



**Carlos Maria Reynolds de Souza Parreira do  
Amaral**

Licenciatura em Ciências de Engenharia Mecânica

**Localização e Quantificação de Dano  
com recurso às FRFs**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia Mecânica

Orientador: Tiago Alexandre Narciso da Silva.  
Professor Auxiliar Convidado, FCT-UNL

Co-orientador: António Paulo Vale Urgueira.  
Professor Associado, FCT-UNL

---

---

### **Localização e Quantificação de Dano com recurso às FRFs**

Copyright © Carlos Maria Reynolds de Souza Parreira do Amaral, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

---

---

Aos meus Pais e irmãos

---

---

# Agradecimentos

---

A título de agradecimento, queria deixar o meu maior apreço aos meus orientadores Professor António Urgueira e Professor Tiago Silva pela paciência e dedicação ao longo do trajecto da minha tese e por todos os concelhos e orientações que me foram dadas para conceber o melhor trabalho possível.

Agradeço também à minha família pela compreensão e apoio que me deram em todos os momentos difíceis que foram surgindo ao longo da dissertação.

Num último agradecimento, mas igualmente importante, queria agradecer a todos os professores que fizeram parte do meu percurso curricular e que mesmo em quantidades pequenas contribuíram para a pessoa que sou hoje.

---

---

# Resumo

---

Na área da dinâmica estrutural existem diversos tipos de resposta que permitem alcançar a identificação do dano estrutural, de entre os quais, as Funções de Resposta em Frequência (FRFs), revelam características promissoras no contexto de facilitar o processo de identificação e de recorrer directamente às respostas medidas numa estrutura. Outro factor que evidencia o uso das FRFs neste contexto é o facto de não ser necessário recorrer à identificação modal, desprezando assim os erros a ela associados.

Deste modo, com o sentido de verificar a aplicabilidade das FRFs nas vertentes de localização e quantificação de dano, foram seleccionados e testados diversos métodos no sentido de eleger o método mais proeminente na área de localização. Na área da quantificação foi proposto um novo método baseado numa técnica já conhecida onde através do uso directo das FRFs é possível determinar a extensão da profundidade da zona danificada.

Como forma de testar os métodos de localização e de quantificação foram criados modelos numéricos, com recurso ao método dos elementos finitos, três estruturas caracterizadas por graus de complexidade diferentes quanto à simulação da realidade. Os três modelos foram criados tendo em conta o conceito de incompletude como forma de simular os dados experimentais.

Numa última abordagem ao tema da identificação de dano é desenvolvido um método que possibilita em simultâneo localizar o dano e quantificar a sua extensão.

## Palavras-Chave

Funções e Resposta em Frequência, Localização de Dano, Quantificação de Dano, Método dos Elementos Finitos, Simulação de Resultados Experimentais, Método Modificado, Método Localização e Quantificação.

---

---

# Abstract

---

In the field of structural dynamics there are several types of response that can achieve damage identification, and one of them, the Frequency Response Functions (FRFs), presents some promising characteristics in the process of identification using only the direct structural response. Another good factor about the FRFs is that it doesn't require modal identification and the associated errors are not involved.

With the purpose of verifying the applicability of FRFs in the damage localization and quantification, one selected and tested several methods aiming at electing the most capable one in the field of localization. In the area of quantification a new method was proposed using a known technique that uses FRFs directly to find the depth length of the damage zone.

In the process of testing the localization and the quantification methods and using the Finite Element Method (FEM) it were developed numerical models of three structures that have different degrees simulation of the reality. These three structures were also build with focus on the concepts of incompleteness to simulate experimental data.

For last but not least in the approach to the damage identification subject, a new method that is able to work simultaneously on the two main fields, the localization and the quantification, was developed and tested.

## Keywords

Frequency Response Functions, Damage Localization, Damage Quantification, Finite Elements Method, Modified Method, Localization and Quantification Method.

---

---

# Índice

---

<b>Agradecimentos.....</b>	<b>vii</b>
<b>Resumo.....</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>xi</b>
<b>Índice.....</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Figuras.....</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas.....</b>	<b>xix</b>
<b>Lista de Abreviaturas .....</b>	<b>xxi</b>
<b>Nomenclatura .....</b>	<b>xxiii</b>
<b>1. Introdução .....</b>	<b>1</b>
1.1. Motivação.....	1
1.2. Objectivos .....	2
1.3. Contribuições .....	2
1.4. Estrutura da dissertação .....	3
<b>2. Conceitos fundamentais .....</b>	<b>5</b>
2.1. Identificação de dano.....	6
2.2. Vibrações Mecânicas.....	6
2.2.1. Noção dos Modos de Vibração.....	7
2.2.2. Funções de Resposta em Frequência .....	7
2.3. Conceito de Incompletude .....	9
2.4. Conceito de Modelos Reduzidos .....	10
2.5. Epítome do Capítulo .....	12
<b>3. Modelação e Simulação .....</b>	<b>13</b>
3.1. Método dos Elementos Finitos aplicados a um Elemento de Viga .....	13
3.1.1. Simulação de dano .....	18
3.2. Simulação de resultados com características experimentais.....	22
3.3. Estruturas Modeladas .....	22
3.3.1. Estrutura A – Viga livre-livre .....	22

---

3.3.2.	Estrutura B – Viga simplesmente apoiada.....	27
3.3.3.	Estrutura C – Sistema de massas e molas.....	31
3.4.	Epítome do Capítulo .....	33
<b>4.</b>	<b>Localização.....</b>	<b>35</b>
4.1.	Método dos Modos de Vibração aplicado às FRFs.....	36
4.2.	Método do Declive dos Modos de Vibração aplicado às FRFs.....	41
4.3.	Método da Curvatura aplicado às FRFs.....	46
4.4.	Método do Quadrado da Curvatura aplicado às FRFs.....	51
4.5.	Método das Diferenças Logarítmicas das FRFs .....	56
4.6.	Erro na Relação Constitutiva (ERC).....	61
	Desafios das Implementações.....	81
	Proposta Avaliativa .....	82
4.7.	Epítome do Capítulo .....	85
<b>5.</b>	<b>Quantificação.....</b>	<b>87</b>
5.1.	Largura.....	88
5.1.1.	Descrição do Método .....	88
5.2.	Profundidade.....	90
5.3.	Epítome do Capítulo .....	101
<b>6.</b>	<b>Método Localização e Quantificação.....</b>	<b>103</b>
6.1.	Epítome do Capítulo .....	107
<b>7.</b>	<b>Conclusão.....</b>	<b>109</b>
7.1.	Trabalhos Futuros.....	111
<b>8.</b>	<b>Bibliografia.....</b>	<b>113</b>

---

# Lista de Figuras

---

Figura 2.1 – Graus de Liberdade no Modelo Teórico .....	9
Figura 2.2 – Graus de Liberdade obtidos no Modelo Experimental.....	9
Figura 3.1 – Esquema de um elemento de viga com dois graus de liberdade .....	14
Figura 3.2 – Esquema de um elemento de viga com quatro graus de liberdade .....	15
Figura 3.3 – Troço de viga com elemento danificado .....	18
Figura 3.4 – 2º Momentos de área de uma secção retangular .....	18
Figura 3.5 – Secção transversal do elemento danificado com eixos relativos a todos os elementos .....	19
Figura 3.6 – Representação da estrutura A sem dano com 30 elementos finitos .....	22
Figura 3.7 – Representação da estrutura A com dano numa localização (Elemento a preto) .....	23
Figura 3.8 – Representação da estrutura A com dano em mais do que uma localização (Elementos a preto) .....	23
Figura 3.9 – FRFs para 1 Localização .....	25
Figura 3.10 – FRFs para 2 Localizações .....	25
Figura 3.11 – FRFs para Dimensões Diferentes.....	26
Figura 3.12 – FRFs para Ruído.....	26
Figura 3.13 – Representação da estrutura B .....	27
Figura 3.14 – Representação do dano na estrutura B. Retirado de [1] .....	28
Figura 3.15 – FRFs para os Casos B.1, B.2, B.3, B.6 e B.8 .....	30
Figura 3.16 – FRFs para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.8 .....	30
Figura 3.17 – Representação da estrutura C .....	31
Figura 3.18 – FRFs da Estrutura C .....	32
Figura 4.1 – FRF_MS para 1 Localização.....	37
Figura 4.2 – FRF_MS para 2 Localização.....	37
Figura 4.3 – FRF_MS para Dimensões Diferentes .....	38
Figura 4.4 – FRF_MS para Ruído .....	38
Figura 4.5 – FRF_MS para os Casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8 .....	39
Figura 4.6 – FRF_MS para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.7 .....	39
Figura 4.7 – FRF_MS para a Estrutura C .....	40
Figura 4.8 – FRF_MSS para 1 Localização .....	42
Figura 4.9 – FRF_MSS para 2 Localização .....	42
Figura 4.10 – FRF_MSS para Dimensões Diferentes.....	43
Figura 4.11 – FRF_MSS para Ruído.....	43
Figura 4.12 – FRF_MSS para os Casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8 .....	44
Figura 4.13 – FRF_MSS para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.7 .....	44
Figura 4.14 – FRF_MSS para a estrutura C .....	45

---

Figura 4.15 – FRF_MSC para 1 Localização .....	47
Figura 4.16 – FRF_MSC para 2 Localização .....	47
Figura 4.17 – FRF_MSC para Dimensões Diferentes.....	48
Figura 4.18 – FRF_MSC para Ruído .....	48
Figura 4.19 – FRF_MSC para os Casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8.....	49
Figura 4.20 – FRF_MSC para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.7 .....	49
Figura 4.21 – FRF_MSC para a estrutura C .....	50
Figura 4.22 – FRF_MSCS para 1 Localização.....	52
Figura 4.23 – FRF_MSCS para 2 Localização.....	52
Figura 4.24 – FRF_MSC para Dimensões Diferentes.....	53
Figura 4.25 – FRF_MSC para Ruído .....	53
Figura 4.26 – FRF_MSC para os Casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8.....	54
Figura 4.27 – FRF_MSCS para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.7 .....	54
Figura 4.28 – FRF_MSCS para a estrutura C.....	55
Figura 4.29 – FRF_MLOG para 1 Localização .....	57
Figura 4.30 – FRF_MLOG para 2 Localização .....	57
Figura 4.31 – FRF_MLOG para Dimensões Diferentes .....	57
Figura 4.32 – FRF_MLOG para Dimensões Diferentes .....	58
Figura 4.33 – FRF_MLOG para os Casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8 .....	59
Figura 4.34 – FRF_MLOG para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.7.....	59
Figura 4.35 – FRF_MLOG para a estrutura C.....	60
Figura 4.36 – ERC: 1 Localização – Caso A.1.....	69
Figura 4.37 – ERC: 1 Localização – Caso A.2.....	69
Figura 4.38 – ERC: 1 Localização – Caso A.3.....	70
Figura 4.39 – ERC: 1 Localização – Caso A.4.....	70
Figura 4.40 – ERC: 2 Localização – Caso A.5.....	71
Figura 4.41 – ERC: 2 Localização – Caso A.6.....	71
Figura 4.42 – ERC: Dimensões Diferentes – Caso A.7 .....	72
Figura 4.43 – ERC: Dimensões Diferentes – Caso A.8 .....	72
Figura 4.44 – ERC: Dimensões Diferentes – Caso A.9 .....	72
Figura 4.45 – ERC: Dimensões Diferentes – Caso A.10 .....	73
Figura 4.46 – ERC: Dimensões Diferentes – Caso A.11 .....	73
Figura 4.47 – ERC: Ruído – Caso A.12 .....	73
Figura 4.48 – ERC: Ruído – Caso A.13 .....	74
Figura 4.49 – ERC: Ruído – Caso A.14 .....	74
Figura 4.50 – ERC: Ruído – Caso A.15 .....	75
Figura 4.51 – ERC: Caso B.1.....	76
Figura 4.52 – ERC: Caso B.2.....	76
Figura 4.53 – ERC: Caso B.3.....	77
Figura 4.54 – ERC: Caso B.4.....	77

---

Figura 4.55 – ERC: Caso B.5.....	77
Figura 4.56 – ERC: Caso B.6.....	78
Figura 4.57 – ERC: Caso B.7.....	78
Figura 4.58 – ERC: Caso B.8.....	78
Figura 4.59 – ERC: Sistema de Molas e Massas.....	80
Figura 5.1 – Figura retirada de [13] onde estão representados para a mesma estrutura três extensões de dano diferentes .....	87
Figura 5.2 – Fissura num troço de viga.....	88
Figura 5.3 – Viga com 11 elementos finitos .....	89
Figura 5.4 – Viga com dano compreendido no elemento 5 .....	89
Figura 5.5 – Esquema referente a refinação de malha no elemento 5 com dano compreendido no novo elemento 4.....	89
Figura 5.6 – Refinação de malha no elemento 4 com dano compreendido em dois elementos .....	89
Figura 5.7 – Figura retirada de [1] onde estão representados os diversos caso com profundidades diferentes.....	90
Figura 5.8 – Diferenças de Rigidez aplicado no caso A.2 .....	92
Figura 5.9 – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso A.4 .....	93
Figura 5.10 – Diferenças entre FRFs aplicado no caso A.2 .....	93
Figura 5.11 – Diferenças entre FRFs aplicado no caso A.4 .....	94
Figura 5.12 – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso B.1 .....	95
Figura 5.13 – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso B.2 .....	95
Figura 5.14 – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso B.6 .....	96
Figura 5.15 – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso B.7 .....	96
Figura 5.16 – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso B.8 .....	96
Figura 5.17 – Diferenças entre FRFs aplicado no caso B.1 .....	97
Figura 5.18 – Diferenças entre FRFs aplicado no caso B.2 .....	97
Figura 5.19 – Diferenças entre FRFs aplicado no caso B.6 .....	97
Figura 5.20 – Diferenças entre FRFs aplicado no caso B.7 .....	98
Figura 5.21 – Diferenças entre FRFs aplicado no caso B.8 .....	98
Figura 5.22 – Diferenças entre Rigidez aplicado à estrutura C.....	99
Figura 5.23 – Diferenças entre FRFs aplicado à estrutura C.....	100
Figura 6.1 – Método Localização e Quantificação aplicado ao Caso B.2.....	104
Figura 6.2 – Método Localização e Quantificação aplicado ao Caso B.3.....	104
Figura 6.3 – Método Localização e Quantificação aplicado ao Caso B.4.....	105
Figura 6.4 – Método Localização e Quantificação aplicado ao Caso B.6.....	105
Figura 6.5 – Método Localização e Quantificação aplicado ao Caso B.8.....	105



---

# Lista de Tabelas

---

Tabela 3.1 – Parâmetros da estrutura A e dados aplicados no estudo .....	23
Tabela 3.2 – Casos de estudo para a estrutura A.....	24
Tabela 3.3 – Parâmetros da viga e dados aplicados no estudo .....	28
Tabela 3.4 – Casos de estudo para a estrutura B.....	29
Tabela 4.1 – Resultados da Implementação.....	82
Tabela 4.2 – Resultados da Implementação.....	84

---

---

# Lista de Abreviaturas

---

FRF	Função de Resposta em Frequência
GDL	Grau de Liberdade
MS	Método dos modos
FRF_MS	Método MS aplicado às FRFs
MSS	Método do declive dos modos
FRF_MSS	Método MSS aplicado às FRFs
MSC	Método da Curvatura
FRF_MSC	Método MSC aplicado às FRFs
MSCS	Método do Declive da Curvatura
FRF_MSCS	Método MSCS aplicado às FRFs
FRF_MLOG	Método da Diferenças Logarítmicas
ERC	Erro na Relação Constitutiva
FEM	Finite Element Method
MEF	Método dos Elementos Finitos



---

# Nomenclatura

---

$i, j, k$	Índices de coordenadas espaciais
$[H_{ij}]$	Matriz Receptância
$[A_{ij}]$	Matriz Saída
$[B_{ij}]$	Matriz entrada
$[M]$	Matriz de Massa
$[C]$	Matriz de Amortecimento
$[K]$	Matriz de Rigidez
$\{x(t)\}$	Vector de deslocamento no domínio do tempo
$\{\dot{x}(t)\}$	Vector de velocidade no domínio do tempo
$\{\ddot{x}(t)\}$	Vector de aceleração no domínio do tempo
$\{f(t)\}$	Vector de forças externas
$\Omega$	Velocidade angular
$T$	Tempo
$P$	GDLs primários
$S$	GDLs secundários
$T_S, T_D$	Matriz de Transformação
$K_R, M_R$	Matrizes Reduzidas
$I$	Matriz de Identidade
$\{d_e\}$	Vector de deslocamentos
$[K_e]$	Matriz elementar de rigidez
$[M_e]$	Matriz elementar de Massa
$\Theta$	Rotação
$x_I, y_I$	Deslocamentos
$I_x, I_y$	2º Momentos de área
$\{\emptyset\}$	Vector modal

---

$\underline{u}$	Campo de deslocamentos
$\underline{\sigma}$	Tensor das tensões
$\underline{\Gamma}$	Campo de Inercias
$\eta_{\omega}^2$	ERC
$e_{\omega}^2$	ERC Modificado
$\tilde{H}_{jk}$	FRFs Experimentais
$H_U, H_V, H_W$	FRFs
$\mu$	Profundidade adimensional
$e_{ij_e}^2$	Erro para o Método de Localização e Quantificação

---

# 1. Introdução

---

O estudo de Identificação de dano onde o trabalho é baseado, remonta aos anos 70 onde foi introduzido um método de detecção de dano em estruturas com a análise da resposta da estrutural. A partir desse momento até aos dias de hoje surgiram diversos estudos sobre o mesmo tema, sendo cada um mais profundo do que o anterior ou apenas a proposta de um novo caminho para atingir o mesmo objectivo.

A área das Vibrações Mecânicas tornou-se um recurso apelativo na Identificação de Dano pois permite atingir os objectivos requeridos sem afectar a integridade estrutural do objecto em estudo.

As Vibrações Mecânicas são uma área diversa, pois divide-se em várias subáreas tais como frequências naturais, modos de vibração, funções de resposta em frequência (FRF), etc. Muitos destes subtemas servem como base para vários estudos de Identificação de dano, onde alguns, mesmo apresentando um bom potencial, ainda não receberam a devida atenção.

## 1.1. Motivação

No universo da engenharia existe uma constante necessidade para tornar qualquer sistema mais eficiente e, para tal, é geralmente associado a optimização do mesmo. Para esta optimização ser eficiente é favorável que exista uma redução nos erros de processo.

Este esquema também se aplica na Identificação de Dano, e por sua vez às Vibrações Mecânicas, onde nesta área a base do estudo envolve a análise da resposta de um sistema quando este é solicitado a uma força constante, variável ou temporária. A diversificação deste tema consiste nos diferentes métodos criados para concretizar a análise pretendida, sendo uns mais directos que outros.

Neste caso em específico, o trabalho é elaborado em torno das FRFs, pois estas reproduzem directamente a resposta do sistema em cada frequência. Ao retirar dados significantes do sistema através da análise destas funções, consegue-se contornar os erros associados à identificação modal e assim obter resultados mais fidedignos para os objectivos desejados. O presente trabalho foi também motivado e desenvolvido com base nos estudos promissores presentes no artigo [1] e na dissertação de doutoramento [2].

---

## 1.2. Objectivos

Na área da identificação de dano é costume realizar estudos práticos sobre métodos previamente concebidos para determinar a sua capacidade de adaptação nos dados e casos reais. Neste trabalho, seguindo o modelo regular, tem como objectivo reunir diversos Métodos de Identificação de dano, com especialização no campo da localização, e por consequente estudar individualmente cada método, e compreender qual será o mais indicado para o estudo de Localização de dano.

Outro objectivo, e como contributo para a comunidade científica, pretende-se desenvolver um método adaptado ao campo da quantificação de dano, onde será proposto como uma técnica posterior à localização de dano.

Num segundo plano é pretendido desenvolver através do Método dos Elementos Finitos (MEF) três estruturas numéricas, como forma de evitar o uso de dados experimentais na implementação dos métodos de localização e quantificação. Na tentativa de aproximar as estruturas numéricas às estruturas reais, a modelação foi desenvolvida com o apoio do artigo[1].

No contexto global, este trabalho tem como propósito reforçar que, nas vibrações mecânicas, as FRFs apresentam um igual ou maior potencial nos métodos de localização e quantificação de dano.

## 1.3. Contribuições

No desenvolver deste trabalho foram surgindo alguns aspectos inovadores planeados e não planeados, que se podem descrever como contribuições para a comunidade científica.

Estas contribuições estão inseridas nas diferentes áreas deste estudo, tendo sido pensadas com o propósito de otimizar e melhorar algumas aproximações até à data feitas.

- Nos MEF nos estudos que utilizam vigas 2D para a obtenção de resultados, é comum serem desenvolvidos com apenas 2 graus de liberdade em cada nó. No presente trabalho as estruturas utilizadas foram desenvolvidas com 4 graus de liberdade em cada nó.
- A modelação de uma viga com elemento danificado: Nesta secção foi desenvolvido com recurso ao MEF uma viga danificada dividida em vários elementos de iguais dimensões. A adição de dano foi feita através da inclusão de um ou mais elementos danificados nas localizações desejadas. Estes elementos danificados, contrariamente aos estudos feitos nesta área, são de

---

dimensões reduzidas correspondentes ao dano que se pretende modelar. Esta diferente metodologia foi concebida de modo a evitar o ajuste da malha de elementos finitos à largura do elemento danificado, provocando assim um elevado número de elementos.

- Simulação de resultados experimentais: Este contributo advém da necessidade de adquirir resultados teóricos e experimentais para serem utilizados posteriormente nos métodos de localização e quantificação. Como as estruturas analisadas são modeladas numericamente foram desenvolvidas algumas técnicas para a simulação de resultados experimentais. Estas técnicas consistem na adaptação e transformação dos dados simulados numéricos em resultados simulados experimentais.
- Erro na Relação Constitutiva (ERC): Este método apresenta alguma complexidade na sua concepção, e em diversas situações não é utilizado embora seja portador de grandes capacidades para a localização de dano estrutural. Este erro foi um dos métodos utilizados na formulação deste trabalho como forma de estudar técnicas distintas e entender qual a mais promissora.
- Método proposto para localização e quantificação de dano: No último capítulo é proposto um método desenvolvido para a quantificação de dano, onde através de uma pequena modificação é possível adapta-lo para localizar o elemento danificado e quantificar a extensão do seu dano.

## 1.4. Estrutura da dissertação

Esta dissertação encontra-se organizada em 7 capítulos onde se descreve todo o trabalho realizado. Nos pontos que se seguem é apresentado um breve sumário do conteúdo de cada capítulo:

- Capítulo 1, **Introdução**, neste capítulo é feita uma introdução ao tema, onde também são explicados a motivação, os objetivos e contributos da dissertação;
- Capítulo 2, **Conceitos Fundamentais**, neste capítulo são introduzidos alguns conceitos e noções importantes para o desenvolvimento deste trabalho;
- Capítulo 3, **Modelação e Simulação**, neste capítulo são expostos os conceitos teóricos que serviram de base na modelação numérica das 3 estruturas

---

desenvolvidas. É feito também uma descrição detalhada de cada uma das estruturas com a sua correspondente simulação;

- Capítulo 4, **Localização**, neste capítulo são implementados os métodos de Localização selecionados nas estruturas apresentadas no Capítulo 3. A partir desta implementação é eleito o método com características mais promissoras;
- Capítulo 5, **Quantificação**, neste capítulo são propostas duas metodologias para determinar a extensão do dano. Estas duas técnicas focam-se em quantificar a Largura e a Profundidade do dano quando este adquire a forma de uma fenda.
- Capítulo 6, **Método Localização e Quantificação**, este capítulo foi adicionado devido à descoberta de um método com capacidades evidentes para Localizar e Quantificar dano em simultâneo.
- Capítulo 7, **Conclusão**, neste último capítulo são evidenciadas as conclusões retiradas do trabalho da presente dissertação e apresentadas algumas propostas para trabalhos futuros sobre o tema desenvolvido.

---

## 2. Conceitos fundamentais

---

A avaliação do estado de condições de estruturas é um dos campos de estudo da dinâmica estrutural. Nesta área são desenvolvidos métodos de inspecção que garantem uma contínua demonstração de estabilidade e segurança nas estruturas previamente erguidas.

No tempo de vida útil de uma estrutura, a sua integridade física altera-se devido ao somatório de acções externas. Estas acções podem ser compreendidas como carregamentos provenientes do trabalho exercido, impactos acidentais, fenómenos ambientais, a consequente fadiga e ataques químicos. Estes factores, sendo inevitáveis, irão produzir na estrutura uma forma de deterioração mais conhecida como dano.

O dano pode surgir de várias geometrias e extensões, tal como fissuras internas e externas, furos, entalhes, acumulação de material, entre outros. Estes tipos de dano são compreendidos na teoria como a alteração do comportamento dinâmico da estrutura, mais concretamente, na massa, na rigidez e no amortecimento.

Embora existam técnicas que recorrem a ensaios não destrutivos, que visam a detectar o dano localmente, tal como, inspecção visual, líquidos penetrantes, raio X, ultra-sons e ressonância magnética, estas apresentam algumas limitações tanto nos custos elevados, como serem muito vulneráveis ao erro humano.

Dentro de todos os tipos de dano, o mais preocupante são os difíceis de identificar, como exemplo, microfissuras ou fissuras internas. No entanto, tem vindo a ser estudado uma área da Engenharia que permite solucionar vários problemas e limitações apresentando técnicas que identificam dano. Nesta área apenas com a resposta da estrutura consegue-se retirar informações relevantes para análise da integridade dinâmica da estrutura. Esta área designa-se como Vibrações Mecânicas e nos últimos 50 anos sofreu grandes avanços a nível conceptuais e progressivos.

---

## 2.1. Identificação de dano

A identificação de dano recorrendo a vibrações mecânicas, é conseguida através da avaliação dos vários comportamentos dinâmicos de uma estrutura. Estes comportamentos dividem-se em diferentes áreas que possibilitam o posterior estudo da integridade estrutural.

Este estudo recorre a diversos métodos que são caracterizados quanto à sua capacidade para os vários graus de identificação de dano.

O primeiro grau é a **Detecção**, ou seja, é revelado que está presente dano numa dada estrutura.

O segundo grau é a **Localização** e, como o nome indica, é feita a localização de dano na estrutura.

A **Quantificação** é o terceiro grau, e é avaliada a extensão de dano e será possível notar se o presente dano põe em causa a integridade estrutural.

No quarto grau estuda-se o tipo de dano, ou seja, obtém-se **A Geometria** do mesmo.

Atendendo aos graus anteriores, é possível determinar **A Causa** do aparecimento do dano, sendo este o quinto grau.

Concluindo assim, com o sexto grau, a determinação do **Tempo de Vida** útil da estrutura.

## 2.2. Vibrações Mecânicas

Como anteriormente referido, o estudo das vibrações mecânicas estuda e analisa a resposta de um sistema mecânico quando solicitado por alguma força dinâmica ou em vibração livre (não forçado). Tal como o nome indica, as características vibratórias (comportamento dinâmico) de cada sistema são a base utilizada na sua análise, e a consequente interpretação, tem capacidade para estimar e definir diversos atributos constituintes da estrutura.

Estes atributos definem-se tipicamente como as propriedades materiais e físicas do sistema, onde através de algumas medições efectuadas ao longo do tempo é possível estimar se as propriedades foram alteradas. A partir desta metodologia, surgiram algumas vertentes da análise estrutural, onde se situa a identificação de dano.

A análise estrutural é conseguida através das subáreas que nasceram no âmbito das vibrações mecânicas tais como a matriz flexibilidade, as FRFs, as transmissibilidades, as sensibilidades, os modos de vibração e as frequências naturais.

---

Neste trabalho abordar-se-á o tema das FRFs mas numa nota superficial ir-se-á rever alguns métodos baseados nos Modos de Vibração (*Mode Shape, MS*) que serviram de introdução aos métodos baseados nas FRFs.

### 2.2.1. Noção dos Modos de Vibração

O Modo de Vibração é a forma característica que uma estrutura adquire quando vibra numa frequência igual a uma das suas frequências naturais. Esta característica, tal como a suas frequências naturais, altera-se sempre que alguma das propriedades da estrutura muda. Este fenómeno é a base de estudo para a identificação de dano baseado nos modos de vibração.

### 2.2.2. Funções de Resposta em Frequência

As FRFs são uma representação da relação *output/input* de um sistema, ou seja as FRFs são originadas através da correspondência entre a resposta da estrutura a uma dada força de excitação em função da frequência.

As FRFs são recolhidas de uma estrutura com recurso a um acelerómetro e a um martelo instrumentado posicionados em dois pontos da estrutura. Cada FRF está associada a uma combinação de posições, ou seja é retratada como  $H_{jk}(\omega)$  onde  $k$  é a posição do martelo (*input*) e  $j$  a posição do acelerómetro (*output*), e matematicamente  $H_{jk}(\omega) = \frac{A_{jk}(\omega)}{B_{jk}(\omega)}$  onde  $A_{jk}(\omega)$  corresponde ao *output* e  $B_{jk}(\omega)$  ao *input*.

Neste caso, como [1] refere, a equação de movimento de uma estrutura pode ser escrita como:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f_d(t)\} \quad (2.0)$$

$\ddot{x}(t)$  é a aceleração,  $\dot{x}(t)$  é a velocidade,  $x(t)$  é o deslocamento e  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  são as matrizes de Massa, Amortecimento e Rigidez da estrutura, respectivamente,  $\{f_d(t)\}$  representa o vector de forças externas.

Na situação de simulação recorre-se à aproximação de Rayleigh na qual se considera a que matriz de amortecimento pode ser proporcional às matrizes de Massa e Rigidez, da seguinte forma:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2.1)$$

$\alpha$  e  $\beta$  são duas constantes reais de amortecimento.

---

Continuando a simulação, uma excitação harmônica pode ser descrita através de uma vibração forçada com frequência  $\omega$  e amplitude  $F$ . Esta representação será igual ao vector de forças externas  $F_d(t)$ .

$$F_d(t) = F e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

Analogamente, a resposta do sistema para cada frequência será igual mas com o vector de deslocamentos.

$$X(t) = X e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

Posto isto, e fazendo as devidas derivadas e substituições, a equação de movimento 2.0 irá ter o seguinte aspecto.

$$[-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]]\{X\} = \{F\} \quad (2.4)$$

A matriz de rigidez dinâmica é  $Z(\omega) = [-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]]$ , então pode-se escrever:

$$Z(\omega)\{X\} = \{F\} \quad (2.5)$$

A Matriz Receptância  $H(\omega)$  é igual ao inverso da rigidez dinâmica ( $Z(\omega)^{-1}$ ) ou seja pode se escrever a equação 2.6.

$$H(\omega)\{F\} = \{X\} \quad (2.6)$$

Como as FRFs são obtidas através de a um ponto de medição e outro ponto da força aplicada, então representa-se da seguinte forma.

$$H_{j,k}(\omega) = \frac{X_j(\omega)}{F_k(\omega)} \quad (2.7)$$

---

## 2.3. Conceito de Incompletude

A incompletude surge no seguimento da obtenção de dados experimentais pois comparativamente aos resultados obtidos com recurso ao MEF, estes contêm informação relativa às propriedades dinâmicas da estrutura num menor número de GDL. Devido a esta limitação existe a necessidade de adaptar e compatibilizar em termos de dimensão os dados teóricos e experimentais.

Este problema é entendido como se demonstra nas figuras 2.1 e 2.2 onde estão numerados os graus de liberdade referentes a cada nó da estrutura teórica (fig. 2.1) e da estrutura experimental (fig. 2.2). A semelhança entre as duas estruturas são os graus de liberdade comuns em ambas (2, 6, 10, 14...).

Modelo Teórico

1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50
3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52

**Figura 2.1** – Graus de Liberdade no Modelo Teórico

Modelo Experimental

2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50

**Figura 2.2** – Graus de Liberdade obtidos no Modelo Experimental

A origem deste problema é explicada pela incapacidade da prática experimental na medição de resultados, onde é fisicamente explicada pelo avultado número de pontos requeridos na medição da estrutura para igualar aos resultados teóricos, e também pela falta de instrumentação necessária para concretizar as medições completas.

