NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DANIELA SOARES BRÁS

Licenciada em Matemática

RELATÓRIO DE ESTÁGIO - A RESOLUÇÃO E A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO INEQUAÇÕES DO 1.º GRAU

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO E NO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa

Julho, 2024

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RELATÓRIO DE ESTÁGIO - A RESOLUÇÃO E A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO INEQUAÇÕES DO 1.º GRAU

DANIELA SOARES BRÁS

Licenciada em Matemática

Orientadora: Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

Coorientadora: Doutora Paula Cristina Antunes Teixeira
Professora do Agrupamento de Escolas João de Barros

Júri:

Presidente: Doutor António Manuel Dias Domingos,
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

Arguentes: Doutora Maria Teresa Bixirão Neto,
Professora Auxiliar do Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro

Vogal (coorientadora): Doutora Paula Cristina Antunes Teixeira,
Professora do Agrupamento de Escolas João de Barros

Vogal: Licenciada Teresa Maria Pássaro Amendoeira,
Professora do Agrupamento de Escolas Daniel Sampaio

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO E NO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa

Julho, 2024

Relatório de estágio - A resolução e a formulação de problemas envolvendo inequações do 1.º grau

AGRADECIMENTOS

À professora Paula, por toda a dedicação demonstrada ao longo do ano. Obrigada pela orientação e ajuda no meu primeiro trabalho de investigação.

À professora Teresa, por me ter recebido de braços abertos na sua escola. Obrigada não só pelos ensinamentos e partilhas, mas também pela confiança depositada no meu trabalho.

Aos meus primeiros alunos, por me terem acolhido tão bem na vossa sala de aula. Obrigada por me terem permitido crescer pessoal e profissionalmente.

À minha colega Diana, por toda a motivação que dividiu comigo. Obrigada pelo espírito de companheirismo e entreajuda que se viveu durante o período de estágio.

Às restantes colegas de mestrado, por tornarem esta caminhada mais leve. Obrigada pelas alegrias que transmitiram nos momentos mais dificultosos.

Ao meu namorado Alexandre, pelo apoio incondicional. Obrigada por nunca duvidares da minha força de vontade.

Aos meus pais, por terem tornado este sonho possível. Obrigada por estarem sempre disponíveis para me amparar.

À família do meu namorado, por terem sido um suporte para mim. Obrigada por acreditarem nas minhas capacidades.

A toda a minha família, no geral, por terem torcido pelo melhor para mim. Obrigada por contribuírem para o alcance desta conquista.

RESUMO

O presente relatório encontra-se dividido em duas partes. Na primeira parte, descreve-se o trabalho desenvolvido durante o estágio pedagógico. Esta parte conta com três capítulos. Nos dois primeiros, abordam-se quer as atividades letivas, quer as atividades não letivas em que a professora estagiária participou. Enquanto isso, no último capítulo, é apresentada uma reflexão sobre essa mesma experiência. Já a segunda parte é dedicada ao projeto de investigação. Por sua vez, esta parte possui cinco capítulos distintos. O primeiro e segundo capítulos dizem respeito à introdução ao estudo e à revisão de literatura que o sustenta, respetivamente. No terceiro capítulo, é realizada uma contextualização da metodologia adotada. Seguindo para o quarto capítulo, expõe-se a análise dos dados. Por fim, no quinto capítulo, são mostradas as conclusões deste estudo.

O estudo acima mencionado visou compreender e caracterizar os processos de resolução e formulação de problemas, dos alunos do 9.º ano de escolaridade, no âmbito das inequações do 1.º grau. Procurou-se, assim, responder às seguintes questões:

1. Como se caracteriza o processo de resolução de problemas que envolvam inequações do 1.º grau?
2. Como se caracteriza o processo de formulação de problemas que envolvam inequações do 1.º grau?

A investigação seguiu uma metodologia qualitativa e dispôs de três pares de participantes. A análise dos dados teve como base a informação recolhida por observação, entrevistas, documentos e notas de campo. No que toca a conclusões, os alunos leem e compreendem os problemas, fazem e executam planos e, por último, verificam as respostas. Como estratégias de resolução, estes consideram as numéricas (diretas e indiretas) e as simbólicas. Relativamente à formulação de problemas, os alunos começam por formular, resolver e, finalmente, melhorar os problemas. No que concerne a estratégias de formulação, os alunos utilizam as de alteração, as de aceitação e, ainda, as de imaginação.

Palavras-chave: Estágio pedagógico; Resolução de problemas; Formulação de problemas; Inequações do 1.º grau.

ABSTRACT

The following report is divided in two parts. The first part describes the work that was developed during the pedagogical internship, and it consists in three chapters. The first two, address the teaching activities and the school activities in which the trainee teacher has participated. Meanwhile, the last chapter, presents a reflection about that same experience. The second part of the report is dedicated to the investigation project, and it consists in five distinct chapters. First two chapters are about the study's introduction and the literature review that sustains it. The third chapter undertakes an explanation of the adopted methodology. The fourth chapter displays the data analysis. Finally, the last one shows the conclusions of the study.

The aim of this study was to understand and characterise the problem solving and the problem posing procedures of the 9th grade students in the context of first-degree inequalities. Therefore, it searched for answers to the following questions:

1. How is the problem-solving process of first-degree inequalities characterised?
2. How is the problem-posing process of first-degree inequalities characterised?

The investigation pursued a qualitative research method involving three groups of participants. The information contained on the data analysis was collected through observation, interviews, documents and field notes. The study concluded that the students read and understand the problems, then they create and execute plans and, at last, they verify their answers. As problem-solving strategies, the students consider the numerical (direct and indirect) and the symbolic ones. Regarding to problem-posing, they start by formulating, then solving and, finally, by improving the developed problem. If concerned by the formulation strategies, students use the alteration, the acceptance and the imagination ones.

Keywords: Pedagogical internship; Problem-solving; Problem-posing; First-degree inequalities.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

Índice de Tabelas

Primeira parte

1. Prática pedagógica supervisionada

O presente capítulo tem como objetivo descrever a prática pedagógica desenvolvida pela professora estagiária. O estágio em questão realizou-se durante o ano letivo de 2023/2024, numa escola de 3.º ciclo e de ensino secundário, localizada na Área Metropolitana de Lisboa. A prática de ensino foi supervisionada pela professora cooperante e consistiu no acompanhamento de duas turmas na disciplina de Matemática, uma de 9.º ano e outra de 12.º ano. Neste sentido, a turma de 9.º ano foi considerada a turma principal e a turma de 12.º ano foi considerada a turma secundária. Em ambas as turmas assistiu-se à totalidade das aulas, tendo-se colaborado na monitorização dos alunos durante a resolução de cada tarefa proposta.

Durante o ano letivo, foram lecionadas pela professora estagiária 27 aulas de 45 minutos. A escolha dos temas e das datas das aulas a lecionar foram escolhidos livremente pela professora estagiária. Para a realização de cada aula, elaborou-se uma planificação, de forma estruturada e detalhada. A primeira fase da realização destes planos de aula consistia na elaboração de uma planificação preliminar, a ser discutida, posteriormente, pelo núcleo de estágio, constituído pela professora cooperante e pelas duas professoras estagiárias. Destas discussões surgia, por vezes, a necessidade de alterar algum tópico da planificação. Este processo era repetido até que todos os momentos planificados da aula se enquadrassem nos objetivos de aprendizagem da turma em causa. No final de cada aula lecionada, o núcleo de estágio reunia para refletir sobre os aspetos positivos e os aspetos a melhorar da mesma. A professora coorientadora Paula Teixeira esteve, também, presente na discussão das aulas a que assistiu.

1.1 Prática pedagógica supervisionada no 9.º ano

A turma do 9.º ano era constituída por 27 alunos, catorze rapazes e treze raparigas. No geral, esta turma apresentava um bom comportamento e desempenho em sala de aula. Contudo, no que dizia respeito a atividades fora da sala de aula, a turma mostrava-se pouco colaborativa. Relativamente ao aproveitamento, este era bastante satisfatório, existindo um reduzido número de casos de insucesso na aprendizagem. Ainda que todos os elementos da turma estivessem dispostos a trabalhar com os colegas, não se sentia um grande espírito de equipa.

Nesta turma, a professora estagiária lecionou dezanove aulas de 45 minutos. Para além disso, esta elaborou instrumentos de avaliação e procedeu à correção dos mesmos.

1.1.1 Aulas lecionadas

As seis primeiras aulas aconteceram nos dias 25, 27 e 28 de setembro, onde se reviu o tema das equações incompletas do 2.º grau, abordado no ano letivo anterior. As aulas seguintes realizaram-se no dia 4 de dezembro, tratando ângulos ao centro e ângulos inscritos num arco de circunferência. As aulas dos dias 8, 14 e 19 de fevereiro foram sobre a resolução e formulação de problemas envolvendo inequações do 1.º grau. Nas aulas dos dias 21 de fevereiro e 13 de março, introduziram-se as funções de proporcionalidade inversa e quadrática, respetivamente. Por último, nas aulas do dia 24 de abril, iniciou-se o tema da trigonometria. De referir, ainda, que o manual adotado na escola e utilizado nas aulas lecionadas foi o Novo Espaço 9, da Porto Editora. De seguida, descrevem-se oito das dezanove aulas lecionados durante o ano letivo.

1.1.1.1 Aulas do dia 4 de dezembro

As aulas do dia 4 de dezembro centraram-se nas definições e propriedades de ângulos ao centro e ângulos inscritos num arco de circunferência. Na tabela abaixo, pode observar-se um resumo da planificação destas aulas (Tabela 1).

Tabela 1- Resumo da planificação das aulas de 4 de dezembro (9.º ano)

Tema: Geometria e Medida: Circunferência	**Duração:** 90 minutos
Recursos: Computador com acesso ao *Geogebra* (por grupo de 2 alunos); Fichas de trabalho.	
Sumário: Circunferência: ângulo ao centro e ângulo inscrito num arco de circunferência- atividade de introdução ao tema no *Geogebra*. Exercícios de aplicação.	
Objetivos: (i) Promover o trabalho em grupo; (ii) Desenvolver a capacidade de formular conjeturas; (iii) Relacionar a amplitude de um ângulo ao centro e de um ângulo inscrito numa circunferência com as dos arcos correspondentes.	
Desenvolvimento da aula: (i) Apresentação da tarefa; (ii) Trabalho autónomo: acesso ao *Geogebra* e realização das tarefas (em grupo de 2 alunos); (iii) Discussão das tarefas (em grande grupo); (iv) Síntese e esquematização dos conteúdos abordados nas tarefas:	

amplitude de um arco de circunferência, amplitude de um ângulo ao centro, amplitude de um ângulo inscrito num arco de circunferência; (v) Resolução de exercícios de aplicação.

A iniciativa de realizar uma tarefa de exploração (Anexo 1) nestas aulas deveu-se ao facto de os alunos não estarem familiarizados com a aprendizagem de conceitos e propriedades que não fossem os transmitidos pela professora. Por esta razão, o enunciado das tarefas encontrava-se bastante estruturado, tentando guiar os alunos até à conclusão final. As dúvidas que foram expostas na fase de exploração autónoma prendiam-se, essencialmente, com o uso dos comandos do *Geogebra,* ainda que esta ferramenta tivesse sido utilizada em aulas anteriores. A maioria dos alunos da turma conseguiu chegar às propriedades dos ângulos ao centro e dos ângulos inscritos num arco de circunferência. No entanto, alguns alunos não perceberam que deveriam medir a amplitude do arco correspondente ao ângulo ao centro ou ao ângulo inscrito no arco de circunferência, tendo medido a amplitude do restante arco. A professora estagiária, ao aperceber-se desta circunstância, não interveio na resolução dos alunos e decidiu discuti-la em grande grupo. Posteriormente, na discussão, os alunos expuseram as suas estratégias e foram capazes de perceber as propriedades e os conceitos envolvidos, ouvindo as estratégias adotadas pelos restantes colegas. Nesta fase, gerou-se um ambiente de natural agitação. Aquando da resolução dos exercícios de consolidação, os alunos mostraram-se muito participativos e empenhados em realizar os exercícios no quadro. É necessário referir que, da planificação desta aula, nem todos os exercícios puderam ser realizados, para que os que suscitaram dúvidas fossem mais trabalhados.

A concluir, realça-se que o balanço foi positivo, pois os alunos compreenderam as definições e as propriedades em questão, sabendo aplicá-los quando solicitado. Em relação ao desempenho da professora estagiária, reconhece-se que este deve ser melhorado, para que não haja momentos de distração prejudicais à aprendizagem.

1.1.1.2 Aulas do dia 21 de fevereiro

Nas aulas do dia 21 de fevereiro, introduziu-se a função de proporcionalidade inversa, através de uma tarefa exploratória. A tabela que se segue apresenta um resumo da planificação destas aulas (Tabela 2).

Tabela 2- Resumo da planificação das aulas de 21 de fevereiro (9.º ano)

Tema: Álgebra: Funções	**Duração:** 90 minutos
Recursos (por grupo de 4 alunos): Espelho; Autocolante, Fita métrica; Calculadora; Computador com acesso ao *Geogebra;* 4 Fichas de trabalho.	
Sumário: Funções de proporcionalidade inversa: atividade exploratória de introdução ao tema.	
Objetivos: (i) Promover o trabalho em grupo; (ii) Identificar variáveis inversamente proporcionais e calcular a constante de proporcionalidade inversa; (iii) Reconhecer uma função de proporcionalidade inversa através das suas representações gráfica e algébrica; (iv) Interpretar e modelar situações da vida real que envolvam a proporcionalidade inversa.	
Desenvolvimento da aula: (i) Apresentação da tarefa; (ii) Resolução da tarefa: recolha de dados no exterior da sala de aula e análise dos dados recolhidos (em grupo de 4 alunos); (iii) Discussão da tarefa (em grande grupo); (iv) Síntese e esquematização escrita dos conteúdos abordados na tarefa, com recurso ao *Power-Point:* variáveis inversamente proporcionais; constante de proporcionalidade inversa; representação algébrica e gráfica de uma função de proporcionalidade inversa.	

A ideia de realizar uma aula no exterior da sala prendeu-se com a necessidade de mostrar à turma a aplicabilidade da matemática e, em particular, a aplicabilidade da função de proporcionalidade inversa a uma situação real (Anexo 2). Antes da saída da sala de aula, os grupos ouviram atentamente as indicações da professora estagiária e escolheram os elementos que iam medir, observar e anotar. Já no exterior, a turma teve um comportamento exemplar e procedeu à resolução da tarefa. A professora estagiária escolheu não impor limite de tempo para a recolha dos dados, por considerar que o tempo a indicar aos grupos poderia não ser suficiente. Note-se que, caso alguns deles não fossem capazes de concluir esta parte da tarefa, impossibilitava-se a realização das fases seguintes da análise dos dados e da discussão em grande grupo. Na primeira parte da análise dos dados, as dúvidas que surgiram relacionaram-se com o facto de os valores do produto das variáveis em estudo serem muito próximos, mas não exatamente iguais. Ainda assim, todos os grupos concluíram que deveriam utilizar o valor médio como valor da constante de proporcionalidade inversa. Na segunda parte, os alunos mostraram dificuldades em usar os comandos do *Geogebra*, que foram ultrapassadas com a ajuda da professora estagiária. Por se ter privilegiado a recolha de dados no exterior, não houve tempo para iniciar a discussão e a síntese nesta aula. Deste modo, estes momentos passaram para o início da aula seguinte.

Em resumo, pode afirmar-se que as aulas correram bem e que os alunos atingirem os objetivos de aprendizagem previstos. Contudo, reconhece-se que a professora estagiária deve ponderar e cronometrar o tempo necessário para cada momento da planificação, a fim de possibilitar a concretização de cada um deles.

1.1.1.3 Aulas do dia 13 de março

Nas aulas do dia 13 de março, foi iniciado o estudo das funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$. A tabela abaixo mostra um resumo da planificação destas aulas (Tabela 3).

Tabela 3- Resumo da planificação das aulas de 13 de março (9.º ano)

Tema: Álgebra: Funções	**Duração:** 90 minutos
Recursos: Fichas de trabalho.	
Sumário: Funções do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$: atividade de introdução ao tema no *Geogebra*. Exercícios de aplicação.	
Objetivos: (i) Desenvolver a capacidade de formular conjeturas; (ii) Representar e interpretar graficamente funções do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$.	
Desenvolvimento da aula: (i) Apresentação da tarefa; (ii) Acesso ao *Geogebra* e resolução da tarefa; (iii) Discussão da tarefa; (iv) Síntese e esquematização escrita dos conteúdos abordados na tarefa: representações gráfica e algébrica de funções do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$ (incluindo concavidades, vértice e eixo de simetria); (v) Resolução de exercícios de aplicação.	

Para estas aulas, a professora estagiária criou uma ficha de trabalho, onde foi possível os alunos registarem conclusões, autonomamente, acerca das características da família de funções quadráticas $y = ax^2$, com $a \neq 0$ (Anexo 3). O facto de os alunos já estarem familiarizadas com a aplicação *Geogebra* permitiu representar graficamente, e com mais facilidade, as várias funções do enunciado da tarefa. Na fase de responder às questões, os alunos mostraram insegurança ao interpretar o conceito de módulo. Neste sentido, a professora estagiária recorreu a alguns exemplos para ilustrar a diferença entre o módulo e o simétrico de um número. Porém, reconhece-se que, neste instante, deveriam ter sido apresentadas as definições rigorosas destes conceitos, para que os alunos as pudessem interiorizar. Adicionalmente, os alunos manifestaram dificuldades em apresentar a equação da reta que representa o eixo de simetria, tendo sugerido, em primeiro lugar, a reta de equação $y = 0$. Tal situação fez sobressair que os conteúdos lecionados em anos anteriores não estavam bem consolidados. Após explicadas as diferenças entre os vários tipos de retas, os alunos afirmaram ter compreendido as características da função quadrática, pelo que se avançou para a resolução dos exercícios de aplicação. Nesta fase, os alunos souberam aplicar os conhecimentos adquiridos e foram bastante participativos. Por fim, realça-se que esta planificação foi adequada à duração da aula, uma vez que se cumpriram todos os momentos nela presentes.

Em síntese, o balanço final destas aulas foi bastante positivo. Relativamente à prática pedagógica da professora estagiária, destaca-se a planificação de tarefas apropriadas ao tempo das aulas. Todavia, identificam-se alguns aspetos a melhorar, tais como a apresentação de cada conceito através da sua definição, ao invés do recurso a exemplos concretos.

1.1.1.4 Aulas do dia 24 de abril

As aulas do dia 24 de abril focaram-se na introdução do tema da trigonometria. Na tabela seguinte, pode observar-se um resumo da planificação destas aulas (Tabela 4).

Tabela 4- Resumo da planificação das aulas de 24 de abril (9.º ano)

Tema: Geometria e Medida: Trigonometria	**Duração:** 90 minutos
Recursos: *Power-Point; Plickers.*	
Sumário: Trigonometria: razões trigonométricas de um ângulo agudo.	
Objetivos: Reconhecer as razões trigonométricas de um ângulo agudo (seno, cosseno e tangente) como razões entre as medidas de lados de um triângulo retângulo.	
Desenvolvimento da aula: (i) Esquematização escrita dos conteúdos, com recurso ao *Power-Point*: hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente a um ângulo agudo de um triângulo retângulo; razões trigonométricas de um ângulo agudo (seno, cosseno e tangente) e suas propriedades; (ii) Resolução de exercícios de aplicação; (iii) Avaliação formativa, com recurso ao *Plickers*.	

Para estas aulas, a professora estagiária elaborou uma planificação que permitiu aos alunos aplicarem e, posteriormente, avaliarem formativamente os conceitos abordados na exposição teórica (Anexo 4). Ao longo de toda a aula, verificaram-se falhas técnicas que poderiam ter posto em causa o seu bom funcionamento, tais como falhas de internet, de projeção e de visibilidade para o quadro. Durante a exposição teórica, os alunos foram bastante participativos, pelo que a professora estagiária os incentivou sempre a aprofundarem cada definição e cada propriedade. Ao avançarem para o momento de aplicar os conhecimentos adquiridos, as falhas de visibilidade para o quadro foram ultrapassadas fazendo uso de um tablet, onde a professora estagiária projetava o ecrã desse equipamento e resolvia nele os exercícios. Quando solicitados a resolver os exercícios, os alunos disponibilizaram-se, de imediato, a fazê-lo. Uma vez que a turma mostrou ter entendido as razões trigonométricas de um ângulo agudo, os exercícios 4.2 e 6 foram somente explicados, ao invés de resolvidos. Ao prosseguir para a avaliação formativa, ficou claro que os alunos tinham interiorizado os conceitos. Deste modo, para além de terem sido capazes de selecionar a resposta correta para cada pergunta, conseguiram, também, corrigir as opções falsas.

A concluir, reconhece-se que a aula correu bastante bem. Os alunos estiveram empenhados e atentos à exposição teórica, tendo evidenciado as suas aprendizagens na avaliação formativa. Adicionalmente, destaca-se a destreza da professora estagiária em contornar as adversidades das condições da sala, o que possibilitou o desenvolvimento da aula tal como previamente planeado.

1.1.2 Avaliação e classificação

Ao longo do ano letivo, a professora estagiária preparou instrumentos de avaliação não só formativa, mas também sumativa. No tocante à avaliação formativa, elaborou-se uma ficha de revisões sobre a lei do anulamento do produto e as equações incompletas do 2.º grau. Relativamente à avaliação sumativa, a professora estagiária criou três testes de avaliação. O primeiro incluía os seguintes conteúdos: casos notáveis da multiplicação, equações completas e incompletas do 2.º grau, lugares geométricos, ângulos e arcos na circunferência e polígonos regulares inscritos na circunferência. Já no segundo teste foram avaliados os seguintes tópicos: equações completas do 2.º grau, ângulos e arcos na circunferência, números reais, aproximações e relações de ordem, inequações, funções de proporcionalidade inversa e funções quadráticas. Pelo facto do terceiro teste elaborado ter sido o último elemento de avaliação da turma, optou-se por realizar um teste global. Procedeu-se, ainda, à definição de critérios de classificação a todos os instrumentos de avaliação sumativa aplicados à turma. Também a classificação de todos os testes e questões de aula realizados pelos alunos foram da responsabilidade da professora estagiária.

1.2 Prática pedagógica supervisionada no 12.º ano

A turma do 12.º ano era constituída por 30 alunos, doze do sexo masculino e dezoito do sexo feminino. Esta turma caracterizava-se por ter um bom comportamento e ser bastante participativa nas atividades, dentro e fora da sala de aula. O aproveitamento da turma era satisfatório, havendo uma grande concentração de alunos com classificações elevadas e outra com classificações francamente baixas. Para além disso, pode afirmar-se que esta turma era bastante unida, o que era visível no espírito de entreajuda entre todos os elementos.

Nesta turma, a professora estagiária lecionou oito aulas de 45 minutos e corrigiu um dos testes realizados durante o ano.

1.2.1 Aulas lecionadas

As primeiras aulas aconteceram no dia 22 de janeiro, onde se introduziu a função exponencial. As aulas seguintes realizaram-se no dia 25 de janeiro e o foco foi a resolução de equações e inequações exponenciais. As aulas do dia 8 de fevereiro centraram-se no conceito de logaritmo e as suas propriedades. Finalmente, nas aulas do dia 15 de fevereiro, definiu-se a função logarítmica. O manual adotado na escola e utilizado nas aulas lecionadas foi o Novo Ípsilon 12, da Raiz Editora. De seguida, apresentam-se quatro das oito aulas lecionados durante o ano letivo.

1.2.1.1 Aulas do dia 22 de janeiro

As aulas do dia 22 de janeiro abordaram a função exponencial, mais concretamente a sua representação gráfica e as suas propriedades. Na tabela abaixo, encontra-se um resumo da planificação destas aulas (Tabela 5).

Tabela 5- Resumo da planificação das aulas de 22 de janeiro (12.º ano)

Tema: Funções: Funções exponenciais e funções logarítmicas	**Duração:** 90 minutos
Recursos: Fichas de trabalho; Calculadora gráfica (por grupo de 2 alunos); *Power-Point.*	
Sumário: Função exponencial: Representação gráfica e propriedades das funções definidas por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Exercícios de aplicação.	
Objetivos: (i) Promover o trabalho em grupo; (ii) Conhecer a representação gráfica e as propriedades das funções definidas por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.	
Desenvolvimento da aula: (i) Apresentação da tarefa; (ii) Trabalho autónomo: realização da tarefa (cada grupo de dois alunos, resolve, apenas, um dos enunciados); (iii) Discussão das tarefas e projeção dos emuladores das calculadoras gráficas (em grande grupo); (iv) Síntese e esquematização dos conteúdos abordados nas tarefas, com recurso ao *Power-Point:* funções exponenciais dos tipos $f(x) = a^x$, definidas nos números reais, com $0 < a < 1$ e com $a > 1$, e respetivas propriedades; propriedades algébricas para potências de expoente racional e não racional; (v) Resolução de exercícios de aplicação.	

A ideia de criar dois enunciados diferentes (Anexo 5) prendeu-se com o objetivo de introduzir os dois tipos de funções exponenciais. Pretendia-se que fossem os alunos a chegar à representação gráfica e às propriedades destas funções, a partir de situações do quotidiano. Contudo, os alunos mostraram mais dificuldades do que o esperado no momento de apresentar a expressão algébrica, tendo indicado funções lineares e quadráticas. Foram, ainda, surgindo dúvidas relativamente ao uso das calculadoras gráficas, que a professora estagiária esclareceu. No momento da discussão, os alunos foram participativos e disponibilizaram-se em explicar aos colegas o que tinham feito e a que conclusões tinham chegado. Neste sentido, mesmo os alunos que tinham a outra versão do enunciado, entenderam a representação gráfica e as propriedades do tipo de função exponencial que não lhes coube analisar. Partindo para a exposição teórica, via *Power-Point,* a professora e os alunos aperceberam-se de uma gralha nos apontamentos, algo que foi imediatamente corrigido. Ao resolver o segundo exercício, a professora estagiária referiu frases como "a função sobe" ou "a função desce", como forma de se referir às translações verticais, algo que, do ponto de vista do rigor matemático, não é o mais indicado. Na primeira alínea do terceiro exercício, surgiu uma questão sobre qual a operação que se deveria realizar primeiro, a multiplicação ou a divisão. Ainda que neste exercício não estivesse errado começar pela divisão, foi chamada a atenção que se deveria respeitar a ordem das operações, para que os alunos não fossem conduzidos ao erro em exercícios futuros. Uma vez que a tarefa exploratória demorou mais tempo que o previsto, não foi possível terminar todos os exercícios, pelo que os dois últimos foram resolvidos na aula seguinte.

A maioria da turma realizou a tarefa com entusiasmo, mas, dada a natureza da mesma, alguns elementos mostraram estranheza por não ser a professora a expor a matéria. Tal evidência sugere que será proveitoso fazer mais atividades deste género nesta turma. Em suma, destaca-se a importância de rever muito cuidadosamente os apontamentos partilhados com os alunos e de emendar o erro assim que este for notado, para que os alunos não registem qualquer informação errada nos seus cadernos. Adicionalmente, percebeu-se a importância de transmitir as propriedades e os conceitos matemáticos de modo científico, para que os alunos os apliquem corretamente.

1.2.1.2 Aulas do dia 8 de fevereiro

Nas aulas do dia 8 de fevereiro abordou-se o conceito de logaritmo. Na seguinte tabela, encontra-se um resumo da planificação destas aulas (Tabela 6).

Tabela 6- Resumo da planificação das aulas de 8 de fevereiro (12.º ano)

Tema: Funções: Funções exponenciais e funções logarítmicas	**Duração:** 90 minutos
Recursos: Fichas de trabalho; Calculadora gráfica (por grupo de 2 alunos); *Power-Point.*	
Sumário: Conceito de logaritmo e suas propriedades. Exercícios de aplicação.	
Objetivos: (i) Promover o trabalho em grupo; (ii) Conhecer o conceito de logaritmo e suas propriedades.	
Desenvolvimento da aula: (i) Apresentação da tarefa (leitura dos enunciados e pedido de palpites de resposta); (ii) Trabalho autónomo: realização da tarefa (cada grupo de dois alunos resolve, apenas, um dos enunciados); (iii) Discussão das tarefas (em grande grupo); (iv) Síntese e esquematização dos conteúdos abordados nas tarefas, com recurso ao *Power-Point:* Resolução de equações do tipo $a^x = y$, com $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ e $x,\ y \in \mathbb{R}$; Logaritmo de um número real positivo x numa dada base a, com $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, e respetivas propriedades; (v) Resolução de exercícios de aplicação.	

Estas aulas remeteram os alunos para as aulas do dia 22 de janeiro, onde se introduziu a função exponencial através de duas situações reais. Utilizando essas mesmas situações, formularam-se dois problemas que suscitassem a curiosidade da turma (Anexo 6). Os alunos mostraram-se motivados e, os que nunca tinham ouvido falar destes problemas, apresentaram palpites muito distantes daqueles que seriam a resposta correta. Foi dada a liberdade aos alunos de escolherem o enunciado que queriam resolver, tendo a grande parte da turma optado pela realização do enunciado 1. No momento da discussão, os alunos foram bastante participativos e expuseram o seu raciocínio. Nesta fase, verificou-se uma notória evolução por parte dos alunos, já que nas aulas do dia 22 de janeiro estes revelaram grandes dificuldades em encontrar a expressão que modelava o pretendido. Relativamente a estratégias de resolução, a maior parte dos grupos adotou uma estratégia de tentativa e erro, enquanto que um dos grupos resolveu graficamente a equação. Deste modo, os alunos perceberam a necessidade de encontrar um caminho que os conduzisse diretamente à solução exata deste tipo de equações. Introduziu-se, assim, o conceito de logaritmo, que os alunos manifestaram já ter sido falado na disciplina de física e química. Na verdade, os alunos tentaram definir o conceito de logaritmo como uma função. Reconhece-se que, neste momento, a professora estagiária optou por não avançar na abordagem da função logarítmica, considerando que este seria tema para a aula seguinte. Tal situação salientou que, em alguns momentos, pode ser vantajoso para os alunos avançar ou regredir na matéria, para que todas as questões sejam devidamente esclarecidas. Por se ter privilegiado a resolução da tarefa e a explicação detalhada da mesma, não foi possível concluir a resolução de todos os exercícios. Assim, os exercícios 2, 3, 4, 5 e 6 foram concluídos na aula seguinte.

Destas aulas, destaca-se a evolução dos alunos em realizar outro tipo de tarefas que não exercícios. Este facto mostra que é, efetivamente, necessário e positivo para os alunos realizar tarefas fora do âmbito matemático a que estão habituados. Relativamente ao desempenho da professora estagiária, há a melhorar as explicações rigorosas, independentemente de estas envolverem matéria ainda não lecionada.

1.2.2 Avaliação e classificação

Durante o ano letivo, a professora estagiária classificou um dos instrumentos de avaliação sumativa que a turma realizou. Neste sentido, a professora cooperante distribuiu dez testes a cada professora estagiária, de modo a tornar o processo partilhado.

2. PRÁTICA NÃO LETIVA

Neste capítulo, são apresentadas as atividades não letivas em que a professora estagiária participou. Para além da presença em diversas reuniões e visitas de estudo, foram, também, desenvolvidas atividades que envolveram a comunidade escolar.

2.1 Reuniões assistidas

2.1.1 Reunião geral de professores

A professora estagiária esteve presente na primeira reunião geral de professores. Esta reunião permitiu aos professores recém-chegados participarem numa sessão de boas-vindas e conhecerem outros colegas. Neste sentido, foi realizada uma apresentação dos órgãos de gestão pedagógica do agrupamento, bem como explicada a ordem de comunicação vertical entre eles.

2.1.2 Reuniões de departamento

As reuniões de departamento eram constituídas por todos os professores das secções curriculares de matemática e informática do agrupamento. Estas reuniões tinham como ordem de trabalhos dar a conhecer aos professores as informações e as orientações gerais vindas da direção.

2.1.3 Reuniões de secção curricular

Nas reuniões de secção curricular, foram elaborados as planificações e os critérios de avaliação da disciplina de matemática. Nestas reuniões eram, ainda, debatidas as atividades a incluir no plano anual de atividades.

2.1.4 Reunião de diretores de turma

Durante o ano letivo, a professora estagiária participou na primeira reunião de diretores de turma. A participação nesta reunião permitiu conhecer informações de gestão pedagógica e administrativa. Consequentemente, esta tomou conhecimento das ações a adotar pelos diretores de turma perante diversas situações com os alunos e os encarregados de educação.

2.1.5 Reuniões de conselho de turma

No âmbito das reuniões de conselho de turma, realizaram-se quatro por turma, duas intercalares e duas de final de semestre. No início das reuniões intercalares, realizadas a meio de cada semestre, estiveram presentes os delegados, subdelegados e representantes dos encarregados de educação, a fim de reportarem aspetos que considerassem importantes. Após este momento, as reuniões decorriam, apenas, com todos os professores do conselho de turma. Nestas reuniões, discutiram-se estratégias para melhorar o comportamento e desempenho dos alunos, em geral, assim como se analisaram, em detalhe, os resultados de determinados alunos. Relativamente às reuniões de final de semestre, estas tinham como objetivo fazer um balanço do comportamento e das aprendizagens da turma, terminando com a verificação das classificações a atribuir a cada aluno, por disciplina.

2.1.6 Reuniões do núcleo de estágio

As reuniões do núcleo de estágio contaram com a presença das duas professoras estagiárias e da professora cooperante. Nestas reuniões, definiram-se as aulas a lecionar pelas professoras estagiárias, discutiram-se as planificações e refletiu-se sobre as mesmas depois da aplicação com os alunos. Para além disso, planearam-se as restantes atividades letivas e não letivas das turmas. Os instrumentos de avaliação e os respetivos critérios de classificação foram, também, trabalhados nestas reuniões.

2.2 Visitas de estudo

2.2.1 Visitas de estudo no 9.º ano

A professora estagiária acompanhou a turma de 9.º ano numa visita de estudo organizada pelos docentes das disciplinas de matemática e físico-química. Essa visita aconteceu no dia 6 de março, em Lisboa. Os alunos visitaram o Museu de Arte, Arquitetura e Tecnologia (MAAT), o Museu da Eletricidade e, por fim, o Pavilhão do Conhecimento. Os alunos puderam, assim, descobrir mais sobre arte, produção de eletricidade e ciência, no geral.

2.2.2 Visitas de estudo no 12.º ano

Relativamente ao 12.º ano, a professora estagiária acompanhou a turma em duas visitas de estudo. No dia 7 de fevereiro, a turma deslocou-se à baixa lisboeta para realizar um roteiro pessoano, no âmbito da disciplina de português. Esse roteiro tinha como título "Pelas ruas de Lisboa em busca do «Pessoa que há em nós»". Deste modo, os alunos tornaram-se conhecedores dos locais mais marcantes da vida deste poeta. A outra visita de estudo foi proposta pelas professoras estagiárias de matemática e realizou-se no dia 22 de março, também em Lisboa. A turma visitou a Futurália, para participar na feira de educação, formação e empregabilidade. O objetivo desta visita de estudo foi dar a conhecer aos alunos as diversas áreas de estudo ou trabalho a seguir.

2.3 Atividades para a comunidade escolar

2.3.1 Matemática das profissões

O projeto "Matemática das profissões" (Anexo 7) consistiu num conjunto de desafios matemáticos, ligados às mais diversas profissões. Estes desafios foram propostos pelas professoras estagiárias de matemática e tiveram como objetivo incrementar o interesse dos alunos pela disciplina. Esta rubrica foi publicada mensalmente no jornal da escola, entre os meses de outubro e maio. No início do mês seguinte, era disponibilizada a resolução do desafio anterior, sem dar conhecimento aos alunos das pontuações obtidas em cada desafio. Durante o mês de junho, tornaram-se conhecidas as pontuações finais dos participantes, tendo sido entregues os prémios aos três vencedores.

2.3.2 Dia Internacional da Matemática

Para comemorar o Dia Internacional da Matemática, as duas professoras estagiárias colaboraram na realização de atividades, sob acompanhamento dos restantes professores da secção curricular. A celebração deste dia realizou-se em duas das escolas do agrupamento, uma da parte da manhã e outra da parte da tarde. Ao longo de todo o dia, foram desenvolvidos jogos e concursos matemáticos. Um desses concursos foi proposto pelas professoras estagiárias e tratava-se de um concurso de mnemónicas (Anexo 8). O concurso de mnemónicas tinha como objetivo a criação de uma frase onde, contando as letras de cada palavra dessa frase, pudessem ser encontrados os primeiros algarismos do número π. A frase mais extensa e original ganhou o concurso, tendo sido entregue um certificado de participação ao vencedor.

3. Reflexão sobre o estágio pedagógico

O contacto com o meio escolar, pela primeira vez enquanto docente, permitiu perceber os diferentes papéis que este desempenha dentro e fora da sala de aula. De todos os papéis, o mais enriquecedor foi, sem dúvida, o de ter contribuído para melhorar o futuro dos alunos das turmas atribuídas ao núcleo de estágio. Neste sentido, sentiu-se uma grande responsabilidade na transmissão de bons princípios e, sobretudo, bons exemplos.

No que concerne à prática letiva, reconheceu-se que a planificação pormenorizada de cada aula se tornou imprescindível. Assim, minimizaram-se imprevistos que poderiam ter posto em causa o bom funcionamento das mesmas. Contudo, constatou-se que uma planificação não deve ser estática, podendo ser alterada a qualquer momento, se os diversos aspetos emergentes das aulas assim o justificarem (tais como as dúvidas e as dificuldades dos alunos). Perante as adversidades das condições das salas, mostrou-se importante ter sempre um plano alternativo, para que o desenvolvimento da aula ocorra como previamente planeado. No que concerne à metodologia de ensino, entendeu-se a necessidade de diversificar materiais, para que as aulas não se tornem monótonas. Tal situação revelou-se ser de extrema importância não só para se conseguir captar a atenção da turma, como também para se alcançarem as diferentes maneiras de aprender dos alunos. Ao nível do desempenho da professora estagiária, este foi-se tornando mais adequada ao longo das aulas lecionadas. Com efeito, aprimorou-se a transmissão de conceitos de modo cientificamente correto, diminuíram-se os momentos de distração, abriram-se espaços para explicações mais detalhadas e, por fim, apresentaram-se tarefas cada vez mais apropriadas ao tempo das aulas. Relativamente ao facto de se terem lecionado duas faixas etárias completamente distintas, a professora estagiária conseguiu adaptar-se a cada uma delas. Porém, verificou-se que, no 9.º ano de escolaridade, o ensino teve tendência a ser mais desafiador, na medida em que a professora estagiária se tinha de colocar ao nível do conhecimento desses alunos. Já no 12.º ano de escolaridade, os alunos possuíam outras capacidades, nomeadamente a de abstração, que em muito facilitaram a conversação entre ambas as partes. Por outro lado, no que toca à avaliação dos alunos, a elaboração de instrumentos revelou-se uma função bastante mais complexa do que se pensava. Primeiramente, compreendeu-se que quer a divisão de perguntas em diferentes domínios, quer a atribuição de pontos a cada etapa da resolução dessas mesmas perguntas, envolviam uma componente de carácter muito subjetivo. De seguida, e mesmo com os critérios de classificação já elaborados, surgiam dúvidas no momento de cotar. Todavia, a professora estagiária tentou sempre ser justa para com todos os alunos, aplicando os critérios de avaliação de igual forma para toda a turma.

Acerca dos deveres dos professores fora do contexto de sala de aula, ficou o desejo de poder aprender mais. São exemplos disso a preparação de visitas de estudo, o planeamento de reuniões, a comunicação com os encarregados de educação e o desempenho de cargos organizacionais. Por mais que alguns desses deveres fossem vistos como meramente burocráticos, estes constituíram-se indispensáveis para um normal funcionamento da comunidade educativa. Outros deveres, como a celebração de dias comemorativos, permitiram a criação de um agradável ambiente académico. Desta forma, a professora estagiária considera-se imensamente satisfeita por ter, também ela, potenciado o envolvimento dos alunos na vida escolar.

Em jeito de conclusão, pode afirmar-se que a realização deste estágio pedagógico contribuiu, de modo substancial, para o crescimento pessoal e profissional da professora estagiária. Indubitavelmente, um dos aspetos que possibilitou o enriquecimento desta experiência foi o trabalho colaborativo com outros professores. Por esta razão, tanto na preparação de atividades letivas, como na preparação de atividades não letivas, não pode ser esquecida a partilha de conhecimentos e de pontos de vista com outros colegas de profissão.

