

Agradecimentos

Cabe aos professores revelar estudos capazes de gerar saberes, cultura, paixões, e cabe a todos nós aprendê-los, interiorizá-los e, se possível, transformá-los. Este trabalho é o resultado de tudo isso.

Assim, os meus agradecimentos dirigem-se aos professores que me acompanharam durante todo o meu percurso académico, sem os quais não teria sido capaz de transformar esses ensinamentos em saberes. Em particular ao Prof. Doutor João Burguete Cardoso, pelos seus indiscutíveis sábios ensinamentos, pela sua grande disponibilidade, pela sua não menos sensibilidade, mas principalmente pelo excelente exemplo profissional e pessoal que jamais esquecerei.

Dirigem-se também aos meus amigos, Jorge Bernardo, Hélder Guerra e Duarte Lousa, que me acompanharam e apoiaram no exaustivo percurso académico, transmitindo-me perseverança, confiança e estímulo. Não esquecendo todo o apoio, apreço e confiança depositada por todos os amigos que, mesmo fora do âmbito académico, me acompanharam neste trajecto, em particular Nuno Penetra, Margarida Peixoto, Inês Simões, Daniel Santos, Joana Branco, Pedro Brito, Diana Carvalho, Nelson Ribeiro e João Teixeira.

A toda a família pois ela foi, e será, o pilar da minha existência. Em particular ao meu irmão pela sua cumplicidade, ao meu pai pelos seus conselhos e incentivo pautados pelo rigor, persistência e continuidade, à minha mãe por todo o apoio às minhas infinitas angústias e, em especial, aos meus avós pelo orgulho que o seu doce olhar sempre me transmitiu.

Resumo

O trabalho elaborado consiste na criação de um programa informático, concebido em linguagem MATLAB, cujo principal objectivo é calcular a probabilidade de falha em estruturas compostas por vigas 2D, através do algoritmo FORM.

Para a concepção do programa estudou-se alguma bibliografia sobre os vários domínios de conhecimentos envolvidos, nomeadamente, segurança estrutural, análise de fiabilidade de estruturas, análise de sensibilidades e respectivos métodos. Para executar este trabalho foi ainda necessário, aprender programação MATLAB.

No concernente aos resultados obtidos, e após comparação com outros publicados em artigos científicos, concluiu-se que são coerentes.

Por outro lado, verificou-se também que a utilização deste programa propicia ganhos de tempo quando utilizado o método de sensibilidades.

Palavras-chave: Análise de Fiabilidade, Algoritmo FORM, Sensibilidades, MATLAB.

Abstract

The aim of this work is the development of a computer program in MATLAB, whose main objective is to obtain the probability of failure of structures built with 2D beams using the FORM algorithm.

In order to develop this program, a literature review was made and information on reliability analysis, sensitivity analysis and related methods was studied. Also it was necessary to learn MATLAB programming.

In what concerns the results obtained with the program, some examples, taken from the literature, were solved and solutions compared with published ones. It was found that all were consistent.

Moreover, it was found that the utilization of this program provides time gains when using the sensitivity method.

Keywords: Reliability Analysis, FORM Algorithm, Sensitivities, MATLAB

Índice

| | |
|---|----|
| 1. Capítulo 1 - Introdução..... | 1 |
| 1.1 Aspectos gerais | 1 |
| 1.2 Objectivos..... | 2 |
| 1.3 Enquadramento do trabalho..... | 2 |
| 1.4 Organização do documento | 3 |
| 2. Capítulo 2 – Fiabilidade estrutural | 5 |
| 2.1 Introdução..... | 5 |
| 2.2 Segurança e funcionalidade estrutural..... | 6 |
| 2.3 Estados limite | 7 |
| 2.4 Noções de estatística e probabilidade | 9 |
| 2.4.1 Noções básicas | 9 |
| 2.4.1.1 Média | 10 |
| 2.4.1.2 Mediana | 10 |
| 2.4.1.3 Variância e desvio padrão | 10 |
| 2.4.1.4 Coeficiente de variação | 11 |
| 2.4.1.5 Covariância..... | 12 |
| 2.4.1.6 Coeficiente de correlação..... | 12 |
| 2.4.2 Variáveis aleatórias e funções distribuição | 12 |
| 2.4.2.1 Distribuições | 14 |
| 2.5 Formulação do problema básico de fiabilidade estrutural | 15 |
| 2.5.1 Caso de variáveis aleatórias normais | 17 |
| 2.6 Métodos de análise de fiabilidade estrutural..... | 18 |
| 2.6.1 Método de Monte Carlo | 20 |
| 2.6.2 Aproximações de primeira e segunda ordem | 21 |
| 2.6.3 Índice de fiabilidade de Hasofer e Lind | 22 |
| 2.6.4 Algoritmo FORM..... | 23 |
| 2.6.4.1 Transformação de Nataf..... | 29 |
| 3. Capítulo 3 – Análise de sensibilidades | 31 |
| 3.1 Análise de sensibilidade de projecto..... | 32 |

| | | |
|---------|---|----|
| 3.1.1 | Sensibilidades discretas | 33 |
| 3.1.2 | Sensibilidades contínuas..... | 34 |
| 3.2 | Método das diferenças finitas..... | 39 |
| 4. | Capítulo 4 – Programa de análise de fiabilidade | 43 |
| 4.1 | Introdução..... | 43 |
| 4.2 | Estrutura do programa | 44 |
| 4.2.1 | Constituição do programa | 44 |
| 4.3 | Manual de utilização..... | 46 |
| 4.3.1 | Dados do problema | 47 |
| 4.3.2 | Escolha das opções a utilizar | 50 |
| 4.3.3 | Criar e definir os ficheiros *.inp e *.frm | 50 |
| 4.3.3.1 | *.inp..... | 51 |
| 4.3.3.2 | *.frm | 55 |
| 4.4 | Visualização de resultados..... | 58 |
| 5. | Capítulo 5 - Exemplos..... | 59 |
| 5.1 | Exemplo 1..... | 60 |
| 5.2 | Exemplo 2..... | 62 |
| 5.3 | Exemplo 3..... | 65 |
| 6. | Capítulo 6 - Conclusão..... | 71 |
| 7. | Referências bibliográficas | 73 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| Fig. 2.1 - Representação genérica da função $g(x)$ e da fronteira entre as regiões de segurança e rotura | 8 |
| Fig. 2.2 - Distribuição normal | 11 |
| Fig. 2.3 - Função densidade de probabilidade (PDF) | 14 |
| Fig. 2.4 - Função distribuição acumulada (CDF) | 14 |
| Fig. 2.5 - Distribuição normal padrão | 15 |
| Fig. 2.6 - Representação tridimensional das variáveis no problema de fiabilidade estrutural (Melchers, 1999)..... | 16 |
| Fig. 2.7 - Distribuição da medida de segurança..... | 18 |
| Fig. 2.8 - Aproximações linear e de 2ª ordem a $g(x)$ no ponto X^* | 21 |
| Fig. 2.9 - Interpretação geométrica do índice de fiabilidade, β | 23 |
| Fig. 2.10 - Transformação da função de estado limite no espaço das variáveis normais reduzidas | 25 |
| Fig. 2.11 - Transformação de uma variável não normal, X , numa variável normal reduzida, Y .. | 25 |
| Fig. 2.12 - Comportamento algorítmico..... | 27 |
| Fig. 2.13 - Algoritmo não converge devido à função de estado limite | 28 |
| Fig.3.1 - Viga encastrada | 32 |
| Fig.3.2 - Viga sujeita a flexão | 35 |
| Fig. 4.1 - Exemplo 1 - Pórtico de 2 andares..... | 47 |
| Fig. 4.2 - Definição dos nós..... | 51 |
| Fig. 4.3 - Definição dos elementos..... | 52 |
| Fig. 4.4 - Definição dos módulos de elasticidade e das secções | 53 |
| Fig. 4.5 - Definição das forças e cargas aplicadas | 54 |
| Fig. 4.6 - Definição dos apoios e seus graus de liberdade | 55 |
| Fig. 4.7 - Definição das variáveis aleatórias | 56 |
| Fig. 4.8 - Definição das variáveis correlacionadas..... | 57 |
| Fig. 4.9 - Definição do nó, sentido e valor do deslocamento | 57 |
| Fig. 4.10 - linha de comandos do MATLAB após correr um exemplo | 58 |
| Fig. 5.1 - Exemplo 1 - Pórtico de 2 andares..... | 60 |
| Fig. 5.2 - Exemplo 2 - Pórtico de 12 andares..... | 62 |
| Fig. 5.3 - Exemplo 3 - Pórtico de 5 andares..... | 65 |

Índice de tabelas

| | |
|--|----|
| Tabela 2-1 - Informação sobre as distribuições utilizadas neste trabalho | 14 |
| Tabela 3-1 - Comparação dos métodos de sensibilidades | 40 |
| Tabela 4-1 - Ficheiros que constituem o programa ForModule | 44 |
| Tabela 4-2 - Ficheiros criados pelo utilizador e pelo programa | 44 |
| Tabela 4-3 - Variáveis aleatórias existentes no Exemplo 1 | 49 |
| Tabela 4-4 - Características dos elementos do Exemplo 1 | 49 |
| Tabela 5-1 - Comparação de resultados para o Exemplo 1 | 60 |
| Tabela 5-2 - Comparação do tempo decorrido pelos dois métodos no Exemplo 1 | 61 |
| Tabela 5-3 - Valores dos momentos de inércia no Exemplo 2 | 63 |
| Tabela 5-4 - Variáveis aleatórias existentes no problema Exemplo 2 | 63 |
| Tabela 5-5 - Informação sobre as variáveis existentes nos elementos no Exemplo 2 | 64 |
| Tabela 5-6 - Comparação de resultados Exemplo 2 | 64 |
| Tabela 5-7 - Comparação do tempo decorrido pelos dois métodos no Exemplo 2 | 64 |
| Tabela 5-8 - Variáveis aleatórias existentes no problema Exemplo 3 | 66 |
| Tabela 5-9 - Distribuição, média e desvio padrão das variáveis aleatórias | 66 |
| Tabela 5-10 - Características dos elementos do Exemplo 3 | 68 |
| Tabela 5-11 - Correlação entre variáveis | 68 |
| Tabela 5-12 - Comparação de resultados Exemplo 3 | 68 |
| Tabela 5-13 - Comparação do tempo decorrido pelos dois métodos no Exemplo 3 | 69 |

1. Capítulo 1 - Introdução

1.1 Aspectos gerais

Ao longo dos tempos o Homem tem vindo a preocupar-se com a segurança das estruturas que constrói.

Os meios de cálculo utilizados no estudo da segurança estrutural sofreram avanços tecnológicos nas últimas décadas e são hoje instrumentos indispensáveis na avaliação da integridade das estruturas e no desenvolvimento de novos formatos de segurança. Os inúmeros testes efectuados e a comprovação com resultados experimentais mostram as potencialidades destes modelos na representação do comportamento das estruturas. Com base neste contexto a realização deste trabalho contribui, de alguma forma, para o desenvolvimento ou melhoramento dos modelos da verificação da segurança estrutural.

A fiabilidade de estruturas é uma área do conhecimento que se preocupa em modelar a incerteza associada às acções que actuam sobre as estruturas e aos parâmetros que condicionam a sua resistência de uma forma matematicamente rigorosa.

A teoria da fiabilidade define o nível de segurança de uma estrutura através da probabilidade de ultrapassar determinados estados limite que condicionam o normal desempenho da estrutura.

Os métodos de fiabilidade de primeira ordem (do inglês FORM – *First Order Reliability Method*) e de segunda ordem (do inglês SORM - *Second Order Reliability Method*) têm sido muito utilizados para estimar a probabilidade de rotura de sistemas estruturais.

Neste trabalho é utilizado o método de fiabilidade de primeira ordem, FORM, que se baseia em aproximações lineares à superfície de estado limite no ponto mais provável de rotura do espaço normal padrão. Foi desenvolvido um algoritmo baseado neste método e esse algoritmo foi integrado com o método dos elementos finitos de forma a determinar a fiabilidade de estruturas planas constituídas por vigas. Faz, igualmente, parte deste trabalho a integração do método FORM com o cálculo de derivadas através da análise de sensibilidades pelo método contínuo. Todas estas características fazem com que o programa desenvolvido constitua uma poderosa ferramenta no que diz respeito à análise de fiabilidade estrutural.

1.2 Objectivos

O principal objectivo do trabalho desenvolvido foi criar um programa em MATLAB para calcular a probabilidade de falha em estruturas pelo método FORM.

Foi também desenvolvido um programa de análise por elementos finitos para estruturas planas constituídas por vigas de forma a obter uma aplicação integrada especificamente vocacionada para a determinação da probabilidade de falha de estruturas constituídas por vigas 2D.

O algoritmo FORM requer o cálculo das derivadas das funções de estado limite. Para obter uma mais rápida convergência deste algoritmo, foi implementado no programa de elementos finitos a capacidade de calcular derivadas pelo método contínuo. Procurou-se avaliar quais os ganhos no tempo de cálculo comparando o cálculo das sensibilidades pelo método contínuo com o tradicional método das diferenças finitas.

A dissertação foi realizada no âmbito do projecto PTDC/ECM/115932/2009 - Métodos adaptativos para análise de fiabilidade de estruturas complexas.

1.3 Enquadramento do trabalho

Neste trabalho foi desenvolvido um programa em MATLAB que conjuga um método de análise de fiabilidade (FORM) com o método de elementos finitos. A este programa atribuiu-se o nome de FORModule.

O FORModule apresenta semelhanças com o programa FERUM desenvolvido em 1999 por Der Kiureghian (Der Kiureghian, 2006) na Universidade de Berkeley. Este software encontra-se disponível gratuitamente para download na internet - <http://www.ce.berkeley.edu/projects/ferum> e foi muito útil para a realização deste trabalho quer para a parte de programação quer por permitir a comparação de resultados na fase de validação.

As características que de seguida se enumeram são comuns aos dois programas:

- Programado em linguagem MATLAB, o software conjuga o algoritmo FORM com o método de elementos finitos

- O principal objectivo é, através do algoritmo FORM, calcular a probabilidade de falha em estruturas compostas por vigas 2D
- As variáveis aleatórias têm uma distribuição associada e podem ser de 4 tipos: módulo de elasticidade (E), momento de inércia (I), área da secção transversal (A) e carga exercida (F)
- Recorrendo à transformação de Nataf é possível resolver problemas em que as variáveis aleatórias são correlacionadas

As principais diferenças entre o FORModule e o FERUM são as seguintes:

- No FERUM a introdução dos dados do problema é efectuada escrevendo uma função. Esses dados dizem respeito quer ao modelo probabilístico usado pelo algoritmo FORM quer ao modelo de elementos finitos. No FORModule os dados são fornecidos através de dois ficheiros lidos separadamente por cada parte do programa. Um dos objectivos desta abordagem é conseguir separar os dois algoritmos de forma a despistar eventuais resultados incoerentes que pudessem surgir. Isto é, com esta abordagem, e no caso de resultados incoerentes, é possível verificar facilmente se estes se devem ao modelo de elementos finitos ou ao algoritmo FORM. De facto, ao resolver um dos problemas no FERUM detectou-se uma incoerência nos resultados e, porque os dados são fornecidos em conjunto através de uma função foi muito difícil detectar se essa incoerência se devia ao modelo de elementos finitos ou ao algoritmo FORM.
- No FORModule é possível calcular as derivadas necessárias para o algoritmo FORM através do modelo de elementos finitos pois foi implementado neste o método contínuo de análise de sensibilidades. Por isso, é possível obter um funcionamento mais eficiente do algoritmo FORM.

1.4 Organização do documento

Este documento está dividido em 6 capítulos.

- Capítulo 1- Introdução: Identifica-se a essência do estudo, referenciando os aspectos gerais, os objectivos e o enquadramento do trabalho;

- Capítulo 2- Fiabilidade Estrutural: Inicia-se o capítulo com uma abordagem ao problema da segurança estrutural explicitando-se o conceito de estados limite. É exposto o problema básico de fiabilidade estrutural e definido o conceito de índice de fiabilidade. É feita uma abordagem geral dos métodos de análise de segurança estrutural, com particular ênfase para o algoritmo FORM;
- Capítulo 3- Análise de Sensibilidades: Inicia-se o capítulo fazendo referência a análise de sensibilidades recorrendo à sua definição de acordo com os diferentes tipos que o constituem. Descrevem-se os métodos "discreto" e "contínuo" para o cálculo de gradientes. O método das diferenças finitas é também abordado neste capítulo;
- Capítulo 4- Programa de Análise de Fiabilidade: Este capítulo descreve o programa FORModule identificando as suas características e os detalhes do seu funcionamento e explica detalhadamente como pode ser usado através de um exemplo. Com o objectivo de facilitar a utilização do FORModule, o capítulo inclui uma secção que constitui um manual de utilização do programa;
- Capítulo 5- Exemplos: Neste capítulo é feita a validação do FORModule através da comparação dos resultados obtidos em alguns exemplos com os apresentados em artigos científicos. São também apresentados resultados relativos ao tempo decorrido na resolução dos exemplos com e sem o cálculo de sensibilidades contínuas;
- Capítulo 6- Conclusões: Este capítulo apresenta sumariamente as principais conclusões extraídas do trabalho realizado.

2. Capítulo 2 – Fiabilidade estrutural

2.1 Introdução

Ao longo dos tempos a avaliação da segurança de estruturas tem vindo a evoluir de forma evidente. Inicialmente era feita de uma forma empírica e muitas das decisões dependiam da experiência pessoal. Nos últimos anos, para avaliar com maior precisão os riscos associados à segurança estrutural têm vindo a ser aplicados métodos probabilísticos de fiabilidade. Estes métodos procuram avaliar, de forma rigorosa, a probabilidade de falha de sistemas estruturais (Veiga, 2008). Algumas noções, estudos e aplicações sobre a teoria da fiabilidade estrutural podem ser encontrados, por exemplo, em Madsen *et al.* (2006), Melchers (1999), Ditlevsen e Madsen (2005) e Haldar e Mahadevan (2000, 2000a).

Durante o processo de construção e utilização de uma estrutura, esta apresenta um comportamento que depende de vários factores, os quais não podem ser controlados de uma forma absoluta (Henriques, 1998).

Como forma de tratar estas incertezas surgiram critérios de segurança com base em técnicas probabilísticas, onde se pondera a variabilidade dos factores intervenientes no problema mediante a utilização de distribuição de probabilidade.

A segurança é, assim, avaliada de acordo com o conceito de probabilidade de falha, ou seja, a probabilidade da estrutura não ter um desempenho satisfatório, através da análise dos estados limite (definem as superfícies que separam a região de segurança da região de rotura). Neste contexto, surgiu o conceito de fiabilidade estrutural que é compreendida como a capacidade de uma estrutura ou de um membro estrutural, cumprir os requisitos especificados para o qual foi concebido, durante a sua vida útil (CEN, 2002).

Dois métodos muito usados para estimar a fiabilidade estrutural são o método de fiabilidade de primeira ordem (do inglês FORM) e o de segunda ordem (do inglês SORM). O método de fiabilidade de primeira ordem envolve uma transformação das variáveis aleatórias para o espaço normal padronizado e aproxima a função de estado limite através de uma superfície linear (um hiperplano). O método de segunda ordem é semelhante ao de primeira ordem excepto que neste

caso a função de estado limite é aproximada através de uma superfície de segunda ordem (um parabolóide). Se a superfície de estado limite não é linear uma aproximação de segunda ordem produzirá resultados mais fiáveis mas também será mais morosa e complicada. Caso contrário os dois métodos produzirão praticamente os mesmos resultados (Der Kiureghian *et al.*, 1987; Liu e Kiureghian, 1989).

Estes dois métodos, FORM e SORM, são hoje frequentemente usados em fiabilidade estrutural, sendo as suas aplicações bastante simples quando existe uma formulação explícita do problema estrutural. No entanto, quando não há relações explícitas entre as funções de estado limite e as variáveis, como por exemplo, quando se usa o método dos elementos finitos para avaliar esta função, a aplicação destas técnicas de fiabilidade para avaliar a incerteza da resposta estrutural torna-se mais exigente e pode revelar-se pouco eficiente (Ghanem e Spanos, 2003; Haldar e Mahadevan, 2000a; Schenk e Schueller, 2005). Para muitos sistemas estruturais utiliza-se o método dos elementos finitos como ferramenta de análise de forma a obter resultados mais rigorosos. Esta é uma das razões pela qual a análise de fiabilidade de estruturas analisadas em modelos de elementos finitos tem tido grandes desenvolvimentos nos últimos tempos.

Este capítulo descreve os conceitos fundamentais sobre a teoria da fiabilidade estrutural que serão usados nesta dissertação.