Posto isto, como é necessário ajustar os modelos teóricos aos modelos experimentais, recorre-se a técnicas já conhecidas na comunidade científica tais como os Modelos Reduzidos.

---

## 2.4. Conceito de Modelos Reduzidos

A necessidade de obter modelos reduzidos surge devido à incompletude dos dados experimentais. Esta carência é potenciada pela incompleta informação obtida nos modelos experimentais, como referido na secção anterior.

Esta transformação começa por ser feita no ajuste dos graus de liberdade de um modelo ao outro, ou seja como no modelo teórico são conhecidos todos os graus de liberdade, é necessário reduzi-los para igualar aos do modelo experimental.

Segundo a tese de doutoramento [3], dada a equação de equilíbrio (2.0), mas desprezando os efeitos do amortecimento, pode-se escrever a equação (2.8) onde se reescreve (2.0) numa forma particionada tendo em conta os graus de liberdade primários (p) e secundários (s).

$$\begin{bmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{sp} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_p \\ \ddot{X}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_p \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Onde os graus de liberdades que se pretendem ajustar do modelo teórico igualando ao modelo experimental, são os GDLs primários (p) e os restantes são os GDLs secundários (s), notando que só poderão existir forças aplicadas em p.

Os modelos reduzidos serão compostos pelas matrizes reduzidas dos modelos originais, ou seja existem algumas técnicas de redução que transforma as matrizes originais nas matrizes reduzidas.

### Redução estática

Esta redução foi introduzida por [4], desenvolvida para propriedades modais baixas pois despreza os termos referentes à inercia da equação (2.8). Deste modo obtém-se a equação (2.9).

$$K_{sp}X_p + K_{ss}X_s = 0 \quad (=) \quad X_s = [-K_{ss}^{-1}K_{sp}]X_p \quad (2.9)$$

Onde se pode desenvolver a equação (2.10).

$$\begin{Bmatrix} X_p \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1}K_{sp} \end{bmatrix} X_p \quad (2.10)$$

---

Deste modo, a matriz de transformação estática ( $T_s$ ) é dada pela equação 2.11.

$$T_s = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1}K_{sp} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Analogamente à equação (2.10) as coordenadas do modelo espacial (secundárias) relacionam-se com as coordenadas primárias através da equação (2.12).

$$\begin{Bmatrix} X_p \\ X_s \end{Bmatrix} = T_s \{X_p\} \quad (2.12)$$

Consequente mente as matrizes reduzidas do modelo serão obtidas pelas equações (2.13) e (2.14).

$$K_R = T_s^T K T_s \quad (2.13)$$

$$M_R = T_s^T M T_s \quad (2.14)$$

## Redução dinâmica

Segundo [3], no âmbito de incluir os efeitos da inercia nos termos da redução, numa dada frequência  $\omega$ , a matriz de transformação da redução dinâmica é dada pela equação (2.15).

$$T_D = \begin{bmatrix} I \\ -(K_{ss} - \omega^2 M_{ss})^{-1} (K_{sp} - \omega^2 M_{sp}) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

E consequentemente a matrizes reduzidas são agora dadas pelas equações (2.16) e (2.17).

$$K_R = T_D^T K T_D \quad (2.16)$$

$$M_R = T_D^T M T_D \quad (2.17)$$

---

## 2.5. Epítome do Capítulo

Neste capítulo foram apresentadas algumas noções importantes para o desenvolvimento do trabalho. Estas noções, sendo os alicerces que sustentam as metodologias utilizadas, indicam conceitos referentes a diferentes teorias empregadas.

Foi introduzido o conceito de FRF, fundamental para o entendimento do que será realizado nos restantes capítulos. As FRFs são compreendidas no contexto de dinâmica estrutural como sendo os dados mais directos provenientes da resposta estrutural pois utilizam directamente o *input* e o *output* medidos experimentalmente.

O conceito de incompletude, utilizado no capítulo 4, foi introduzido como forma de compreender a diferença entre os dados teóricos e os dados experimentais. O entendimento desta diferença é importante no âmbito de simular, através dos modelos teóricos, dados com as características dos dados experimentais.

O conceito de modelos reduzidos, igualmente utilizado no capítulo 4, introduz uma técnica para lidar com a incompletude. Através desta técnica, é possível transformar os modelos teóricos nos modelos experimentais.

---

## 3. Modelação e Simulação

---

Este capítulo foi concebido para demonstrar a fundamentação teórica que sustenta a modelação numérica desenvolvida para posteriormente aplicar os métodos de localização e quantificação.

Nesta secção vão ser descritas as três estruturas modeladas explicando a influência que a presença de dano tem sobre as mesmas. Demonstrar-se-á ainda o modelo de dano utilizado e a teoria base usada para a sua modelação e integração nas estruturas. Este Capítulo foi concebido com recurso às referencias, [1], [5]–[11].

### 3.1. Método dos Elementos Finitos aplicados a um Elemento de Viga

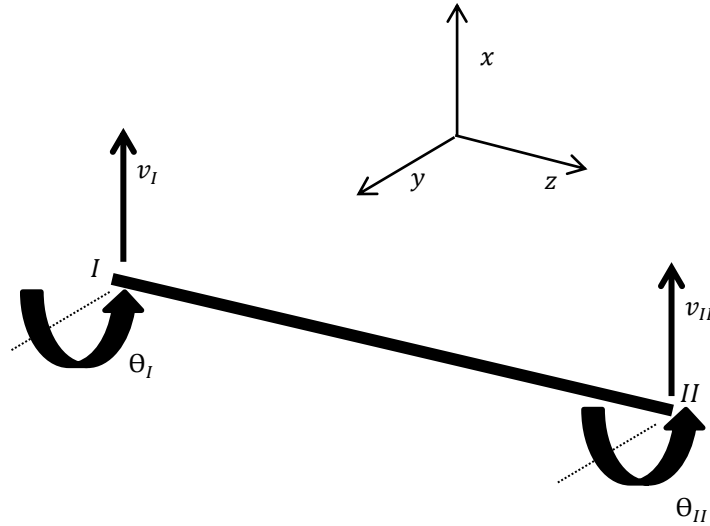
O Método dos Elementos Finitos (MEF) permite a criação de um modelo que aproxima o comportamento da estrutura em estudo, sendo que, a qualidade da aproximação da modelação numérica está dependente do grau de discretização do modelo. Assim, se o modelo numérico deseja ser mais aproximado à estrutura real, então o número de elementos terá que ser maior (Modelo mais discretizado).

Numa estrutura complexa caracterizada por uma equação complicada, é possível recorrendo ao MEF dividir em elementos com equações polinomiais simples. Deste modo, cada elemento é simulado através de soluções aproximadas tais como o método de *Rayleigh/Ritz*.

Posto isto, o MEF apresenta características bastante interessantes para modelar numericamente qualquer tipo de estruturas, independentemente do seu nível de complexidade, com o erro associado à aproximação desejada dependente do número de elementos utilizado e grau de simplificação do modelo.

Nas modelações que serão demonstradas no restante capítulo, recorre-se à teoria de vigas de Bernoulli-Euler.

Um elemento de viga bidimensional genérico tem GDL como os representados na figura, apresentado um vector de deslocamentos ( $d_e$ ) associado às rotações e translações em cada nó do elemento. (fig. 3.1)



**Figura 3.1** – Esquema de um elemento de viga com dois graus de liberdade

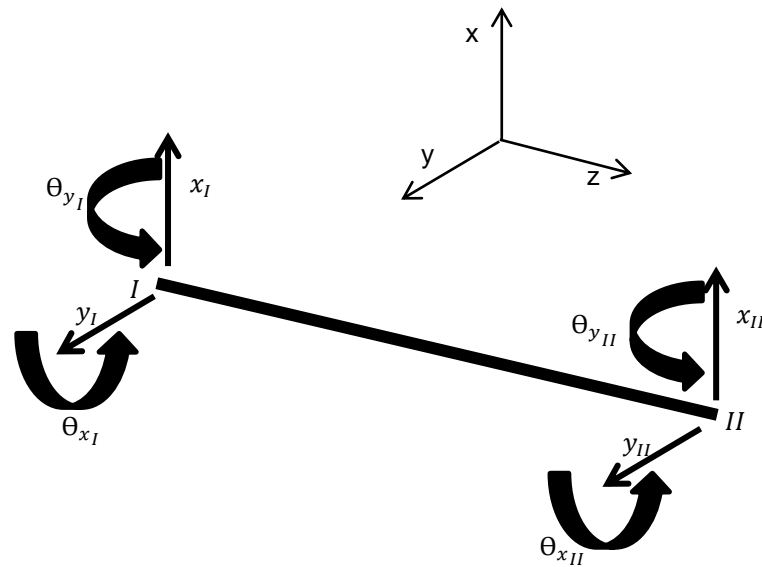
$$d_e = \begin{Bmatrix} v_I \\ \theta_I \\ v_{II} \\ \theta_{II} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Como cada nó tem 2 GDL, e através da Teoria de Bernoulli-Euler o elemento de viga da figura 3.1 irá ter as seguintes Matrizes de Rigidez ( $K_e$ ) e Massa ( $M_e$ ),[5], para cada elemento finito.

$$K_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$M_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Se considerarmos o caso de um elemento de viga tridimensional, ou seja com translações e rotações aplicadas nos eixos xx e yy, cada nó do elemento da figura 3.2 tem 4 Graus de Liberdade (GDL), sendo os graus de liberdade ligados aos deslocamentos axiais nulos. (fig. 3.2).



**Figura 3.2** – Esquema de um elemento de viga com quatro graus de liberdade

Posto isto, o vector de deslocamentos ira ter a seguinte configuração.

$$d_e = \left\{ \begin{array}{l} y_I \\ x_I \\ \theta_{x_I} \\ \theta_{y_I} \\ y_{II} \\ x_{II} \\ \theta_{x_{II}} \\ \theta_{y_{II}} \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

Com esta configuração dos vectores de deslocamentos as matrizes de Rigidez e Massa passam a ter o enquadramento dado pelas equações 3.6 e 3.7.

$$K_e = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} 12I_x & 0 & 0 & 6I_xL & -12I_x & 0 & 0 & 6I_xL \\ 0 & 12I_y & 6I_yL & 0 & 0 & -12I_y & 6I_yL & 0 \\ 0 & 6I_yL & 4I_yL^2 & 0 & 0 & -6I_yL & 2I_yL^2 & 0 \\ 6I_xL & 0 & 0 & 4I_xL^2 & -6I_xL & 0 & 0 & 2I_xL^2 \\ -12I_x & 0 & 0 & -6I_xL & 12I_x & 0 & 0 & -6I_xL \\ 0 & -12I_y & -6I_yL & 0 & 0 & 12I_y & -6I_yL & 0 \\ 0 & 6I_yL & 2I_yL^2 & 0 & 0 & -6I_yL & 4I_yL^2 & 0 \\ 6I_xL & 0 & 0 & 2I_xL^2 & -6I_xL & 0 & 0 & 4I_xL^2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$M_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22L & 54 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ 22L & 0 & 0 & 4L^2 & 13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & 13L & 156 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ -13L & 0 & 0 & -3L^2 & -22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Para finalizar o modelo numérico procede-se à globalização de todos os elementos finitos, este processo designa-se por assemblagem.



### 3.1.1. Simulação de dano

#### Modelação do elemento danificado

A presença de dano numa estrutura pode ser representado de varias formas, sendo estas dependentes to tipo e forma que este adquiere. Deste modo, nas vigas estudadas pretende-se acrescentar dano sob a forma de um elemento danificado.

O modelo de dano utilizado exhibe-se como a remoção de material sob forma de um entalhe. (fig. 3.3)

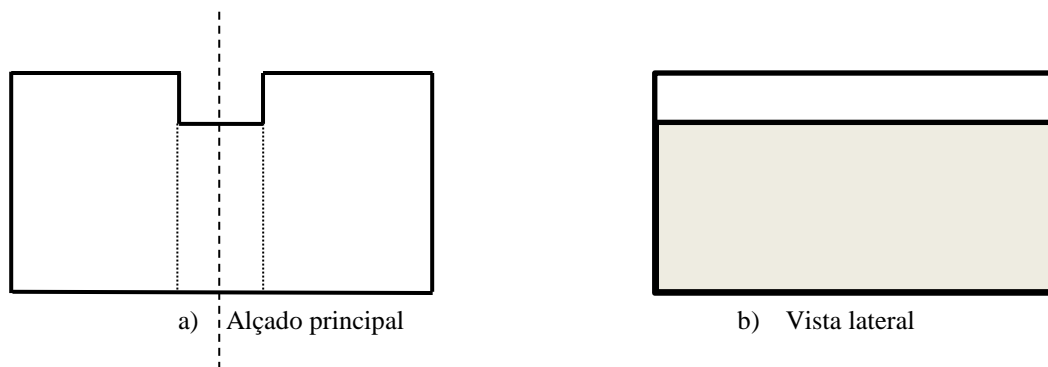


Figura 3.3 – Troço de viga com elemento danificado

Como se pode verificar na figura 3.3, a falta de material na estrutura vai originar uma variação do 2º momento de área na secção transversal da zona danificada.

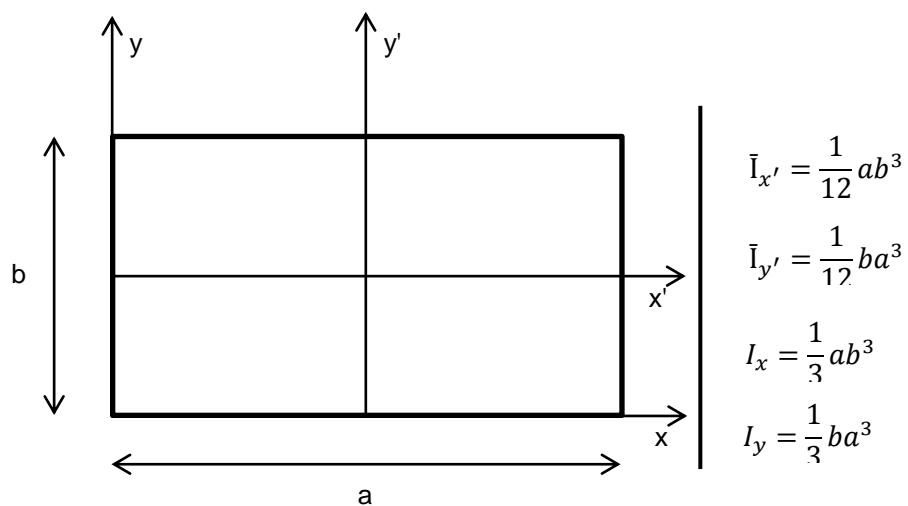
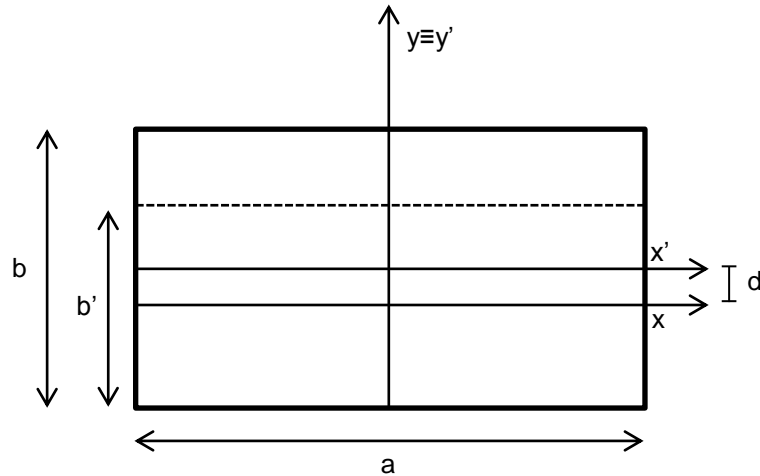


Figura 3.4 – 2º Momentos de área de uma secção retangular

O momento de área do elemento danificado vai ter de ser aplicado no referencial que passa pelo centro de massa da viga não danificada, eixo  $x'$  na fig. 3.5. Desta forma teremos que aplicar o teorema dos eixos paralelos pois o centroíde deste elemento não coincide com o centroíde dos restantes elementos.



**Figura 3.5** – Secção transversal do elemento danificado com eixos relativos a todos os elementos

Com a informação retirada da figura 3.4 e com a figura 3.5, procede-se ao cálculo do 2º momento de área para a zona danificada através do teorema dos eixos paralelos.

Teorema dos eixos paralelos

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad (3.10)$$

$$a' = a \quad (3.11)$$

$$I_y = \bar{I}_y + a' \times b' \times \left(\frac{b - b'}{2}\right)^2 \quad (3.12)$$

$$I_x = \bar{I}_x \quad (3.13)$$

Com

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} \times a' \times b'^3 \text{ e } \bar{I}_x = \frac{1}{12} \times b' \times a'^3$$

Os momentos de área do elemento danificado serão

$$I_{yd} = \frac{1}{12} \times a' \times b'^3 + a' \times b' \times \left(\frac{b - b'}{2}\right)^2 \quad (3.14)$$





---

## 3.2. Simulação de resultados com características experimentais

Na sequência dos conceitos sobre a incompletude apresentados no segundo capítulo, os dados simulados obtidos pela metodologia apresentada anteriormente têm de ser adaptados para melhor aproximação a resultados experimentais reais.

Nestes casos de viga, a incompletude vai ser resultado de alguns GDL serem desconhecidos nos dados experimentais, no entanto através do modelo numérico (com informação completa) ir-se-á simular uma situação de dados experimentais nos dados teóricos através do conceito dos modelos reduzidos.

A situação de incompletude irá ser introduzida em todas as estruturas e nas implementações de cada método. Esta incompletude é caracterizada por só se conhecerem os graus de liberdade correspondentes aos deslocamentos no eixo dos xx. No caso real esta situação ocorre devido ao facto de só ser possível a medição de alguns graus nalguns pontos da estrutura.

## 3.3. Estruturas Modeladas

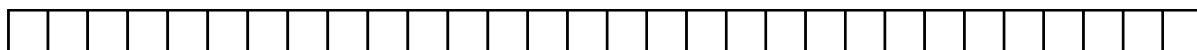
Após compreendidos os conceitos teóricos por detrás da concepção do MEF foram desenvolvidas três estruturas (A, B e C) com características diferentes entre si. Cada uma foi projectada com um objectivo de estender o leque de diversidade necessário nos dados de resposta estrutural utilizados nos capítulos seguintes.

### 3.3.1. Estrutura A – Viga livre-livre

A estrutura A foi desenvolvida no contexto de simular uma viga livre-livre que se encontra em laboratório, pois um dos objectivos é possibilitar a futura execução experimental com os conceitos propostos e desenvolvidos ao longo deste trabalho.

Esta estrutura foi modelada com recurso a 30 elementos finitos com 4 GDL por nó, onde foram inseridos elementos correspondentes aos elementos danificados.

No seguimento da simulação de resultados, foram aplicados nesta viga a situação de incompletude e o conceito de modelo reduzido, deste modo esta situação possibilita uma maior aproximação aos dados reais.



**Figura 3.6** – Representação da estrutura A sem dano com 30 elementos finitos

As características da viga estão representadas na tabela 3.1.

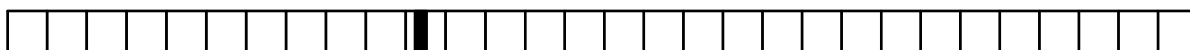
**Tabela 3.1** – Parâmetros da estrutura A e dados aplicados no estudo

Módulo de Young E (Pa)	$2 \times 10^{11}$
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	7.930
Coefficiente de Poisson $\nu$	0.3
Dimensões da secção transversal (m)	0.01x0.01
Comprimento da viga (m)	1
Coefficiente de amortecimento $\alpha$	0.66
Coefficiente de amortecimento $\beta$	$1.2 \times 10^{-6}$
Intervalo de Frequência (Hz)	0 a 1600

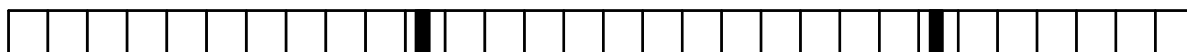
### Implementação de dano

O elemento danificado desta estrutura foi modelado consoante os conceitos apresentados anteriormente (Capítulo 3), ou seja é modelado com a forma de um entalhe retangular, correspondente a uma remoção de material. A espessura do elemento é igual à espessura do entalhe, pelo que este elemento terá dimensões bastante reduzidas em comparação aos restantes elementos.

A introdução de dano nesta viga irá ser feita através de duas situações. A primeira situação (1 localização) em que o elemento danificado se situa apenas numa localização e a segunda situação (2 localização) em que os elementos danificados se situam em localizações distintas.



**Figura 3.7** – Representação da estrutura A com dano numa localização (Elemento a preto)



**Figura 3.8** – Representação da estrutura A com dano em mais do que uma localização (Elementos a preto)

No âmbito de testar com maior confiança os métodos apresentados nos próximo capítulos, foram criados diversos casos para as duas situações de dano. Estes casos são diferentes entre si e em cada um pretende-se observar o comportamento dos métodos adquirirem, com por exemplo, a sensibilidade à diferença de profundidades ou à diferença de larguras de dano.

Nesta estrutura, pretende-se ajustar o número de elementos da viga danificada ao número de elementos da viga sem dano, assim através do modelo reduzido é possível transformar as vigas das figuras 3.7 e 3.8 (32 e 34 elementos) na viga da figura 3.6 (30 elementos) com os mesmos resultados das vigas originais. Esta situação permite idealizar a obtenção de dados num ambiente experimental.

Na tabela 3.2 estão ordenados os casos desenvolvidos para cada uma das situações, onde foi também introduzido uma situação de Ruído nos dados no âmbito de aproximação aos dados reais. Na tabela estão ainda definidas as características de cada caso quanto à profundidade do entalhe, à largura do entalhe e a localização do mesmo.

**Tabela 3.2– Casos de estudo para a estrutura A**

	<b>Casos</b>	<b>Localização do(s) Elemento(s) Danificado(s)</b> (% em relação ao Comprimento)	<b>Profundidade</b> (% em relação à espessura)	<b>Largura do Elemento</b> (m)
<b>1 Localização</b>	Caso A.1	32%	1%	$1 \times 10^{-3}$
	Caso A.2	32%	10%	$1 \times 10^{-3}$
	Caso A.3	53%	1%	$1 \times 10^{-3}$
	Caso A.4	53%	10%	$1 \times 10^{-3}$
<b>2 Localizações</b>	Caso A.5	32% e 72%	1%	$1 \times 10^{-3}$
	Caso A.6	53% e 72%	10%	$1 \times 10^{-3}$
<b>Dimensões Diferentes</b>	Caso A.7	32% e 72%	1% e 10%	$1 \times 10^{-3}$
	Caso A.8	53% e 72%	1% e 10%	$1 \times 10^{-3}$
	Caso A.9	32% e 72%	10% e 10%	$1 \times 10^{-3}$ e $5 \times 10^{-3}$
	Caso A.10	53% e 72%	10% e 10%	$1 \times 10^{-3}$ e $5 \times 10^{-3}$
	Caso A.11	32% e 72%	1% e 10%	$1 \times 10^{-3}$ e $5 \times 10^{-3}$
<b>Ruído (5%)</b>	Caso A.12	32%	1%	$1 \times 10^{-3}$
	Caso A.13	32%	10%	$1 \times 10^{-3}$
	Caso A.14	53%	1%	$1 \times 10^{-3}$
	Caso A.15	53%	10%	$1 \times 10^{-3}$

## Resultados dos modelos de Elementos Finitos

Com o objectivo de obter dados experimentais, as FRFs da Estrutura A, serão obtidas apenas nos 31 nós iniciais. Esta situação é possível através dos modelos reduzido e é importante porque numa situação experimental, os resultados da estrutura danificada serão obtidos através dos mesmos pontos que os resultados da estrutura sem dano.

Nas figuras 3.9, 3.10 e 3.11 estão representadas as FRFs directas no nó 1, de cada caso.

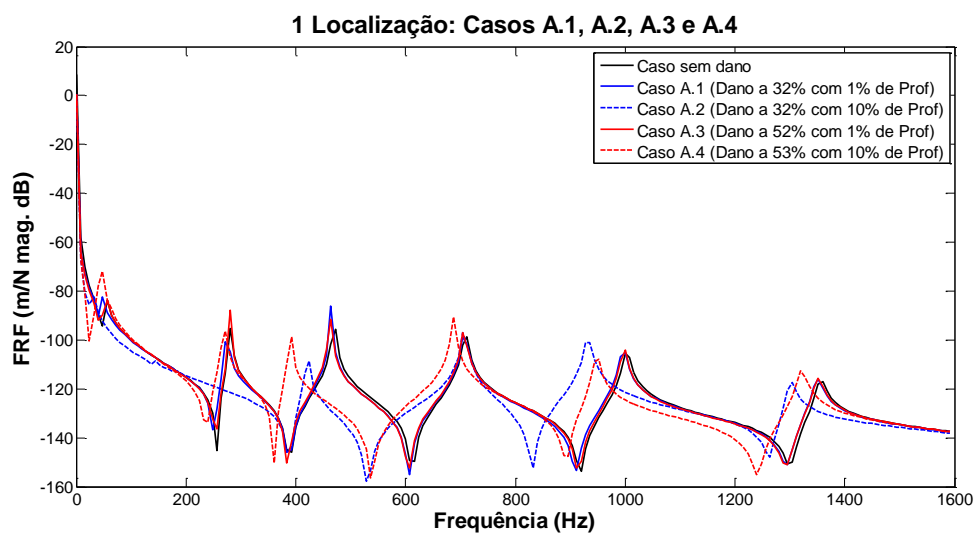


Figura 3.9 – FRFs para 1 Localização

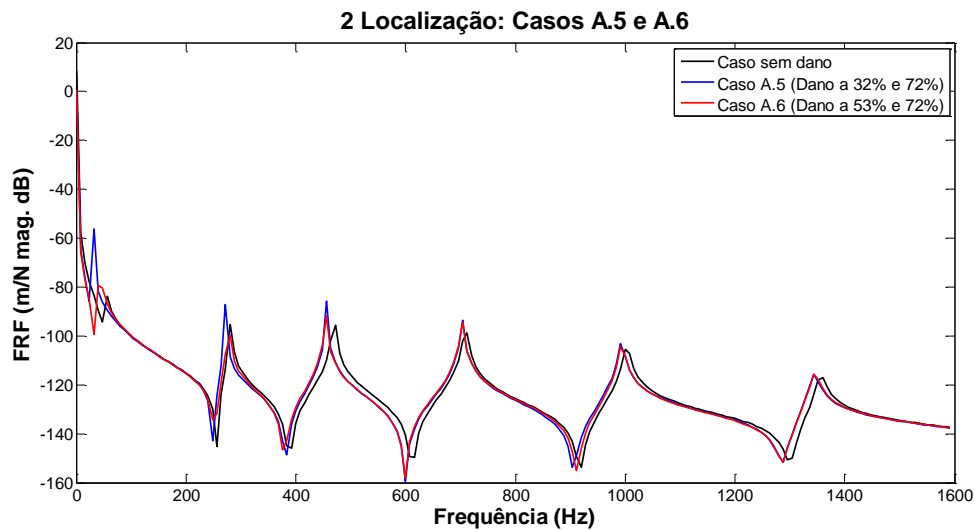
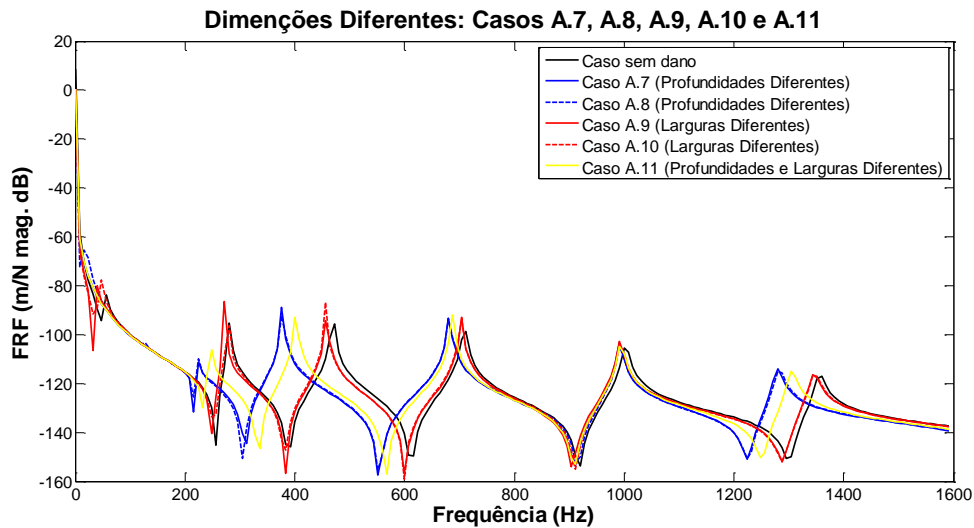
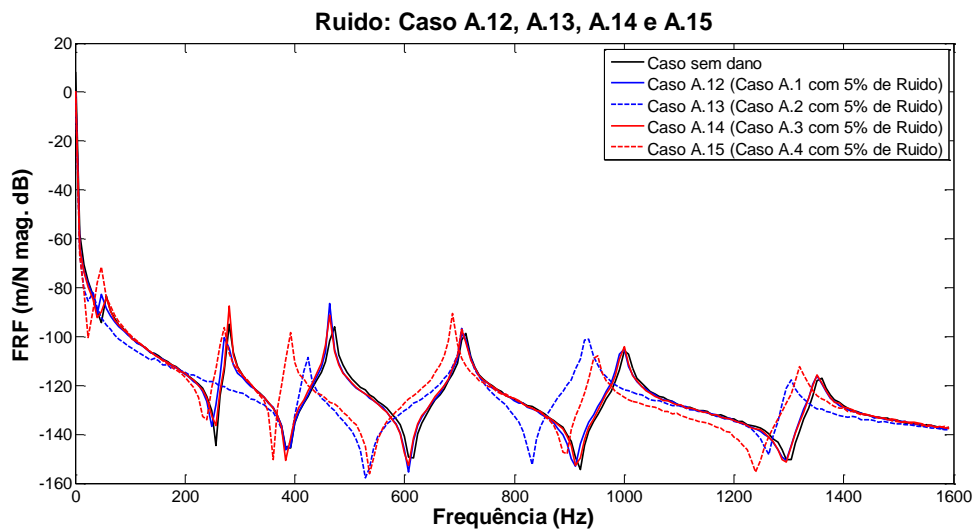


Figura 3.10 – FRFs para 2 Localizações



**Figura 3.11 – FRFs para Dimensões Diferentes**



**Figura 3.12 – FRFs para Ruído**

Nos resultados obtidos é possível notar a diferença entre as FRFs de cada caso. A diferença mais evidente é o desfasamento que existe entre si, mas numa análise mais detalhada nota-se uma alteração nas próprias curvas.

É de notar que na figura 3.9 nas frequências 700 Hz e 950 Hz as frfs dos casos A.2 e A.4 trocam de precedência, ou seja entre estes dois modos existe algum efeito significativo originado pela presença de dano.

### 3.3.2. Estrutura B – Viga simplesmente apoiada

Esta estrutura foi desenvolvida e utilizada em estudos anteriores [1] na investigação de métodos de localização de dano.

Optou-se em utilizar esta estrutura como uma das bases para fundamentar o estudo feito e atingir os objectivos propostos. Ao proceder à sua modelação e simulação é possível utilizar trabalhos passados para comparação e verificação de valores. Esta situação promove o correcto desenvolvimento da estrutura e aumenta o grau de confiança nos resultados que se irão produzir na continuação deste trabalho.

A Estrutura B é uma viga de secção circular com 1 metro de comprimento e 0.1 metro de diâmetro.

