estudo matemático do modelo SDE

O Comportamento da parte determinística do modelo

Apresentamos agora um estudo sobre o sistema determinístico de equações diferenciais estocásticas ordinárias que podem representar o comportamento médio das trajectórias do processo. Este estudo vai-nos dar algumas indicações úteis relativas ao comportamento assintótico das soluções do modelo completo. Sugerimos a literatura habitual sobre equações diferenciais ordinárias (ver [Birkhoff et al 78 p.106] e [Reinhard 1982, p.78]) para todas as noções necessárias neste capítulo.

$$\begin{cases} \frac{dX_t^1}{X_t^1} = f_1(X_t^1, X_t^2) := K^1(\theta^1 - \text{Log}(X_t^2))dt \\ \frac{dX_t^2}{X_t^2} = f_2(X_t^1, X_t^2) := K^2(\theta^2 - \text{Log}(X_t^1))dt \end{cases} \quad (2)$$

Olhemos para os pontos críticos do vector dado por (f_1, f_2) . O único zero deste vector é o ponto $(e^{\theta^2}, e^{\theta^1}) \in \mathfrak{R}^2$ e não há mais zeros se pretendermos que $k^1 \neq 0$ e $k^2 \neq 0$. O Jacobiano da transformação é dado por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_t^1, X_t^2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_t^1, X_t^2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_t^1, X_t^2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_t^1, X_t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k^1 e^{\theta^2 - \theta^1} \\ -k^2 e^{\theta^1 - \theta^2} & 0 \end{pmatrix}$$



que tem um determinante igual a $-k^1k^2$ e traço igual a zero. As raízes são $-\sqrt{k^1k^2}$ e $\sqrt{k^2k^1}$ e os correspondentes vectores são

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(e^{\theta^2 - \theta^1} \sqrt{\frac{k^1}{k^2}}, 1 \right) \\ \left(-e^{\theta^2 - \theta^1} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, 1 \right) \end{array} \right.$$

Em conclusão, podemos dizer que, como os parâmetros k^1 e k^2 são sempre positivos, o determinante é também sempre positivo e assim, haverá sempre duas raízes reais distintas com sinais opostos. Como consequência, o ponto crítico do sistema linear é sempre um ponto sobrecarregado que é instável, ou seja, a maioria das trajectórias tenderão para infinito no tempo. Também sabemos, com os resultados habituais da teoria da dinâmica dos sistemas, que o sistema linear e o sistema original são topologicamente equivalentes numa vizinhança de pontos críticos (ver [Reinhard 1982, p.97]), i.e., as trajectórias do original são uma deformação contínua das trajectórias do sistema linear. Mais ainda, o sistema é também estável estruturalmente (ver [Reinhard 1982, p.99]).

Nota 2: Numa vizinhança de um ponto crítico teremos um comportamento instável. Para o sistema com ruído, se a volatilidade for suficientemente grande teremos que as trajectórias irão saltar de uma diversidade instável para outra e assim, o comportamento determinístico das trajectórias estará desajustado, em certos casos.

O sistema SDE

Consideremos o sistema de equações diferenciais estocásticas dado por:

$$\begin{cases} \frac{dX_t^1}{X_t^1} = K^1(\theta^1 - \text{Log}(X_t^2))dt + \sigma^1 d\beta_t \\ \frac{dX_t^2}{X_t^2} = K^2(\theta^2 - \text{Log}(X_t^1))dt + \sigma^2 d\beta_t \end{cases} \quad (3)$$

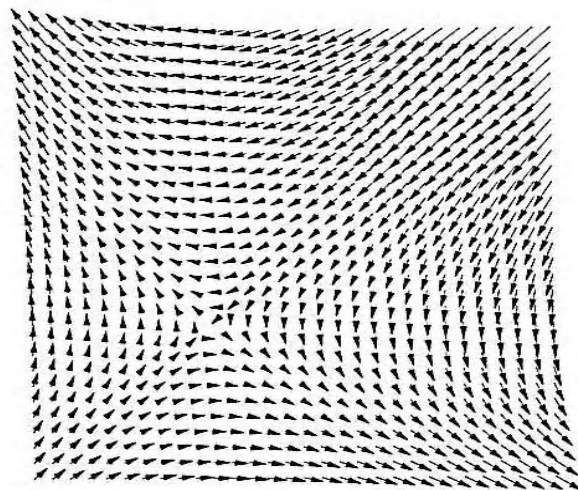


Figura 11 – O espaço próximo do ponto crítico para os parâmetros estimados para a prata