SEGUNDA PARTE

1. INTRODUÇÃO

A presente investigação encontra-se organizada em cinco capítulos. No primeiro capítulo, abordam-se a motivação e a pertinência do estudo, bem como o objetivo e as questões de investigação. O segundo capítulo é dedicado à revisão de literatura e está dividido em quatro subcapítulos, começando por referir a álgebra e as inequações no 3.º ciclo do ensino básico, seguindo-se para a definição e os tipos de problema, para a resolução de problemas e, por fim, para a formulação de problemas. No terceiro capítulo, é realizada uma contextualização da metodologia, nomeadamente da investigação qualitativa, do estudo de caso, das técnicas de recolha de dados e dos procedimentos metodológicos adotados na investigação. No quarto capítulo, expõem-se os estudos de caso e a respetiva análise. Finalmente, no quinto capítulo, são apresentadas as conclusões do estudo, assim como as sugestões para trabalhos futuros.

1.1 Motivação e pertinência do estudo

Gosto de perspetivar a matemática como sendo a arte de pensar. Pensar é importar-se mais com o processo do que com o próprio resultado. Pensamos em tudo e quando estamos perante um problema no nosso quotidiano, pensamos em caminhos e estratégias para o resolver. Pois bem, na matemática acontece exatamente o mesmo. Na matemática, tal como na vida, questionamo-nos se estamos no melhor caminho, olhamos para os resultados das nossas escolhas e apercebemo-nos se estes fazem ou não sentido. A grande diferença entre a matemática e o mundo é que ninguém fora dela procura criar problemas, pelo menos se pensarmos num problema como uma situação que gera dificuldades a um sujeito. Contudo, a formulação de problemas assume uma dimensão importante em matemática.

No documento *Aprendizagens Essenciais* para o ensino de matemática no 9.º ano de escolaridade (DGE, 2018b), no tema da Álgebra, destaca-se que os alunos devem ser capazes de "Reconhecer, interpretar e resolver inequações do 1.º grau a uma incógnita e usá-las para representar situações em contextos matemáticos e não matemáticos." (p.11). Ora, para trabalhar este tópico pode-se recorrer à resolução e formulação de problemas envolvendo inequações do 1.º grau, sendo este um método para se trabalhar com as inequações em contextos variados.

Ponte (2005) afirma que a resolução de problemas permite aos alunos perceber a natureza da Matemática e desenvolver o gosto por esta disciplina. Outros autores (Boavida et al., 2008; Viseu et. al, 2016) concordam que a resolução de problemas permite desenvolver conhecimentos, capacidades e atitudes nos alunos que contribuirão para a sua formação global e das quais conseguirão tirar partido da matemática ao longo da vida. Para Boavida et al. (2008) e Vale et al. (2015), a formulação de problemas permite aos alunos não só aprofundar os conceitos, mas também a compreensão dos processos utilizados na resolução. Outros autores (Boavida et al., 2008; Miranda & Mamede, 2020; Schoevers et al., 2019; Silver, 1997) salientam, para além do desenvolvimento das capacidades matemáticas, o desenvolvimento da criatividade e o espírito crítico nos alunos, quando se pratica a formulação de problemas. Tais competências encontram-se, também, referidas no documento *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Martins et al., 2017).

Ainda que a resolução de problemas e a formulação de problemas/novas questões venham mencionadas diretamente em documentos oficiais (DGE, 2018b; Martins et al., 2017), a formulação de problemas ainda é uma realidade pouco comum dentro das salas de aula (Miranda & Mamede, 2020). Neste sentido, será interessante analisar o desempenho dos alunos nestas duas temáticas. Por todas estas razões e pelo facto de existir um gosto intrínseco da investigadora por problemas na disciplina de matemática, escolheu-se para esta investigação o tema da resolução e formulação de problemas envolvendo inequações do 1.º grau.

1.2 Objetivo e questões de investigação

O presente estudo tem como objetivo compreender o processo de resolução e formulação de problemas, dos alunos do 9.º ano de escolaridade, no âmbito das inequações do 1.º grau. De forma a alcançar o objetivo, consideraram-se as seguintes questões de investigação:

1. Como se caracteriza o processo de resolução de problemas que envolvam inequações do 1.º grau?
2. Como se caracteriza o processo de formulação de problemas que envolvam inequações do 1.º grau?

2. REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo serve de referencial teórico ao estudo em questão, abordando a álgebra e as inequações no 3.º ciclo do ensino básico, a definição e os tipos de problema, a resolução de problemas e, por último, a formulação de problemas. Os subcapítulos iniciam com uma contextualização, seguem para uma análise detalhada e terminam com as dificuldades que os alunos revelam nos demais assuntos em apreço (à exceção do segundo subcapítulo). O objetivo em abordar estas dificuldades é a de consciencializar a investigadora para as situações que possam ocorrer, numa tentativa de as minimizar. Cada um destes subcapítulos segue uma linha de encadeamento lógico de ideias, ao invés de seguir uma ordem cronológica das mesmas. Em alguns casos, optou-se por referências mais antigas, em detrimento de outras mais recentes, por se considerar estarem mais de acordo com a motivação e as questões de investigação previamente apresentadas. Noutros casos, as referências mais antigas foram incluídas, para que se perceba a evolução de algum conceito ou ideia.

2.1 A álgebra e as inequações no 3.º ciclo do ensino básico

Segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007), os programas de ensino de Álgebra devem, desde o pré-escolar até ao 12.º ano de escolaridade, permitir aos alunos: (i) Compreender padrões, relações e funções; (ii) Representar e analisar situações matemáticas usando símbolos algébricos; (iii) Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; (iv) Analisar a variação em diversos contextos. No 3.º ciclo do ensino básico, espera-se que os alunos sejam capazes de recorrer à Álgebra sistematicamente (Canavarro et al., 2021a). Com vista à descoberta de valores desconhecidos ou à relação entre grandezas, os alunos devem, neste ciclo de ensino, estabelecer relações algébricas entre quantidades desconhecidas, expressar a generalidade por representações adequadas e modelar processos para descrever e fazer previsões (Canavarro et al., 2021a). Relativamente à compreensão da variação em situações diversas, esta deve fazer-se através do estudo de funções e de sucessões (Canavarro et al., 2021a).

No 7.º ano de escolaridade, no tema da Álgebra, os subtópicos a lecionar são as leis de formação de sequências e sucessões, as equações e resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita (sem parênteses e sem denominadores), o significado de função, as representações de funções e, por fim, as funções de proporcionalidade direta (Canavarro et al., 2021a). No 8.º ano de escolaridade, os subtópicos são os polinómios e as operações com polinómios, as equações literais, a resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita (com denominadores e com parênteses), os sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas e, ainda, as funções afins (Canavarro et al., 2021b). Segundo o documento atualmente em vigor no 9.º ano de escolaridade (DGE, 2018b), neste nível de ensino abordam-se as leis de formação (que podem incluir expressões algébricas do 2.º grau), as equações e resolução de equações do 2.º grau (com uso da fórmula resolvente), as inequações do 1.º grau a uma incógnita e as funções quadráticas e de proporcionalidade inversa. Contudo, no documento das *Aprendizagens Essenciais* que entrará em vigor no próximo ano letivo (Canavarro et al., 2021c), vão passar a tratar-se no 9.º de escolaridade os casos notáveis da multiplicação, a decomposição de polinómios em fatores, as equações do 2.º grau, a resolução de equações do 2.º grau completas e incompletas (sem o uso da fórmula resolvente) e as inequações do 1.º grau a uma incógnita. No que diz respeito às funções, este tópico não mudará. Em relação aos conteúdos dos casos notáveis da multiplicação, da decomposição de polinómios em fatores e da resolução de equações do 2.º grau incompletas, estes faziam parte das antigas Aprendizagens Essenciais do 8.º ano de escolaridade, que vigoraram até ao ano letivo passado (DGE, 2018a). O uso da fórmula resolvente passará, assim, para o 10.º ano de escolaridade, já no próximo ano letivo, nas disciplinas de matemática dos cursos profissionais, matemática B e matemática A (Carvalho e Silva et al., 2023a, 2023b, 2023c).

O documento *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico* (MEC, 2013), que vigorou entre os anos de 2013 e 2021, fazia referência às inequações como uma relação de desigualdade entre duas funções afins, existindo nessa mesma relação soluções e conjunto-solução. Os alunos deveriam interiorizar conceitos como inequações possíveis, inequações impossíveis e inequações equivalentes. Neste documento, vinham descritos três princípios de equivalência entre inequações, que permitem simplificar inequações e determinar o seu conjunto-solução: (i) adicionar/subtrair o mesmo número a ambos os membros; (ii) multiplicar ou dividir ambos os membros pelo mesmo número positivo; (iii) multiplicar ou dividir ambos os membros pelo mesmo número negativo e inverter o sinal da desigualdade. O programa referia, ainda, que os alunos não só tinham de saber apresentar o conjunto-solução na forma de um intervalo, como também resolver disjunções e conjunções de inequações. Por fim, destacava-se a capacidade que os alunos deveriam adquirir de resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau. No documento atualmente em vigor no 9.º ano de escolaridade (DGE, 2018b), é referido que os alunos devem reconhecer, interpretar e resolver inequações do 1.º grau a uma incógnita, utilizando-as para representar contextos matemáticos e não matemáticos. Destaca-se, também, a resolução de problemas que possam ser representados através de inequações, concebendo e aplicando estratégias de resolução, incluindo a tecnologia e avaliando a plausibilidade de resultados. Estes objetivos de aprendizagem também estão presentes no documento que entrará em vigor no próximo ano letivo no 9.º de escolaridade (Canavarro et al., 2021c), onde se destacam as ações estratégicas de ensino do professor:

> (i) apresentar um conjunto de números e pedir aos alunos que averiguem se entre eles existem soluções de uma dada inequação, desenvolvendo o seu sentido crítico;
> (ii) dar um conjunto de números e pedir exemplos de inequações que os admitam como soluções e exemplos de inequações sem soluções no conjunto dado;
> (iii) incentivar a representação geométrica das soluções de uma inequação e verificar se alguns valores particulares pertencem ao conjunto solução;
> (iv) resolver inequações em contextos/problemas que impliquem a "exclusão" de uma parte das soluções. (Canavarro et al., 2021c, pp. 24-25).

Ponte et al. (2009) reconhecem que as dificuldades mais comuns na resolução de inequações são: (i) não compreender o que é uma inequação e qual a natureza do seu conjunto-solução; (ii) aplicar indevidamente as regras de resolução das equações, multiplicando ambos os membros por um número negativo sem inverter o sinal da desigualdade; (iii) estabelecer incorretamente a interseção e reunião de conjuntos-solução em situações de conjunção e disjunção de condições.

2.2 A definição e os tipos de problemas

No ensino da matemática, a definição de *problema* não é consensual entre professores e investigadores. Alguns autores (Alvarenga & Vale, 2007; Kantowski, 1977; NCTM, 2007; Vale & Pimentel, 2004) consideram que um indivíduo está perante um *problema* sempre que este se confronta com uma questão a que não consegue à partida, e utilizando os conhecimentos imediatamente disponíveis, dar resposta. Lester (1980) concorda com esta definição e acrescenta que, para estarmos na presença de um *problema*, tem de existir um desejo, por parte do indivíduo, em realizar a tarefa e procurar a solução da mesma. Dumas-Carré et al. (1989) interpretam um *problema* como sendo uma situação ambígua que envolve dificuldades na procura do caminho a seguir, resultantes da interação entre a situação e aquele que a resolve num determinado momento. Assim, o facto de se tratar de um *problema* ou de um *exercício* depende do indivíduo ser conhecedor, ou não, de técnicas que lhe permitam resolver rapidamente a questão (Blum & Niss, 1991; Dumas-Carré et al., 1989; Ponte, 1992; Proença, 2018; Vale & Pimentel, 2004).

Para Ponte (1992), é consensualmente aceite a distinção entre *problema* e *exercício*, mas outros termos foram surgindo e, o que para alguns autores podem ser considerados sinónimos de *problemas,* para outros não o são (Vale, 2000). Um desses termos é *investigação*. Por exemplo, Ernest (1996) considera que um *problema* se encontra formulado e obtém-se uma solução e, em contrapartida, numa *investigação* pressupõe-se a formulação e a exploração do problema, onde se pode obter, ou não, uma solução quando se exploram todos os caminhos possíveis. Ponte (2005) afirma que um *problema* é uma tarefa fechada com elevado grau de desafio e, em oposição, uma *investigação* é uma tarefa aberta com um elevado grau de desafio. Este autor entende por tarefa fechada aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e por tarefa aberta a que possui uma certa indeterminação nos dados, no pedido, ou em ambos. Por grau de desafio, entende a perceção do grau de dificuldade.

Ao contrário de Ponte (2005), Pehkonen (1991) valoriza a distinção entre *problemas abertos* e *problemas fechados: problemas abertos* são aqueles cujo enunciado e/ou objetivo é aberto, pelo que o aluno desempenha um papel importante na sua definição; *problemas fechados* são aqueles cujo enunciado e/ou objetivo é fechado, pelo que são dadas indicações explícitas do que é dado e do que é pedido. Contudo, Fonseca e Gontijo (2020) entendem que num *problema aberto* se admitem múltiplas possibilidades de resolução, enquanto num *problema fechado* existe uma quantidade limitada de possibilidades de resolução. Já Pólya (1981) diferencia os problemas da seguinte forma: (i) os que se resolvem mecanicamente, aplicando um processo que se acabou de aprender; (ii) os que se podem resolver aplicando um processo já aprendido, mas em que o resolvedor toma alguma decisão; (iii) os que combinam duas ou mais regras ou exemplos dados em aula; (iv) os que envolvem a combinação de duas ou mais regras, contêm ramificações e requerem algum grau de raciocínio pessoal. Nesta perspetiva, o autor considera que os tipos de problemas com maior grau de interesse pedagógico são os tipos (iii) e (iv). Boavida et al. (2008) propõem três tipologias: (i) *Problemas de cálculo*- problemas com uma solução e onde a estratégia de resolução consiste em tomar a decisão da operação ou operações a implementar; (ii) *Problemas de processo*- problemas com uma única solução que utilizam uma ou várias estratégias, mais complexas e que exigem um pensamento flexível e organizado; (iii) *Problemas abertos*- problemas que podem ter mais de um caminho e mais do que uma solução correta, envolvendo diversas estratégias exploratórias que apelam ao raciocínio e espírito crítico. De notar que a classificação destes autores se assemelha à apresentada, anteriormente, por Pólya (1981). Por sua vez, Blum e Niss (1991) fazem uma distinção diferente, baseada no contexto. Dividem os tipos de problemas em *problemas matemáticos aplicados* e *problemas matemáticos puros:* num *problema matemático aplicado,* a situação e as questões que o definem pertencem a alguma parte do quotidiano e do mundo real, mas envolvem conceitos, métodos e resultados matemáticos; já num *problema matemático puro,* "a situação está completamente submersa no universo matemático" (p.38). Ponte (1992) distingue os tipos de problema em *problemas puramente matemáticos* e *problemas da vida real*, uma vez que a sua resolução envolve raciocínios bem diferentes. Díaz e Poblete (2005) apresentam quatro tipos de problemas distintos, também relativamente ao contexto em que se inserem: (i) *Problema de contexto real*- é produzido, efetivamente, na realidade e envolve a ação dos alunos; (ii) *Problema de contexto realista*- trata-se de uma simulação da realidade ou de uma parte dela, pelo que pode, realmente, ocorrer; (iii) *Problema de contexto fantasioso*- surge como fruto da imaginação, sem fundamento na realidade; (iv) *Problema de contexto puramente matemático*- refere-se, exclusivamente, a objetos matemáticos (números, relações, operações aritméticas, figuras geométricas, etc.).

2.3 A resolução de problemas

Foi a partir dos anos 80 que se reconheceu a resolução de problemas como uma das orientações fundamentais para o ensino da Matemática (APM, 1988; NCTM, 1985). Vale e Pimentel (2004) definem a resolução de problemas como o conjunto das ações que são tomadas para resolver um dado problema. Lester (2013) encara a resolução de problemas como uma atividade que requer ao indivíduo o envolvimento numa diversidade de ações cognitivas, que exigem algum tipo de conhecimento ou capacidade, algumas das quais não rotineiras. O documento das novas *Aprendizagens Essenciais* (Canavarro et. al, 2021c) refere como objetivos de aprendizagem que os alunos reconheçam e apliquem as etapas do processo de resolução de problemas, apliquem e adaptem estratégias diversas de resolução de problemas, nomeadamente com recurso à tecnologia, e, por último, que reconheçam a correção, a diferença e a eficácia dessas diferentes estratégias de resolução.

Na literatura, existem vários métodos de resolução de problemas, o que levou ao desenvolvimento de diversas abordagens para ensinar a resolver problemas. Destacam-se os métodos heurísticos. Correia (2005) explica que estes métodos de resolução correspondem a "operações mentais" que se aplicam a um número alargado de problemas e que permitem ao aluno familiarizar-se com várias estratégias de resolução. Para Fernandes (1992), os métodos heurísticos são importantes dado que parecem motivar e promover uma aprendizagem ativa dos alunos. Ainda assim, Viseu et. al (2016) reconhecem que este tipo de abordagem não apresenta ser um caminho claro para os alunos, uma vez que se baseia na intuição e nas circunstâncias. Pólya (1945) propõe um modelo heurístico de resolução de problemas que envolve quatro fases: (i) *Compreender o problema*- consiste em interpretar, compreender verbalmente e identificar as partes principais do problema, isto é, as incógnitas, os dados e as condicionantes; (ii) *Idealizar um plano*- consiste em estabelecer, selecionar ou inventar um caminho que, partindo dos dados do problema, leve à obtenção da solução do problema, podendo ser necessário recorrer à experiência passada e a conhecimentos previamente adquiridos; (iii) *Executar o plano*- consiste em concretizar o trabalho identificado no passo anterior, sendo nesta fase que se testam as conjeturas, o que pode dar origem a um processo cíclico e dificultoso caso seja necessário encontrar novos planos; (iv) *Examinar a solução obtida*- consiste em fazer uma análise retrospetiva do plano, testar se a solução encontrada satisfaz as condições do enunciado e, ainda, tentar encontrar generalizações. Boavida et al. (2008) consideram que nem sempre a distinção entre a segunda e a terceira fase de Pólya (1945) é fácil, na medida em que quando se estabelece um plano, este começa imediatamente a ser desenvolvido. Por esta razão, estes autores apostam na junção da segunda e terceira fases de Pólya (1945), transformando-as numa só fase e ficando com três fases no total: (i) *Ler e compreender o problema;* (ii) *Fazer e executar um plano;* (iii) *Verificar a resposta.* Proença (2018) sugere quatro fases de resolução de problemas: (i) *Representação*- consiste em compreender o problema, (ii) *Planeamento*- consiste em elaborar/propor uma estratégia de resolução; (iii) *Execução*- consiste em colocar em prática a estratégia elaborada; (iv) *Monitorização*- consiste em conferir o processo de resolução e a validade da resposta.

Como a resolução de problemas requer a adoção de estratégias, Vale e Pimentel (2004) apresentam algumas delas: (i) *Descobrir um padrão/regra ou lei de formação*- centra-se em certos passos do problema e, ao generalizarem-se soluções específicas, chega-se à solução do problema; (ii) *Fazer tentativas/conjeturas*- adivinha-se a solução, segundo os dados do problema, e confirma-se se esta verifica ou não as condições do problema; (iii) *Trabalhar do fim para o princípio*- começa-se pelo fim ou pelo que se quer provar; (iv) *Usar dedução lógica/fazer eliminação*- encaram-se todas as hipóteses e eliminam-se, uma a uma, as que não são possíveis; (v) *Reduzir a um problema mais simples/simplificação*- envolve a resolução de um caso particular de um problema, aparecendo, normalmente, associada à estratégia de descoberta de um padrão; (vi) *Fazer uma simulação/experimentação/dramatização*- consiste em utilizar objetos, criar um modelo ou fazer uma dramatização que traduza o problema em causa; (vii) *Fazer um desenho, diagrama, gráfico ou esquema*- representa-se o problema através de um desenho, diagrama, gráfico ou esquema; (viii) *Fazer uma lista organizada ou tabela*- utiliza-se como estratégia de resolução ou para representar, organizar e guardar a informação. Por outro lado, Freire et al. (2004) dividem em quatro estratégias: (i) *Estratégia simbólica*- as respostas envolvem uma resolução através do uso de equações; (ii) *Estratégia numérica*- envolve, apenas, o uso de números e operações aritméticas; (iii) *Estratégia icónica*- envolve o uso de figuras para representar as quantidades e relações envolvidas nos problemas; (iv) *Estratégia mista*- envolve o uso combinado das três anteriores.

Proença et al. (2022) afirmam que os alunos apresentam dificuldades em todas as etapas do processo de resolução de problemas. Os alunos revelam fragilidades na leitura e na compreensão de textos, isto é, na falta de compreensão de um conceito envolvido no problema ou no uso de termos específicos matemáticos (Kuntz, 2019; Vieira et al., 2020). Silva (2016) realça que os alunos pensam em aplicar estratégias semelhantes àquelas que já foram utilizadas noutros contextos. Silva (2015) aponta como dificuldade a transformação do problema em linguagem matemática. Outros alunos manifestam dificuldades no uso de algoritmos e técnicas (Kuntz, 2019; Silva, 2015; Vieira et al., 2020). Piva (2014) refere que, possivelmente, os alunos não relacionam o contexto e a solução, uma vez que não avaliam a resposta nem reveem a resolução. Rocha et al. (2024) concordam que os alunos nem sempre o fazem por não haver tempo para esse efeito ou por estarem familiarizados com a situação e não sentirem essa necessidade. Ainda assim, estes autores reconhecem que o surgimento de dúvidas na interpretação da solução obtida leva a que os alunos validem o resultado alcançado de diferentes formas. Deste modo, para Henriques (2010), as dimensões para um bom desempenho na atividade de resolução de problemas incluem: (i) conhecimento matemático; (ii) domínio de estratégias; (iii) controlo sobre o processo de trabalhar um problema.

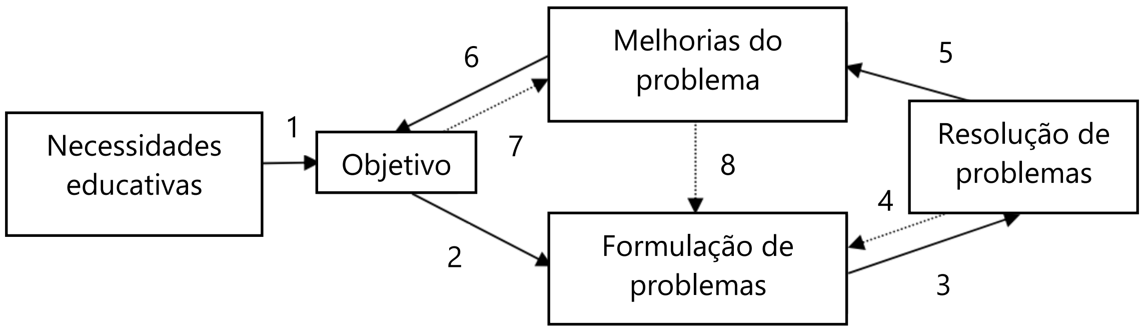
2.4 A formulação de problemas

Boavida et al. (2008) afirmam que a resolução de problemas fica empobrecida sem a articulação com a formulação de problemas. D' Amore (2014) considera que a formulação de problemas é uma forma de se inteirar da resolução de problemas, não sendo, por isso, consideradas problemáticas opostas, mas sim muito próximas. Silver (1997) considera que a formulação de problemas se refere tanto à criação como à reformulação de problemas. Para Cai et al. (2020) as tarefas de formulação de problemas são aquelas que requerem que os alunos criem problemas e questões baseadas em situações pré-determinadas, expressões matemáticas, diagramas ou outros. Nas novas *Aprendizagens Essenciais* (Canavarro et al., 2021c) é referido que os alunos devem "formular problemas a partir de uma situação dada, em contextos diversos (matemáticos e não matemáticos)" (p. 12).

Stoyanova (1998) identifica três categorias de formulação de problemas: (i) *situações livres*- os alunos são desafiados a criar um problema, a partir de uma situação real ou artificial, com algumas orientações do que se espera que seja alcançado; (ii) *situações semiestruturadas*- é dada aos alunos uma situação aberta, de forma a que estes possam explorá-la e completá-la a partir das suas experiências matemáticas anteriores ou, então, criar problemas tendo como base a apresentação de figuras ou expressões; (iii) *situações estruturadas*- os alunos criam problemas através da reformulação de problemas já resolvidos ou através da alteração de condições ou questões de uma situação problemática conhecida.

Para Ramírez (2006), a formulação de problemas envolve a realização de três procedimentos: formular, resolver e melhorar (Figura 1). Este autor considera que o processo começa com as *necessidades educativas,* podendo estas ser reais ou fictícias e que darão origem ao *objetivo* a ser alcançado (1). Posteriormente, o aluno ou professor avança para a *formulação de problemas* (2) e, de seguida, para a *resolução de problemas* (3). Nesta fase, poderá existir a necessidade de retomar à *formulação de problemas* (4). Caso tal necessidade não se verifique, avança-se para as *melhorias do problema* (5), na tentativa de encontrar correções, melhorias ou variações no grau de complexidade do problema formulado. Continua-se, depois, para a confirmação de que o problema formulado está de acordo com o *objetivo* (6). No caso de o problema não estar de acordo com o *objetivo,* existem duas possibilidades: recomeçar, a partir da *formulação de problemas* (8), e descartando tudo o que havia sido feito anteriormente ou retornar à fase anterior das *melhorias do problema* (7), para se efetuarem possíveis ajustes.

Figura 1- A estrutura do metaproblema



Nota. Adaptado de Ramírez (2006, p. 5)

El Sayed (2002), com base nas categorias de Stoyanova (1998), apresenta diferentes estratégias de formulação de problemas: (i) *situações livres*- inventar um problema simples ou mais difícil, construir um problema para uma competição matemática/teste ou inventar um problema que se goste; (ii) *situações semiestruturadas*- elaborar problemas abertos (por exemplo investigações matemáticas), problemas semelhantes a um problema pré-definido ou conhecido, problemas relacionados com dados ou teoremas específicos, problemas derivados de figuras ou problemas de palavras; (iii) *situações estruturadas*- modificar um enunciado de um problema para propor outro novo, ou manter os dados e alterar o que é pedido. Vale e Pimentel (2004) apontam cinco estratégias de formulação de problemas: (i) *Aceitar os dados*- a partir de determinada situação, tal como uma definição, condição, objeto, figura ou tabela, formulam-se situações que constituam problemas; (ii) *E se em vez de*- a partir de uma determinada situação, identificam-se as suas propriedades, nega-se uma delas e, posteriormente, formulam-se perguntas que, por sua vez, podem originar a negação de outra propriedade e mais perguntas; (iii) *Variação de um problema*- a partir de um problema, podemos obter outros problemas por meio de decomposição, recomposição, analogia, particularização ou generalização; (iv) De *problema para problema*- a partir de um problema original e da sua resolução, desenvolvem-se outros problemas, modificando algumas condições ou atributos do problema original; (v) *Recontextualização*- a partir da resolução de um problema, identificam-se características, formulam-se novos problemas fixando essa característica e envolvendo-se em um novo contexto. Boavida et al. (2008) perspetivam uma visão mais simples e consideram duas estratégias: (i) *Aceitar os dados*- o processo de formulação de problemas dá-se a partir de dados pré-estabelecidos; (ii) *E se em vez de*- o processo de formulação de problemas dá-se a partir da modificação do contexto ou parte do problema anterior para a construção de um novo.

No estudo de Zunino (1995) sobre a formulação de problemas, alguns dos seus alunos apresentaram problemas cuja resposta estava presente no enunciado e a pergunta ausente, outros apresentaram problemas onde nem a pergunta nem a resposta estavam presentes e, ainda, havia casos em que o enunciado formulado não estava de acordo com a operação que deveria ter sido empregue. Cunha et al. (2014) constatam que na formulação de problemas que envolvam expressões algébricas, o número de condicionantes que integram essas situações influencia o modo como os alunos as interpretem, estabelecem relações e formulam o enunciado. Estes autores realçam, também, que a ausência de criatividade é um dos motivos pelo qual os alunos recorrem aos exemplos do manual para formular problemas. Miranda e Mamede (2023) identificaram casos de alunos que não costumam apresentar dificuldades, mas que, durante a formulação de problemas, sentiram uma maior insegurança na mobilização dos seus conhecimentos, dado que esta atividade aparentava ser inovadora. Vários autores (Gonçalves, 2011; Miranda & Mamede, 2020; Miranda & Mamede, 2023; Spinillo et al., 2017) reconhecem que a dificuldade dos alunos advém de estarem pouco familiarizados com a formulação de problemas, facto que condiciona a formulação de problemas mais complexos e ousados (Miranda & Mamede, 2020).

3. METODOLOGIA

Este capítulo encontra-se dividido em quatro subcapítulos. Os três primeiros subcapítulos dizem respeito a um referencial teórico que serve de apoio às metodologias a utilizar numa investigação, abordando-se a investigação qualitativa, o estudo de caso e as técnicas de recolhas de dados. Já o último subcapítulo, pormenoriza as metodologias adotadas neste estudo, as quais se consideram ser as mais adequadas para atingirem o objetivo e responderem às questões de investigação apresentadas inicialmente.

3.1 Investigação qualitativa

De acordo com Amado (2017), a investigação qualitativa mostra uma visão holística da realidade que se pretende investigar. Este autor afirma que se procura entender essa realidade através de processos inferenciais e indutivos, isto é, através da construção de hipóteses durante e após a análise dos dados. Para Bogdan e Biklen (1994), os dados recolhidos são ricos em pormenores descritivos, sendo o objetivo compreender os sujeitos com base nos seus pontos de vista. Para estes autores, a investigação qualitativa é "um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características" (p.16). Consideram-se cinco características que, segundo estes autores, numa investigação qualitativa não necessitam de existir simultaneamente:

(i) O investigador é o principal instrumento de recolha de dados, sendo estes extraídos em ambiente habitual. O investigador procura frequentar os locais de estudo, uma vez que as ações são melhor compreendidas quando observadas em meio normal de ocorrência.

(ii) Os dados surgem na forma de palavras ou imagens, ao invés de números. Estes dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos ou outros registos oficiais. O investigador deve respeitar a forma como os dados são registados ou transcritos, analisando minuciosamente cada palavra ou expressão que, normalmente, passariam despercebidos;

(iii) O investigador interessa-se mais pelo processo do que pelo produto ou resultado, pois este traduz os procedimentos ocorridos e procura compreender as formas de pensar ou interagir;

(iv) Os dados são analisados de forma indutiva, dado que o investigador não procura confirmar ou inferir hipóteses. A investigação é baseada num conjunto de peças individuais de informação que, posteriormente, serão inter-relacionadas;

(v) O investigador questiona continuamente os sujeitos de investigação, uma vez que procura perceber as diferentes perspetivas dos participantes face ao objeto em estudo.

Amado (2017) refere aspetos éticos a manter numa investigação qualitativa, como o respeito pelos participantes, os cuidados a ter para manter o anonimato dos mesmos, o uso indevido da informação, a fidelidade e o rigor no registo de situações e transcrições, a disponibilização para coautorias, a aplicação benéfica do conhecimento produzido e a adoção de uma postura crítica face a situações que coloquem em causa valores universais. Relativamente à ética numa investigação qualitativa em educação, Given (2008) afirma que, para além do anonimato e do tratamento devido da informação, é necessária a autorização dos pais das crianças e da instituição.

3.2 Estudo de caso

Amado (2017) considera que um estudo de caso pode consistir no estudo de um indivíduo, acontecimento, organização, programa, reforma, mudanças ocorridas numa região, etc. O estudo de caso é um dos métodos mais comuns na investigação qualitativa (Aires, 2015; Bogdan & Biklen, 1994) e, segundo Yin (2003), é uma estratégia adequada quando se pretende responder a questões de "como" e "porquê". Para Johnson e Christensen (2014) um estudo de caso é uma pesquisa qualitativa que envolve a descrição detalhada de um ou mais casos. Ponte (2006) afirma que os estudos de caso têm uma grande popularidade na investigação em Educação Matemática.

Bogdan e Biklen (1994) distinguem os estudos de caso em três tipos: (i) *estudos de caso de organizações numa perspetiva histórica*- incidem em organizações específicas, durante um período, com o intuito de relatar o seu desenvolvimento; (ii) *estudos de caso de observação*- consiste na observação participante, centrando-se o estudo numa organização particular ou nalgum aspeto dentro dessa organização; (iii) *histórias de vida*- consiste em realizar entrevistas exaustivas, com uma pessoa, a fim de compilar uma narrativa na primeira pessoa.

Num estudo de caso, Ponte (1994) destaca a importância de uma orientação teórica, que sirva de suporte às questões de investigação, à recolha de dados e à análise de resultados. Ao elaborar um estudo de caso, os investigadores começam por procurar locais e pessoas que possam ser objeto de estudo e, ao encontrarem aquilo que pensam interessar-lhes, procuram indícios de como deverão proceder e qual a possibilidade do estudo se realizar (Bogdan & Biklen, 1994). Por conseguinte, deve ser claro quem serão os participantes, quantos serão, quais as suas características e como serão selecionados para o estudo em causa (Johnson & Christensen, 2014).

Yin (2003) enumera uma lista de características do perfil de um bom investigador de estudo de caso: (i) ser capaz de fazer boas perguntas e interpretar as respostas; (ii) ser bom ouvinte e não ficar preso às suas ideologias ou preconceitos; (iii) ser adaptável e flexível, para que novas situações sejam vistas como oportunidades e não como ameaças; (iv) ter uma compreensão sólida das questões em estudo; (v) ser imparcial por noções pré-concebidas, incluindo aquelas que possam derivar da teoria.

3.3 Técnicas de recolha de dados

Segundo Aires (2015), num estudo de caso, a seleção das técnicas de recolha de dados é uma etapa fundamental para o investigador, já que a concretização do seu objetivo de investigação está dependente das mesmas.

Aires (2015) considera que as técnicas de recolhas de dados se agrupam em dois grandes blocos: (i) *Técnicas diretas ou interativas*- incluem a observação participante, as entrevistas qualitativas e as histórias de vida; (ii) *Técnicas indiretas ou não interativas*- incluem documentos oficiais (registos, documentos internos, dossiers, estatutos e registos pessoais) e os documentos (diários, cartas e autobiografias). Para Yin (2003), as principais fontes de recolha de dados, em estudos de caso, são os documentos, os registos de arquivo, as entrevistas, as observações diretas, as observações participantes e os artefactos físicos.

Ao reconhecer que a lista de fontes existentes para recolha de dados, num estudo de caso, é bastante extensa, Yin (2003) refere que nenhuma fonte se destaca positivamente relativamente às outras. Por esta razão, e também devido ao carácter holístico de um estudo de caso, pode dizer-se que este será tanto melhor quanto maior for a variedade de técnicas de recolha de dados presentes nele. (Amado, 2017; Yin, 2003)

3.3.1 Observação

Aires (2015) considera que “a observação consiste na recolha de informação, de modo sistemático, através do contacto direto com situações específicas” (pp. 24-25). Cohen et al. (2007) afirmam que em estudos de observação, os investigadores são capazes de perceber o comportamento dos agentes de estudo conforme este vai ocorrendo, tal como de fazer anotações apropriadas sobre as suas principais características.

Yin (2003) divide as observações em dois tipos: (i) *observação direta*- o investigador analisa os comportamentos tendo em conta a realidade e o contexto em que se inserem; (ii) *observação participante*- o investigador adota um papel de observador ativo, ao invés de passivo, podendo participar nas atividades e nos acontecimentos que estão a ser estudados. Cohen et al. (2007) reparte as observações em três tipos: (i) *observação altamente estruturada*- o investigador procura o que foi planeado antecipadamente; (ii) observação *semiestruturada*- o investigador baseia-se num conjunto de questões definidas, mas num grau menos estruturado que a anterior; (iii) *observação não estruturada*- o investigador não antecede nem determina o que pretende investigar. Deste modo, os autores consideram que o primeiro tipo de observação permite testar hipóteses, enquanto os dois últimos possibilitam as suas criações. De acordo com Olabuénaga (2012), as observações distinguem-se pelos seguintes critérios: (i) *estratégias de observação*- o investigador participa, ou não, no fenómeno que se observa*;* (ii) *níveis de sistematização*- o investigador fixa, ou não, as categorias, os grupos, etc.; (iii) *graus de controlo*- o investigador controla e manipula, ou não, a situação. Ainda assim, Bogdan e Biklen (1994) realçam que, enquanto investigador, é necessário saber calcular, a cada momento, a quantidade certa de participação e o modo como se participa.

Para Olabuénaga (2012), as vantagens dos métodos observacionais centram-se na facilidade de acesso aos locais de estudo, na não distorção da realidade do estudo, na redução dos efeitos provenientes da presença do investigador e, por fim, no rigor do estudo quando combinado com outros métodos de recolha de dados. Em contrapartida, este autor aponta como desvantagens o facto de existirem fenómenos que não são diretamente observáveis, isto é, são tão profundos que a observação não os consegue explicar e é necessário uma reflexão da parte do investigador. Assim sendo, a observação pode tornar-se enviesada por se estabelecer algum tipo de convicção ou mecanismo emocional pelo investigador.

3.3.2 Entrevista

A entrevista consiste num método de recolha de dados onde o investigador faz perguntas ao investigado, com o intuito de recolher os dados que o entrevistado esteja disposto a fornecer (Johnson & Christensen, 2014). No campo da investigação em educação matemática, este é um método muito utilizado, uma vez que permite analisar o pensamento do professor e do aluno, descrevendo os processos que conduzem a uma determinada decisão ou conhecendo os meios de aprendizagem (Aires, 2015).

Para Amado (2017), quanto às funções, as entrevistas podem ser de: (i) *investigação-controlo*- avaliam a adequação de processos; (ii) *diagnóstico-caracterização*- fornecem pistas para a caracterização de processos; (iii) *terapêuticas*- ajudam e aconselham pessoas. Aires (2015) considera três características que podem diferenciar as entrevistas: (i) as desenvolvidas entre duas pessoas ou entre um grupo de pessoas; (ii) as que abordam um ou vários temas; (iii) as que envolvem maior ou menor grau de estruturação. Amado (2017) distingue três tipos de estruturação: (i) *entrevista estruturada ou diretiva*- centra-se num tema determinado e restrito; (ii) *entrevista semiestruturada ou semidiretiva*- centra-se em questões que derivam de um guião prévio, dando liberdade de resposta ao entrevistado, mas abordando o essencial*;* (iii) *entrevista não estruturada ou não-diretiva*- centram-se em questões que derivam da interação, não existindo um guião prévio de questões. Amado (2017) reconhece, ainda, outras duas modalidades de entrevista: (i) *entrevista de grupo*- o investigador interessa-se pelo grupo e pelo que é vivido pelo grupo; (ii) *entrevistas com grupos de referência ou grupo focal*- o investigador envolve um grupo de representantes de uma determinada população na discussão de um tema, estimulando a interação e assegurando que a discussão não extravase o foco. Neste último tipo de entrevista, a interação no interior do grupo é a principal fonte de produção de dados, e procura-se dar conta da experiência, das atitudes, dos sentimentos e das crenças dos participantes acerca do tema em causa (Amado, 2017). Aires (2015) aborda o *grupo de discussão* em contextos educativos: esta técnica deve ser inserida naturalmente no decurso das atividades aí desenvolvidas, pelo que os participantes, os espaços e as temáticas dos grupos são os que fazem parte do contexto sociocultural.

Yin (2003) aponta como vantagens da entrevista o facto de se focar diretamente no tópico do estudo de caso e fornecer inferências causais percebidas. Como desvantagens, este autor destaca o enviesamento devido à construção pobre das questões e das respostas, as imprecisões devido à falta de lembrança e, também, o facto de o entrevistado dizer o que o entrevistador deseja ouvir. Relativamente às entrevistas com mais de um entrevistado, Fontana e Frey (1994) reconhecem que este tipo de entrevista é económico, proporciona muita informação, estimula os participantes e elabora mais respostas. Como desvantagem, os autores apontam que a cultura de grupo inferioriza a expressão individual, o grupo pode ser dominado por uma só pessoa e, como o pensamento do grupo é um possível resultado do processo, exige mais competências ao entrevistador na gestão das dinâmicas do grupo.

3.3.3 Recolha documental

As técnicas de recolha de dados discutidas até então, envolviam o uso de materiais em que o investigador tinha um papel importante na sua produção (Bogdan & Biklen, 1994). Johnson e Christensen (2014) mencionam a recolha de dados ou objetos produzidos pelos participantes durante o decurso da investigação como um método útil de recolha de informação. Patton (2002) concorda que os documentos, as gravações e os arquivos constituem fontes de informação bastante ricas numa investigação.