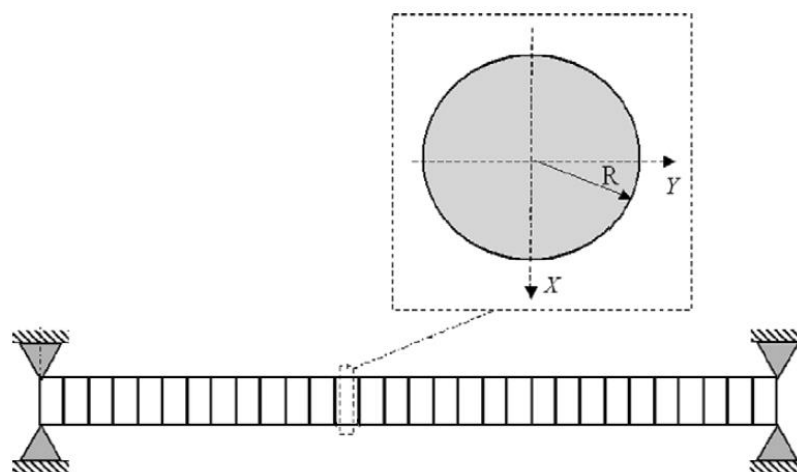


Figura 3.13 – Representação da estrutura B

Recorrendo aos conhecimentos do MEF falados acima, esta viga é dividida em 30 elementos e cada nó é modelado com 4 graus de liberdade.

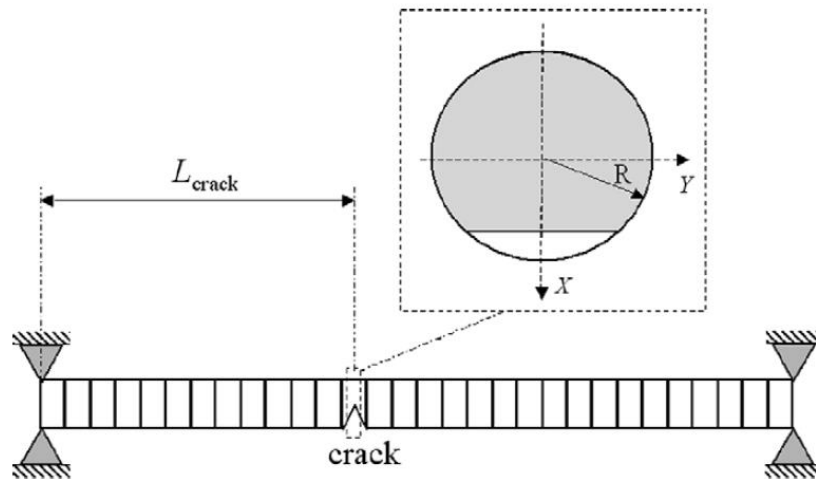
As extremidades da viga são simplesmente apoiadas e é composta com as características apresentadas na Tabela 3.3.

**Tabela 3.3 – Parâmetros da viga e dados aplicados no estudo**

Módulo de Young E (Pa)	$200 \times 10^9$
Módulo de Distorção G (Pa)	$71 \times 10^9$
Densidade ( $\text{kg/m}^3$ )	7800
Coefficiente de Poisson $\nu$	0.3
Raio da secção transversal (m)	0.05
Comprimento da viga (m)	1
Coefficiente de amortecimento $\alpha$	0.66
Coefficiente de amortecimento $\beta$	$1.2 \times 10^{-6}$
Intervalo de Frequência (rad/s)	100 a 25000

### Implementação de dano

A implementação de dano nesta viga é feita conforme mencionado na secção de modelação de dano deste capítulo, ou seja é modelado um entalhe num dos elementos mas neste caso o comprimento corresponde ao comprimento total do elemento danificado (igual aos restantes elementos).



**Figura 3.14 – Representação do dano na estrutura B. Retirado de [1]**

---

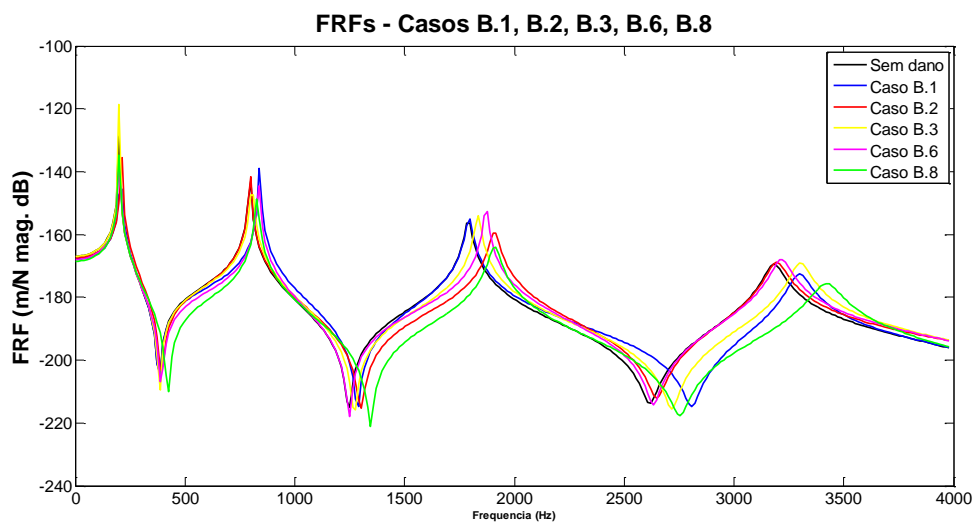
## Casos de dano

No âmbito de progredir nos conteúdos estudados com uma melhor eficiência, implementa-se nesta viga diversos casos de dano. Estes vários casos são compostos por diferentes localizações de dano a profundidades variáveis.

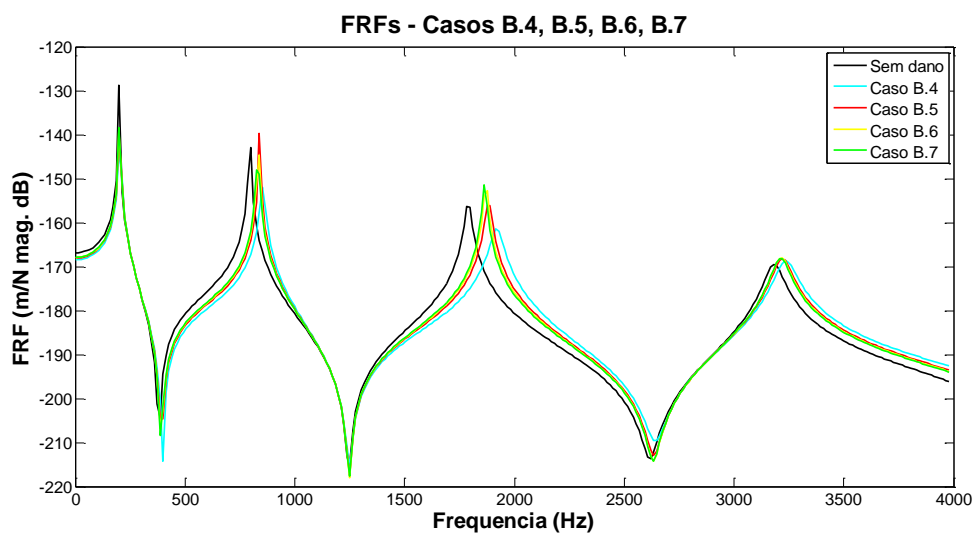
**Tabela 3.4 – Casos de estudo para a estrutura B**

<b>Casos</b>	<b>Elemento Danificado</b>	<b>Profundidade</b> (% em relação ao raio)
Caso B.1	10	50%
Caso B.2	15	70%
Caso B.3	28	30%
Caso B.4	7	100%
Caso B.5	7	50%
Caso B.6	7	20%
Caso B.7	7	10%
Caso B.8	5	80%

## Resultados dos modelos de Elementos Finitos



**Figura 3.15** – FRFs para os Casos B.1, B.2, B.3, B.6 e B.8



**Figura 3.16** – FRFs para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.8

Nas figuras 3.15 e 3.16 estão representadas as FRFs directas de cada caso na coordenada do nó 5.

Na figura 3.11 é pretendido compreender qual o efeito da localização do elemento danificado na resposta estrutural, deste modo foram apenas dispostos os casos 1, 2, 3, 6 e 8 correspondentes a localizações diferentes entre si.

Na figura 3.12 foi disposta as FRFs para os casos 4, 5, 6 e 7 no sentido de evidenciar qual o efeito da variação da profundidade de dano para a mesma localização.

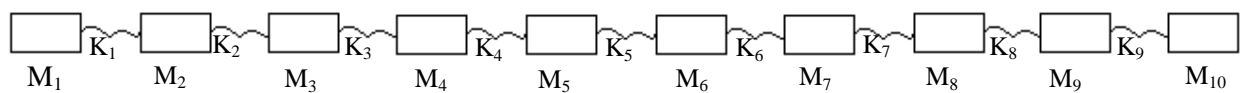
---

### 3.3.3. Estrutura C – Sistema de massas e molas

Esta última estrutura é definida como um caracter simples, pois trata-se de um sistema molas e massas. Na área das Vibrações Mecânicas é muito usado a aproximação de uma estrutura complexa num sistema simples de massas e molas, sendo esta aproximação possível pois o sistema resultante irá demonstrar resultados bastante semelhantes aos da estrutura real.

Este caracter simples é necessário para o presente trabalho, pois ajuda na correcta implementação dos métodos apresentados nos capítulos seguintes.

Neste caso, a estrutura desenvolvida é composta por 10 massas e 9 molas dispostas em serie com as extremidades livres, sendo este exemplo baseado na estrutura utilizada por [12] no seu estudo do Método da Curvatura das FRFs.



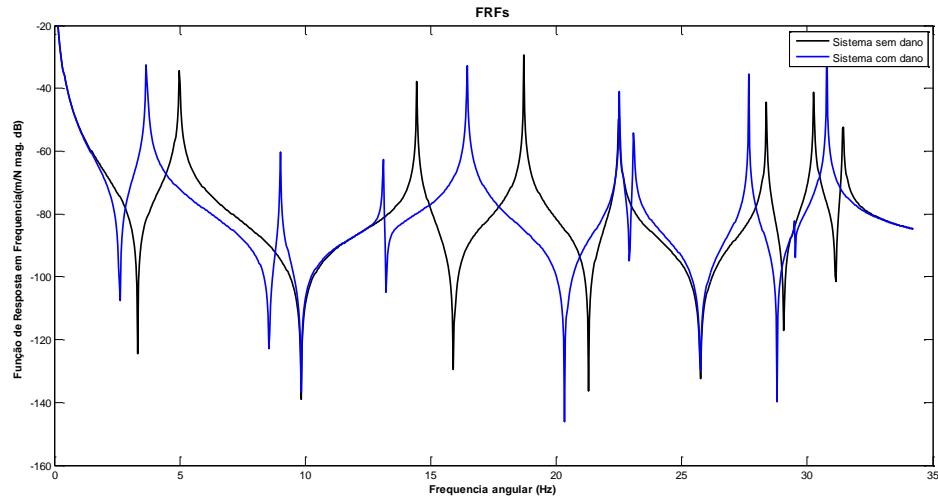
**Figura 3.17** – Representação da estrutura C

Cada massa desta estrutura foi modelada com 1 kg, e cada mola com uma rigidez de 10000 N/m. O dano nesta estrutura foi representado na redução da rigidez da mola  $K_4$  em 80% e das massas  $M_4$  e  $M_5$  em 10%.

---

## Resultados da Modelação

A Figura 3.18 representa as FRFs do sistema no mesmo ponto de medição e de aplicação de força, localização 1. As FRFs obtidas através do mesmo ponto de input e output são caracterizadas de FRFs directas. É possível constatar a diferença entre as FRFs do sistema com dano (azul), e do sistema sem dano (preto).



**Figura 3.18 – FRFs da Estrutura C**

---

## 3.4. Epitome do Capítulo

Neste capítulo estão apresentados os conceitos referentes ao MEF. Este método serviu como base na modelação numérica das estruturas A, B e C. É feita também uma abordagem explicativa do conceito de Modelos de dano onde se indica a metodologia utilizada para a implementação de dano nos modelos numéricos desenvolvidos.

No âmbito da aproximação experimental, é introduzida a secção Simulação de Resultados Experimentais, pois como não existe componente prática neste trabalho é necessário Simular resultados experimentais a partir dos resultados teóricos.

São ainda introduzidas as características de cada estrutura e explicado que a Estrutura A foi modelada com o propósito de desenvolver um modelo mais fidedigno com a realidade intencionando uns resultados mais credíveis.

A estrutura B, tendo sido já usada em trabalhos anteriores, foi desenvolvida para se obter uma correcta modelação através da comparação de resultados.

A estrutura C foi desenvolvida como carácter simples para servir de solução aos métodos que se demonstraram menos aptos nas estruturas anteriores, mas não são totalmente inválidos.



---

## 4. Localização

---

Um dos objectivos deste trabalho é localizar sem detectar, deste modo o processo de identificação de dano irá ser mais rápido e eficiente. Assim, grande parte da aplicação das FRFs neste contexto teve como base os estudos feitos para os Modos de Vibração.

Uma das motivações base para a concretização deste projecto passa por sequenciar métodos de identificação de dano que recorram às FRFs. Deste modo, nesta secção abordar-se-á alguns desses métodos, fazendo uma selecção dos mesmos com o fim de eleger a técnica mais proeminente.

Esta selecção é feita com recurso à implementação de cada método escolhido nas estruturas apresentadas no Capítulo anterior. Desta forma, existem condições para comparar e efectuar algumas notações entre os métodos.

Nesta secção, a selecção dos métodos vai ser feita com base nos dados obtidos na implementação em cada uma das estruturas. Para tal, procede-se a uma análise qualitativa da informação retirada e da facilidade de leitura.

Este Capítulo irá estar dividido em vários subcapítulos correspondentes à apresentação e análise de cada método de localização apurado.

---

## 4.1. Método dos Modos de Vibração aplicado às FRFs

### **Mode Shape (MS)**

Este Método foi introduzido por [13] como uma ferramenta útil na área de Localização de dano. Foi proposto uma diferença absoluta entre os Modos de Vibração onde o máximo dessa diferença corresponde ao posicionamento do dano.

$$\Delta\varphi_{i,j} = |\varphi_{i,j}^d - \varphi_{i,j}| \quad (4.1)$$

Onde  $\varphi_{i,j}$  é o modo de vibração.

Ainda é referido que se for utilizado mais do que um modo, j, então procede-se à soma.

$$MS_i = \sum_j \Delta\varphi_{i,j} \quad (4.2)$$

### **Método dos Modos de Vibração adaptado às FRFs (FRF\_MS)**

Esta adaptação do método MS é introduzido por [14] e na mesma analogia, o FRF\_MS utiliza a diferença absoluta entre as duas FRFs (com dano,  $H_{j,k}^d(\omega)$ , e sem dano,  $H_{j,k}(\omega)$ ) para estimar a localização do dano.

$$\Delta H_{j,k}(\omega) = |H_{j,k}^d(\omega) - H_{j,k}(\omega)| \quad (4.3)$$

Fazendo os somatórios para as várias localizações das forças aplicadas j e do intervalo de frequências  $\omega$ , para onde as FRFs estão definidas, obtemos a equação (4.4).

$$FRF\_MS(j) = \sum_{\omega} \sum_k \Delta H_{j,k}(\omega) \quad (4.4)$$

## Estrutura A

Como apresentado no capítulo anterior, o dano nesta Estrutura foi modelado com diversos Casos, onde também foram submetidos nalguns 5% de ruído. Neste contexto, pretende-se retirar informações da qualidade dos dados gerados e entender qual o nível capacitativo que este método apresenta nas diferentes abordagens.

As figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 representados os resultados resultantes da implementação do Método FRF\_MS para as diferentes condições de dano nesta estrutura.

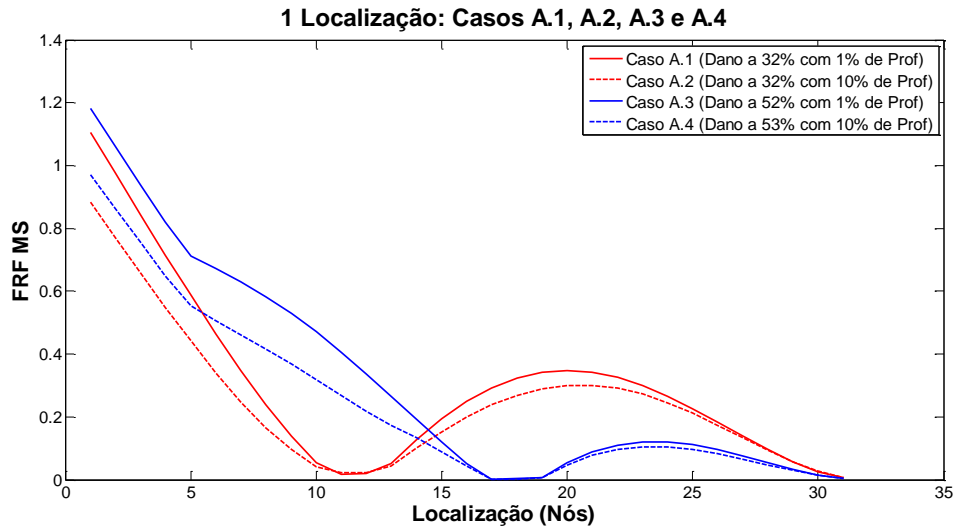


Figura 4.1 – FRF\_MS para 1 Localização

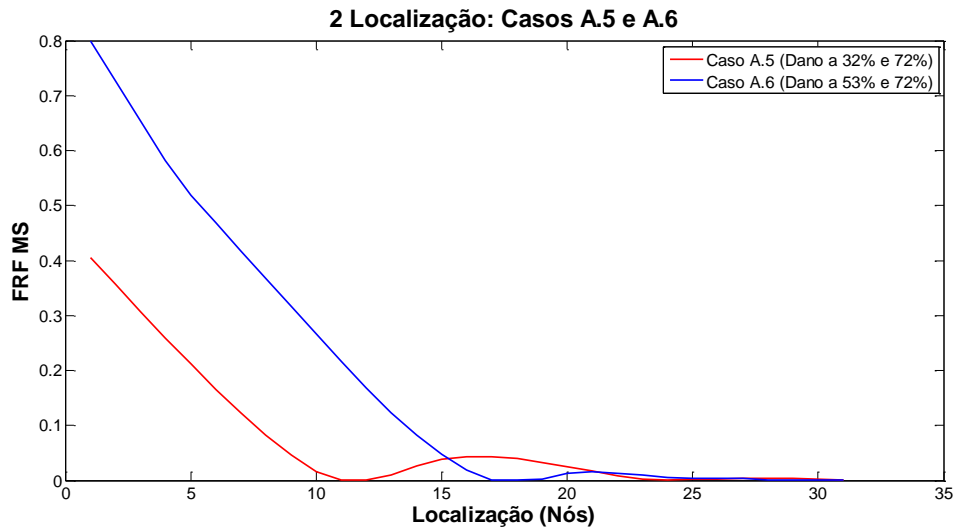
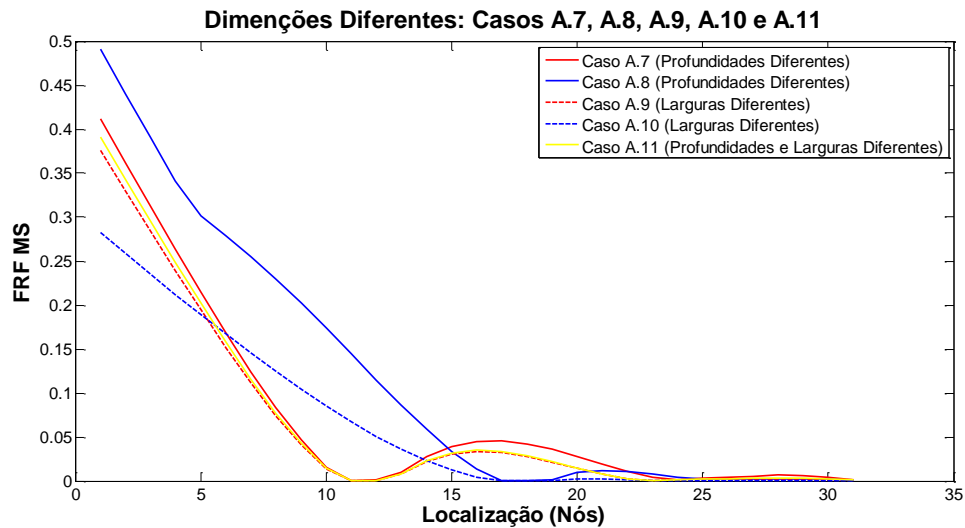
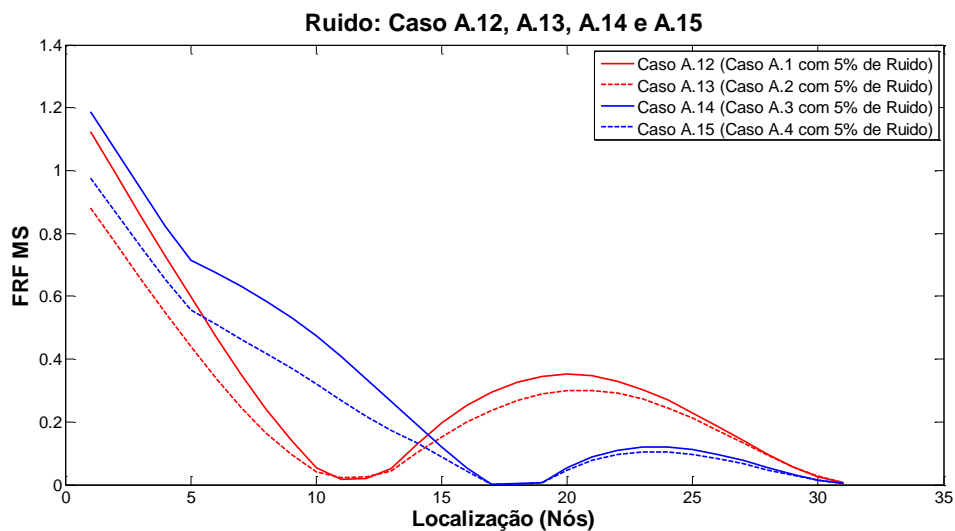


Figura 4.2 – FRF\_MS para 2 Localização



**Figura 4.3 – FRF\_MS para Dimensões Diferentes**



**Figura 4.4 – FRF\_MS para Ruído**

Como é possível observar, o indicador de dano na localização prevista é caracterizado através dos mínimos ocorridos ao longo das curvas. Nos diversos casos este indicador situa-se na localização correcta.

Salienta-se também a boa adaptação que este método apresenta quando submetido a dados com ruído, onde apenas se verifica uma alteração na amplitude das curvas mantendo o indicador de dano correcto.

No âmbito da simulação de resultados experimentais e frequências utilizadas este método melhora quanto menor for a informação disponível ou seja, a reduzida informação dos dados experimentais e um intervalo de frequências ajustado a valores baixos, melhora a obtenção de valores mais favoráveis à localização de dano.

## Estrutura B

Na Estrutura B, como referido anteriormente, foram atribuídos 8 casos de dano.

A implementação deste método foi feita de forma entender qual é a capacidade do FRF\_MS perante diferentes profundidades em diferentes localizações e diferentes profundidades na mesma localização. Posto isto, nas figuras 4.8 e 4.9, os 8 casos foram reunidos em dois grupos de modo a ser possível a identificação das diferenças entre os casos.

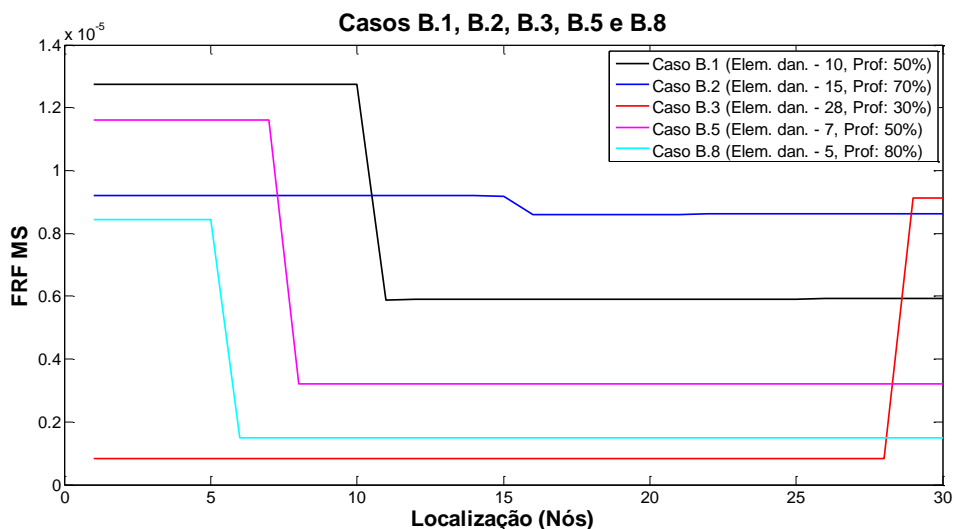


Figura 4.5 – FRF\_MS para os Casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8

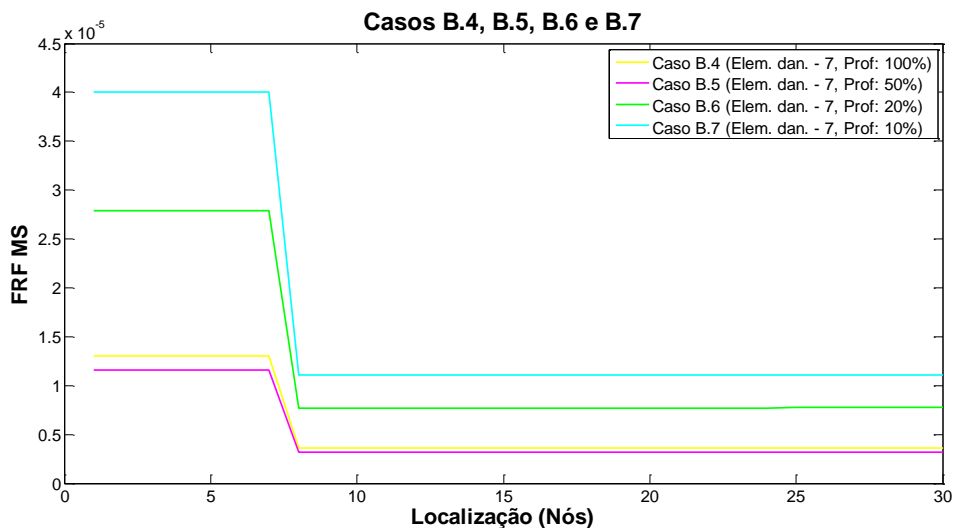


Figura 4.6 – FRF\_MS para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.7

Na figura 4.5, onde estão reunidos os casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8, torna-se bastante evidente que o indicador de dano é caracterizado pelo declive acentuado da reta provocada pela diferença entre os dois segmentos. Em todos os casos, este indicador está situado na coordenada correspondente à localização correcta do elemento danificado.

Na figura 4.6, estão dispostos os resultados da implementação para os casos B.4, B.5, B.6 e B.7, caracterizados pela diferença de profundidades entre si, sendo esta evidenciada pelo

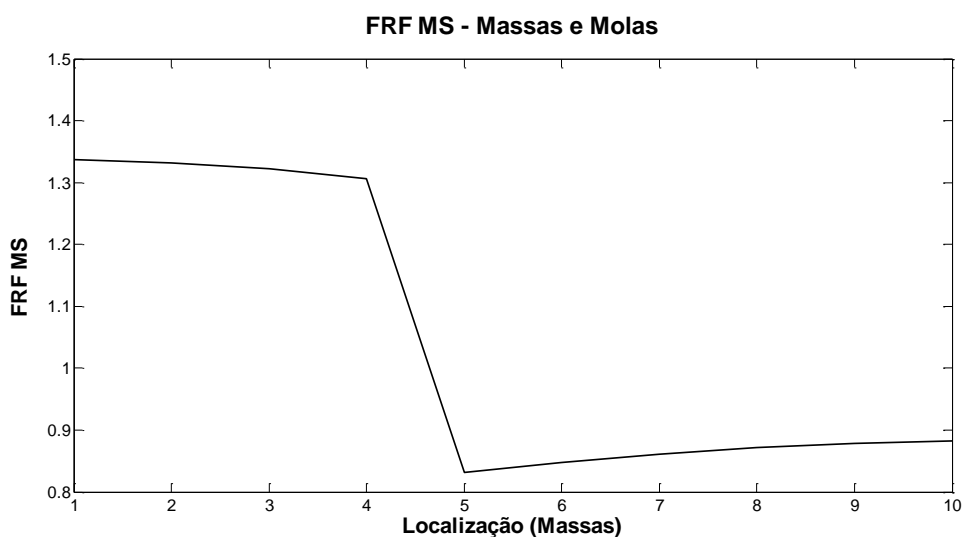
---

desfasamento entre as rectas de cada caso. Nesta figura, como o desfasamento está associado à dimensão do elemento danificado, torna o FRF\_MS um possível candidato a uma quantificação comparativa.

## Estrutura C

A estrutura C, sendo de carácter simples, foi desenvolvida apenas com um caso de dano, sob o pretexto de manter a acessibilidade pretendida.

Na figura 4.7 está exibida a implementação do método FRF\_MS para esta estrutura.



**Figura 4.7 – FRF\_MS para a Estrutura C**

À semelhança da estrutura B, o indicador de dano neste caso é verificado através do acentuado declive descrito pela diferença entre os dois segmentos da curva obtida. A localização do indicador corresponde à correcta coordenada da secção danificada.

---

## 4.2. Método do Declive dos Modos de Vibração aplicado às FRFs

### **Mode Shape Slope (MSS)**

Desenvolvendo a formulação do método anterior, [13] propõem a localização de dano através da diferença entre os quadrados dos Modos de Vibração.

$$\Delta\phi_{i,j}^2 = |(\phi_{i,j}^d)^2 - (\phi_{i,j})^2| \quad (4.5)$$

Onde  $\phi'_{ij}$  corresponde à primeira derivada de cada Modo. Analogamente a MS, se mais do que um Modo, j, for utilizado então:

$$MSS_i = \sum_j \Delta\phi_{i,j}^2 \quad (4.6)$$

### **Método do Declive dos Modos de Vibração aplicado às FRFs (FRF\_MSS)**

Adaptando MSS, este método procura alterações nas FRFs através do quadrado da primeira derivada. As alterações são evidenciadas na diferença absoluta entre as duas derivadas.

$$\Delta H'_{j,k}{}^2(\omega) = |H'_{j,k}{}^d{}^2(\omega) - H'_{j,k}{}^2(\omega)| \quad (4.7)$$

A derivada de primeira ordem é dada por aproximação através da seguinte diferença finita.

$$H'_{j,k}(\omega) = \frac{H_{j-1,k}(\omega) - H_{j+1,k}(\omega)}{h^2} \quad (4.8)$$

Onde h é a distância entre j-1 e j+1.

Na situação de se usar mais do que uma FRF, k, constrói-se a equação 4.9.

$$FRF\_MSS(j) = \sum_{\omega} \sum_k \Delta H'_{j,k}{}^2(\omega) \quad (4.9)$$

Nesta equação soma-se igualmente o intervalo de frequências que foi considerado.

## Estrutura A

No seguimento do método passado, nas figuras 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11 estão representados os resultados provenientes da implementação de FRF\_MSS na presente estrutura.