Um sistema de SDE equivalente

Através de uma primeira troca de variáveis dadas, por meio da função $g : [0, \infty[\times \mathfrak{R}^2 \mapsto \mathfrak{R}^2$ por:



$$Y_t = (Y_t^1, Y_t^2) = g(t, X_t) = (g_1(t, X_t^1, X_t^2), g_2(t, X_t^1, X_t^2)) = (\text{Log}(X_t^1), \text{Log}(X_t^2))$$

e a consequente aplicação da fórmula de Itô multidimensional (ver [Oksendal 07, p.48]):

$$\partial Y_t^k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t)dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)dX_t^i dX_t^j$$

temos:

$$\begin{cases} dY_t^1 = K^1 \left((\theta^1 - \frac{\sigma^1}{2k^1}) - Y_t^2 \right) dt + \sigma^1 d\beta t \\ dY_t^2 = K^2 \left((\theta^2 - \frac{\sigma^2}{2k^2}) - Y_t^1 \right) dt + \sigma^2 d\beta t \end{cases}$$

Podemos agora realizar uma mudança de variáveis adicional dada por:

$$\begin{aligned} Z_t &= (Z_t^1, Z_t^2) = h(t, X_t) = (h_1(t, X_t^1, X_t^2), h_2(t, X_t^1, X_t^2)) \\ &= \left((k^1 \theta^1 - \frac{\sigma^1}{2}) - k^1 Y_t^2, (k^2 \theta^2 - \frac{\sigma^2}{2}) - k^2 Y_t^1 \right) \end{aligned}$$

para obter novamente a fórmula de Itô multidimensional, um sistema dado por:

$$\begin{cases} dZ_t^1 = -k^1 Z_t^2 dt - k^1 \sigma^2 d\beta t \\ dZ_t^2 = -k^2 Z_t^1 dt - k^2 \sigma^1 d\beta t \end{cases}$$



Agora, observemos que este sistema de SDE pode ser escrito como um *Ornstein-Uhlenbeck* SDE multidimensional:

$$dZ_t = AZ_t dt + A\Sigma d\beta t \quad (4)$$

com $Z_t = (Z_t^1, Z_t^2)$, $\Sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$, o principal a denotar o vector ou a matriz transposta, e a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -k^1 \\ -k^2 & 0 \end{bmatrix}$$

A interpretação da equação (4) é um processo de Itô vectorial que vai ser visto em detalhe no apêndice.

A equação unidimensional de *Ornstein-Uhlenbeck* ou equação *Langevin*

Recordemos agora uma das maneiras de obter a solução para uma SDE dada por

$$dX_t = aX_t dt + aA\sigma d\beta t, \quad X_0 \in \mathfrak{R}$$



com o $a, \sigma \in \mathfrak{R}_+^*$. Esta equação satisfaz a condições principais do teorema para as SDE (ver [Oksendal 07, p.68]) e existe uma solução forte. Multiplicando ambos os membros da equação por e^{-at} vem que:

$$e^{-at} dX_t = e^{-at} aX_t dt + e^{-at} a\sigma d\beta_t,$$

a equação diferencial do processo de Itô principal dá-nos

$$d(e^{-at} X_t) = -e^{-at} aX_t dt + e^{-at} dX_t$$

Finalmente, substituindo o termo da esquerda do membro da direita da primeira equação no segundo

$$d(e^{-at} X_t) = e^{-at} a\sigma d\beta_t.$$

Integrando ambos os membros da equação e multiplicando por e^{at} vem a solução

$$X_t = e^{at} X_0 + e^{at} \left(\int_0^t e^{-as} a\sigma d\beta_s \right).$$



A equação *Ornstein-Uhlenbeck* multidimensional

Pela semelhança com o caso unidimensional podemos escrever o seguinte:

Proposição 1: O processo

$$Z_t = e^{At}Z_0 + e^{At} \left(\int_0^t e^{-As} A \Sigma d\beta s \right) \quad (5)$$

é a solução para a SDE (4).

Demonstração: Como habitualmente temos que $e^{At} \in L(\mathfrak{R}^2)$ tal que:

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} t^n, \quad \frac{de^{At}}{dt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n}{(n-1)!} t^{n-1} = Ae^{At}$$

O integral do segundo termo do lado direito da fórmula (5) é função de t e pelas regras da diferenciação das funções de variáveis reais que tomam valores em \mathfrak{R}^2 (ou, pelo mesmo motivo, qualquer espaço de *Banach*, ver [Lang 83, p.101]) temos que



$$dZ_t = Ae^{At}Z_0dt + Ae^{At}\left(\int_0^t(e^{-As}A\Sigma d\beta_s)dt\right) + e^{At}(e^{-At}A\Sigma d\beta_t) = AZ_tdt + A\Sigma d\beta_t$$

mostrando, assim, que a fórmula (5) satisfaz a SDE (4).