2.2 Segurança e funcionalidade estrutural

A segurança estrutural e o adequado comportamento em serviço são dois aspectos a ter em conta no dimensionamento de estruturas. O primeiro requisito corresponde à necessidade de minimizar o risco de colapso inerente a qualquer realização humana e o segundo está relacionado com a necessidade de proporcionar aos utentes um funcionamento adequado e, ao mesmo tempo, minimizar os custos de manutenção (Henriques, 1998).

O desempenho de uma estrutura é medido para diferentes situações que podem ocorrer durante o seu período de funcionamento. Deste modo, pode dizer-se que a validação do desempenho de uma estrutura é realizada recorrendo ao conceito de estado limite – condição além da qual uma estrutura não satisfaz os critérios de funcionalidade exigidos, ou seja, a rotura pode surgir sempre que as acções aplicadas à estrutura excedam os valores da sua capacidade de resistir aos esforços desenvolvidos (Veiga, 2008).

Um estado limite corresponde a uma representação discreta da resposta estrutural sob condições extremas de solicitação, à qual se pode associar um determinado nível de danos ou perdas (CEB, 1988).

De acordo com as normas actuais de dimensionamento de estruturas encontram-se dois tipos de estados limite: estados limite últimos e estados limite de utilização (RSA, 1984).

- **Estados limite últimos** - situações onde a rotura é total, associada a uma carga máxima da estrutura colocando em causa a segurança de pessoas e equipamentos.
- **Estados limite de utilização** - situações de menor gravidade, associado a danos estruturais que impedem de satisfazer os critérios de funcionalidade exigidos.

Relativamente aos estados limite de utilização assiste-se a ocorrências com uma durabilidade à qual se atribui uma determinada classificação:

- Muito curta - corresponde a poucas horas de vida da estrutura
- Curta - corresponde a uma duração na ordem dos 5% da vida da estrutura
- Longa Duração - corresponde a cerca de metade do tempo de vida da estrutura

Uma deformação estrutural excessiva pode resultar numa vasta lista de consequências, tais como, instabilidade de elementos estruturais, perda de equilíbrio total ou parcial por formação de mecanismos, danos de origem funcional ou estética, durabilidade, etc. A ocorrência de alguma destas consequências indica que o desempenho estrutural não satisfaz total ou parcialmente os critérios de funcionalidade comprometendo assim a utilização da estrutura.

2.3 Estados limite

Recorrendo à análise feita para cada estado limite, podemos identificar as variáveis aleatórias básicas que os influenciam. Para isso, os modelos que identificam o comportamento de uma estrutura não só devem definir cada estado, mas também os parâmetros que devem ser definidos como variáveis aleatórias básicas desses mesmos estados.

É com a ajuda das variáveis aleatórias que se pode descrever o estado limite recorrendo à função:

$$Z = g(x) \quad (2.1)$$

onde x representa o conjunto das incertezas (variáveis básicas) do problema, g é a função estado limite, e Z a margem de segurança.

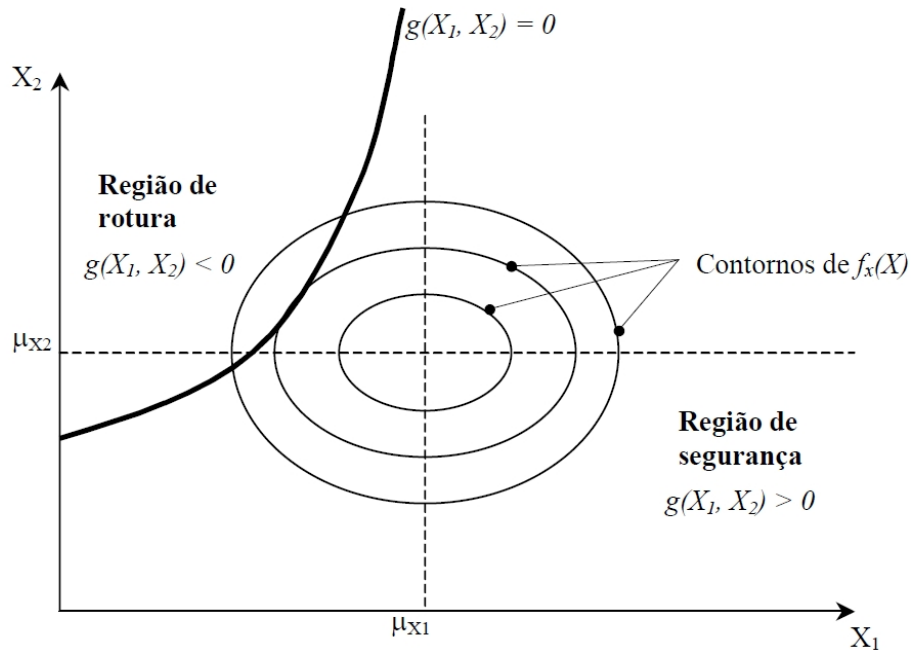


Fig. 2.1 - Representação genérica da função $g(x)$ e da fronteira entre as regiões de segurança e rotura

Verificando a figura, é perceptível que, se a função de estado limite for $Z = g(X)$, a condição $g(X) = 0$ representa a função de estado limite, ou seja, a fronteira entre a região de rotura e a região de segurança. Cada uma das zonas podem ser representadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} Z = g(X) > 0 \Rightarrow \text{Zona de segurança} \\ Z = g(X) < 0 \Rightarrow \text{Zona de rotura} \end{cases}$$

Como será explicado mais à frente, importa esclarecer que a probabilidade de ruína aparece representada por um integral de convolução correspondendo este à totalidade dos casos em que a resistência é inferior a uma dada solicitação para toda a gama de solicitações possíveis.

2.4 Noções de estatística e probabilidade

Nos problemas de fiabilidade, a estrutura apresenta um comportamento que depende de vários parâmetros e, à partida, muitos deles são desconhecidos - variáveis aleatórias. Porém, os métodos da teoria da probabilidade tornam possível uma representação probabilística, sendo associável às variáveis aleatórias uma função de distribuição. Estas variáveis são então definidas como os parâmetros que consideram a incerteza no modelo adoptado (Faber, 2005).

As variáveis aleatórias podem ser caracterizadas por uma determinada tendência comportamental que é obtida através de observações prévias. Quando são retirados vários registos pode-se obter um histograma, sendo, a partir deste, facilmente retirados os valores da média e desvio padrão.

Sendo a estatística um assunto importante no que diz respeito à fiabilidade, esta secção serve para introduzir o tema.

2.4.1 Noções básicas

Estatística é a ciência que se ocupa da recolha de informação e da organização dessa informação com a finalidade de, através de resultados probabilísticos, poder prever a evolução de um fenómeno. É uma ciência que se ocupa de estratégias e decisão num contexto de variabilidade e incerteza (Pestana, 2006).

Denomina-se população aos objectos ou pessoas dos quais nos interessa obter informações. Sendo impossível ter uma informação completa acerca da população em estudo, recorre-se a uma parcela finita da população - a amostra. Os dados constituem uma amostra, que nos veiculam boa informação da população de que foram extraídos (Pestana, 2006).

É conveniente apresentar, além dos dados, medidas que mostrem a informação de maneira reduzida, ou seja, melhorando a representação desse conjunto de dados. Em seguida descrevem-se algumas destas medidas.

2.4.1.1 Média

Se se pretender representar os dados por um único valor, este, logicamente, será a média das observações, ou seja, o ponto de equilíbrio das observações. A média é definida como a soma de todas as observações dividida pelo número total de observações.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.2)$$

Onde x corresponde às observações e n é o número de observações efectuadas.

No entanto, este cálculo pode induzir a conclusões precipitadas, vejamos o exemplo seguinte:

Imagine um prédio com dois andares, no piso inferior existe um lar de idosos e no piso superior está instalada uma creche. Se o estudo pretendido for a idade de determinada população, esta amostra não seria a mais apropriada pois fazendo o cálculo da média, esta iria resultar em valores na ordem dos 30 ou 40 o que não corresponde à verdadeira idade das pessoas que fazem parte da amostra.

2.4.1.2 Mediana

É uma medida que separa o conjunto de observações em dois grupos de tal modo que 50% das observações são maiores do que a própria mediana e os restantes 50% são inferiores.

2.4.1.3 Variância e desvio padrão

A variância é a média do quadrado dos desvios e é dada pela soma das diferenças quadráticas das observações em relação à sua média dividida pelo número total de observações.

$$var(x) = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.3)$$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância.

$$s = \sqrt{\text{var}(x)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.4)$$

Esta operação é importante pois a média e o desvio padrão ficam assim expressos nas mesmas unidades. Utilizando o modelo mais comum - normal ou de gauss - pode-se escrever $\bar{x} \pm s$, que significa que 68% das observações estão dentro deste intervalo.

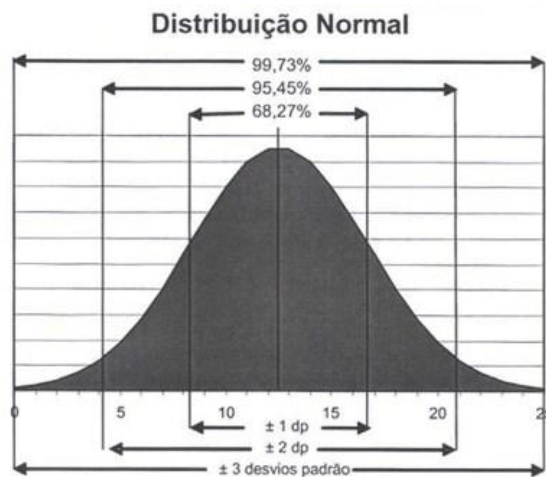


Fig. 2.2 - Distribuição normal

2.4.1.4 Coeficiente de variação

É uma medida de variabilidade adimensional e expressa o número de vezes que o desvio padrão contém a média.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\% \quad (2.5)$$

Esta medida estatística é utilizada para comparar conjuntos de dados que têm diferentes unidades ou quando as médias são muito diferentes.

2.4.1.5 Covariância

A covariância entre duas variáveis (a e b) é definida como a medida de como as duas variáveis variam conjuntamente, e pode calcular-se da seguinte maneira:

$$cov(a, b) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) \cdot (b_i - \bar{b}) \quad (2.6)$$

2.4.1.6 Coeficiente de correlação

O coeficiente de correlação é uma característica que permite avaliar o grau de associação linear entre duas variáveis. É definido pela equação (2.7).

$$r(a, b) = \frac{cov(a,b)}{s_a \cdot s_b} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) \cdot (b_i - \bar{b})}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (b_i - \bar{b})^2}} \quad (2.7)$$

2.4.2 Variáveis aleatórias e funções distribuição

Uma variável aleatória (V.A.) é uma função que atribui um valor numérico a cada resultado individual de uma experiência aleatória, ou seja, o objectivo é encontrar uma forma de passar da estrutura das probabilidades em espaços abstractos Ω para uma estrutura semelhante em \mathbb{R} .

Seja S o espaço amostral associado a uma experiência aleatória Ω . Uma função de X , que associe a cada elemento $s \in S$ um número real $x(s)$, é denominada variável aleatória:

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto X(s) = x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

As variáveis aleatórias podem ser classificadas de duas formas:

- **Variáveis aleatórias discretas:** considerando o exemplo "lançamento do dado" o resultado estará sempre entre 1 e 6 mas no entanto nunca poderá ser 2.5. Assim, matematicamente podemos dizer que as variáveis, cujo domínio é um conjunto finito ou infinito enumerável, são variáveis aleatórias discretas.
- **Variáveis aleatórias contínuas:** ao contrário das discretas, as variáveis aleatórias contínuas têm no domínio um conjunto infinito não enumerável.

Para cada uma destas variáveis existe uma função que associa uma probabilidade a cada ocorrência. Se for o caso das variáveis aleatórias discretas a função é a *função massa de probabilidade*, $p_X(x)$, e tem as seguintes características:

$$1. p(x_i) \geq 0 \forall i, \quad (2.8)$$

$$2. \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1; \quad (2.9)$$

Denomina-se *função densidade de probabilidade* $f_X(x)$, à função, não negativa, que representa a distribuição de probabilidade, caso a variável aleatória seja contínua. Tem as seguintes características:

$$1. f(x) \geq 0, \text{ se } x \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (2.11)$$

A função distribuição descreve a probabilidade acumulada até ao valor genérico x . Esta função é definida, respectivamente para as variáveis discretas e contínuas, da seguinte forma:

$$F_{X_{discreta}}(x) = P_X(X \leq x) = \sum_{-\infty}^x p_X(x), \quad (2.12)$$

$$F_{X_{contínua}}(x) = P_X(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx. \quad (2.13)$$

Nas figuras 2.3 e 2.4 estão representadas graficamente a função densidade de probabilidade (PDF) e função distribuição acumulada, respectivamente.

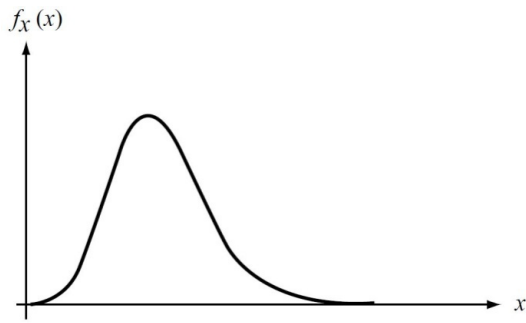


Fig. 2.3 - Função densidade de probabilidade (PDF)

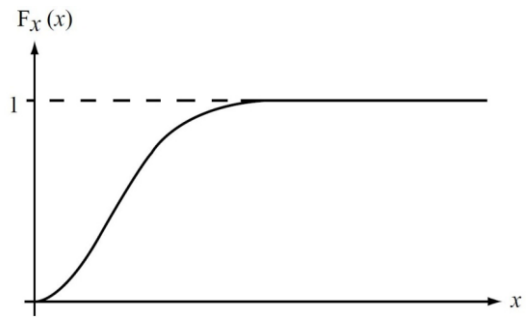


Fig. 2.4 - Função distribuição acumulada (CDF)

2.4.2.1 Distribuições

Na avaliação da fiabilidade estrutural são usados vários tipos de distribuições de probabilidades. Apresentam-se de seguida as distribuições que foram utilizadas neste trabalho, assim como os respectivos parâmetros e momentos.

| Distribuição | Função densidade | Média | Desvio Padrão |
|--------------|---|--|---|
| Normal | $f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$ | μ | σ |
| Log-Normal | $f_x(x) = \frac{1}{x\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\theta}\right)^2\right)$ | $\mu = \exp\left(\lambda + \frac{\theta^2}{2}\right)$ | $\sigma = \mu\sqrt{\exp(\theta^2) - 1}$ |
| Gumbel | $f_x(x) = \alpha \cdot \exp\left(\alpha(x-u) - \exp(\alpha(x-u))\right)$ | $\mu = u + \frac{\gamma}{\alpha}$ $\gamma = 0.577216$ | $\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\zeta$ |
| Rayleigh | $f_x(x) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right)$ | $\mu = \theta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ | $\sigma = \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}$ |

Tabela 2-1 - Informação sobre as distribuições utilizadas neste trabalho

Para além destas distribuições importa estudar a distribuição normal padrão pois esta possui características importantes que, como se poderá verificar adiante, são úteis na resolução do algoritmo FORM e por sua vez na transformação de Nataf.

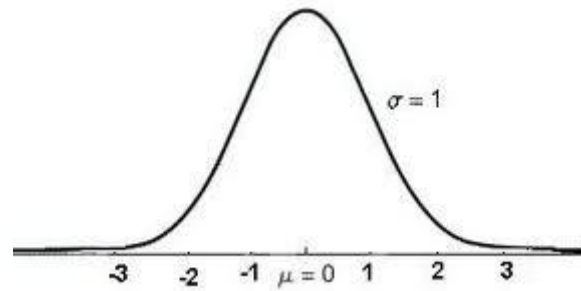


Fig. 2.5 - Distribuição normal padrão

A distribuição normal padrão tem a particularidade de ter o seu valor médio igual a zero, e o desvio padrão igual a 1, assim sendo a função de distribuição é

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

2.5 Formulação do problema básico de fiabilidade estrutural

O problema básico da fiabilidade estrutural envolve apenas a resistência, R - *função das características geométricas e das propriedades dos materiais*, e a solicitação, S - *função das acções*, cada uma descrita pela respectiva função densidade de probabilidade, f_r e f_s .

Com este novo conceito a função de estado limite pode ser escrita da seguinte forma:

$$Z = g(R, S) = R - S \tag{2.14}$$

Por conseguinte, a superfície que separa a região de rotura da região de segurança passa a ser:

$$Z = g(R, S) = R - S = 0 \tag{2.15}$$

A probabilidade de falha pode ser descrita como:

$$P_f = P(g(R, S) \leq 0) = P(R - S \leq 0) \tag{2.16}$$

A partir das funções de densidade e de distribuição de probabilidade das variáveis R e S , é possível quantificar a probabilidade de falha. Nesta perspectiva, a P_f pode ser calculada

integrando a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias R e S , $f_{R,S}$, assim vem:

$$P_f = \iint_D f_{R,S}(r, s) dr ds \quad (2.17)$$

Sendo D o domínio de falha, $D = \{R, S : G(R, S) \leq 0\}$.

Se R e S forem independentes, a função densidade de probabilidade conjunta pode ser substituída por $f_{RS}(R, S) = f_R(R) \cdot f_S(S)$, o que altera a equação (2.16) para:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{R>S} f_R(r) \cdot f_S(s) dr ds \quad (2.18)$$

Considerando F_R como a função distribuição da resistência, integrando $f_R(r)$ obtém-se:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(x) \cdot f_S(x) dx \quad (2.19)$$

Este integral é também conhecido por integral de convolução, correspondendo à soma de todos os casos de solicitação para os quais a resistência não excede as acções.

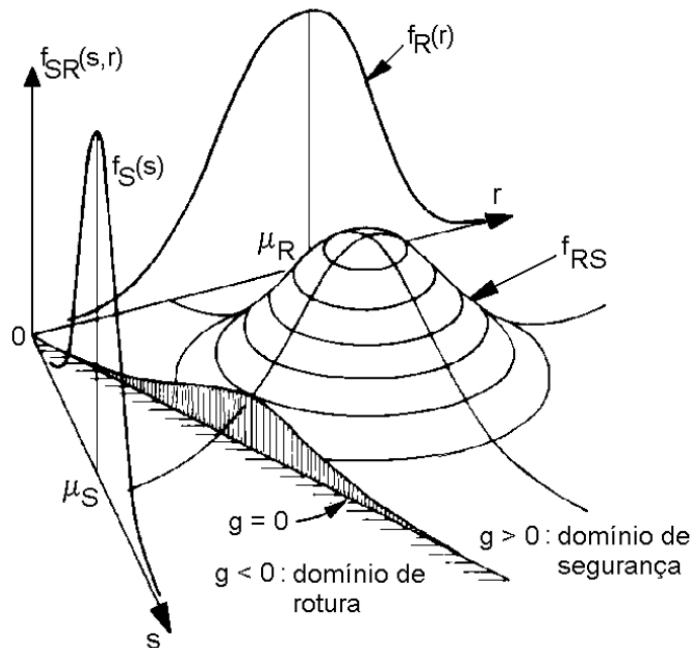


Fig. 2.6 - Representação tridimensional das variáveis no problema de fiabilidade estrutural (Melchers, 1999)

2.5.1 Caso de variáveis aleatórias normais

O integral de convolução é bastante complexo e apenas é possível resolver para um número limitado de problemas. No entanto, se considerarmos as variáveis R e S como sendo variáveis aleatórias independentes com distribuição normal de média μ_R e μ_S e variância σ_R^2 e σ_S^2 , respectivamente, este, torna-se determinável.

Para a mesma função limite:

$$Z = g(R, S) = R - S$$

a margem de segurança Z é também uma variável gausseana cuja média e desvio padrão se poder obter através de:

$$\mu_g = \mu_R - \mu_S \quad (2.20)$$

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (2.21)$$

A equação (2.16) vem então:

$$p_f = P(R - S \leq 0) = P(g(R, S) \leq 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_g}{\sigma_g}\right) = \Phi(-\beta) \quad (2.22)$$

onde Φ é a função distribuição da distribuição normal reduzida e β é definido como o índice de fiabilidade:

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (2.23)$$

Na figura representa-se o significado de β , uma medida em desvios padrões entre o valor médio da função estado limite e a superfície de rotura.