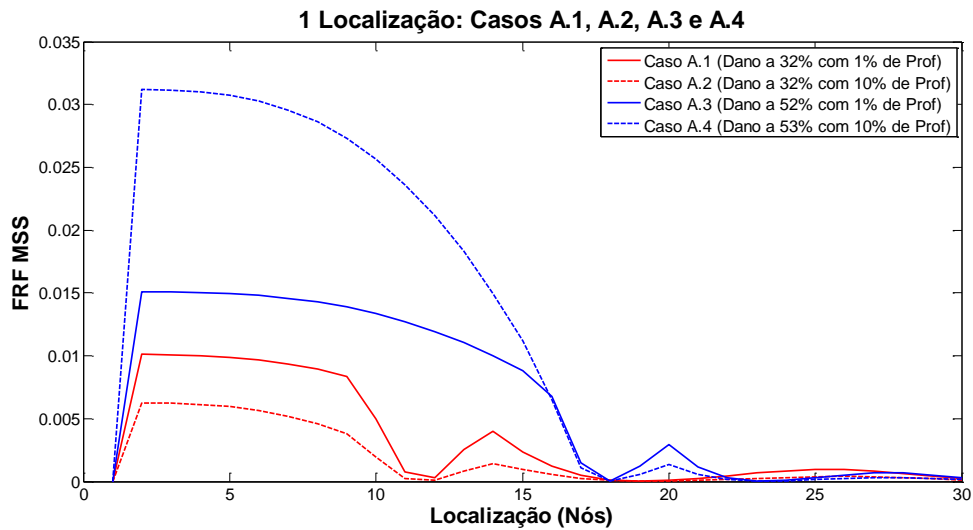


Figura 4.8 – FRF\_MSS para 1 Localização

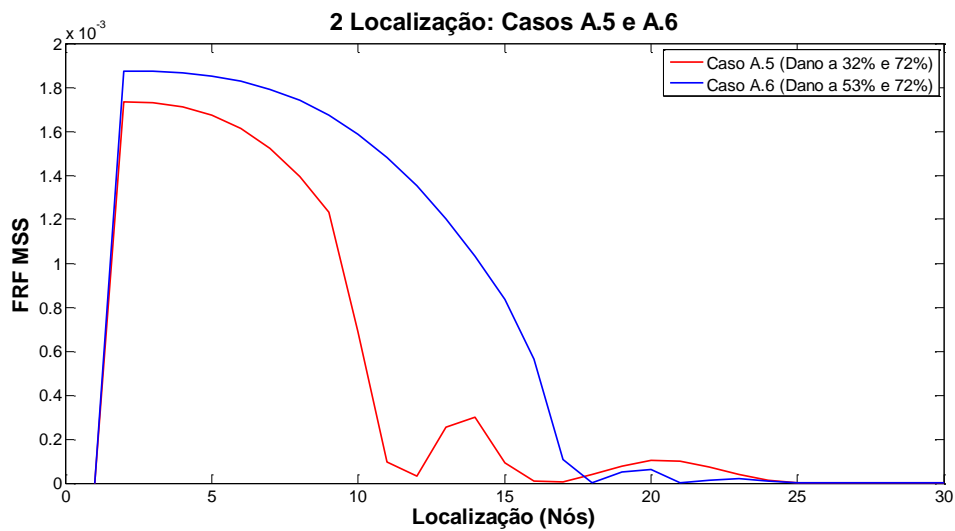
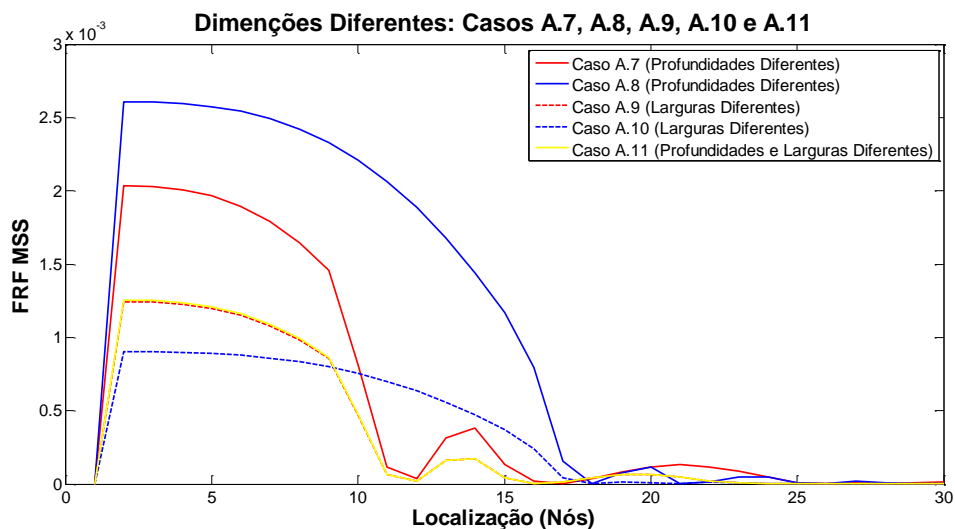
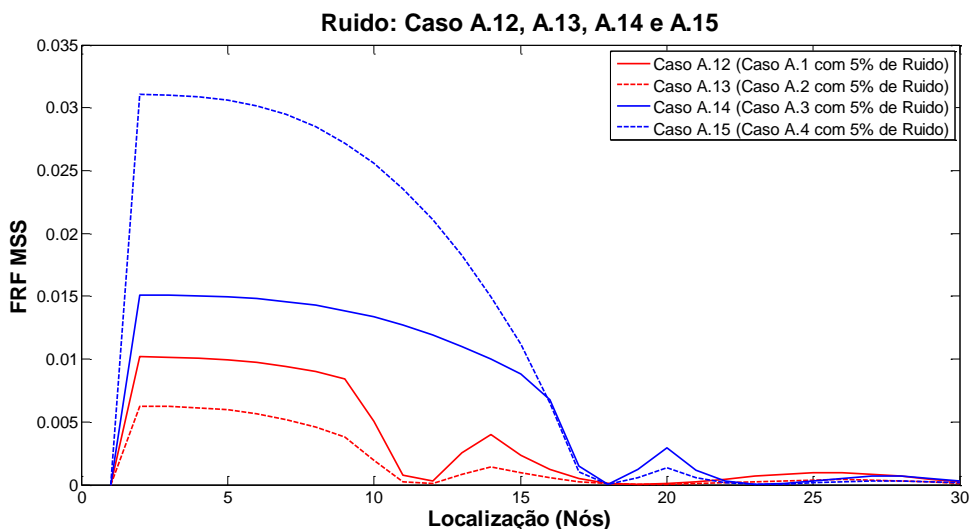


Figura 4.9 – FRF\_MSS para 2 Localização



**Figura 4.10 – FRF\_MSS para Dimensões Diferentes**



**Figura 4.11 – FRF\_MSS para Ruído**

Nas duas primeiras situações, à semelhança de MS, salienta-se um indicador de dano (mínimos da curva) na posição correcta. Mas na situação 1 localização, existe a partir do elemento 23 valores reduzidos que não correspondem à indicação de dano. Esta situação pode induzir em erro e indicar dano nas localizações erradas.

Deste modo, na situação de Dimensões Diferentes ambas as duas localizações estão correctamente indicadas, e embora exista um desfasamento entre curvas, a diferença entre o dimensionamento dos dois elementos danificados não está presente ou indicado.

Na situação de Ruído, analogamente a FRF\_MS, os indicadores de dano não são prejudicados na presença de dados com 5% de ruído.

## Estrutura B

Nas figuras seguintes, estão disponíveis os dados relativos à implementação de FRF\_MSS nesta estrutura.

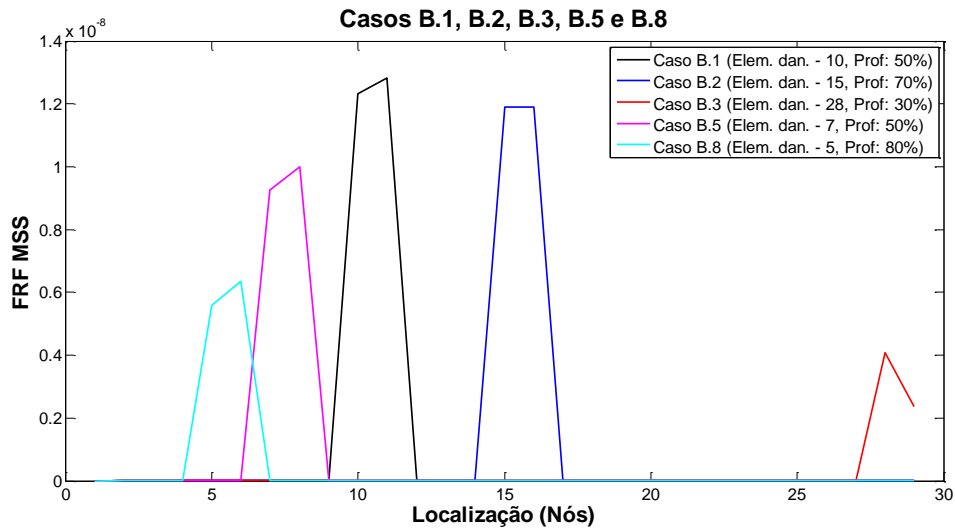


Figura 4.12 – FRF\_MSS para os Casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8

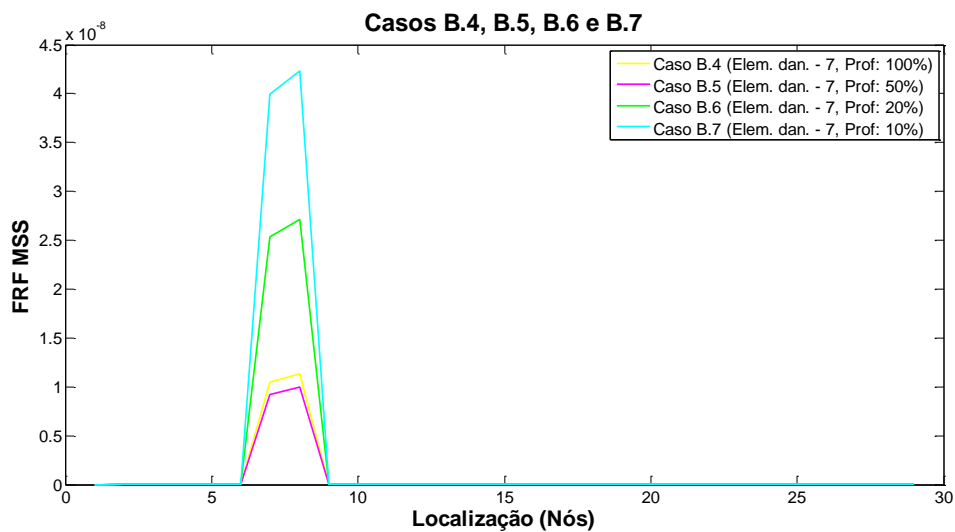


Figura 4.13 – FRF\_MSS para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.7

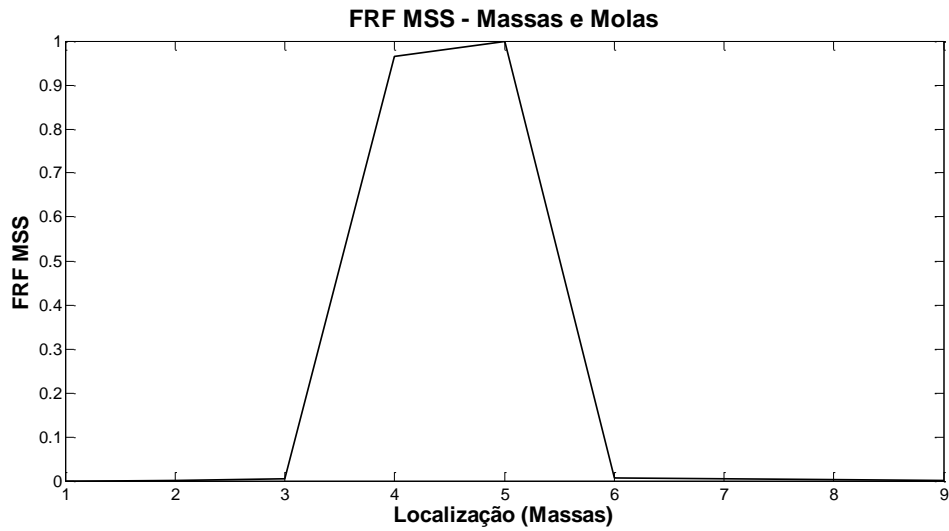
Na figura 4.12, onde estão reunidos os casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8, os indicadores de dano são caracterizados pelos máximos presentes ao longo das curvas. Nos diversos casos este indicador situa-se na posição correspondente ao elemento danificado, pelo que o FRF\_MSS localiza correctamente dano nesta estrutura.

Na figura 4.13 estão dispostos os resultados da implementação para os casos B.4, B.5, B.6 e B.7, onde o método demonstra capacidades para quantificar devido à presença de desfasamentos entre os casos.

---

## Estrutura C

Nesta estrutura, a implementação está representada na figura 4.14.



**Figura 4.14** – FRF\_MSS para a estrutura C

Perante estes dados consegue-se notar que o indicador é caracterizado pelo máximo da curva, estando este na posição correcta.

---

### 4.3. Método da Curvatura aplicado às FRFs

#### **Mode Shape Curvature (MSC)**

Este método apresentado por [15], localiza o dano através das diferenças absolutas entre as curvaturas dos Modos de Vibração.

$$\Delta\phi''_{i,j} = |\phi''_{i,j}^d - \phi''_{i,j}| \quad (4.10)$$

As curvaturas são dadas pela segunda derivada do Modo, onde é obtida com recurso ao Método das Diferenças Finitas.

$$\phi''_{i,j} = \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{d^2} \quad (4.11)$$

Como os métodos anteriores, na situação de se usar mais do que um Modo,  $j$ , utiliza-se o somatório.

$$MSC_i = \sum_j \Delta\phi''_{i,j} \quad (4.12)$$

#### **Método da curvatura aplicado às FRFs (FRF\_MSC)**

Este método, baseado no Método MSC, recorre à derivada de segunda ordem para determinar a curvatura no ponto de medição  $j$  e da força aplicada,  $k$ , sendo esta obtida por aproximação através do método de diferenças finitas.

$$H''_{j,k}(\omega) = \frac{H_{j-1,k}(\omega) - 2H_{j,k}(\omega) + H_{j+1,k}(\omega)}{h^2} \quad (4.13)$$

Deste modo, procedendo à diferença absoluta para relacionar as duas curvaturas obtém-se a equação 4.14.

$$\Delta H''_{j,k}(\omega) = |H''_{j,k}^d(\omega) - H''_{j,k}(\omega)| \quad (4.14)$$

Com a equação 4.15 pode-se somar todas as FRFs e frequências que foram consideradas.

$$FRF\_MSC(j) = \sum_{\omega} \sum_k \Delta H''_{j,k}(\omega) \quad (4.15)$$

## Estrutura A

Nas figuras 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19 estão dispostos os resultados da implementação para as diferentes situações desenvolvidas nesta estrutura.

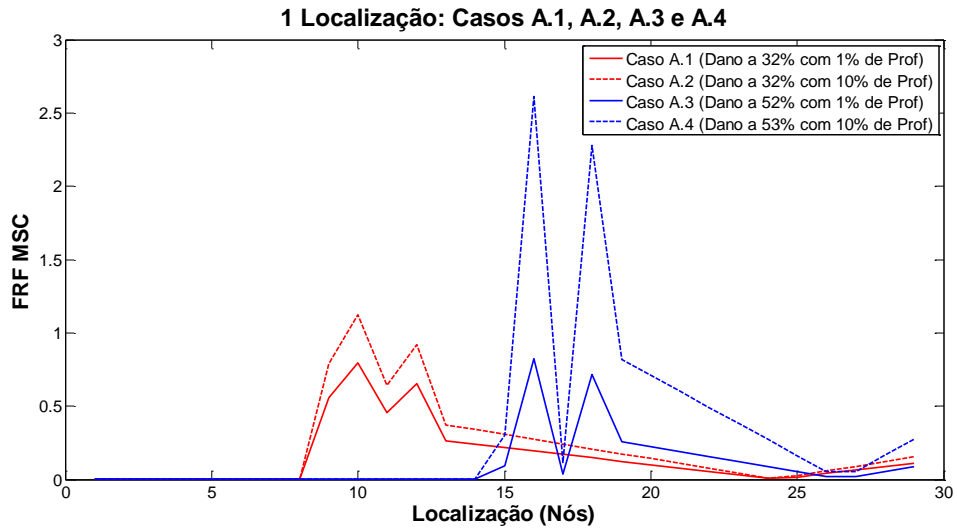


Figura 4.15 – FRF\_MSC para 1 Localização

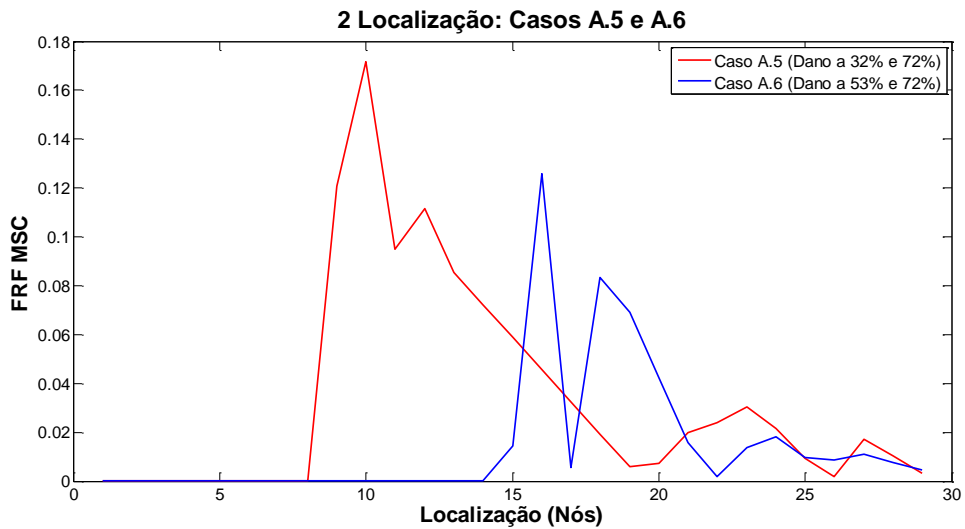
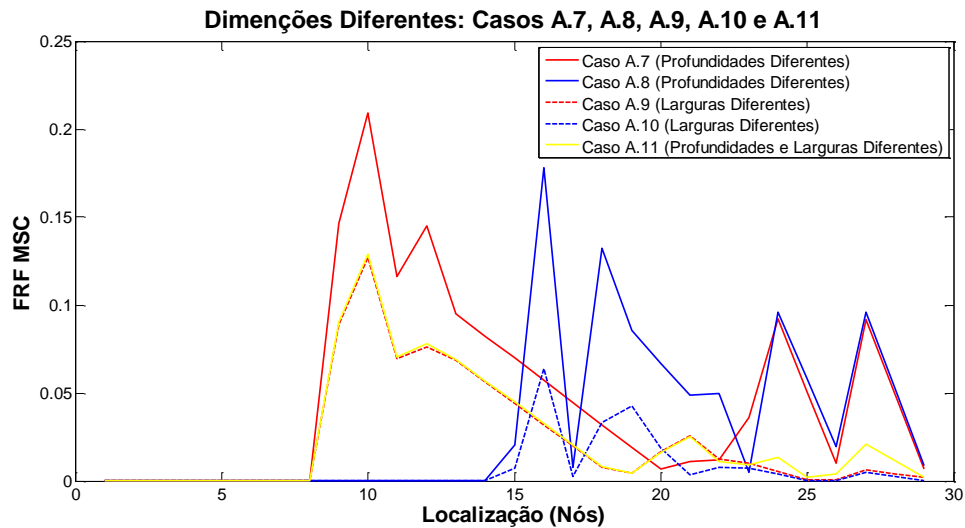
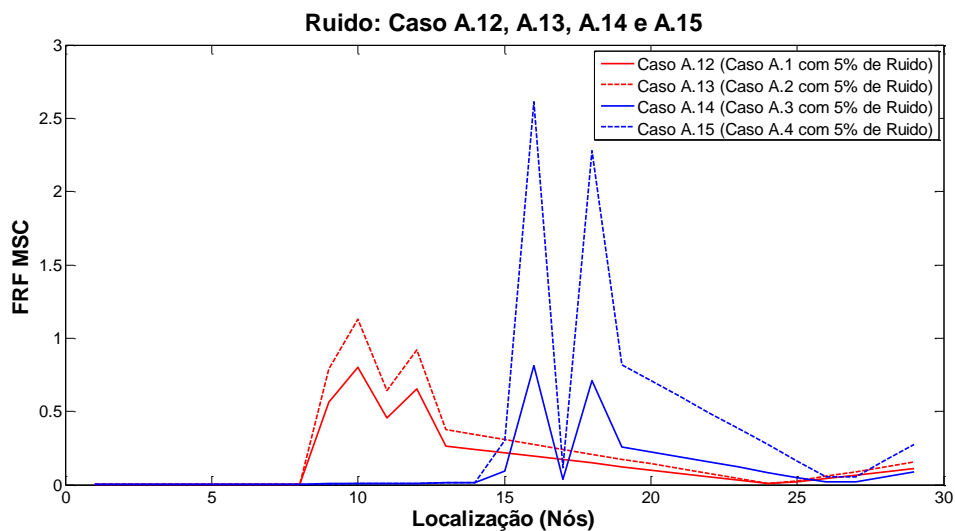


Figura 4.16 – FRF\_MSC para 2 Localização



**Figura 4.17 – FRF\_MSC para Dimensões Diferentes**



**Figura 4.18 – FRF\_MSC para Ruído**

Nas duas primeiras situações, figuras 4.16 e 4.17, salienta-se um indicador de dano (mínimos da curva) na posição correcta sendo este acompanhado por dois máximos na sua fronteira. Este evidente indicador possibilita a rápida identificação da zona danificada, mas na situação de 2 Localização o segundo elemento danificado torna-se menos visível.

Deste modo, na situação de Dimensões Diferentes ambas as duas localizações estão correctamente indicadas, e embora exista um desfasamento entre curvas, a diferença entre o dimensionamento dos dois elementos danificados não está presente ou indicado.

Na situação de Ruído os indicadores de dano não são prejudicados com presença de dados com 5% de ruído.

## Estrutura B

Analogamente aos métodos passados, as figuras 4.19 e 4.20 demonstram os resultados obtidos na implementação deste método para esta estrutura B.

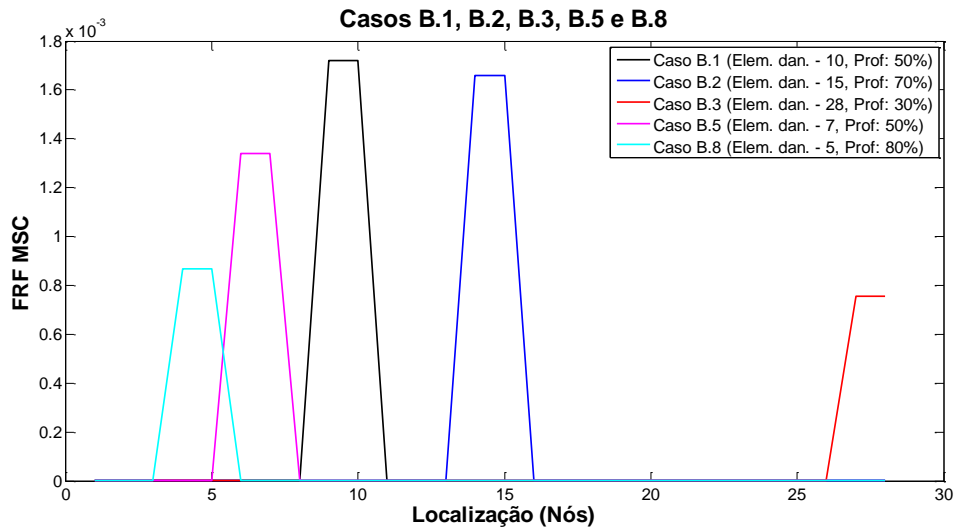


Figura 4.19 – FRF\_MSC para os Casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8

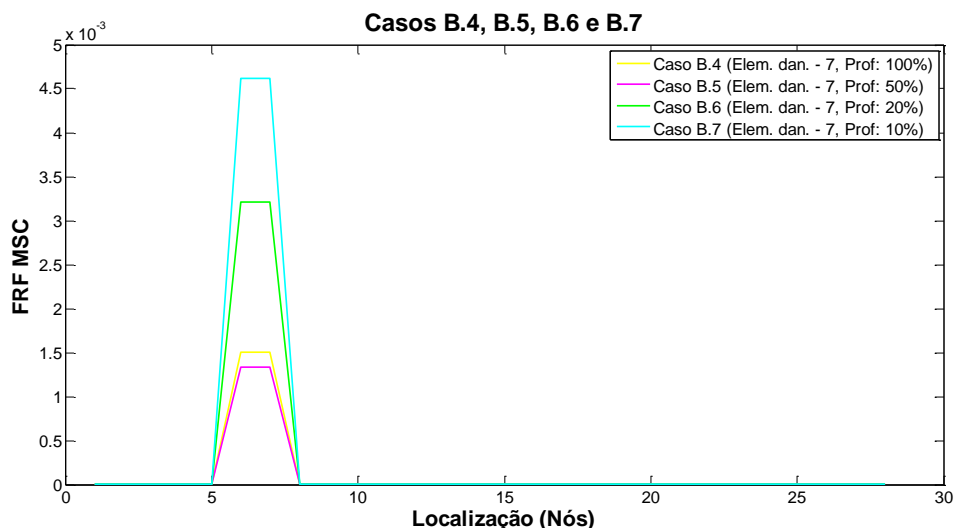


Figura 4.20 – FRF\_MSC para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.7

Na figura 4.19, à semelhança de FRF\_MSS, os indicadores de dano são caracterizados pelos máximos presentes ao longo das curvas. Nos diversos casos este indicador situa-se na posição correcta, correspondente ao elemento danificado.

Na figura 4.13 estão dispostos os resultados da implementação para os casos B.4, B.5, B.6 e B.7, onde através da diferença entre as curvas obtidas é possível notar algumas capacidades deste método para quantificar comparativamente.

---

## Estrutura C

A execução deste método na estrutura C está representada através da figura 4.21.

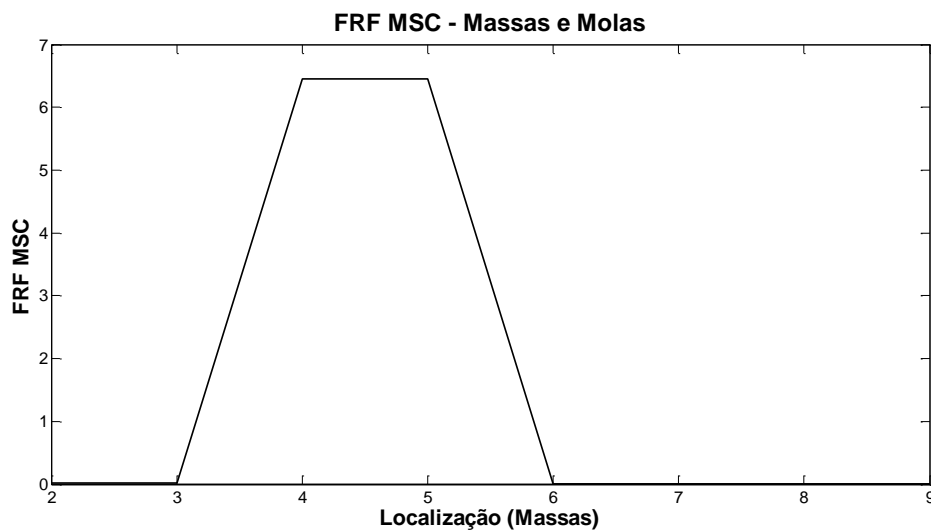


Figura 4.21 – FRF\_MSC para a estrutura C

Na figura 4.21 o indicador é representado correctamente através do máximo presente na curva.

---

## 4.4. Método do Quadrado da Curvatura aplicado às FRFs

### **Mode Shape Curvature Square (MSCS)**

À semelhança da adaptação feita no *FRF\_MSS*, fazendo o quadrado da curvatura obtém-se a equação 4.16.

$$\Delta\phi_{i,j}''^2 = \left| (\phi_{i,j}''^d)^2 - (\phi_{i,j}'')^2 \right| \quad (4.16)$$

E com a utilização de mais do que um Modo:

$$MSCS_i = \sum_j \Delta\phi_{i,j}''^2 \quad (4.17)$$

### **Método do quadrado da curvatura das FRFs (FRF\_MSCS)**

Este método aplica a igualmente a segunda derivada para determinar a curvatura, mas no sentido de evidenciar a localização do dano, recorre ao quadrado da curvatura no cálculo das diferenças absolutas.

$$\Delta H''_{j,k}{}^2(\omega) = \left| \left( H''_{j,k}{}^d(\omega) \right)^2 - \left( H''_{j,k}(\omega) \right)^2 \right| \quad (4.18)$$

E analogamente aos métodos anteriores obtém-se a equação 4.19.

$$FRF\_MSCS(i) = \sum_{\omega} \sum_j \Delta H''_{i,j}{}^2(\omega) \quad (4.19)$$

## Estrutura A

Executando o método FRF\_MSCS nesta estrutura, para as diferentes situações, obtém-se os resultados das figuras 4.22, 4.23, 4.24 e 4.25.