Vamos agora escrever a solução completa. Observemos que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{k^1k^2}t) & -\sqrt{\frac{k^1}{k^2}}\sinh(\sqrt{k^1k^2}t) \\ -\sqrt{\frac{k^2}{k^1}}\sinh(\sqrt{k^1k^2}t) & \cosh(\sqrt{k^1k^2}t) \end{bmatrix}$$

e, assim,

$$e^{At}Z_0 = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{k^1k^2}t)Z_0^1 - \sqrt{\frac{k^1}{k^2}}\sinh(\sqrt{k^1k^2}t)Z_0^2 \\ \cosh(\sqrt{k^1k^2}t)Z_0^2 - \sqrt{\frac{k^2}{k^1}}\sinh(\sqrt{k^1k^2}t)Z_0^1 \end{bmatrix}$$

e



$$\int_0^t e^{-As} A \Sigma d\beta t = \left[\begin{array}{l} - \int_0^t \left(\sqrt{\frac{k^1}{k^2}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^2 \sigma^1 + \cosh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^1 \sigma^2 \right) d\beta t \\ - \int_0^t \left(\sqrt{\frac{k^2}{k^1}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^2 \sigma^1 + \cosh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^1 \sigma^2 \right) d\beta t \end{array} \right]$$

Mostrando que:

$$\begin{aligned} Z_t^1 &= \cosh(\sqrt{k^1 k^2} t) Z_0^1 - \sqrt{\frac{k^1}{k^2}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} t) Z_0^2 - \\ &- \cosh(\sqrt{k^1 k^2} t) \int_0^t \left(\sqrt{\frac{k^1}{k^2}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^2 \sigma^1 + \cosh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^1 \sigma^2 \right) d\beta t - \\ &- \sqrt{\frac{k^1}{k^2}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} t) \int_0^t \left(\sqrt{\frac{k^2}{k^1}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^2 \sigma^1 + \cosh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^1 \sigma^2 \right) d\beta t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Z_t^2 &= \cosh(\sqrt{k^1 k^2} t) Z_0^2 - \sqrt{\frac{k^2}{k^1}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} t) Z_0^1 + \\ &+ \sqrt{\frac{k^2}{k^1}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} t) \int_0^t \left(\sqrt{\frac{k^1}{k^2}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^2 \sigma^1 + \cosh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^1 \sigma^2 \right) d\beta t \\ &\cosh(\sqrt{k^1 k^2} t) \int_0^t \left(\sqrt{\frac{k^2}{k^1}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^2 \sigma^1 + \cosh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^1 \sigma^2 \right) d\beta t \end{aligned}$$



Nota 3: Um simples cálculo mostra que fazendo $\sigma^1 = \sigma^2 = 0$ em Z_t^1 e Z_t^2 em cima, temos a solução do sistema determinístico do capítulo (**Um sistema SDE equivalente**). Isto dá crédito à metodologia usada para obter a solução.

A solução do sistema original

Vamos agora escrever a solução do sistema (3) de SDE revertendo às variáveis iniciais.

$$\begin{aligned}
 X_t^1 &= \exp(\cosh(\sqrt{k^1 k^2} t) \left((k^1 \theta^1 - \frac{\sigma^1}{2}) - k^1 \text{Log}(X_0^2) \right) - \sqrt{\frac{k^1}{k^2}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} t) \left((k^2 \theta^2 - \frac{\sigma^2}{2}) - k^2 \text{Log}(X_0^1) \right)) \\
 &- \cosh(\sqrt{k^1 k^2} t) \int_0^t \left(\sqrt{\frac{k^1}{k^2}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^2 \sigma^1 + \cosh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^1 \sigma^2 \right) d\beta t \\
 &+ \sqrt{\frac{k^1}{k^2}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} t) \int_0^t \left(\sqrt{\frac{k^1}{k^2}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^2 \sigma^1 + \cosh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^1 \sigma^2 \right) d\beta t
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 X_t^2 &= \exp(\cosh(\sqrt{k^1 k^2} t) \left((k^1 \theta^1 - \frac{\sigma^1}{2}) - k^1 \text{Log}(X_0^2) \right) - \sqrt{\frac{k^2}{k^1}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} t) \left((k^2 \theta^2 - \frac{\sigma^2}{2}) - k^2 \text{Log}(X_0^1) \right)) \\
 &+ \sqrt{\frac{k^2}{k^1}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} t) \int_0^t \left(\sqrt{\frac{k^1}{k^2}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^2 \sigma^1 + \cosh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^1 \sigma^2 \right) d\beta t \\
 &- \cosh(\sqrt{k^1 k^2} t) \int_0^t \left(\sqrt{\frac{k^2}{k^1}} \sinh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^2 \sigma^1 + \cosh(\sqrt{k^1 k^2} s) k^1 \sigma^2 \right) d\beta t
 \end{aligned}$$