Vários autores (Aires, 2015; Amado, 2017; Bogdan & Biklen, 1994) distinguem os tipos de documentos em duas categorias: *documentos pessoais* e *documentos oficiais* ou *não pessoais*. Os documentos pessoais distinguem-se dos demais por estabelecerem uma relação muito direta com o seu autor (Amado, 2017), descrevendo as suas ações, experiências ou crenças (Aires, 2015). Constituem exemplos de documentos pessoais as anotações pessoais, os diários pessoais, as cartas pessoais e as autobiografias (Aires, 2015; Bogdan & Biklen, 1994). Já os documentos oficiais proporcionam informação sobre as organizações, a aplicação da autoridade, o poder das instituições educativas, os estilos de liderança, a forma de comunicação entre atores da comunidade educativa, etc. (Aires, 2015). São exemplo disso os memorandos, os comunicados, os comentários ocasionais dos professores, os relatórios psicológicos, os testes e os perfis da família (Bogdan & Biklen, 1994).

Para Yin (2003), a vantagem da recolha documental consiste no facto de o conteúdo poder ser revisto repetidamente, conter referências detalhadas e exatas e ter uma ampla cobertura no que diz respeito ao período temporal e ao ambiente em que se insere. Como desvantagem, este autor reconhece que os documentos podem ser de difícil recuperação, a sua seleção pode ser tendenciosa e refletir o enviesamento do autor e, por último, podem ser de difícil acesso ou até impossível.

3.3.4 Notas de campo

As notas de campo são "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Angrosino (2007) reconhece a importância de registar os dados de forma organizada e com a maior quantidade de detalhes possível. Contudo, os autores Bogdan e Biklen (1994) consideram que o investigador deve ser discreto no momento da escrita das suas notas: não se deve comprometer a mostrá-las, já que isso influenciaria as notas a registar; deve certificar-se que as deixa num local onde ninguém da instituição as pode encontrar, a fim de preservar a informação nelas contida; e por fim, deve registá-las em momentos adequados ao efeito, no próprio local de investigação, ou após a sua saída, de modo a evitar a escrita à frente dos participantes e a curiosidade destes em lê-las.

3.4 Procedimentos metodológicos adotados

O presente estudo foi implementado numa turma do 9.º ano de escolaridade, no ano letivo de 2023/2024. A turma em questão era constituída por 27 alunos, quatorze rapazes e treze raparigas. Para que o estudo retratasse o mais próximo possível a realidade destes alunos, optou-se pela abordagem dos assuntos desta investigação em contexto sala de aula de matemática. Assim, pode afirmar-se que este estudo está de acordo com a classificação de investigação qualitativa (Amado, 2017; Bogdan & Biklen, 1994). Adicionalmente, recorreu-se ao estudo de caso, uma vez que procuramos descrições detalhadas de casos da realidade que se pretende estudar (Johnson & Christensen, 2014). De forma a manter os aspetos éticos mencionados por Given (2008), a participação dos alunos neste projeto de investigação foi devidamente autorizada pelos encarregados de educação e pela direção do agrupamento de escolas (Anexo 9). De maneira que a identidade dos alunos fosse preservada, os seus nomes foram alterados para nomes fictícios.

3.4.1 Tarefas

A investigadora considerou, neste estudo, que os alunos estavam perante um problema sempre que estes não conseguiam, à partida e utilizando os dados imediatamente disponíveis, dar resposta a uma questão (Alvarenga & Vale, 2007; NCTM, 2007). Além disso, assumiu como definição de resolução de problemas o conjunto das ações tomadas pelos alunos que permitem resolver um determinado problema (Vale & Pimentel, 2004). Como formulação de problemas, assumiu a criação de problemas e questões baseadas em situações pré-determinadas, expressões matemáticas, diagramas ou outros (Cai et al., 2020). A tarefa criada para esta investigação (Anexo 10) encontra-se dividida em duas partes, uma de resolução de problemas e outra de formulação de problemas. Tomou-se a decisão de dividir o enunciado em duas partes, para que estas pudessem ser entregues aos alunos em momentos distintos. Assim, os alunos não se sentem obrigados a utilizar na primeira parte o conteúdo matemático expresso na segunda parte, isto é, as inequações do 1.º grau.

A primeira parte encontra-se organizada de acordo com uma complexidade crescente de estruturação dos problemas. Desde já, é de realçar que todos os problemas foram escolhidos pela investigadora pelo facto de se poderem resolver utilizando várias estratégias de resolução, o que permite compreender mais profundamente o processo de resolução de problemas. Deste modo, não se espera que os alunos recorram, somente, à tradução e resolução dos problemas por inequações do 1.º grau, ainda que o possam fazer. Esta parte inicia-se com um problema de contexto puramente matemático (Díaz & Poblete, 2005). Neste problema, a investigadora pretende perceber se os alunos percorrem a última etapa do processo de resolução de problemas proposto por Boavida et al. (2008), já que os valores do lado do triângulo só podem tomar valores positivos. Já os segundo e terceiro problemas diferem do primeiro por se tratarem de problemas de contexto realista (Díaz & Poblete, 2005). Por fim, o quarto problema é um problema de contexto fantasioso (Díaz & Poblete, 2005), cujo principal objetivo é perceber como lidam os alunos com a conjunção de duas inequações. Note-se que a escolha de problemas de diferentes tipos foi propositada, pois a investigadora acredita que o contacto dos alunos com problemas de contextos diversos poderá ajudá-los no processo seguinte da formulação de problemas.

Ao longo da segunda parte, procura-se perceber que estratégias utilizam os alunos na formulação de problemas. Esta parte não envolve, apenas, a formulação de problemas, mas também a resolução dos problemas criados. Tal situação foi pensada para que se percebesse melhor o processo de formulação de problemas apresentado por Ramírez (2006). Adicionalmente, esta parte encontra-se organizada segundo um grau decrescente de estruturação dos problemas. O quinto problema classifica-se, segundo Stoyanova (1998), como situação estruturada. Já os sexto e sétimos problemas são situações semiestruturadas (Stoyanova, 1998). Em contrapartida, o último problema é uma situação livre (Stoyanova, 1998). É de salientar que, na resolução do sexto problema, caso os alunos coloquem as incógnitas no primeiro membro e os termos independentes no segundo membro da inequação, ficarão com todos os coeficientes da inequação negativos. Assim sendo, a investigadora considerou interessante perceber como agem os alunos perante esta situação.

3.4.2 Sessões de trabalho e de recolha de dados

A turma realizou a tarefa proposta durante três aulas de 90 minutos, na sala de aula de matemática e no horário letivo habitual da disciplina. A primeira sessão de trabalho aconteceu no dia 8 de fevereiro e iniciou-se a primeira parte da tarefa. Na sessão do dia 14 de fevereiro, partiu-se para a segunda parte da tarefa. Desde o início, procurou-se que os alunos estivessem no seu ambiente habitual. Tal como nas restantes aulas, os alunos sentaram-se e trabalharam a pares, não tendo sido efetuadas alterações na disposição da sala ou de lugares entre alunos. Decidiu-se que os alunos trabalhariam a pares, em vez de individualmente, dado que a troca de opiniões entre os dois membros era importante para a aprendizagem dos mesmos. Para além disso, a turma pôde realizar a tarefa com recurso ao manual, caderno e calculadora. No momento da entrega do enunciado da tarefa a cada um dos pares, foram entregues folhas de papel em branco para a escrita da sua resolução.

Em todas as sessões de trabalho, os alunos foram observados pela investigadora, quer de modo participante, quer de modo não participante (Yin, 2003). A observação feita aos alunos enquanto estes resolviam a tarefa foi, maioritariamente, não participante, de forma a poder analisar-se o raciocínio dos alunos nos diferentes problemas. Já a observação participante ocorreu sempre que os alunos manifestaram dificuldades que os impediam de avançar na tarefa. Procedeu-se, ainda, à recolha de documentos pessoais (Aires, 2015), uma vez que todas as produções escritas pelos alunos durante as sessões de trabalho foram guardadas pela investigadora. No que diz respeito às notas de campo, estas foram registadas durante e após a execução da tarefa, do modo mais discreto possível (Bogdan & Biklen, 1994). No decorrer das sessões de trabalho, optou-se por gerar um grupo de discussão em contexto educativo (Aires, 2015). Para além deste tipo de entrevista, foram realizadas entrevistas de diagnóstico-caracterização (Amado, 2017), uma vez que se pretendia compreender melhor as decisões tomadas pelos alunos durante a realização da tarefa e caracterizar os processos de resolução e formulação de problemas.

3.4.3 Escolha dos participantes

Tendo em consideração o objetivo desta investigação, a escolha de participantes ocorreu de acordo com dois critérios: a autorização de participação no estudo e a diversidade de respostas. Primeiramente, teve-se em atenção a escolha de pares cujos encarregados de educação tivessem ambos permitido a participação neste estudo. Embora todos os alunos da turma tivessem realizado a tarefa em sala de aula e sido convidados a participar no estudo, um dos 27 alunos não teve autorização por parte dos encarregados de educação para o fazer. Posteriormente, e finda a recolha de dados, analisaram-se cada uma das resoluções dos pares de trabalho da turma. Foram selecionados três pares que, entre si, apresentavam diferentes estratégias e diferentes processos de resolução e formulação de problemas. Este critério teve como finalidade a incorporação de uma amostra de dados mais relevante ao estudo em apreço. Assim, selecionaram-se os pares André e Bruno, Carolina e Diana e, por último, Eduarda e Filipe.

4. ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo são analisados os estudos de caso desta investigação. Os três pares de participantes são alunos do 9.º ano de escolaridade, de uma das turmas que foi acompanhada pela investigadora durante todo o ano letivo.

No primeiro subcapítulo, é efetuada uma breve apresentação das características dos participantes que compõem os pares. A análise dessas características teve por base as experiências vividas pelos alunos, que foram observadas pela investigadora durante o decorrer das aulas do ano letivo. Relativamente à análise dos dados recolhidos, esta encontra-se dividida em dois subcapítulos: resolução de problemas e formulação de problemas. Por sua vez, cada um destes subcapítulos está fracionado pelos itens da tarefa. A análise dos dados fez-se de acordo com as notas retiradas pela investigadora, as propostas de resolução apresentadas, as conversas entre os pares de participantes e as conversas entre esses pares e a investigadora. Na transcrição dos diálogos, os elementos fictícios de cada par são identificados pelas letras iniciais dos seus nomes ("A" diz respeito a André, por exemplo) e a investigadora é identificada pela letra "I". Adicionalmente, os grupos também são abreviados pelas letras iniciais dos nomes dos alunos que o compõem (por "par AB" deve entender-se par André e Bruno, por exemplo)

4.1 Participantes

4.1.1 André e Bruno

O par André e Bruno dá-se muito bem, dentro e fora da sala de aula. Estes alunos realizam todas as tarefas propostas em conjunto, ajudando-se mutuamente. André e Bruno são esforçados, atentos e trabalhadores nas aulas de matemática. No momento de realização das tarefas, começam a concretizá-las de imediato. O André, se solicitado para resolver exercícios no quadro ou ajudar oralmente a professora a resolvê-los, é o primeiro a oferecer-se a fazê-lo. Contudo, apresenta algumas dúvidas na disciplina, resultantes do seu percurso curricular. André apresenta necessidades específicas e é abrangido por um relatório técnico-pedagógico. A sua evolução nas aprendizagens é notória e, nos 7.º e 8.º anos de escolaridade, terminou a disciplina de matemática com uma nota final de nível 2 e 3, respetivamente. Bruno, por outro lado, é mais tímido e demonstra alguma insegurança em errar perante a turma. Também ele mostra lacunas de conhecimento matemático, ainda que tenha terminado a disciplina com uma nota final de 3 nos dois últimos anos letivos.

Durante a realização de toda a tarefa de investigação, trocaram ideias e opiniões entre si. No entanto, revelaram pouca persistência, dado que chamaram a investigadora aquando do surgimento de qualquer dúvida. Na primeira parte da tarefa, os alunos tiveram um bom desempenho, ainda que sem nunca aplicarem os seus conhecimentos sobre inequações do 1.º grau a uma incógnita para resolverem os problemas. Através da segunda parte da tarefa, percebeu-se que este par sabia resolver inequações em contexto de problemas. De todos os grupos da sala, foram os que acabaram mais cedo, tendo só necessitado de uma sessão de trabalho de 90 minutos para resolverem as duas partes.

4.1.2 Carolina e Diana

A Carolina e a Diana são muito cúmplices e amigas, resolvendo todas as tarefas a par. São interessadas e organizadas. Ambas exteriorizam aquilo que pensam e, se não concordam com algo que foi proposto ou dito pela professora, manifestam-se de imediato. Sempre que lhes são apresentadas tarefas, realizam-nas rapidamente. Nos anos anteriores, o nível final destas alunas à disciplina de matemática foi 4.

Na realização da tarefa de investigação, mostraram persistência. Por pensarem que outras resoluções seriam demasiado simples e que não estariam de acordo com a última matéria lecionada, optaram por fazer uso das inequações. No momento de formulação de problemas, tentaram criar problemas diferentes daqueles que haviam visto. Este grupo terminou a tarefa dentro do tempo estipulado, isto é, terminou uma parte da tarefa em cada sessão de trabalho.

4.1.2 Eduarda e Filipe

O par Eduarda e Filipe têm uma boa relação e estão, não raras vezes, desatentos dentro da sala de aula. Aquando solicitados para realizar tarefas, mostram pouca vontade em começá-las. No entanto, revelam ter bons conhecimentos teóricos. Eduarda é uma aluna de excelência e disponibiliza-se a ajudar os colegas com mais dificuldades. A nota final de 7.º e 8.º anos de escolaridade desta aluna na disciplina de matemática foi de nível 5. Contrariamente, Filipe é um aluno muito brincalhão em sala de aula, pelo que distrai os colegas sentados em seu redor, incluindo a Eduarda. Tem boas capacidades matemáticas e, caso tenha dúvidas, não tem qualquer receio de solicitar a professora. Este aluno teve uma evolução positiva desde o início do 3.º ciclo, no que diz respeito à nota da disciplina de matemática. Com efeito, no 7.º ano obteve uma nota final de 3, enquanto que no 8.º ano obteve uma nota final de 4.

No decorrer da tarefa, Eduarda assumiu a liderança do grupo e, sempre que o seu colega não colaborava, não hesitava em avançar sozinha. Inclusivamente, mostrou-se frustrada quando não conseguia resolver os problemas com rapidez. Em contrapartida, Filipe levou estas sessões de trabalho com descontração e mostrou o seu lado mais criativo na formulação de problemas. Este grupo sentiu necessidade de recorrer a inequações para resolver problemas mais complexos. Devido à agitação, este par foi o último da turma a terminar as duas partes, tendo necessitado de mais 15 minutos do intervalo para além das duas sessões de 90.

4.2 A resolução de problemas

O processo de resolução de problemas será analisado segundo as etapas *ler e compreender o problema*, *fazer e executar um plano* e, por último, *verificar a resposta* (Boavida et al., 2008). Já as estratégias de resolução de problemas vão ser caracterizadas em *numérica*, *simbólica*, *icónica* e *mista* (Freire et al., 2004).

4.2.1 Problema 1

No problema 1, estava representado um triângulo equilátero. Relativamente a esse triângulo, era solicitado aos alunos que indicassem os valores que o lado poderia tomar, de modo que o seu perímetro fosse inferior a 24 cm.

André e Bruno

Ao longo de toda a resolução de problemas, o par André e Bruno utilizou uma estratégia *numérica*. Ainda que na resolução do problema 1 o par tenha apresentado a resposta diretamente (Figura 2), foi possível perceber, através dos diálogos, que estratégia utilizaram.

Figura 2- Proposta de resolução do par AB para o problema 1

No problema 1, na etapa de *ler e compreender o problema*, os alunos fizeram uma interpretação correta do mesmo, inteirando-se de todos os conceitos matemáticos envolvidos.

Perceberam, desde logo, o significado de expressões como "triângulo equilátero", "perímetro" e "menor que 24".

> B: Triângulo equilátero, ou seja, todos os lados iguais. Posso fazer, por exemplo, 5. 5, 10, 15. Dá!
> A: Ya, pode ser! Pode ser também 6. 6, 12, 18.
> B: Pode ser também 8. Não, 8 não! Já não pode, porque vai dar 24.

Deste diálogo, conclui-se que, na etapa de *fazer e executar um plano,* foi seguida uma estratégia de resolução *numérica*. No que diz respeito à apresentação de todos os valores que o lado do triângulo poderia tomar, o grupo decidiu chamar a investigadora por achar que a resposta não podia ser tão óbvia assim.

> B: Professora, isto é mesmo muito fácil ou não é o que estou a pensar? Pode ser 7?
> I: Sim, pode. É um dos exemplos.
> B: Pode ser 1, 2, 3, 4, 5, 6...
> I: Mas tentem indicar-me todos!
> B: Podem ser número infinitos? Ah! Pode ser na forma de intervalo!

Com esta sugestão da investigadora, o grupo compreendeu que existiam mais valores para além dos números inteiros positivos até 8 e que poderiam escrever a resposta ao problema na forma de um intervalo de números reais. Consequentemente, os alunos percorreram oralmente a etapa de *verificar a resposta*, já que conversaram sobre não incluir valores negativos como medida do lado do triângulo.

> B: Menos infinito… Não, menos infinito não pode.
> A: Pois, porque isso tem de ser positivo.
> B: Então começa no zero aberto, porque não entra o zero. E vai até ao… 8 e o 8 não entra.

Como resultado de todas as discussões, quer entre o próprio par, quer entre o par e a investigadora, o grupo André e Bruno indicou uma resposta final correta.

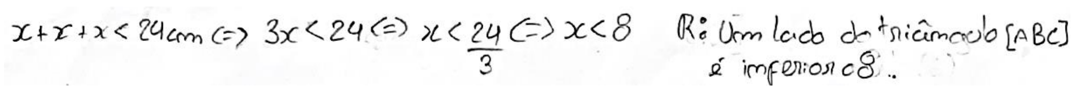
Carolina e Diana

Para resolverem o problema 1, o par Carolina e Diana recorreu às inequações do 1.º grau. No entanto, tornou-se possível perceber que nem sempre o par concordou em apresentar uma estratégia de resolução *simbólica*, isto é, que fizesse uso do conceito de inequação. Na etapa de *fazer e executar um plano*, Carolina começou por pensar numa estratégia de resolução *numérica*, ou seja, que envolvia números e operações aritméticas.

C: Inferior a 24? Então tem de ser 23. Não! Pode ser 23,9. Inferior é a contar com isto ou não (apontando para o número 24)?
D: Espera... x é inferior a 24.
C: Ah! É para fazer com isso? 24 a dividir por 3.
D: Mas tem de ser inferior, Carolina!
C: Pronto... 23,9 a dividir por 3.
D: Nós podemos é fazer assim: x mais x mais x é menor que 24.

No final desta discussão, o par optou por seguir a sugestão da Diana. Mesmo que o grupo não tivesse explicado o significado da variável x, é possível deduzir, através da proposta de resolução, que este representa o comprimento do lado do triângulo. A proposta de resolução apresentada foi a seguinte (Figura 3).

Figura 3- Proposta de resolução do par CD para o problema 1



Ao resolverem a inequação, Carolina apercebeu-se de que o resultado se assemelhava àquele que havia falado anteriormente.

D: ... que e é equivalente a x menor que 24 sobre 3.
C: Foi o que eu disse! Estás a ver?
D: 24 conta. Acho eu...

Finda a resolução da inequação, o grupo dialogou sobre o conjunto-solução da mesma. Apesar de não haver registo escrito na folha de papel, o diálogo seguinte revela que as alunas percorreram a etapa de *verificar a resposta*.

D: Ah! É aquela cena das abertas e das fechadas.
C: Ah ya...
D: Se o x é menor que 8, então é infinitamente.
C: Menos infinito! Não é infinito.
D: Pois... Não sei. Deve ser.
C: Mas é até zero. Como é que um perímetro é negativo?
D: Não sei. É isso que estou a perguntar.

Ainda que Carolina tivesse confrontado o conjunto-solução da inequação com a solução válida no contexto do problema, o grupo não chegou a nenhuma conclusão relativamente a que resposta apresentar. Neste sentido, o par decidiu ler novamente o pedido do problema.

C: Determina os valores que... Ah! É para determinar o valor.
D: Que pode tomar... Não que toma!
C: Então é isso!

D: Pode tomar um número negativo, mesmo que não possa. Pode ser menor que 8.

O grupo deixou como resposta final que o lado do triângulo seria inferior a 8 cm. Assim, não excluíram a hipótese de que o lado do triângulo poderia ser negativo ou nulo. Ao reparar nesta situação, a investigadora resolveu questionar os dois elementos do grupo.

I: O que é que representa o vosso x?
C: Os lados.
D: O comprimento dos lados.
I: Então resolveram a inequação e chegaram à conclusão de que x era menor que 8. Por exemplo, -2, -3... É isso?
D: Não! É um lado positivo menor que 8.
I: E como é que se pode escrever isso em matemática?
D: Algum número real positivo menor que 8. Ah... Aquilo dos conjuntos-solução.
C: Aquilo dos parênteses, acho eu.
D: x pertence ao intervalo de 0 a 8.
I: Abertos ou fechados?
C: 0 é fechado. Não, 0 não!
D: 0 aberto e 8 fechado. Não, 8 aberto! O 8 é aberto, Carolina. Porque é inferior, não é inferior ou igual.
C: Pronto. É tudo aberto.

Com esta intervenção, o grupo constatou que a resposta ao problema não estava correta. Embora as alunas tivessem, a meio do processo de resolução, falado em intervalos de números reais, a resposta final não contemplava esse conteúdo. Porém, quando solicitado para apresentar a solução do problema em linguagem matemática, o par conseguiu perceber que se tratava do intervalo de número reais]0,8[.

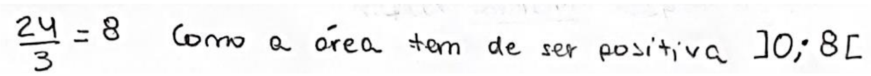
Eduarda e Filipe

Também o par Eduarda e Filipe, na etapa de *ler e compreender o problema*, identificou, de imediato, os aspetos importantes do mesmo. Os alunos seguiram, posteriormente, para a etapa de *fazer e executar um plano*.

E: "Determina os valores..."
F: É equilátero. É só dividir 24 por 3.
E: Ah! Então é fácil! Será que isto está mal?

O grupo optou por usar a estratégia *numérica* sugerida por Filipe, ainda que Eduarda a considerasse demasiado simples. Na figura abaixo, encontra-se a proposta de resolução apresentada por este grupo (Figura 4).

Figura 4- Proposta de resolução do par EF para o problema 1



$\frac{24}{3} = 8$ Como a área tem de ser positiva]0; 8[

Ao analisar a proposta de resolução, observa-se que o grupo percorreu a etapa de *verificar a resposta*, ou seja, confrontou o resultado com o contexto do problema. No entanto, na resposta final, é possível ler-se o termo "área". Afirmaram, pois, que a área deste triângulo tinha de ser positiva.

E: A área tem de ser positiva. Vai ser 0, que não pertence, não é? 0 mais 0 mais 0, dá 0.
F: Claro.
E: 0 não pertence, eu acho. Então tem de ser 0 e 8, que também não pertence. Tem de ser menor.

Por mais que o termo utilizado estivesse errado, da conversa entre o par, pôde perceber-se que os alunos pretendiam referir-se ao perímetro do triângulo, em vez da área. Note-se que, ao somarem a medida de três lados nulos do triângulo, o grupo tinha implícito o conceito de perímetro. Após terem justificado que se tratava do intervalo de número reais]0,8[, Filipe questionou a colega relativamente à forma de representar este conjunto.

F: Então, mas nós não temos de fazer a reta?
E: Não é preciso, acho eu.
F: Ok. Então deixa assim.

Um dos elementos questionou se a resposta ao problema deveria incluir, também, a representação geométrica do conjunto. Porém, em grupo, os alunos decidiram que apresentariam, somente, o resultado na forma de intervalo de números reais. Tal facto mostra que o par é conhecedor de mais de um tipo de representação de conjuntos de números reais.

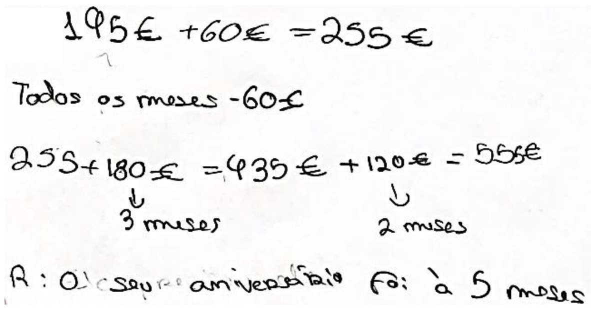
4.2.2 Problema 2

No problema 2, a personagem António tinha conseguido juntar, desde o dia do seu aniversário, 549,99€ para a compra de uma consola. Sabendo que, nesse mesmo dia, esta tinha recebido 195€ dos tios e uma mesada dos pais de quantia fixa no valor de 60€, os alunos teriam de calcular quantos meses, no mínimo, tinham passado desde essa data.

André e Bruno

Na etapa de *ler e compreender o problema*, o par André e Bruno sentiu a necessidade de organizar, na folha de papel, a informação que retirou do enunciado. À medida que iam lendo, escreveram que o António tinha, no dia do seu aniversário, 255€ e que iria receber, todos os meses, 60€ (Figura 5).

Figura 5- Proposta de resolução do par AB para o problema 2



Mais uma vez, na etapa de *fazer e executar um plano*, a estratégia de resolução seguida foi a *numérica*. No entanto, um dos elementos não percebeu, ao certo, que resultado deveria surgir das contas efetuadas.

> B: Fazemos, por exemplo, 3 meses, por tentativas. 255 mais 180…
> A: Mas tem de dar um número fixo? Mesmo 549,99€? Ou pode ser mais?
> B: Não, acho que não. Pode ser mais. Dá… 435€. Vamos fazer mais duas mesadas.
> A: Dá 555€.

Este diálogo fez constatar que André não foi capaz de entender o significado da frase "já conseguiu armazenar dinheiro suficiente a compra da consola", não deduzindo que o António teria de possuir uma quantia maior ou igual ao valor total da mesma. Na etapa de *verificar a resposta*, André hesitou e questionou, novamente, o seu colega. Desta vez, para confirmar se o mês do próprio aniversário deveria ser incluído na contagem ou se só deveria ser incluído o mês seguinte.

> A: Então como resposta ficam 5 meses. Ou se calhar não! Este mês também conta (apontando para o mês do seu aniversário)?
> B: Não. Quer dizer… Se a pergunta é "há quantos meses, no mínimo terá sido o seu aniversário?", a resposta não é quantos meses é que foi para comprar as coisas.

Bruno fez uma boa interpretação do enunciado e conseguiu explicar a André que, o que levava a que a resposta fosse de 5 meses, era a questão do problema. Tentou, pelas suas próprias palavras, explicar que não queriam saber quantas mesadas teriam sido necessárias para comprar a consola, mas sim quantos meses decorreram desde o seu aniversário. Ainda assim, a resposta final apresentada foi de que o aniversário tinha sido há 5 meses, não incluindo a possibilidade de poder ter sido há mais de 5 meses.

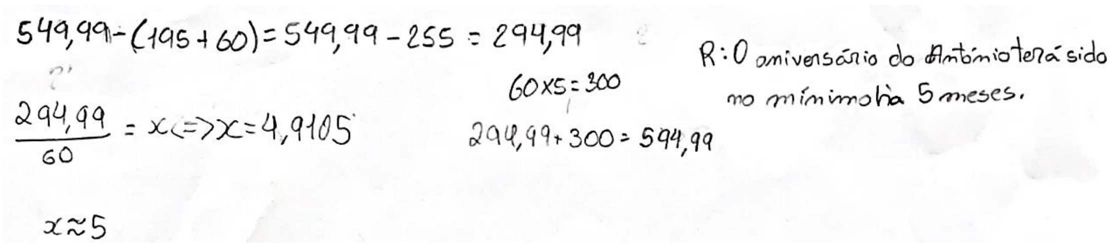
> I: Mas pode não ter sido há, exatamente, 5 meses.
> B: Pode ter sido há 6.
> I: Compreendem isso?
> B: Sim, mas a pergunta é "no mínimo". Portanto 5.

Embora a resposta apresentada não estivesse totalmente correta, o grupo André e Bruno mostraram ter percebido o processo de resolução do problema.

Carolina e Diana

Na etapa de *ler e compreender o problema*, o par Carolina e Diana também não teve qualquer dificuldade em interpretar o enunciado e o pedido do mesmo. Na etapa de *fazer e executar um plano*, reconhece-se que as alunas utilizaram, para além de operações aritméticas, a notação das equações do 1.º grau (Figura 6). No entanto, não foi a tradução do problema para a forma de equação que permitiu a resolução do mesmo. Por este motivo, considera-se que a estratégia de resolução adotada por estas alunas foi a *numérica*, ao invés da *mista*.

Figura 6- Proposta de resolução do par CD para o problema 2



Primeiramente, o grupo começou por calcular o dinheiro que faltava ao António, no dia do seu aniversário, para poder comprar a consola.

> C: Primeiro, tens de fazer este (549,99€) menos este (195€) para saber quanto é que lhe faltava no dia do seu aniversário. E ele também recebeu isto (60€) no dia do seu aniversário.
> D: Tens de fazer 195 mais 60 menos 549,99.
> C: Agora... Se isto foi dado no dia do seu aniversário, conta como um mês ou não? Não, né?
> D: Não, porque isto é em cada mês.
> C: Então é 549,99 menos 195 mais 60.
> D: Dá 294,99.

De seguida, o par tentou perceber quantos meses seriam necessários para o António poder angariar o dinheiro que lhe faltava, isto é, angariar os 294,99€. De notar que este cálculo, na proposta de resolução, vem apresentado na forma de uma equação de 1.º grau. Mas, mais uma vez, não foi atribuído qualquer significado à variável x.

D: Agora… Temos de fazer 60 vezes qualquer coisa, em que qualquer coisa é o dia dos meses.
C: Ah! Fazemos isto a dividir por 60 (apontando para o valor de 294,99€).
D: Mas não dá um dia certo, supostamente?
C: Quanto é que dá aí?
D: Dá 4,9105.
C: Pois… Fizemos alguma coisa errada!

Da conversa entre ambas, percebe-se que atribuem à variável x, como significado, o dia dos meses. Como essa interpretação não faz sentido, no contexto do problema, deve entender-se por x o número de meses decorridos desde o aniversário do António. Contudo, as alunas não souberam interpretar o valor exibido pela calculadora, por considerem que o número de meses deveria ser um número inteiro. Deste modo, na etapa de *verificar a resposta*, decidiram calcular quanto dinheiro conseguia o António juntar com 4 e 5 mesadas.

D: 60 vezes 5? Dá 300. Exato! Precisa de 5 meses. Ou não? 60 vezes 4?
C: Vê lá se diz aproximadamente! "Há quantos meses, no mínimo".
D: Então, 60 vezes 4 dá 240. 240 mais 294. 534. Não. Tem de ser 5 meses!
C: Arredondo isto (4,9105) para 5.
D: Agora, faz, aqui, só para confirmar. 60 vezes 5 que dá 300. E, depois, 300 mais 294,99.
C: Assim?
D: Sim. 594.99.
C: 594 ou 549?
D: Isto (549,99€) era o dinheiro que ele precisava. Isto (594,99€) foi o dinheiro que ele conseguiu até ao mês 5.

Como resposta, afirmaram que o aniversário do António tinha sido há, pelo menos, 5 meses, o que está correto. Face ao arredondamento realizado, a investigadora escolheu interpelar o grupo.

I: Porque é que vocês arredondaram a 5?
D: Porque não existe um mês que se divida.
C: Porque era um bocado mais do mês
I: Se tivesse 4,2, arredondavam a quê?
D: A 4.
C: 4? 4 não!
D: 4,2 aproximas a quanto, Carolina?

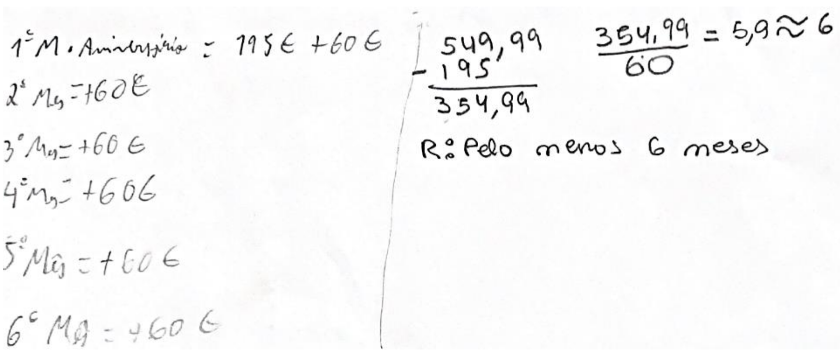
C: Mas aí já passou do mês 4. Eu aproximava a 5.
D: Eu aproximava a 4. Mas não deu 4,2.
I: Há algum mês onde se tenha o valor exato?
C: Não.
I: Passados 4 meses, ele tinha dinheiro suficiente?
C: Não.
D: Exato! Isso foi o que nós fizemos! Nós confirmámos isso.

Com este diálogo, o grupo revelou não estar seguro da interpretação do valor resultante do quociente entre o dinheiro que faltava para a compra da consola e o dinheiro que o António recebia de mesada. Diana insistia em aproximar o valor obtido às unidades, enquanto Carolina teimava em aproximar, por excesso, esse valor às unidades. No final, as alunas perceberam que era Carolina quem tinha razão. Assim, pode concluir-se que foi o facto de terem verificado quanto dinheiro ia ganhar o António por 4 e 5 mesadas que se tornou fundamental para que este grupo tivesse apresentado uma resposta final correta.

Eduarda e Filipe

O grupo Eduarda e Filipe também não teve quaisquer dificuldades na etapa de *ler e compreender o problema*. Por consequência, estes alunos avançaram para a etapa de *fazer e executar um plano*. Pensaram, então, em duas estratégias *numéricas* diferentes para o resolver, assemelhando-se, cada uma delas, à dos outros dois pares anteriores (Figura 7).

Figura 7- Proposta de resolução do par EF para o problema 2



Por um lado, Filipe pensou em criar uma lista onde ia adicionando, a cada mês, o valor de 60€. Na resolução da esquerda, pode ver-se que Filipe considerou como primeiro mês o mês do próprio aniversário. Por esta razão, chegou à conclusão de que teriam passado, pelo menos, 6 meses. Por outro lado, Eduarda começou por subtrair ao valor da consola o valor que o António tinha recebido dos tios. À quantia que estava em falta decidiu, depois, dividir pelo valor da mesada recebida. Eduarda calculou, assim, quantas mesadas seriam necessárias receber para que o António tivesse dinheiro suficiente para a aquisição da consola. De seguida, os alunos avançaram para a etapa de *verificar a resposta*, havendo evidências de que percorreram essa etapa oralmente.

> F: Isto com 4 ou 5 meses só dá isto.
> E: Então exato! Tem de ser 6.
> F: Pronto.
> E: Deu-me isso também. Está certo!

Por terem chegado a um mesmo resultado, os alunos acharam que o problema estaria bem resolvido. Deste modo, concordaram em incluir o mês do aniversário na contagem. Não perceberam que o objetivo deste problema era descobrir quantos meses, no mínimo, tinham decorrido desde então. Posteriormente, a investigadora interpelou o grupo e estes entenderam que a resposta apresentada estava errada.

> I: Então digam-me como é que podiam ter resolvido corretamente.
> F: Em vez de fazermos 195, fazíamos menos 255.
> I: E depois dividiam por quanto?
> E: À mesma por 60.
> F: Vai dar 4,9.
> I: Como é que vocês vão retirar o número de meses decorridos a partir desse valor?
> F: É quase 5 meses.
> I: Porque é que arredondam a 5? E se esse valor fosse 4,2, arredondavam a quanto?
> F: 4.
> E: Não. Se não é 4 certo, é mais que 4.
> F: Como assim?
> E: Se tiveres 4 meses e 2 dias, já não podes dizer que é 4 meses. É mais que 4.

Ao atentar neste diálogo, conclui-se que a segunda proposta de resolução deste grupo vai ao encontro daquela que foi apresentada, previamente, pelo par Carolina e Diana. E, à semelhança do que havia acontecido com esse par, também o par Eduarda e Filipe teve dúvidas no momento de aproximar o valor obtido pela calculadora. Todavia, através da explicação da sua colega, Filipe conseguiu compreender qual deveria ter sido a resposta correta ao problema.

> I: Então, no mínimo, o aniversário foi há quanto tempo?
> F: 5 meses.

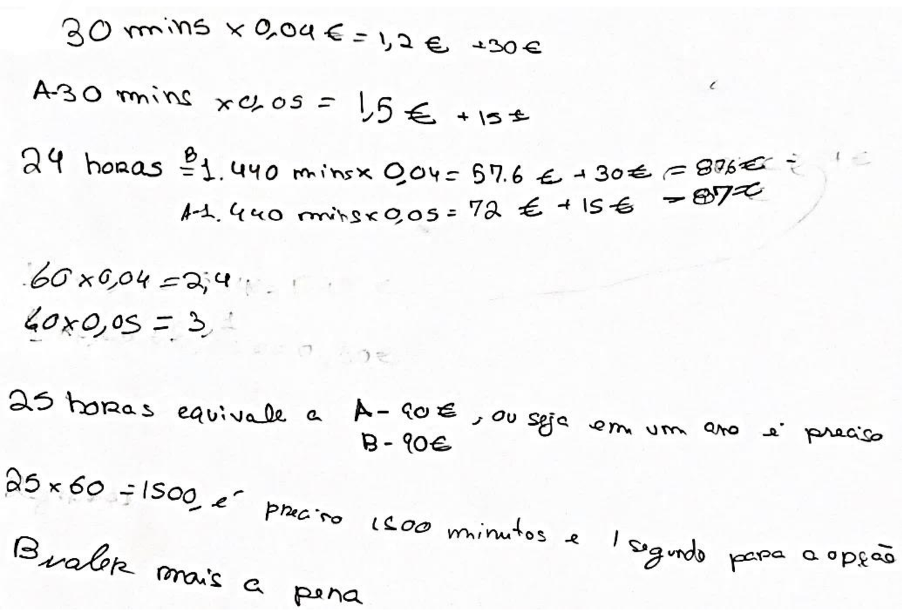
4.2.3 Problema 3

No problema 3, era pedido aos alunos que calculassem quantos minutos de chamada ou SMS teria o João de efetuar, durante um ano, para que um dos tarifários fosse mais económico que o outro. Relativamente ao tarifário A, pagava-se 15€ de adesão e 0,05€ por minuto de chamada ou SMS. Já no tarifário B, pagava-se mais de custo de adesão (30€) e menos por minuto de chamada ou SMS (0,04€).

André e Bruno

Na etapa de *ler e compreender o problema*, o par André e Bruno pediu ajuda à investigadora para poder continuar. A investigadora contextualizou e explicou o problema, mas, mesmo assim, o grupo mostrou dúvidas na etapa de *fazer e executar um plano*. Na figura abaixo, pode consultar-se a proposta de resolução apresentada pelo grupo (Figura 8).

Figura 8- Proposta de resolução do par AB para o problema 3



O grupo começou por recorrer a uma estratégia *numérica*, calculando o preço de cada tarifário para 30 minutos de chamada/SMS. Porém, o par apercebeu-se de que, neste problema em específico, seria uma estratégia trabalhosa.

> B: Isto tem de ser por tentativas ou há uma forma mais fácil de saber?
> I: Eu diria que as duas respostas são válidas. Podes pensar em mais do que uma maneira para resolver um problema.

Ainda tendo reconhecido que, provavelmente, existia um caminho que não envolvesse tentativas, este par não conseguiu chegar até ele. Optaram, pois, por aumentar o valor dos minutos de chamada/SMS anuais.

> B: Vamos fazer 24 horas.
> A: Não. Põe em minutos. As 24 horas têm de estar em minutos.
> B: Então fazes 24 horas vezes 60.
> A: 24 vezes 60? 60 vezes 24. É mais bonito assim!
> …
> B: Para 1400 minutos, este (A) dá mais barato… Por 6 cêntimos!

O grupo reparou que as 24 horas teriam de ser convertidas para minutos, uma vez que o preço a pagar, em euros, era dado em função do número de minutos de chamada efetuado. No entanto, 24 horas não seriam suficientes para o tarifário B ser mais barato que o tarifário A. Deste modo, decidiram calcular quantos mais minutos de chamada seriam necessários para que as opções fossem, igualmente, vantajosas.

> B: Vamos fazer meia hora. Temos a conta aqui em cima. Não dá na mesma. Vamos tentar 1 hora.
> A: 2,4…
> B: E o outro?
> A: 3,6. Então isso fica 90 e 90.
> …
> B: Ou seja, 25 horas. Então isso significa que a partir do momento em que eu faço mais 1 segundo sequer, B já vale mais a pena. Mas temos de ir fazer isto em minutos.
> A: Então 25 vezes 60. 1500. Vou ficar 25 horas em chamada.
> B: Também não é muito difícil. É em um ano! Ontem estive 10 horas!