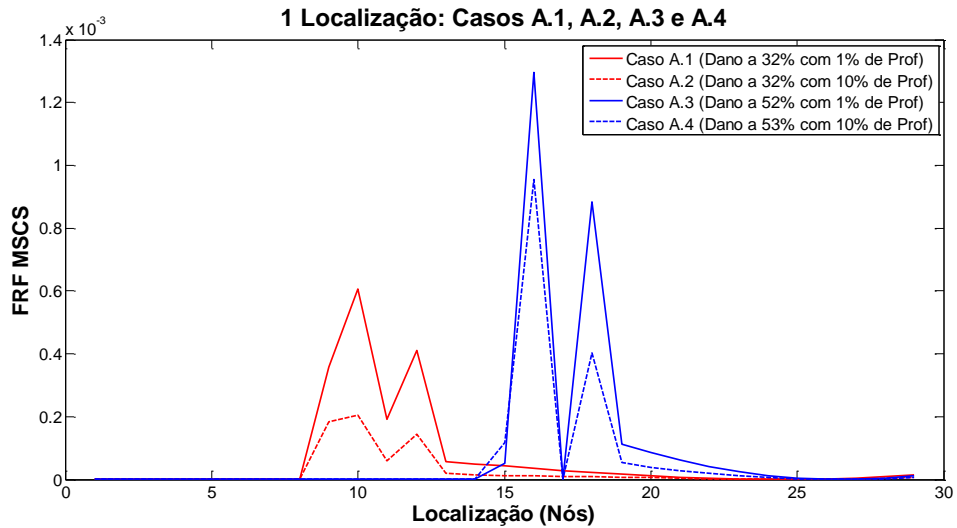


Figura 4.22 – FRF\_MSCS para 1 Localização

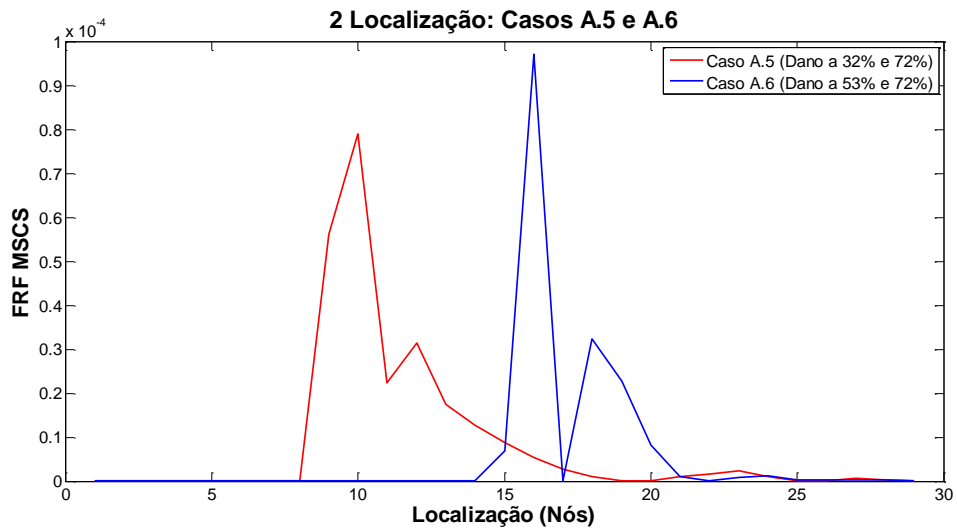


Figura 4.23 – FRF\_MSCS para 2 Localização

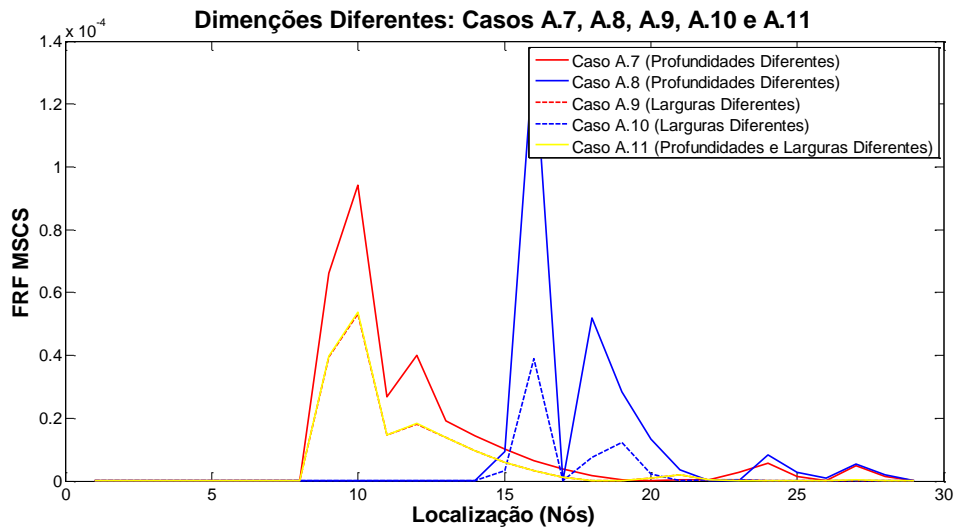


Figura 4.24 – FRF\_MSC para Dimensões Diferentes

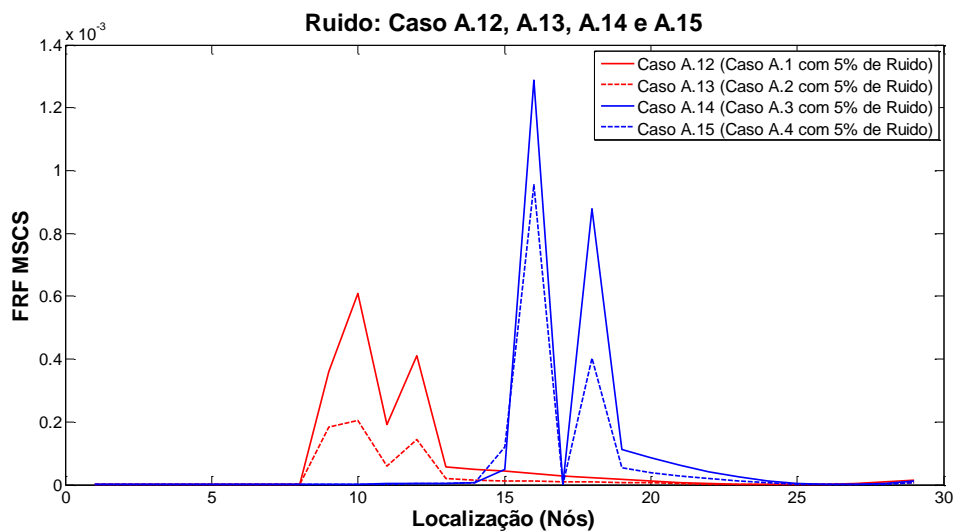


Figura 4.25 – FRF\_MSC para Ruído

Nas figuras 4.24 e 4.25, à semelhança de FRF\_MSC, o indicador de dano corresponde ao mínimo da curva, situado nas duas situações nas localizações correctas. A diferença entre FRF\_MSC e FRF\_MSCS é a maior evidencia que estes indicadores adquirem relativamente à restante curva. Esta característica torna o método menos promissor na situação de duas localizações pois o indicador na segunda localização adquire um aspecto menos evidente.

Deste modo, na situação de Dimensões Diferentes é verificado a mesma característica na segunda localização, mas ambas as duas localizações estão correctamente indicadas. Igualmente aos métodos anteriores, os diversos casos nesta situação resultam em curvas diferentes entre si, mas não se confirma diferença nos dois elementos danificados.

Na situação de Ruído os indicadores de dano não são prejudicados com presença de dados com 5% de ruído.

## Estrutura B

As figuras 4.26 e 4.27 apresentam os dados resultantes da execução deste método na estrutura B

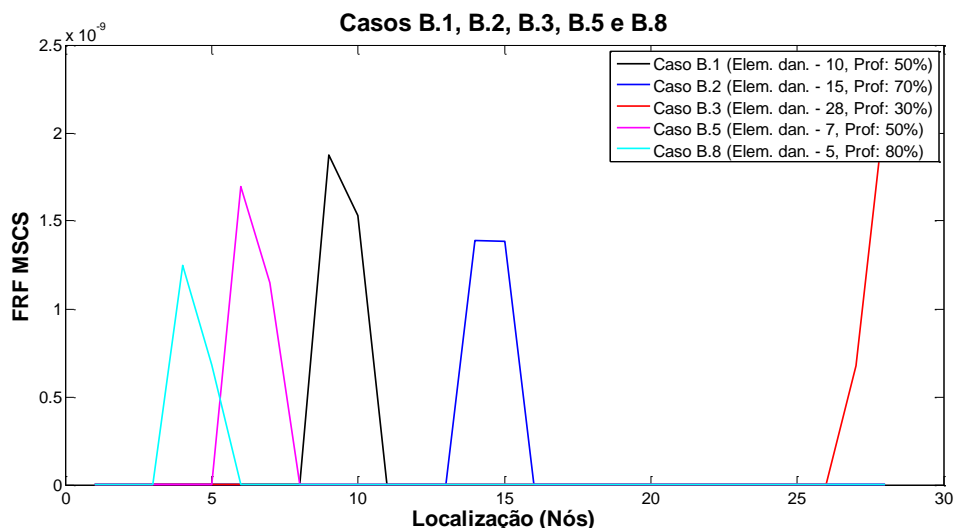


Figura 4.26 – FRF\_MSC para os Casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8

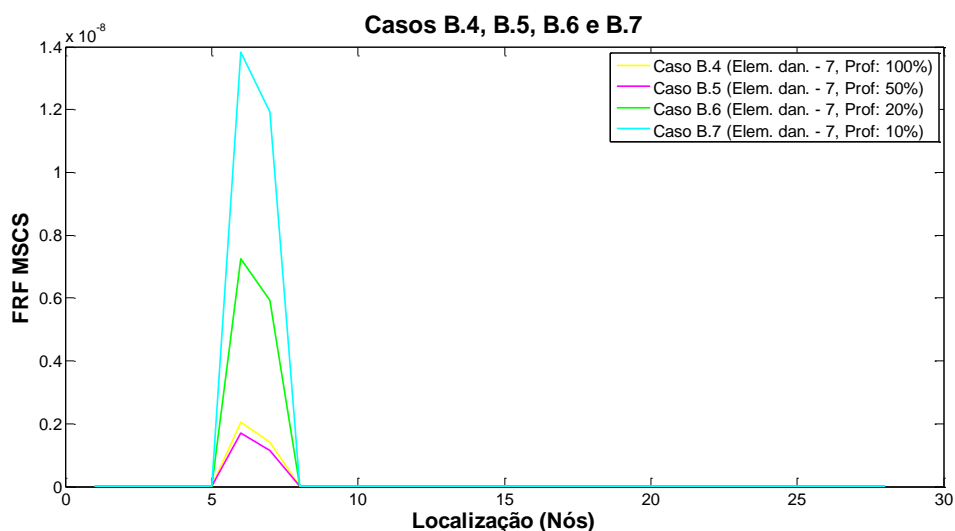


Figura 4.27 – FRF\_MSCS para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.7

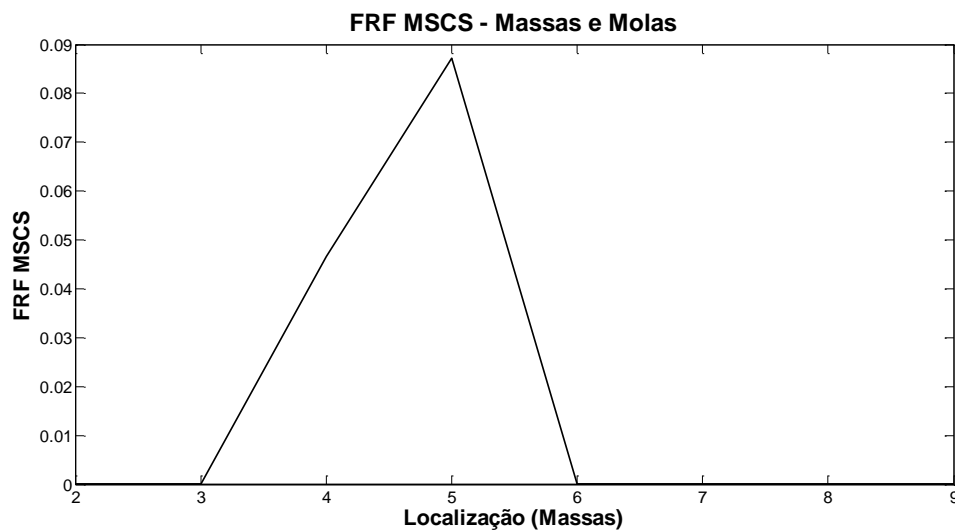
Na figura 4.26, os indicadores de dano são caracterizados pelos máximos presentes ao longo das curvas. Nos diversos casos este indicador situa-se na posição correcta, correspondente ao elemento danificado.

Na figura 4.27 estão dispostos os resultados da implementação para os casos B.4, B.5, B.6 e B.7, onde através da diferença entre as curvas obtidas é possível notar algumas capacidades deste método para quantificar comparativamente.

---

## Estrutura C

A Figura 4.28 expõe os resultados obtidos na execução deste método na estrutura C.



**Figura 4.28** – FRF\_MSCS para a estrutura C

Embora esta estrutura seja de carácter simples, este método apresenta resultados pouco positivos no âmbito de localização de dano. Observando a figura 4.28, é difícil determinar em que Massas está o dano compreendido, pois varia entre 3 e 6.

---

## 4.5. Método das Diferenças Logarítmicas das FRFs

O método das diferenças logarítmicas das FRFs (FRF\_MLOG) foi proposto por [16] e relaciona as duas FRFs através da equação 4.30.

$$FRF\_MLOG = \sum_{\omega} \sum_k \left( \text{Log}(H_{j,k}^d(\omega)) - \text{Log}(H_{j,k}(\omega)) \right)^3 \quad (4.30)$$

Na equação está já aplicado os casos de se considerar mais do que uma FRF,  $k$ , e frequências,  $\omega$ .

## Estrutura A

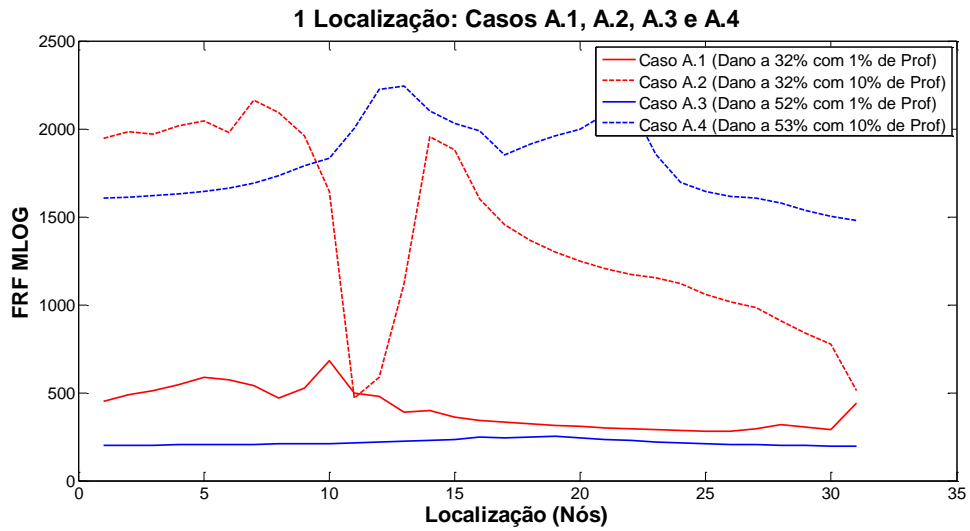


Figura 4.29 – FRF\_MLOG para 1 Localização

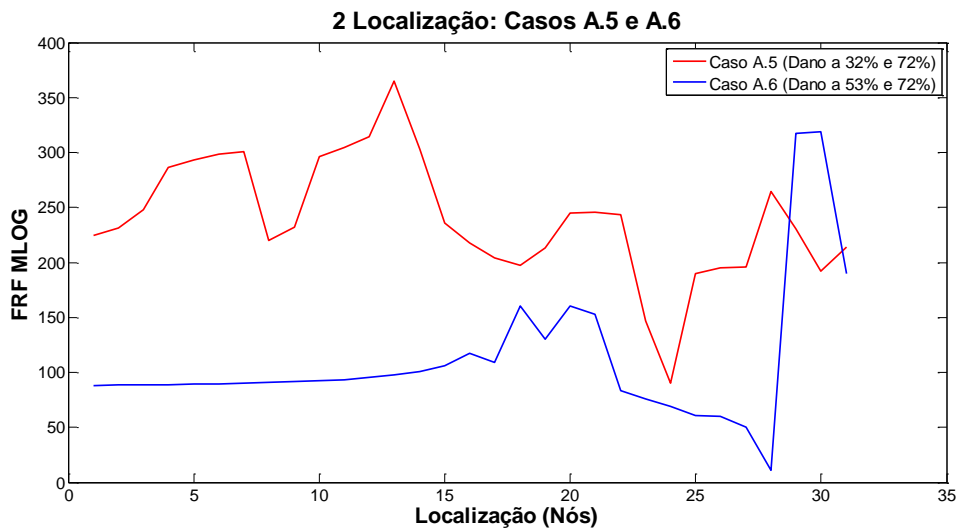


Figura 4.30 – FRF\_MLOG para 2 Localização

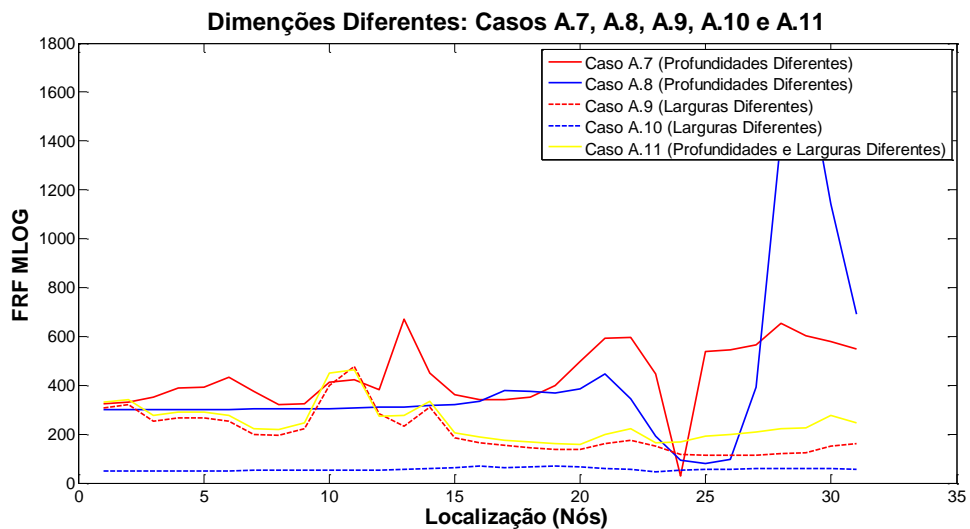
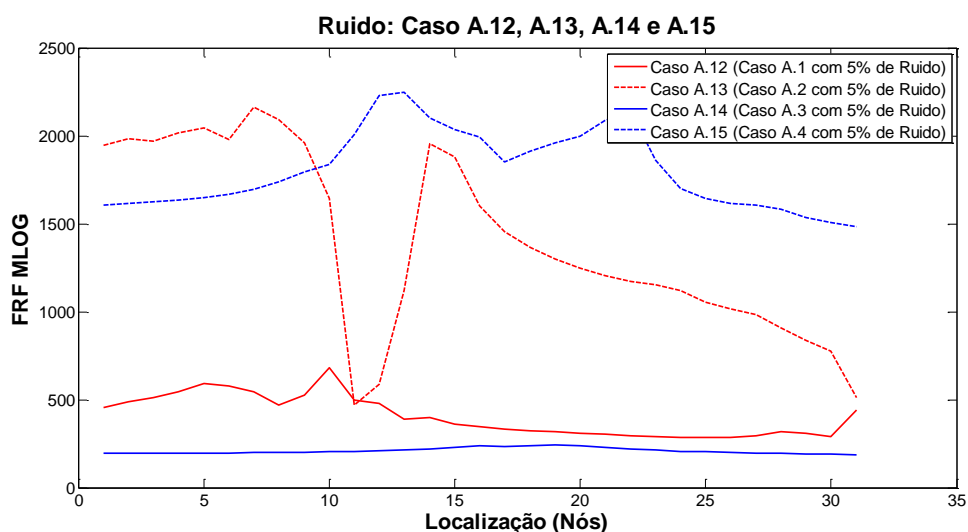


Figura 4.31 – FRF\_MLOG para Dimensões Diferentes



**Figura 4.32 – FRF\_MLOG para Dimensões Diferentes**

Este método na situação 1 localização, demonstra dois tipos indicadores (um máximo e outro mínimo) nas localizações correctas, mas devido à existência de algumas distorções ao longo da curva surgem alguns falsos indicadores de dano. Esta situação pode futuramente originar uma incorrecta análise estrutural.

Nas situações de duas localizações estas características adensam-se provocando um maior número de falsos indicadores e uma menor evidencia dos indicadores correctos.

Na situação de Ruído, este método adapta-se correctamente a dados com 5% de ruído.

## Estrutura B

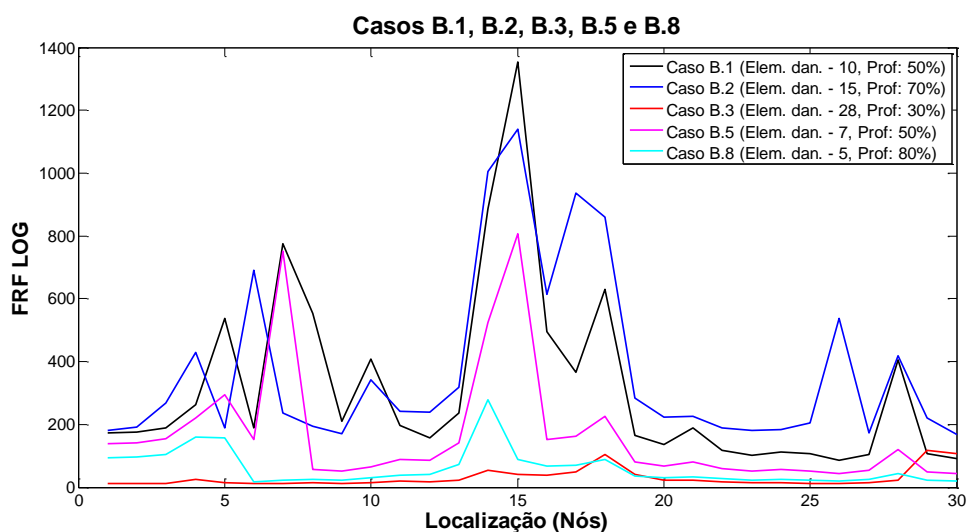


Figura 4.33 – FRF\_MLOG para os Casos B.1, B.2, B.3, B.5 e B.8

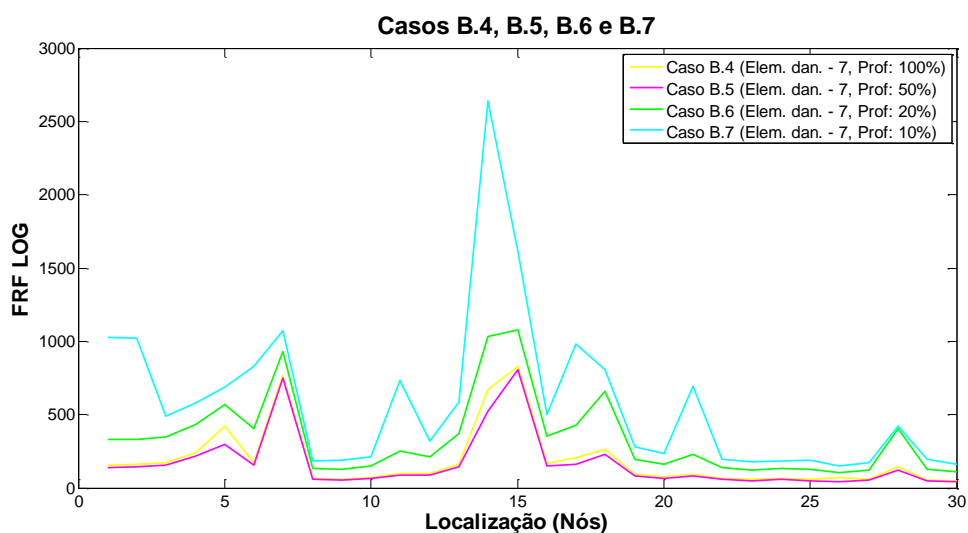
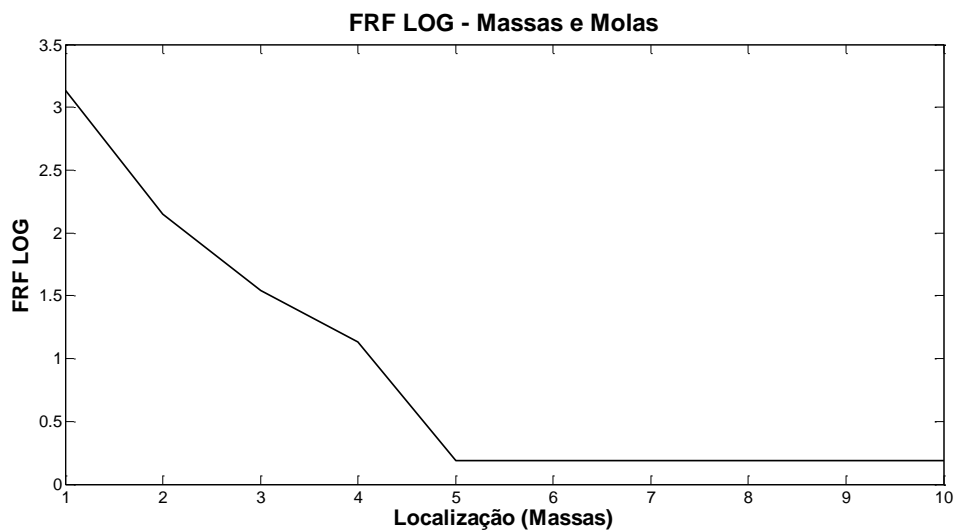


Figura 4.34 – FRF\_MLOG para os Casos B.4, B.5, B.6 e B.7

Este método em todos os casos evidencia um indicador caracterizado por um pico superior aos restantes numa localização central. Sendo este um falso indicador esconde os possíveis indicadores correctos

---

## Estrutura C



**Figura 4.35 – FRF\_MLOG para a estrutura C**

Esta implementação justifica o propósito da existência da estrutura C, onde se pretende verificar se um método continua a demonstrar resultados inconclusivos mesmo em sistemas simples. Neste caso, na figura 4.35, é possível destacar o indicador de dano e determinar correctamente a zona danificada da estrutura.

---

## 4.6. Erro na Relação Constitutiva (ERC)

Este método, sendo diferente em formulação aos anteriores e usa mais informação, foi selecionado porque tem vindo a demonstrar grandes capacidades de adaptação com resultados favoráveis. Esta formulação foi baseada no trabalho apresentado no artigo [17].

O erro da relação constitutiva é um conceito que foi inicialmente desenvolvido para determinar a diferença entre os modelos teóricos e experimentais, nomeadamente nas equações de equilíbrio e as relações constitutivas. Sendo as relações constitutivas de um sistema definidas como a relação de grandezas físicas de um certo material, estas terão que recorrer ao correcto conhecimento das propriedades da estrutura em estudo. Esta característica levou [18], a desenvolver uma noção de erro nas relações constitutivas pois, no modelo teórico, serão as mais proeminentes a diferir do modelo experimental.

Ao longo dos anos, vários trabalhos foram desenvolvidos recorrendo a esta noção, consequentemente adaptada e evoluída para diferentes casos.

### Formulação

Num caso genérico, dentro de um intervalo de tempo  $t \in [0, T]$ , uma estrutura tem domínio  $\Omega$  com condições de fronteira  $d\Omega$ . Para as condições dinâmicas, o problema tem de ter em consideração não só as condições iniciais e de fronteira e o equilíbrio dinâmico, mas também as relações constitutivas. Assim, nasce a solução do problema admissível  $(\underline{u}, \underline{\sigma}, \underline{\Gamma})$ .

- $\underline{u}$  é o Campo de Deslocamentos;
- $\underline{\sigma}$  é o Campo de Tensões;
- $\underline{\Gamma}$  é o Campo de Inercias;

Posto isto, as relações constitutivas são dadas pelas equações (4.31) e (4.32).

$$\underline{\sigma} = E\varepsilon(\underline{u}) \quad (4.31)$$

$$\underline{\Gamma} = \rho \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} \quad (4.32)$$

E é o Tensor de Hooke,  $\varepsilon(\underline{u})$  o Tensor das Extensões, e  $\rho$  a densidade do material.

Considerando que  $\underline{u}$  é uma quantidade Cinemática e  $\underline{\Gamma}$  e  $\underline{\sigma}$  são quantidades estáticas, podemos rescrever:

$$\underline{u}_c = \underline{u} \quad (4.33)$$

$$\underline{\sigma}_s = \underline{\sigma} \quad (4.34)$$

$$\underline{\Gamma}_s = \underline{\Gamma} \quad (4.35)$$

Deste modo, pode-se introduzir as quantidades cinemáticas ( $\underline{\sigma}_c$  e  $\underline{\Gamma}_c$ ) verificando as relações constitutivas (cinemáticas).

$$\underline{\sigma}_c = E\varepsilon(\underline{u}_c) \quad (4.36)$$

$$\underline{\Gamma}_c = \rho \frac{d^2 \underline{u}_c}{dt^2} \quad (4.38)$$

Como também as quantidades estáticas ( $\underline{u}_\sigma$  e  $\underline{u}_\Gamma$ ), verificando as relações constitutivas (estáticas).

$$\underline{\sigma}_s = E\varepsilon(\underline{u}_\sigma) \quad (4.39)$$

$$\underline{\Gamma}_s = \rho \frac{d^2 \underline{u}_\Gamma}{dt^2} \quad (4.40)$$

### Erro no domínio contínuo

Considerando dados harmônicos numa dada frequência  $\omega$ , é possível determinar o conjunto das soluções admissíveis  $s_\omega$  que tornam o erro na relação constitutiva ( $\eta_\omega^2(s_\omega)$ ) mínimo, num dado intervalo de frequência  $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ .

$$\begin{aligned} \eta_\omega^2(s_\omega) = & \frac{1-\gamma}{2} \int tr [E(\underline{\varepsilon}(\underline{u}_c) - \underline{\varepsilon}(\underline{u}_\sigma))(\underline{\varepsilon}(\underline{u}_c) - \underline{\varepsilon}(\underline{u}_\sigma))] d\Omega \\ & + \frac{\gamma}{2} \int \rho \omega^2 (\underline{u}_c - \underline{u}_\Gamma)(\underline{u}_c - \underline{u}_\Gamma) d\Omega \end{aligned} \quad (4.41)$$

O Parâmetro  $\gamma \in [0,1]$  adquire o valor 0 quando se conhece  $\rho$ , ou seja só se considera erro na relação constitutiva representada pela equação (4.31). No caso onde não existe informação significativa da natureza dos erros de modelação, tipicamente considera-se  $\gamma = 0.5$ .

---

## ERC Modificado

Tendo como objectivo o uso de dados experimentais, tem-se que adaptar a metodologia a esta alteração, ou seja a diferença entre os dados experimentais e os correspondentes dados teóricos tem de ser quantificada. Esta diferença é adicionada num termo extra nas relações constitutivas, que por consequente irá aumentar o seu erro.

Os dados experimentais serão referenciados como  $\tilde{\square}$ , e as diferenças são introduzidas considerando:

$$\left\| \underline{u}_c - \tilde{\underline{u}}_c \right\|^2 \quad (4.42)$$

$$\left\| \underline{\Gamma}_s - \tilde{\underline{\Gamma}}_c \right\|^2 \quad (4.43)$$

$$\left\| \underline{E}_d - \tilde{\underline{E}}_d \right\|^2 \quad (4.44)$$

$\underline{E}_d$  é a força aplicada na fronteira do Sistema.

Um dos problemas no uso de dados experimentais é a limitada informação a que estes dão acesso, i.e. a medição experimental em diversos casos, só é feita em alguns pontos da estrutura, o que leva à necessidade adaptar as normas acima representadas no subespaço correspondente aos GDLs medidos (cada ponto medido corresponde a um ou mais GDL).

A adaptação das normas é possível através de um processo de redução, abaixo denotado como  $\left\| \Pi \square \right\|$ . A equação do ERC Modificado é dada pela equação (4.45).

$$e_\omega^2 = \eta_\omega^2 + \frac{r}{1-r} \left\{ \gamma \left\| \Pi \underline{\Gamma}_s - \tilde{\underline{\Gamma}}_c \right\|^2 + (1-\gamma) \left\| \Pi \underline{u}_c - \tilde{\underline{u}}_c \right\|^2 + \left\| \underline{E}_d - \tilde{\underline{E}}_d \right\|^2 \right\} \quad (4.45)$$

$\Pi$  é um operador de projecção que permite seleccionar as coordenadas experimentais de entre as do modelo e  $r \in [0,1]$  é um parâmetro que indica a qualidade dos dados experimentais, sendo mais baixo para dados com ruído, um valor típico para este parâmetro é de 0.5.

---

## ERC no domínio discretizado

Num domínio discreto com N GDLs, os campos de deslocamentos só são conhecidos apenas nos nós do MEF. Obtendo então:

$$\underline{u}_c \Rightarrow U \quad (4.46)$$

$$\underline{u}_\sigma \Rightarrow V \quad (4.47)$$

$$\underline{u}_\Gamma \Rightarrow W \quad (4.48)$$

Nos termos de deslocamentos nos nós obtém-se:

$$\underline{\Gamma}_s = -\omega^2 MW \quad (4.49)$$

$$\underline{\tilde{c}}_c = -\omega^2 M_R \tilde{U} \quad (4.50)$$

Posto isto, reescreve-se o ERC da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e_\omega^2 = & \frac{1-\gamma}{2} (U - V)^T K (U - V) + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (U - W)^T M (U - W) \\ & + \frac{r}{1-r} \left\{ \frac{1-\gamma}{2} (\Pi U - \tilde{U})^T K_R (\Pi U - \tilde{U}) \right. \\ & + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (\Pi W - \tilde{U})^T M_R (\Pi W - \tilde{U}) \\ & \left. + \frac{1}{2} (\underline{F}_d - P \tilde{\underline{F}}_d)^T K^{-1} (\underline{F}_d - P \tilde{\underline{F}}_d) \right\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

M e K são as matrizes de rigidez e massa do sistema, e  $M_R$  e  $K_R$  são as matrizes de massa e rigidez reduzidas. O operador  $P$  transforma o vector da Força aplicada ( $\tilde{\underline{F}}_d$ ) num vector com a mesma dimensão que  $\underline{F}_d$ , nas coordenadas onde esta foi aplicada. É de notar que como só se considera com uma Força de cada vez, o vector  $\tilde{\underline{F}}_d$  é zero excepto na coordenada onde foi aplicada a Força.