Através da computação poder-se-á mostrar que estas fórmulas dão a solução do sistema (3).

Apêndice: O cálculo vectorial de Itô

A rigorosa interpretação da equação (4) requer a consideração do processo de Itô tendo \mathfrak{R}^2 como espaço estável. A teoria sobre a avaliação de vectores pela integração de Itô não é muito diferente do caso do escalar real dado. Podemos reduzir o caso vectorial a este com base num sistema ortonormado completo. Nesta secção vamos considerar um espaço de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tendo $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como um sistema completo ortonormado. Uma função elementar é definida como

$$\phi_t^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} e_j^{(n)} \Pi_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right]}(t)$$

tal que o vector H valorizado pelas variáveis aleatórias $e_j^{(n)} \in m\mathfrak{S}_j$ e verificam a condição de integração $E[\|e_j^{(n)}\|_H^2] < +\infty$. Usando o sistema ortonormal completo temos que $e_j^{(n)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{e}_j^{(n)}(k) \alpha_k$, com $\hat{e}_j^{(n)}(k)$ sendo uma variável aleatória escalar dada por: $\hat{e}_j^{(n)}(k) := \langle \hat{e}_j^{(n)}, \alpha_k \rangle$. Note-se que, para cada $t \in \mathfrak{R}_+$ existe um e um só $j = j(t)$ tal que $t \in \left[\frac{j(t)}{2^n}, \frac{j(t)+1}{2^n} \right]$, temos a seguinte fórmula de que vamos precisar em baixo.



$$\begin{aligned} \|\phi_t^{(n)}\|_H^2 &= \langle \phi_t^{(n)}; \phi_t^{(n)} \rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{+\infty} e_j^{(n)} \Pi_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]}(t), \sum_{i=0}^{+\infty} e_i^{(n)} \Pi_{\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right]}(t) \right\rangle \\ &= \langle e_{j(t)}^{(n)}, e_{j(t)}^{(n)} \rangle = \|e_{j(t)}^{(n)}\|_h^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} \|e_j^{(n)}\|_h^2 \Pi_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Pela mesma razão, é claro que

$$\langle \phi_t^{(n)}, \alpha_k \rangle = \langle e_{j(t)}^{(n)}, \alpha_k \rangle = \hat{e}_j^{(n)}(k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{e}_j^{(n)} \Pi_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]}(t).$$

Podemos definir o integral de Itô de uma função elementar da maneira usual.

$$\int_S^T \phi_t^{(n)} d\beta_t = \sum_{j=0}^{+\infty} e_j^{(n)} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \quad (7)$$

onde



$$t_j = t_j^{(n)} = \begin{cases} \frac{j}{2^n} & S \leq \frac{j}{2^n} \leq T \\ S & \text{se } \frac{j}{2^n} < S \\ T & T < \frac{j}{2^n} \end{cases}$$

O somatório do lado direito da fórmula (7) sendo finito de tal forma que o número de termos do somatório seja determinístico.

Nota 4: Como consequência, observemos que pela troca interna da ordem do somatório:

$$\begin{aligned} \int_S^T \phi_t^{(n)} d\beta t &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{e}_j^{(n)}(k) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \alpha_k = \sum_{K=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \hat{e}_j^{(n)}(k) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right) \alpha_k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_S^T \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \hat{e}_j^{(n)}(k) \Pi_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right]}(t) \right) d\beta t \right) \alpha_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_S^T \langle \phi_t^{(n)}, \alpha_k \rangle d\beta t \right) \alpha_k \end{aligned} \quad (8)$$

Teremos de considerar os valores cujo integral do vector em H pode ser obtido pela dedução.



O integral que acabámos de definir para o processo elementar pode ser estendido por meio do seguinte resultado.