O diálogo anterior mostrou que, antes de apresentarem a resposta final, o grupo avaliou a plausibilidade da mesma. Concluíram, assim, que 25 horas fariam sentido por estarem a falar da quantidade de minutos de chamada/SMS efetuados por ano. Por este motivo, pode afirmar-se que o grupo percorreu oralmente a etapa de *verificar a resposta*. Ao analisar a resposta, a investigadora tentou perceber o porquê de terem colocado "1500 minutos e 1 segundo".

> I: Porque é que colocaram esta resposta?
> B: Porque tinha de ser mais de 1500 minutos.
> I: E se fosse 1 milésima de segundo?
> A: Também dava!
> B: Podemos escrever, se calhar, na forma de intervalo.
> A: Então… 1500 aberto a mais infinito aberto.

Ainda que não tivesse escrito como resposta que o número de chamadas ou SMS deveria ser superior a 1500, o grupo André e Bruno percebeu que poderia apresentar a resposta como um intervalo de números reais da forma]1500, +∞[.

Carolina e Diana

Relativamente ao problema 3, o grupo Carolina e Diana também mostrou dificuldades na etapa de *ler e compreender o problema*. Neste sentido, o grupo não foi capaz de interpretar a palavra "adesão". Por esta razão, o par recorreu à investigadora.

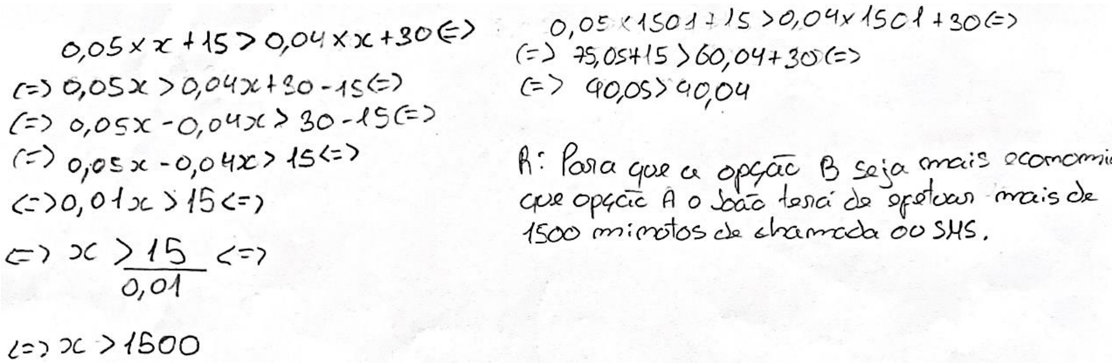
> D: Custo de adesão? Será que é o custo por mês?
> C: Isto não é preciso saber o que é "adesão" para fazer isto. É só usares o número.
> D: Eu pensava que era suposto saber o que era "adesão".
> C: "Adesão" não é tipo adquirir?
> D: Não sei. Vamos perguntar à professora. O que é que é "adesão"?
> I: "Adesão" vem de aderir.
> C: Adquirir!

Mesmo assim, o grupo continuou a não conseguir compreender o problema, pelo que solicitou, novamente, o apoio da investigadora.

> C: Então, se eu falar 1 minuto, pago isto. Aqui (B), eu falo um minuto e só pago isto. Este (B) é bem mais económico.
> D: Mas este aqui (B) pagas 30€ e aqui (A) pagas 15.
> C: Professora, não estamos a perceber a 3.
> D: Nós achamos que é isto. Fazer isto assim: 30 a dividir por 0,04. Que dá 750.
> C: Este (A) aqui dá 300. Dá um total de 1050 minutos.

Com este diálogo, percebe-se que o grupo começou por pensar que o custo de adesão era o saldo disponível para fazer as várias chamadas durante um ano. Ao valerem-se deste raciocínio, pensaram que seria necessário realizar 1050 minutos de chamadas, durante um ano, para que a opção B fosse mais económica que a opção A. Após uma explicação mais detalhada do problema, por parte da investigadora, o grupo avançou noutro raciocínio. Consequentemente, este seguiu para a etapa de *fazer e executar um plano*, utilizando uma estratégia *simbólica* que incluía o conceito de inequação (Figura 9).

Figura 9- Proposta de resolução do par CD para o problema 3



No momento de formar as expressões associadas ao custo de cada um dos tarifários, o grupo duvidou se deveria utilizar a mesma variável, x, para as duas expressões.

> D: Eu acho que é mesmo assim. O x é o mesmo número.
> C: É o mesmo número, é.

O grupo concordou que só faria sentido comparar os custos entre tarifários para um mesmo valor de minutos de chamadas efetuados ou SMS trocados. Para além disso, após resolverem a inequação, o par percorreu a etapa de *verificar a resposta*, isto é, verificou se os valores obtidos satisfaziam ou não a condição inicial.

> D: Agora, na equação que fizemos, vamos colocar o 1500.
> C: Ah ok…
> …
> D: 75 mais 15?
> C: 90.
> D: 60 mais 30?
> C: 90.
> D: Então tem de ser mais 1. Tem de ser 1501. Se aqui é maior, não é maior ou igual.
> C: Pode ser 1500, 00001.
> D: Pode! Mas deixa estar o 1501. Também serve!

Ainda que o grupo tivesse começado por confirmar o resultado para 1500 minutos de chamadas efetuadas ao longo do ano, este foi capaz de perceber, autonomamente, que, a esse valor, faziam corresponder custos iguais de tarifário. Deste modo, o par constatou que o João deveria realizar mais de 1500 minutos de chamada ou SMS durante um ano, para que o tarifário B fosse mais vantajoso que o A. De seguida, apagaram os cálculos para 1500 e refizeram para 1501 minutos. Quando questionado pela investigadora a respeito do significado da variável x, o par respondeu que esta representava os minutos de chamada efetuados durante um ano.

Adicionalmente, a investigadora tentou perceber a razão pela qual tinham optado por utilizar aquele sinal de desigualdade.

> I: Porquê este sinal de desigualdade?
> D: Porque este aqui (B) tem de ser menor que este (A). Calma, não era suposto ser ao contrário?
> I: O que é que é ser "mais económico"?
> C: Que pagas menos.
> I: Então o vosso sinal faz sentido ou não?
> D: Faz sentido!
> C: Sim, porque A está maior que o B.

Assim, pode afirmar-se que o grupo traduziu acertadamente o problema para linguagem matemática e aplicou, ainda, corretamente as regras do processo de resolução de uma inequação. Mesmo que a resposta final estivesse certa, a investigadora incentivou o par a apresentar essa resposta na forma de um intervalo de números reais. Desta vez, o par não hesitou em dizer que se tratava de um intervalo aberto, tendo logo respondido que seria o intervalo $]1500, +\infty[$.

Eduarda e Filipe

Tal como os outros dois grupos, o par Eduarda e Filipe também teve dificuldades na etapa de *ler e compreender o problema*.

> E: Eu não sei se isto aqui é tipo… Podes fazer chamadas até este preço, até chegares a este limite? Eu não estou a entender o que é que é isto. Ou se isto é tipo para aderir, pagas isto para aderir.

Filipe não conseguiu ajudar a colega a interpretar os valores do enunciado. Ainda assim, os alunos decidiram partir para a etapa de *fazer e executar um plano*, escolhendo uma estratégia *numérica*. Começaram, então, por aplicar uma regra de três simples para resolverem o problema.

> E: Ah! Vamos fazer uma regra de três simples. Olha aqui! 1 minuto é 0,05, então x minutos é 15.
> F: Dá 300 minutos.

O facto de terem utilizado uma regra de três simples mostrou que o par considerou, erradamente, que o custo de adesão era o preço limite que poderiam pagar pelos minutos de chamada. Mas, mesmo após terem chegado a um valor de 300 minutos, o grupo continuou a duvidar do que tinha feito. Contudo, Eduarda insistia em não pedir ajuda à investigadora, tendo questionado os colegas do lado.

E: Oh Gustavo, explica-me a 3, que eu não estou a atender nada.
G: Precisas de fazer por tentativa e erro.
E: Aqui no A deu-me 300 minutos.
G: Tem de ser mais, muito mais. Mais de 1000.
F: Mais de 1000?
E: Então vocês fizeram os números todos até ao 1000?
F: Então fizeram 600, 700, 800… Sempre assim.

Não convencida da resposta, Eduarda questionou outros dois grupos da turma.

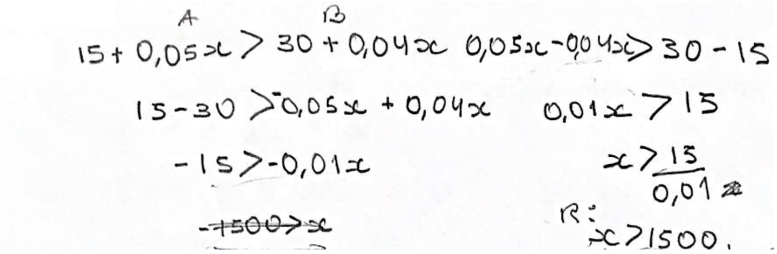
E: Oh Hugo, estás a entender? Fizeste a 3?
H: Sim. Tens de fazer aquela cena com o menor.
E: Com o menor? Como assim? Uma inequação?
H: Sim. Fazes 30 mais 0,04 menor…
F: Menor que o quê?
H: 15 mais 0,05x.
E: x?
F: Não entendi nada!
…
E: Vou pedir à Inês. Oh Inês, então o preço que tu pagas aqui em cima, tipo 15 ou 30, é o preço que tu pagas ao início e depois pagas mais o preço da chamada?
I: Ya!
E: Ah! Então era isso!
F: Então, mas isso eu já sabia e continuei sem perceber!
E: Eu não sabia! Se eu soubesse, eu não tinha errado.

Através do esclarecimento de uma das colegas de turma, o grupo compreendeu que o custo de adesão seria o preço a pagar para se poder iniciar o contrato anual. Mais entendeu que, a esse custo, deveria ser acrescentado o valor dos minutos de chamada efetuados durante o ano. Após terem percebido todo o problema, o par avançou para a etapa de *fazer e executar um plano.* O plano de resolução escolhido envolvia uma estratégia *simbólica*, isto é, o conceito de inequação.

E: Ok, vá. Então temos de fazer uma inequação. 15 mais 0,05 tem de ser maior… Ou menor? Ah… Tem de ser maior porque vais pagar mais que no outro (B).
F: Mete um x.
E: x onde? No meio?
F: Não, aí.
E: Ah, pois é. Tenho de meter x.
F: Não, o B tem de ser menor.
F: Exato, o B tem de ser menor. Está certo! Este é o A e este é o B.

Relativamente à resolução, o grupo escreveu a seguinte proposta (Figura 10).

Figura 10- Proposta de resolução do par EF para o problema 3



Ao analisar a proposta de resolução, observa-se que o par Eduarda e Filipe traduziu corretamente o problema para linguagem matemática. Para além disso, o par conseguiu justificar o uso daquele sinal de desigualdade e aplicar todas as regras do processo de resolução de uma inequação. No final, e a pedido da investigadora, estes alunos clarificaram que x representava os minutos de chamada realizados anualmente. Deste modo, chegaram à conclusão de que seriam necessários realizar mais de 1500 minutos de chamada, por ano, para que o tarifário B fosse mais económico que o A. Neste problema, os alunos não sentiram a necessidade de percorrer a etapa de *verificar a resposta*, nem por escrito nem oralmente.

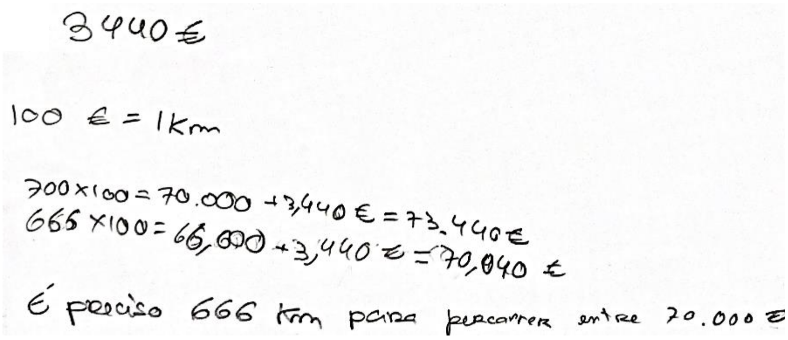
4.2.4 Problema 4

No problema 4, era pedido aos alunos que calculassem quantos quilómetros poderia um passageiro andar de OVNI, sabendo que este possuía entre 70 000 e 100 000€ (inclusive) e que pagava 3 440€ de seguro pessoal e 100€ por cada quilómetro percorrido.

André e Bruno

Na etapa de *ler e compreender o problema*, André e Bruno tiveram dificuldade em interpretar o enunciado. Entenderam que deveriam multiplicar o número de quilómetros percorridos por 100, a fim de obterem o preço a pagar pela distância. Para além disso, compreenderam que, a esse valor, teriam de somar o valor do seguro pessoal. Não perceberam o que fazer com as quantias de 70 000 e 100 000€. Todavia, continuaram para a etapa de *fazer e executar um plano*, tendo utilizado uma estratégia de resolução *numérica* (Figura 11).

Figura 11- Proposta de resolução do par AB para o problema 4

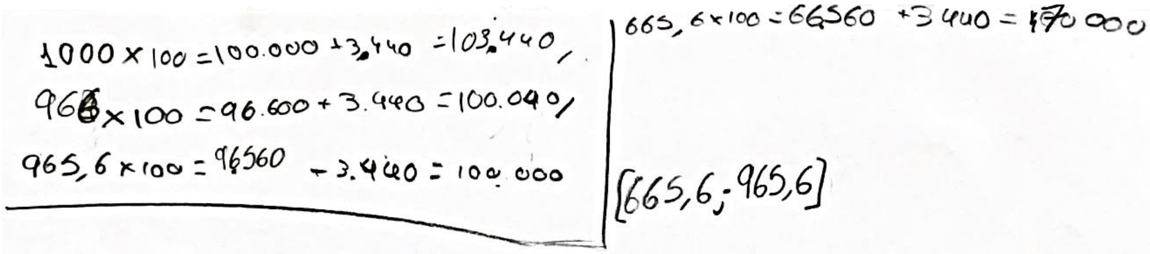


Ao analisar a proposta de resolução, observa-se que o grupo tentou aproximar o preço total a pagar de 70 000€, sem nunca equacionar o valor de 100 000€. André ainda tentou alertar o colega de que não estariam a utilizar um dos dados do enunciado, mas não obteve resposta.

> A: Oh! Mas aqui… Oh, Bruno! Aqui está a dizer também 100 000. E agora temos de fazer 100 000.
> B: Professora, já acabámos!

Mesmo que, neste problema, os alunos não tivessem recorrido à ajuda da investigadora, estes confessaram não o ter entendido completamente. Bruno pensou que poderia colocar qualquer número de quilómetros, desde que o custo associado a essa viagem variasse entre 70 000 e 100 000€. Neste momento, a investigadora explicou o problema e o grupo executou um outro plano, também recorrendo a uma estratégia de resolução *numérica* (Figura 12).

Figura 12- Segunda proposta de resolução do par AB para o problema 4



Na segunda proposta de resolução, é possível observar as tentativas e o número total de quilómetros percorridos a que fazem corresponder, precisamente, um valor a pagar de 70 000 e 100 000€. Deste modo, os alunos perceberam que o número de quilómetros deveria variar entre esses dois valores obtidos. Neste problema em específico, os alunos não percorreram a etapa de *verificar a resposta* antes de escreverem a resposta final. Mas, pelo facto de os alunos terem feito uso do conceito de intervalo de números reais, a investigadora decidiu questioná-los.

I: Porquê um intervalo fechado? Não percebi!
B: Aqui diz 100 000, por isso...
I: O que significa a palavra "inclusive"?
A: Não sei. Não tenho dicionário.
I: A palavra "inclusive" significa que estamos a incluir esse valor. Se eu dissesse "exclusive" estava a excluir esse valor.
B: Então são os dois fechados!

Nesta última resolução, os alunos apresentaram uma resposta correta, mas não entenderam, verdadeiramente, o porquê de o intervalo apresentado estar correto. O facto deste grupo não saber o significado da palavra "inclusive" fez com que não soubesse explicar o porquê de a solução do problema incluir os dois extremos do intervalo de números reais.

Carolina e Diana

Tal como o grupo André e Bruno, Carolina e Diana preferiram, na etapa de *ler e compreender o problema*, extrair a informação importante do enunciado e escrevê-la na folha de respostas. Também este par teve dúvidas na interpretação do enunciado, pelo que chamaram a investigadora.

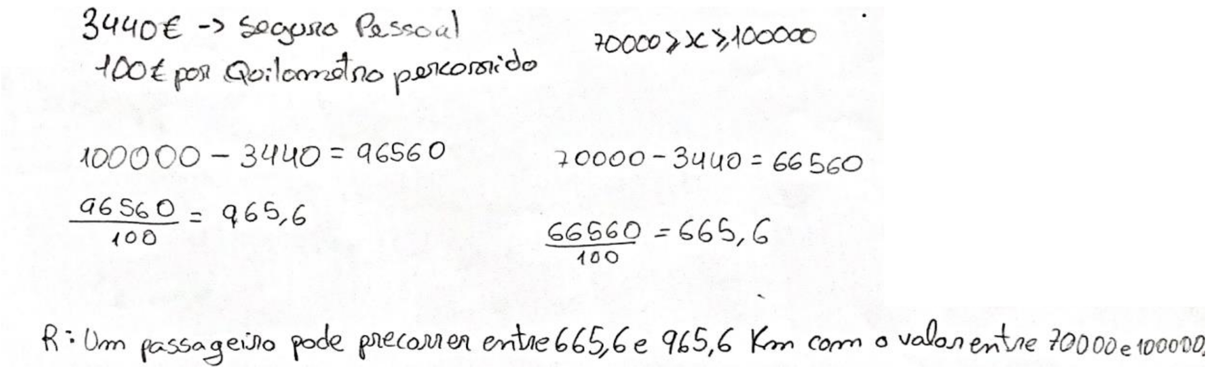
I: Quanto é que pagam, à partida, se quiserem fazer uma viagem de OVNI?
C: 3 440.
I: Quanto é que vão pagar por cada quilómetro?
D: 100.
I: Têm entre 70 000 e 100 000 euros. Quantos quilómetros é que vocês vão poder percorrer?
D: Tem de ser 100 vezes qualquer coisa igual a 70 000 ou entre 100 000.
I: Repara que tens de ter dinheiro suficiente para pagar o seguro, Diana.
D: E "inclusive" o quê? O que é que significa o "inclusive"?
I: Que tens 70 000 exatos e não tens, por exemplo 70 000 euros e 1 cêntimo.
C: Ah... Isto inclui.
D: Ok ok. Isto inclui 70 000 euros e 100 000.

Ao seguirem para a etapa de *fazer e executar um plano*, as alunas tentaram traduzir a expressão "entre" para linguagem matemática.

D: Como é que se diz o "entre"?
C: Não sei.
D: É tipo x e depois do lado esquerdo menor que 70 000? E maior que 100 000?
C: Pois, eu desisto!

Por não estarem a conseguir traduzir o problema para linguagem matemática, abandonaram a ideia de utilizar uma estratégia de resolução *simbólica*. Todavia, o grupo decidiu não apagar o início dessa tentativa, sendo possível observá-la na imagem seguinte (Figura 13).

Figura 13- Proposta de resolução do par CD para o problema 4


3440€ -> Seguro Pessoal
100€ por Quilometro percorrido

$70000 \geq x \geq 100000$

$100000 - 3440 = 96560$

$\frac{96560}{100} = 965,6$

$70000 - 3440 = 66560$

$\frac{66560}{100} = 665,6$

R: Um passageiro pode precorrer entre 665,6 e 965,6 Km com o valor entre 70000 e 100000.

O par não reparou que, para a expressão fazer sentido, teria de se ter invertido o sinal da desigualdade. Posteriormente, este idealizou um novo plano de resolução que envolvia uma estratégia *numérica*. As alunas começaram por calcular que quantia sobrava ao passageiro após o pagamento do seguro pessoal. Depois, interpretaram essa quantia como sendo o saldo disponível para gastar no número de quilómetros a percorrer.

> C: Ou seja, ele tem este dinheiro (entre 70 000 e 100 000). Temos de fazer isto menos isto (3 440).
> D: E, depois, esse número fazemos pelos quilómetros. Mas que número é que vamos usar?
> C: 100 000.
> D: Dá 96 560. Agora a este valor fazemos a dividir por 100.
> C: Está! E agora?
> D: Fazemos isto para 70 000. Dá 665,6.
> C: Agora a resposta…
> D: Pode percorrer entre isto (965,6) e isto (665,6) quilómetros.

À semelhança do par André e Bruno, o par Carolina e Diana também não percorreu a última etapa do processo de resolução de problemas, nem por escrito nem oralmente. Ainda assim, o grupo percebeu que uma viagem que variasse entre 665,6 e 965,6 quilómetros percorridos teria um custo associado a variar entre os dois valores do enunciado. Embora as alunas tivessem dialogado com a investigadora sobre a inclusão dos valores 70 000 e 100 000€, nada foi dito na resposta final relativamente à inclusão dos valores 665,6 e 965,6 quilómetros. De qualquer modo, reconhece-se que este par arranjou uma alternativa correta ao uso da conjunção de inequações.

Eduarda e Filipe

De todos os grupos em estudo, o grupo Eduarda e Filipe foi o único que considerou o uso de inequações do 1.º grau para resolver o problema 4. Na etapa de *ler e compreender o problema*, um dos elementos questionou o significado da palavra "inclusive".

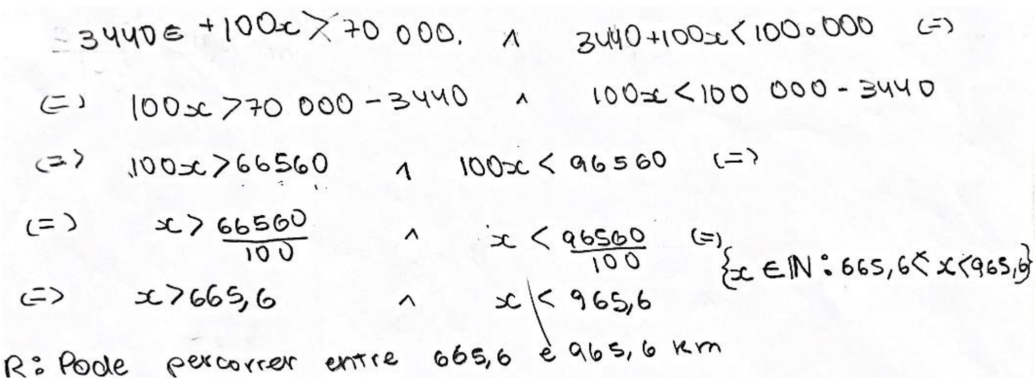
> F: O que é que é o "inclusive"?
> E: Significa que é maior ou igual.

À sua maneira, Eduarda esclareceu ao colega que, neste problema, não estava a ser tratada uma desigualdade em sentido estrito. Quer isto dizer que a aluna tentou explicar que a palavra "inclusive" fazia com que se incluísse a hipótese de o saldo contabilístico do passageiro ser igual a 70 000 e 100 000€. Porém, Filipe mostrou evidências de ter continuado sem entender.

> F: Isto aqui é 70 000. A dividir por 100. Eu acho que ele pode andar 700 quilómetros ou mais. "Inclusive" o quê? Menos ou o máximo?
> E: "Inclusive" significa que inclui o número.
> F: Ok. Então é entre 700 e 1000 quilómetros.
> …
> F: Mas o que é que devemos fazer com este preço (3 440)?
> E: Acho que temos de fazer como aqui em cima (problema 3).

Deste diálogo, repara-se que Filipe pensou, na etapa de *fazer e executar um plano*, em utilizar uma estratégia *numérica*. E, tal como o par anterior, também Filipe começou por não considerar o valor do seguro pessoal. Por esta razão, o aluno julgou que o dinheiro que o passageiro possuía iria ser gasto, somente, em quilómetros percorridos. Mas, ao lembrarem-se do problema anterior, os alunos decidiriam mudar de plano e adotar uma estratégia *simbólica* com inequações, que já incluía o valor do seguro pessoal (Figura 14).

Figura 14- Proposta de resolução do par EF para o problema 4



Mais uma vez, os alunos não referiram o significado da variável x. Enquanto resolviam o problema através da conjunção de duas inequações, foi possível ouvir-se uma discussão relativamente a que símbolo usar para esse efeito.

> E: Como é que eu faço? Aqui tem de ser maior que 70 000 e menor que 100 000?
> F: Tem de ser "e".
> E: "E" é assim, não é?
> F: Sim.

Pela proposta de resolução, observa-se que o símbolo foi escolhido acertadamente, isto é, foi escolhido o símbolo da conjunção em detrimento do da disjunção. Por mais que o grupo tivesse dialogado sobre o significado da palavra "inclusive", constata-se que, em nenhum passo, este o equacionou. Neste sentido, a proposta de resolução apresentada só inclui a desigualdade em sentido estrito, pelo que não está completamente correta. Repara-se, também, que o conjunto na forma de condição está errado, uma vez que só foram considerados valores naturais. Do mesmo modo que os outros dois pares anteriores, estes alunos avançaram para a escrita da resposta final sem terem passado pela etapa de *verificar a resposta*. Tal como Carolina e Diana, Eduarda e Filipe nada esclareceram na resposta final relativamente à inclusão dos valores 665,6 e 965,6 quilómetros. Por todos estes motivos, a investigadora interrogou o grupo.

> I: O que é que significa o vosso x?
> E: Os quilómetros que ele podia percorrer.
> I: E depois chegaram à conclusão de que eram os valores de x pertencentes a $\mathbb{N}$. Estamos a falar de 667, 668, …
> E: Calma! Não era isso que queríamos dizer.
> I: Eram só estes valores?
> E: Não. Tinham de ser positivos, mas também podiam ser racionais.
> I: Então como é que se escreve isso?
> E: Os reais. Os reais são todos.
> F: Tinham de ser os reais ou os "quê de quá-quá". E os irracionais não podem?
> E: Os irracionais fazem parte dos reais. Eu acho que pode ser qualquer um.
> I: Então o que alteravam?
> E: O $\mathbb{R}$.
> I: E o que significa a palavra "inclusive"?
> E: Ah! Esquecemo-nos de meter aqui maior ou igual e menor ou igual.
> F: Era só meter o traço em baixo.

No final, o grupo conseguiu perceber que se tratava do conjunto de números reais $\{x \in \mathbb{R}: 665{,}6 \leq x \leq 965{,}6\}$.

4.2.5 Considerações finais

Ao longo da resolução de problemas, a investigadora foi interpelada a fim de esclarecer eventuais dúvidas. Quer as intervenções da investigadora, quer o espírito de dedicação dos pares, permitiram que todos fossem capazes de resolver os problemas propostos.

No problema 1, na etapa de *ler e compreender o problema*, os alunos conseguiram identificar-lhe os dados e as incógnitas. Na etapa de *fazer e executar um plano*, o par André e Bruno idealizou uma estratégia *numérica*. Neste sentido, o grupo efetuou tentativas e não apresentou dificuldades. Já o par Carolina e Diana optou por seguir uma estratégia *simbólica*. Também este grupo foi capaz de concluir corretamente esta etapa. Por último, Eduarda e Filipe aplicaram uma estratégia *numérica* e chegaram diretamente ao resultado. No que toca à etapa de *verificar a resposta*, o par André e Bruno e o par Eduarda e Filipe mostraram saber conferir a validade da mesma, ou seja, que o lado de uma figura deveria ser positivo. Por este motivo, apresentaram um intervalo de números reais correto. Ainda assim, o grupo Eduarda e Filipe referiram-se ao "perímetro" como se da "área" se tratasse. Por sua vez, Carolina e Diana confrontaram o conjunto-solução da inequação com o contexto do problema, mas não o fizeram acertadamente.

No problema 2, os pares desta investigação começaram pela etapa de *ler e compreender o problema*. Porém, o grupo Eduarda e Filipe não fez uma interpretação adequada do mesmo e não percebeu que se pretendia descobrir o número de meses decorridos desde o aniversário. Na etapa de *fazer e executar um plano*, o par André e Bruno utilizou uma estratégia *numérica*, não tendo quaisquer dúvidas nesta fase. Também Carolina e Diana projetaram uma estratégia *numérica*. Mas, ao contrário de André e Bruno, os cálculos realizados por estas alunas permitiram atingir diretamente o objetivo. Eduarda e Filipe, por sua vez, juntaram as duas estratégias de resolução anteriores. Deste modo, constatou-se que nenhum dos grupos traduziu o problema para linguagem matemática a fim de poderem utilizar o conceito de inequação. Devido à estratégia seguida, o par Carolina e Diana e o par Eduarda e Filipe tiveram dificuldades em interpretar o valor obtido pela calculadora. Efetivamente, estes pares não perceberam que o resultado deveria ser aproximado, por excesso, às unidades. Neste sentido, Carolina e Diana percorreram a etapa de *verificar a resposta* efetuando operações aritméticas, para confirmar se quatro meses seriam suficientes ou se teriam de adicionar mais um. No que diz respeito a Eduarda e Filipe, estes apresentaram uma resposta errada, que incluía na contagem o mês do próprio aniversário.

Na etapa de *ler e compreender o problema* 3, todos os grupos mostraram dificuldades em interpretar o problema, nomeadamente em interpretar a palavra "adesão". Por esta razão, alguns grupos pensaram que o custo de adesão seria o dinheiro que a personagem poderia gastar em minutos de chamadas ou SMS. Na etapa de *fazer e executar um plano,* André e Bruno utilizaram uma estratégia *numérica*. Pelo contrário, o par Carolina e Diana e o par Eduarda e Filipe recorreram à tradução do problema para linguagem matemática e fizeram uso de uma estratégia *simbólica*. Ainda assim, para traduzirem o problema, Eduarda e Filipe pediram ajuda aos colegas da turma. Muito embora tivessem traduzido apropriadamente o problema, os grupos não esclareceram, por escrito, o significado atribuído à variável. No momento de resolverem a inequação, estes dois últimos grupos não revelaram qualquer dificuldade, tendo apresentado uma resolução correta. No que toca à etapa de *verificar a resposta*, só o par Eduarda e Filipe não a percorreu. Enquanto André e Bruno verificaram oralmente a plausibilidade do resultado, Carolina e Diana optaram por concretizar a variável.

Também no problema 4, os alunos mostraram dúvidas na etapa de *ler e compreender o problema*. André e Bruno não entenderam o que fazer, tendo pensado que seria preciso descobrir uma distância a que fizesse corresponder um custo de viagem a variar entre os dois valores do enunciado. Adicionalmente, todos os alunos, à exceção de Eduarda, desconheciam o significado da palavra "inclusive". Aquando da etapa de *fazer e executar um plano*, André e Bruno empregaram uma estratégia *numérica*. Já Carolina e Diana pensaram em traduzir o problema através de uma inequação, mas acabaram por desistir por não saberem como escrever a expressão "entre" em linguagem simbólica. Por este motivo, decidiram fazer uso de uma estratégia *numérica*. No que concerne a Eduarda e Filipe, estes escreveram, quase corretamente, o problema em linguagem matemática, pelo que usaram uma estratégia *simbólica*. Mas, mais uma vez, não foi atribuído um significado à variável em estudo. De notar que, para encontrarem esta estratégia de resolução, estes alunos basearam-se na estratégia de resolução do problema 3. Para além disso, Eduarda e Filipe enganaram-se ao apresentar o conjunto de números reais na forma de condição. Pelo facto dos dois primeiros pares apresentarem uma resposta ajustada ao problema, conclui-se que estes encontraram uma alternativa correta ao uso da conjunção de inequações. Não sendo essencial o confronto da solução com o contexto do problema, nenhum grupo percorreu a etapa de *verificar a resposta.*

4.3 A formulação de problemas

O processo de formulação de problemas analisar-se-á de acordo com as etapas *formular*, *resolver* e *melhorar* (Ramírez, 2006). Por sua vez, as estratégias de formulação de problemas serão divididas em *aceitar os dados* e *e se em vez de* (Boavida et al., 2008).

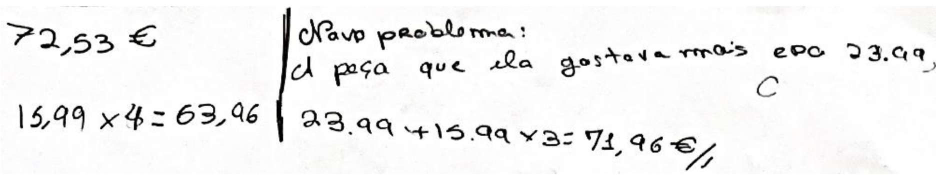
4.3.1 Problema 5

No problema 5, era solicitado aos alunos que formulassem um problema, a partir de outro inicial. No problema inicial, a personagem Teresa possuía 72,53€ e pretendia comprar peças de roupa que custavam, em média, 15,99€. O objetivo deste problema era descobrir quantas peças, no máximo, se poderiam comprar.

André e Bruno

O par André e Bruno começou por resolver o problema apresentado (Figura 15). Posteriormente, na etapa de *formular*, os alunos pensaram em alterar alguns dados do problema inicial para criar um novo. Assim, pode afirmar-se que este par seguiu a estratégia *e se em vez de*.

Figura 15- Proposta de formulação do par AB para o problema 5



Os alunos decidiram que a peça favorita da Teresa iria custar 23,99€. No entanto, este grupo nada disse relativamente ao preço das restantes peças ou ao saldo contabilístico disponível, por exemplo. Para além disso, os alunos passaram à etapa de *resolver* e apresentaram uma resposta ao problema formulado sem sequer terem exposto uma questão. Neste sentido, a investigadora tentou perceber o que o grupo tinha feito.

> I: O que é que vocês pensaram?
> B: Nós fizemos… Quantas peças é que ela pode comprar para dar o valor… Por exemplo, se ela comprasse 5 peças, já não tinha dinheiro suficiente. E não dá para comprar uma peça e meia!

A: Só se for meia calça!
B: No nosso problema, nós fizemos que uma peça que ela gostava muito era mais cara. Então nós formulámos e fizemos o que é que teria de acontecer para ela conseguir comprar a peça mais cara.

Deste diálogo, percebeu-se que a questão do problema seria perceber quantas peças, no máximo, é que a Teresa poderia comprar (mantendo-se os restantes dados do problema inicial).

I: Então vamos pensar assim: Se eu tapar esta parte, o que é que vocês entendem do vosso problema (tapando a proposta de resolução e deixando à vista só o novo problema)? Conseguem responder a isto?
A: Ah não!
B: Ah sim… Nós não fizemos a pergunta do problema. Era suposto fazer a pergunta também?
I: Eu gostava de olhar para aqui e ter um problema. Olhar para aqui e saber resolver!

O grupo entendeu, de imediato, que não existia uma questão a que seria possível responder. Posto isto, os alunos embarcaram na etapa de *melhorar*.

B: A peça que a Teresa gostava mais era 23,99€ (escrevendo).
A: E a média das outras?
B: Como ela vai fazer para conseguir comprá-la (escrevendo)?
A: Mas não sabes quanto é que custam as outras peças!
B: Isto é como se fosse uma alínea do problema, André!
A: Mas isto é um novo problema. É como se fosse uma nova pergunta!

Um dos elementos reconheceu, ainda, que não era só a questão do problema que estava em falta, mas também os dados.

I: Vamos à resolução! O que é que vocês faziam para resolver este problema?
A: A peça favorita era só uma. Então fazíamos 23,99 mais 15,99 vezes 3. Fomos em tentativas e as peças custavam 15,99 e só conseguíamos levar 3.
I: E quanto dinheiro é que ela tinha no vosso problema?
A: Ah… Não pusemos!

Após as discussões, o grupo acabou por apresentar um problema formulado corretamente (Figura 16).

Figura 16- Segunda proposta de formulação do par AB para o problema 5

Quantas peças a Teresa consegue compraR sabendo que uma delas custa 23.99€ e as outras 15.99€ e também sabendo que ela só tem 72,53 €.

Carolina e Diana

Ao lerem o enunciado do quinto problema, Carolina e Diana reagiram com estranheza ao que lhes estava a ser solicitado fazer: formular um problema, ao invés de o resolver.

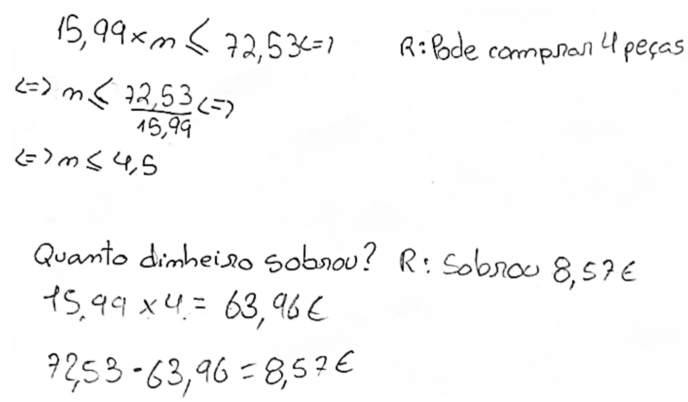
> C: "... Apresentem uma proposta de resolução para esse problema". Hã?
> D: Não percebi o que é que é suposto fazer!
> C: É para fazer outro problema depois deste?

Tal como o par André e Bruno, o par Carolina e Diana começou por resolver o problema inicial e apresentar uma resposta ao mesmo. Na etapa de *formular*, as alunas decidiram elaborar uma nova questão, ao invés de alterar os dados. Reconhece-se, por esta razão, que estas alunas também fizeram uso da estratégia *e se em vez de*.

> C: Quanto dinheiro ela tinha de ter para poder comprar 5 peças? Quanto dinheiro ela gastou para comprar as 4 peças? Quanto dinheiro sobrou?
> D: Era isso que eu estava a pensar!

De todas as questões, escolheram a última, cujo objetivo era calcular a quantia que sobrava após a compra das 4 peças (Figura 17).

Figura 17- Proposta de formulação do par CD para o problema 5



$15,99 \times m \leq 72,53 \Leftrightarrow$ R: Pode comprar 4 peças

$\Leftrightarrow m \leq \frac{72,53}{15,99} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m \leq 4,5$

Quanto dinheiro sobrou? R: Sobrou 8,57 €

$15,99 \times 4 = 63,96$ €

$72,53 - 63,96 = 8,57$ €

Consequentemente, na etapa de *resolver*, as alunas calcularam o valor total da compra das 4 peças e subtraíram-no ao saldo contabilístico disponível. Ao reparar que o problema formulado só incluía o pedido, a investigadora questionou o grupo acerca dos dados em falta.

> I: Onde está o vosso novo problema?
> C: Aqui! "Quanto dinheiro sobrou?".
> I: Só isto?
> D: Sim!
> I: Eu chegava à sala e perguntava assim: Quanto dinheiro sobrou?
> D: Ahhhhh! Então nós fizemos assim...
> C: Era a continuação.

D: Exato! Era a continuação. Se a pessoa fez isto (resolveu o problema inicial) e fizer uma conta, ter uma conta de quanto dinheiro sobrou faz sentido!

Através deste diálogo, entendeu-se que o grupo não tinha como intenção alterar os dados ou o pedido do problema inicial, mas sim mantê-los e acrescentar uma pergunta complementar. Por este motivo, as alunas preferiram não copiar a informação, ainda que quisessem fazer uso dela no seu próprio problema. Todavia, para que esse problema estivesse corretamente formulado, era necessário avançar para a etapa de *melhorar* e transcrever toda a informação.