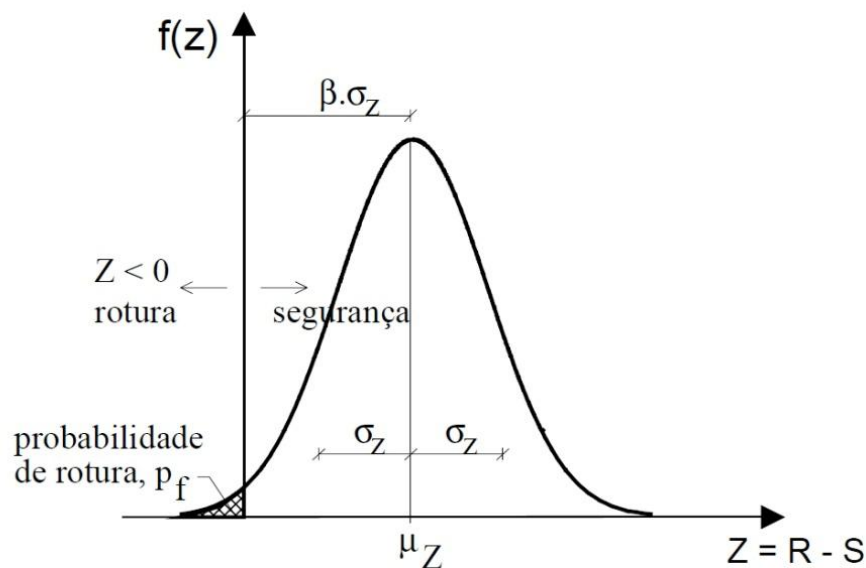


Fig. 2.7 - Distribuição da medida de segurança

2.6 Métodos de análise de fiabilidade estrutural

Uma vez que a obtenção do integral de convolução, que permite a avaliação da segurança de uma estrutura com base na probabilidade de rotura, é bastante complexa, foi necessário desenvolver metodologias para obter o índice de fiabilidade ou a probabilidade de falha aplicáveis na resolução de problemas práticos.

Não é de estranhar que esta complexidade tenha provocado o desenvolvimento de várias metodologias dentro da teoria da fiabilidade estrutural. Tema particularmente importante a partir do qual se desenvolvem e se estruturam estudos de diversos autores, tais como: (Ferry-Borges, 1968) e (Freudenthal, 1966), (Cornell, 1969) primeiro método de fiabilidade estrutural método “FOSM”, (Hasofer, 1974) métodos “FORM” e “SORM”, (Rackwitz, 1978), (Chen, 1983), (Wu, 1987), (Liu, 1989) e (Ditlevsen, 2005).

Sem pôr de lado a importância dos demais estudos e apesar das variadas limitações que os mesmos apresentam considera-se sério contributo o método desenvolvido por Cornell que introduz o conceito de índice de fiabilidade β , permitindo a quantificação indirecta da probabilidade de rotura e a avaliação da segurança de uma dada estrutura. A utilização desse índice no desenvolvimento da teoria da fiabilidade assume grande desenvolvimento particularmente nas novas metodologias de avaliação de segurança estrutural.

Essas novas metodologias surgem na década de oitenta onde os estudos realizados sobre técnicas de probabilidade e estatística em modelos de elementos finitos são unicamente direccionados a estruturas com comportamento linear ou não linear definido por relações simplistas. (Vanmarcke, 1983), (Kiureghian, 1988), (Shinozuka, 1988), (Spanos, 1989), são os autores dos primeiros trabalhos, e portanto o ponto de partida para aquilo que outros, mais tarde, na década de noventa, vão desenvolver assumindo propostas e aplicações sobre o estudo da fiabilidade, agora aplicado a comportamentos não lineares de estruturas, (Liu, 1989), (Teigen, 1991a e 1991b), (Rajashkhar, 1995), (Eibl, 1995), (Zhang, 1996). Estes métodos dividem-se em métodos de fiabilidade, métodos de perturbação e métodos de simulação.

Assim, podemos referir que os Métodos de Fiabilidade respondem à avaliação da probabilidade de rotura que divide o espaço da resposta estrutural em estados seguros e estados de rotura.

Os Métodos de Perturbação respondem à aplicação dos desenvolvimentos de primeira ou de segunda ordem em séries de Taylor das equações que regem o problema em termos de elementos finitos. O comportamento estrutural é caracterizado em termos dos desvios, em relação aos valores médios das variáveis aleatórias básicas.

Os Métodos de Simulação respondem à avaliação da probabilidade de rotura muito pequenas, recorrentes em problemas estruturais, o método mais usual é o de Monte Carlo.

Conferindo uma vez mais que a resolução do integral múltiplo da equação (2.19) é bastante complexa, recorrem-se, para resolver o integral, a simplificações e/ou a métodos numéricos. Podem ser considerados dois tipos:

1. Utilização de processos que permitam obter soluções aproximadas que sejam mais simples de calcular. Estes métodos podem ser agrupados em dois tipos: os métodos de fiabilidade de primeira ordem (do inglês FORM - *First Order Reliability Method*) e os de segunda ordem (do inglês SORM - *Second Order Reliability Method*). Estes baseiam-se, respectivamente, em aproximações lineares (FORM) e quadráticas (SORM) à superfície de estado limite no ponto mais provável de rotura do espaço normal padrão.
2. Aproximações numéricas por meio de simulações como por exemplo o método de Monte Carlo.

2.6.1 Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo assenta em princípios extremamente simples, sendo o processo de simulação efectuado sobre a totalidade da população correspondente às variáveis em estudo (Delgado, 2002).

O método requer a definição das distribuições probabilísticas das variáveis envolvidas, por exemplo a partir de informações previamente existentes. Assim, considerando estas funções, é possível obter sequências de valores dessas variáveis que sejam coerentes com as distribuições das variáveis em estudo.

As sequências de valores geradas de acordo com as distribuições pretendidas são normalmente obtidas a partir de um algoritmo que permite gerar uma sequência de números aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo]0,1[.

Este exercício de geração de números aleatórios é conseguido a partir de uma técnica apoiada numa fórmula matemática recursiva. Para o desenvolvimento satisfatório da fórmula recursiva, e sabendo que esta geração não é espontânea, é necessário definir um valor de arranque, usualmente denominado por semente. Este algoritmo permite gerar sequencialmente todos os números pseudo-aleatórios seguintes.

A qualidade do gerador de números pseudo-aleatórios deve ser sempre verificada através de uma série de testes estatísticos para averiguar a independência e a uniformidade da distribuição (Rubinstein, 1981).

O número de simulações a efectuar depende do problema estrutural, ou seja, da função que define o estado limite, $g(x)$, e da ordem de grandeza da sua probabilidade de rotura, p_f . Sendo que se torna necessário aumentar o número de simulações quando a probabilidade de rotura é muito baixa.

Teoricamente, se o gerador de números (pseudo-)aleatórios garantir as propriedades de independência e de uniformidade, o método de Monte Carlo fornece resultados exactos quando o numero de simulações, n , tende para o infinito:

$$p_f = P[g(x) \leq 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K[g(x) \leq 0]}{n} \quad (2.24)$$

onde $K[g(x) \leq 0]$ é o número de experiências em que foi atingido ou ultrapassado o estado limite (Henriques, 1998).

2.6.2 Aproximações de primeira e segunda ordem

Como se verificou anteriormente, se o problema em estudo tiver apenas duas variáveis normais e independentes, a probabilidade de rotura e o índice de fiabilidade podem ser rapidamente calculados. Porém, se o problema envolver mais do que duas variáveis aleatórias $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$ e a função $g(x)$ não for linear, os dois primeiros momentos estatísticos não podem ser obtidos pelas propriedades da lei normal e para piorar a situação, a resposta Z pode não ser normal, impossibilitando assim o cálculo da média e variância.

Para determinar estes momentos de $g(x)$ recorre-se ao desenvolvimento da série de Taylor da função $g(x)$:

$$g(x) \cong g(X^*) + \nabla g|_{X^*}(X - X^*) + \frac{1}{2}(X - X^*)^T \cdot \nabla^2 g|_{X^*}(X - X^*) \quad (2.25)$$

onde X^* é o ponto onde se faz a aproximação e $\nabla^k g$ representa as derivadas de ordem k .

Os métodos de primeira ordem consideram os termos de primeira ordem do desenvolvimento de Taylor da função $g(X)$ em relação ao ponto arbitrário X^* , que é o ponto da superfície de falha com maior valor de $f_x(X)$.

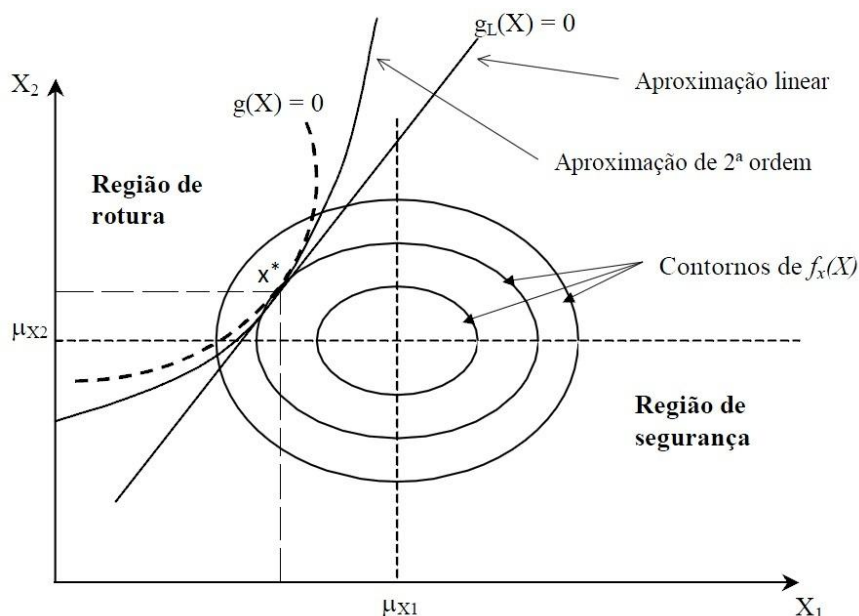


Fig. 2.8 - Aproximações linear e de 2ª ordem a $g(x)$ no ponto X^*

2.6.3 Índice de fiabilidade de Hasofer e Lind

Os métodos de segunda ordem permitem diminuir os erros que se obtêm das aproximações de primeira ordem a funções limites, $g(X)$ não lineares.

Inicialmente o índice de fiabilidade foi proposto por (Cornell, 1969), usando a aproximação de primeira ordem da função $g(X)$ e as propriedades da lei normal. Contudo este método revela-se insuficiente pela inconveniência da probabilidade de falha não ser invariante com o critério de resistência usado, ou seja, se a função $g(X)$ não for linear, o índice de fiabilidade toma valores diferentes consoante o ponto X^* onde é feita a aproximação à superfície limite.

No sentido de dar resposta aos problemas relacionados com a invariância, Hasofer e Lind propuseram em 1974 um método alternativo invariante com o critério de resistência (Hasofer, 1974). Com este método é possível, obedecendo a alguns passos, determinar o índice de fiabilidade:

1. Transformar todas as variáveis aleatórias X_i em variáveis normais reduzidas Y_i de modo a que a média e desvio padrão sejam respectivamente, 0 e 1

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (2.26)$$

2. Definir a superfície limite $g(X)$ no espaço das variáveis normais reduzidas $g(Y)$
3. Determinar o ponto Y^* (ponto de dimensionamento) da superfície limite $g(Y) = 0$
4. Calcular o índice de fiabilidade β , que geometricamente é definido como a distância mais curta do ponto de dimensionamento Y^* à origem, no espaço das variáveis normais reduzidas.

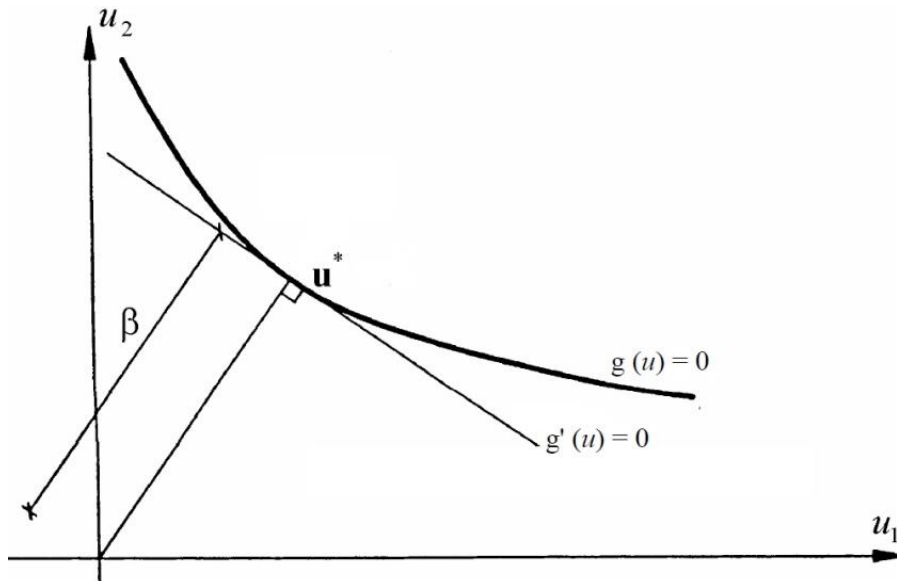


Fig. 2.9 - Interpretação geométrica do índice de fiabilidade, β

O índice de fiabilidade, β , de acordo com Hasofer e Lind, vem:

$$\beta = \frac{a_0 \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i \sigma_{X_i})^2}} \quad (2.27)$$

2.6.4 Algoritmo FORM

O método de fiabilidade de primeira ordem (do inglês FORM – *First Order Reliability Method*), que se baseia em aproximações lineares à superfície de estado limite no ponto mais provável de rotura do espaço normal padrão, foi implementado por Rackwitz e Fiessler em 1978 de forma a incluir informação sobre a distribuição das variáveis básicas (distribuições não normais).

Estes métodos foram utilizados por muitos autores para vários tipos de análises, como por exemplo, Kiureghian e Ke (1988) que os usaram para uma análise de estruturas lineares com propriedades aleatórias.

O algoritmo FORM resolve aproximadamente o problema de fiabilidade exposto na equação:

$$P_f = P[g(X_i) \leq 0] \quad (2.28)$$

Na equação (2.28) a parcela $g(X_i)$ é a função de estado limite que depende das variáveis aleatórias ou variáveis básicas, X_i , que representam o problema de fiabilidade. Estas variáveis estão, normalmente, relacionados com a resistência estrutural e as cargas aplicadas.

$g(X_i) = 0 \Rightarrow$ Corresponde à condição de estado limite

$g(X_i) < 0 \Rightarrow$ Define o domínio de falha, onde os critérios de segurança são violados

$g(X_i) > 0 \Rightarrow$ Define o domínio seguro

Para calcular a probabilidade de falha, P_f , na eq. (2.28), o seguinte integral tem de ser aplicado,

$$P_f = \int \dots \int_{g(x) \leq 0} f_X(x) dx \quad (2.29)$$

onde $f_X(x)$ é a função densidade de probabilidade conjunta para as variáveis básicas X_i . Quando essas variáveis não são normalmente distribuídas e são dependentes, é necessário transformar as variáveis básicas X_i num conjunto de variáveis normais reduzidas Y_i . O cálculo da probabilidade de falha resulta no problema de minimização:

$$\beta = \min(\sum_{i=1}^n Y_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

$$\text{Sujeito a } g(Y_i) = 0$$

Isto corresponde a encontrar o ponto de falha (ou de projecto) mais provável, y^* , que é o ponto sobre a superfície de rotura mais próximo da origem do espaço normal padrão. O índice de fiabilidade β é a distância entre y^* e a origem do espaço normal padrão.

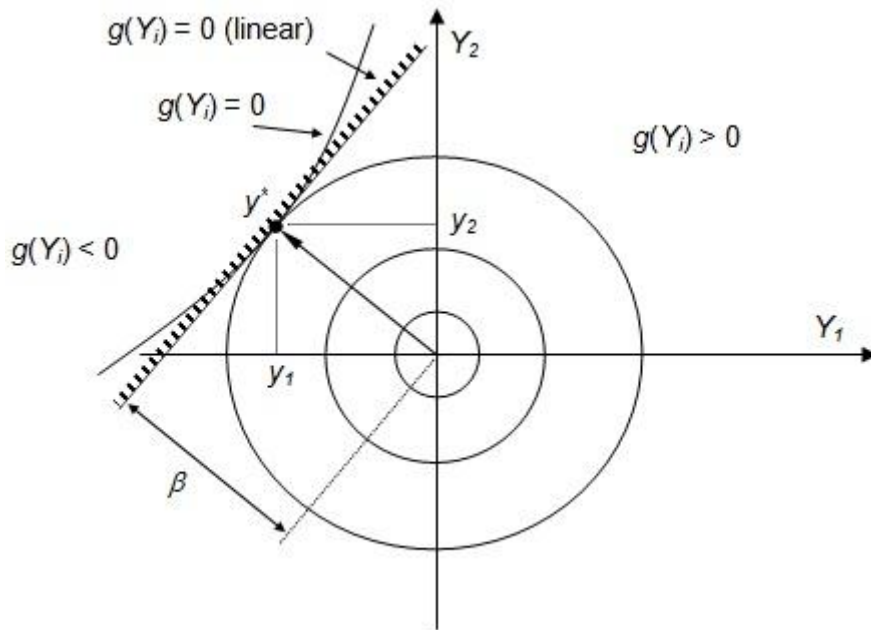


Fig. 2.10 - Transformação da função de estado limite no espaço das variáveis normais reduzidas

O mapeamento entre variáveis X e Y pode ser realizado através das transformações de Rosenblatt ou Nataf. Estas transformações são baseadas no conceito de que qualquer ponto x no espaço original X é transformado em y no espaço normal padrão Y , tal que as distribuições cumulativas em x e y são iguais,

$$F_X(x) = \Phi(y) \tag{2.31}$$

Da equação (2.31) verifica-se que,

$$y = \Phi^{-1}[F_X(x)] \tag{2.32}$$

$$x = F_X^{-1}[\Phi(y)] \tag{2.33}$$

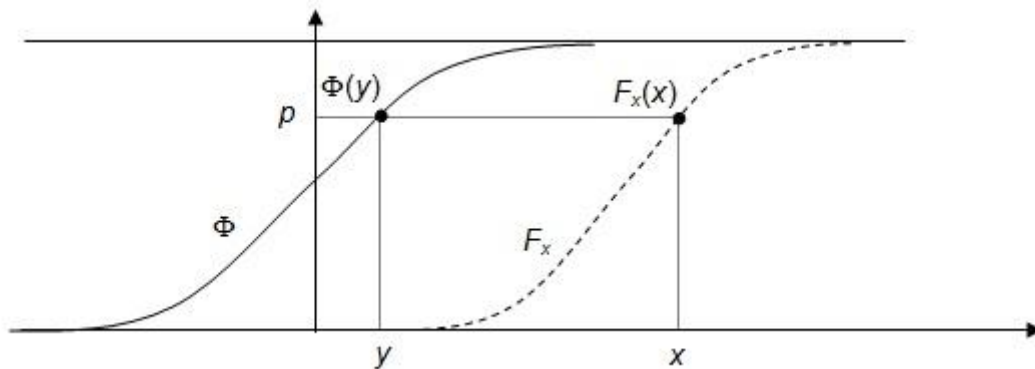


Fig. 2.11 - Transformação de uma variável não normal, X , numa variável normal reduzida, Y

O problema de minimização em (2.30) exige que os gradientes de g sejam calculados em ordem a Y_i . Isto pode ser obtido derivando a função estado limite em ordem a X_j e aplicando a regra da cadeia,

$$\frac{\partial g}{\partial X_j} = \frac{\partial g}{\partial Y_i} \frac{\partial Y_i}{\partial X_j} \quad (2.34)$$

Invertendo a relação,

$$\frac{\partial g}{\partial Y_i} = \frac{\partial g}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial Y_i} \quad (2.35)$$

Na equação (2.35), o Jacobiano pode ser calculado a partir da transformação,

$$\frac{\partial X_j}{\partial Y_i} = \frac{\partial \Phi(y)}{\partial Y_i} \frac{\partial X_j}{\partial F_X(x)} = \frac{\phi(Y_i)}{f(X_j)} \quad (2.36)$$

Na equação (2.36), $\phi(Y_i)$ e $f(X_j)$ são respectivamente, a função densidade da distribuição normal padrão e a função de densidade para a variável X_j .

O algoritmo usado para resolver o problema de minimização (2.30) prossegue do seguinte modo. É escolhido um ponto de partida $X_i^{(1)}$ no universo das variáveis básicas, por exemplo, considerando cada variável x_i igual ao seu valor médio. Então m é igual a 1 e a volta seguinte é executada até que a tolerância em β seja obtida.