Teorema 1 (A isometria de Itô): Seja $\phi_t^{(n)}$ limitada

$$\mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \phi_t^{(n)} d\beta_t \right\|_H^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\phi_t^{(n)}\|_H^2 dt \right] \quad (9)$$

Demonstração: Pelo facto de $\langle e_i^{(n)}, e_i^{(n)} \rangle$ serem independentes de $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$ e $\mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = t_{i+1} - t_i$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \phi_t^{(n)} d\beta_t \right\|_H^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left\langle \sum_{j=0}^{+\infty} e_j^{(n)} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}), \sum_{i=0}^{+\infty} e_i^{(n)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right\rangle \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_i \langle e_i^{(n)}, e_i^{(n)} \rangle (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[\sum_{i < j} \langle e_j^{(n)}, e_i^{(n)} \rangle (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right] \\ &= \sum_i \mathbb{E} \left[\|e_i^{(n)}\|_H^2 \right] (t_{i+1} - t_i) + 2\mathbb{E} \left[\sum_{i < j} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{e}_i^{(n)}(k) \hat{e}_j^{(n)}(k) \right) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right] \end{aligned}$$

Mais ainda, a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra que:



$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle e_j^{(n)}, e_i^{(n)} \rangle] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{e}_i^{(n)}(k) \hat{e}_j^{(n)}(k)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\|e_i^{(n)}\|_H \|e_j^{(n)}\|_H\right] \leq \mathbb{E}\left[\|e_i^{(n)}\|_H^2\right] \mathbb{E}\left[\|e_j^{(n)}\|_H^2\right] < +\infty \end{aligned}$$

e assim, como $\hat{e}_i^{(n)}(k) \hat{e}_j^{(n)}(k) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ é independente de $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$, para cada k temos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sum_{i < j} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{e}_i^{(n)}(k) \hat{e}_j^{(n)}(k)\right) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right] \\ &= \sum_{i < j} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\hat{e}_i^{(n)}(k) \hat{e}_j^{(n)}(k) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right] \mathbb{E}\left[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right] = 0 \end{aligned}$$

É agora certo que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left\|\int_0^T \phi_t^{(n)} d\beta_t\right\|_H^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_i \|e_i^{(n)}\|_H^2 (t_{i+1} - t_i)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\sum_i \|e_i^{(n)}\|_H^2 \Pi_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]}(t)\right) dt\right] \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.



Nota 5: Consideremos L^2_H como o espaço de H avaliado para variáveis aleatórias φ tal que:

$$\|\varphi\|_{L^2(H)} := \mathbb{E} \left[\|\varphi\|_H^2 \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Então $(L^2(H), \|\cdot\|_{L^2(H)})$ é um espaço de Banach que justifica a designação do resultado **(1)**.

A extensão

Definição 2: Seja η o espaço do processo tomando valores em H $f : [0, +\infty[\times \mathfrak{R} \mapsto H$ tal que

1. f é mensurável de $B([0, +\infty[) \otimes \mathfrak{F}$ em $B(H)$;
2. f é adaptado, i.e., f_t é \mathfrak{F}_t mensurável;

$$3. \forall 0 \leq S \leq T \quad \|f\|_\eta^2 := \mathbb{E} \left[\int_S^T \|f_t\|_H^2 dt \right] < +\infty$$

O nosso objectivo será estender a η o integral definido anteriormente. A fórmula **(6)** implica que $\phi_t^{(n)} \in \eta$.

Proposição 2: Temos que $(\eta, \|\cdot\|_\eta)$ é um espaço de Banach.



Demonstração: Trata-se de uma verificação óbvia.

η_b^0 irá denotar o subespaço de η composto pelo f limitado e tal que para algum $\omega \in \Omega$ as trajectórias $f(\omega)$ são funções contínuas de $[0, +\infty[$ para H .

Proposição 3: Suponhamos que $f \in \eta_b^0$. Então se

$$\phi_t^{(n)} := \sum_{j=0}^{+\infty} f \frac{j}{2^n} \Pi_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right[}(t) \text{ e } I(\phi^{(n)})_T := \int_0^T \phi_t^{(n)} d\beta t \quad (10)$$

temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \phi^{(n)}\|_{\eta} = 0$ e $(I(\phi^{(n)})_T)_{n \geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(H)$.