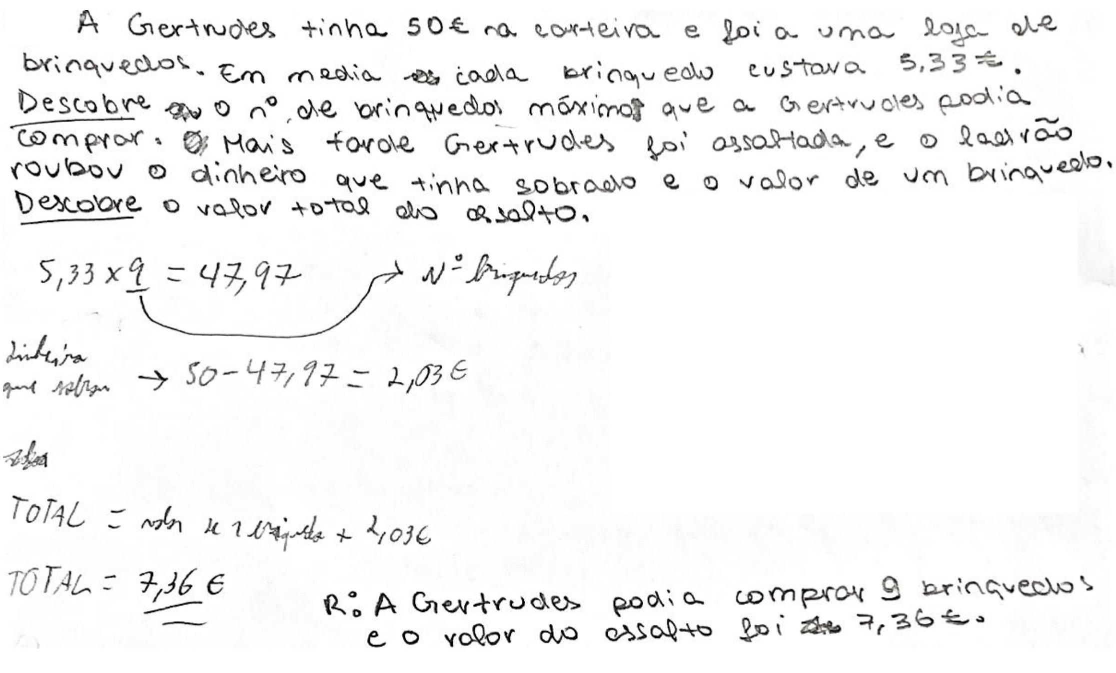
Eduarda e Filipe

No problema 5, o par Eduarda e Filipe mostrou dúvidas em perceber aquilo que lhe estava a ser pedido fazer. Mesmo assim, conseguiram avançar para a primeira etapa do processo de formulação de problemas, ou seja, para a etapa de *formular*.

F: É para fazer um problema a partir disto? Mas tipo os mesmos valores ou…?
E: Sim. Acho que é tipo isso.
F: Mas tipo, é preciso ser euros?
E: Acho que sim! Mas eu não sei se tens de dizer se é roupa ou assim, ou se é só com os números.

Além de terem decidido alterar os dados e o pedido do problema inicial, estes alunos alteraram, também, o contexto do mesmo (Figura 18). Mantiveram, sim, a ideia geral de uma compra efetuada numa loja. Assim, à semelhança dos pares anteriores, este par optou pela estratégia *e se em vez de*.

Figura 18- Proposta de formulação do par EF para o problema 5


A Gertrudes tinha 50€ na carteira e foi a uma loja de brinquedos. Em media cada brinquedo custava 5,33€. Descobre o nº de brinquedos máximos que a Gertrudes podia comprar. Mais tarde Gertrudes foi assaltada, e o ladrão roubou o dinheiro que tinha sobrado e o valor de um brinquedo. Descobre o valor total do assalto.

5,33 x 9 = 47,97 → Nº brinquedos

dinheiro que sobrou → 50 − 47,97 = 2,03 €

TOTAL = valor de 1 brinquedo + 2,03€

TOTAL = 7,36 €

R: A Gertrudes podia comprar 9 brinquedos e o valor do assalto foi 7,36€.

Ao analisar a proposta de formulação apresentada, observa-se que os alunos mudaram o nome da personagem, o saldo disponível e o tipo de loja. Para além disso, é de realçar que estes formularam duas questões distintas. Relativamente à primeira, esta é muito semelhante àquela que estava no problema inicial. Já a segunda, mais elaborada, é vista como uma continuação da primeira. Ao prosseguirem para a etapa de *resolver*, os alunos apresentaram uma resposta correta, de acordo com aquilo que era dado e o que era pedido. No entanto, na segunda pergunta, os alunos deveriam ter constatado que precisavam de percorrer a etapa de *melhorar*. Por sinal, estes deveriam ter esclarecido que, de facto, a Gertrudes tinha comprado o máximo de brinquedos possível com o dinheiro em questão.

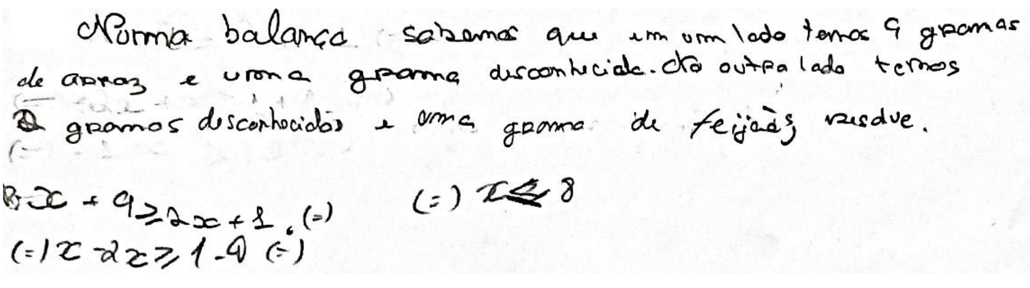
4.3.2 Problema 6

No problema 6, os alunos tinham como objetivo formular um problema que pudesse ser traduzido matematicamente pela expressão $x + 9 \geq 2x + 1$.

André e Bruno

O grupo André e Bruno revelou algumas dificuldades para formular o problema 6. Na etapa de *formular*, este escolheu a estratégia *aceitar os dados*. Porém, o par não foi capaz de apresentar uma situação e uma questão que se apropriasse, na sua totalidade, à condição inicial (Figura 19).

Figura 19- Proposta de formulação do par AB para o problema 6


Numa balança sabemos que em um lado temos 9 gramas de arroz e uma grama desconhecida. Do outro lado temos 2 gramas desconhecidos e uma grama de feijão. Resolve.

R: $x + 9 \geq 2x + 1$ (=)
(=) $x - 2x \geq 1 - 9$ (=)
(=) $x \leq 8$

Ao analisar a etapa de *resolver*, observa-se que o par André e Bruno é conhecedor do processo de resolução de uma inequação, sabendo simplificar e determinar o seu conjunto-solução. Por conseguinte, ao notarem que o coeficiente da incógnita era negativo, multiplicaram ambos os membros por um número negativo e inverteram o sinal da desigualdade. Todavia, não relacionaram a condição final obtida com a solução do problema. Posteriormente, a investigadora tentou compreender, em detalhe e junto dos alunos, esta etapa.

I: O que representa o vosso x?
B: É a nossa grama desconhecida.

Segundo a formulação apresentada, a interpretação da variável x mostra-se adequada. Contudo, por "grama desconhecida" deveria entender-se "peso desconhecido". Posteriormente, o grupo foi questionado relativamente ao uso do sinal da desigualdade.

I: O que simboliza este símbolo aqui (apontando para o sinal de desigualdade)?
A: Maior ou igual.
I: Esse símbolo está expresso, de alguma forma, no vosso problema? Nalguma palavra?
A: Não.
I: Como é que podemos tentar transmitir esse sinal, no contexto do problema?
A: Sabendo que o primeiro prato da balança está maior ou igual que o segundo prato.
I: Mas esse símbolo, neste sentido, é ser mais pesado, ou não?
B: Sim. Mais pesado ou o mesmo peso.

Com este diálogo, o grupo apercebeu-se de que o problema formulado não levava ao sinal de desigualdade apresentado na resolução. Por último, a investigadora procurou saber qual a questão a que dava origem a resolução apresentada.

I: O que é que vocês querem saber do vosso problema?
A: O peso do prato da balança 1 e o peso do prato da balança 2.
B: Não! Qual é o peso da grama desconhecida!

No fim de todas as discussões, o grupo percorreu a etapa de *melhorar* o problema, tendo sido capaz de apresentá-lo formulado corretamente.

I: Então, agora, formulem o vosso problema.
B: Descobre a grama desconhecida, sabendo que em um lado da balança temos 9 gramas de arroz e 1 grama desconhecida, que pode ser de maior peso ou igual peso ao outro lado, onde temos 2 gramas desconhecidas e 1 grama de feijão.

Ao verificar que o problema formulado envolvia o contexto de uma balança desequilibrada, a investigadora decidiu questionar o par a esse respeito.

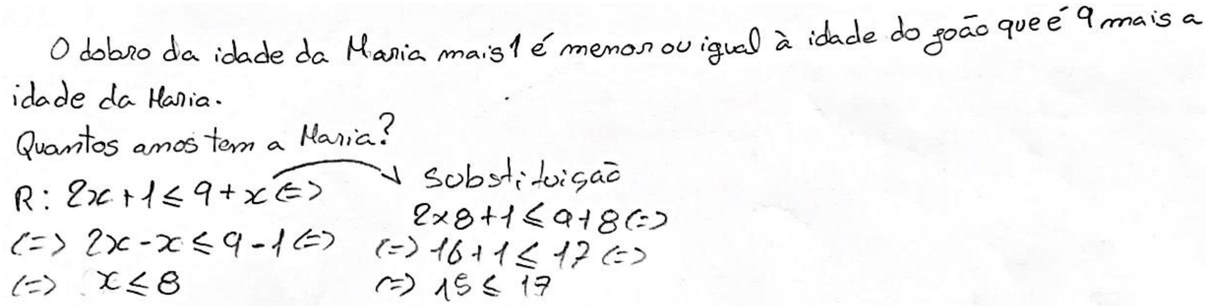
I: Quando formularam o problema 6, ainda não tinham visto a balança?
B: Já.
A: Porque nós primeiro fizemos este (apontando para o problema 7).
I: Vocês inspiraram-se no problema 7 para fazer o 6?
B: Não exatamente! Não me inspirei na balança. Só que a única coisa que eu pensei que dava para fazer no 6 era uma balança mesmo.

Assim, a investigadora constatou que o grupo avançou para o problema 7 e, só depois, regressou ao problema 6. Deste modo, é possível que o par se tenha inspirado no problema seguinte para formular este.

Carolina e Diana

No problema 6, na etapa de *formular,* Carolina e Diana também procuram criar um problema que se ajustasse à condição, pelo que seguiram a estratégia *aceitar os dados*. No entanto, este par mostrou mais originalidade que o par anterior, tendo apresentado um problema com um contexto totalmente diferente daqueles que tinham aparecido ao longo da tarefa. Pensaram, então, num cenário de idades (Figura 20).

Figura 20- Proposta de formulação do par CD para o problema 6



Para confirmar se o problema formulado poderia ser traduzido pela expressão indicada, Carolina pensou em ditar o problema à sua colega.

> C: Vou-te dizer e tu escreves o que tu interpretarias. O dobro da idade da Maria…
> D: Carolina, eu já sei o problema!
> C: Mas tu decoraste?
> D: Sim.
> C: Eu não decorei! Eu faço.
> D: O dobro da idade da Maria mais 1 é menor ou igual à idade do João, que é 9, mais a idade da Maria. Descobre a ideia da Maria. Está perfeito! Está perfeito!
> C: Quem não descobrir, não sabe, porque nós demos a papinha toda!

De realçar que, do modo como formularam o problema, a inequação traduzida não é, exatamente, igual àquela a que queriam chegar. No entanto, reconhece-se que estas são equivalentes, estando apenas o primeiro membro trocado com o segundo. Na etapa de *resolver*, o par começou pela resolução da inequação. Neste caso em específico, não foi necessário inverter o sinal da desigualdade ao resolver a inequação, uma vez que o coeficiente da incógnita tomou um valor positivo. Ainda que não tivessem escrito qual o significado da variável x, foi possível perceber, através do diálogo entre ambas, que significado lhe atribuíram.

D: Vamos tentar resolver o nosso problema. O dobro da idade da Maria: $2x$.
C: Não sabemos qual é a idade da Maria.
D: Mais 1… É menor ou igual… À idade do João, que é 9, mais a idade da Maria.
C: Não sabemos a idade da Maria. Colocamos mais x.
D: Faz sentido!

Deste discurso, deduz-se que x representa a idade da Maria. Porém, as alunas não apresentaram uma unidade de medida que transmitisse a noção de tempo, pelo que não se sabe se a idade está expressa em anos, meses, ou até outra. Chegaram, depois, à conclusão de que x deveria ser inferior ou igual a 8. E, mais uma vez, o grupo optou por fazer a substituição para confirmar a validade do processo de resolução da inequação, escolhendo o valor 8 para esse efeito. De notar que, fazendo a substituição por 8, ambos os membros da inequação deveriam dar o mesmo valor. Ainda que, no final, o par tivesse obtido uma proposição verdadeira, o par enganou-se num dos cálculos e não obteve a igualdade. Por terem obtido uma proposição verdadeira na mesma, as duas colegas deram por terminada a formulação deste problema, não tendo apresentado qualquer resposta.

I: Qual deveria ser a resposta ao problema?
C: A maria tem 8 anos ou menos.

Por último, a investigadora decidiu questionar o grupo relativamente ao contexto do problema.

I: Como é que vocês pensaram em formular este problema? Já tinham visto algo deste género?
C: Não.
D: Nós só falámos na idade da Maria e do João porque foi o que nos veio à cabeça.

Conclui-se que o par Carolina e Diana foi capaz de formular corretamente, de raiz, um problema que pudesse ser traduzido por uma dada expressão matemática. Por este motivo, não foi necessário as alunas passarem à etapa de *melhorar*.

Eduarda e Filipe

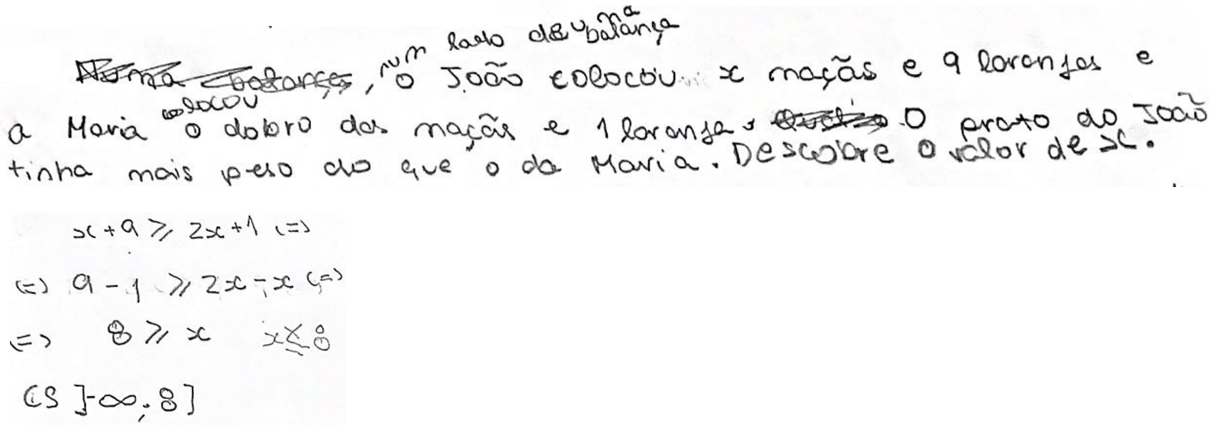
Eduarda e Filipe pensaram, na etapa de *formular*, em criar um problema que satisfizesse a condição inicial. Por consequência, considera-se que o par adotou a estratégia *aceitar os dados.*

F: Já sei, já sei! O João teve 9 laranjas e não sei quantas maçãs, maior ou igual que duas vezes maçãs mais uma laranja.
E: Se o x for maçãs…

F: O João foi a uma feira e comprou 9 laranjas e x maçãs. A outra miúda meteu $2x$ maçãs e 1 laranja. E os dois meteram numa balança e esta aqui deu maior, mas não sabemos o número de maçãs.
E: Está bem! Agora dizer isso sem estar super confuso.

Posteriormente, o grupo decidiu escrever, de forma mais organizada, o que havia dito (Figura 21).

Figura 21- Proposta de formulação do par EF para o problema 6


~~Numa balança~~, num lado da balança o João colocou x maçãs e 9 laranjas e a Maria colocou o dobro das maçãs e 1 laranja. O prato do João tinha mais peso do que o da Maria. Descobre o valor de x.

$x+9 \geq 2x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9-1 \geq 2x-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8 \geq x \quad x \leq 8$

$CS\ ]-\infty, 8]$

Ao analisar o problema formulado, verifica-se que os alunos abordaram um contexto de balança desequilibrada, mas não mencionaram o peso de cada peça de fruta. Na etapa de *resolver*, estes verificaram que não tinham uma pergunta a que fosse possível responderem. Deste modo, voltaram atrás e acrescentaram o pedido. Por conseguinte, este grupo percorreu a etapa de *melhorar*.

F: Acabei de perceber que o nosso problema não tem o que fazer.
E: Pois, exato! É para resolver o quê?
F: Descobre se o lado da balança do João...
E: Mas isso já está aqui a dizer.
F: Tira isso então. Não é suposto as pessoas saberem isto.
E: Porquê? Se tu não souberes qual é que é maior ou qual é que é menor, tu não consegues fazer a inequação. Como é que vais descobrir qual é maior? Tens de descobrir qual é o x. Agora como é que se diz isso?
F: Descobre o x.

Decidiram, assim, que o objetivo do problema seria descobrir o valor de x, isto é, quantas maçãs tinha o João colocado num dos pratos da balança. Aquando da resolução da inequação, o grupo optou por seguir, propositadamente, um caminho que não conduzia a um coeficiente de x negativo.

F: Eu trocava este x para ali, em vez de $2x$ para cá. Senão vai ficar negativo o x e depois vais ter de alterar.
E: Ah ya! Não gosto disso.

Desta conversa, destaca-se a capacidade dos alunos em manipular passos do processo de resolução de uma inequação, a fim de não terem de inverter o sinal da desigualdade. Contudo, ao averiguar o problema formulado, observa-se que o enunciado não se adequa, na sua totalidade, à condição a que seria necessário chegar. Por esta razão, a investigadora tomou a iniciativa de questionar o grupo.

I: Se eu ler isto, eu consigo escrever esta desigualdade?
E: Sim.
F: Acho que sim. Quer dizer… Talvez o maior ou igual não, mas só o maior.
E: Ah pois é!
F: Então era só meter "era igual ou mais pesado".
E: Pois, exato!

Para além disso, o grupo apresentou um conjunto-solução da inequação que não estava de acordo com a resposta ao problema.

I: Qual era a resposta do problema?
F: Que x era menor…
I: O que é que era o vosso x?
F: Que o número de maçãs era menor ou igual que 8.
I: Posso ter -3 maçãs?
E: Ah não! Isto tem de ser natural.
I: Então como é que vocês podiam responder?
E: Não podemos meter os parêntesis assim. Tem de ser o x pertence a $\mathbb{N}$.
F: Mas se enumerássemos, era só meter 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Deste diálogo, realça-se o raciocínio de Eduarda em reconhecer que o uso de parêntesis retos dizia respeito a um conjunto de números reais, o que não fazia sentido no contexto do problema. Ao pensar em escrever esse mesmo conjunto na forma de uma condição de números naturais, a aluna mostrou conseguir indicar a resposta final de uma forma correta. Também Filipe, ao enumerá-lo, revelou ter entendido qual deveria ter sido a resposta apresentada. Note-se ainda que, ao equacionarem o problema desta forma, os alunos estiveram sempre a assumir que o peso de cada maçã era igual ao peso de cada laranja. Caso o peso das várias peças de fruta não fosse igual, poderia pensar-se num cenário em que a resposta final não seria de 8 ou menos unidades (bastava as maçãs e as laranjas pesarem, respetivamente, 300 e 200 gramas, por exemplo). Por isso, os alunos deveriam ter, novamente, melhorado o seu problema. Com efeito, deveriam ter corrigido a relação entre os pesos dos pratos da balança e ter escrito alguma nota relativa ao peso das peças de fruta. Por último, a investigadora interrogou o grupo numa tentativa de saber em que este se tinha baseado para formular o problema.

> I: Outra coisa que eu vos quero perguntar… Aqui neste (problema 6) utilizaram o contexto da balança e da fruta e tudo mais. Inspiraram-se neste (problema 7)?
> F: Não, por acaso não. Eu só imaginei e depois é que apareceu.
> E: Foi ele que pensou na balança.
> F: Eu não me inspirei nisto, eu juro! Foi só coincidência, mesmo!

À semelhança do que tinha acontecido com os alunos André e Bruno, também estes alunos não afirmaram ter-se inspirado no problema seguinte para formular este.

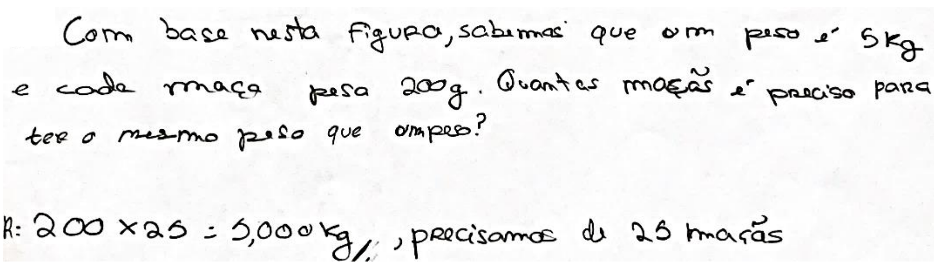
4.3.3 Problema 7

No que diz respeito ao problema 7, era pedido aos alunos que formulassem um problema com base numa imagem. Nessa imagem, encontrava-se representada uma balança desequilibrada, onde um dos seus pratos tinha um peso e o outro 4 maçãs. Por observação, era notório que o objeto era mais pesado que as peças de fruta.

André e Bruno

Na etapa de *formular*, o grupo André e Bruno não revelou quaisquer dificuldades. Ainda que na figura inicial do problema a balança se encontrasse desequilibrada, o problema formulado envolve o contexto de equilíbrio (Figura 22). Pelo facto de terem tentado ajustar o problema à informação da imagem, os alunos seguiram a estratégia *aceitar os dados*.

Figura 22- Proposta de formulação do par AB para o problema 7


Com base nesta figura, sabemos que um peso é 5kg e cada maça pesa 200g. Quantas maçãs é preciso para ter o mesmo peso que um peso?

R: 200 x 25 = 5,000kg, precisamos de 25 maçãs

Do ponto de vista matemático, o problema encontra-se corretamente formulado, sendo possível encontrar os dados e o pedido. Relativamente à etapa de *resolver*, os alunos também apresentaram uma proposta de resolução acertada. Nesta etapa, o grupo confessou ter feito várias tentativas, pelo que não verificou que o problema proposto poderia ter sido traduzido por uma equação de 1.º grau, ao invés de uma inequação. A concluir, não houve a necessidade de os alunos avançarem para a etapa de *melhorar*.

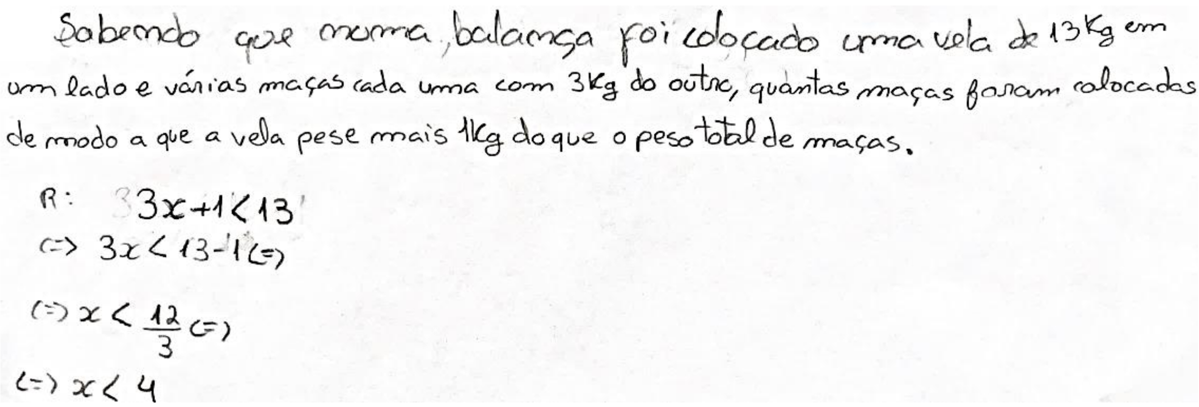
Carolina e Diana

Para formularem o problema 7, o grupo Carolina e Diana começou por fazer uma interpretação da imagem.

> C: Mas o que é isto?
> D: Isso é uma vela. Então 1 vela é mais pesada do que 4 maçãs.

Este grupo pensou que o peso que estava colocado num dos lados da balança seria uma vela. Seguiram, então, para a etapa de *formular*. O objetivo do problema formulado seria descobrir o número de maçãs presentes na imagem (Figura 23). Posto isto, pode afirmar-se que as alunas escolheram a estratégia *aceitar os dados*.

Figura 23- Proposta de formulação do par CD para o problema 7


Sabendo que numa, balança foi colocado uma vela de 13Kg em um lado e várias maças cada uma com 3Kg do outro, quántas maças foram colocadas de modo a que a vela pese mais 1Kg do que o peso total de maças.

R: $3x+1<13$

$\Leftrightarrow 3x<13-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<\frac{12}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<4$

Depois, as alunas passaram para a etapa de *resolver*.

> C: 3 vezes x é menor que 13. Vamos ver se dá 4.
> D: x é menor que 13 sobre 3.
> C: Ah não! Tem de ser 13 menos 1.
> D: Ah… Porque é 1 quilo.
> C: O menos 1 tem de ser deste lado. Tira o menos 1. Mete mais 1. Porque aqui diz que tem mais 1 quilo, não diz que tem menos 1.
> D: Assim dá 12 a dividir por 3 e, depois, já dá 4.
> C: Dá certo! Somos mesmo espertas!

Esta conversa mostra que o par teve dificuldades em traduzir matematicamente o problema formulado, nomeadamente, em que lado da inequação deveria colocar a expressão que representava o quilo a mais. No final, ao chegarem a um resultado que envolvia 4 unidades, o grupo considerou que o problema estava resolvido corretamente. A investigadora decidiu, assim, intervir e questionar o grupo acerca do que tinham feito e como tinham pensado.

I: O que representa o vosso x?
D: O número de maçãs na balança.
I: Então agora expliquem-me a vossa resolução.
C: Eu disse-te que isso estava um bocado confuso!
D: Pois está!
…
C: "… várias maçãs, cada uma com 3 quilos…"
I: Maçãs com 3 quilos? Estas maçãs vieram de onde?
D: Do paraíso!
C: Aquilo era uma maçã de ferro. Era só para enfeitar!
D: Eu nem tinha pensado nisso! Eu nem sei quem é que sugeriu 3 quilos!
C: Eu.

Diana confessou que, quando estava na fase de criar o enunciado, não refletiu sobre os dados que a colega lhe tinha fornecido. Deste modo, percebe-se que o grupo não procurou aproximar o peso da maçã a um contexto real. Por esta razão, e em tom de brincadeira, justificaram que não se tratava de maçãs comuns. Posteriormente, partiu-se para a discussão da condição final.

I: Vocês estão a dizer-me que o número de maçãs tem de ser inferior a 4.
C: Pode ser -1, -2…
I: Mas acho que agora há mais problemas para além desse.
D: Ai há?
I: Podemos ter, por exemplo, 3,7 maçãs?
D: Depende! Se a maçã for de ferro…
C: Nós podemos cortar a maçã!
I: Portanto, o que é que vocês queriam dizer?
D: Os números inteiros. Os números naturais entre 0 aberto e 4 aberto.
I: Enumerem-nos.
C: 1, 2, 3 e 4.
D: Não! 1, 2 e 3.
I: Então vamos pensar com calma. Se eu só tiver 1 maçã, eu fico com quantos quilos de um lado e quantos quilos do outro?
C: 3 quilos.
I: E do outro lado?
D: 13.
I: E qual é que vocês queriam que fosse a relação?
C: Que tivesse mais um quilo!
D: Tinha de ser menor ou igual.
I: Vamos pensar outra vez. E se eu tiver 3 maçãs?
D: Tinha de ter um igual. Isto não é uma inequação!
C: Pois… Era o que eu estava a pensar agora. Isto é uma equação.

D: Eu agora estava a somar e 3 mais 3 mais 3 dá 9. Não fica menos 1.
I: Então qual é que era o único valor que fazia sentido como resposta ao problema?
D: 4.
C: Porque dava 12.

Muito embora tivessem formulado um problema com dados e pedido corretos, Carolina e Diana não foram capazes de apresentar uma proposta de resolução coerente com os mesmos. Autonomamente, o par não entendeu que o seu problema não dava origem a uma inequação, mas sim a uma equação. Já no final deste diálogo, o grupo percebeu que deveria ter resolvido o problema de outra maneira. Neste sentido, não se verificou uma necessidade de melhorar o problema formulado, mas sim a sua resolução. Quando interrogadas pela investigadora relativamente a esse assunto, Diana admitiu que o erro do sinal de desigualdade surgiu da interpretação incorreta da frase "mais 1kg".

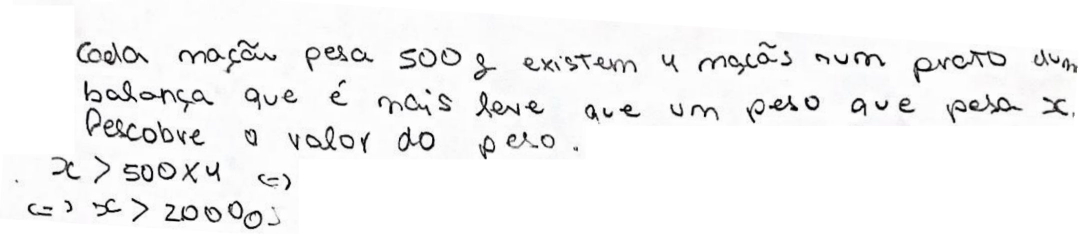
Eduarda e Filipe

Para formularem o problema 7, o grupo Eduarda e Filipe começou por interpretar a figura e extrair-lhe a informação importante.

E: 4 maçãs é maior do que…
F: Menor, é menor do que isto.
E: Podemos dizer que cada maçã pesa não sei quanto.
F: Por exemplo, tipo 2 quilos.
E: Uma maçã pesa 2 quilos? Não. Vamos só dizer que as maçãs são 4.
F: Uma maçã não pesa 2 quilos, é menos.
E: Uma maçã pesa 2 quilos em que mundo? Pesa tipo 500 gramas.
F: Faz uma inequação para provar que uma vela é mais pesada do que…
E: Isto não é uma vela! Nunca viste estas balanças na vida real? Isto é só um peso.

Ao analisar esta discussão, repara-se que o grupo tentou aproximar os dados do problema a um contexto real. E, contrariamente a Carolina e Diana, estes alunos entenderam que o objeto da figura era um peso e não uma vela. Na etapa de *formular*, os alunos criaram um problema com base naquilo que a imagem lhes sugeria, pelo que fizeram uso da estratégia *aceitar os dados* (Figura 24).

Figura 24- Proposta de formulação do par EF para o problema 7


Cada maçã pesa 500g existem 4 maçãs num prato dum balança que é mais leve que um peso que pesa x. Descobre o valor do peso.

$x > 500 \times 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 2000g$

Ao analisar a etapa de *resolver*, constatou-se que o grupo não fez qualquer referência à medida de massa do peso. Porém, ao explicar o problema à investigadora, este esclareceu que a massa do peso estava expressa em gramas. Neste sentido, os alunos concluíram que o objeto pesava mais de 2000 gramas. Assim, pode afirmar-se que o problema se encontra bem formulado e que a resolução está de acordo com os dados e o pedido do mesmo. Consequentemente, não se percorreu a etapa de *melhorar*.

4.3.4 Problema 8

Para formularem o problema 8, só era exigido aos alunos que esse problema pudesse ser traduzido matematicamente por uma inequação do 1.º grau.

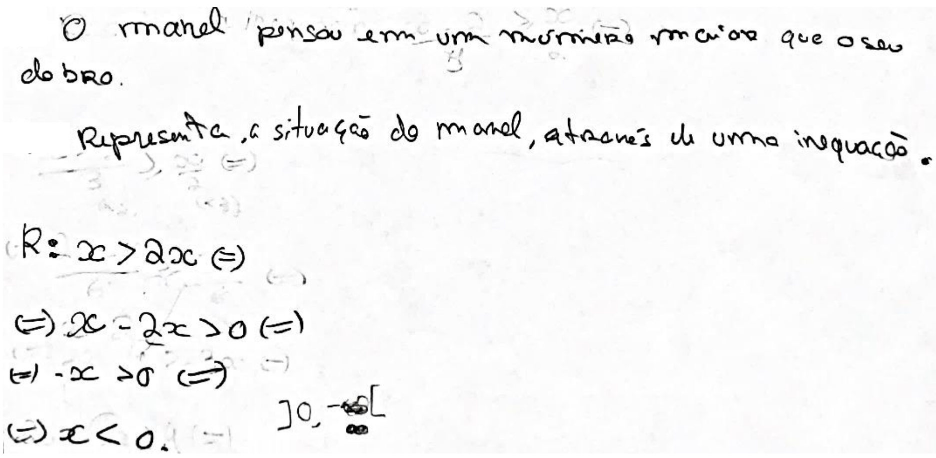
André e Bruno

No problema 8, o grupo André e Bruno começou por mostrar à investigadora um exercício que envolvia a resolução de uma inequação do 1.º grau.

> I: Onde está o enunciado do vosso problema?
> B: "Resolve a inequação". É um problema, professora.
> I: Eu acho que isso é um exercício. Os problemas da parte anterior eram assim?
> B: Eu não consigo pensar em problemas.
> I: Vocês conseguem. Inspirem-se!
> A: Eu não tenho inspiração.

De seguida, o grupo avançou para a etapa de *formular*. Neste momento, a investigadora apercebeu-se de que, por falta de criatividade, este par tinha recorrido ao manual adotado pela escola. Abaixo, encontra-se a proposta de formulação apresentada pelo par (Figura 25).

Figura 25- Proposta de formulação do par AB para o problema 8


O manel pensou em um número maior que o seu dobro.

Representa a situação do manel, através de uma inequação.

R: $x > 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 2x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < 0.$ $]0, -\infty[$

Ao consultar o livro, a investigadora confirmou que o par tinha copiado de lá o problema. A única alteração realizada foi a troca do nome de Teresa para Manel, pelo que o par utilizou a estratégia de formulação *e se em vez de*. Mesmo assim, a investigadora decidiu confrontar o grupo relativamente a este assunto.

> I: Onde é que vocês foram buscar este problema?
> A: Ao man…
> B: À minha cabeça! À minha cabeça!
> A: À tua cabeça!
> I: Digam lá a verdade!
> A: Ao manual.

Desta forma, os alunos admitiram ter copiado o problema do manual. No que concerne à etapa de *resolver*, o manual apresenta como solução a inequação $x > 2x$.

> I: E a resolução estava onde? Essa vocês pensaram?
> B: Esta fui eu que sou muito bom!
> A: És tu, és sempre tu! Não fizeste nada!
> I: O que é que representa o vosso x?
> B: Não sei. No manual também não dizia o que é que era o x!
> I: Leiam lá outra vez.
> A: É o número maior que o seu dobro.
> B: O que ele pensou.
> A: O que ele não sabe qual é.

De realçar que, no livro, não é apresentada uma proposta de resolução da inequação, uma vez não se pretende saber em que número o Manel pensou. Mas, mais uma vez, o par soube explicar corretamente à investigadora o processo de resolução da inequação que utilizou. De seguida, a investigadora questionou-os sobre quais seriam os possíveis números em que o Manel pode ter pensado.

> I: Então quais foram os números em que o Manel pensou?
> B: Todos os números negativos.

No final, o grupo mostrou ter interpretado corretamente a solução da inequação. Compreenderam que o Manel pode ter pensado em qualquer número negativo, já que estes faziam verificar a condição inicial de que seriam maiores do que o seu dobro. Pelo facto de terem copiado o problema do manual, André e Bruno apresentaram um problema bem formulado e não tiveram necessidade de avançar para a etapa de *melhorar*.

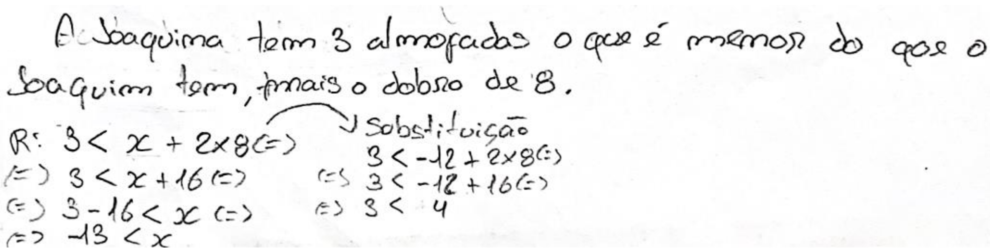
Carolina e Diana

Ao lerem o que lhes estava a ser pedido fazer, Carolina e Diana não entenderam, de imediato, que conteúdo matemático seria necessário usar.

> C: "Formulem um problema que possa ser traduzido matematicamente por uma inequação do 1.º grau."
> D: Ai… O que é que é isso?
> C: Eu sei! É aquilo sem expoente.

Carolina explicou à colega Diana, pelas suas próprias palavras, que uma inequação do 1.º grau era uma inequação sem expoente. Porém, por mais que a variável não tivesse nenhum algarismo em expoente, esta não reconheceu que o mesmo seria de 1 unidade. As alunas avançaram, então, para a etapa de *formular* e apresentaram o seguinte problema (Figura 26).

Figura 26- Proposta de formulação do par CD para o problema 8



A Joaquina tem 3 almofadas o que é menor do que o Joaquim tem, mais o dobro de 8.

R: $3 < x + 2\times 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3 < x + 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3 - 16 < x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -13 < x$

Substituição
$3 < -12 + 2\times 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3 < -12 + 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3 < 4$

Contrariamente ao par André e Bruno, este par formulou um problema fruto da sua imaginação. Neste sentido, a estratégia escolhida não se enquadra em nenhuma das anteriores. Ao analisar esta etapa, observa-se que o grupo formulou um enunciado sem ter escrito uma questão a que fosse possível responder. Mas, a meio da resolução do problema, as alunas dialogaram sobre o que pretendiam descobrir.

> D: Tu queres saber quantas almofadas é que o Joaquim tem, que é x.

As alunas chegaram, assim, à conclusão de que x seria maior que -13. Neste sentido, e como forma de validação do processo de resolução da inequação, escolheram um número maior que -13 e verificaram se este satisfazia a condição inicial.

> D: -12 mais 16?
> C: Dá 4.
> D: E 3 é menor que 4. Está certo!

Este diálogo mostra que Carolina e Diana não relacionaram o valor obtido com o contexto do problema, já que estavam a falar do número de almofadas que o Joaquim possuía. Todavia, por terem chegado a uma proposição verdadeira na substituição, consideraram que o problema estava bem formulado e bem resolvido. Posteriormente, a investigadora tentou perceber o que as alunas tinham feito.

> I: Eu tenho algumas questões. Vamos à primeira! Qual é a pergunta do vosso problema?
> D: Então "quantas almofadas é que o Joaquim tem?".
> I: Isso está onde? Não estou a ver essa pergunta!
> C: Ahhhhh! Não escrevemos!
> D: A pessoa podia, automaticamente, perceber! A professora sabe, aqui, quantas almofadas é que o Joaquim tem? Não sabe!

O grupo não conseguiu perceber, autonomamente, que o problema formulado não tinha qualquer pedido. Por isso, não compreendeu que precisava de continuar para a etapa de *melhorar*. Contudo, quando questionado, o par apresentou uma questão que se enquadrava aos dados e ao contexto apresentado. De seguida, o grupo foi interrogado relativamente aos valores do conjunto-solução da inequação.

> I: Portanto, o Joaquim tem mais de -13 almofadas.
> D: Sim, porque depois faz-se a substituição. E na substituição não pode ser -13, tem de ser tipo -12.
> I: Mas faz sentido terem -12 almofadas?
> D: Qual é que era mesmo a nossa pergunta? Só a nossa substituição é que está certa. Agora o x…

O grupo entendeu, assim, que algo não estava correto, mas não soube, exatamente, o quê. Consequentemente, a investigadora voltou à leitura do enunciado formulado.

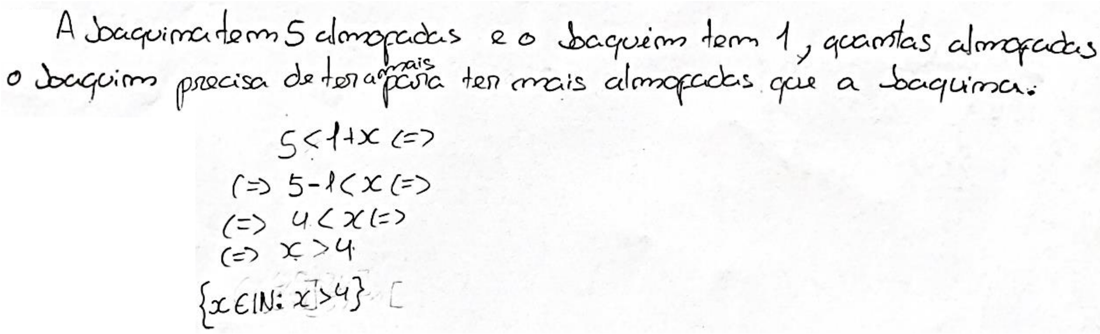
> I: Vamos tentar ler outra vez. A Joaquina tem 3 almofadas e vocês dizem-me que o Joaquim tem 16 mais alguma coisa.
> C: Como é lógico, a Joaquina tem sempre menos!
> D: Então está certo!
> I: Independentemente de quantas mais o Joaquim tiver, a Joaquina tem sempre menos.
> D: Eu acho que ninguém ia pensar nisso!