1. A função estado limite $g(X_i^{(m)})$ e o seu gradiente, $\partial g / \partial X_i^{(m)}$, são calculados
2. As respectivas variáveis normais básicas $Y_i^{(m)}$ e o Jacobiano $\partial X_j^{(m)} / \partial Y_i^{(m)}$ são obtidos
3. O gradiente da função estado limite no espaço normal padrão, $\partial g / \partial Y_i^{(m)}$ e $\alpha^{(m)}$ são calculados

$$\alpha^{(m)} = \frac{\frac{\partial g}{\partial Y_i^{(m)}}}{\left| \frac{\partial g}{\partial Y_i^{(m)}} \right|} \quad (2.37)$$

4. A nova estimativa de Y , $Y_i^{(m+1)}$, é obtida a partir de:

$$y^{(m+1)} = -\alpha^{(m)} \cdot \beta^{(m+1)} \quad (2.38)$$

onde

$$\beta^{(m+1)} = \frac{g(Y_i^{(m)}) - \frac{\partial g}{\partial Y_i^{(m)}} \cdot y^{(m)}}{\left| \frac{\partial g}{\partial Y_i^{(m)}} \right|} = \frac{g(Y_i^{(m)})}{\left| \frac{\partial g}{\partial Y_i^{(m)}} \right|} + \beta^{(m)} \quad (2.39)$$

5. O ponto correspondente, $X_i^{(m+1)}$, é calculado no universo das variáveis básicas
6. Depois de comparar $\beta^{(m)}$ e $\beta^{(m+1)}$ é tomada uma decisão sobre uma nova iteração. Se for necessário, repetem-se todas as etapas atrás descritas

Este algoritmo pode facilmente falhar se a função estado limite não for linear (e até funções lineares passam a ser não lineares no espaço normal padrão). O comportamento algorítmico é mostrado na figura seguinte:

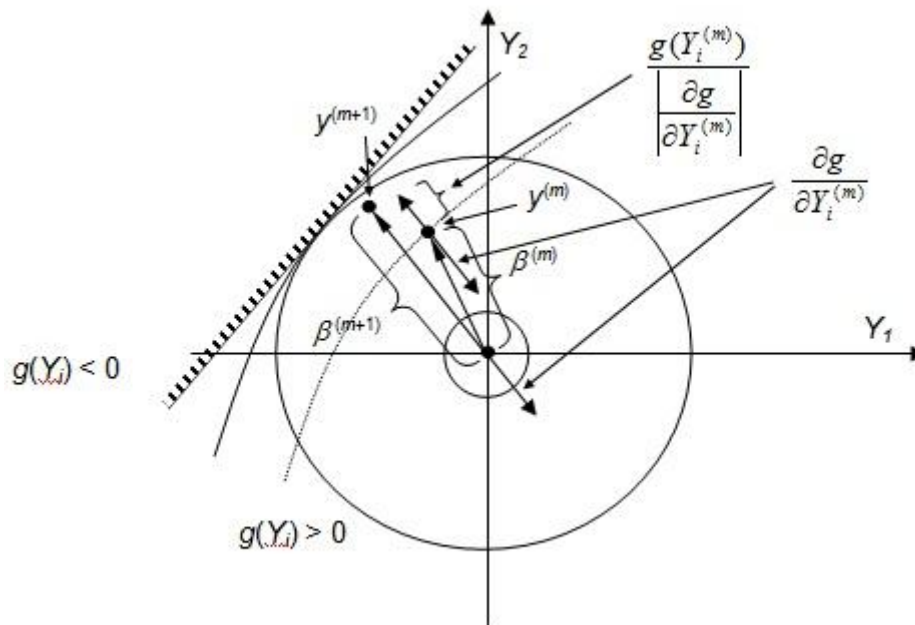


Fig. 2.12 - Comportamento algorítmico

Se a função limite de estado for extremamente não linear e convexa para a origem, como representado na figura abaixo, o algoritmo pode oscilar sem convergir.

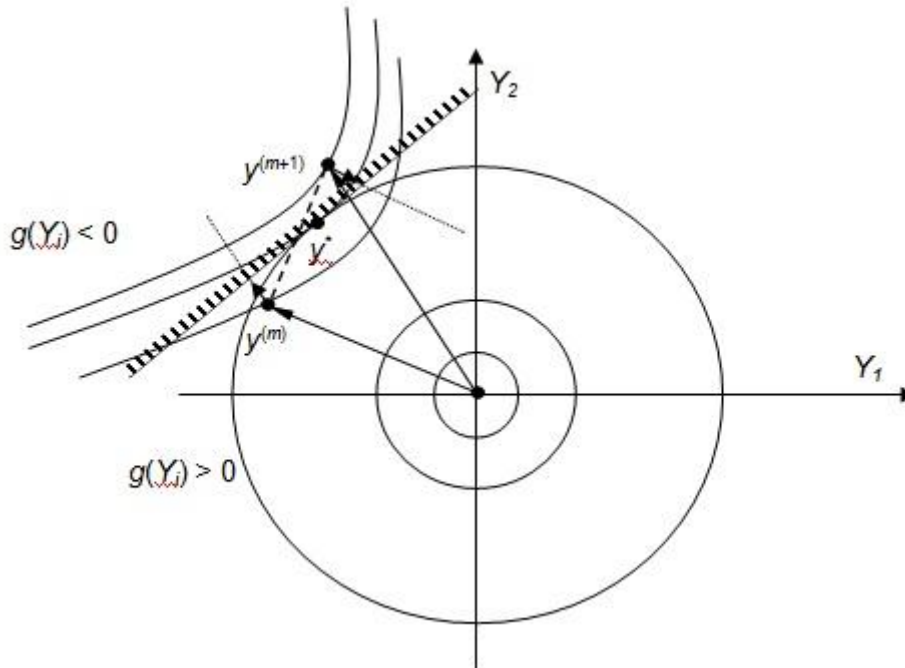


Fig. 2.13 - Algoritmo não converge devido à função de estado limite

Este algoritmo é original de Rackwitz-Fiessler (RF). Foi feita uma intensa pesquisa no sentido de melhorar este algoritmo. Ver, por exemplo (Duprat, 2010).

A fim de melhorar a convergência, o algoritmo Adbo-Rackwitz (HLRF) sugere uma pesquisa ao longo do trajecto que vai de $y^{(m)}$ para $y^{(m+1)}$ usando $z \in [0,1]$ e uma função de interpolação quadrática. Ver, por exemplo (Abdo, 1991).

$$y(z) = (1 - z) \cdot y^{(m)} + z \cdot y^{(m+1)} \quad (2.40)$$

Zhang e Der Kiureghin também propuseram um algoritmo (iHLRF) para realizar uma pesquisa para o ponto z que minimiza a função de mérito $m(y)$:

$$m(z) = \frac{\|y(z)\|^2}{2} + \lambda \cdot |g(z)| \quad (2.41)$$

com

$$\lambda > \frac{\|y(z)\|}{\left\| \frac{\partial g(z)}{\partial y} \right\|} \quad (2.42)$$

A equação (2.40) representa a função de Lagrange correspondente ao problema de optimização, e reflecte o facto de que o problema a ser resolvido é a minimização de y , com uma restrição em $g(z) = 0$. Ver, por exemplo (Zhang, 1997).

2.6.4.1 Transformação de Nataf

Na maioria das situações, a função distribuição de probabilidade conjunta das variáveis básicas não é conhecida. Normalmente a informação estatística disponível permite apenas caracterizar as variáveis aleatórias do problema de fiabilidade pelas suas distribuições marginais e matriz de correlação R_{xx} . Nestes casos de informação estatística incompleta, (Liu, 1986) propôs transformar o vector X de variáveis básicas dependentes e com distribuição não normal, num vector U de variáveis aleatórias normais reduzidas em duas fases, seguindo o modelo de Nataf.

Assim, a partir das distribuições marginais de cada variável básica X_i , define-se um vector Y de variáveis aleatórias através da transformação diagonal:

$$Y_i = \Phi^{-1}[F_i(x_i)] \quad (2.43)$$

O vector Y é então formado por variáveis aleatórias Y_i de distribuição normal reduzida e matriz de correlação R_{yy} cujos coeficientes ρ_{y_i, y_j} relacionam-se com os coeficientes de correlação ρ_{x_i, x_j} das variáveis básicas X por:

$$\rho_{x_i, x_j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \cdot \left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \varphi(y_i, y_j, \rho_{x_i, x_j}) dy_i, y_j \quad (2.44)$$

onde $\varphi(y_i, y_j, \rho_{y_i, y_j})$ representa a função densidade de probabilidade normal bivariada com média nula, variância unitária, coeficiente de correlação ρ_{y_i, y_j} e μ_i e σ_i representam, respectivamente a média e o desvio padrão da variável básica X_i . (Liu, 1986) e (Dietlevsen, 1996) desenvolveram expressões para o cálculo aproximado dos coeficientes de correlação ρ_{y_i, y_j} da matriz R_{yy} para as distribuições marginais mais utilizadas.

O segundo passo consiste em transformar Y no vector U de variáveis aleatórias independentes de distribuição normal reduzida:

$$U = L^{-1} \cdot Y \quad (2.45)$$

onde L é uma matriz triangular obtida por decomposição de Cholesky da matriz de correlação R_{yy} de L de forma a que $R_{yy} = L \cdot L^T$. Assim a transformação completa de X em U é dada por:

$$U = L^{-1} \cdot \{\Phi^{-1}[F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)]\}^T \quad (2.46)$$

e o seu jacobiano por:

$$J_{U,X} = L^{-1} \cdot \text{diag} \left[\frac{f_i(x_i)}{\varphi(u_i)} \right] \quad (2.47)$$

3. Capítulo 3 – Análise de sensibilidades

O objectivo de introduzir a análise de sensibilidades nesta dissertação é determinar as derivadas ou os gradientes da função de estado limite. Metodologias para a determinação eficiente de campos de sensibilidade em problemas lineares estão bem estabelecidas desde a década de 80, onde foram inicialmente tratados por Ryu em 1986, enquanto que a pesquisa para problemas não-lineares está ainda em desenvolvimento sendo que ao longo dos últimos anos métodos de análise de sensibilidades para este tipo de problemas têm sido propostos por (Hisada, 1988), (Tsay et al., 1990a e 1990b), (Zhang, 1993), (Kleiber et al., 1991), (Vidal, 1993), (Mahnken, 1996), (Tortorelli et al., 1994) e (Kleinermann, 2000), entre outros.

A análise de sensibilidades calcula os gradientes, $\partial\psi/\partial X_i^{(m)}$, da resposta ou desempenho estruturais, ψ , utilizados na definição das funções de estado limite, $g(X_i^{(m)})$. A principal vantagem é poupar significativamente o esforço computacional quando comparado com o método das diferenças finitas.

O cálculo dos gradientes também se torna útil quando se utilizam métodos de programação matemática em optimização estrutural. Neste caso, os desempenhos estruturais estão relacionados com a função objectivo, e constrangimentos, enquanto os parâmetros estão relacionados com as variáveis do problema.

De uma forma geral, os gradientes da função objectivo e dos constrangimentos são calculados a partir dos gradientes das respostas da estrutura determinadas na etapa de análise. Os gradientes das respostas da estrutura são conhecidos por sensibilidades e o seu cálculo é chamado de análise de sensibilidades.

O que é a análise de sensibilidades

Considere-se a viga encastrada representada na Fig.3.1, as sensibilidades do deslocamento da extremidade no que diz respeito à variação da inércia da secção transversal, I , e à variação do módulo de elasticidade E , são:

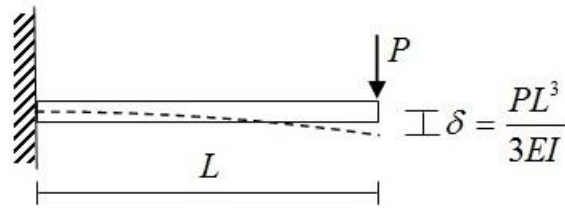


Fig.3.1 - Viga encastrada

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\delta}{dI} = -\frac{PL^3}{3EI^2} \\ \frac{d\delta}{dE} = -\frac{PL^3}{3IE^2} \end{cases}$$

Neste caso, a resposta estrutural é o deslocamento na extremidade, $\psi = \delta$, a partir da qual pode ser gerada uma função de estado limite, $g(X)$, (por exemplo, $g(X) = \delta_{Max} - \delta$). O vector X contém o parâmetro $x = I$ e, uma aproximação válida da expressão que descreve a dependência de δ em I torna-se disponível.

O que aconteceria se a avaliação da resposta estrutural exigisse uma análise extremamente complexa de elementos finitos? Neste caso, também seria possível calcular os gradientes de resposta tendo em conta os parâmetros que influenciam o problema. A disciplina que estuda as metodologias para resolver este tipo de problemas é a análise de sensibilidade.

3.1 Análise de sensibilidade de projecto

Existem duas abordagens para a análise de sensibilidade de projecto: sensibilidades discretas e sensibilidades contínuas.

No caso das sensibilidades discretas o modelo numérico é diferenciado de modo a obter a sensibilidade requerida. Enquanto que no caso das sensibilidades contínuas a equação diferencial subjacente é diferenciada e as equações resultantes são discretizadas usando o mesmo tipo de malha já utilizado na análise de elementos finitos ou uma outra malha criada especificamente para o efeito.

3.1.1 Sensibilidades discretas

Esta formulação é obtida derivando as equações dos elementos finitos, resultantes da discretização do problema contínuo, em relação ao parâmetro x . Para um problema de equilíbrio estático:

$$Kz = f \quad (3.1)$$

Onde K é a matriz de rigidez, z e f são, respectivamente, o vector deslocamento e o vector de forças. Derivando a equação (3.1) em ordem a x , tem-se:

$$\frac{\partial K}{\partial x} z + K \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.2)$$

Ou

$$\frac{\partial z}{\partial x} = K^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} z \right) \quad (3.3)$$

Para uma medida de desempenho estrutural ψ (tensão, deslocamento) a derivada em ordem a x é o somatório das derivadas explícitas de ψ em ordem a x e das derivadas implícitas através da dependência do deslocamento z .

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \quad (3.4)$$

Existem duas formas para avaliar a equação (3.4), o método directo e o método adjunto. No caso do método directo, resolve-se a equação (3.4) substituindo (3.3) em (3.4):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} K^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} z \right) \quad (3.5)$$

Pelo método adjunto resolve-se um sistema de equações lineares para as variáveis adjuntas λ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = K \lambda \quad (3.6)$$

que permite obter a equação (3.7):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} z \right) \quad (3.7)$$

A decisão sobre qual dos métodos a utilizar depende do número de desempenhos estruturais, $n\psi$, e do número de parâmetros, nx .

Se se estiver a utilizar o método directo, o sistema de equações lineares da equação (3.3) deve ser resolvido para cada parâmetro x . O vector de forças para cada um desses sistemas é designado vector de forças adjuntas e é calculado pela equação (3.8).

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} z \quad (3.8)$$

No entanto, a matriz de rigidez é exactamente a mesma que no problema inicial (Fig.3.1) e, portanto, pode ser armazenada de uma forma decomposta. Recorrendo a esta forma decomposta, é necessário, para cada parâmetro, resolver o sistema de equações com um novo vector de carga.

Na equação (3.8) se o parâmetro for uma carga aplicada num nó, então $\partial f/\partial x$ é uma carga unitária aplicada no nó e $\partial K/\partial x$ é zero. Se o parâmetro afectar a matriz de rigidez, então, $\partial f/\partial x$ é zero e $\partial K/\partial x$ deve ser calculado.

Primeiro, $\partial K/\partial x$ é uma matriz que resulta da montagem ou "assemblagem" de todos os elementos finitos afectados por x . Em seguida, para se obter $\partial K/\partial x$ em cada um dos elementos surgem dois métodos. Se as expressões analíticas de K forem conhecidas, como no caso de vigas 2D e 3D, estas são diferenciáveis. Para elementos isoparamétricos onde é usada a integração numérica, podem-se aplicar as diferenças finitas.

Se o método em uso for o método adjunto, a equação (3.6) deve ser resolvida com a mesma matriz de rigidez e com um vector de forças igual a $\partial\psi/\partial z$. Uma nova solução do sistema de equações terá que ser efectuada para cada ψ .

Como conclusão entende-se que se $nx > n\psi$, o método adjunto é mais eficiente, e se $n\psi > nx$, o método directo é superior.

3.1.2 Sensibilidades contínuas

Em contraste com a equação matricial desenvolvida para as sensibilidades discretas, as equações das sensibilidades contínuas usam deslocamentos contínuos que satisfazem as

condições fronteira. Embora as duas abordagens estejam relacionadas existem vantagens e desvantagens.

Comparando com sensibilidades discretas, a principal desvantagem das sensibilidades contínuas é a complexidade teórica. As duas principais vantagens são:

- a) Uma rigorosa teoria matemática, sem incerteza associada com o erro de aproximação de dimensão finita;
- b) uma relação explícita de sensibilidades de projecto em termos de grandezas físicas, em vez de somatórios de derivadas de elementos matriciais.

Considerando a forma geral das equações de equilíbrio estático, obtidas a partir do princípio de trabalho virtual (ou a partir do princípio da energia potencial total mínima),

$$a_x(z, \bar{z}) = l_x(\bar{z}) \quad (3.9)$$

Onde $a_x(z, \bar{z})$ é a forma bilinear relacionada com o trabalho virtual produzido por forças internas (ou variação da energia de deformação), $l_x(\bar{z})$ é a forma linear relacionada com o trabalho virtual produzido por forças externas (ou variação da energia potencial das forças externas). De notar que agora z e \bar{z} representam, respectivamente, o deslocamento contínuo e o deslocamento virtual.

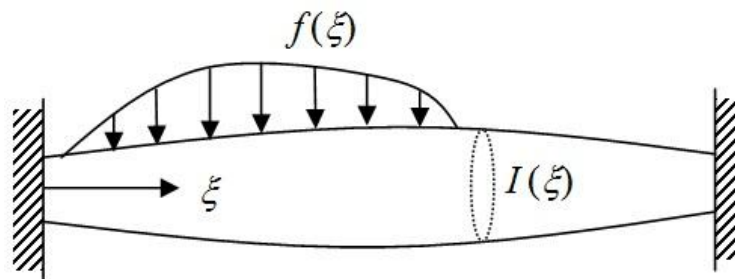


Fig.3.2 - Viga sujeita a flexão

Para uma viga sujeita a flexão, como representado na Fig.3.2, com uma carga aplicada $f(\xi)$ e uma inércia variável $I(\xi)$, tem-se:

$$a_x(z, \bar{z}) = \int_0^L EI z_{\xi\xi} \bar{z}_{\xi\xi} d\xi \quad (3.10)$$

$$l_x(\bar{z}) = \int_0^L f z d\xi \quad (3.11)$$

Para obter as sensibilidades contínuas a partir da equação (3.9), é útil ter em conta o conceito de derivadas direccionais. Considere-se um projecto nominal designado por x e uma vizinhança de projecto descrita por uma variação arbitrária, δ_x , e um parâmetro τ .

$$x_\tau = x + \tau\delta_x \quad (3.12)$$

Supõe-se que ambos os termos em (3.9) são diferenciáveis em ordem a x . Assume-se também que a solução, z , das equações de estado, é diferenciável em ordem a x . A seguinte notação de derivada direccional é aplicada:

$$a'_{\delta_x}(z, \bar{z}) \equiv \frac{d}{d\tau} a_{x+\tau\delta_x}(\bar{z}, \bar{z}) \Big|_{\tau=0} \quad (3.13)$$

Onde \bar{z} indica o campo de deslocamentos de z com a dependência de τ suprimida, e \bar{z} não depende de τ . A notação principal representa a primeira variação com uma explícita dependência de x . Para o termo de carga linear tem-se:

$$l'_{\delta_x}(\bar{z}) \equiv \frac{d}{d\tau} [l_{x+\tau\delta_x}(\bar{z})] \Big|_{\tau=0} \quad (3.14)$$

Para z a equação (3.15) representa a primeira variação da solução da equação (3.9) com x que varia na direcção de δ_x .

$$z' = z'(\xi; x, \delta_x) \equiv \frac{d}{d\tau} z(\xi; x + \tau\delta_x) \Big|_{\tau=0} \quad (3.15)$$

Uma propriedade importante da variação do estado definido na equação (3.15) é o facto da ordem da variação em relação a x e da derivada parcial em ordem à variável independente ξ poder ser alterada. Isto significa que:

$$\begin{aligned} (z_i)' &= (z')_i \\ (z_{ij})' &= ((z_i)')_j = (z')_{ij} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Esta característica é uma extensão directa da propriedade bem conhecida do cálculo das variações, em que a ordem da variação e das derivadas parciais pode ser alterada. Assume-se que as condições fronteira não dependem do projecto.