Demonstração: Para algum ω e todo o t fixo, $j(t)$ sendo o único j tal que $\frac{j(t)}{2^n} \leq t < \frac{(j(t)+1)}{2^n}$:

$$\begin{aligned} \|f_t - \phi_t^{(n)}\|_H^2 &= \left\| \sum_{j=0}^{+\infty} (f_{\frac{j}{2^n}} - f_t) \Pi_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right[}(t) \right\|_H^2 = \left\| f_{\frac{j(t)}{2^n}} - f_t \right\|_H^2 \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left\| f_{\frac{j}{2^n}} - f_t \right\|_H^2 \Pi_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right[}(t) \end{aligned}$$



mostrando que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_t - \phi_t^{(n)}\|_H^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{f_{j(t)}}{2^n} - f_t \right\|_H^2 = 0$, quase de certeza, pela continuidade das hipóteses. Como $\phi_t^{(n)}$ tem o mesmo limite de f , a chamada convergência mostra que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \phi^{(n)}\|_\eta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[s,T] \times \Omega} \|f_t - \phi_t^{(n)}\|_H^2(\omega) d(\lambda \otimes P)(t, \omega) = 0 \quad (11)$$

como desejado. O segundo membro é consequência da propriedade da isometria de Itô.

De facto, $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$$\|I(\phi^{(n)})_T - I(\phi^{(n+p)})_T\|_{L^2(H)}^2 = \left\| \int_0^T (\phi_t^{(n)} - \phi_t^{(n+p)}) d\beta_t \right\|_{L^2(H)}^2 = \|\phi_t^{(n)} - \phi_t^{(n+p)}\|_\eta^2$$

e assim, pela fórmula (11) saí o resultado.

Definição 3: Para $f \in \eta_b^0$ podemos definir o integral estocástico de Itô de f por:

$$I(f)_T := \int_0^T f_t d\beta_t = L^2(H) \lim_{n \rightarrow +\infty} I(\phi^{(n)})_T \quad (12)$$



Proposição 4: Seja $f \in \eta_b^0$. Então se

$$f_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle f_t, \alpha_k \rangle \alpha_k$$

temos que

$$\int_0^T f_t d\beta_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^T \langle f_t, \alpha_k \rangle d\beta_t \right) \alpha_k .$$

Nota 6: Com esta definição, podemos considerar o integral estocástico H como uma superposição do integral estocástico escalar usual para os coeficientes de Fourier do processo no que respeita a um sistema ortonormal completo.

Demonstração: Pela nota 4, e através de sucessivas aplicações da fórmula de Parseval em H , na fórmula escalar Isométrica de Itô e novamente a fórmula de Parseval, temos que para qualquer sequência aproximada como a definida na fórmula (10):



$$\begin{aligned}
 & \left\| \int_0^T \phi_t^{(n)} d\beta_t - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^T \langle f_t, \alpha_k \rangle d\beta_t \right) \alpha_k \right\|_{L^2(H)}^2 = \\
 & = \mathbb{E} \left[\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^T \langle \phi_t^{(n)}, \alpha_k \rangle d\beta_t \right) \alpha_k - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^T \langle f_t, \alpha_k \rangle d\beta_t \right) \alpha_k \right\|_H^2 \right] = \\
 & = \mathbb{E} \left[\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^T \langle \phi_t^{(n)} - f_t, \alpha_k \rangle d\beta_t \right) \alpha_k \right\|_H^2 \right] = \\
 & = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \int_0^T \langle \phi_t^{(n)} - f_t, \alpha_k \rangle d\beta_t \right|^2 \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \langle \phi_t^{(n)} - f_t, \alpha_k \rangle d\beta_t \right|^2 \right] = \\
 & = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T |\langle \phi_t^{(n)} - f_t, \alpha_k \rangle|^2 dt \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |\langle \phi_t^{(n)} - f_t, \alpha_k \rangle|^2 \right) dt \right] = \\
 & = \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\phi_t^{(n)} - f_t\|_H^2 dt \right] = \|\phi^{(n)} - f\|_\eta
 \end{aligned}$$

Pela fórmula (12) na definição de integral estocástico temos que:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| I(\phi^{(n)})_T - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^T \langle f_t, \alpha_k \rangle d\beta_t \right) \alpha_k \right\|_{L^2(H)}^2 = \\
 & = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi^{(n)} - f\|_\eta = 0
 \end{aligned}$$

como pretendido.