Através da equação de equilíbrio dinâmico, num sistema não amortecido, obtém-se:

$$\underline{F}_d = KV - \omega^2 MW \quad (4.52)$$

Podendo-se rescrever a equação 4.51 só com os termos dos deslocamentos, originando a equação (4.53)

$$\begin{aligned} e_\omega^2 = & \frac{1-\gamma}{2} (U - V)^T K (U - V) + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (U - W)^T M (U - W) \\ & + \frac{r}{1-r} \left\{ \frac{1-\gamma}{2} (\Pi U - \tilde{U})^T K_R (\Pi U - \tilde{U}) \right. \\ & + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (\Pi W - \tilde{U})^T M_R (\Pi W - \tilde{U}) \\ & \left. + \frac{1}{2} (KV - \omega^2 MW - P\tilde{F}_d)^T K^{-1} (KV - \omega^2 MW - P\tilde{F}_d) \right\} \end{aligned} \quad (4.53)$$

### ERC para estruturas amortecidas

Para sistemas amortecidos, segundo [19], pode-se alterar as relações constitutivas, equação (4.31) e equação (4.32), adicionando um termo de amortecimento proporcional à massa e à rigidez.

$$\underline{\sigma} = E\varepsilon(\underline{u}) + C\dot{\varepsilon}(\underline{u}) \quad (4.54)$$

$$\underline{\Gamma} = \rho \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} + a \frac{d\underline{u}}{dt} \quad (4.55)$$

Sendo  $C$  e  $a$  os parâmetros relativos ao amortecimento linear. Neste caso, os campos de deslocamentos serão dados por:

$$U_c = U \quad (4.56)$$

$$\underline{\sigma}_s = E\varepsilon(V) + i\omega C\dot{\varepsilon}(V) \quad (4.57)$$

$$\underline{\Gamma} = -\omega^2 \rho(W) + i\omega a(W) \quad (4.58)$$

Criando a seguinte expressão de ERC:

$$\begin{aligned}
e_{\omega}^2 = & \frac{1-\gamma}{2} (U - V)^H [K + 2\pi\omega C](U - V) + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (U - W)^H M(U - W) \\
& + \frac{r}{1-r} \left\{ \frac{1-\gamma}{2} (\Pi U - \tilde{U})^H [K_R + 2\pi\omega C_R](\Pi U - \tilde{U}) \right. \\
& + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (\Pi W - \tilde{U})^H M_R(\Pi W - \tilde{U}) \\
& \left. + \frac{1}{2} (E_d - P\tilde{E}_d)^H K^{-1} (E_d - P\tilde{E}_d) \right\}
\end{aligned} \tag{2.222}$$

Onde a Solução admissível (U,V,W) tem de verificar a equação de equilíbrio dinâmico

$$E_d = [K + i\omega C]V - \omega^2 MW \tag{4.60}$$

Reescrevendo a equação 4.59 obtêm-se a equação 4.61.

$$\begin{aligned}
e_{\omega}^2 = & \frac{1-\gamma}{2} (U - V)^H [K + 2\pi\omega C](U - V) + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (U - W)^H M(U - W) \\
& + \frac{r}{1-r} \left\{ \frac{1-\gamma}{2} (\Pi U - \tilde{U})^H [K_R + 2\pi\omega C_R](\Pi U - \tilde{U}) \right. \\
& + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (\Pi W - \tilde{U})^H M_R(\Pi W - \tilde{U}) \\
& + \frac{1}{2} ([K + i\omega C]V - \omega^2 M.W - P\tilde{E}_d)^H K^{-1} ([K + i\omega C]V \\
& \left. - \omega^2 MW - P\tilde{E}_d) \right\}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

---

## ERC aplicado às FRFs

No contexto experimental, é necessário adaptar o ERC aos dados obtidos experimentalmente e teoricamente. Deste modo sabendo que uma FRF resulta do coeficiente entre o deslocamento medido na coordenada  $j$  e a força aplicada na coordenada  $k$ , pode-se escrever a equação 4.62.

$$\tilde{H}_{jk} = \frac{U_j}{\tilde{F}_{dk}} \quad (4.62)$$

Agrupando todas as FRFs experimentais numa Matriz de FRFs,  $\tilde{H}$ , é possível elaborar o ERC em ordem das FRFs.

$$\begin{aligned} e_{\omega}^2 = & \frac{1-\gamma}{2} (H_U - H_V)^H [K + 2\pi\omega C] (H_U - H_V) \\ & + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (H_U - H_W)^H M (H_U - H_W) \\ & + \frac{r}{1-r} \left\{ \frac{1-\gamma}{2} (\Pi H_U - \tilde{H})^H [K_R + 2\pi\omega C_R] (\Pi H_U - \tilde{H}) \right. \\ & + \frac{\gamma}{2} \omega^2 (\Pi H_W - \tilde{H})^H M_R (\Pi H_W - \tilde{H}) \\ & + \frac{1}{2} ([K + i\omega C] H_V - \omega^2 M H_W - I)^H K^{-1} ([K + i\omega C] H_V \\ & \left. - \omega^2 M H_W - I) \right\} \end{aligned} \quad (4.63)$$

$I$  é o vector de zeros excepto na coordenada onde a força foi aplicada e  $H_U$ ,  $H_V$  e  $H_W$  são as matrizes de FRFs provenientes dos campos de deslocamentos U, V e W divididos por  $\tilde{F}_d$ .

### Minimizar o ERC

De modo a otimizar o problema, ir-se-á determinar qual o conjunto de soluções admissíveis  $H_U$ ,  $H_V$  e  $H_W$  que minimizam o erro, considerando:

$$\frac{\delta e_{\omega}^2}{\delta (H_U, H_V, H_W)} = 0 \quad (4.64)$$

Noutros termos, a minimização do erro é equivalente ao sistema de equações dado pela equação 4.65.

$$A(\omega) \begin{Bmatrix} H_U \\ H_V \\ H_W \end{Bmatrix} = b(\omega) \quad (4.65)$$

Onde A é uma matriz hermidiana, que pode ser repartida nas seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (1 - \gamma)[K + 2\pi\omega C] + \gamma\omega^2 M + \frac{r}{1-r}(1 - \gamma)\Pi^T[K_R + 2\pi\omega C_R]\Pi \\ A_{12} &= -(1 - \gamma)[K + 2\pi\omega C] \\ A_{13} &= -\gamma\omega^2 M \\ A_{22} &= (1 - \gamma)[K + 2\pi\omega C] + \gamma\omega^2 M + \frac{r}{1-r}(1 - \gamma)\Pi^T[K_R + 2\pi\omega C_R]\Pi \\ A_{23} &= -\frac{r}{1-r}\omega^2[K + i\omega C]K^{-1}M \\ A_{32} &= -\frac{r}{1-r}\omega^2 MK^{-1}[K + i\omega C] \\ A_{33} &= \gamma\omega^2 M + \frac{r}{1-r} \{ \gamma\omega^2 \Pi^T M_R \Pi + \omega^4 MK^{-1}M \} \end{aligned} \quad (4.66)$$

E o vector b pode ser repartido nos seguintes vectores:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{r}{1-r}(1 - \gamma)\Pi^T[K_R + 2\pi\omega C_R]\tilde{H} \\ b_2 &= \frac{r}{1-r}[K + i\omega C]K^{-1}I \\ b_3 &= \frac{r}{1-r} \{ \gamma\omega^2 \Pi^T M_R \tilde{H} + \omega^2 MK^{-1}I \} \end{aligned} \quad (4.67)$$

### Localização dos erros

Nos termos de comparação entre o erro de cada elemento constituinte da estrutura e quanto estiver resolvida a equação 4.65, pode-se identificar o erro relativo em cada frequência, em cada elemento finito j e em cada força aplicada k, através da seguinte equação.

$$E_{jk\omega}^2 = \frac{(1 - \gamma)(H_{U_{jk}} - H_{V_{jk}})^H (K_j + 2\pi\omega\alpha M_j + 2\pi\omega\beta K_j)(H_{U_{jk}} - H_{V_{jk}}) + \gamma\omega^2 (H_{U_{jk}} - H_{W_{jk}})^H M_j (H_{U_{jk}} - H_{W_{jk}})}{\frac{1-\gamma}{2}(H_{U_k}^H (K + 2\pi\omega\alpha M + 2\pi\omega\beta K)H_{U_k} + H_{V_k}^H (K + 2\pi\omega\alpha M + 2\pi\omega\beta K)H_{V_k}) + \gamma\omega^2 (H_{U_k}^H M H_{U_k} + H_{W_k}^H M H_{W_k})} \quad (4.68)$$

Nesta equação foi considerado o amortecimento igual ao usado na modelação das estruturas, ou seja,  $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ .

---

## Estrutura A

O ERC foi implementado nesta estrutura atendendo à situação de incompletude mencionada no capítulo 3 (medindo apenas os graus de liberdade ao longo do eixo xx). Deste modo é possível testar o método para uma situação próxima da realidade experimental.

Nas figuras 4.36 a 4.50 estão dispostos os resultados de localização de dano com recurso ao ERC para os diversos casos da estrutura A.

### Resultados do método ERC

#### Situação de 1 Localização

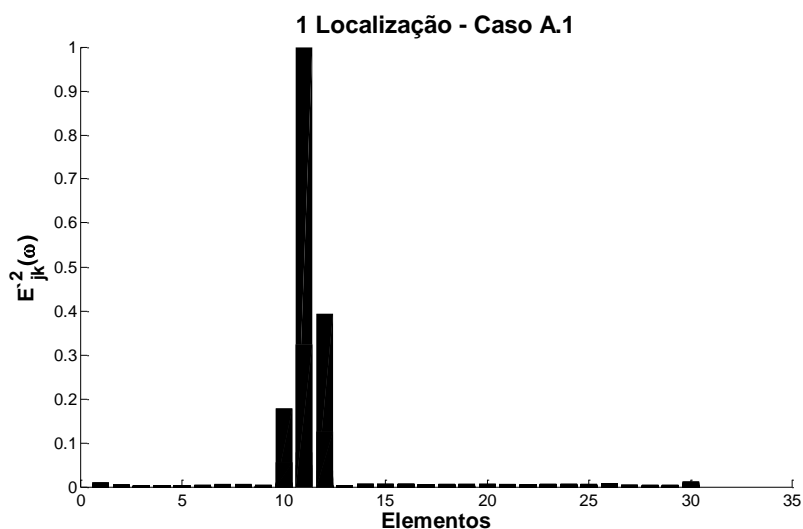


Figura 4.36 – ERC: 1 Localização – Caso A.1

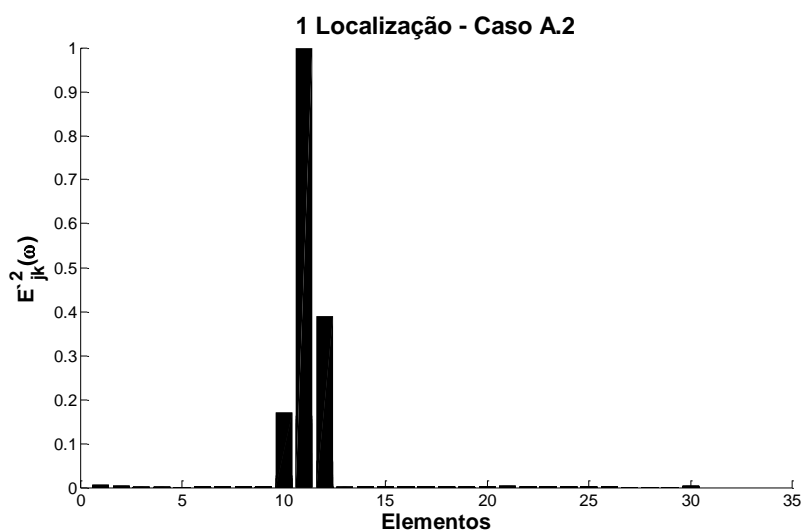
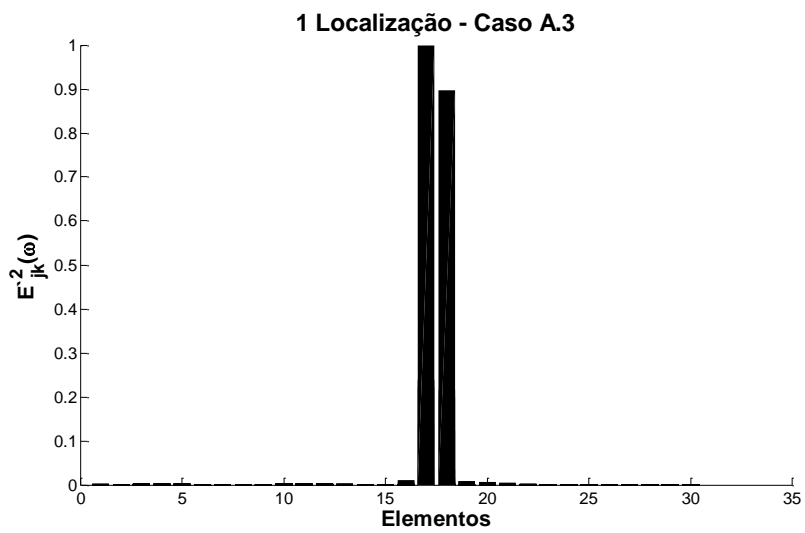
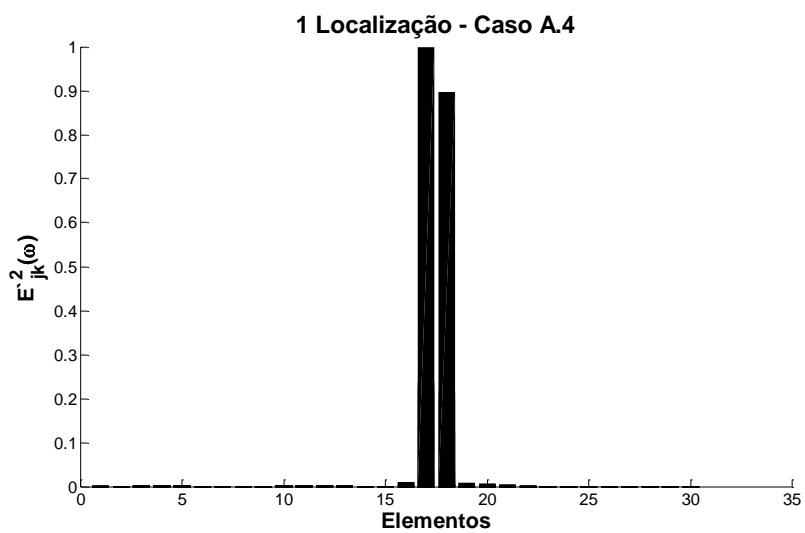


Figura 4.37 – ERC: 1 Localização – Caso A.2



**Figura 4.38 – ERC: 1 Localização – Caso A.3**



**Figura 4.39 – ERC: 1 Localização – Caso A.4**

## 2 Localizações

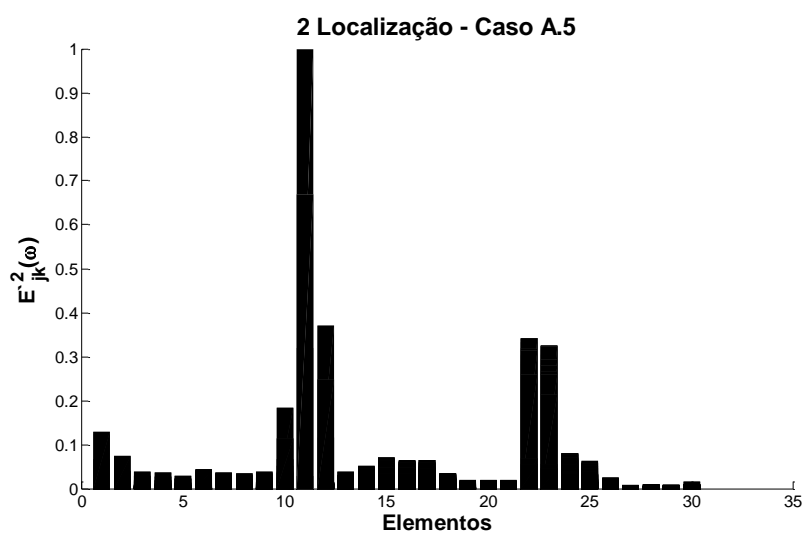


Figura 4.40 – ERC: 2 Localização – Caso A.5

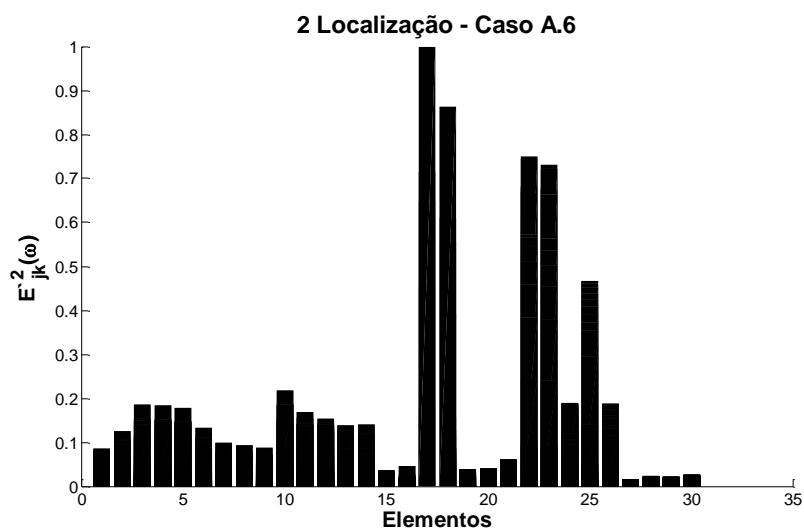


Figura 4.41 – ERC: 2 Localização – Caso A.6

---

## Dimensões de dano diferentes

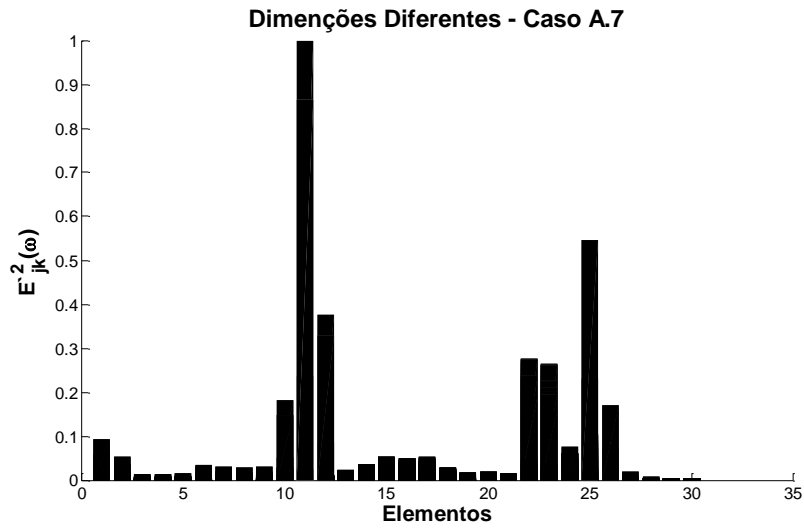


Figura 4.42 – ERC: Dimensões Diferentes – Caso A.7

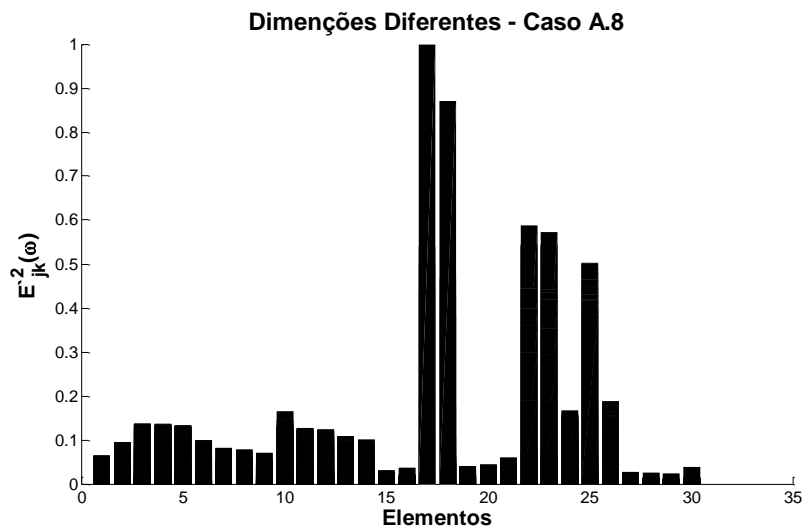


Figura 4.43 – ERC: Dimensões Diferentes – Caso A.8

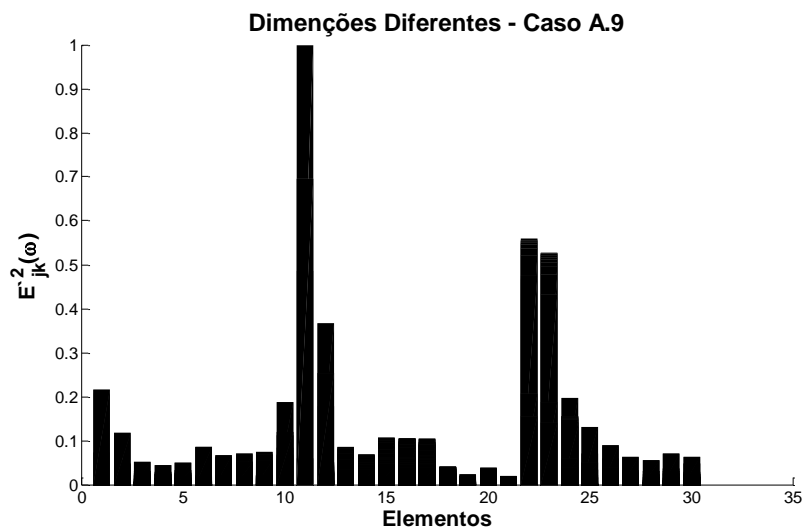
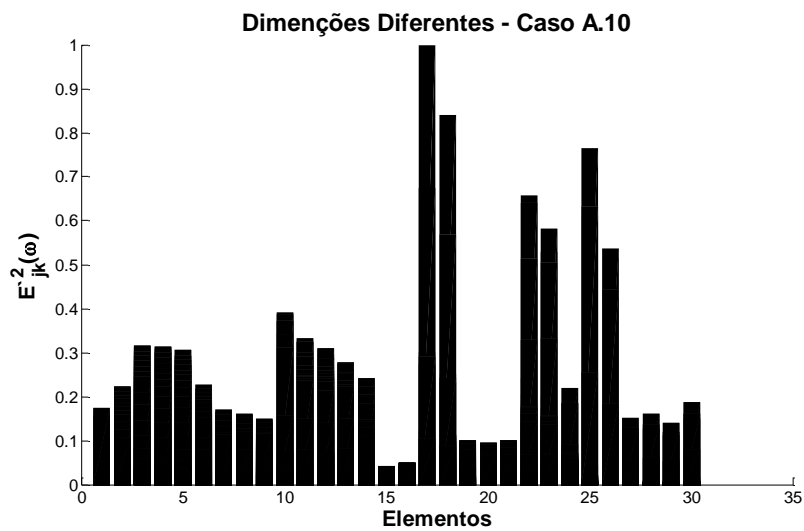
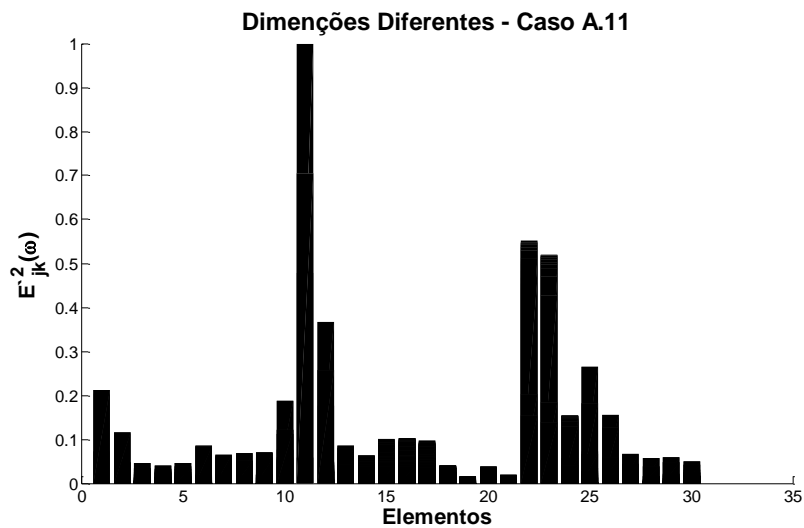


Figura 4.44 – ERC: Dimensões Diferentes – Caso A.9

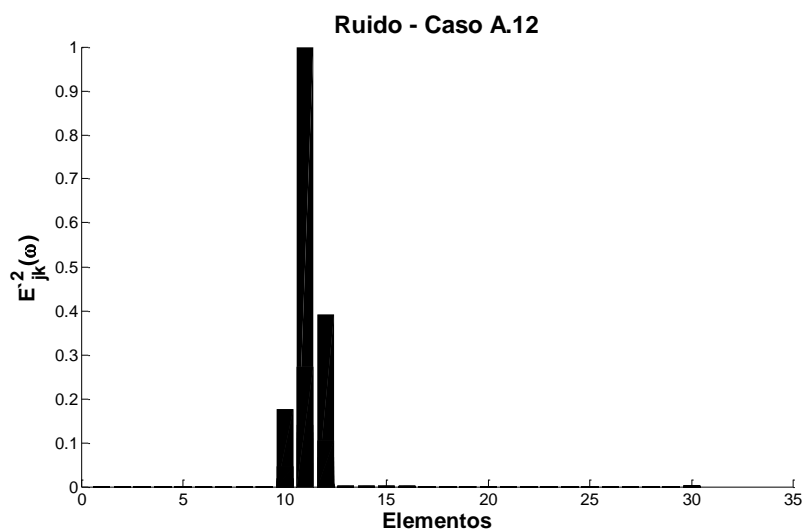


**Figura 4.45 – ERC: Dimensões Diferentes – Caso A.10**

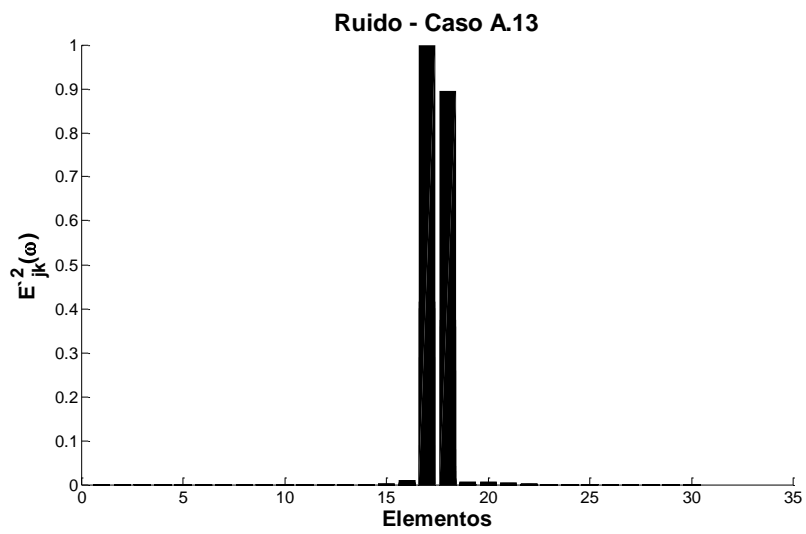


**Figura 4.46 – ERC: Dimensões Diferentes – Caso A.11**

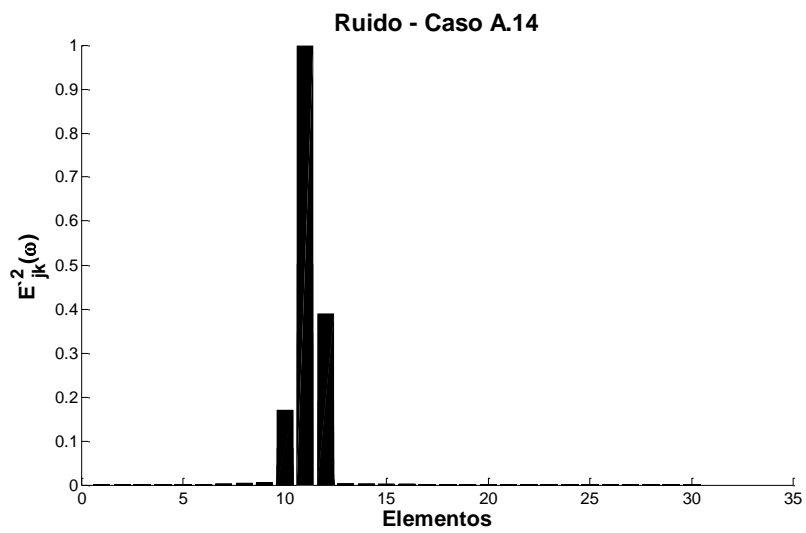
**Ruido**



**Figura 4.47 – ERC: Ruido – Caso A.12**



**Figura 4.48 – ERC: Ruido – Caso A.13**



**Figura 4.49 – ERC: Ruido – Caso A.14**

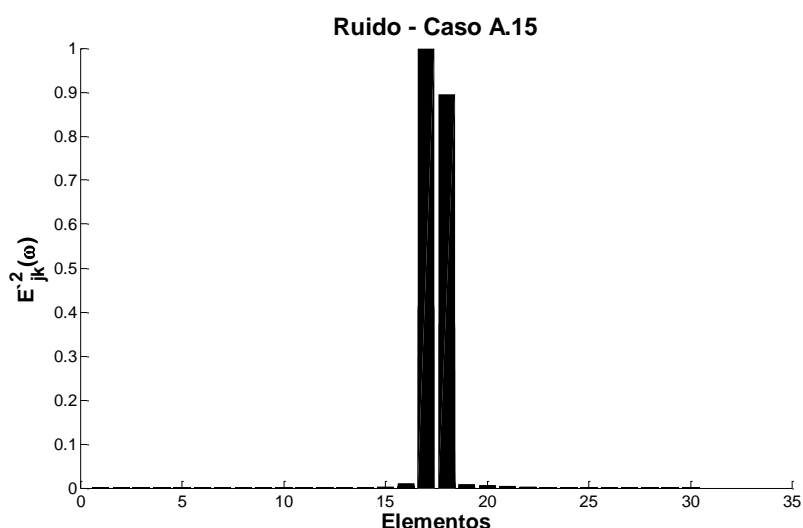


Figura 4.50 – ERC: Ruido – Caso A.15

Na situação de 1 Localização, nas figuras 4.36 e 4.37 (32%), o indicador de dano aponta uma zona danificada correspondente aos elementos 10, 11 e 12. Estando o dano apenas inserido num só elemento (11), os elementos 10 e 12 como partilham os graus de liberdade dos nós 11 e 12, serão afectados pelo erro no elemento danificado. Esta situação ocorre nas figuras 4.38 e 4.39 (53%), mas apenas dois elementos estão em evidência (17 e 18).

Na situação de 2 Localizações, as figuras 4.40 e 4.41 indicam as correctas localizações dos elementos danificados e seria esperado que as intensidades dos dois indicadores de dano fosse igual (elementos com dimensões iguais), mas estas intensidades são diferentes possivelmente devido à localização da excitação e à incompletude das medições.

Nas figuras 4.42, 4.43, 4.44, 4.45 e 4.46, na situação de Dimensões de dano diferentes, destaca-se o aparecimento de um erro relativo em todos os elementos, podendo este facto ser potenciado pela reduzida dimensão dos elementos danificados. Analogamente a 2 Localizações, as duas intensidades dos indicadores diferem entre si, mas nesta situação seria justificada pelas distintas dimensões dos dois elementos no mesmo caso.

Na situação de Ruido, as figuras 4.47, 4.48, 4.49, 4.50 revelam poucas alterações perante dados experimentais com 5% de ruído.