Considerando agora que a forma de energia bilinear da equação (3.9) é linear em z e que, dependendo do problema, envolve uma ou duas derivações em ordem a z . Assim, usando a regra da cadeia e as equações (3.13) e (3.15) obtém-se:

$$\frac{d}{d\tau} [a_{x+\tau\delta_x}(z(\xi; x + \tau\delta_x), \bar{z})] \Big|_{\tau=0} = a'_{\delta_x}(z, \bar{z}) + a_x(z', \bar{z}) \quad (3.17)$$

Para qualquer campo de deslocamento virtual fixo, \bar{z} , e tendo variações dos dois lados da equação (3.9) e usando as equações (3.13) e (3.14) tem-se:

$$a_x(z', \bar{z}) = l'_{\delta_x}(\bar{z}) - a'_{\delta_x}(z, \bar{z}) \quad (3.18)$$

Considere-se agora uma medida da resposta estrutural que pode ser escrita na forma integral através da equação (3.19).

$$\psi = \int_{\Omega} g(z, \nabla z, x) d\Omega \quad (3.19)$$

Onde ∇z representa o gradiente de z e a função g é continuamente diferenciável. Para alguns problemas, o termo da equação (3.19), ∇z , pode ser substituído pelas segundas derivadas de z :

$$\begin{aligned} \psi' &\equiv \frac{d}{d\tau} \left[\int_{\Omega} g(z(\xi; x + \tau\delta_x), \nabla z(\xi; x + \tau\delta_x), x + \tau\delta_x) d\Omega \right] \Big|_{\tau=0} \\ \psi' &\equiv \int_{\Omega} [g_z z' + g_{\nabla z} \nabla z' + g_x \delta_x] d\Omega \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para obter uma expressão explícita de ψ' em ordem a δ_x , torna-se útil reescrever os dois primeiros termos da equação (3.20) em ordem a δ_x . Uma equação adjunta é introduzida, substituindo z' na equação (3.20) por um campo de deslocamento virtual, λ' , e igualando os termos que envolvam a forma de energia bilinear $a_x(\lambda, \bar{\lambda})$. A equação adjunta obtida para a variável adjunta é:

$$a_x(\lambda, \bar{\lambda}) \equiv \int_{\Omega} [g_z \lambda' + g_{\nabla z} \nabla \lambda] d\Omega \quad (3.21)$$

Uma vez que, $\bar{\lambda}$, é um campo de deslocamentos virtual, pode ser substituído por z' , ou seja:

$$a_x(\lambda, z') \equiv \int_{\Omega} [g_z z' + g_{\nabla z} \nabla z'] d\Omega \quad (3.22)$$

Da mesma forma, a equação (3.18) pode ser avaliada para \bar{z} igual a λ , ficando:

$$a_x(z', \lambda) = l'_{\delta_x}(\lambda) - a'_{\delta_x}(z, \lambda) \quad (3.23)$$

No entanto, a forma de energia bilinear é simétrica, como se pode verificar o lado esquerdo da equações (3.22) e (3.23) são iguais, obtendo-se assim o resultado desejado:

$$\int_{\Omega} [g_z z' + g_{\nabla z} \nabla z'] d\Omega = l'_{\delta_x}(\lambda) + a'_{\delta_x}(z, \lambda) \quad (3.24)$$

Substituindo este resultado na equação (3.20) é possível obter uma expressão para a sensibilidade da resposta, ψ , que pode ser calculada uma vez obtido o actual campo de deslocamentos z através da equação (3.9), e o campo de deslocamentos adjunto, λ , através da equação adjunta (3.21).

$$\psi = \int_{\Omega} g_x \delta_x d\Omega + l'_{\delta_x}(\lambda) + a'_{\delta_x}(z, \lambda) \quad (3.25)$$

A equação (3.25) juntamente com as equações (3.9) e (3.21) podem agora ser discretizadas pelo método dos elementos finitos e, se possível, com a mesma malha. A sensibilidade de resposta pode ser calculada, respeitando os seguintes passos:

1. Resolver um sistema de equações lineares, resultantes da equação (3.9) e armazenar a matriz de rigidez na forma decomposta.
2. Calcular o vector de carga resultante da equação (3.21) que depende da resposta estrutural solicitada, e efectuar uma repetição da análise da estrutura com a mesma matriz de rigidez e considerando um vector de carga diferente para cada resposta.
3. Calcular a sensibilidade desejada fazendo o somatório dos três termos da equação (3.25) recorrendo a z e λ obtidos anteriormente. Repare-se que os últimos dois termos da equação (3.25) apenas dizem respeito ao produto interno entre o vector e a matriz, e somente aos termos originais do vector de carga e da matriz de rigidez que dependem do parâmetro x .

A fim de esclarecer o uso da equação (3.25), no cálculo da sensibilidade do deslocamento na extremidade da viga encastrada da Fig.3.1, em relação à variação da inércia da secção transversal, I e em relação à variação do módulo de elasticidade, E , seguem-se três passos:

1. A viga deve ser analisada e a solução de deslocamentos, z , para as cargas aplicadas deve ser armazenada.
2. Define-se uma equação adjunta com a ajuda da matriz de rigidez e um vector de carga adjunto. Esta carga adjunta é calculada a partir da equação (3.21) e depende da resposta estrutural. Para um deslocamento num nó ao longo de um grau de liberdade, a carga adjunta corresponde a uma carga unitária aplicada no nó e no grau de liberdade pretendido. Ao resolver a equação adjunta, uma variável adjunta é obtida e armazenada.

3. Calculam-se os três termos da equação (3.25). A resposta g e a carga aplicada, l , não dependem de I e, portanto, os dois primeiros termos de (3.25) são zero. O terceiro termo é obtido retirando a variação da equação (3.10) em relação a I , e a E , e obtendo respectivamente as equações (3.26) e (3.27).

$$a'_{\delta_x}(z, \lambda) = \int_0^L E z_{\xi\xi} \lambda_{\xi\xi} d\xi \quad (3.26)$$

$$a'_{\delta_x}(z, \lambda) = \int_0^L I z_{\xi\xi} \lambda_{\xi\xi} d\xi \quad (3.27)$$

Esta equação deve ser calculada para cada elemento finito da viga de modo a obter-se a sensibilidade pretendida.

3.2 Método das diferenças finitas

O método de diferenças finitas é um método que permite calcular uma aproximação às derivadas mencionadas anteriormente. A grande vantagem deste método é poder ser utilizado mesmo que a derivada analítica não seja conhecida. A forma mais simples de calcular os gradientes de uma função pelo método das diferenças finitas é usar a aproximação de primeira ordem, denominada diferença progressiva, dada pela seguinte equação.

Seja a função $f(x)$, onde x é a variável de projecto.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.28)$$

Outra aproximação por diferenças finitas bastante usada é a diferença finita central, que se mostra em (3.28).

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad (3.29)$$

Um dos problemas na utilização deste método é a escolha do tamanho da perturbação Δx , sendo que um valor muito pequeno leva a erros de arredondamento, causados pela forma como os números reais são representados nos computadores. Por outro lado, um valor elevado leva a erros de truncamento pois a derivada só é exacta quando Δx tende para zero. Perturbações

relativas entre 10^{-4} a 10^{-8} geralmente levam a bons resultados, o suficiente para aplicações práticas.

O grande problema deste método é o custo computacional. No caso de se usarem modelos estruturais de elementos finitos é necessário fazer uma nova análise completa para cada variável existente quando se usam diferenças progressivas ou duas análises quando se usam diferenças centrais. No entanto é de fácil implementação e por isso muito usado em otimização estrutural e em análise de fiabilidade.

Exemplo

Tomando como exemplo a viga representada na Fig.3.1 e fornecendo alguns dados sobre a mesma, torna-se fácil calcular as derivadas (em ordem a I e E) usando os dois métodos (diferenças finitas e contínuo) e comparando os seus resultados com os valores obtidos a partir do calculo analítico. Na tabela

Dados:

$$P = 100 \text{ N}$$

$$A = 0,0026 \text{ m}^2$$

$$I = 5,5498 \times 10^{-7} \text{ mm}^4$$

$$E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$$

| Método | | $d\delta/dI$ | $d\delta/dE$ |
|--------------------|------------------------|-----------------------|---------------------------|
| Analítico | | $4,32896 \times 10^3$ | $1,20124 \times 10^{-14}$ |
| Diferenças Finitas | $\Delta x_1 = 10^{-3}$ | $4,32464 \times 10^3$ | $1,20004 \times 10^{-14}$ |
| | $\Delta x_2 = 10^{-4}$ | $4,32853 \times 10^3$ | $1,20112 \times 10^{-14}$ |
| | $\Delta x_3 = 10^{-5}$ | $4,32892 \times 10^3$ | $1,20123 \times 10^{-14}$ |
| Contínuo | | $4,32896 \times 10^3$ | $1,20124 \times 10^{-14}$ |

Tabela 3-1 - Comparação dos métodos de sensibilidades

É possível verificar que o método contínuo produz resultados para o cálculo das derivadas muito mais precisos do que o método de diferenças finitas.

Com efeito, os resultados calculados pelo método contínuo são exactos, como se pode verificar, por comparação com a solução analítica. Os resultados determinados por diferenças finitas progressivas são apenas aproximados. Verifica-se que a aproximação melhora quando se reduz Δx .

4. Capítulo 4 – Programa de análise de fiabilidade

4.1 Introdução

O programa FORModule, como tem vindo a ser referido ao longo deste trabalho, é um programa que foi concebido em linguagem MATLAB. Seguidamente explica-se em que consiste e quais as suas principais características.

O FORModule tem como principal função calcular a probabilidade de falha em estruturas compostas por vigas 2D utilizando o algoritmo FORM. Associadas às vigas estão 3 tipos de variáveis aleatórias: módulo de elasticidade, momento de inércia e área da secção transversal. Para além destas variáveis, e como é costume em estruturas deste tipo, tornou-se necessário adicionar um outro tipo de variável: a(s) carga(s) exercida(s) sobre a estrutura.

Resumindo, o programa foi desenvolvido para estruturas constituídas por elementos de viga 2D e com 4 tipos de variáveis aleatórias.

Cada uma das variáveis aleatórias tem uma distribuição associada, sendo aceites distribuições do tipo normal, log-normal, gumbel e rayleigh. Estas variáveis podem ainda ter uma correlação entre si, o que tornou a concepção do FORModule ainda mais complexa, pois, como já foi explicado no Capítulo 2, quando existem variáveis correlacionadas é necessário recorrer à transformação de Nataf.

O programa resolve problemas de fiabilidade em que a função de estado limite é analítica ou então está associada ao deslocamento num nó da estrutura. Se a função de estado limite estiver relacionada com o deslocamento num nó da estrutura, o programa pode calcular as derivadas pelo método de sensibilidades que, como se poderá verificar mais adiante, é mais rápido, sendo, por tal facto, uma mais valia para o programa.

4.2 Estrutura do programa

4.2.1 Constituição do programa

Nesta secção apresentam-se todos os ficheiros que resultaram do desenvolvimento e funcionamento do FORModule.

Em consequência de uma análise mais vasta a constituição do programa teve início no ficheiro *form_module.m* que funciona como programa principal, onde todos os passos, desde a interacção com outros ficheiros até à resolução do algoritmo FORM, são efectuados.

À excepção do ficheiro *form_module.m* podemos dividir os ficheiros em 3 partes: a primeira está relacionada com o problema em questão de modo a escolher o melhor percurso; em segundo encontram-se os ficheiros que dizem respeito às distribuições probabilísticas das variáveis aleatórias e a sua correlação; e por fim os ficheiros que terão que ser fornecidos pelo utilizador e o ficheiro que resultará da execução do *form_module.m*, habitualmente designado por "output".

De seguida mostram-se os ficheiros que fazem parte da constituição do programa enquadrados no seu grupo.

| Programa Principal | Funções de Estados Limite | Funções de Distribuição | Função Auxiliar para a Transformação de Nataf |
|---------------------------|----------------------------------|--------------------------------|--|
| form_module.m | f_function.m | fd.m | correlation.m |
| | f_function_matef.m | fcum.d.m | |
| | | invfcum.d.m | |

Tabela 4-1 - Ficheiros que constituem o programa ForModule

| Ficheiros | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| Criados pelo Utilizador | Devolvido pelo Programa |
| *.frm | *.bpc |
| *.inp | |

Tabela 4-2 - Ficheiros criados pelo utilizador e pelo programa

f_function.m e f_function_matef.m - o utilizador ao escolher o método de cálculo da função de estado limite, analítico ou MEF, indica por qual dos ficheiros deverá o programa seguir o seu trajecto.

No grupo "Funções de Distribuição" estão outros 3 ficheiros relacionados com a distribuição de probabilidade associada às variáveis aleatórias. Para cada distribuição são necessários 3 ficheiros. O programa foi concebido para 4 tipos de distribuição (normal, log-normal, gumbel e rayleigh) no entanto, podem-se facilmente adicionar mais tipos de distribuições, sendo para isso necessário criar para cada nova distribuição 3 ficheiros como os que seguidamente se explicam.

fd.m - ficheiro que contém a fórmula matemática para a função densidade de probabilidade que se pretende usar ou adicionar.

fcumd.m - ficheiro que contém a fórmula matemática para a função de distribuição acumulada que se pretende usar ou adicionar.

invfumd.m - ficheiro que contém a fórmula matemática para a função inversa da distribuição acumulada que se pretende usar ou adicionar.

De notar que para uma melhor organização deverão ser dados nomes de acordo com a distribuição pretendida, por exemplo nas distribuições usadas nesta dissertação os nomes escolhidos foram os seguintes:

Para distribuição normal - **fdn.m**, **fcumdn.m**, **invfumdⁿ.m**.

Para distribuição normal padrão - **fdnp.m**, **fcumdn^p.m**, **invfumdnp.m**.

Para distribuição log-normal - **fdlog.m**, **fcumdlog.m**, **invfumdlog.m**.

Para distribuição gumbel - **fdgumbel.m**, **fcumd^gumbel.m**, **invfumd^gumbel.m**.

Para distribuição rayleigh - **fdrayleigh.m**, **fcumdrayleigh.m**, **invfumd^rayleigh.m**.

No grupo "Função Auxiliar para Transformação de Nataf" encontra-se o ficheiro *correlation.m* onde, caso existam variáveis aleatórias com correlação, o programa recorre a este ficheiro para efectuar a transformação de Nataf.

No grupo "Ficheiros" estão os 2 ficheiros que serão criados pelo utilizador, e ainda um ficheiro a partir do qual se fará a leitura final após a execução do programa.

*.frm - ficheiro fornecido pelo utilizador onde estarão todos os dados sobre as variáveis envolvidas no problema em estudo.

*.inp - ficheiro fornecido pelo utilizador onde se podem encontrar todos os dados relativos ao modelo de elementos finitos usado no problema em questão.

No capítulo 4.3.3 será feita uma abordagem mais detalhada sobre a concepção dos dois ficheiros que terão de ser criados pelo utilizador.

*.bpc - ficheiro onde serão automaticamente registados os resultados pretendidos, nomeadamente, a probabilidade de falha, o índice de fiabilidade e o número de iterações que foram necessários para se atingir a convergência.

4.3 Manual de utilização

Eis que se chega, do ponto de vista do utilizador, à parte mais importante de todo o trabalho, a sua utilização! A melhor forma encontrada para explicar como se utiliza o FORModule é exemplificar usando um problema em concreto. O problema proposto para esta demonstração foi um exemplo encontrado no programa FERUM, concebido por Der Kiureghian da Universidade de Berkeley na Califórnia, (Der Kiureghian, 2006).

A utilização do FORModule passa, essencialmente, por duas simples tarefas: criação de dois ficheiros (*.frm e *.inp) e a escolha das opções a utilizar, quer no cálculo das derivadas (método das diferenças finitas ou análise de sensibilidades), quer no tipo de função (analítica ou MEF). Estas decisões serão efectuadas no ficheiro *form_module.m*.

Antes de mais, o conhecimento do problema em causa torna-se uma prioridade, uma vez que os dados necessários para originar os ficheiros *.frm e *.inp derivam da informação retirada do problema. Assim, o primeiro passo desta demonstração é estudar o problema em questão e retirar o maior número de informações possível sobre o mesmo.

4.3.1 Dados do problema

Primeiramente interessa saber quais as características do problema que devem ser procuradas pelo utilizador, a fim de originar convenientemente os ficheiros que permitam obter os resultados correctos por parte do FORModule.

Sobre o modelo de elementos finitos da estrutura importa saber o número de nós e de elementos bem como as dimensões que a caracterizam, assim como os apoios que a constituem. Importa também saber, os módulos de elasticidade (E), os momentos de inércia (I) e as áreas da secção transversal (A) de cada elemento.

Dados que também requerem uma especial atenção são as forças e/ou cargas distribuídas aplicadas nos nós e os respectivos valores.

Em relação às variáveis aleatórias é necessário saber quantas estão presentes no problema, e para cada uma delas, importa saber as 3 características seguintes: distribuição probabilística, média e desvio padrão.

No que respeita à função de estado limite é essencial que esta seja conhecida, uma vez que o deslocamento num determinado nó calculado pelo FORModule servirá de comparação com a função de estado limite original.

O problema seguinte é um dos exemplos apresentados no programa FERUM e irá ser designado por Exemplo 1. De seguida explica-se o problema.

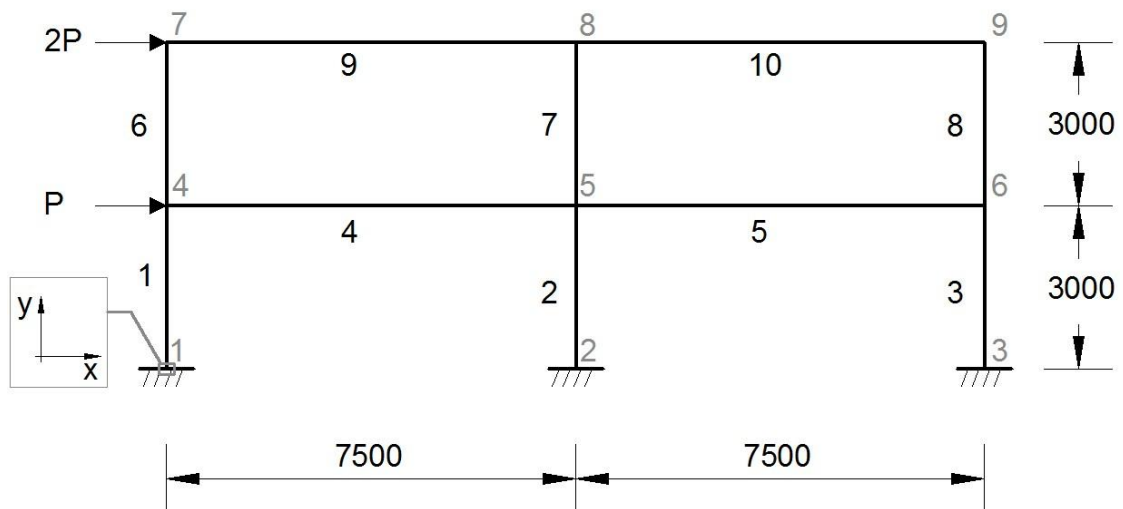


Fig. 4.1 - Exemplo 1 - Pórtico de 2 andares

Na Fig.4.1 está representado um pórtico de 2 andares composto por 9 nós e 10 elementos.

Cada elemento tem um determinado valor para o módulo de elasticidade, momento de inércia e área da secção transversal, e cada um destes parâmetros corresponde a uma variável aleatória. Ora, se existem 10 elementos e se cada elemento tem 3 variáveis aleatórias, então existem 30 variáveis aleatórias. Adicionando a variável aleatória associada à força aplicada (P) perfaz-se um total de 31 variáveis aleatórias.

A variável aleatória P tem uma distribuição aleatória do tipo log-normal. Todas as outras têm uma distribuição do tipo normal.

Nos nós 7 e 4 estão aplicadas as forças P e 2P, respectivamente. De referir que a intensidade destas forças é vista como uma variável apenas.