Como consequência da proposição 4 temos que todas as propriedades válidas para o habitual integral de Itô podem ser transcritas com as correspondentes adaptações para o avaliado integral de Itô H . A primeira consequência da definição do vector estocástico é a seguinte:



Proposição 5: Seja $A \in L(H)$, que é um operador linear limitado de H para H . Então

$$A\left(\int_0^T f_t d\beta_t\right) = \int_0^T A(f_t) d\beta_t$$

Demonstração: Pelo facto de A ser limitado, $C_A > 0$ tal que para todo o $h \in H$ temos $\|A(h)\|_H \leq C_A \|h\|_H$. Observemos em primeiro que se $\phi_t^{(n)}$ for um processo elementar então $A(\phi_t^{(n)})$ também é um processo elementar. Suponhamos que $(\phi^{(n)})_{n \geq 1}$ é uma sequência aproximada de f . Então temos

$$\mathbb{E} \left[\int_S^T \|A(\phi_t^{(n)}) - A(f_t)\|_H^2 dt \right] \leq C_A^2 \mathbb{E} \left[\int_S^T \|\phi_t^{(n)} - f_t\|_H^2 dt \right]$$

$(A(\phi^{(n)}))_{n \geq 1}$ é também uma sequência aproximada para $A(f)$. Pela fórmula (7) o resultado é obviamente verdadeiro. É também fácil de verificar que $A \in L^2(H)$. Como consequência temos:

$$\begin{aligned} A\left(\int_0^T f_t d\beta_t\right) &=_{L^2(H)} A\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \phi_t^{(n)} d\beta_t\right) =_{L^2(H)} \lim_{n \rightarrow +\infty} A\left(\int_0^T \phi_t^{(n)} d\beta_t\right) = \\ &=_{L^2(H)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T A(\phi_t^{(n)}) d\beta_t =_{L^2(H)} \int_0^T A(f_t) d\beta_t \end{aligned}$$



como pretendido.

Vamos agora ver uma versão particular da fórmula de Itô usando a proposição 4.

Consideremos a função $\gamma: [0, +\infty[\times H \mapsto H$ tal que

$$\forall (t, h) \in [0, +\infty[\times H \quad \gamma(t, h) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \gamma_l(t, \langle h, \alpha_l \rangle) \right) \alpha_k$$

com $\gamma_k \in C^{1,2}([0, +\infty[\times \mathfrak{R})$. Definindo um processo de Itô por

$$X_t = X_0 + \int_0^t h_s ds + \int_0^t f_s d\beta_s = \sum_{k=1}^{+\infty} X_t^{(k)} \alpha_k \quad 1$$

Como o integral respeitante à medida de Lebesgue é um integral vectorial de um processo com trajectórias reguladas,

$$X_t^{(k)} := \langle X_0, \alpha_k \rangle + \int_0^t \langle h_s, \alpha_k \rangle ds + \int_0^t \langle f_s, \alpha_k \rangle d\beta_s$$

¹ Nem todas as funções admitem tal representação. Poderão estas funções ser caracterizadas? Um caso particular (diagonal) pode ser obtido através do somatório de um termo.



podemos considerar o processo

$$Y_t := \gamma(t, X_t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \gamma_l(t, X_t^{(l)}) \right) \alpha_k$$

Este será um processo de Itô pela habitual aplicação da fórmula escalar de Itô, se escrevermos

$$dY_t := d\gamma(t, X_t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} d\gamma_l(t, X_t^{(l)}) \right) \alpha_k$$

Observando que $d\gamma_k(t, X_t^{(k)})$ é um processo habitual de Itô e desde que tenhamos a convergência das séries dos processos.

Nota 7: Usando a proposição 5 e as regras habituais de computação com a exponencial, temos que:

$$e^{At} \left(\int_0^t e^{-As} A \Sigma d\beta_s \right) = \int_0^t e^{A(t-s)} A \Sigma d\beta_s$$

Desde que se possa diferenciar o integral similar tal como foi feito com os integrais habituais, teremos outra demonstração da solução do sistema SDE.



Sobre a estimação do modelo

Não nos são conhecidos estudos sobre a estimação de modelos como os que propomos para a evolução acoplada dos preços para o *spot* e para os futuros.

No entanto, propomos um método de estimação que produz bons resultados pelo menos no que toca às volatilidades. Este método baseia-se na ideia da *quasi verosimilhança* tal como se encontra exposta em *Iacus*¹ pág. 122.

Partimos de uma difusão dada por

$$dX_t = b(X_t, \theta)dt + \sigma(X_t, \theta)d\beta_t$$

em que θ é o parâmetro a estimar possivelmente vectorial.