Adicionalmente, a investigadora tentou perceber se, após terem resolvido o problema, o grupo alterou a formulação do mesmo.

> I: No fim de resolverem, vocês alteraram alguma coisa?
> D: Não.
> C: Acho que não.
> D: Só olhámos para trás e pensámos: achas que isto está tudo bem? Está!

Concluiu-se que as alunas não alteraram o problema depois de o resolver. Por fim, a investigadora pediu ao grupo para fazerem as devidas alterações, a fim de apresentarem um problema que estivesse corretamente formulado e resolvido. O grupo apresentou a seguinte proposta (Figura 27).

Figura 27- Segunda proposta de formulação do par CD para o problema 8



Verifica-se, assim, que as alunas descartaram tudo o que tinham feito anteriormente, isto é, descartaram o primeiro problema e a respetiva resolução. Por este motivo, conclui-se que o grupo voltou à etapa de *formular*, ao invés de ter seguido para a etapa de *melhorar* e ter alterado o problema proposto inicialmente. Este novo problema já incluía dados coerentes com o pedido e uma resolução adequada ao enunciado. Realça-se, por último, a apresentação da resposta final na forma de condição, mostrando que as alunas atentaram a que o número de almofadas a mais, x, teria de ser um número natural maior que 4 unidades.

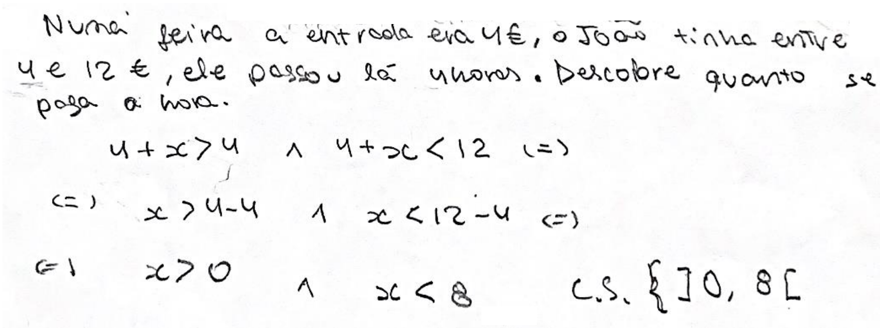
Eduarda e Filipe

Para formularem o problema 8, os alunos Eduarda e Filipe pensaram em criar, inicialmente, uma inequação do 1.º grau. Depois, tinham como objetivo inventar um contexto de um problema que, ao ser traduzido, desse origem a essa inequação.

> F: Faz a inequação primeiro. Inventa aí uma inequação.
> E: Ok, pode ser. $2x$ mais 4 maior do que… Agora formula um problema. Pode ser aquele da outra ficha.
> F: Queres fazer outra balança?
> E: Aquela coisa era o seguro pagavas 4 euros e depois pagavas tipo entre 7 euros e 3. Depois, por cada quilómetro, pagava não sei quanto.

Após este diálogo, o grupo optou por seguir a ideia de Eduarda. Na etapa de *formular*, os alunos basearam-se no problema 4 da parte anterior. Neste sentido, pode afirmar-se que o grupo adotou a estratégia *e se em vez de*. Abaixo, pode ver-se o problema que os alunos formularam e que fez uso dos seus conhecimentos de conjunção de inequações (Figura 28).

Figura 28- Proposta de formulação do par EF para o problema 8


Numa feira a entrada era 4€, o João tinha entre
4 e 12 €, ele passou lá 4horas. Descobre quanto se
paga a hora.

$4 + x > 4 \quad \wedge \quad 4 + x < 12 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x > 4 - 4 \quad \wedge \quad x < 12 - 4 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x > 0 \quad \wedge \quad x < 8 \qquad C.S. \{]0, 8[$

Na etapa de *resolver*, a investigadora reparou que a proposta de resolução apresentada não estava coerente com a informação do enunciado. Por este motivou, esta interpelou o par.

I: Ele tinha, efetivamente, entre 4 e 12 euros. Mas ele gastou esse dinheiro?
E: Tinha de gastar para fazer sentido.
I: O que é o vosso x?
F: O dinheiro que ele gastou, mas sem ser o de entrada.
E: Não.
F: É o dinheiro que se paga a cada hora.
I: E o João passou lá quantas?
E: 4.
I: E onde é que isso está indicado? Qual é esse 4 aqui?
E: Tinha que ser $4x$. Isto muito 4 faz confusão.
F: Devíamos ter posto 5 ou alguma coisa.
I: Outra coisa. Ele tinha 4 e 12 euros na carteira, ou tinha, por exemplo, 4,01?
E: Acho que podíamos incluir o 4 e o 12.
I: Vocês queriam incluir?
E: Sim.
I: E para incluírem, o que é que tinham de fazer?
E: O maior ou igual e tínhamos de escrever "inclusive".
F: E depois os parêntesis tinham de ser fechados.

No fim deste diálogo, o grupo compreendeu que deveria ter passado para a etapa de *melhorar*. Destacam-se, como melhorias, a mudança do termo "tinha" para "gastou" e o acrescento da palavra "inclusive". Relativamente ao facto dos alunos se terem confundido com os próprios dados do enunciado, estes chegaram à conclusão de que poderiam ter utilizado números diferentes entre si. Por esta razão, o grupo não reparou que se tinha esquecido de equacionar um dos dados do problema.

4.3.5 Considerações finais

De um modo geral, todos os pares criaram problemas que envolviam um contexto da vida real. Para além disso, ao resolverem-nos, os pares não conseguiram perceber, autonomamente, quando é que os seus enunciados necessitavam de ser melhorados.

No problema 5, na etapa de *formular*, todos os alunos seguiram a estratégia *e se em vez de*. O grupo André e Bruno alterou um dos dados do problema, mantendo a questão e o contexto. Por sua vez, Carolina e Diana mantiveram o contexto e os dados do problema e mudaram o pedido. Já Eduarda e Filipe decidiram modificar o contexto e, consequentemente, os dados e o objetivo. Inclusivamente, estes alunos mostraram duas perguntas distintas, com grau de complexidade crescente. Contudo, nas primeiras propostas de formulação dos grupos André e Bruno e Carolina e Diana, verificou-se uma ausência de informação, não existindo dados, questões ou contexto a que fosse possível responder. Neste sentido, André e Bruno só expuseram a alteração a um dos dados e Carolina e Diana só exibiram a nova pergunta. No que toca à etapa de *resolver*, cada um dos grupos encontrou um caminho apropriado para o fazer. Das discussões com a investigadora, os pares André e Bruno e Carolina e Diana mostraram ser capazes de melhorar os problemas, tendo, efetivamente, o grupo André e Bruno reescrito uma proposta de formulação adequada. Eduarda e Filipe não percorreram a etapa de *melhorar,* porém precisavam de clarificar uma das perguntas.

No problema 6, os grupos optaram por criar um problema que se enquadrasse à condição inicial, tendo todos eles usado a estratégia *aceitar os dados* na etapa de *formular*. Para formularem este problema, o par André e Bruno e o par Eduarda e Filipe recorreram a um contexto semelhante ao do problema 7. Relativamente ao enunciado de André e Bruno, este não conduzia, exatamente, à expressão apresentada. Para além disso, o pedido não estava de acordo com aquilo que pretendiam descobrir. Já Eduarda e Filipe nunca se referiram ao peso dos elementos a colocar nos pratos da balança. Carolina e Diana, por sua vez, formularam um problema diferente daqueles que haviam visto anteriormente. Estas alunas apresentaram um problema com dados e pedidos coerentes com a proposta de resolução. Ainda assim, a expressão resultante da tradução do enunciado deste grupo não era igual àquela a que era suposto chegar, mas sim equivalente. Na etapa de *resolver*, Eduarda e Filipe notaram a falta de um pedido a que fosse possível dar resposta, pelo que voltaram atrás e percorreram a etapa de *melhorar*. No que concerne à proposta de resolução deste par, esta só poderia ser considerada acertada assumindo que todas as peças de fruta pesavam o mesmo. No que diz respeito ao processo de resolução da inequação, não foram detetados erros em nenhum dos grupos. Com efeito, um dos pares multiplicou ambos os membros por um número negativo e inverteu o sinal da desigualdade e outro trocou, propositadamente, as parcelas de membro para que não se criassem coeficientes da incógnita negativos.

Também no problema 7, na etapa de *formular*, todos os alunos criaram um enunciado que se ajustava à informação da imagem, seguindo a estratégia *aceitar os dados*. Apesar da balança da figura estar desequilibrada, o grupo André e Bruno formulou um problema que envolvia o contexto de equilíbrio. No que toca ao enunciado deste par, nenhuma melhoria houve a fazer. À semelhança de André e Bruno, os restantes pares também formularam corretamente o problema. Excetuando o caso das alunas Carolina e Diana, as propostas de resolução estavam conforme o que vinha expresso no enunciado. Por terem interpretado erradamente um dos termos do próprio problema, Carolina e Diana utilizaram uma inequação em detrimento de uma equação. Neste sentido, não houve a necessidade destas alunas melhorarem o problema, mas somente a sua proposta de resolução.

No problema 8, na etapa de *formular*, os alunos André e Bruno recorreram ao manual, tendo copiado de lá um dos problemas. Estes alunos seguiram, assim, a estratégia *e se em vez de*. Numa perspetiva oposta, Carolina e Diana criaram um problema de raiz, não se enquadrando a estratégia em nenhuma das mencionadas previamente. Já Eduarda e Filipe adaptaram um dos problemas da parte anterior da resolução de problemas e utilizaram a estratégia *e se em vez de*. Pelo facto de terem copiado um dos problemas do livro adotado, o problema do grupo André e Bruno estava bem formulado. Em contrário, o grupo Carolina e Diana apresentou um problema sem pedido, para além de nos dados do enunciado já estar evidenciada a relação entre estes. Por não terem utilizado os termos adequados, Eduarda e Filipe também não formularam corretamente o problema. Passando para a etapa de *resolver*, André e Bruno apresentaram uma proposta de resolução acertada e chegaram à conclusão esperada. Ainda que as alunas Carolina e Diana tivessem exibido uma proposta de resolução, esta não fazia sentido no contexto do problema. Relativamente a Eduarda e Filipe, estes alunos enganaram-se a traduzir o problema devido ao número de condicionantes e aos valores idênticos que incorporaram no enunciado. Deste modo, só André e Bruno não precisaram de alterar nada do que tinham feito. Carolina e Diana, por sinal, voltaram à primeira etapa do processo de formulação de problemas, em vez de terem seguido para a etapa de *melhorar*. Relativamente ao problema da segunda proposta, este estava formulado e resolvido corretamente.

5. Conclusões

A presente investigação visou compreender e caracterizar o processo de resolução e formulação de problemas, dos alunos do 9.º ano de escolaridade, no âmbito das inequações do 1.º grau. De forma a atingir o objetivo inicial, foi implementada uma tarefa aos alunos, dividida em duas partes: resolução de problemas e formulação de problemas. Adotou-se, pois, uma metodologia qualitativa e selecionaram-se três pares de participantes. Relativamente aos pares, estes foram escolhidos de modo a que formassem uma amostra mais abrangente de estratégias e de processos de resolução e de formulação de problemas. Procurou-se, assim, responder às seguintes questões de investigação:

1. Como se caracteriza o processo de resolução de problemas que envolvam inequações do 1.º grau?
2. Como se caracteriza o processo de formulação de problemas que envolvam inequações do 1.º grau?

Deste modo, o capítulo em apreço apresenta as conclusões finais deste estudo. No primeiro e segundo subcapítulos, são expostas as conclusões relativamente à caracterização dos processos de resolução e formulação de problemas, respetivamente. Por fim, terão lugar as considerações finais. Neste subcapítulo são partilhadas limitações e reflexões sobre o estudo realizado, bem como sugestões para futuras investigações.

5.1 Caracterização do processo de resolução de problemas que envolvam inequações do 1.º grau

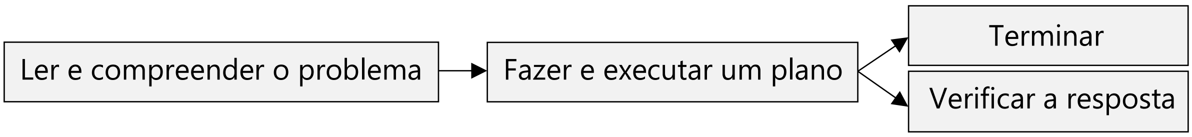
Na tarefa proposta aos alunos, consideraram-se três tipos distintos de problemas. Esta parte contava com um problema de contexto puramente matemático, dois de contexto realista e, por fim, um de contexto fantasioso (Díaz & Poblete, 2005). Tal diversidade, aliada à necessidade de serem os alunos a descobrir os próprios conteúdos matemáticos a utilizar, possibilitou aos alunos aplicarem vários processos e estratégias de resolução de problemas. Ao longo do processo de resolução de problemas evolvendo inequações do 1.º grau, os alunos percorreram as etapas de *ler e compreender o problema*, de *fazer e executar um plano* e, por fim, de *verificar a resposta* (Boavida et al., 2008). Na tabela abaixo, estão discriminadas as etapas alcançadas pelos grupos em cada um dos problemas (Tabela 7).

Tabela 7- Etapas do processo de resolução de problemas, segundo Boavida et al. (2008)

	Problemas 1 e 2	Problema 3	Problema 4
André e Bruno	Ler e compreender Fazer e executar um plano Verificar a resposta	Ler e compreender Fazer e executar um plano Verificar a resposta	Ler e compreender Fazer e executar um plano
Carolina e Diana	Ler e compreender Fazer e executar um plano Verificar a resposta	Ler e compreender Fazer e executar um plano Verificar a resposta	Ler e compreender Fazer e executar um plano
Eduarda e Filipe	Ler e compreender Fazer e executar um plano Verificar a resposta	Ler e compreender Fazer e executar um plano	Ler e compreender Fazer e executar um plano

Relativamente à última etapa, esta só foi percorrida quando existiu a necessidade de confrontar o resultado obtido com o contexto do problema, havendo alguns casos em que os alunos o fizeram por escrito (ex.: Problema 1- par EF) e outros em que o fizeram oralmente (ex.: Problema 1- par AB). Em síntese, o processo de resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau deu-se da seguinte forma (Figura 29).

Figura 29- Processo de resolução de problemas



Durante a etapa de *fazer e executar um plano*, os alunos empregaram estratégias *numéricas* e *simbólicas* (Freire et al., 2004). Na tabela seguinte, pode consultar-se a classificação das estratégias usadas pelos pares para resolverem cada um dos problemas (Tabela 8).

Tabela 8- Estratégias de resolução de problemas, segundo Freire et al. (2004)

	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
André e Bruno	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
Carolina e Diana	Simbólica	Numérica	Simbólica	Numérica
Eduarda e Filipe	Numérica	Numérica	Simbólica	Simbólica

Ao analisarem-se as estratégias de resolução *numéricas* dos problemas 1, 2 e 4, percebeu-se que existiam diferenças entre ambas. Por mais que estas envolvessem, exclusivamente, números e operações aritméticas, a maneira como se chegava ao resultado do problema era diferente. Com efeito, numas delas observou-se um conjunto de tentativas para chegar a um dado valor (ex.: Problema 4- par AB) e noutras efetuaram-se cálculos que conduziram diretamente a esse resultado (ex.: Problema 4- par CD). Neste sentido, sugere-se a incorporação desta distinção à classificação de estratégias de resolução de problemas que envolvam inequações do 1.º grau. Deste modo, as estratégias seriam: (i) *estratégia numérica indireta*- através do uso de números e operações aritméticas, efetuam-se tentativas para verificar se uma dada solução satisfaz ou não as condições do problema; (ii) *estratégia numérica direta*- através do uso de números e operações aritméticas, efetuam-se cálculos que conduzem diretamente à solução do problema; (iii) *estratégia simbólica*- através do uso de inequações, obtém-se a solução do problema. Na tabela que se apresenta de seguida, é feita uma classificação das estratégias utilizadas pelos pares segundo esta sugestão (Tabela 9).

Tabela 9- Estratégias de resolução de problemas

	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
André e Bruno	Numérica indireta	Numérica indireta	Numérica indireta	Numérica indireta
Carolina e Diana	Simbólica	Numérica direta	Simbólica	Numérica direta
Eduarda e Filipe	Numérica direta	Numéricas direta e indireta	Simbólica	Simbólica

Na resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau, os alunos revelaram fragilidades na leitura e interpretação dos textos, nomeadamente, na falta de compreensão de um dos conceitos presente nele (ex.: Problema 3- par CD), o que corrobora a perspetiva de Kuntz (2019) e Vieira et al. (2020). Da mesma maneira que Silva (2016) constatou, os alunos aplicaram estratégias idênticas àquelas que tinham sido utilizadas noutros contextos (ex.: Problema 4- par EF). À semelhança daquilo que aconteceu no estudo de Silva (2015), aponta-se como dificuldade a transformação do problema para linguagem matemática, mais concretamente, para a forma de inequação (ex.: Problema 4- par CD). Além do mais, quando traduziram o problema para linguagem simbólica, os alunos não atribuíram qualquer significado à variável criada (ex.: Problema 3- par EF). Do mesmo modo que Rocha et al. (2024) afirmaram, nuns problemas os alunos não sentiram a necessidade de percorrer a etapa de *verificar a resposta* (ex.: Problema 4- par CD) e noutros fizeram-no como forma de validarem o resultado alcançado (ex.: Problema 2- par CD). No entanto, verificou-se que os alunos nem sempre souberam confrontar corretamente a solução obtida com o contexto do problema (ex.: Problema 1-par CD). Tal como Proença et al. (2022) defendeu, os alunos manifestaram dúvidas em todas as etapas do processo de resolução de problemas envolvendo inequações do 1.º grau.

5.2 Caracterização do processo de formulação de problemas que envolvam inequações do 1.º grau

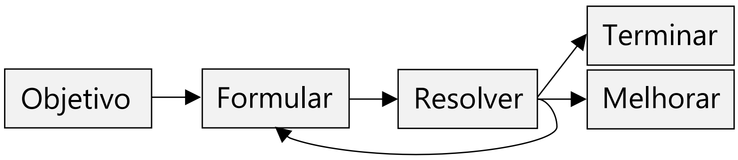
Na parte da formulação de problemas, foram apresentados aos alunos três tipos de problemas. Com efeito, os alunos começaram por ser sujeitos a uma situação estruturada, depois a duas semiestruturadas e, por último, a uma livre (Stoyanova, 1998). Mais uma vez, a diversidade de situações permitiu aos alunos utilizarem vários processos e estratégias de formulação de problemas. Relativamente ao processo de formulação de problemas envolvendo inequações do 1.º grau, os alunos percorreram as etapas de *formular*, *resolver* e *melhorar* (Ramírez, 2006). Na tabela seguinte, são exibidas as etapas do processo de formulação de problemas que os alunos atingiram antes da discussão com a investigadora (Tabela 10).

Tabela 10- Etapas do processo de formulação de problemas, segundo Ramírez (2006)

	Problemas 5, 7 e 8	Problema 6
André e Bruno	Formular Resolver	Formular Resolver
Carolina e Diana	Formular Resolver	Formular Resolver
Eduarda e Filipe	Formular Resolver	Formular Resolver Melhorar

De modo a atingirem o objetivo de cada pergunta, os alunos começaram por formular o problema e, posteriormente, seguiram para a sua resolução. Neste momento, verificaram-se três possibilidades distintas: (i) os alunos formularam o problema corretamente, pelo que terminaram o processo de formulação do problema (ex.: Problema 7- par AB); (ii) os alunos não formularam o problema corretamente e optaram por emendar a proposta inicial, pelo que embarcaram na etapa de melhorar (ex.: Problema 6- par EF); (iii) os alunos não formularam o problema corretamente e optaram por descartar a proposta inicial, pelo que recuaram à etapa de formular (ex.: Problema 8- par CD). Em suma, o processo de formulação de problemas envolvendo inequações do 1.º grau ocorreu do seguinte modo (Figura 30).

Figura 30- Processo de formulação de problemas



Ao longo da etapa de *formular*, os alunos aplicaram dois tipos de estratégias: *e se em vez de* e *aceitar os dados* (Boavida et al., 2008). Na tabela abaixo, encontram-se as estratégias usadas pelos grupos para formularem cada um dos problemas (Tabela 11).

Tabela 11- Estratégias de formulação de problemas, segundo Boavida et al. (2008)

	Problema 5	Problemas 6 e 7	Problema 8
André e Bruno	E se em vez de	Aceitar os dados	E se em vez de
Carolina e Diana	E se em vez de	Aceitar os dados	
Eduarda e Filipe	E se em vez de	Aceitar os dados	E se em vez de

Atendendo à tabela anterior, a apresentação aos alunos de uma situação estruturada potenciou o uso da estratégia *e se em vez de*. Noutra perspetiva, o facto de os alunos contactarem com situações semiestruturadas desencadeou a utilização da estratégia *aceitar os dados*. Ainda assim, observa-se um espaço da tabela por preencher. Tal espaço encontra-se vazio por nenhuma das estratégias deste autor se enquadrar no problema formulado. Neste sentido, deve ser considerada uma estratégia que retrate a criação, de raiz, de um problema. Posto isto, sugerem-se as seguintes estratégias de formulação de problemas que envolvam inequações do 1.º grau: (i) *estratégia de alteração*- o novo problema é formulado através da modificação de alguma parte de um problema anterior; (ii) *estratégia de aceitação*- o problema é formulado através de uma condição, objeto, figura ou tabela; (iii) *estratégia de imaginação* - o problema é formulado, na sua totalidade, através da imaginação, isto é, sem ter como base um problema inicial ou uma dada condição, objeto, figura ou tabela. Na tabela que se segue, classificam-se as estratégias utilizadas pelos pares segundo esta perspetiva (Tabela 12).

Tabela 12- Estratégias de formulação de problemas

	Problema 5	Problemas 6 e 7	Problema 8
André e Bruno	Alteração	Aceitação	Alteração
Carolina e Diana	Alteração	Aceitação	Imaginação
Eduarda e Filipe	Alteração	Aceitação	Alteração

Para além disto, reconhece-se que os alunos utilizaram como ideias de formulação de problemas de situações estruturadas a alteração de dados (ex.: Problema 5- par AB), a alteração de pedido (ex.: Problema 5- par CD) e, ainda, a alteração de contexto (ex.: Problema 5- par EF). No que diz respeito a situações livres, estes optaram pela cópia direta (ex.: Problema 8- par AB), pela modificação (ex.: Problema 8- par EF) e, também, pela criação de raiz (ex.: Problema 8- par CD). No caso das situações semiestruturadas, não se verificou nenhum padrão que pudesse originar ideias de formulação.

Da formulação de problemas envolvendo inequações do 1.º grau, pode concluir-se que os alunos têm tendência a formular problemas de contexto realista (Díaz & Poblete, 2005). Mesmo resolvendo os problemas formulados, os alunos tiveram dificuldades em compreender, autonomamente, que os mesmos precisavam de ser melhorados para atingirem os objetivos previstos (ex.: Problema 6- par AB). Tal como Zunino (1995) comprovou, em alguns dos problemas formulados, os alunos não apresentaram dados, contexto ou uma pergunta a que fosse possível responderem (ex.: Problema 5- par AB). Noutros, em que o enunciado estava formulado, os alunos não empregaram corretamente as operações que dele resultavam (ex.: Problema 7- par CD). À semelhança do que Cunha et al. (2014) defenderam, os motivos pela qual isso aconteceu foram não só o elevado número de condicionantes que os alunos incorporaram, como também a atribuição de valores iguais a variáveis distintas (ex.: Problema 8- par EF). Do mesmo modo que Cunha et al., (2014) confirmaram, a ausência de criatividade levou a que os alunos recorressem aos problemas do manual ou a outros problemas previamente trabalhados (ex.: Problema 8- par AB). Independentemente de determinados alunos desta investigação não apresentarem dificuldades noutras tarefas matemáticas, estes mostraram uma maior fragilidade ao formularem problemas (Miranda & Mamede, 2023). Muito provavelmente, esta situação deveu-se ao facto de, durante as aulas, os alunos não praticarem a formulação de problemas, mas somente a sua resolução.

5.3 Considerações finais

Considera-se que, no geral, o estudo correu como previsto e permitiu caracterizar o processo de resolução e formulação de problemas envolvendo inequações do 1.º grau. Ainda assim, reforça-se a ideia de que os resultados obtidos neste estudo não podem ser generalizados, uma vez que foi considerado um reduzido número de participantes. Os alunos demonstraram, de uma forma transversal, interesse não só pelo tema, mas também pela participação neste projeto de investigação. Para além disso, reconhece-se que este estudo possibilitou aos alunos o desenvolvimento de competências, quer no âmbito da resolução quer no âmbito da formulação de problemas. Espera-se, com a aquisição destas competências, que os alunos desenvolvam o gosto pela disciplina e consigam aplicar os seus conhecimentos em situações da vida real. Do ponto de vista da investigadora, realça-se a importância do estudo na elaboração de tarefas a apresentar a próximas turmas. Efetivamente, procurará despertar-se nos alunos o uso de diferentes estratégias, não cingindo o raciocínio destes àquela que está mais de acordo com cada matéria lecionada. Para a comunidade científica, este projeto mostra-se relevante por incluir temas considerados os pilares do ensino da matemática. Adicionalmente, destaca-se o confronto do tema da resolução e formulação de problemas com as inequações do 1.º grau, algo não aprofundado na área da investigação em educação matemática. Mais se adianta que, relativamente à formulação de problemas, este tópico é pouco trabalhado, tanto em meio científico, como em meio escolar. Por este motivo, sugere-se a todos os professores de matemática que adicionem o tópico da formulação de problemas às suas aulas, integrando-o com os mais variados conteúdos programáticos. Tal será importante para que os alunos desenvolvam a sua criatividade e sentido crítico. Para trabalhos futuros, recomenda-se a realização de estudos que evidenciem a relação entre as capacidades de resolução e a originalidade e complexidade dos problemas formulados, em diferentes assuntos matemáticos. Para isso, deve ser tido em conta que os alunos necessitarão de adquirir tanta prática na resolução como na formulação de problemas. Só assim fará sentido comparar as duas temáticas.

REFERÊNCIAS

Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional.* Universidade Aberta.

Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante, 16(1),* 27-56.

Amado, J. (2017). *Manual de investigação Qualitativa em Educação* (3ª ed.). Imprensa da Universidade de Coimbra.

Angrosino, M. (2007). *Doing Etnographic and Observational Research*. Sage Publications.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. APM.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 37-68.

Boavida. A.; Paiva, A.; Cebola, A.; Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência matemática no Ensino Básico*. Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Cai, J., Chen, T., Li, X., Xu, R., Zhang, S., Hu, Y., ... & Song, N. (2020). Exploring the impact of a problem-posing workshop on elementary school mathematics teachers' conceptions on problem posing and lesson design. *International Journal of Educational Research, 102*, 101404.

Canavarro, A., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., Correia, P., Marques, P. & Espadeiro, R. (2021a) *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 7.º ano. 3.º ciclo do Ensino-básico. Matemática.* Direção Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf

Canavarro, A., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., Correia, P., Marques, P. & Espadeiro, R. (2021b) *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 8.º ano. 3.º ciclo do Ensino-básico. Matemática.* Direção Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_8.o_ano.pdf

Canavarro, A., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M., Correia, P., Marques, P. & Espadeiro, R. (2021c) *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 9.º ano. 3.º ciclo do Ensino-básico. Matemática.* Direção Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_9.o_ano.pdf

Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M., Santos, M., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., & Car- reira, S. (2023a) *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 10.º ano. Ensino Secundário. Matemática A.* Direção Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_a_10_-_vf.pdf

Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M., Santos, M., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., & Car- reira, S. (2023b) *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 10.º ano. Ensino Secundário. Matemática B.* Direção Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/mat_b_10_-_vf.pdf

Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M., Santos, M., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., & Car- reira, S. (2023c) *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 10.º ano. Ensino Secundário. Matemática- Cursos Profissionais.* Direção Geral da Educação.

https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/profissionais_-_vf.pdf

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.

Correia, E. (2005). *Aprender matemática – hoje ensino básico*. Universidade de Aveiro.

Cunha, M. D. C., Martins, P. M., & Viseu, F. (2014). A formulação de problemas na aprendizagem de derivada de uma função.

D' Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica* (Vol. 1). Digital Index Editore.

DGE (2018a). *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 8.º ano. 3.º ciclo do Ensino básico. Matemática.* Direção Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_8a_ff_18julho_rev.pdf

DGE (2018b). *Aprendizagens essenciais. Articulação com o perfil dos alunos. 9.º ano. 3.º ciclo do Ensino básico. Matemática.* Direção Geral da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essencais/3_ciclo/matematica_3c_9a_ff_18julho_rev.pdf

Díaz, V., & Poblete, A. (2005). Competencias en Matemáticas y Tipos de problemas. In *CIBEM– Proccedings V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (n. 5).

Dumas-Carré, A., Caillot, M., Martinez-Torregrossa, J., & Gil-Pérez, D. (1989). Deux approches pour modifier les activités de résolution de problèmes en physique dans l'enseignement secondaire: une tentative de synthèse. *Aster: Recherches en didactique des sciences expérimentales*, *8* (1), 135-160.

El Sayed, R. A. E. (2002). Effectiveness of problem posing strategies on prospective mathematics teachers' problem solving performance. *Journal of science and mathematics education in Southeast Asia*, *25*(1), 56-69.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender matemática*, 25-48. APM.

Fernandes, D. (1992). Resolução de problemas: Investigação, ensino, avaliação e formação de professores. *M. Brown, D. Fernandes, JP Ponte, & JF Matos, Educação matemática: Temas de investigação*, 45-104.

Ferreira, R. (2011). Materiais para a aula de Matemática: Uma tarefa com espelhos. *Educação matemática.* (115), 21-21.

Fontana, A., & Frey, J. H. (1994). Interviewing: the art of science. In N. Y. Denzin, & Y. S. Lincoln. (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 361-376). Sage Publications.

Fonseca, M. G., & Gontijo, C. H. (2020). Pensamento crítico e criativo em Matemática em diretrizes curriculares nacionais. *Ensino em Revista, 27*(3), 956-978.

Freire, R. S., de Sena Cabral, B., & de Castro Filho, J. A. (2004). Estratégias e erros utilizados na resolução de problemas algébricos. *Encontro Nacional de Educação Matemática*, *8*.

Given, L. M. (2008). *The sage encyclopedia of qualitative research methods*. Sage Publications.

Gonçalves, M. I. M. (2011). Aprendizagem dos modelos de grafos, por alunos de MACS do 11.º ano, através do trabalho de projeto [dissertação de mestrado, Universidade do Minho].

Henriques, A. C. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação*. [Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa].

Johnson, R. B., & Christensen, L. (2014). *Educational research quantitative, qualitative, and mixed approaches.* Sage publications.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for research in mathematics education*, *8*(3), 163-180.

Kuntz, E. R. (2019). *A Matemática Financeira no Ensino Médio como fator de fomento da educação financeira: resolução de problemas e letramento financeiro em um contexto crítico*. [Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo].

Lester. F. K. (1980). Research on mathematical problem Solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Educations* (pp. 286-323). Reston, VA: NCTM.

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1&2), 245-278.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R. & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Ministério da Educação / Direção-geral da Educação.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do ensino básico.* MEC.

Miranda, P., & Mamede, E. (2020). Using a picture to challenge creativity in mathematics class with 1st and 6th graders. *Journal of the European Teacher Education Network*, 15, 43-52.

Miranda, P., & Mamede, E. (2023). Desafiando as Crianças na Formulação de Problemas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *37*, 754-772.

NCTM (1985). Uma *agenda para a acção*. Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Olabuénaga, J. I. R. (2012). *Metodología de la investigación cualitativa* (5.ª ed., Vol. 15). Universidad de Deusto.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods.* Library of Congress Cataloging.

Pehkonen, E. (1991). Developments in the understanding of problem solving. *Zentralblatt Fur Didaktik der Mathematik ZDM*, *91*(2), 46-49.

Piva, R. (2014). *Estratégias mobilizadas na resolução de problemas matemáticos de divisão por alunos da sala de articulação da 2ª fase do 2º ciclo do ensino fundamental de uma escola estadual de Várzea Grande-MT.* [Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso].

Pólya, G. (1945). *How to solve it. Princeton*. NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching. Combined Edition.Vol. II*. John Wiley & Sons.

Ponte, J. P. (1992). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de educação*, 95-108.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3–18.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Ponte, J. P. (2006). *Estudos de caso em educação matemática*. Bolema, 5, 105-132.

Ponte, J. P. D., Branco, N., & Matos, A. (2009). Álgebra no ensino básico. DGIDC.

Proença, M. C. (2018). *Resolução de problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula*. Eduem.

Proença, M. C. D., Maia-Afonso, É. J., Mendes, L. O. R., & Travassos, W. B. (2022). Dificuldades de Alunos na Resolução de Problemas: análise a partir de propostas de ensino em dissertações. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 36*, 262--285.

Ramírez, M. C. (2006). A mathematical problem-formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *7*, 79-90.

Rocha, H., Viseu, F., & Matos, S. (2024). Problem-solving in a real-life context: An approach during the learning of inequalities. *European Journal of Science and Mathematics Education, 12* (1), 21-37.

Schoevers, E. M., Leseman, P. P., Slot, E. M., Bakker, A., Keijzer, R., & Kroesbergen, E. H. (2019). Promoting pupils' creative thinking in primary school mathematics: A case study. *Thinking skills and creativity*, *31*, 323-334.

Silva, S. (2016). *Ideias/significados da multiplicação e divisão: O processo de aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.*

Silva, V. (2015). *Proposição e exploração de problemas no cotidiano da sala de aula de Matemática.* [Dissertação de mestrado, Universidade Estadual do Paraíba].

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zdm*, *3*(29), 75-80.

Spinillo, A. G., Lautert, S. L., Borba, R. E. D. S. R., Santos, E. M. D., & Silva, J. F. G. D. (2017). Formulação de problemas matemáticos de estrutura multiplicativa por professores do ensino fundamental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*, 928-946.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. *Research in mathematics education: A contemporary perspective*, 164-185.

Vale, I. (2000*). Didática da matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e materiais manipuláveis*. Universidade de Aveiro.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Coord.), *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 7-51). Lidel.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante*, *24* (2), 39-60.

Vieira, A., Rios, P., & De Vasconcelos, C. (2020). A linguagem simbólica e a resolução de problemas matemáticos no 8º ano do Ensino Fundamental. *Educação Matemática Pesquisa*, *22* (1), 43-67.

Viseu, F., Fernandes, J. A., & Gomes, A. (2016). A resolução de problemas no ensino e na aprendizagem da matemática.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Sage Publications.

Zunino, D. L., & Llorens, J. A. (1995). *A matemática na escola: aqui e agora*.

ANEXOS

Anexo 1- Aulas do dia 4 de dezembro (9.º ano)

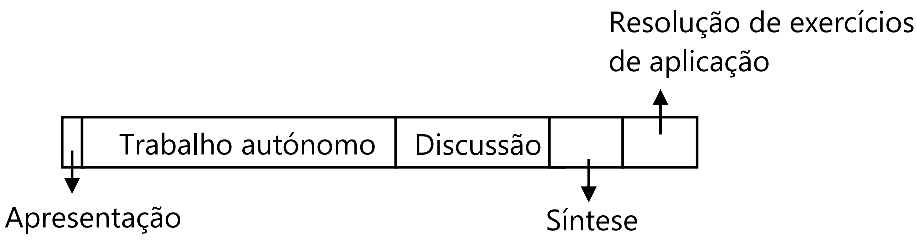
REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	**Matemática (9.º Ano)** 2023/2024
Data: 4/12/2023 **Duração da aula:** 90 minutos		Plano de aula

DOMÍNIO	OBJETIVOS
Geometria e Medida: Circunferência	• Promover o trabalho em grupo; • Desenvolver a capacidade de formular conjeturas; • Relacionar a amplitude de um ângulo ao centro e de um ângulo inscrito numa circunferência com as dos arcos correspondentes.

SUMÁRIO	RECURSOS
Circunferência: ângulo ao centro e ângulo inscrito num arco de circunferência- atividade de introdução ao tema no *Geogebra*. Exercícios de aplicação.	• Computador com acesso ao *Geogebra* (por grupo de 2 alunos); • Fichas de trabalho.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- Apresentação da tarefa;
- Instruções de acesso ao *Geogebra*; } Em grupo de 2 alunos
- Resolução da tarefa 1, seguida da resolução da tarefa 2; } Em grupo de 2 alunos
- Discussão das tarefas;
- Síntese e esquematização escrita, no quadro, dos conteúdos abordados nas tarefas: amplitude de um arco de circunferência, amplitude de um ângulo ao centro, amplitude de um ângulo inscrito num arco de circunferência;
- Resolução do exercício de aplicação 1.



TRABALHO PARA CASA

- Resolução do exercício de aplicação 2.

<table>
<tr><td>REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO</td><td>[redacted]</td><td>Matemática (9.º Ano)
2023/2024</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nome: ____
Nº_____ Turma: _____ Data: ____/____/2023</td><td>Instruções</td></tr>
</table>

<u>Instruções de acesso ao *Geogebra*</u>

Para a tarefa 1:

Acedam ao link: https://www.geogebra.org/classroom/pmdqxrtr

Para a tarefa 2:

Acedam ao link: https://www.geogebra.org/classroom/eujmjnbc

Bom trabalho!

REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	Matemática (9.º Ano) 2023/2024
Nome: ____________________ Nº_____ Turma: _____ Data: ____/____/2023		Tarefas

Tarefa 1

Percorra os seguintes passos no *Geogebra*:

1. Crie uma circunferência;
2. Crie 2 semirretas, ambas com origem no centro da circunferência;
3. Marque os pontos de interseção das semirretas com a circunferência.

Questões:

Considere que o ponto A representa o centro da circunferência e os pontos B e C representam os pontos de interseção das semirretas com a circunferência.

1. Qual a amplitude do ângulo $B\hat{A}C$?

2. Qual a amplitude do arco de circunferência BC?

3. Mova um dos pontos B ou C e complete a seguinte tabela.

$\boldsymbol{B\hat{A}C}$	$\boldsymbol{\overset{\frown}{BC}}$

4. Que relação observa entre a amplitude do ângulo ao centro e a amplitude do arco de circunferência correspondente?

<u>Tarefa 2</u>

Percorra os seguintes passos no *Geogebra*:

1. Crie uma circunferência;
2. Crie um ponto na circunferência;
3. Crie duas semirretas, ambas com origem no ponto criado no passo anterior, e que intersetem a circunferência em dois pontos distintos.
4. Marque os pontos de interseção das semirretas com a circunferência.

Questões:

Considere que o ponto B representa o ponto na circunferência e os pontos D e C representam os pontos de interseção das semirretas com a circunferência.

1. Qual a amplitude do ângulo $C\hat{B}D$?

2. Qual a amplitude do arco de circunferência CD?

3. Mova um dos pontos D ou C e complete a seguinte tabela.

$\boldsymbol{C\hat{B}D}$	$\boldsymbol{\overset{\frown}{CD}}$

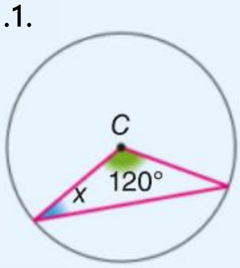
4. Que relação observa entre a amplitude do ângulo inscrito e a amplitude do arco de circunferência correspondente?

REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	Matemática (9.º Ano) 2023/2024
Nome: ______________________________________ Nº_____ Turma: _____ Data: ____/____/2023		Exercícios de aplicação

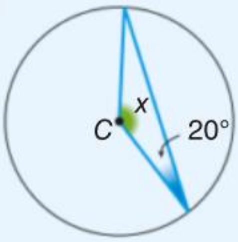
1. De acordo com os dados das figuras, determina o valor de x.

   (C representa o centro de cada circunferência)

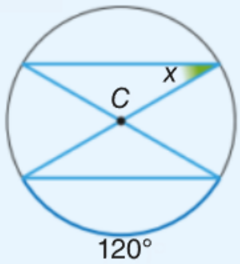
1.1.



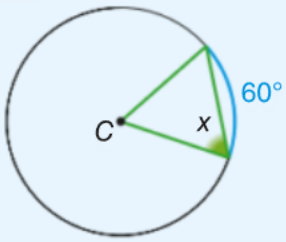
1.2.