A função de estado limite que foi fornecida pelo FERUM é a seguinte:

$$g(x) = 45 - \delta_{9x}$$

Sendo que δ_{9x} é o deslocamento do nó 9 segundo o eixo do x.

| Nº da Variável | Tipo / Nome da Variável | | Distribuição | Média | Desvio Padrão |
|----------------|-------------------------|-----|--------------|-------------------|-------------------|
| 1 | Elasticidade | E1 | Normal | 200000 | 20000 |
| 2 | Elasticidade | E2 | Normal | 200000 | 20000 |
| 3 | Elasticidade | E3 | Normal | 200000 | 20000 |
| 4 | Elasticidade | E4 | Normal | 200000 | 20000 |
| 5 | Elasticidade | E5 | Normal | 200000 | 20000 |
| 6 | Elasticidade | E6 | Normal | 200000 | 20000 |
| 7 | Elasticidade | E7 | Normal | 200000 | 20000 |
| 8 | Elasticidade | E8 | Normal | 200000 | 20000 |
| 9 | Elasticidade | E9 | Normal | 200000 | 20000 |
| 10 | Elasticidade | E10 | Normal | 200000 | 20000 |
| 11 | Inércia | I1 | Normal | $0,5 \times 10^9$ | $0,5 \times 10^8$ |
| 12 | Inércia | I2 | Normal | $0,5 \times 10^9$ | $0,5 \times 10^8$ |
| 13 | Inércia | I3 | Normal | $0,5 \times 10^9$ | $0,5 \times 10^8$ |
| 14 | Inércia | I4 | Normal | $0,5 \times 10^9$ | $0,5 \times 10^8$ |
| 15 | Inércia | I5 | Normal | $0,5 \times 10^9$ | $0,5 \times 10^8$ |
| 16 | Inércia | I6 | Normal | $0,5 \times 10^9$ | $0,5 \times 10^8$ |

| | | | | | |
|----|---------|-----|------------|-------------------|-------------------|
| 17 | Inércia | I7 | Normal | $0,5 \times 10^9$ | $0,5 \times 10^8$ |
| 18 | Inércia | I8 | Normal | $0,5 \times 10^9$ | $0,5 \times 10^8$ |
| 19 | Inércia | I9 | Normal | $0,5 \times 10^9$ | $0,5 \times 10^8$ |
| 20 | Inércia | I10 | Normal | $0,5 \times 10^9$ | $0,5 \times 10^8$ |
| 21 | Área | A1 | Normal | 5000 | 500 |
| 22 | Área | A2 | Normal | 5000 | 500 |
| 23 | Área | A3 | Normal | 5000 | 500 |
| 24 | Área | A4 | Normal | 5000 | 500 |
| 25 | Área | A5 | Normal | 5000 | 500 |
| 26 | Área | A6 | Normal | 5000 | 500 |
| 27 | Área | A7 | Normal | 5000 | 500 |
| 28 | Área | A8 | Normal | 5000 | 500 |
| 29 | Área | A9 | Normal | 5000 | 500 |
| 30 | Área | A10 | Normal | 5000 | 500 |
| 31 | Força | P | Log-Normal | 300000 | 45000 |

Tabela 4-3 - Variáveis aleatórias existentes no Exemplo 1

Na tabela 4-4 estão representados os nós que formam os elementos e as variáveis que definem o valor do módulo de elasticidade, inércia e área.

| Nº do Elemento | Nós | | Variáveis | | |
|----------------|-----|---|-----------|-----|-----|
| | | | | | |
| 1 | 1 | 4 | E1 | I1 | A1 |
| 2 | 2 | 5 | E2 | I2 | A2 |
| 3 | 6 | 3 | E3 | I3 | A3 |
| 4 | 4 | 5 | E4 | I4 | A4 |
| 5 | 5 | 6 | E5 | I5 | A5 |
| 6 | 4 | 7 | E6 | I6 | A6 |
| 7 | 5 | 8 | E7 | I7 | A7 |
| 8 | 6 | 9 | E8 | I8 | A8 |
| 9 | 7 | 8 | E9 | I9 | A9 |
| 10 | 8 | 9 | E10 | I10 | A10 |

Tabela 4-4 - Características dos elementos do Exemplo 1

4.3.2 Escolha das opções a utilizar

Como foi anteriormente explicado, o utilizador pode escolher uma de 4 opções. Terá que ser feito um ajuste no ficheiro *form_module.m* para se indicar a alteração pretendida.

A primeira decisão tem que ver com o modo como é calculada a função de estado limite, ou se opta pelo método analítico ou pelo método dos elementos finitos. Caso se decida pelo método analítico terá que ser introduzido o algarismo 1 à frente de `F_FUNCT_TYPE` (alterações a serem efectuadas no ficheiro *form_module.m*). Caso se pretenda recorrer ao método de elementos finitos introduz-se o algarismo 2, como está exemplificado em baixo.

Após esta opção, mais uma decisão é necessária, desta feita sobre qual o método a usar para calcular os gradientes. A decisão terá que recair sobre uma das duas opções: método de diferenças finitas ou análise de sensibilidades (método contínuo). Como um dos interessantes aspectos deste trabalho é comparar o tempo decorrido entre estes dois métodos, todos os exemplos apresentados neste trabalho foram resolvidos por ambos os métodos. Neste caso, por ser uma demonstração, decidiu-se optar pelo método mais comum, o método de diferenças finitas, assim, basta inserir o algarismo 1 à frente de `SENSIT_TYPE`.

Assim o utilizador deverá inserir os algarismos pretendidos consoantes as escolhas efectuadas. Para as escolhas feitas neste exemplo, este deverá ser o aspecto:

```
% Type of failure function (1-analitical,2-f.e.)  
F_FUNCT_TYPE= 2;  
%  
% Type of sensitivities (1-finite differences,2-continuum method)  
SENSIT_TYPE= 1;
```

4.3.3 Criar e definir os ficheiros *.inp e *.frm

Uma vez feitas as alterações no ficheiro *form_module.m*, resta agora criar os mencionados ficheiros *.inp e *.frm. Dado que o problema se designou Exemplo 1 os ficheiros chamar-se-ão *exemplo_1.inp* e *exemplo_1.frm*.

4.3.3.1 *.inp

Este ficheiro vai conter toda a informação do problema no que respeita a 5 áreas que em seguida se enumeram:

1. Nós
2. Elementos
3. Módulos de elasticidade e Secções (Áreas e Inércias)
4. Forças e cargas aplicadas
5. Apoios

1. (Nós) - A primeira informação que é necessário introduzir diz respeito à estrutura do problema, mais propriamente os nós e as suas coordenadas. O pórtico é constituído por 9 nós, esta informação será introduzida na primeira linha do ficheiro, portanto aqui introduz-se o número de nós existentes no problema. As 9 linhas seguintes indicam as coordenadas destes mesmos nós (desde o nó 1 até ao 9). A primeira coluna é referente ao eixo x, e a segunda é referente ao eixo y.

| | | |
|----|-------|------|
| 1 | 9 | |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 7500 | 0 |
| 4 | 15000 | 0 |
| 5 | 0 | 3000 |
| 6 | 7500 | 3000 |
| 7 | 15000 | 3000 |
| 8 | 0 | 6000 |
| 9 | 7500 | 6000 |
| 10 | 15000 | 6000 |

Fig. 4.2 - Definição dos nós

Para o exemplo em questão, a informação referente aos nós é apresentada na Fig.4.2.

2. (Elementos) - Após a indicação anterior será a vez dos elementos. Como existem 10 elementos, surgirá na linha seguinte, o número de elementos existentes no pórtico (10). Nas próximas 10 linhas terão que se introduzir 4 dados dispostos em 4 colunas.

Nas primeiras duas colunas indicam-se os nós que constituem os elementos. Por exemplo, observando a Tabela 4-3 o elemento 1 é constituído pelos nós 1 e 4, pelo que na linha respeitante ao elemento 1 deverá constar essa informação.

Na terceira e quarta colunas indica-se a que módulo de elasticidade e secção está relacionado o elemento. No caso do elemento 1, este tem um módulo de elasticidade correspondente à variável aleatória E1 e uma secção correspondente às variáveis aleatórias A1 e I1.

Para o exemplo em questão, a parte referente aos elementos apresenta-se na Fig.4.3.

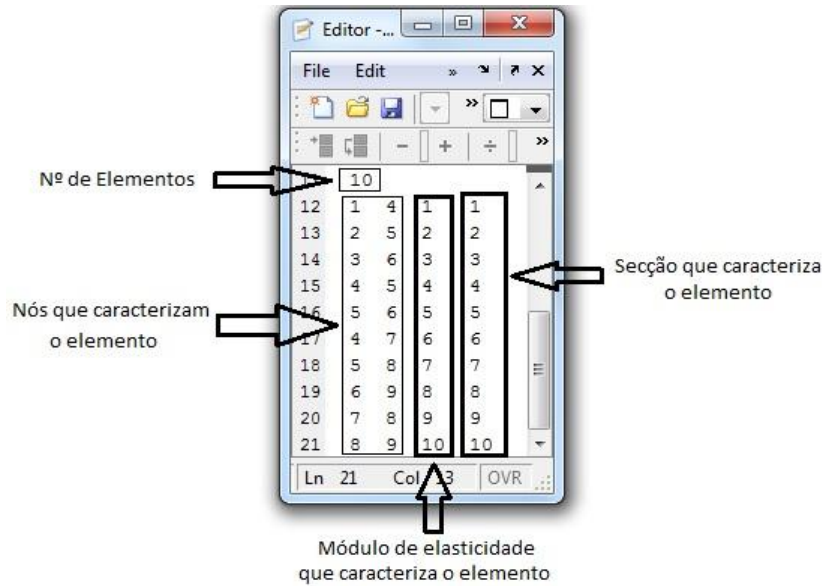


Fig. 4.3 - Definição dos elementos

3. (Módulos de elasticidade e Secções) - Em relação aos módulos de elasticidade e secções dos elementos, o processo é semelhante aos anteriores. Na primeira linha insere-se o número de módulos de elasticidade, neste caso, 10. As próximas 10 linhas são referentes a cada um dos módulos de elasticidade, e apenas terá que ser introduzida uma coluna que indica o valor desse módulo de elasticidade. No caso E1 o valor médio é 200000, como se pode verificar na Tabela 4-2.

De notar que no grupo anterior já existe informação sobre os módulos de elasticidade pelo que deverão estar coerentes com este grupo.

No que diz respeito às secções, o processo é idêntico ao anterior, sendo que existem 2 colunas que deverão ser preenchidas. A primeira com o valor médio da área e a segunda com o valor médio do momento de inércia correspondente. No caso do Exemplo 1 a secção 1 é composta por A1 e I1, com seus valores médios respectivamente iguais a 5000 e a $0,5 \times 10^9$.

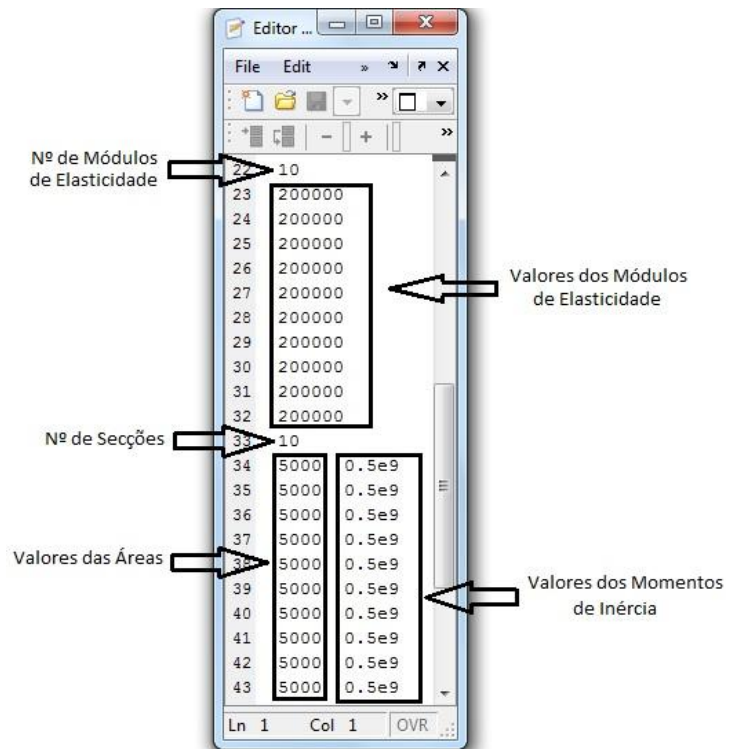


Fig. 4.4 - Definição dos módulos de elasticidade e das secções

Para o exemplo em questão, a parte referente às secções mostra-se na Fig.4.4.

4. (Forças e cargas aplicadas) - No que respeita às forças terão que ser introduzidas três tipos de informações, uma sobre o factor de carga e o valor das forças, outra sobre o número de forças aplicadas, os nós em que estão aplicadas e o seu sentido (x ou y), e ainda uma outra que diz respeito às cargas distribuídas.

Primeiro tem que se analisar quantos factores de carga existem. No problema em estudo existe apenas um factor de carga correspondente à única variável aleatória do tipo força (P). Assim, a primeira linha terá o algarismo 1 e conseqüentemente terá apenas uma linha por preencher onde estará o valor médio dessa força, que neste caso é de 300000. Apesar de existirem duas forças

neste problema, ambas dizem respeito à mesma variável aleatória, e é por esta razão que existe apenas um factor de carga.

Em relação às forças propriamente ditas, como já é habitual, na primeira linha introduz-se o número de forças que existem, neste caso 2. E nas duas linhas que se seguem existem 5 colunas que terão de ser preenchidas.

Na primeira coluna a informação que deverá ser introduzida é sobre os nós onde estão aplicadas as forças, neste caso estão no nó 4 e 7.

A segunda coluna deverá conter informação sobre o factor de carga associado à força, neste caso ambas as forças estão

associadas ao mesmo factor de carga introduzido no passo anterior.

As restantes 3 colunas dizem respeito ao valor e sentido da força. Se for efectuada uma análise à força aplicada no nó 7 percebe-se que esta tem o dobro do valor médio da variável aleatória P , $300000 \times 2 = 600000$, e que está aplicada no sentido do eixo do x . As colunas 3, 4 e 5 dizem respeito, respectivamente, aos eixos x , y e z . Como a força está aplicada no sentido do eixo do x as colunas 4 e 5 irão ter o algarismo 0. Na terceira coluna irá aparecer o algarismo 2 que significa que o factor de carga terá que ser multiplicado por 2 no que diz respeito à força aplicada no nó 7.

Em relação às cargas distribuídas, não existem e por isso aparecerá um 0 na linha correspondente.



Fig. 4.5 - Definição das forças e cargas aplicadas

5. (Apoios) - Por último, os apoios e os seus graus de liberdade serão inseridos neste grupo. A partir da Fig.4.1 é perceptível a existência de 3 apoios, onde cada um tem 1 grau de liberdade em ambos os sentidos (x e y) e no momento em

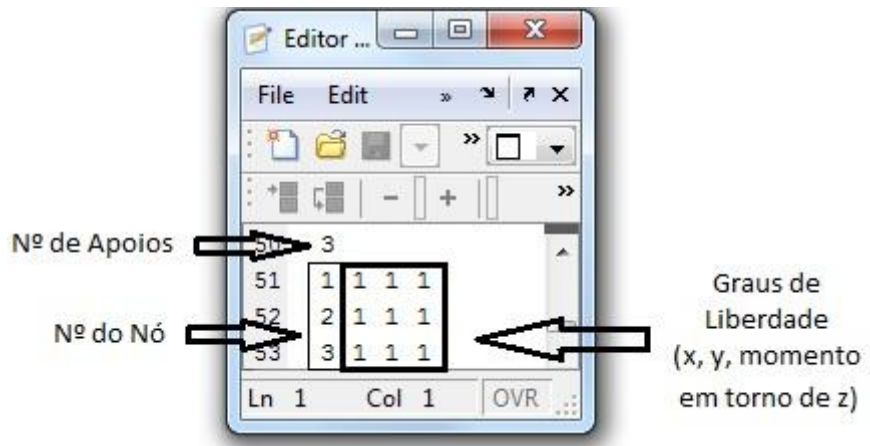


Fig. 4.6 - Definição dos apoios e seus graus de liberdade

torno de z. Assim a primeira coluna, das 3 linhas que terão de ser inseridas, dirá respeito ao apoio em questão (1, 2 ou 3). As restantes 3 colunas dizem respeito aos graus de liberdade em x, z e o momento em torno de z, respectivamente. Será inserido o algarismo 1 caso exista grau de liberdade, caso contrário o algarismo 0 será introduzido.

4.3.3.2 *.frm

Este ficheiro vai conter toda a informação do problema referente às variáveis aleatórias.

Primeiro indicam-se quantas variáveis aleatórias existem no problema. Neste exemplo, como já foi referido, existem 31. O aspecto das 31 linhas seguintes deverá ser o apresentado na Fig.4.7.

Cada linha tem 5 colunas onde terá que se inserir a seguinte informação:

1ª coluna - tipo de distribuição probabilística associada à variável aleatória. O FORModule, como já foi referido anteriormente, foi concebido para 4 tipos de distribuição (normal, log-normal, gumbel e rayleigh). Terá que ser indicado qual o tipo de distribuição para cada uma das 31 variáveis deste exemplo. Assim atribuiu-se um algarismo para cada um dos tipos de distribuição:

2-Normal; 3-Log-normal; 7-Gumbel; 11-Rayleigh.

2ª coluna - tipo de variável aleatória. Para os 4 tipos de variáveis aleatórias que existem no problema foram atribuídos algarismos da seguinte forma:

1-Módulo de elasticidade; 2-Momento de inércia; 3-Área da secção; 4-Força aplicada.

3ª coluna - uma vez que a indicação sobre o tipo de variável já foi introduzida, resta agora saber a qual variável se está a referir, ou seja, no Exemplo 1 existem 10 módulos de elasticidade e portanto essa informação tem que ser mais específica indicando o número de elementos a que diz respeito. Uma vez que essa informação já foi introduzida no ficheiro *.inp, apenas terá que haver o cuidado de manter a mesma ordem nos dois ficheiros.

4ª coluna - média da variável aleatória

5ª coluna - desvio padrão da variável aleatória

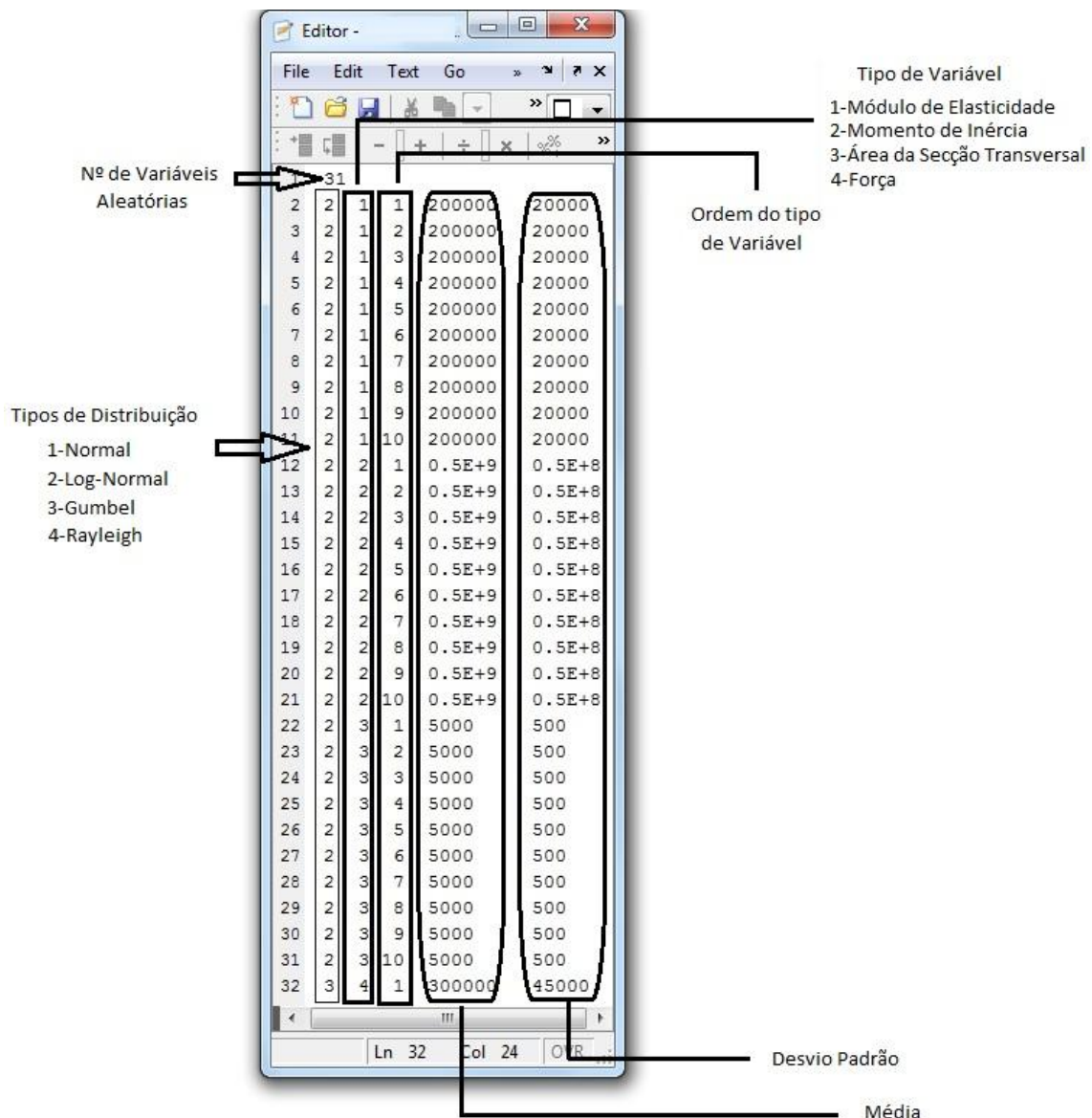


Fig. 4.7 - Definição das variáveis aleatórias

Falta agora inserir alguma informação sobre as variáveis com correlação. Primeira linha para informar quantas variáveis têm correlação, no caso do Exemplo 1 não existe nenhuma, no entanto, vamos simular uma situação em que existem 2 correlações.