---

## Estrutura B

Na estrutura B aplicou-se o mesmo tratamento de dados indicados na estrutura anterior, ou seja os resultados foram simulados com incompletude nos graus de liberdade.

Nas figuras 4.51 a 4.58 estão dispostos os resultados de localização de dano com recurso ao ERC para os diversos casos da estrutura B.

### Casos B.1 a B.8

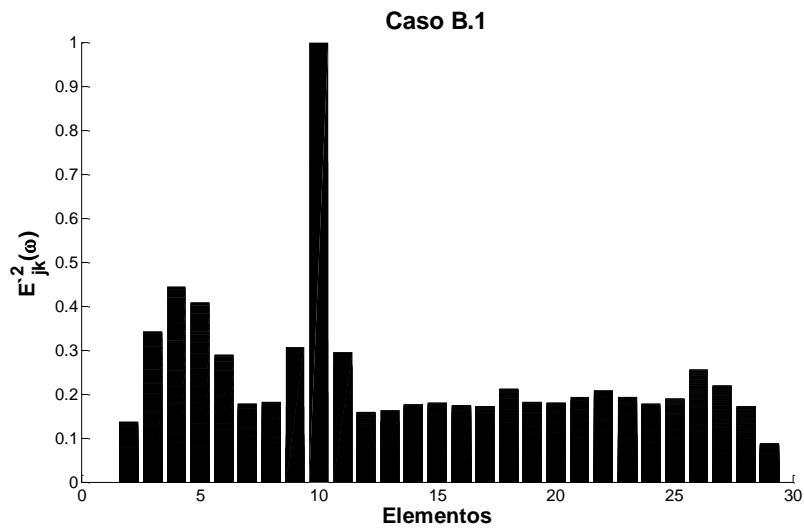


Figura 4.51 – ERC: Caso B.1

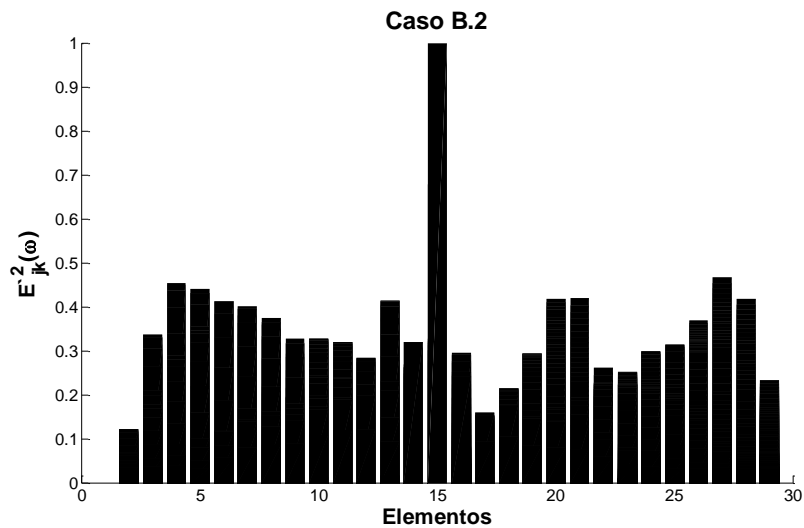


Figura 4.52 – ERC: Caso B.2

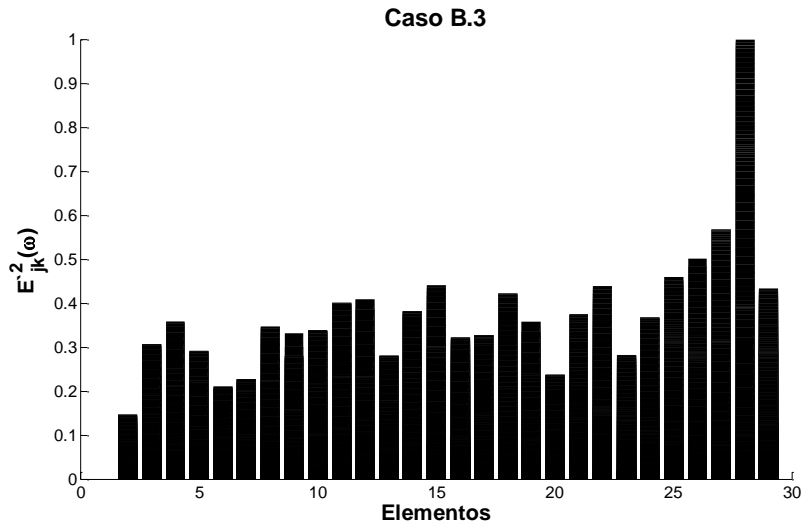


Figura 4.53 – ERC: Caso B.3

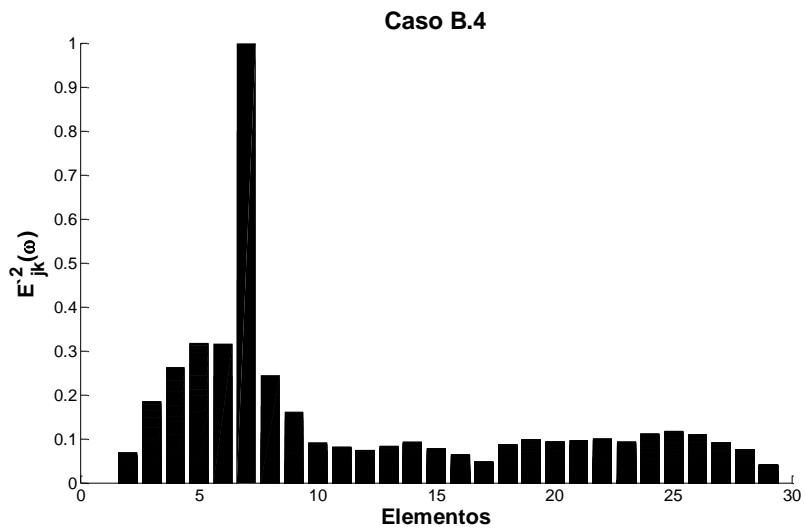


Figura 4.54 – ERC: Caso B.4

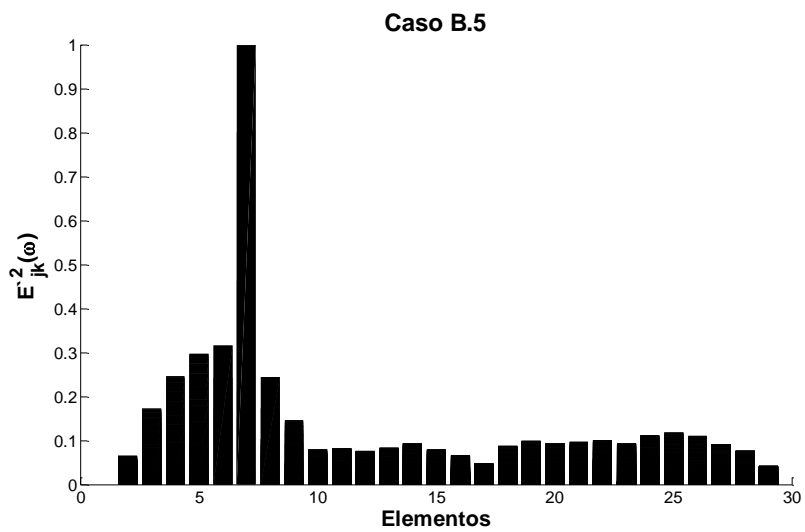


Figura 4.55 – ERC: Caso B.5

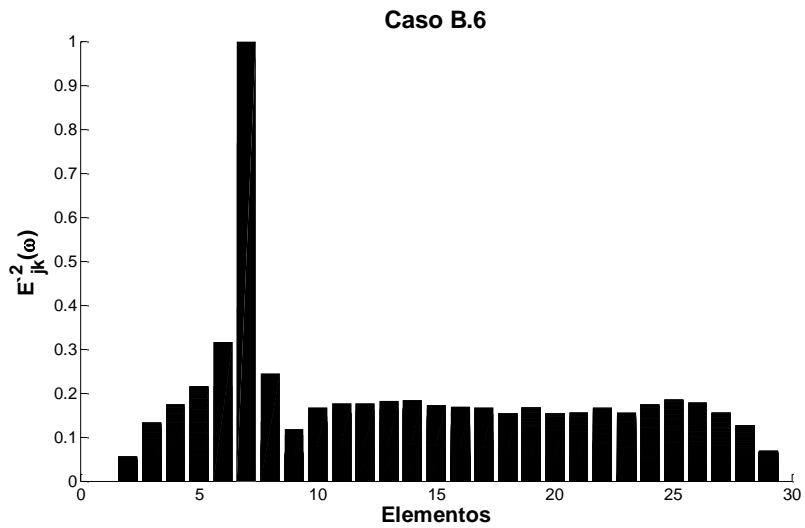


Figura 4.56 – ERC: Caso B.6

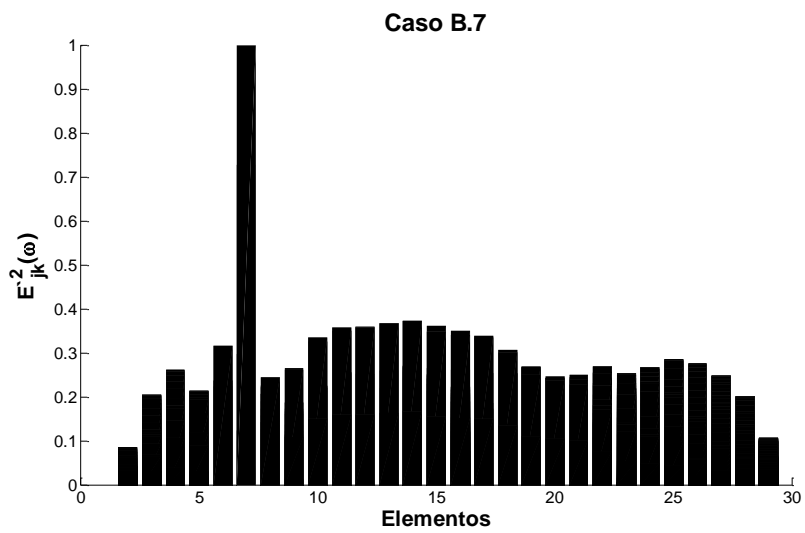


Figura 4.57 – ERC: Caso B.7

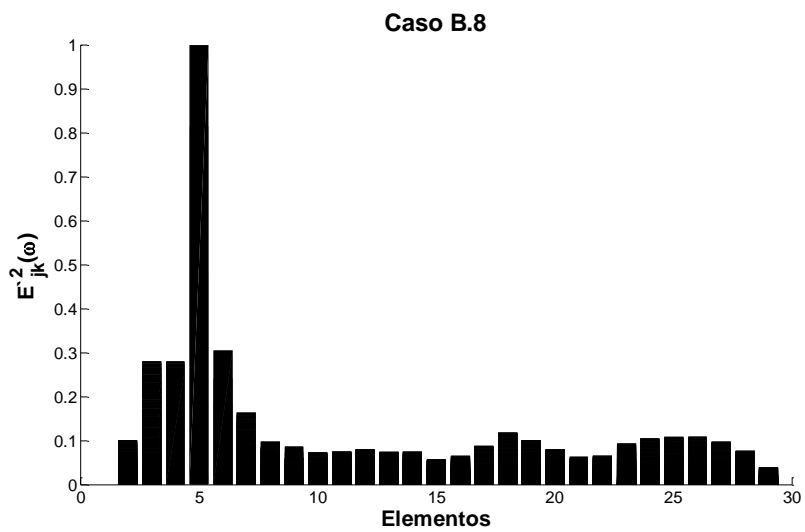


Figura 4.58 – ERC: Caso B.8

As figuras 4.51, 4.52, 4.53, 4.54, 4.55, 4.56, 4.57 e 4.58, referentes à implementação do ERC nos casos B.1, B.2, B.3, B.4, B.5, B.6, B.7 e B.8, evidenciam correctamente todos os elementos danificados mas destaca-se o erro comum a todos os elementos, possivelmente provocado pela situação de incompletude dos dados com características experimentais.

À semelhança da estrutura A, os elementos adjacentes ao elemento danificado adquirem um erro maior resultante da partilha dos graus de liberdade dos nós em comum.

Neste método é possível verificar, que através do erro comum aos elementos, as intensidades do indicador de dano é menor nos casos de uma profundidade reduzida e maior nos casos de uma profundidade maior. Esta situação inica alguma capacidade do ERC para quantificar.

## Estrutura C

A estrutura C é um sistema de massas e molas, sendo caracterizada pela sua modelação básica e acessível. Deste modo, com uma filosofia idêntica, o ERC ao ser adaptados para esta estrutura, pode ser desenvolvido e simplificado para uma versão mais directa e compreensível.

### ERC – Versão Simplificada.

Utilizando os conhecimentos teóricos constituintes da formulação do ERC através das equações (4.54), (4.55), (4.56), (4.57) e (4.58), e considerando apenas os erros resultantes das forças elásticas pode-se rescrever a equação (4.63).

$$e_{\omega}^2 = (H_U - H_V)^H K(H_U - H_V) + \frac{r}{1-r} \left\{ (\Pi H_U - \tilde{H})^H K_R (\Pi H_U - \tilde{H}) \right\} \quad (4.69)$$

A equação (4.69) à semelhança da equação (4.63) é descrita para um sistema discreto mas despreza-se o amortecimento.

Através da equação (4.70) é possível determinar as matrizes  $H_U$  e  $H_V$ , sendo este processo já mencionado anteriormente como Minimização do ERC.

$$\frac{\delta e_{\omega}^2}{\delta(H_U, H_V)} = 0 \quad (4.70)$$

$$\omega^2 M H_U = [K - Z] H_V \quad (4.71)$$

Posto isto, sabendo que a equação de equilíbrio dinâmico é dada pela equação (4.71),  $H_U$  e  $H_V$  são descritos pelas equações (4.72) e (4.73).

$$H_U = [ZK^{-1}Z + \Pi^H K_R \Pi]^{-1} \times [ZK^{-1}I + \Pi^H K_R \Pi \tilde{H}] \quad (4.72)$$

$$H_V = K^{-1} [I + \omega^2 M H_U] \quad (4.73)$$

Z é a Matriz de Impedâncias mais conhecida como a Matriz de Rigidez Dinâmica.

### Localização dos Erros - Versão simplificada

Através do Erro simplificado, pode-se rescrever a equação (4.68) para a versão simplificada, a equação (4.74).

$$E_{jk\omega}^2 = \frac{(1 - \gamma) (H_{U_{jk}} - H_{V_{jk}})^H K_j (H_{U_{jk}} - H_{V_{jk}})}{\frac{1 - \gamma}{2} (H_{U_k}^H K H_{U_k} + H_{V_k}^H K H_{V_k})} \quad (4.74)$$

## Resultados

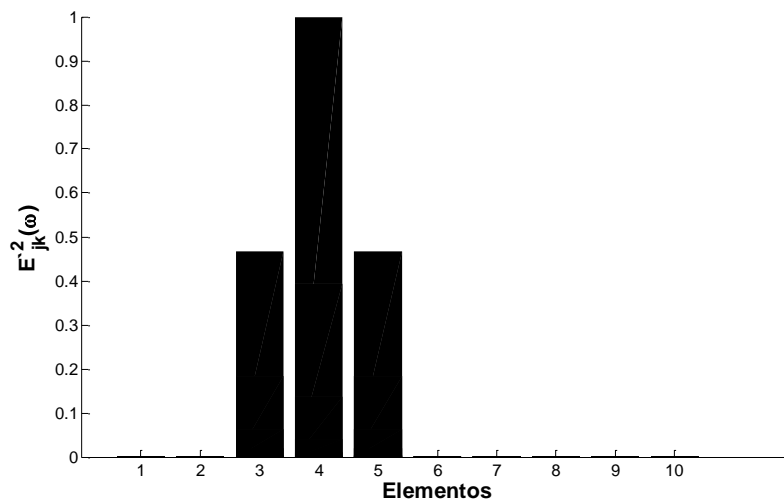


Figura 4.59 – ERC: Sistema de Molas e Massas

A Versão Simplificada do ERC aplicada nesta estrutura está demonstrada através da figura 4.59.

Nos resultados estão visíveis os impactos das molas 4 e 5 nos elementos 3 e 5 demonstrado pela presença de erro.

---

## Desafios das Implementações

Ao longo do processo de desenvolvimento e execução de cada método apresentado, foram surgindo alguns desafios que permitiram a melhor compreensão dos dados obtidos e a consequente otimização dos modelos estruturais desenvolvidos.

Estes desafios variaram consoante o tipo de método, estão indicados nos pontos seguintes.

- Qual o intervalo de Frequências utilizado? Este ponto foi muito debatido porque para alguns métodos (FRF\_MS e FRF\_MSS) quanto menos informação utilizada melhores resultados se obtêm. Mas no caso do ERC, este aspecto altera-se porque quanto mais informação maior irá ser o desempenho do método.
- Ajuste dos métodos: Este obstáculo surgiu durante a implementação do ERC, mais concretamente na estrutura B. Devido ao facto de existir um termo de comparação dos resultados obtidos com os resultados do artigo [1], foi necessário adaptar a formulação apresentada no artigo [17] (Sistema com amortecimento proporcional apenas à rigidez), às estruturas desenvolvidas no Capítulo 3 (Sistemas com amortecimento proporcional à massa e à rigidez).
- Incompletude e Simulação de Resultados: Embora tenha sido desenvolvido para a estrutura A e B uma situação de incompletude, alguns métodos não corresponderam com resultados esperados. Esta situação foi contornada com a adaptação de cada técnica à redução da informação.

---

## Proposta Avaliativa

Nesta secção irá ser proposta uma avaliação dos métodos consoante os resultados de cada implementação. Esta selecção é baseada na qualidade da informação obtida e adaptabilidade apresentada em cada estrutura. Nesta avaliação irá estar presente o carácter dos indicadores de dano demonstrados nos dados de cada implementação.

### Primeira avaliação

Conhecendo os parâmetros acima descritos e os comentários efectuados em cada implementação, avaliam-se os métodos para cada estrutura através de pontuação classificativa.

Esta pontuação varia entre 1 e 8 onde estão enumerados a baixo a importância que cada valor tem.

- 1 – Informação inconclusiva com indicadores de dano inexistentes.
- 2 – Informação inconclusiva com indicadores de dano inexistentes ou pouco realçados.
- 3 – Informação inconclusiva com diversos indicadores de dano falsos.
- 4 – Informação pouco conclusiva com indicadores de dano pouco realçados ou falsos.
- 5 – Informação conclusiva para alguns casos, mas inconclusiva na presença de ruído ou não detecta profundidades diferentes.
- 6 – Informação conclusiva em todos os casos mas com desempenho médio em diversas situações.
- 7 – Informação conclusiva, com bom desempenho em diversas situações
- 8 – Informação clara e concisa, com excelente desempenho em todas as situações, possibilidade de quantificação.

Na tabela 4.1 estão organizados os Métodos e as Estruturas com as respectivas avaliações.

**Tabela 4.1 – Resultados da Implementação**

	Est. A	Est. B	Est. C	Total
FRF_MS	7	6	5	18
FRF_MSS	6	7	6	19
FRF_MSC	5	8	7	20
FRF_MSCS	5	7	2	14
FRF_LOG	4	2	3	9
ERC	8	8	8	24

---

## Segunda avaliação

Nesta segunda avaliação iram ser expostos algumas características importantes num método de Localização de Dano. Considerando a primeira avaliação, apenas estão expostos os métodos que obtiveram resultados mais prometedores (a amarelo e a verde).

Cada método irá ser assinalado afirmativamente consoante a característica assinalada. Estas características surgem na sequência da análise dos resultados obtidos e do desenvolvimento numérico executado para cada situação. E são descritas nos seguintes pontos.

- Adaptação às estruturas: O método apresentou resultados semelhantes ou de leitura facilitada em todas as estruturas.
- Capacidade para Quantificar: O método demonstrou sinais de diferença entre casos relacionado com a dimensão do elemento danificado. Estes sinais têm de ser visível em todos as estruturas.
- Adaptação à Simulação de Resultados Experimentais: O método, devido à presença de dados experimentais indicou correctamente a zona do elemento danificado.
- Formulação Simples: Nos termos de modelação o método apresenta um carácter simples. (Ex: Uso directo de resultados experimentais)
- Formulação Complexa: Nos termos de modelação o método apresenta um carácter complexo. (Ex: Requer uma modelação prévia da estrutura em questão e/ou o tempo de computação é superior aos restantes métodos)

	FRF_MS	FRF_MSS	FRF_MSC	ERC
Adaptação às estruturas	X	X		X
Capacidade Para Quantificar				X
Adaptação aos Simulação de Resultados Experimentais	X	X	X	X
Formulação Simples	X	X	X	
Formulação Complexa				X

**Tabela 4.2 – Resultados da Implementação**

Na Tabela 4.2 estão assinalados os resultados da análise aos métodos dependendo das diversas características.

O Erro na Relação Constitutiva nas duas avaliações obteve um desempenho superior aos restantes métodos, tornando-o assim o método mais proeminente relativamente à área de Localização de Dano. No entanto é importante referir que o ERC foi o método mais exigente em termos de computação e formulação, ou seja, esta situação pode ser crítica no seu uso quando se pretende um método com menos qualidade mas de formulação simples.

---

## 4.7. Epítome do Capítulo

Neste capítulo estão apresentados diversos métodos referentes à localização mais distinguidos na comunidade científica.

No âmbito do objectivo de escolher o método mais proeminente nesta área, foram efectuados alguns testes a cada um de modo a entender o grau de adaptação e sensibilidade existentes.

Na sequência do capítulo 3, estes testes foram elaborados com recurso às implementações nas estruturas A, B e C, utilizando as noções de incompletude e Simulação de Resultados como forma de garantir uma maior aproximação da realidade.

Após a obtenção de resultados provenientes das implementações, foi elaborada uma proposta avaliativa com o propósito de eleger o método mais promissor dos apresentados.

Esta proposta avaliativa é composta por dois momentos de avaliação eliminatórios, sendo a primeira destinada a classificar todos os métodos quanto à sua capacidade para indicar dano nas localizações correctas, e a segunda destinada a qualificar os métodos com as características compreendidas como necessárias num método de localização.

O método revelado como sendo o mais promissor foi o ERC pois em ambos os momentos de avaliação passou com distinção dos restantes.



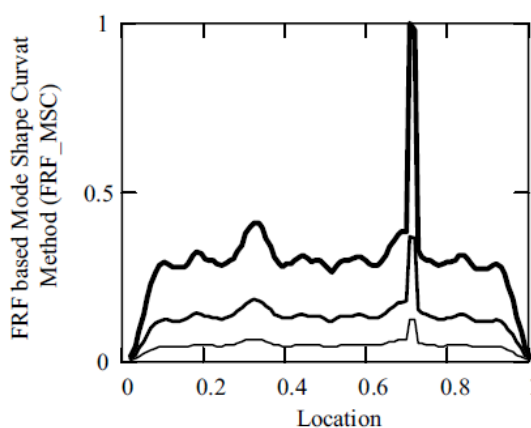
---

## 5. Quantificação

---

Sendo este tema correspondente ao terceiro grau de identificação de dano é só desenvolvido depois do estudo da localização, encontrando-se ainda na fase inicial da sua investigação. Contudo, diversos autores já demonstram algumas opções de quantificação nos seus trabalhos com resultados promissores na aquisição do objectivo pretendido

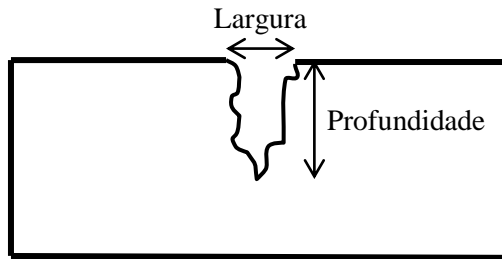
No âmbito das FRFs, [14] utiliza uma técnica de quantificação baseada na comparação entre indicadores de dano obtidos através de métodos de Localização. Nesta técnica consegue-se saber a extensão dos danos menores perante a extensão do dano maior, (Fig. 5.1). No entanto, esta quantificação é apenas relativa, não se sabendo a real extensão do dano.



**Figura 5.1** – Figura retirada de [14] onde estão representados para a mesma estrutura três extensões de dano diferentes

Como se pode verificar através da fig. 5.1, cada curva obtida através do método da curvatura foram divididos pelo máximo dos máximos representados pelos picos a 0.7 de comprimento. Sendo esse pico indicador da localização do dano permite também analisar, em confronto com máximo maior, os danos dos outros sistemas são menores em pelo menos 60% e 80%. Mas sem saber previamente qual o impacto do dano maior na estrutura, esta técnica serve apenas de comparação.

Assim sendo, no presente capítulo vai ser proposta e estudada uma técnica que se foca na geometria da zona danificada. Como o dano estudado é representado sob a forma de uma fissura ou fenda, existem dois parâmetros básicos para o caracterizar, a largura e a profundidade, (Fig. 5.2)



**Figura 5.2** – Fissura num troço de viga

## 5.1. Largura

A Largura de uma fenda é medida na superfície da viga e considera-se que se mantém igual ao longo da profundidade, assim o método desenvolvido para determinar a extensão da largura, é efectuado inteiramente através do MEF.

### 5.1.1. Descrição do Método

Este método consiste na refinação da malha de elementos finitos no local onde se observou a presença de dano. Ou seja, tendo sido aplicado numa estrutura uma malha com  $x$  elementos, e observa-se dano num deles, aplica-se nesse mesmo elemento uma malha mais fina. De seguida, se o dano continuar a ser observado num só elemento, aplica-se uma malha ainda mais fina a esse mesmo, e assim sucessivamente, até o dano se encontrar em dois ou mais elementos seguidos.

O valor aproximado correspondente à largura da fenda será a soma da largura dos elementos danificados.

### Casos extra

Numa outra situação, a fenda pode estar compreendida entre dois elementos, pois se situa entre estes dois. Deste modo, aplica-se logo de início a malha fina nos dois elementos e assim sucessivamente.

### Demonstração exemplificativa

Considerando uma estrutura (viga) dividida em 11 elementos, como a representada na figura 5.3, através do método de localização, situa-se o dano no elemento a sombreado (fig. 5.4)

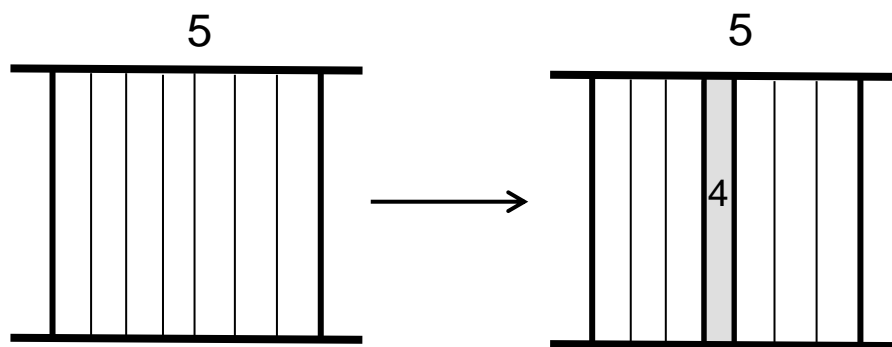


**Figura 5.3** – Viga com 11 elementos finitos



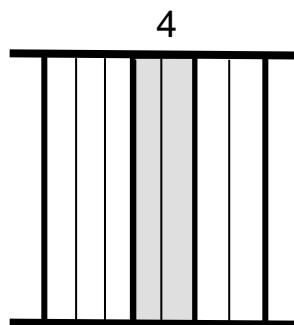
**Figura 5.4** – Viga com dano compreendido no elemento 5

Sabendo que o dano se encontra no elemento 5, aplica-se uma malha mais fina, sendo por exemplo, neste caso composta por 6 elementos. Na Figura 5.5 é possível notar que a situação inicial torna a acontecer, mas agora num elemento mais estreito (4).



**Figura 5.5** – Esquema referente a refinação de malha no elemento 5 com dano compreendido no novo elemento 4

Deste modo, para esse elemento aplica-se de novo uma malha mais fina.



**Figura 5.6** – Refinação de malha no elemento 4 com dano compreendido em dois elementos

Na figura 5.6, dois dos elementos foram marcados como danificados, ou seja, o dano está compreendido dentro dos seus limites e terá aproximadamente a largura igual à soma dos comprimentos dos dois elementos.

Ao longo deste método, recorre-se sempre a um método de localização escolhido para determinar qual ou quais os elementos onde o dano está compreendido.

## 5.2. Profundidade

Uma técnica mais inovadora e com resultados mais desejados no âmbito da quantificação é utilizada por [20] onde permite uma determinação aproximada da profundidade do dano quando este adquire a forma de uma fenda ou fissura.

Os autores utilizam um erro proveniente da diferença entre os coeficientes de flexibilidade, (CF), dos sistemas em estudo, com dano e sem dano.

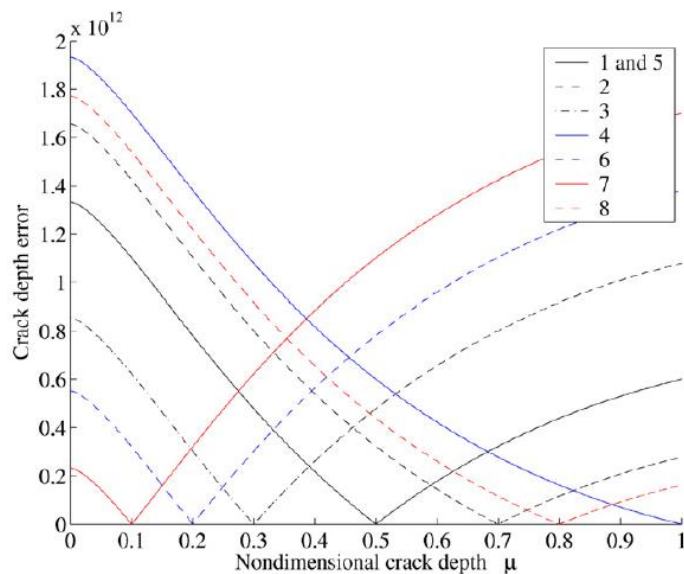
$$e_{\mu}^2 = \sum_i \sum_j (CF_{com,jk} - CF_{sem,jk})^2 \quad (5.0)$$

Onde  $\mu$  representa a profundidade adimensional dado por  $\mu = \frac{\text{profundidade}}{\text{espessura total}}$ . O mínimo deste erro será correspondente à profundidade aproximada.

Numa analogia mais simples, é possível reescrever a equação (5.0) com base na Diferença entre matrizes de rigidez.

$$e_{\mu}^2 = \sum_i \sum_j (K_{Teo} - K_{Iden})^2 \quad (5.1)$$

Para um melhor entendimento deste conceito, recorre-se a metodologia já demonstrada [1], que deduz um erro da diferença quadrada entre os coeficientes de flexibilidade identificados e teóricos, na qual fazem variar a profundidade no modelo numérico, e o que demonstrar um erro menor será o valor mais próximo. Esta técnica é demonstrada pelos autores através da figura 5.7 para diversos casos.



**Figura 5.7** – Figura retirada de [1] onde estão representados os diversos caso com profundidades diferentes.

---

## Método modificado - Método Aplicado às FRFs

Neste segmento é apresentado um método que deriva do método apresentado anteriormente mas neste caso procede-se à diferenciação entre FRFs.

A extensão da profundidade atingida pela fenda, previamente localizada, é calculada através da comparação de valores teóricos e práticos, ou seja, entre as FRFs medidas na estrutura real (FRF\_IDEN), e FRFs obtidas com recurso ao MEF da estrutura (FRF\_TEO).