Consideremos o esquema de *Euler* que dá origem à discretização

$$X_{t+\Delta t} = X_t + b(X_t, \theta)\Delta t + \sigma(X_t, \theta)(\beta_{t+\Delta t} - \beta_t)$$

Em consequência a densidade de transição de $E_\theta[X_{t+\Delta t} | X_t = x]$ pode ser escrita como

¹ IACUS, S.M.; Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations; Springer 2008



$$p_{\theta}(t, y | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(x, \theta)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y - x - b(x, \theta)t)^2}{t\sigma^2(x, \theta)}\right)$$

Sob a hipótese de crescimento polinomial do *drift* $b(x, \theta)$ a maximização da log-verozimilhança

$$Ln(\theta) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - X_{i-1} - b(X_{i-1}, \theta)\Delta)^2}{\sigma^2 \Delta} + nLn(2\pi\sigma^2 \Delta) \right)$$

permite a obtenção dos parâmetros θ e σ .

Este procedimento foi implementado usando o *Mathematica*, figurando nestes anexos cópias dos ficheiros onde se obtiveram as estimativas dos parâmetros.

Tal como já referimos as estimativas da volatilidade σ são robustas. Tal não acontece com as estimativas dos outros parâmetros do modelo. Note-se que para efeitos de apreçamento necessitamos apenas de σ para a fórmula de *Black*. Os restantes parâmetros são apenas necessários para verificar a condição que assegura que o mercado é livre de arbitragem e completo, podendo-se, então, aplicar a fórmula de *Black*.



Apreçamento

Consideremos um mercado com dois activos: os futuros e o activo sem risco, com as seguintes leis de evolução.

$$\begin{cases} dR_t = rR_t dt \\ dF_t = \alpha(t, w)F_t dt + \sigma^F F_t d\beta_t \end{cases}, \text{ com } r \in \mathfrak{R}_+^*$$

em que, de acordo com o modelo que estamos a estudar, se tem

$$\alpha(t, w) = k^F (\theta^F - Ln(S_t(w)))$$

De acordo com o teorema 12.3.7 em *Oksendal*¹ podemos assegurar que o mercado é livre de arbitragem e completo se verificar a condição:

$$(1) I_C = \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \frac{(\alpha(t, w) - r)^2}{\sigma^2} dt \right) \right] < +\infty .$$

¹ OKSENDAL, B.; Stochastic Differential Equations; 6th Edition; Springer 2007



Se esta condição se verificar vale a fórmula de *Black-Scholes* usual (fórmulas 12.3.42 e 12.3.45 em *Oksenda*) dado que a taxa de juro e a volatilidade são constantes.

Pode-se particularizar a condição **(1)** tendo em consideração a fórmula que nos dá S_t .

Assim, dado que:

$$\ln(S_t) \approx N(\varphi(t), \Psi(t))$$

isto é,

$$\ln(S_t) = \varphi(t) + \sqrt{\Psi(t)}z \quad \text{com } z \approx N(0,1),$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} k^F (\theta^F - \ln(S_t)) - r &= (k^F \theta^F - r) + k^F \varphi(t) + k^F \sqrt{\Psi(t)} * z \\ &= \varphi_1(t) + \Psi_1(t) * z \end{aligned}$$

em que $\varphi_1(t) = (k^F \theta^F - r) + k^F \varphi(t)$ e $\Psi_1(t) = k^F \sqrt{\Psi(t)}$.



Podemos assim escrever que:

$$\begin{aligned} I_C &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2\sigma^2} T} \int_0^T (\varphi_1(t) + \Psi_1(t)x)^2 dt * \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \frac{e^{d_1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{d_1 x - \left(\frac{1}{2} - d_3\right) x^2} dx \end{aligned}$$

$$\text{com } d_1 = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T \varphi_1(t)^2 dt, \quad d_2 = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T 2\varphi_1(t)\Psi_1(t)dt \quad \text{e} \quad d_3 = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T \Psi_1(t)^2 dt.$$

Teremos pois que $I_C < +\infty$ se verificar $\frac{1}{2} - d_3 > 0$, ou seja,

$$\int_0^T \Psi(t)dt < \frac{\sigma^2}{(kF)^2}$$

Nos casos práticos estudados, esta condição verifica-se no caso do petróleo para $T \leq 10$ dias e no caso do ouro para $T \leq 25$ dias.

A verificação da condição foi feita usando os valores estimados para os parâmetros do modelo.

Pode pois aplicar-se a fórmula de Black usual desde que os prazos não ultrapassem os valores indicados acima.