O exemplo tem as seguintes características: as variáveis 1 e 3 têm uma correlação de 0,5 e as variáveis 2 e 4 têm uma correlação de 0,9 assim, para este novo caso ficaria como se demonstra na Fig.4.8.

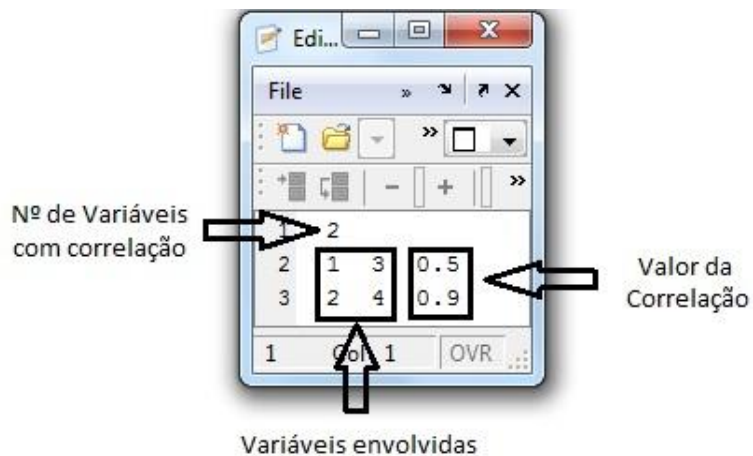


Fig. 4.8 - Definição das variáveis correlacionadas

Por último basta indicar, pela ordem descrita, o nó onde se pretende calcular o deslocamento, o seu sentido, e o valor limite para esse deslocamento. Neste caso esse valor é 45 como se pode verificar a partir da função de estado limite. O nó pretendido é o nó 9 e o sentido é no eixo x ($1 = x, 2 = y$).

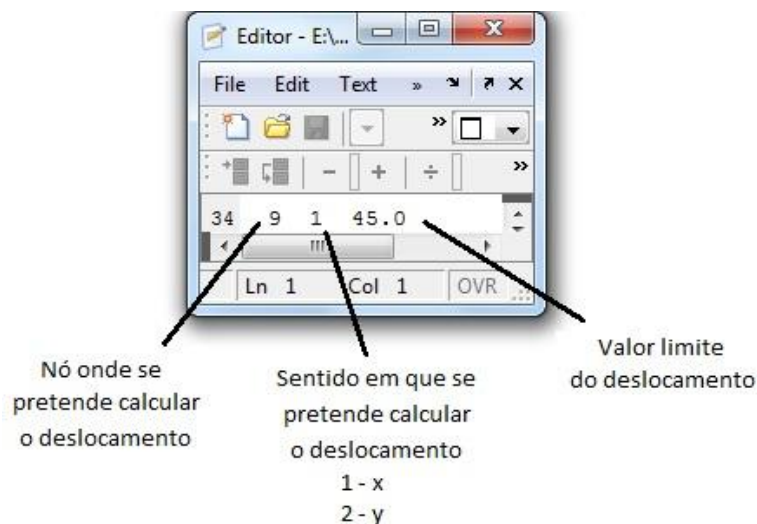


Fig. 4.9 - Definição do nó, sentido e valor do deslocamento

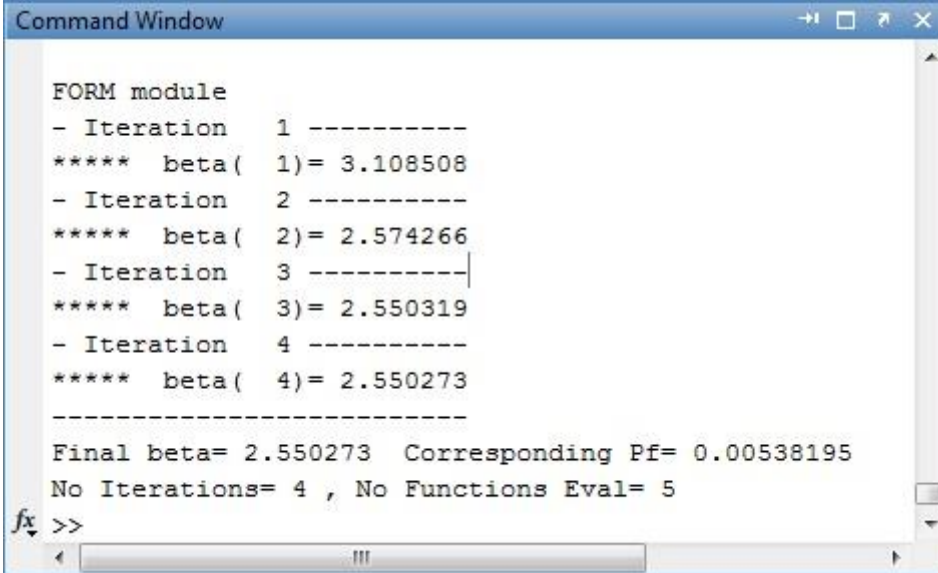
E está assim finalizada a introdução de dados para o Exemplo 1.

4.4 Visualização de resultados

Após executar o programa aparece na janela de comandos do MATLAB alguma informação sobre os resultados. A informação disponível é a seguinte:

- Número de iterações necessárias até se ter atingido a convergência,
- O valor do índice de fiabilidade para cada uma das iterações,
- Os valores finais do índice de fiabilidade e da probabilidade de falha.

Na Fig.4.2 mostra-se a linha de comandos do MATLAB após determinar a fiabilidade do exemplo 1.



```
Command Window

FORM module
- Iteration 1 -----
***** beta( 1)= 3.108508
- Iteration 2 -----
***** beta( 2)= 2.574266
- Iteration 3 -----
***** beta( 3)= 2.550319
- Iteration 4 -----
***** beta( 4)= 2.550273
-----
Final beta= 2.550273 Corresponding Pf= 0.00538195
No Iterations= 4 , No Functions Eval= 5
fx >>
```

Fig. 4.10 - linha de comandos do MATLAB após correr um exemplo

O programa cria também o ficheiro *.bpc onde se encontra disponível informação mais detalhada sobre os resultados.

5. Capítulo 5 - Exemplos

De modo a validar os resultados obtidos pelo FORModule, foi efectuada uma pesquisa bibliográfica sobre fiabilidade de estruturas. Entre os artigos encontrados, vários continham problemas com estruturas compostas por elementos de viga 2D, que foram usados para comparar com os resultados obtidos pelo FORModule.

Decidiu-se, então, utilizar três exemplos. O Exemplo 1 já mencionado, o Exemplo 2 foi retirado do artigo (Cheng, 2007) e o Exemplo 3 é mencionado em (Guan, 2001).

Para cada um dos exemplos serão apresentados os resultados da probabilidade de falha retirados dos artigos mencionados e também os resultados obtidos pelo FORModule.

O MATLAB tem uma função chamada *PROFILE* onde é possível visualizar qual o tempo dispendido em cada função. Esta utilidade foi accionada no FORModule desde o início da resolução do algoritmo FORM até ser atingida a convergência. Assim, todos os exemplos mencionados são resolvidos quer pelo método de diferenças finitas quer pelo método de sensibilidades, de modo a serem apresentadas as leituras dos tempos dispendidos em ambos os casos, permitindo assim fazer uma análise comparativa.

5.1 Exemplo 1

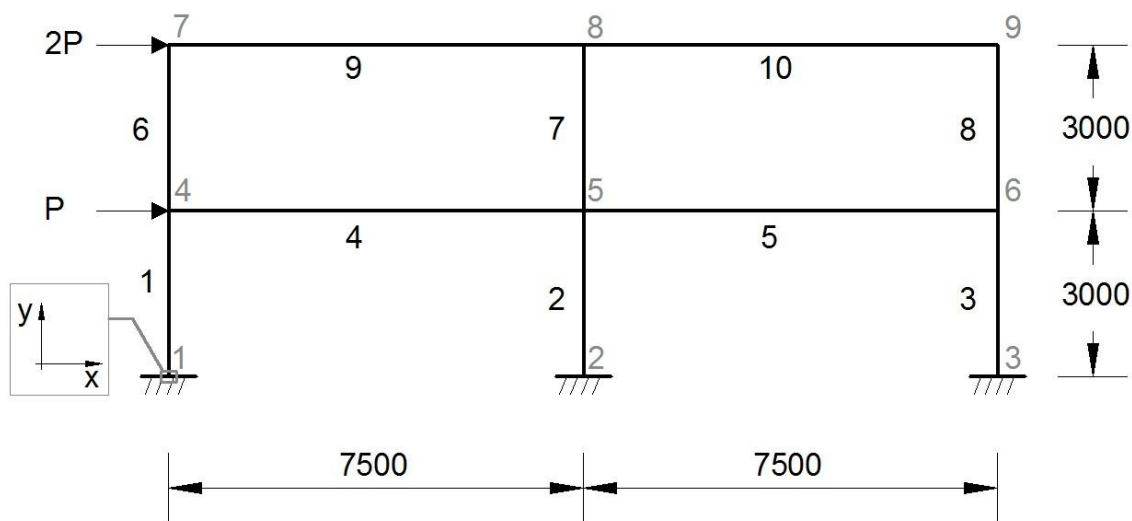


Fig. 5.1 - Exemplo 1 - Pórtico de 2 andares

Este exemplo já foi anteriormente descrito, assim sendo, apresenta-se de seguida uma tabela comparativa com os resultados provenientes do programa FERUM e do FORModule.

| | FERUM | FORModule |
|---------|------------------------|------------------------|
| p_f | 5.381×10^{-3} | 5.382×10^{-3} |
| β | 2.550 | 2.550 |

Tabela 5-1 - Comparação de resultados para o Exemplo 1

Os resultados obtidos pelo FORModule foram bastante precisos quando comparados com os resultados do FERUM. Dado que este foi o primeiro exemplo a ser resolvido neste trabalho, o facto de se ter comprovado que os resultados estavam correctos, impulsionou de uma forma motivacional a pesquisa e o desejo de realizar mais exemplos.

Seguidamente apresentam-se os resultados do tempo dispendido na resolução do algoritmo FORM, ou seja, o tempo necessário para se atingir a convergência. Esta recolha é pertinente pois, como o FORModule pode calcular os gradientes por dois métodos (diferenças finitas ou sensibilidades) tornou-se essencial fazer uma comparação entre ambos.

| Diferenças Finitas (s) | Sensibilidades (s) | Redução Obtida (%) |
|-------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 0.233 | 0.080 | 34.3 |

Tabela 5-2 - Comparação do tempo decorrido pelos dois métodos no Exemplo 1

Como seria de esperar, o tempo que o FORModule demora a resolver o exemplo é muito menor quando se utiliza o método de sensibilidades.

5.2 Exemplo 2

O exemplo que de seguida se descreve foi retirado do artigo (Cheng, 2007) A Fig.5.2 ilustra o exemplo em questão.

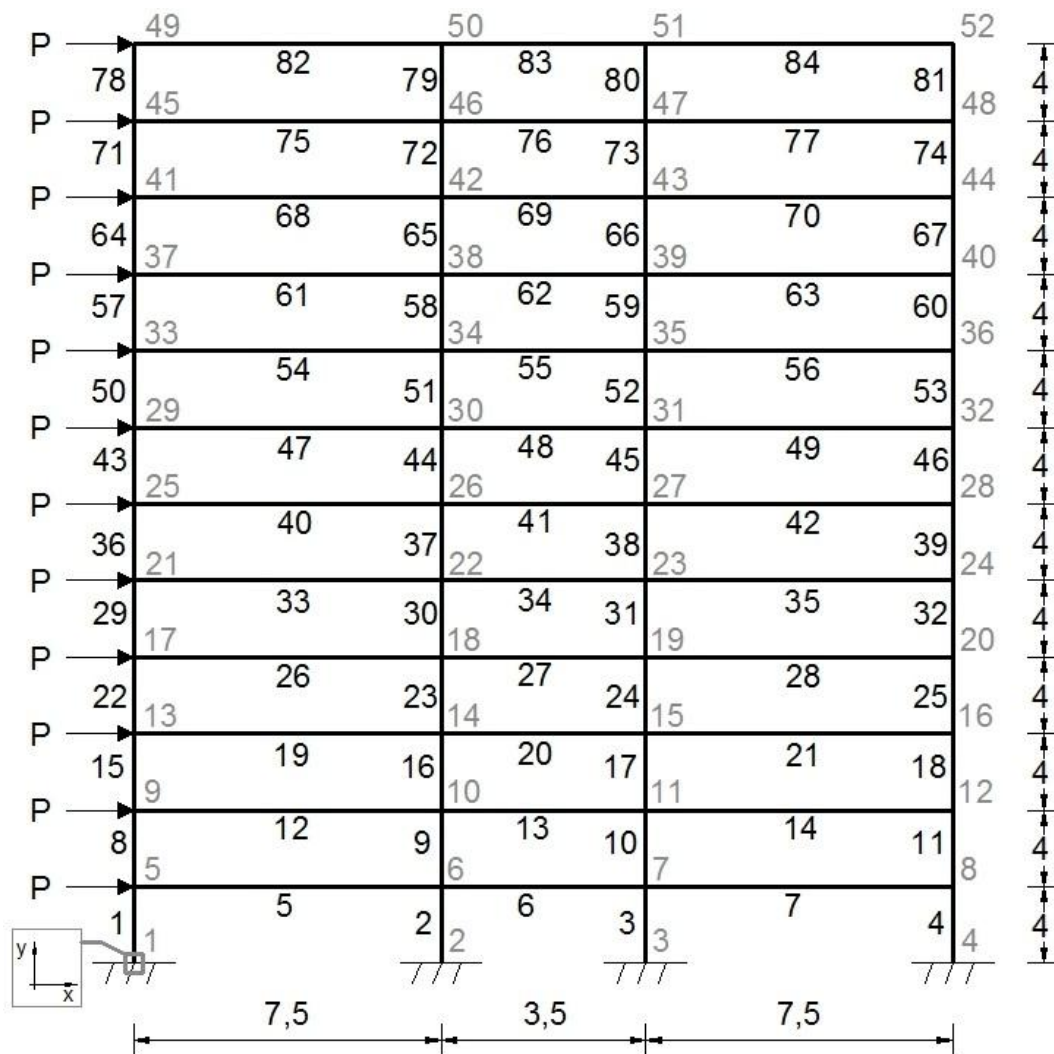


Fig. 5.2 - Exemplo 2 - Pórtico de 12 andares

Na figura está representado um pórtico de 12 andares composto por 52 nós e 84 elementos. Todas as medidas representadas estão em metros.

Existem 6 variáveis aleatórias neste exercício, cinco das quais são áreas de secção transversal (A1, A2, A3, A4, A5). Cada um dos 84 elementos tem uma das cinco áreas atrás mencionadas. O módulo de elasticidade de cada um destes elementos tem o mesmo valor e não é considerado uma variável aleatória sendo o seu valor considerado um parâmetro determinístico.

Um dos aspectos mais importantes deste exemplo, e por isso importa desde já esclarecer, é o facto de os momentos de inércia, que não são contabilizados como variáveis aleatórias, estarem directamente relacionados com as áreas. Esta relação é dada pela expressão:

$$I_i = \alpha_i A_i^2$$

| α_i | $A_i(m^2)$ | $I_i = \alpha_i A_i^2$ |
|----------------------|--------------|------------------------|
| $\alpha_1 = 0.08333$ | $A_1 = 0.25$ | $I_1 = 0.005208$ |
| $\alpha_2 = 0.08333$ | $A_2 = 0.16$ | $I_2 = 0.002133$ |
| $\alpha_3 = 0.08333$ | $A_3 = 0.36$ | $I_3 = 0.0108$ |
| $\alpha_4 = 0.26670$ | $A_4 = 0.2$ | $I_4 = 0.010668$ |
| $\alpha_5 = 0.2$ | $A_5 = 0.15$ | $I_5 = 0.0045$ |

Tabela 5-3 - Valores dos momentos de inércia no Exemplo 2

Para além das áreas, a força aplicada (P) é a sexta variável aleatória existente no problema. Esta força é aplicada em 12 nós mas, tal como no "Exemplo 1", a força é vista como uma única variável aleatória.

A variável (P) tem uma distribuição associada do tipo log-normal, enquanto as restantes variáveis (A1, A2, A3, A4, A5) têm uma distribuição do tipo gumbel.

Neste exemplo interessa estudar o deslocamento no nó 52 segundo o eixo do x, sendo que a função de estado limite é a seguinte:

$$g(x) = 0.096 - \delta_{52x}$$

| Nº da Variável | Tipo / Nome da Variável | | Distribuição | Média | Desvio Padrão |
|----------------|-------------------------|----|--------------|-------|---------------|
| 1 | Área (m ²) | A1 | Log-Normal | 0.25 | 0.025 |
| 2 | Área (m ²) | A2 | Log-Normal | 0.16 | 0.016 |
| 3 | Área (m ²) | A3 | Log-Normal | 0.36 | 0.036 |
| 4 | Área (m ²) | A4 | Log-Normal | 0.20 | 0.020 |
| 5 | Área (m ²) | A5 | Log-Normal | 0.15 | 0.015 |
| 6 | Força (kN) | P | Gumbel | 30 | 7.5 |

Tabela 5-4 - Variáveis aleatórias existentes no problema Exemplo 2

Na tabela 4-8 estão representadas as variáveis existentes nos elementos.

| Variáveis | Elementos | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A1 | 1 | 4 | 8 | 11 | 15 | 18 | 22 | 25 | 29 | 32 | 36 | 39 |
| | 44 | 45 | 51 | 52 | 58 | 59 | 65 | 66 | 72 | 73 | 79 | 80 |
| A2 | 43 | 46 | 50 | 53 | 57 | 60 | 64 | 67 | 71 | 74 | 78 | 81 |
| A3 | 2 | 3 | 9 | 10 | 16 | 17 | 23 | 24 | 30 | 31 | 37 | 38 |
| A4 | 5 | 7 | 12 | 14 | 19 | 21 | 26 | 28 | 33 | 35 | 40 | 42 |
| | 47 | 49 | 54 | 56 | 61 | 63 | 68 | 70 | 75 | 77 | 82 | 84 |
| A5 | 6 | 13 | 20 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 | 69 | 76 | 83 |

Tabela 5-5 - Informação sobre as variáveis existentes nos elementos no Exemplo 2

Uma vez definidos todos os dados do exemplo em questão, segue-se a análise comparativa dos valores indicados em (Cheng, 2007) com os valores obtidos com a execução do programa FORModule.

| | (Cheng, 2007) | FORModule |
|---------|-----------------------|-----------------------|
| p_f | 7.51×10^{-2} | 7.29×10^{-2} |
| β | 1.439 | 1.454 |

Tabela 5-6 - Comparação de resultados Exemplo 2

Uma vez mais os resultados comprovam a precisão que se atinge ao resolver este problema utilizando o FORModule.

Falta, portanto, comparar os tempos decorridos na resolução do algoritmo FORM usando os dois métodos possíveis no cálculo dos gradientes.

| Diferenças Finitas (s) | Sensibilidades (s) | Redução Obtida (%) |
|------------------------|--------------------|--------------------|
| 0.366 | 0.118 | 32.2 |

Tabela 5-7 - Comparação do tempo decorrido pelos dois métodos no Exemplo 2

Neste caso os ganhos continuam a ser bastante significativos, atingindo-se uma percentagem de 32.2%.

5.3 Exemplo 3

O terceiro exemplo a usar nesta dissertação tornou-se essencial para pôr à prova as capacidades do programa, pois é o exemplo mais complexo dos três que foram resolvidos. Este exemplo, que de seguida se explica, é mencionado em (Guan 2001).