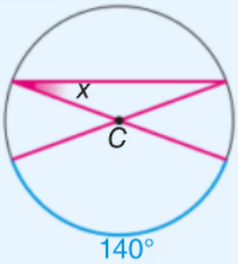
1.3.



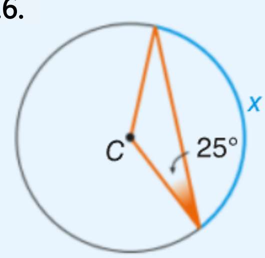
1.4.



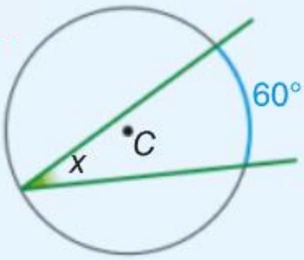
1.5.



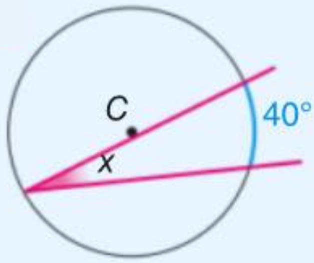
1.6.



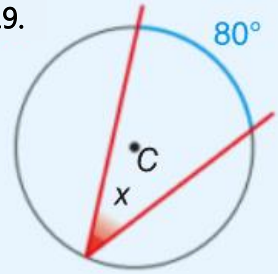
1.7.



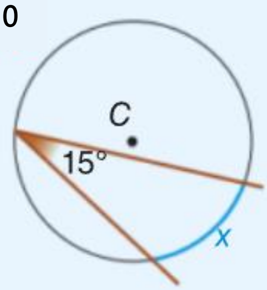
1.8.



1.9.



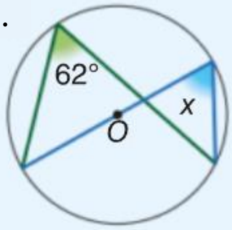
1.10



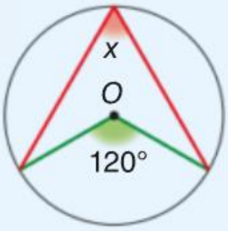
2. De acordo com os dados das figuras, determina o valor de x.

(C representa o centro de cada circunferência)

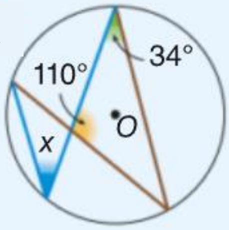
2.1.



2.2



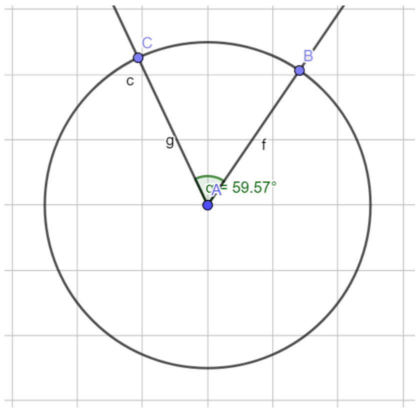
2.3.

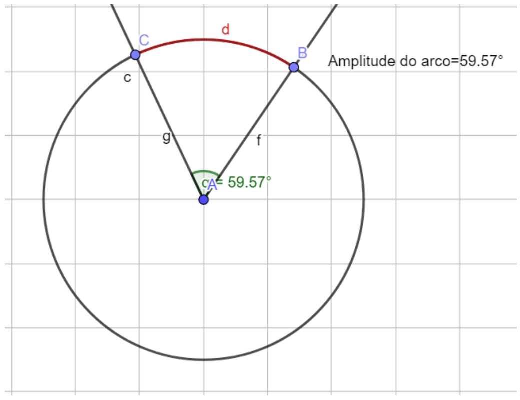


Tarefa 1 (proposta de resolução)

1. $B\hat{A}C = 59{,}57°$

2. $\widehat{BC} = 59{,}57°$





3.

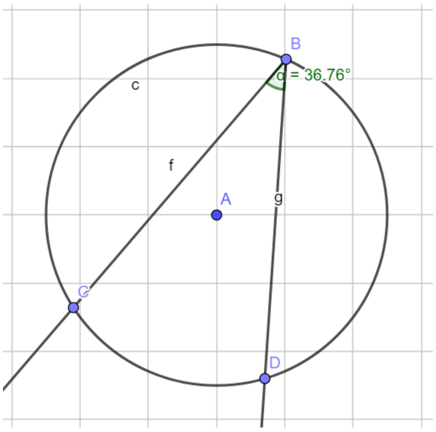
$B\hat{A}C$	$\widehat{BC}$
94,36°	94,36°
18,14°	18,14°
275,61°	275,61°
122,54°	122,54°

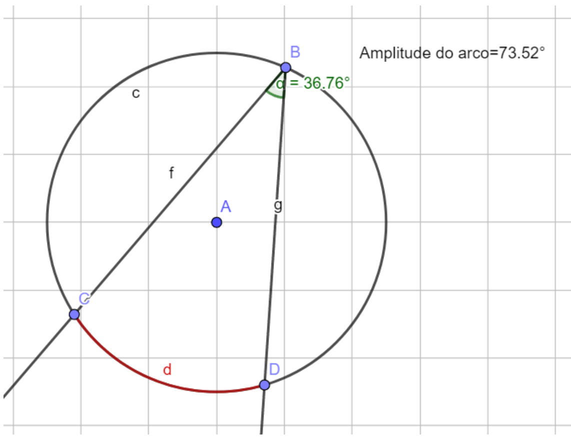
4. Observa-se que a amplitude do ângulo ao centro é igual à amplitude do arco de circunferência correspondente, isto é, $B\hat{A}C = \widehat{BC}$.

Tarefa 2 (proposta de resolução)

1. $C\hat{B}D = 36{,}76°$

2. $\widehat{\mathrm{CD}} = 73{,}52°$





3.

$C\hat{B}D$	$\widehat{CD}$
24,36°	48,72°
98,34°	196,68°
45,51°	91,02°
135,48°	270,96°

4. Observa-se que a amplitude do ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do arco de circunferência correspondente, isto é,

$C\hat{B}D = \frac{1}{2}\widehat{CD}.$

Exercícios de aplicação (proposta de resolução)

1.1. $x + x + 120 = 180 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = 60 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 30$
$R: x = 30°$

1.2. $x + 20 + 20 = 180 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 140$
$R: x = 140°$

1.3. $x + x + 120 = 180 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = 60 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 30$
$R: x = 30°$

1.4. $x + x + 60 = 180 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = 120 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 60$
$R: x = 60°$

1.5. $x + x + 140 = 180 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = 40 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 20$
$R: x = 20°$

1.6. $x + 25 + 25 = 180 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 130$
$R: x = 130°$

1.7. $x = \frac{60°}{2} = 30°$

1.8. $x = \frac{40°}{2} = 20°$

1.9. $x = \frac{80°}{2} = 40°$

1.10. $x = 2 \times 15° = 30°$

2.1. $x = 62°$

2.2. $x = \frac{120°}{2} = 60°$

2.3. $x + 110 + 34 = 180 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 36$
$R: x = 36°$

Anexo 2- Aulas do dia 21 de fevereiro (9.º ano)

REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	**Matemática (9.º Ano)** 2023/2024
Data: 21/02/2024 **Duração da aula:** 90 minutos		Plano de aula

DOMÍNIO	OBJETIVOS
Álgebra: Funções	• Promover o trabalho em grupo; • Identificar variáveis inversamente proporcionais e calcular a constante de proporcionalidade inversa; • Reconhecer uma função de proporcionalidade inversa através das suas representações gráfica e algébrica; • Interpretar e modelar situações da vida real que envolvam a proporcionalidade inversa;

SUMÁRIO	RECURSOS
Funções de proporcionalidade inversa: atividade exploratória de introdução ao tema.	• Espelho (por grupo de 4 alunos); • Autocolante (por grupo de 4 alunos); • Fita métrica (por grupo de 4 alunos); • Calculadora (por grupo de 4 alunos); • Computador com acesso ao Geogebra (por grupo de 4 alunos); • Fichas de trabalho.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- Apresentação da tarefa;
- Resolução da tarefa: recolha de dados no exterior da sala de aula
- Resolução da tarefa: análise dos dados recolhidos;

Em grupo de 4 alunos

- Discussão da tarefa, em grande grupo;
- Síntese e esquematização escrita dos conteúdos abordados na tarefa, com recurso ao *Power-Point*: variáveis inversamente proporcionais; constante de

proporcionalidade inversa; representação algébrica de uma função de proporcionalidade inversa; representação gráfica de uma função de proporcionalidade inversa.

OBSERVAÇÕES

- No caso de não ser possível terminar toda a planificação, esta deve continuar na aula seguinte. Assim sendo, não devem ser ignorados quaisquer momentos desta planificação.

REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO [redacted]	**Matemática** 9º Ano 2023/2024	Uma tarefa com espelhos

Para a realização desta tarefa, precisamos de 3 a 4 elementos, com funções distintas:

Medir (1 a 2 alunos): ____________________________; ________________________________

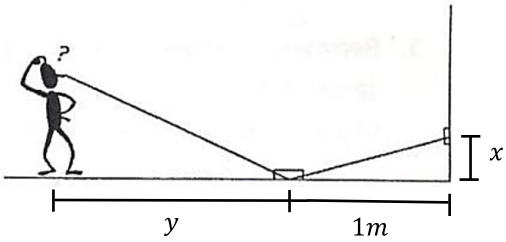
Observar (1 aluno): ____________________ Anotar (1 aluno): ________________________

Não alterem as vossas funções durante a realização desta parte da tarefa!

Recolha de dados

1. Coloquem o autocolante na parede, a $0{,}5m$ do chão;

2. Coloquem o espelho no chão, alinhado com o autocolante, a $1m$ de distância da parede;



3. Posicionem o observador junto ao espelho e virado para a parede. O observador deve ir-se afastando até que consiga ver o autocolante refletido no centro do espelho;

4. Registem, na tabela seguinte, a distância a que o observador se encontra do centro do espelho;

5. Façam variar a altura do autocolante na parede e repitam os procedimentos 3 e 4, registando os valores na tabela.

Distância do autocolante ao chão, em metros x	Distância entre o observador e o centro do espelho, em metros y	$x \times y$

Adaptado de Ferreira (2011)

Análise dos dados (Parte I)

6. Se se colocar o autocolante muito próximo do chão, como se deve posicionar o observador? E se se colocar o autocolante muito afastado do chão?

7. Preencham a terceira coluna da tabela. Que regularidade observam?

8. Encontrem uma expressão que permita relacionar a distância entre o observador e o centro do espelho, em função da distância do autocolante ao chão (isto é, y em função de x).

Análise dos dados (Parte II)

9. No Geogebra, no menu Calculadora Gráfica, representem num referencial ortonormado os pontos de coordenadas (x, y) correspondentes às distâncias que recolheram anteriormente.

Apresentem um esboço do gráfico que observam.

10. Representem, nesse mesmo referencial, a função que encontraram na alínea 8.

Apresentem um esboço do gráfico que observam.

11. O gráfico da função sobrepõe-se a esse conjunto de pontos? Caso isso não aconteça, tentem encontrar razões para explicar o facto de haver pontos que não coincidam exatamente com o gráfico da função.

Proposta de resolução

6. Se se colocar o autocolante muito próximo do chão, o observador deve afastar-se cada vez mais do centro do espelho até conseguir ver o autocolante.

Por outro lado, se se colocar o autocolante num ponto muito alto, o observador deve aproximar-se cada vez mais do centro do espelho até conseguir ver o autocolante.

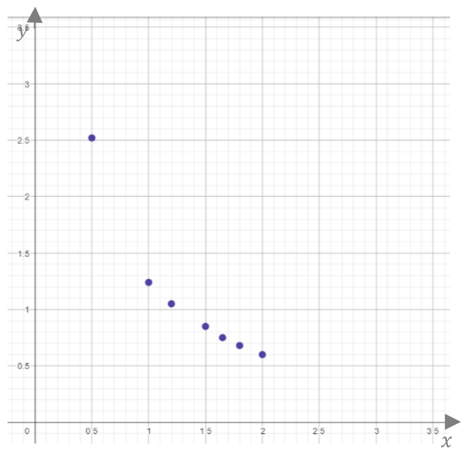
7.

Distância do autocolante ao chão, em metros x	Distância entre ti e o centro do espelho, em metros y	$x \times y$
0,50	2,52	1,26
1,00	1,24	1,24
1,20	1,05	1,26
1,50	0,85	1,28
1,65	0,75	1,24
1,80	0,68	1,22
2,00	0,60	1,20

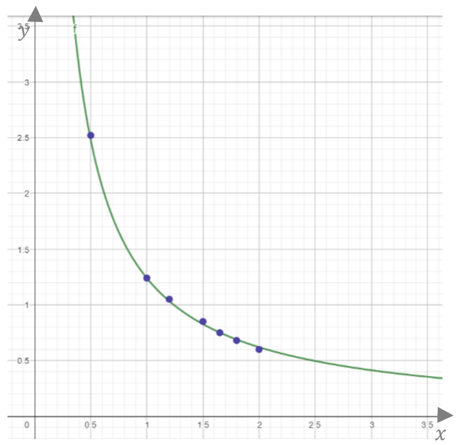
O produto de x e y é constante.

8. $x \times y = 1{,}24 \Leftrightarrow y = \frac{1{,}24}{x}$

9.



10.



11. Sim, o gráfico ajusta-se bem ao conjunto de pontos. A razão pela qual os pontos não coincidem exatamente com o gráfico da função deve-se à falta de precisão/rigor nas medições.

Anexo 3- Aulas do dia 13 de março (9.º ano)

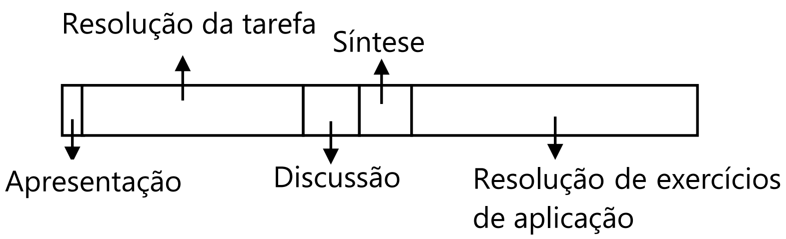
REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	**Matemática (9.º Ano)** **2023/2024**
Data: 13/03/2024 **Duração da aula:** 90 minutos		Plano de aula

DOMÍNIO	OBJETIVOS
Álgebra: Funções	• Desenvolver a capacidade de formular conjeturas; • Representar e interpretar graficamente funções do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$.

SUMÁRIO	RECURSOS
Funções do tipo $\boldsymbol{y = ax^2}$, com $\boldsymbol{a \neq 0}$: atividade de introdução ao tema no *Geogebra.* Exercícios de aplicação.	• Fichas de trabalho.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- Apresentação da tarefa;
- Acesso ao *Geogebra* e resolução da tarefa;
- Discussão da tarefa;
- Síntese e esquematização escrita dos conteúdos abordados na tarefa: representações gráfica e algébrica de funções do tipo $\boldsymbol{y = ax^2}$, com $\boldsymbol{a} \neq 0$ (incluindo concavidades, vértice e eixo de simetria);
- Resolução dos exercícios de aplicação 22, 23 e 24 da página 84 do manual.



REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	**Matemática (9.º Ano) 2023/2024**
Nome: ____ **Nº**_____ **Turma:** _____ **Data:** ____/____/2024		Tarefa

1. No menu Calculadora Gráfica do *Geogebra*, representa as seguintes funções.
   - $y = x^2$
   - $y = 2x^2$
   - $y = 4x^2$
   - $y = -x^2$
   - $y = -2x^2$
   - $y = -4x^2$

   Esboça o gráfico dessas funções no teu caderno, identificando cada uma através da sua expressão algébrica.

2. O gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, designa-se por parábola. Descreve o que podes observar na parábola quando:

   2.1 $a > 0$;

   2.2 $a < 0$;

   2.3 $|a|$ aumenta;

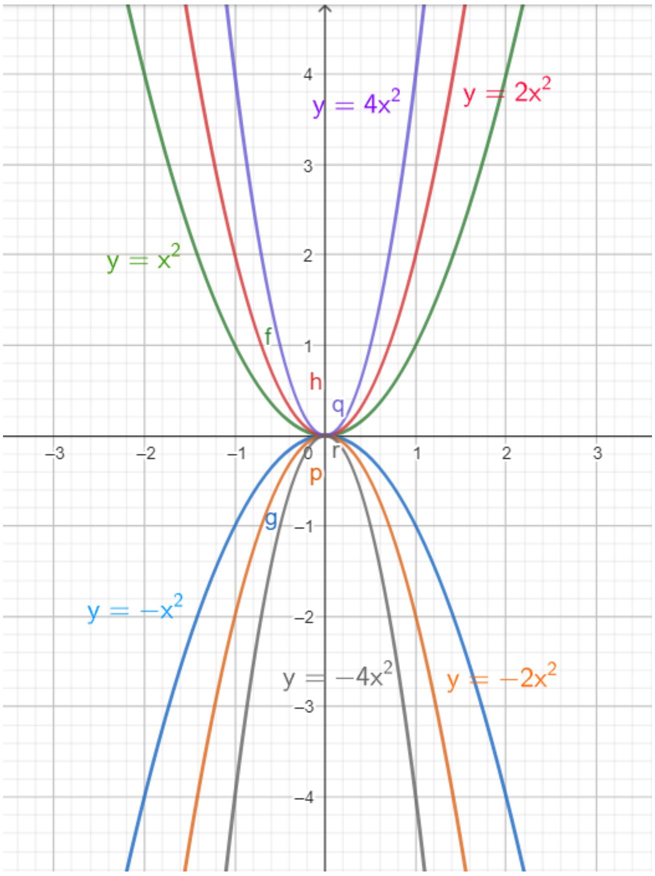
   2.4 $|a|$ diminui.

3. Consegues identificar algum ponto em comum entre as parábolas que representaste anteriormente? Se sim, indica as suas coordenadas.

4. Identifica o eixo de simetria das parábolas que representaste anteriormente.

Proposta de resolução (tarefa)

1.



2.1. Quando $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

2.2. Quando $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

2.3. Quando $|a|$ aumenta, a abertura da concavidade da parábola diminui.

2.4. Quando $|a|$ diminui, a abertura da concavidade da parábola aumenta.

3. Sim. O ponto de coordenadas $(0,0)$ é comum às parábolas.

4. O eixo de simetria das parábolas é a reta de equação $x = 0$.

Proposta de resolução (exercícios de aplicação)

Proposta de resolução (exercícios de aplicação)

22.1. $y = ax^2$, concretizando no ponto (2,12)

$$y = ax^2 \Leftrightarrow 12 = a \times 2^2 \Leftrightarrow 12 = 4a \Leftrightarrow \frac{12}{4} = a \Leftrightarrow a = 3$$

22.2. $y = 3x^2$

Se $x = -\frac{1}{2}, y = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Logo $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Se $x = \frac{2}{3}, y = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \times \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Logo $C\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

22.3. $y = 3x^2 \Leftrightarrow 48 = 3x^2 \Leftrightarrow \frac{48}{3} = x^2 \Leftrightarrow 16 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x = \pm 4.$

$Logo$, $(-4{,}48)$ e $(4{,}48)$.

23.1. O ponto de coordenadas $(-3, -18)$ pertence ao gráfico da função g, uma vez que o objeto -3 só tem imagem negativa nesta função.

23.2. $f: y = 2x^2$, pois $a = 2 > 0$ e a concavidade da parábola é voltada para cima.

$g: y = -2x^2$, pois $a = -2 < 0$ e a concavidade da parábola é voltada para baixo.

24.1. Como o ponto de coordenadas $(2{,}8)$ pertence ao gráfico de f, tem-se que:

$$f(2) = 8 \Leftrightarrow a \times 2^2 = 8 \Leftrightarrow a \times 4 = 8 \Leftrightarrow a = \frac{8}{4} \Leftrightarrow a = 2$$

24.2. $B(2{,}8)$.

$f(x) = 8 \Leftrightarrow 2 \times x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$. Como a abcissa de C é negativa, $C(-2{,}8)$.

Como $g(3) = \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$, $A\left(3, \frac{9}{2}\right)$.

$g(x) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times x^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{2} \times 2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$. Como a abcissa de D é negativa, $D\left(-3, \frac{9}{2}\right)$.

24.3. Altura do trapézio: $8 - \frac{9}{2} = \frac{16}{2} - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$

$$A_{trapézio} = \frac{(b+B)\times h}{2} = \frac{(6+4)\times\frac{7}{2}}{2} = \frac{10\times\frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{70}{2}}{2} = \frac{70}{4} = \frac{35}{2}\, u.a.$$

Anexo 4- Aulas do dia 24 de abril (9.º ano)

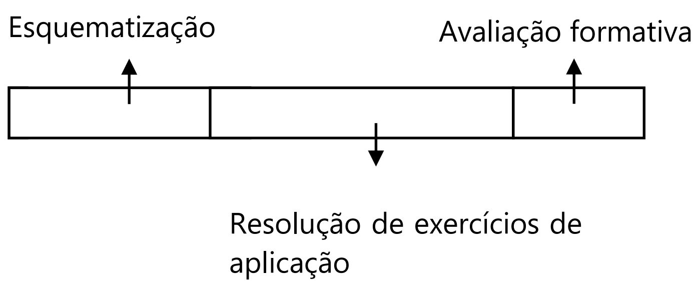
REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	**Matemática (9.º Ano)** **2023/2024**
Data: 24/04/2024 **Duração da aula:** 90 minutos		Plano de aula

DOMÍNIO	OBJETIVOS
Geometria e Medida: Trigonometria	• Reconhecer as razões trigonométricas de um ângulo agudo (seno, cosseno e tangente) como razões entre as medidas de lados de um triângulo retângulo.

SUMÁRIO	RECURSOS
Trigonometria: razões trigonométricas de um ângulo agudo.	• *Power-Point;* • *Plickers.*

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- Esquematização escrita dos conteúdos, com recurso ao *Power-Point*: hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente a um ângulo agudo de um triângulo retângulo; razões trigonométricas de um ângulo agudo (seno, cosseno e tangente) e suas propriedades;
- Resolução dos exercícios de aplicação 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 6 e 7, das páginas 136 e 137 do manual;
- Avaliação formativa, com recurso ao *Plickers.*



TRABALHO PARA CASA

- Resolução dos exercícios 4.3 e 5.3, das páginas 136 e 137 do manual, respetivamente.

Proposta de resolução (Exercícios de aplicação):

4.1. Seja x o comprimento do cateto oposto a α:

$x^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow x^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{64} \Leftrightarrow x = \pm 8$.

Como x é uma medida, $x > 0$. Logo $x = 8$

$\sin\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \cos\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \tan\alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

4.2. Seja x o comprimento da hipotenusa do triângulo:

$x^2 = 12^2 + 5^2 \Leftrightarrow x^2 = 144 + 25 \Leftrightarrow x^2 = 169 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{169} \Leftrightarrow x = \pm 13$. Como x é uma medida, $x > 0$. Logo $x = 13$

$\sin\alpha = \frac{12}{13}; \cos\alpha = \frac{5}{13}; \tan\alpha = \frac{12}{5}$.

5.1. $\sin\theta = \frac{k}{26} \Leftrightarrow \frac{12}{13} = \frac{k}{26} \Leftrightarrow k = \frac{12\times 26}{13} \Leftrightarrow k = 24$

5.2. $\tan\beta = \frac{9}{k} \Leftrightarrow 0{,}6 = \frac{9}{k} \Leftrightarrow k = \frac{9}{0{,}6} \Leftrightarrow k = 15$

6. Seja x a altura do triângulo relativamente à base $[AB]$:

$x^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow x^2 + 36 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{64} \Leftrightarrow x = \pm 8$. Como x é uma medida, $x > 0$. Logo $x = 8$

$\sin\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; \cos\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \tan\alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

7.1. Como $37^2 = 35^2 + 12^2$, conclui-se que os três lados formam um terno pitagórico.

Logo, o triângulo é retângulo.

7.2. Seja α o maior ângulo agudo. Temos:

$\sin\alpha = \frac{35}{37}; \cos\alpha = \frac{12}{37}; \tan\alpha = \frac{35}{12}$.

Anexo 5- Aulas do dia 22 de janeiro (12.º ano)

REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	Matemática (12.º Ano) 2023/2024
Data: 22/01/2024 **Duração da aula:** 90 minutos		Plano de aula

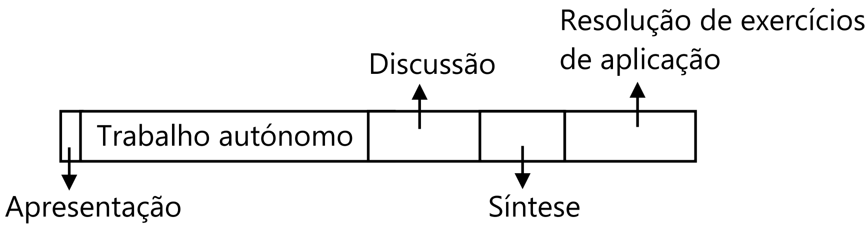
DOMÍNIO	OBJETIVOS
Funções: Funções exponenciais e funções logarítmicas	• Promover o trabalho em grupo; • Conhecer a representação gráfica e as propriedades das funções definidas por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

SUMÁRIO	RECURSOS
Função exponencial: Representação gráfica e propriedades das funções definidas por $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, com $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$. Exercícios de aplicação.	• Fichas de trabalho; • Calculadora gráfica (por grupo de 2 alunos); • *Power-Point.*

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- Apresentação da tarefa;
- Resolução da tarefa, em grupos de 2 alunos (cada grupo resolve, apenas, um dos enunciados);
- Discussão e confronto das tarefas e conceitos envolvidos em cada um dos enunciados, em grande grupo (este momento será acompanhado pela projeção das calculadoras gráficas *Casio fx-CG50* e *TI-Nspire*, modelos utilizados pela maioria dos alunos da turma);
- Síntese e esquematização dos conteúdos abordados na tarefa, com recurso ao *Power-Point:* funções exponenciais dos tipos $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, definidas nos números reais, com $\boldsymbol{0 < a < 1}$ e com $\boldsymbol{a > 1}$, e respetivas propriedades (domínio, contradomínio, interseção com os eixos, sinal, variação, injetividade, continuidade, limites e assíntotas);

- Síntese das propriedades algébricas para potências de expoente racional e não racional, com recurso ao *Power-Point*;
- Resolução dos exercícios de aplicação 1, 2, 3 e 4.



REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	Matemática (12.º Ano) 2023/2024
Nome: ______________________________________ Nº_____ Turma: _____ Data: ____/____/2024		Enunciado 1

Imaginem que têm ao vosso dispor uma folha de papel e que a vão dobrando, sucessivas vezes, ao meio.

1. Preencham a seguinte tabela.

Número de dobras numa folha de papel $(\boldsymbol{n})$	Número de folhas sobrepostas $(\boldsymbol{u})$

2. Recorrendo à calculadora gráfica, listem os valores da tabela e apresentem um esboço daquela que aparenta ser a representação gráfica do número de folhas sobrepostas, em função do número de dobras numa folha de papel.

3. Encontrem uma expressão algébrica que permita relacionar o número de folhas sobrepostas, em função do número de dobras numa folha de papel.

4. Reparem que, neste contexto, a variável n só assume valores naturais. Se esta variável pudesse assumir todos os valores reais, como ficaria a respetiva representação gráfica e algébrica?

5. A partir da representação gráfica da questão anterior, apontem algumas propriedades das funções exponenciais do tipo $f(x) = a^x$, com $a > 1$ e $x \in \mathbb{R}$.

REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	**Matemática (12.º Ano) 2023/2024**
Nome: ______________________________ **Nº**_____ **Turma:** _____ **Data:** ____/____/2024		Enunciado 2

Imaginem que têm ao vosso dispor uma maçã inteira. Imaginem, ainda, que vão cortar essa maçã ao meio, depois a metade da maçã ao meio e assim sucessivamente.

1. Preencham a seguinte tabela.

Número de cortes na maçã $(\boldsymbol{n})$	**Parte da maçã obtida** $(\boldsymbol{u})$

2. Recorrendo à calculadora gráfica, listem os valores da tabela e apresentem um esboço daquela que aparenta ser a parte da maçã obtida, em função do número de cortes na maçã.

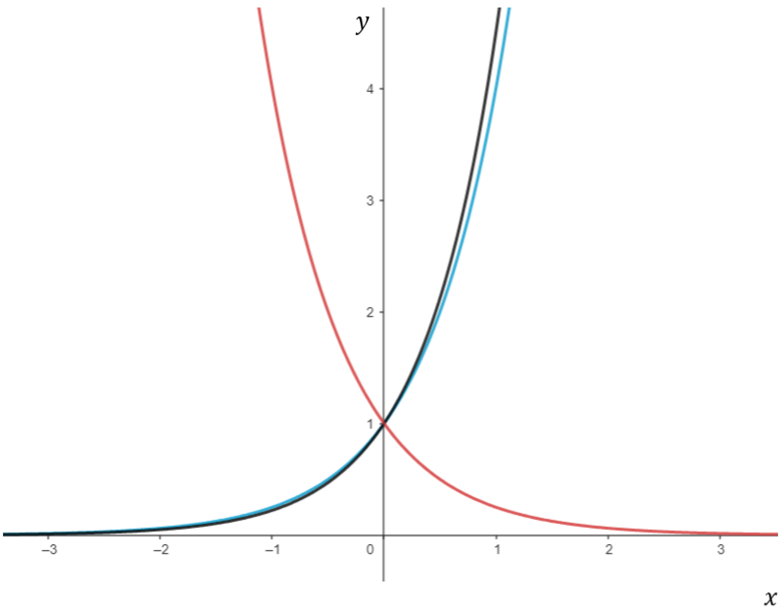
3. Encontrem uma expressão algébrica que permita relacionar a parte da maçã obtida, em função do número de cortes na maçã.

4. Reparem que, neste contexto, a variável n só assume valores naturais. Se esta variável pudesse assumir todos os valores reais, como ficaria a respetiva representação gráfica e algébrica?

5. A partir da representação gráfica da questão anterior, apontem algumas propriedades das funções exponenciais do tipo $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$ e $x \in \mathbb{R}$.

REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	**Matemática (12.º Ano) 2023/2024**
Nome: ______________________________ **Nº**_____ **Turma:** _____ **Data:** ____/____/2024		Exercícios de aplicação

1. No referencial seguinte, estão representadas graficamente as funções definidas por $f(x) = 4^x, g(x) = 4^{-x}$ e $h(x) = \left(\frac{9}{2}\right)^x$.



1.1. Identifica a representação gráfica de cada uma das funções f, g e h.

1.2. Indica:

1.2.1. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

1.2.2. $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

1.2.3. $\lim_{x \to +\infty} h(x)$

2. Considera a função g definida, em $\mathbb{R}$, por $i(x) = 2^x$.

Sejam h e i as seguintes funções:

- $j(x) = i(x+1) - 1$
- $k(x) = -i(x) + 2$

2.1. Esboça os gráficos das funções i, j e k.

2.2. Indica o contradomínio das funções i, j e k.

3. Determina, sem recurso à calculadora, o valor exato de:

3.1. $4^{-\pi} \times 24^{\pi} \div 6^{\pi}$

3.2. $\left(6^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

3.3. $\frac{2^{1+\sqrt{5}}}{2^{\sqrt{5}}} - 2^0$

3.4. $\sqrt{36}^{-2}$

4. Sendo x um número real e sabendo que $5^{x+1} = 15$, determina o valor de:

4.1. 5^x

4.2. 5^{3x}

4.3. 25^x

4.4. $5^{\frac{x}{3}}$

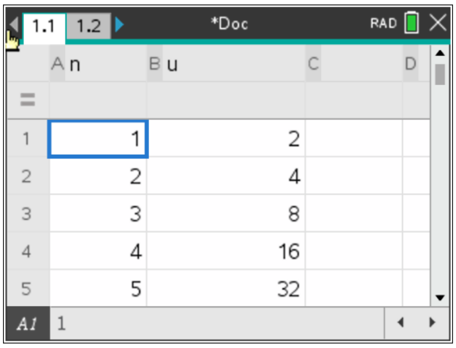
4.5. 5^{-x+2}

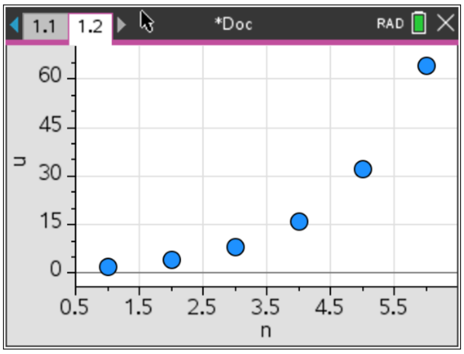
Enunciado 1 (proposta de resolução)

1.

Número de dobras numa folha de papel $(\boldsymbol{n})$	Número de folhas sobrepostas $(\boldsymbol{u})$
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

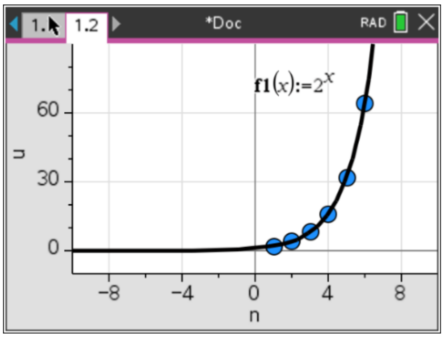
2. Utilizando a calculadora gráfica Texas TI-Nspire e o seu menu Listas e Folha de Cálculo, criam-se duas colunas, uma para o número de dobras na folha de papel e outra para o número de folhas sobrepostas. Posteriormente, abre-se o menu Dados e Estatística e escolhem-se as variáveis criadas anteriormente.





3. $u(n) = 2^n, n \in \mathbb{N}$

4. Utilizando o comando Analisar ->Traçar Função, insere-se a função $f(x) = 2^x$ e, de seguida, altera-se a janela de visualização.



5. Domínio: $\mathbb{R}$

   Contradomínio: $\mathbb{R}^+$

   Zeros: não tem zeros, isto é, $a^x = 0$ é uma equação impossível

   Interseção com o eixo Oy: $f(0) = a^0 = 1$

   Sinal: é positiva em $\mathbb{R}$, isto é, $a^x > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}$

   Variação: é crescente

   Injetividade: é injetiva

   Continuidade: é contínua

   Limites: $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

   $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

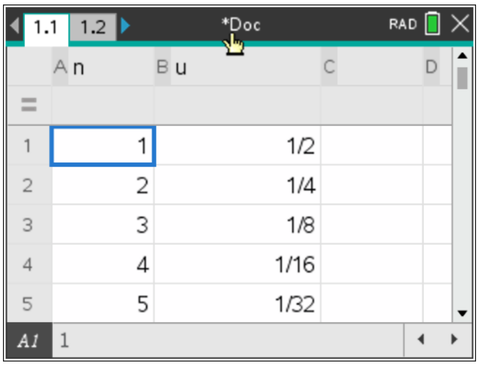
   Assíntotas: A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função

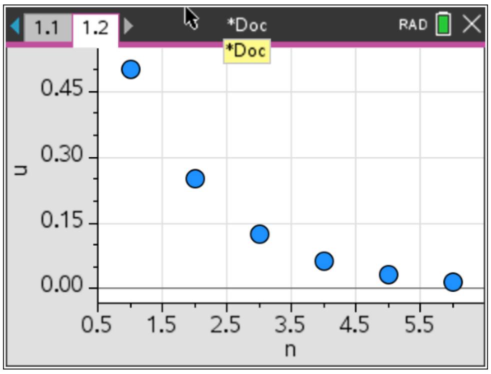
Enunciado 2 (proposta de resolução)

1.

Número de cortes na maçã (n)	Parte da maçã obtida (u)
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$
5	$\frac{1}{32}$
6	$\frac{1}{64}$

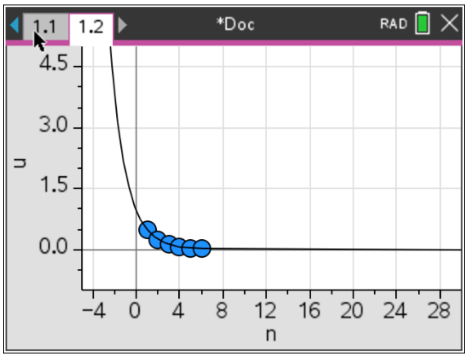
2. Utilizando a calculadora gráfica Texas TI-Nspire e o seu menu Listas e Folha de Cálculo, criam-se duas colunas, uma para o número de cortes na maçã e outra para a parte da maçã obtida. Posteriormente, abre-se o menu Dados e Estatística e escolhem-se as variáveis criadas anteriormente.





3. $u(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$

4. Utilizando o comando Analisar ->Traçar Função, insere-se a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e, de seguida, altera-se a janela de visualização.



5. Domínio: $\mathbb{R}$

Contradomínio: $\mathbb{R}^+$

Zeros: não tem zeros, isto é, $a^x = 0$ é uma equação impossível

Interseção com o eixo Oy: $f(0) = a^0 = 1$

Sinal: é positiva em $\mathbb{R}$, isto é, $a^x > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}$

Variação: é decrescente

Injetividade: é injetiva

Continuidade: é contínua

Limites: $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

Assíntotas: A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função

Exercícios de aplicação (proposta de resolução)

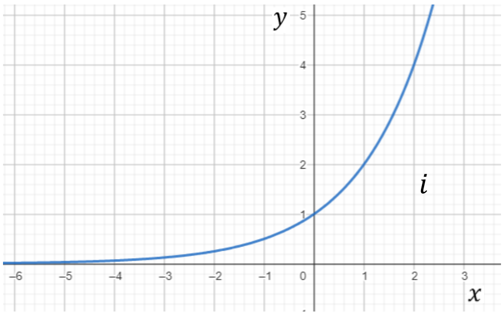
1.1. $f \to$ azul; $g \to$ vermelha; $h \to$ preta.

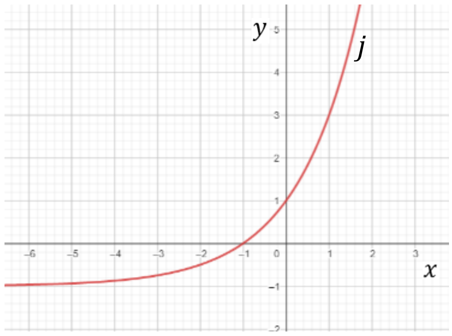
1.2.1. 0

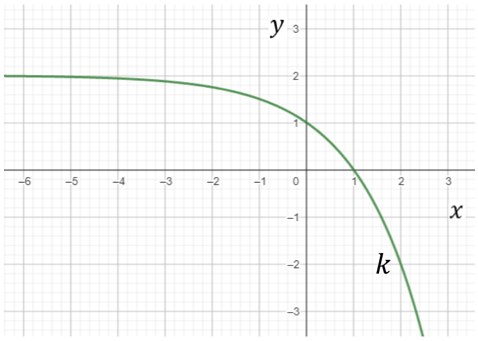
1.2.2. $+\infty$

1.2.3. $+\infty$

2.1.







2.2. Di ´=]0, +∞[Dj ´=] -1, +∞[Dk ´=]- ∞, 2[

3.1. $4^{-\pi} \times 24^{\pi} \div 6^{\pi} = 4^{-\pi} \times (24 \div 6)^{\pi} = 4^{-\pi} \times 4^{\pi} = 4^{-\pi+\pi} = 4^0 = 1$

3.2. $\left(6^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 6^2 = 36$

3.3. $\frac{2^{1+\sqrt{5}}}{2^{\sqrt{5}}} - 2^0 = \frac{2^{\sqrt{5}}\times 2}{2^{\sqrt{5}}} - 1 = 2 - 1 = 1$

3.4. $\sqrt{36}^{-2} = 6^{-2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

4.1. $5^{x+1} = 15 \Leftrightarrow 5^x \times 5 = 15 \Leftrightarrow 5^x = 3$

4.2. $5^{3x} = (5^x)^3 = 3^3 = 27$

4.3. $25^x = (5^2)^x = (5^x)^2 = 3^2 = 9$

4.4. $5^{\frac{x}{3}} = (5^x)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

4.5. $5^{-x+2} = 5^{-x} \times 5^2 = (5^x)^{-1} \times 25 = 3^{-1} \times 25 = \frac{1}{3} \times 25 = \frac{25}{3}$

Anexo 6- Aulas do dia 8 de fevereiro (12.º ano)

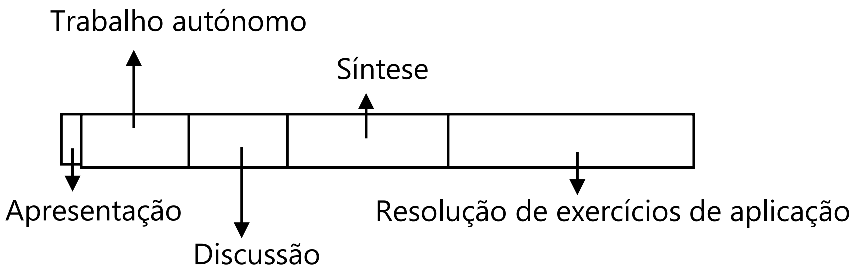
REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	Matemática (12.º Ano) 2023/2024
Data: 08/02/2024 **Duração da aula:** 90 minutos		Plano de aula

DOMÍNIO	OBJETIVOS
Funções: Funções exponenciais e funções logarítmicas	• Promover o trabalho em grupo; • Conhecer o conceito de logaritmo e as suas propriedades.