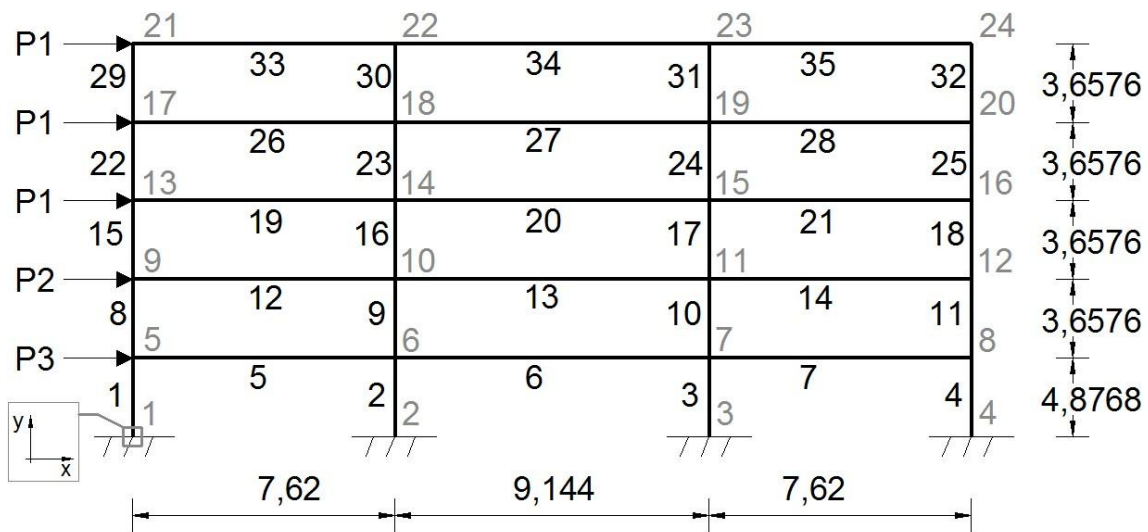


Fig. 5.3 - Exemplo 3 - Pórtico de 5 andares

Na Fig.5.3 está representado um pórtico de 5 andares composto por 24 nós e 35 elementos. Todas as medidas representadas estão em metros.

Neste exercício existem 21 variáveis aleatórias - 3 forças, 2 módulos de elasticidade, 8 momentos de inércia e 8 áreas.

| Forças | Elasticidade | Inércia | Áreas |
|--------|--------------|---------|-------|
| P1 | E4 | I6 | A14 |
| P2 | E5 | I7 | A15 |
| P3 | | I8 | A16 |
| | | I9 | A17 |
| | | I10 | A18 |
| | | I11 | A19 |
| | | I12 | A20 |
| | | I13 | A21 |

Tabela 5-8 - Variáveis aleatórias existentes no problema Exemplo 3

| Nº da Variável | Tipo / Nome da Variável | | Distribuição | Média | Desvio Padrão |
|----------------|-------------------------|-----|--------------|----------|---------------|
| 1 | Força (N) | P1 | Rayleigh | 133446 | 40034 |
| 2 | Força (N) | P2 | Rayleigh | 88964 | 35585 |
| 3 | Força (N) | P3 | Normal | 71171 | 28468 |
| 4 | Elasticidade (GPa) | E4 | Normal | 21.7376 | 1.9152 |
| 5 | Elasticidade (GPa) | E5 | Normal | 23.7965 | 1.9152 |
| 6 | Inércia (m^4) | I6 | Normal | 0.008113 | 0.001036 |
| 7 | Inércia (m^4) | I7 | Normal | 0.011479 | 0.001295 |
| 8 | Inércia (m^4) | I8 | Normal | 0.021318 | 0.002589 |
| 9 | Inércia (m^4) | I9 | Normal | 0.025893 | 0.003021 |
| 10 | Inércia (m^4) | I10 | Normal | 0.010789 | 0.002589 |
| 11 | Inércia (m^4) | I11 | Normal | 0.014068 | 0.003452 |
| 12 | Inércia (m^4) | I12 | Normal | 0.023217 | 0.005610 |
| 13 | Inércia (m^4) | I13 | Normal | 0.025893 | 0.006473 |
| 14 | Área (m^2) | A14 | Normal | 0.312154 | 0.055742 |
| 15 | Área (m^2) | A15 | Normal | 0.371612 | 0.074322 |
| 16 | Área (m^2) | A16 | Normal | 0.505392 | 0.092903 |
| 17 | Área (m^2) | A17 | Normal | 0.557418 | 0.111484 |
| 18 | Área (m^2) | A18 | Normal | 0.252696 | 0.092903 |
| 19 | Área (m^2) | A19 | Normal | 0.290786 | 0.102193 |
| 20 | Área (m^2) | A20 | Normal | 0.372541 | 0.120774 |
| 21 | Área (m^2) | A21 | Normal | 0.418064 | 0.139354 |

Tabela 5-9 - Distribuição, média e desvio padrão das variáveis aleatórias

Cada um dos 35 elementos tem um dos dois módulos de elasticidade (E4 ou E5) e uma das 8 secções (I6 - A14 até I13 - A21).

| Nº do Elemento | Nós | | Variáveis | | |
|-----------------------|------------|----|------------------|-----|-----|
| 1 | 1 | 5 | E5 | I8 | A16 |
| 2 | 2 | 6 | E5 | I9 | A17 |
| 3 | 3 | 7 | E5 | I9 | A17 |
| 4 | 4 | 8 | E5 | I8 | A16 |
| 5 | 5 | 6 | E4 | I12 | A20 |
| 6 | 6 | 7 | E4 | I13 | A21 |
| 7 | 7 | 8 | E4 | I12 | A20 |
| 8 | 5 | 9 | E5 | I7 | A15 |
| 9 | 6 | 10 | E5 | I8 | A16 |
| 10 | 7 | 11 | E5 | I8 | A16 |
| 11 | 8 | 12 | E5 | I7 | A15 |
| 12 | 9 | 10 | E4 | I11 | A19 |
| 13 | 10 | 11 | E4 | I12 | A20 |
| 14 | 11 | 12 | E4 | I11 | A19 |
| 15 | 9 | 13 | E5 | I7 | A15 |
| 16 | 10 | 14 | E5 | I8 | A16 |
| 17 | 11 | 15 | E5 | I8 | A16 |
| 18 | 12 | 16 | E5 | I7 | A15 |
| 19 | 13 | 14 | E4 | I11 | A19 |
| 20 | 14 | 15 | E4 | I12 | A20 |
| 21 | 15 | 16 | E4 | I11 | A19 |
| 22 | 13 | 17 | E5 | I6 | A14 |
| 23 | 14 | 18 | E5 | I7 | A15 |
| 24 | 15 | 19 | E5 | I7 | A15 |
| 25 | 16 | 20 | E5 | I6 | A14 |
| 26 | 17 | 18 | E4 | I10 | A18 |
| 27 | 18 | 19 | E4 | I11 | A19 |
| 28 | 19 | 20 | E4 | I10 | A18 |
| 29 | 17 | 21 | E5 | I6 | A14 |
| 30 | 18 | 22 | E5 | I7 | A15 |
| 31 | 19 | 23 | E5 | I7 | A15 |

| | | | | | |
|----|----|----|----|-----|-----|
| 32 | 20 | 24 | E5 | I6 | A14 |
| 33 | 21 | 22 | E4 | I10 | A18 |
| 34 | 22 | 23 | E4 | I11 | A19 |
| 35 | 23 | 24 | E4 | I10 | A18 |

Tabela 5-10 - Características dos elementos do Exemplo 3

Neste problema existem várias variáveis que têm correlações entre si, o que faz deste exemplo o mais complexo. No total, existem 124 correlações entre variáveis aleatórias. Seguidamente, na tabela 5.11, estão enunciadas essas relações.

| P1 | P2 | P3 | E4 | E5 | I6 | I7 | I8 | I9 | I10 | I11 | I12 | I13 | A14 | A15 | A16 | A17 | A18 | A19 | A20 | A21 | |
|----|-----|-----|----|-----|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| 1 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | P1 |
| | 1 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | P2 |
| | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | P3 |
| | | | 1 | 0,9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | E4 |
| | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | E5 |
| | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,95 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | I6 |
| | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,95 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | I7 |
| | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,95 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | I8 |
| | | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,95 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | I9 |
| | | | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,95 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | I10 |
| | | | | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,95 | 0,13 | 0,13 | I11 |
| | | | | | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,95 | 0,13 | 0,13 | I12 |
| | | | | | | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,95 | 0,13 | I13 |
| | | | | | | | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | A14 |
| | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | A15 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | A16 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | A17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | A18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0,13 | 0,13 | A19 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0,13 | A20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | A21 |

Tabela 5-11 - Correlação entre variáveis

Neste exemplo interessa estudar o deslocamento no nó 21 segundo o eixo do x, sendo que a função de estado limite é a seguinte:

$$g(x) = 0.06096 - \delta_{21x}$$

Uma vez apresentados os dados do exemplo em questão, segue-se a análise comparativa dos valores indicados na literatura com os obtidos com a execução do programa FORModule.

| | Artigo | FORModule |
|---------|-------------------------|-------------------------|
| p_f | 0.0408×10^{-3} | 0.0410×10^{-3} |
| β | 3.940 | 3.938 |

Tabela 5-12 - Comparação de resultados Exemplo 3

Apesar de ser um exercício bastante complexo, o FORModule atinge uma ótima precisão nos resultados obtidos.

Falta, portanto, comparar os tempos decorridos na resolução do algoritmo FORM usando os dois métodos possíveis no cálculo dos gradientes.

| Diferenças Finitas (s) | Sensibilidades (s) | Redução Obtida (%) |
|-------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 0.519 | 0.211 | 40.6 |

Tabela 5-13 - Comparação do tempo decorrido pelos dois métodos no Exemplo 3

Mais uma vez os ganhos continuam a ser bastante significativos, atingindo-se uma percentagem de 40.6%.

6. Capítulo 6 - Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvido um programa em MATLAB, que se denominou FORModule, cujas principais características são calcular, pelo método FORM, a probabilidade de falha em estruturas constituídas por vigas 2D, e obter uma mais rápida convergência do algoritmo FORM.

Para a primeira característica foi desenvolvido um programa de análise por elementos finitos para estruturas planas constituídas por vigas de forma a obter uma aplicação integrada com o FORModule. Para a segunda característica foi implementado no programa de elementos finitos a capacidade de calcular derivadas pelo método contínuo.

Para validar os resultados obtidos foram usados alguns exemplos encontrados em artigos científicos e concluiu-se que os resultados são coerentes e precisos.

Procurou-se avaliar quais os ganhos no tempo de cálculo comparando o cálculo das sensibilidades pelo método contínuo com o tradicional método das diferenças finitas e pôde-se comprovar que, pelo método contínuo, verificou-se uma redução na ordem dos 35% do tempo de cálculo.

7. Referências bibliográficas

[Abdo, 1991] Abdo, T., Rackwitz, R. (1991). "A new β -point algorithm for large time-invariant and time-variant reliability problems". In: Der Kiureghian, A. Thoft-Christensen, P. editors, Proc. of the 3rd IFIP WG 7.5.

[CEB, 1988] CEB (1998). Comité Euro-International du Béton. 1988. "General principles on reliability for structures". Bulletin d'Information n.º 191

[CEN, 2002] CEN (2002). EN 1990 - "Eurocode 0 - Basis of Structural Design". European Committee for Standardization.

[CEN, 2003a] CEN (2003a). EN 1991-1-3 - "Eurocode 1 - Actions on structures - Part 1-3: General actions – Snow loads". European Committee for Standardization.

[CEN, 2003b] CEN (2003b). EN 1995-1-1 - "Eurocode 5 - Design of Timber Structures – Part 1-1: General – Common rules and rules for buildings". European Committee for Standardization.

[Chen, 1983] Chen, X., Lind, N.C., (1983). "Fast probability integration by three parameter normal tail approximation". Structural Safety, Vol. 1, pp. 269-276

[Cheng, 2007] Cheng, J. (2007). "Hybrid genetic algorithms for structural reliability analysis".

[Cornell, 1969] Cornell, C.A. (1969). "A probability based structural code", J. Amer. Conc. Inst., Vol. 66, N°12, pp. 974-985.

[Delgado, 2002] Delgado, J. M. (2002). "Avaliação de segurança de estruturas reticuladas com comportamento não linear material e geométrico". Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil. Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

[Der Kiureghian, 1987] Der Kiureghian, A. et al (1987). "Second-order reliability approximations", Journal of Engineering Mechanics; Vol. 113, n.º8, p. 1208-1225

[Der Kiureghian, 1988] Der Kiureghian, A., Ke, J.B. (1988). The stochastic finite element method in structural reliability. Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, n.º 2, pp. 83-91

[Der Kiureghian, 2006] Der Kiureghian, A. (2006). "Structural reliability software at the University of California, Berkeley", *Structural Safety*, 28, p. 44-67.

[Ditlevsen, 2005] Ditlevsen, O., Madsen, H. O. (2005). "Structural Reliability Methods" Monograph, Coastal, Maritime and Structural Engineering, Department of Mechanical Engineering, Technical University of Denmark, disponível em <http://www.mek.dtu.dk/staff/od/books.htm>.

[Duprat, 2010] Duprat, F., Sellier, A., Nguyen, X.S., Pons, G. (2010). "The projection gradient algorithm with error control for structural reliability", *Eng. Structures*, 32 (2010) 3725-3733.

[Eibl, 1995] Eibl, J., Schmidt-Hurtienne, B. (1995) - "General outline of a new safety format", *CEB - Bulletin d'Information N° 194*, pp. 105-116.

[Faber, 2003] Faber, M. H. et al. (2003). "Probabilistic modeling of graded timber material properties". Elsevier.

[Faber, 2005] Faber, M. H. (2005). "Risk and Safety in Civil, Surveying and Environmental Engineering". Lecture Notes, Swiss Federal Institute of Technology, Institute of Structural Engineering.

[Ferry-Borges, 1968] Ferry-Borges, Castanheira, M. (1968). "Structural safety", Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

[Freudenthal, 1966] Freudenthal, A.M., Garrelts, J.M., Shinozuka, M. (1966). "The analysis of structural safety". *ASCE J. Struct. Div.*, Vol. 92, ST2.

[Guan, 2001] Guan, X. L., Melchers, R. E. (2001). "Effect of response surface parameter variation on structural reliability estimates".

[Guerreiro, 1999] Guerreiro, L. (1999). "Introdução à Fiabilidade Estrutural". Apontamentos da Disciplina de Dinâmica e Engenharia Sísmica. Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico.

[Haldar, 2000] Haldar, A., Mahadevan, S. (2000). "Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design" John Wiley & Sons, New York.

[Haldar, 2000a] Haldar, A., Mahadevan, S. (2000). "Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis" John Wiley & Sons, New York.

[Hasofer, 1974] Hasofer, A.M., Lind, M.C. (1974). "An exact and invariant first order reliability format", *ASCE J. Mech. Eng. Div.*, Vol. 100, EM1.

- [Henriques, 1998] Henriques, A. A. R. (1998). "Aplicação de Novos Conceitos de Segurança no Dimensionamento de Betão Estrutural". Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil. Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- [Hisada, 1988] Hisada, T. (1988). "Sensitivity Analysis of Nonlinear FEM", Proc. ASCE EMD/GTD/STD Specialty Conference on Probabilistic Methods, pp. 160-163.
- [Kaymaz, 2004] Kaymaz, I. (2004). "Application of kriging method to structural reliability problems".
- [Kleiber, 1991] Kleiber, M., Hein, T.D., Postek, E., (1991). "Incremental Finite Element Analysis of Nonlinear Structural Design Sensitivity Problems". In Finite Elements in 90's, Oñate E, Periaux J. And Samuelsson A. (eds.) Springer-Verlag/CIMNE, Barcelona, pp. 241-247.
- [Kleineremann, 2000] Kleineremann, J.P., (2000). "Identification parametrique et optimisation des procedes de mise a forme par problemes inverses", Ph.D. Thesis, University of Liège, Bélgica.
- [Laranja, 2003] Laranja, R. e Brito, J. d. (2003). "Verificação Probabilística da Segurança das Estruturas". Revista Engenharia Civil, Nº 12 (Universidade do Minho): p. 63 - 79.
- [Liu, 1986] Liu, P. L., Der Kiureghian, A. (1986). "Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 1, pp. 105–112.
- [Liu, 1989] Liu, P. L., Der Kiureghian, A. (1989). "Finite-element reliability methods for geometrically nonlinear stochastic structures". Report No. UCB/SEMM-89/05. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA
- [Madsen, 2006] Madsen, H. O. Et al (2006). "Methods of Structural Safety" 2ª edição, Dover Publications, Mineola, New York.
- [Mahnken, 1996] Mahnken, R., Stein, E., (1996). "A Unified Approach for Parameter Identification of Inelastic Material Models in the Frame of the Finite Element Method", Comput Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 136, pp. 225-258.
- [Melchers, 1999] Melchers, R. E. (1999). "Structural Reliability Analysis and Prediction" 2ª edição. John Wiley & Sons, Chichester.
- [Pestana, 2006] Pestana, D. D. e Velosa, S. (2006). "Introdução à Probabilidade e à Estatística", 2ª ed., Fundação Calouste Gulbenkian.

[Rackwitz, 1978] Rackwitz, R., Fiessler, B., (1978). "Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences". Computers & Structures, Vol. 9, pp. 489-494

[Rajashankar, 1995] Rajashankar, M.R., Ellingwood, B.R., (1995). "Reliability of reinforced-concrete cylindrical shells". Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 121, No. 2, pp. 336-347.

[RSA, 1983] RSA, Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas e Pontes (1983) – Decreto-Lei n.º 235/83, Imprensa Nacional – Casa da Moeda, Lisboa.

[Rubinstein, 1981] Rubinstein, R.Y., (1981). "Simulation and the Monte Carlo Method". John Wiley & Sons, New York

[Shinozuka, 1988] Shinozuka, M., Yamazaki, F., (1988). "Stochastic finite element analysis: an introduction" in S. T. Ariaratnam, G. I. Schueller, and I. Elishakoff editors, "Stochastic structural dynamics: Progress in theory and applications". Elsevier Applied Science Publishers Ltd, London.

[Spanos, 1989] Spanos, P.D., Ghanem, R.G., (1989). "Stochastic finite element expansion for random media". ASCE, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, No. 5, pp. 1035–1053.

[Teigen, 1991a] Teigen, J.G., Frangopol, D.M., Sture, S., Felippa, C.A., (1991a). "Probabilistic FEM for nonlinear concrete structures" I: Theory. J. Struct. Engrg., ASCE, Vol. 117, n.º 9: 2674-2689.

[Teigen, 1991b] Teigen, J.G., Frangopol, D.M., Sture, S., Felippa, C.A., (1991b). "Probabilistic FEM for nonlinear concrete structures" II: Applications. J. Struct. Engrg., ASCE, Vol. 117, n.º9: 2690-2707.

[Tortorelli, 1994] Tortorelli, D.A., Michaleris, P., Vidal, C.A., (1994). "Tangent Operators and Design Sensitivity Formulations for Transient Non-Linear Coupled Problems with Applications to Elastoplasticity. Int. J. Numer. Meth. Engrg., vol. 37, pp. 2471-2499.

[Tsay, 1990a] Tsay, J.J., Arora, J.S. (1990). "Nonlinear Structural Design Sensitivity Analysis for Path Dependent Problems. Part I: General Theory", Comput Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 81, pp. 183-208.

[Tsay, 1990b] Tsay, J.J., Cardoso, J.E.B., Arora, J.S. (1990). "Nonlinear Structural Design Sensitivity Analysis for Path Dependent Problems. Part II: Analytical Examples", Comput Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 81, pp. 209-228.

[Vanmarcke, 1983] Vanmarcke, E.H., Grigoriu, M., (1983). "Stochastic finite element analysis of simple beams". *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 109, No. 5, pp. 1203-1214.

[Veiga, 2008] Veiga, J. M. G. C (2008). "Métodos de Análise das Incertezas na Verificação da Segurança Estrutural em Engenharia Civil". Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para obtenção do grau de Doutor em Ciências de Engenharia.

[Vidal, 1993] Vidal, C.A., Haber, R.B., (1993). "Design Sensitivity Analysis for Rate Independent Elastoplasticity", *Comput Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 107, pp. 393-431.

[Wu, 1987] Wu, S.T., Wirsching, P.H., (1987). "New algorithm for structural reliability estimation". *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 113, No. 9, pp. 1319-1336.

[Zhang, 1993] Zhang, Y., Der Kiureghin, A. (1993). "Dinamic Response Sensitivity of Inelastic Structures", *Comput Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 108, pp. 23-36.

[Zhang, 1996] Zhang, Y., Ellingwood, B., (1996). "SFEM for reliability of structures with material nonlinearities". *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 122, n.º6: 701-704.

[Zhang, 1997] Zhang, Y., Der Kiureghin, A. (1997). "Finite element reliability methods for inelastic structures", Report No. UCB/SEMM-97/05. Berkeley (CA): Dep. Civil and Env. Eng. University of California.