SUMÁRIO	RECURSOS
Conceito de logaritmo e suas propriedades. Exercícios de aplicação.	• Fichas de trabalho; • Calculadora gráfica (por grupo de 2 alunos); • *Power-Point*.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- Apresentação da tarefa: leitura conjunta dos enunciados e pedido de palpites de resposta;
- Resolução da tarefa, em grupos de 2 alunos (cada grupo resolve, apenas, um dos enunciados);
- Discussão e confronto das tarefas e conceitos envolvidos em cada um dos enunciados, em grande grupo;
- Síntese e esquematização dos conteúdos abordados na tarefa, com recurso ao *Power-Point*: resolução de equações do tipo $\boldsymbol{a^x = y}$, com $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^+\backslash\{\mathbf{1}\}$ **e** $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$; logaritmo de um número real positivo $\boldsymbol{x}$ numa dada base $\boldsymbol{a}$, com $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^+\backslash\{\mathbf{1}\}$, e respetivas propriedades;
- Resolução dos exercícios de aplicação 1, 2, 3, 4, 5 e 6, à exceção das alíneas definidas para trabalho de casa.



TRABALHO PARA CASA

- Resolução dos exercícios de aplicação 1.4, 1,6 1.9, 2.2, 3.3 e 4.2.

REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	**Matemática (12.º Ano)** **2023/2024**
Nome: ______________________________________ **Nº**_____ **Turma:** _____ **Data:** ____/____/2024		Enunciado 1

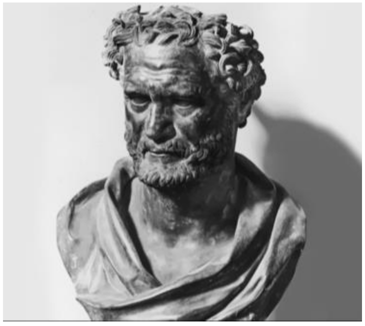
Neil Armstrong, engenheiro aeroespacial norte-americano, foi o primeiro homem a pisar a Lua, a 20 de julho de 1969. A bordo da aeronave *Apollo 11*, este astronauta e a restante tripulação percorreram os cerca de 384 400 km que separam a Terra da Lua. Este evento foi transmitido ao vivo e ainda hoje podem encontrar na Internet o vídeo que registou esse momento.

Imaginem, agora, que têm ao vosso dispor uma folha de papel branca de $0{,}07\ mm$.

Tentem perceber em quantas vezes seria necessário dobrá-la para poderem chegar até à Lua.

Sugestão: Recordem a aula de dia 22 de janeiro.

REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	Matemática (12.º Ano) 2023/2024
Nome: ______________________________ Nº_____ Turma: _____ Data: ____/____/2024		Enunciado 2



Considera-se que Demócrito, filósofo grego que viveu entre 460 a.C. e 370 a.C., foi um dos primeiros homens a pensar que a matéria não podia ser infinitamente dividida. Demócrito acreditava que se alguém cortasse uma maçã ao meio, com uma faca bem afiada, cortando depois uma das metades ao meio, dividindo depois um dos quartos ao meio, e assim sucessivamente, teríamos de parar quando nos restasse apenas um átomo, já que este não era divisível.

Considerem uma maçã de $216\, cm^3$ de volume, e o átomo mais pequeno de todos presenta nela, o átomo de hidrogénio, com $1 \times 10^{-24}\, cm^3$ de volume.

Quantos cortes seriam necessários fazer na nossa maçã, para chegarmos a um átomo de hidrogénio?

Sugestão: Recordem a aula de dia 22 de janeiro.

REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	[redacted]	Matemática (12.º Ano) 2023/2024
Nome: ___________________________________ Nº_____ Turma: ______ Data: ____/____/2024		Exercícios de aplicação

1. Calcula, sem recurso à calculadora.

   1.1 $\log_2(64)$

   1.2 $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$

   1.3 $\log_3(\sqrt{3})$

   1.4 $\log_4\left(\frac{1}{16}\right)$

   1.5 $\log_{\frac{1}{2}}(32)$

   1.6 $\log_{\sqrt{5}}(25)$

   1.7 $\log_{2024}(1)$

   1.8 $\log_{2024}(2024)$

   1.9 $\log_{12}(12^{10})$

   1.10 $3^{\log_3 81}$

2. Determina os valores que x pode tomar de modo que cada uma das seguintes expressões tenha significado em $\mathbb{R}$.

   2.1 $\log_2(x+1)$

   2.2 $\log_3(2x)$

   2.3 $\log_4(x^2)$

   2.4 $\log(x^2+1)$

   2.5 $\ln(2-x)$

3. Escreve o número 13 na forma de:

   3.1 Uma potência de base 3.

   3.2 Uma potência de base 10.

   3.3 Um logaritmo de base 5.

   3.4 Um logaritmo de base e.

4. Simplifica as seguintes expressões, nos respetivos domínios.

   4.1 $3^{1+\log_3(x)}$

   4.2 $e^{3\ln(x)}$

   4.3 $5^{6\log_5(x)-2\log_5(x)}$

   4.4 $\log_3(9^x)$

5. Uma população de bactérias triplica a cada hora que passa. A contagem inicial revelou a existência de 10 bactérias.

   5.1 Escreve uma expressão que permita determinar o número de bactérias t horas após a contagem inicial.

5.2 Determina o número de bactérias existentes na primeira hora e meia.

5.3 Passado quanto tempo a população atingiu as 8450 bactérias?

Apresente o resultado em horas e minutos, arredondados às unidades.

No caso de procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva, no mínimo, três casas decimais.

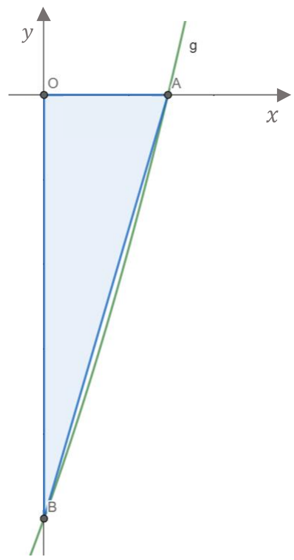
6. Considera o gráfico da função g de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$g(x) = -3 + 4^{x+\frac{1}{2}}$.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Ox;
- B é o ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Oy.

Qual é a área do triângulo $[AOB]$?



Enunciado 1 (proposta de resolução)

A distância da Terra à Lua é de $384400km$ e a espessura da folha de papel é $0{,}07mm$. Então, para procedermos a quaisquer cálculos, há a necessidade de converter todos os valores para a mesma unidade de medida. A distância da Terra à Lua, em milímetros, pode ser calculada da seguinte forma:

$$384400km = 384400000m = 384400000000mm = 3{,}844 \times 10^{11}mm$$

Podemos começar por perceber qual a quantidade necessária de folhas de papel que caberiam entre a Terra e a Lua, dispostas horizontalmente e por cima umas das outras. Denotemos por Q essa quantidade de folhas de papel:

$$Q = \frac{3{,}844\times10^{11}}{0{,}07} \approx 5{,}49 \times 10^{12} \text{ folhas}$$

Lembremo-nos que $u(n) = 2^n$, onde u representa o número de folhas sobrepostas após n dobras numa folha de papel.

Assim, só nos falta calcular quantas dobras seriam necessárias para perfazer um total de folhas sobrepostas de $5{,}49 \times 10^{12}$ folhas, que é o número de folhas amontoadas que precisamos para chegar à Lua. Para isso, basta calcular o valor de x tal que:

$$u(n) = 5{,}49 \times 10^{12} \Leftrightarrow 2^n = 5{,}49 \times 10^{12}$$

O valor de n terá de ser inteiro e, por tentativa e erro, poderíamos chegar a um valor de n correspondente a 42 ou 43 dobras. Repare-se que nenhum deste valor é a solução exata ao problema, mas sim a solução aproximada. Para 42 dobras, não conseguíamos atingir a Lua e para 43 dobras já a ultrapassávamos.

Enunciado 2 (proposta de resolução)

Podemos começar por descobrir a relação entre o número de cortes e o volume de cada parte da maçã que se obtém:

- Não fazendo nenhum corte na maçã, o seu volume será de 216 cm^3;
- Fazendo um corte na maçã pela primeira vez, o seu volume será metade do valor do volume da maçã inteira, ou seja, $216 \times \frac{1}{2}\ cm^3$;
- Fazendo o segundo corte na maçã, o volume passará à metade daquele que era com um só corte, isto é, $216 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 216 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\ cm^3$;

- Cortando a maçã pela terceira vez, o volume passará à metade daquele que era com dois cortes feitos, ou seja, $216 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = 216 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \ cm^3$;

Estamos a ser conduzidos para a expressão $u(n) = 216 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, onde u representa o volume da maçã após n cortes.

Assim, só nos falta calcular quantos cortes seriam necessários para chegarmos a um volume de $1 \times 10^{-24}\ cm^3$, que é o volume de um átomo de hidrogénio. Para isso, basta calcular o valor de n tal que:

$$u(n) = 1 \times 10^{-24} \Leftrightarrow 216 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \times 10^{-24} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 \times 10^{-24}}{216}$$

O valor de n terá de ser inteiro e, por tentativa e erro, poderíamos chegar a um valor de n correspondente a 87 cortes, aproximadamente.

Exercícios de aplicação (proposta de resolução)

1.1 $\log_2(64) = \log_2(2^6) = 6$

1.2 $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2^{-1}) = -1$

1.3 $\log_3(\sqrt{3}) = \log_3\left(3^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

1.4 $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = \log_4\left(\frac{1}{4^2}\right) = \log_4(4^{-2}) = -2$

1.5 $\log_{\frac{1}{2}}(32) = \log_{\frac{1}{2}}(2^5) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}\right) = -5$

1.6 $\log_{\sqrt{5}}(25) = \log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}^4\right) = 4$

1.7 $\log_{2024}(1) = \log_{2024}(2024^0) = 0$

1.8 $\log_{2024}(2024) = \log_{2024}(2024^1) = 1$

1.9 $\log_{12}(12^{10}) = 10$

1.10 $3^{\log_3 81} = 81$

2.1 $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]-1, +\infty[$

2.2 $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$

2.3 $x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$

2.4 $x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

2.5 $\mathbf{2} - x > 0 \Leftrightarrow -x > 2 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in]+\infty, 2[$

3.1 $3^{\log_3(13)}$

3.2 $10^{\log(13)}$

3.3 $\log_5(5^{13})$

3.4 $\ln(e^{13})$

4.1 $3^{1+\log_3(x)} = 3^1 \times 3^{\log_3(x)} = 3 \times 3^{\log_3(x)} = 3x, x > 0$

4.2 $e^{3\ln(x)} = \left(e^{\ln(x)}\right)^3 = x^3, x > 0$

4.3 $5^{6\log_5(x)-2\log_5(x)} = 5^{4\log_5(x)} = \left(5^{\log_5(x)}\right)^4 = x^4, x > 0$

4.4 $\log_3(9^x) = \log_3((3^2)^x) = \log_3(3^{2x}) = 2x, x \in \mathbb{R}$

5.1 Seja b o número de bactérias: $b(t) = 10 \times 3^t, t > 0$

5.2 $b(1{,}5) = 10 \times 3^{1,5} = 30\sqrt{3} \approx 52$ bactérias

5.3 $b(t) = 8450 \Leftrightarrow 10 \times 3^t = 8450 \Leftrightarrow 3^t = 845 \Leftrightarrow 3^t = 3^{\log_3(845)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \log_3(845) \approx 6{,}134$ horas.

$0{,}134 \times 60 \approx 8$ minutos

R: Passadas 6 horas e 8 minutos.

6. $g(0) = -3 + 4^{\frac{1}{2}} = -3 + \sqrt{4} = -3 + 2 = -1$. Logo, $B(0{,}1)$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + 4^{x+\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow 4^{x+\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow 4^{x+\frac{1}{2}} = 4^{\log_4(3)} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 4^{\log_4(3)} \Leftrightarrow x =$

$= \log_4(3) - \frac{1}{2}$. Logo, $A\left(\log_4(3) - \frac{1}{2}, 0\right)$

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{\left(\log_4(3) - \frac{1}{2}\right) \times 1}{2} = \frac{2\log_4(3) - 1}{4}\ u.a$$

Anexo 7- Matemática das profissões

Matemática das profissões

Achas que a profissão que queres seguir não tem matemática? Espera para ver!

“Matemática das profissões” é um conjunto de desafios matemáticos, ligados às mais diversas profissões, propostos pelas professoras-estagiárias de matemática. Esta rubrica será publicada mensalmente no jornal da escola, de modo a tentar aguçar o interesse dos alunos pela disciplina.

Matemática das profissões

Regulamento:

1. Os desafios mensais serão propostos pelas professoras-estagiárias da disciplina de matemática, Daniela Brás e [redacted]

2. Neste ano letivo, serão propostos 8 desafios;

3. Para submeter a resposta a um desafio, devem entregá-la ao vosso professor de matemática;

4. A resposta a qualquer desafio terá de contemplar, obrigatoriamente, o nome do aluno, o ano e a turma, bem como a justificação ou raciocínio necessários à resolução;

5. Caso seja detetado plágio numa submissão, esta será anulada. Em caso de reincidência, o participante será impedido de receber prémios;

6. Todos os desafios têm uma data-limite, divulgada no ato da sua publicação;

7. A pontuação dos desafios será feita da seguinte forma:

- Resolução correta entregue até à data limite: 10 pontos
- Resolução parcialmente correta entregue até à data limite: 5 pontos
- Resolução errada entregue até à data limite: 0 pontos;

Matemática das profissões

Regulamento:

8. A classificação de cada participante será determinada pela soma da pontuação obtida durante os 8 desafios. Em caso de empate haverá um desafio suplementar de modo a determinar o vencedor (as regras serão divulgadas previamente ao desafio);

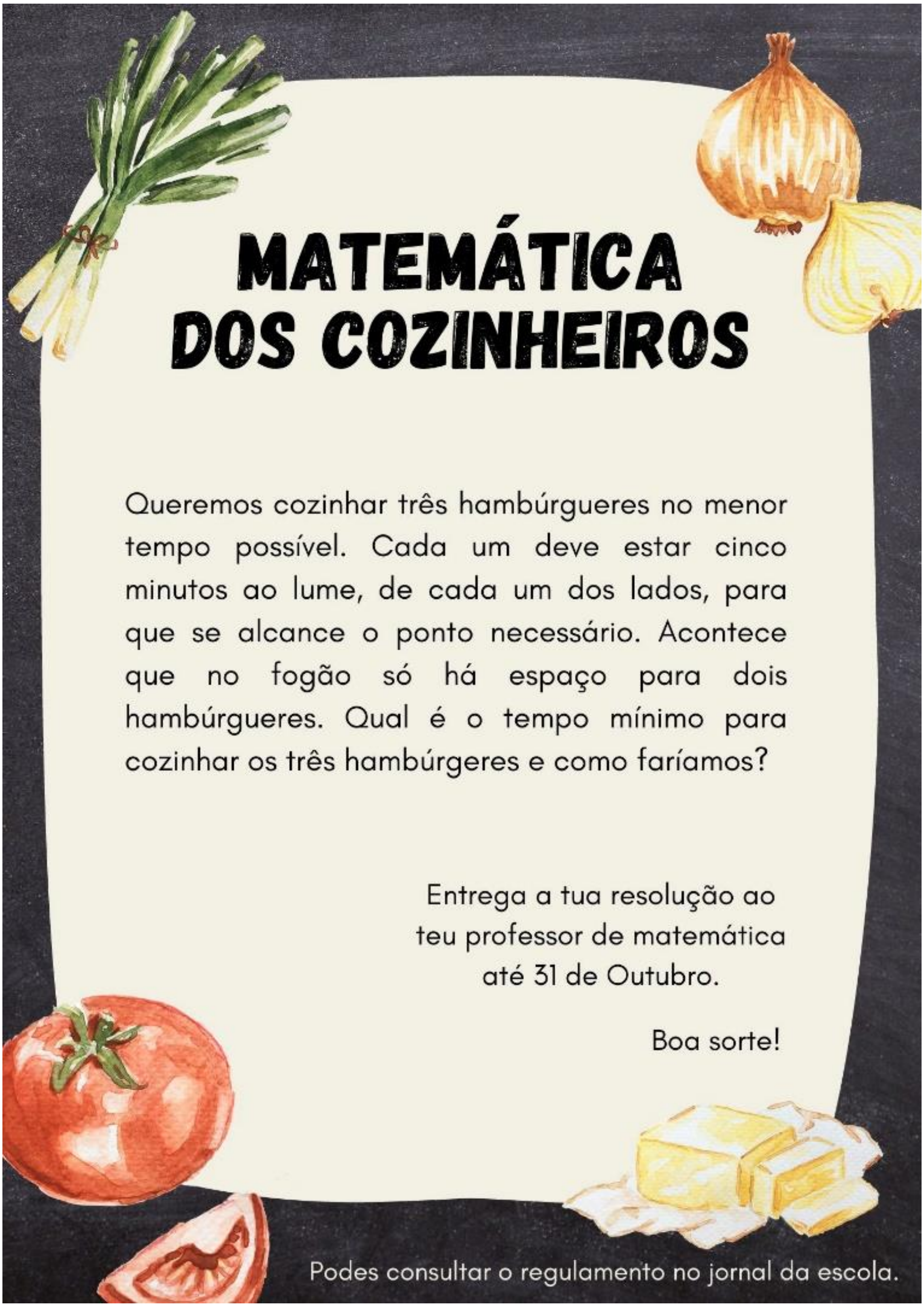
9. Para se habilitar a ganhar um prémio, o participante deverá participar em, pelo menos, metade dos desafios;

10. Haverá prémios para os três primeiros classificados (respeitando o definido no ponto 9):

- **1.º prémio:** 5 refeições na [redacted]
- **2.º prémio:** 1 refeição no restaurante [redacted]
- **3.º prémio:** 1 refeição no restaurante [redacted]

11. Qualquer dúvida sobre o enunciado de um dos desafios, ou sobre qualquer outro assunto, podem entrar em contacto connosco através do e-mail danielabras@[redacted] ou [redacted]

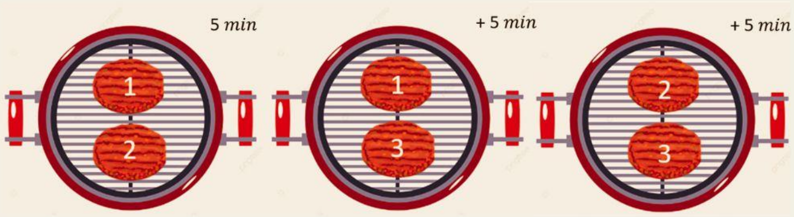
[redacted]


MATEMÁTICA DOS COZINHEIROS
Queremos cozinhar três hambúrgueres no menor tempo possível. Cada um deve estar cinco minutos ao lume, de cada um dos lados, para que se alcance o ponto necessário. Acontece que no fogão só há espaço para dois hambúrgueres. Qual é o tempo mínimo para cozinhar os três hambúrgeres e como faríamos?
Entrega a tua resolução ao teu professor de matemática até 31 de Outubro.
Boa sorte!
Podes consultar o regulamento no jornal da escola.

MATEMÁTICA DOS COZINHEIROS

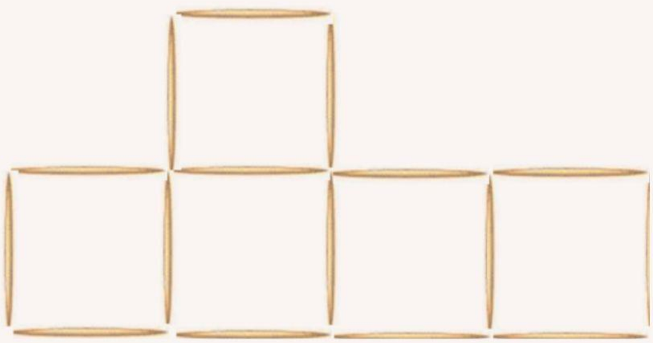
(RESOLUÇÃO)

Para facilitar a compreensão da resolução, vamos identificar os hambúrgueres com 1, 2 e 3. Começa-se colocando os hambúrgueres 1 e 2 na grelha. E, com isto, passam-se 5 minutos. De seguida, vira-se o hambúrguer 1 e coloca-se o hambúrguer 3 a grelhar. Após mais 5 minutos, o hambúrguer 1 fica pronto. Posteriormente, vira-se o hambúrguer 3 e coloca-se o hambúrguer 2 a grelhar a parte que falta. Assim, ao final de 15 minutos, os três hambúrgueres estão prontos.



Matemática dos pastores

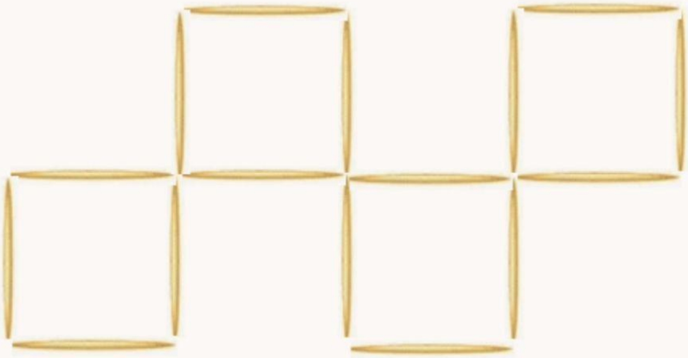
O Joaquim possui um rebanho de ovelhas. Como tal, precisa de as ter divididas por várias cercas. A figura abaixo é representativa das 5 cercas quadradas geometricamente iguais do Joaquim. Para melhor se organizar, o Joaquim precisa de uma nova disposição. Para isso, irá mudar de lugar 3 barreiras, pretendendo-se obter 4 cercas quadradas geometricamente iguais.



Entrega a tua resolução ao teu professor de matemática até 30 de Novembro.

Podes consultar o regulamento no jornal da escola.

Matemática dos pastores
(resolução)



Matemática dos técnicos de logística

NUM ARMAZÉM, EXISTE UM CONJUNTO DE CAIXAS CÚBICAS COM DOIS TAMANHOS DIFERENTES, CUJAS MEDIDAS DE COMPRIMENTOS DE LADO SÃO DE 2 *CM* E 4 *CM*. QUAL É O MENOR NÚMERO DE CAIXAS NECESSÁRIO PARA ENCHER COMPLETAMENTE UMA NOVA CAIXA, CUJAS MEDIDAS SÃO

12 *CM* X 10 *CM* X 10 *CM*?

ENTREGA A TUA RESOLUÇÃO AO TEU PROFESSOR DE MATEMÁTICA ATÉ 21 DE DEZEMBRO.

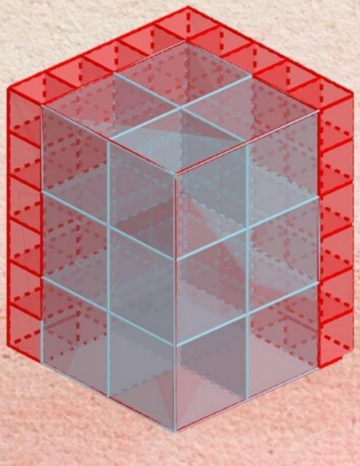
PODES CONSULTAR O REGULAMENTO NO JORNAL DA ESCOLA.

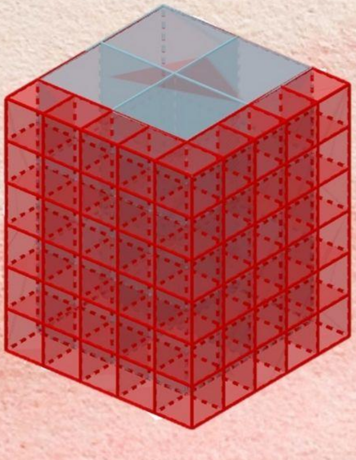
Matemática dos técnicos de logística

PRIMEIRO, TEMOS DE PREENCHER A NOVA CAIXA COM O MÁXIMO DE CAIXAS DE 4 CM. NO MÁXIMO, CONSEGUIMOS COLOCAR 4 EM CADA CAMADA E COMO 12:4=3, TEREMOS 4 CAIXAS EM 3 CAMADAS, OU SEJA, 12 CAIXAS DE 4 CM.

NO ESPAÇO RESTANTE, VAMOS PREENCHER COM CAIXAS DE 2 CM. NO QUE RESTA EM CADA CAMADA, CONSEGUIMOS COLOCAR 9 CAIXAS DE 2 CM. COMO A ALTURA DA NOVA CAIXA É 12, TEMOS 12:2=6 CAMADAS. PORTANTO, NO TOTAL TEMOS 6X9=54 CAIXAS DE 2 CM.

AO TODO TEREMOS 66 CAIXAS.





Matemática dos joalheiros

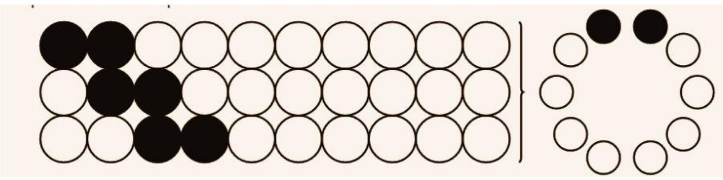
O Sr. Francisco é um ourives muito dedicado e só faz peças únicas. Foi-lhe encomendada uma pulseira de pérolas. Para tal, dispõe de um fio e 10 pérolas, 8 brancas e 2 pretas. O Sr. Francisco percebeu que existem imensas possibilidades para combinar todas as pérolas. O cliente decidiu-se por uma combinação, mas o Sr. Francisco ficou a pensar em quantas formas poderia colocar as pérolas, de modo a obter pulseiras com aspetos diferentes. Quantas serão essas possibilidades?

Entrega a tua resolução ao teu professor de matemática até 29 de Janeiro.

Podes consultar o regulamento no jornal da escola.

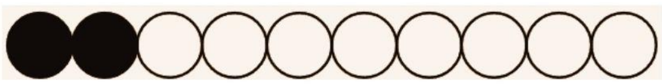
Matemática dos joalheiros
(resolução)

Numa primeira abordagem ficamos com a ideia que serão muitas as possibilidades distintas de
colocar as pérolas. Contudo, não podemos esquecer que ao unir as duas pontas do fio, várias
dessas possibilidades originam pulseiras com o mesmo aspeto. Por exemplo:

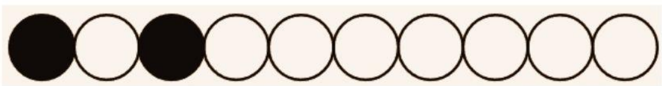


Desta forma, para determinar o número de pulseiras realmente diferentes deveremos contabilizar:

- Zero pérolas brancas entre as duas pretas;

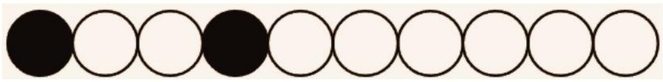


- Uma pérola branca entre as duas pretas;

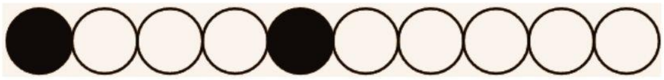


Matemática dos joalheiros
(resolução)

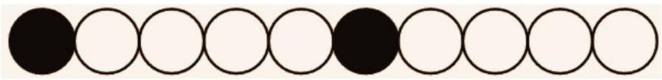
- Duas pérolas brancas entre as duas pretas;



- Três pérolas brancas entre as duas pretas;



- Quatro pérolas brancas entre as duas pretas;

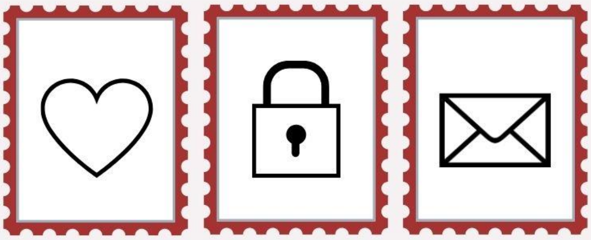


A situação seguinte, de cinco pérolas brancas entre as duas pretas, já não será contabilizado pois teríamos:

Esta última situação corresponde à situação de três pérolas brancas entre as duas pretas. Desta forma, podemos concluir que serão apenas 5 pulseiras diferentes que se podem formar nestas condições.

MATEMÁTICA DOS DETETIVES

Investiga e descobre os três algarismos distintos por detrás dos seguintes símbolos



3 9 8

Um algarismo correto na posição errada

3 1 5

Um algarismo correto na posição correta

5 3 7

Dois algarismos corretos na posição errada

8 6 9

Um algarismo correto na posição errada

8 6 1

Nada está correto

Entrega a tua resolução ao teu professor de matemática até 29 de Fevereiro.

Podes consultar o regulamento no jornal da escola.

MATEMÁTICA DOS DETETIVES
(RESOLUÇÃO)

A última pista indica que em 861 nada está correto. Isto significa que nenhum dos algarismos 8, 6 e 1 fazem parte do código. Se analisarmos a pista com o código 869, tendo em conta o que já sabemos, percebemos que 9 é um algarismo que pertence ao código mas está na posição errada.

Voltando à primeira pista, 398 tem um algarismo correto na posição errada. Assim, como já sabemos que 9 é um algarismo correto, concluímos que 9 é o algarismo correto na posição errada. Como já sabemos que o 9 não pode estar na última posição nem na do meio, ficamos a saber que 9 é o primeiro algarismo, ou seja, o que tem como símbolo o cadeado.

Também retiramos outra importante informação: o 3 não é um dos algarismos do código.

Analisando a pista com o código 315 e, sabendo que 1 e 3 não são algarismos possíveis, concluímos que o 5 é o último algarismo do código, correspondendo à carta com corações.

Falta-nos assim tirar conclusões sobre a pista que diz que o código 537 tem dois algarismos corretos na posição errada. Já sabemos que o 5 é o último algarismo e que o 3 não pertence ao código, por isso (e como só nos falta saber o algarismo do meio) o 7 corresponde ao coração.

Portanto, o código é 975.

MATEMÁTICA DOS AGRICULTORES

Quatro coelhos pretos e três coelhos castanhos dão em cinco dias tantos ovos como três coelhos pretos e cinco coelhos castanhos em quatro dias. Qual o tipo de coelho que dá mais ovos?

Ps: Os coelhos da Páscoa dão ovos!
Boa Páscoa!

Entrega a tua resolução ao teu professor de matemática até 22 de Março.

Podes consultar o regulamento no jornal da escola.

MATEMÁTICA DOS AGRICULTORES (RESOLUÇÃO)

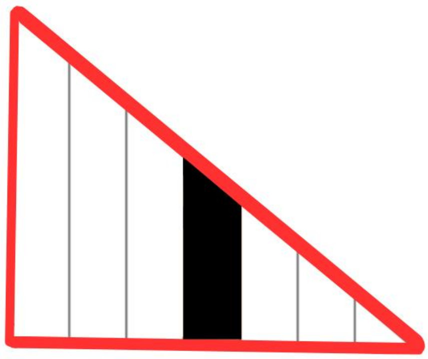
Sejam x o número de ovos que um coelho preto produz, num dia, e y o número de ovos que um coelho castanho produz, também num dia. Da primeira frase do enunciado, podemos deduzir a seguinte equação:

$$5(4x + 3y) = 4(3x + 5y) \Leftrightarrow$$
$$20x + 15y = 12x + 20y \Leftrightarrow$$
$$20x - 12x = 20y - 15x \Leftrightarrow$$
$$8x = 5y \Leftrightarrow$$
$$x = 5/8\ y$$

Assim, os coelhos castanhos são os que produzem mais ovos

MATEMÁTICA DOS PEDREIROS

O quintal do Sr. Joaquim tem a forma de um triângulo retângulo e está dividido em sete canteiros de igual largura, como se indica na figura. A área do quintal é 21 m². Qual é a área do canteiro sombreado?



Entrega a tua resolução ao teu professor de matemática até 30 de Abril.

Podes consultar o regulamento no jornal da escola.

MATEMÁTICA DOS PEDREIROS

$A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2} = 21$ **m^2, onde** $b = \overline{AB}$ **e** $h = \overline{AC}$.

Os triângulos $[ABC]$, $[DBG]$ **e** $[EBF]$ **são semelhantes, pelo que:**

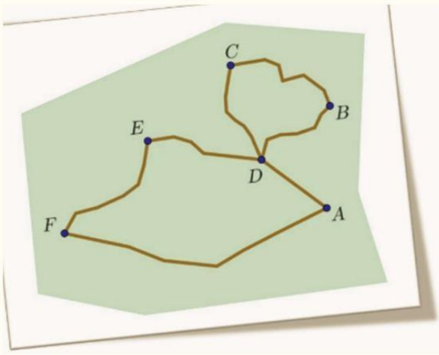
$A_{[DGB]} = \frac{4}{7}b \times \frac{4}{7}h = \frac{4}{7} \times 21 = 12$ **m^2**

$A_{[EFB]} = \frac{3}{7}b \times \frac{3}{7}h = \frac{3}{7} \times 21 = 9$ **m^2**

$A_{[DGFE]} = A_{[DGB]} - A_{[EFB]} = 12 - 9 = 3$ **m^2**

Matemática dos carteiros

O carteiro Paulo tem um percurso atribuído que costuma utilizar no seu dia de trabalho. No entanto, para não se aborrecer, quer fazer esse percurso de diferentes maneiras. Pensou em passar por todas as casas, mas cada uma das ligações entre as casas só poderá ser percorrida uma única vez. Como poderá fazê-lo e de quantas maneiras diferentes?



ENTREGA A TUA RESOLUÇÃO AO TEU PROFESSOR DE MATEMÁTICA ATÉ 31 DE MAIO.

Carteiro Paulo

POSTAL MAIL

Podes consultar o regulamento no jornal da escola.

Matemática dos carteiros
(resolução)

Quanto ao número de percursos possíveis, temos 28 possibilidades. Para isso, basta considerar, de uma forma organizada, todas as situações iniciadas em cada uma das casas. Começando em qualquer casa, à excepção da D, existem 4 caminhos diferentes. Já partindo de D, podemos percorrer 8 trajetos distintos.

ADBCDEFA	CBDAFEDC	DCBDAFED
ADCBDEFA	CBDEFADC	DCBDEFAD
AFEDCBDA	EDBCDAFE	DBCDAFED
AFEDBCDA	EDCBDAFE	DBCDEFAD
BCDAFEDB	EFADBCDE	DAFEDBCD
BCDEFADB	EFADCBDE	DAFEDCBD
BDEFADCB	FEDCBDAF	DEFADBCD
BDAFEDCB	FEDBCDAF	DEFADCBD
CDAFEDBC	FADCBDEF	
CDEFADBC	FADBCDEF	

Anexo 8- Concurso de mnemónicas

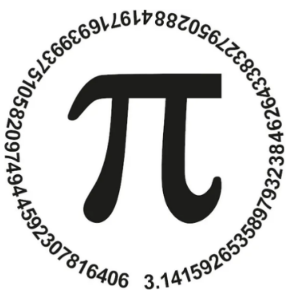
DIA INTERNACIONAL DA Matemática

CONCURSO DE MNEMÓNICAS

No dia 14 de março, realiza-se o Dia Internacional da Matemática. Para celebrar este dia, preparámos um concurso de mnemónicas! Inscreve-te junto do teu professor de Matemática e cria uma frase. Contando as letras de cada palavra dessa frase, devem encontrar-se os primeiros algarismos do número π.

A frase mais original e extensa ganhará o concurso.

Sejam criativos! Boa sorte!



Exemplo:

Sim, é útil e fácil memorizar um número.

3 1 4 1 5 9 2 6

Não é sopa, ó amigo, encontrar um número certo que sirva.

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

As frases em concurso estarão em exposição no dia 14 de março. Ao vencedor, será atribuído um certificado de participação pelos professores de Matemática.

Anexo 9- Autorização de participação

REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO

[redacted]

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

Autorização de participação em projeto de investigação

Eu, ____, Encarregado de Educação do(a) aluno (a) ____, n.º _____, da turma _____ do 9.º ano, tomei conhecimento da realização do projeto de investigação no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, e declaro que autorizo a participação do meu educando no referido projeto. Declaro, ainda, que autorizo a recolha de informação documental para efeitos de investigação, salvaguardando o respetivo anonimato do meu educando, aquando da realização das tarefas ou de possíveis entrevistas.

_____ / 01 / 2024

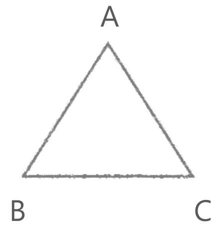
____

(Assinatura do Encarregado de Educação)

Anexo 10- Tarefa de investigação

Parte I

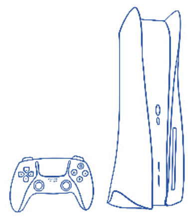
1. Na figura ao lado está representado um triângulo equilátero [ABC]. Determina os valores que o lado do triângulo pode tomar, de modo que o perímetro desse triângulo seja inferior a 24 cm.



2. O António é fã de videojogos e, como tal, está a pensar comprar uma Play Station 5. Para a pagar na sua totalidade, precisará de juntar 549,99€.

   No dia do seu aniversário, o António recebeu dos tios 195€. Já os seus pais combinaram oferecer-lhe uma mesada de quantia fixa de 60€, sendo que a primeira mesada seria oferecida no dia do próprio aniversário.

   Sabe-se que, desde o seu aniversário, o António já conseguiu armazenar dinheiro suficiente para a compra da consola. Há quantos meses, no mínimo, terá sido o seu aniversário?



3. O João decidiu aderir a um novo tarifário de telemóvel. A empresa que foi consultada fez duas propostas de contrato anual à família:

   Tarifário A: Custo de adesão- 15€

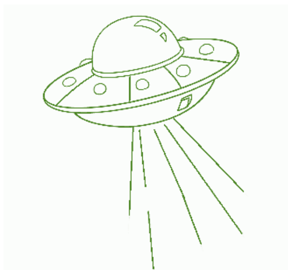
   Preço por minuto de chamada ou SMS- 0,05€

   Tarifário B: Custo de adesão- 30€

   Preço por minuto de chamada ou SMS- 0,04€

   Quantos minutos de chamada ou SMS terá o João de efetuar, durante um ano, para que a opção B seja mais económica que a opção A?

4. O preço a pagar por uma viagem de OVNI inclui uma parcela do seguro pessoal do passageiro e uma parcela que depende da distância percorrida pela aeronave. Se o preço do seguro pessoal for de 3 440€ e cada quilómetro percorrido custar 100€, que distância pode percorrer no espaço um passageiro com um valor entre 70 000€ e 100 000€ (inclusive)?



Parte II

5. Leiam atentamente o seguinte problema.

A Teresa tinha um saldo contabilístico disponível de 72,53€. Ao entrar num centro comercial, encontrou várias peças de roupa de que gostou. Em média, cada peça custava 15,99€. Qual o número máximo de peças que a Teresa pode ter comprado?

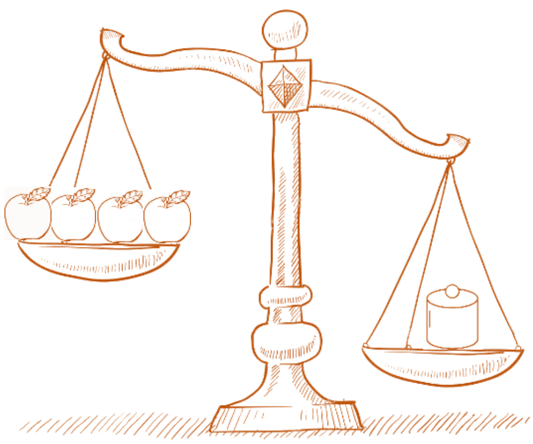
A partir deste enunciado, formulem um novo problema.
Apresentem uma proposta de resolução para esse problema.

6. Formulem um problema que possa ser traduzido matematicamente pela seguinte expressão:

$$x + 9 \geq 2x + 1$$

Apresentem uma proposta de resolução para esse problema.

7. Com base na figura abaixo, formulem um problema.
Apresentem uma proposta de resolução para esse problema.



8. Formulem um problema que possa ser traduzido matematicamente por uma inequação do 1.º grau.
Apresentem uma proposta de resolução para esse problema.