Deste Modo, pode-se reescrever a equação (5.0) da seguinte forma.

$$e_{\mu}^2 = \left( \sum_{\omega} FRF_{TEO} - \sum_{\omega} FRF_{IDEN} \right)^2 \quad (5.2)$$

Num nível mais global da estrutura, como cada FRF corresponde a um ponto de medição e a um ponto de solicitação, pode-se desenvolver esta técnica de modo a ser possível o uso de várias FRFs ao longo da estrutura. Deste modo recorre-se à matriz de FRFs  $[H(\omega)]$ .

$$e_{ij}^2 = \left( \sum_{\omega} H(\omega)_{Teo} - \sum_{\omega} H(\omega)_{Iden} \right)^2 \quad (5.3)$$

$$e_{\mu}^2 = \sum_i \sum_j e_{ij}^2 \quad (5.4)$$

É importante notar que esta metodologia pode ser desenvolvida para casos mais genéricos com uma matriz  $[H(\omega)]$  rectangular, onde as medições e as forças de excitação não necessitam de se situar nas mesmas localizações numa dada gama de frequências.

---

## Método modificado – Aplicado às Estruturas

No âmbito de avaliar este método, aplica-se em cada uma das estruturas definidas no capítulo 3, o método das diferenças entre as rigidezes e o método modificado, o das diferenças entre FRFs. Deste modo irá ser possível verificar se uso directo dos dados experimentais pode substituir a diferenças entre as matrizes de rigidez.

### Estrutura A

A estrutura A foi desenvolvida com diversas situações para apoiar o estudo dos métodos apresentados ao longo do trabalho, mas neste caso apenas irá ser aplicado o método de quantificação na situação de 1 Localização. As implementações abaixo foram efectuadas com uma profundidade adimensional de 0.1, (Fig. 5.8 – 5.11)

## Resultados

### Diferença entre matrizes de rigidez

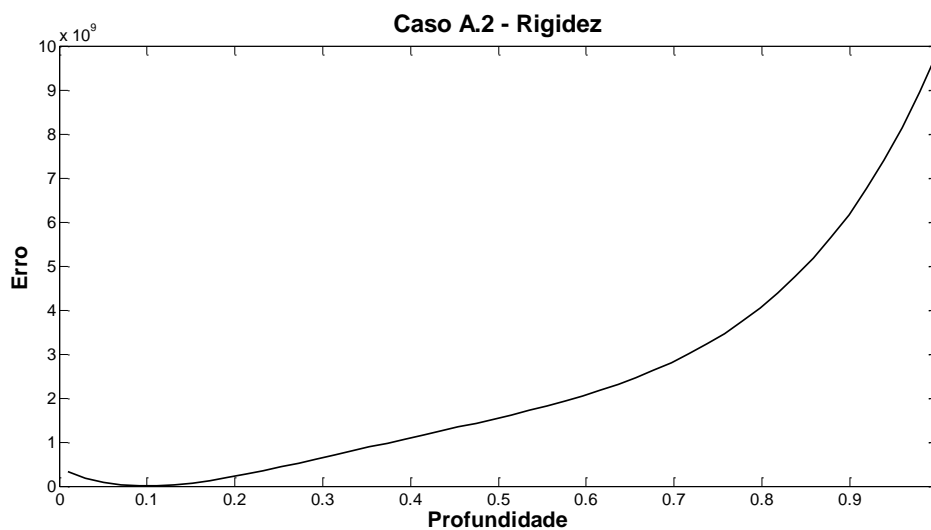
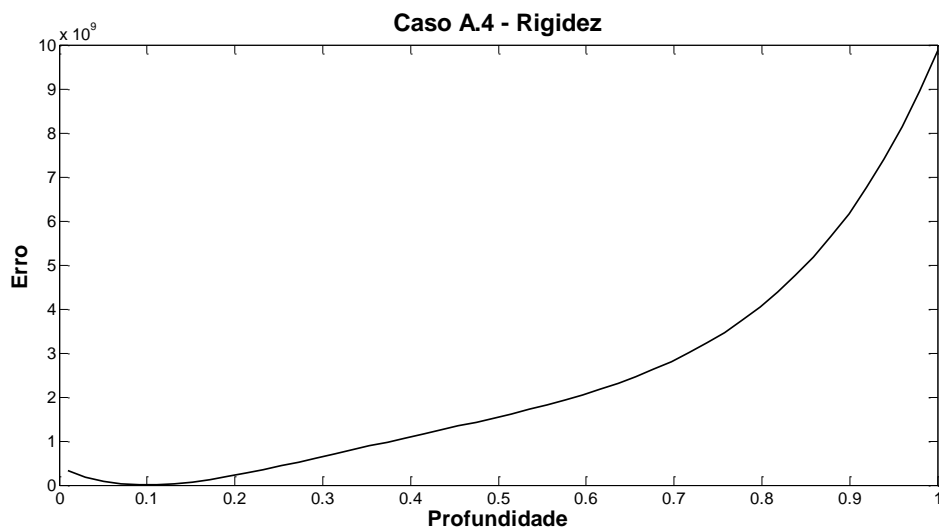
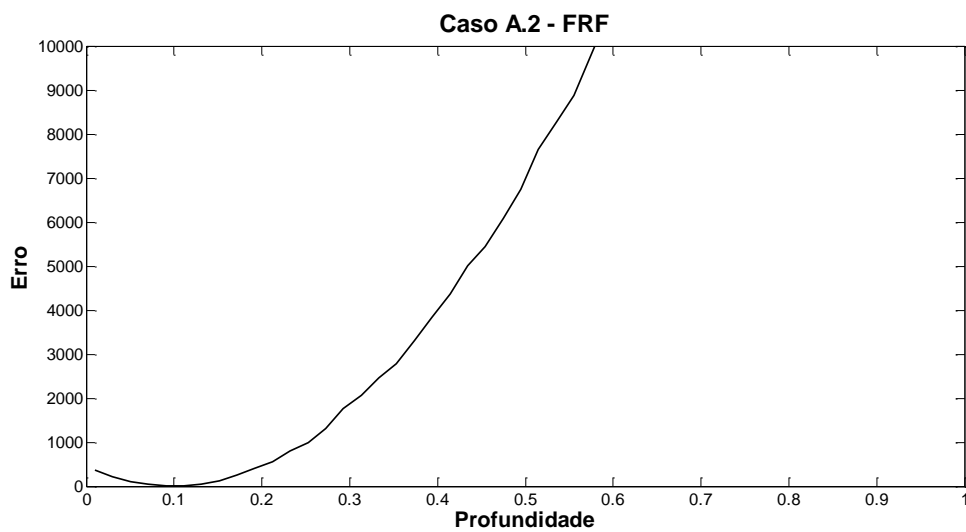


Figura 5.8 – Diferenças de Rigidez aplicado no caso A.2

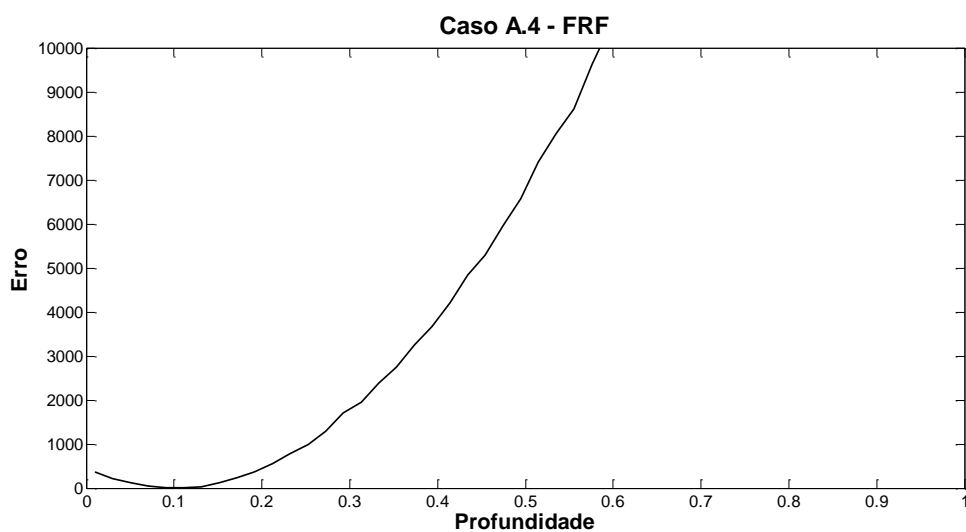


**Figura 5.9** – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso A.4

### Diferença entre FRFs



**Figura 5.10** – Diferenças entre FRFs aplicado no caso A.2



**Figura 5.11** – Diferenças entre FRFs aplicado no caso A.4

Comparando os resultados das figuras 5.8 e 5.9 com as figuras 5.10 e 5.11, destaca-se o bom desempenho obtido com a directa aplicação das FRFs da estrutura para descobrir a profundidade aproximada. Deste modo, não existe a necessidade de descobrir a rigidez do elemento pois possibilita o uso directo dos resultados experimentais.

---

## Estrutura B

A estrutura B foi projectada com 8 casos diferentes de dano, mas para esta secção apenas os casos B.1, B.2, B.6, B.7 e B.8 serão utilizados na implementação do método apresentado anteriormente, (Fig 5.12- 5.21). Os casos B.3, B.4 e B.5 foram descartados pois não iriam contribuir com informação significativa para o estudo deste trabalho.

### Resultados

#### Diferença entre matrizes de rigidez

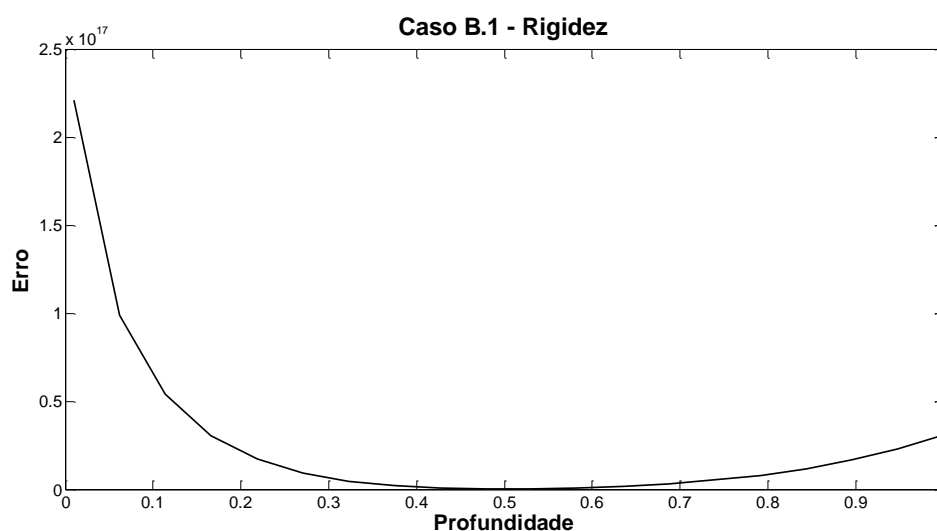


Figura 5.12 – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso B.1

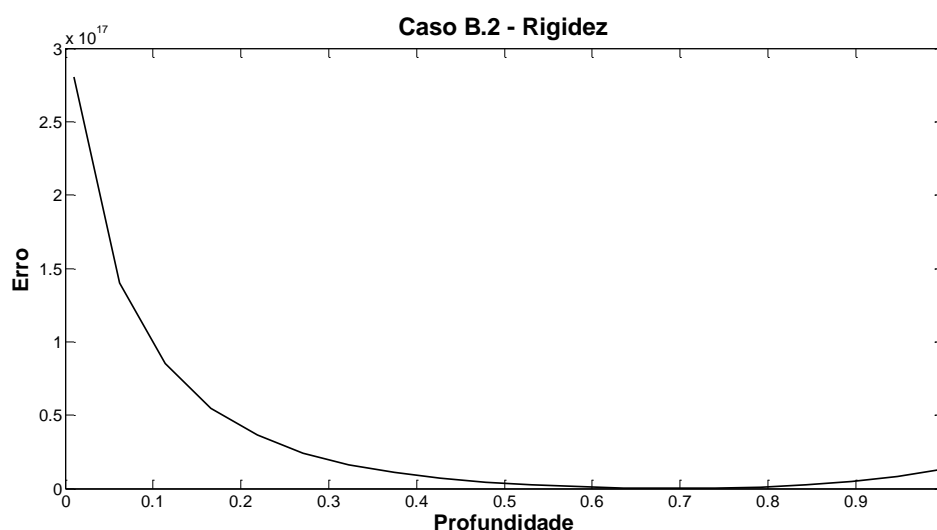
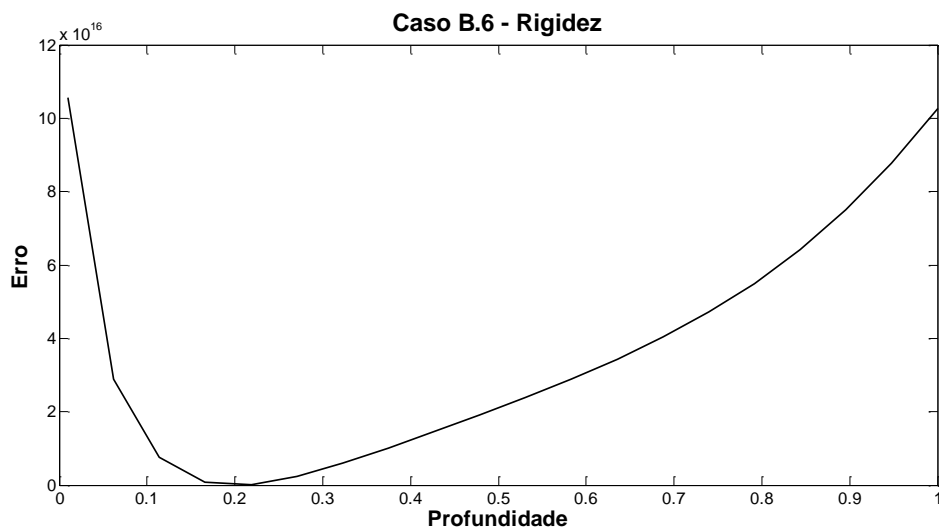
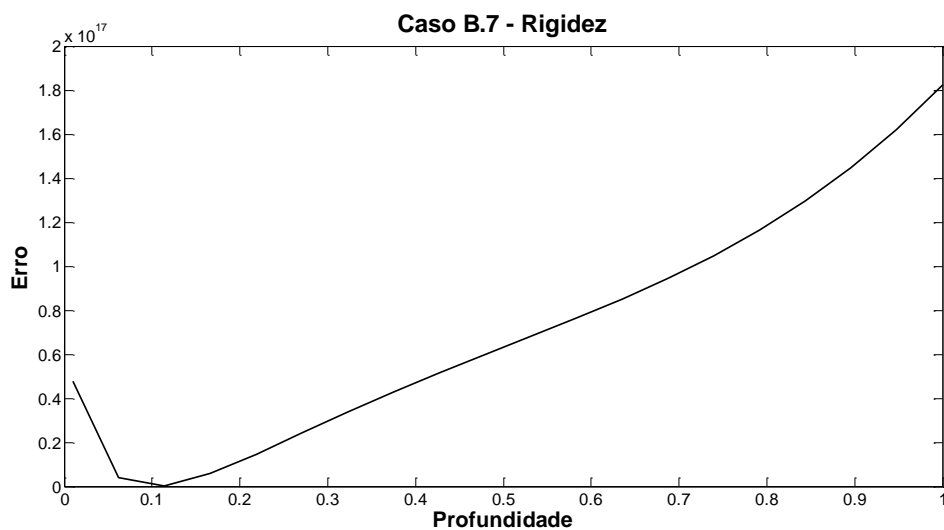


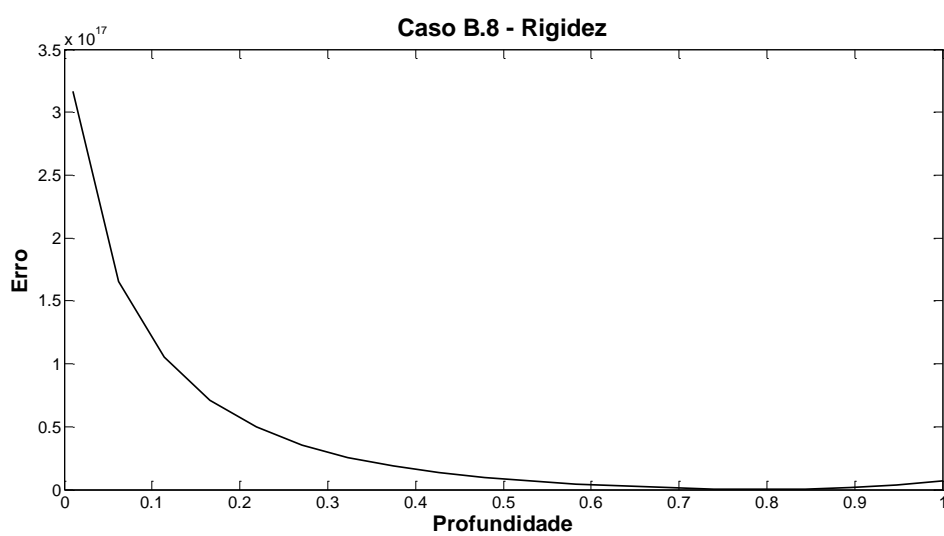
Figura 5.13 – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso B.2



**Figura 5.14** – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso B.6



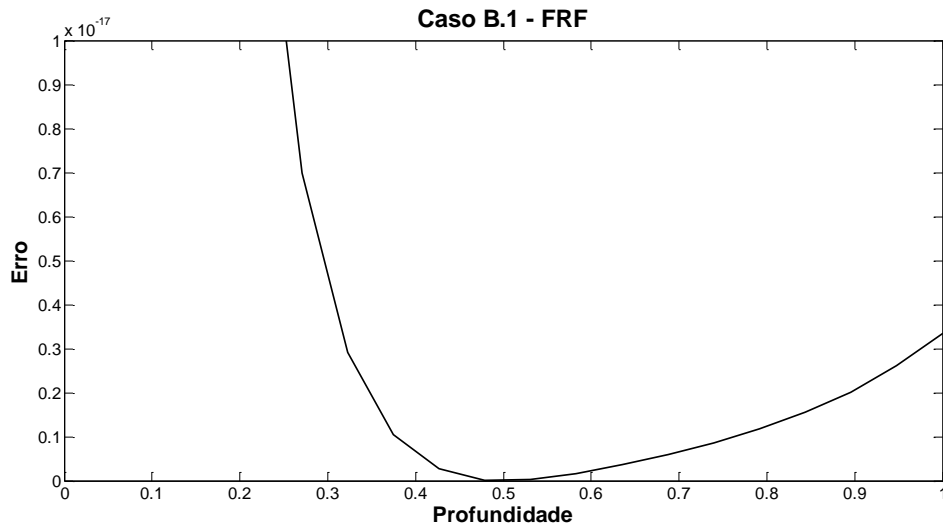
**Figura 5.15** – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso B.7



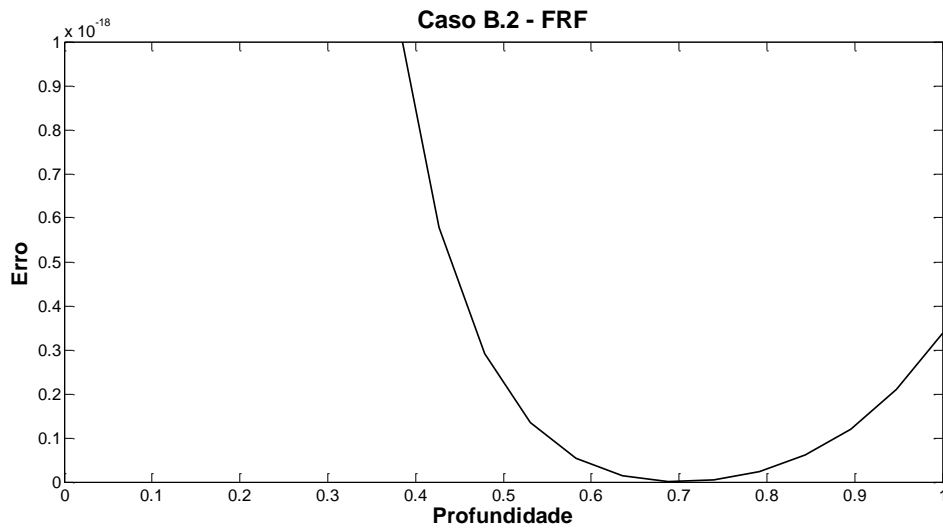
**Figura 5.16** – Diferenças entre Rigidez aplicado no caso B.8

---

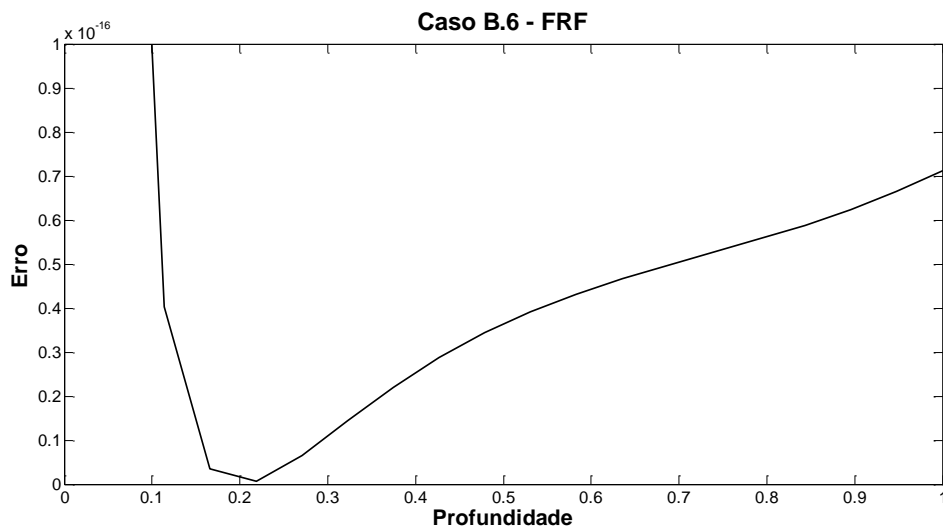
## Diferença entre FRFs



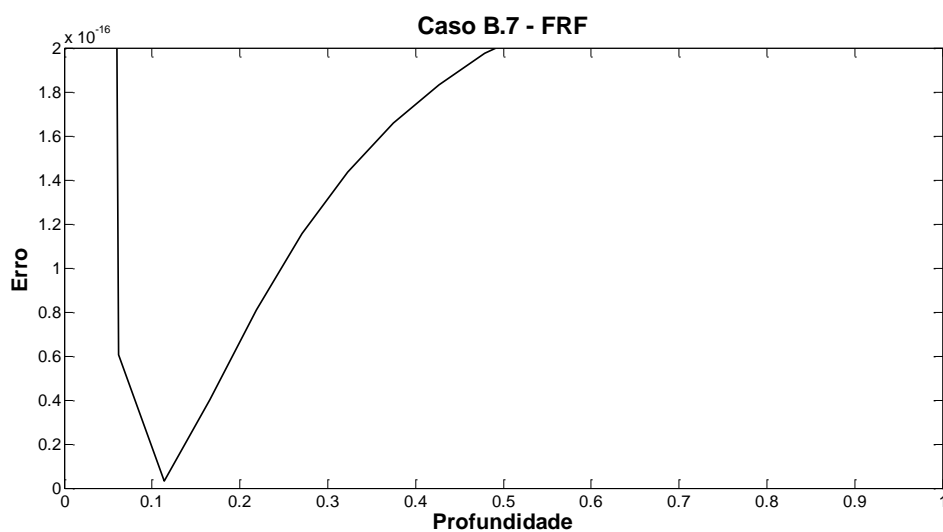
**Figura 5.17 – Diferenças entre FRFs aplicado no caso B.1**



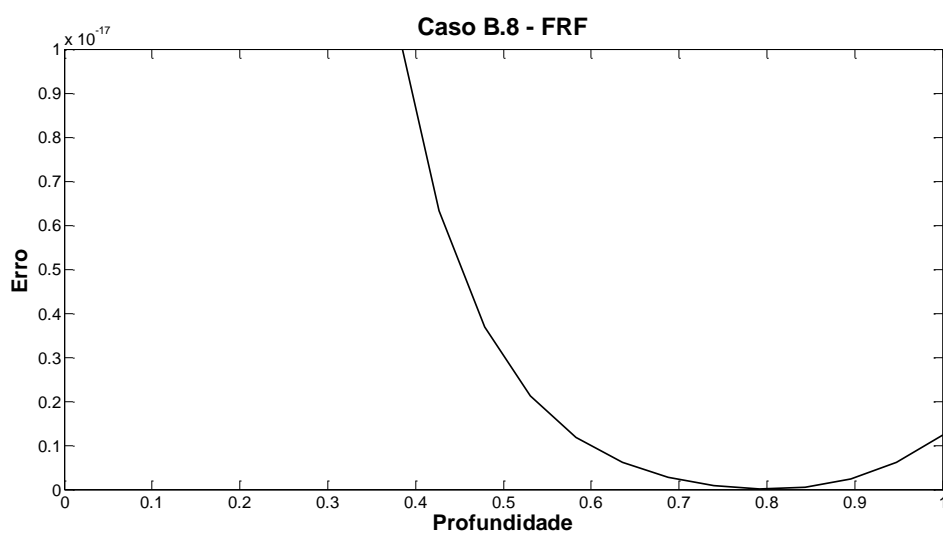
**Figura 5.18 – Diferenças entre FRFs aplicado no caso B.2**



**Figura 5.19 – Diferenças entre FRFs aplicado no caso B.6**



**Figura 5.20** – Diferenças entre FRFs aplicado no caso B.7



**Figura 5.21** – Diferenças entre FRFs aplicado no caso B.8

Analogamente à estrutura A, a informação obtida na Diferença entre FRFs é semelhante, e nalguns casos melhor, que nas diferenças entre Rigidezes. Assim sendo, é demonstrado o bom desempenho do método modificado no âmbito da quantificação de dano.

---

## Estrutura C

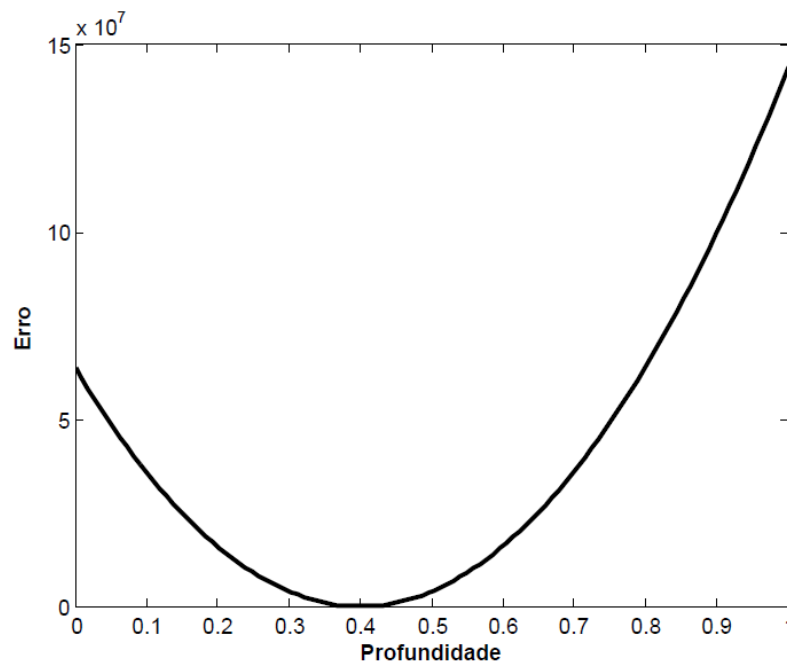
Na Estrutura C para a mesma localização de dano (mola 4) fez-se variar a extensão do mesmo. Deste modo simula-se a variação da profundidade do dano numa viga.

Posto isto, e analogamente à metodologia utilizada por [20] o valor da profundidade adimensional aplicado neste caso é dado por  $\mu_{mola} = \frac{\text{Rigidez Reduzida}}{\text{Rigidez Total}}$ .

## Resultados

Os resultados apresentados estão divididos em duas partes. A primeira parte é implementada na estrutura o método que serviu como base neste estudo (Diferenças entre matrizes de rigidez). Posteriormente é implementado o método proposto (Diferenças entre FRFs), (Fig. 5.22 e 5.23).

### Diferença entre Rigidezes



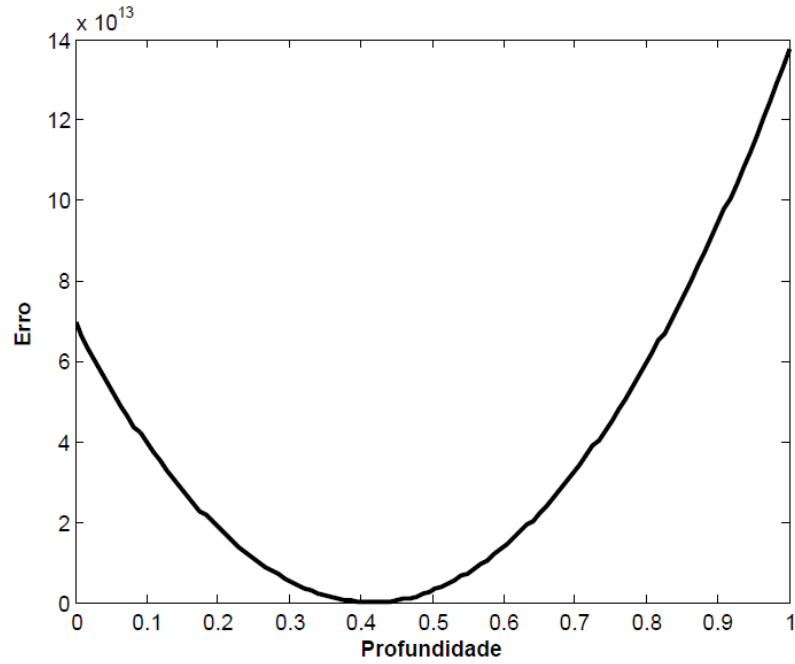
**Figura 5.22** – Diferenças entre Rigidezes aplicado à estrutura C

Observando o gráfico, o mínimo da curva corresponde à redução de 40% na rigidez. O que corresponde à realidade

---

## Diferença entre FRFs

Analogamente às estruturas anteriores, foi aplicado a diferença entre FRFs nesta estrutura.



**Figura 5.23** – Diferenças entre FRFs aplicado à estrutura C

Neste caso, o mínimo da curva corresponde a uma redução de ~43% na rigidez. Ou seja, sendo o valor real de 40%, existe uma pequena discrepância.

---

## 5.3. Epítome do Capítulo

Neste capítulo aborda-se a Quantificação de dano, apresentado duas soluções na tentativa de dimensionar o elemento danificado. Estas duas soluções distinguem-se na finalidade que cada uma tem, visto dividirem-se apenas na no dimensionamento da largura e da profundidade do entalhe presente na estrutura.

O método proposto para obter um valor aproximado para a largura seguia uma sequência de refinação de malha a partir de um método de localização apresentado no Capítulo 4. Esta sequência termina quando fosse acusado dano em mais do que um elemento, ou seja a soma da largura desses dois elementos correspondia à largura aproximada do entalhe.

O método proposto para determinar a profundidade do entalhe foi baseado no artigo [1] onde através do erro resultante da diferença directa das FRFs é possível determinar qual a profundidade aproximada. Este valor de profundidade corresponde ao erro onde este é mínimo.

O Método Modificado (Método da Profundidade) foi aplicado nos diversos casos das três estruturas, obtendo sempre o valor correcto da profundidade para cada um deles.



---

## 6. Método Localização e Quantificação

---

Na sequência dos resultados promissores do método modificado proposto no capítulo anterior, este capítulo vem propor um novo método para localização e quantificação que origina resultados relevantes nas duas vertentes em simultâneo.

Este novo método advém da questão imposta no método modificado, “Que resultados se obtêm se for feito para todos os elementos?”, onde em concreto é possível se variar o erro obtido das diferenças entre FRFs para todos os elementos da estrutura em estudo.

Assim sendo, modificando a equação (5.3) reescreve-se a equação (6.0), considerando o erro em diversos elementos.

$$e_{ij_k}^2 = \left( \sum_{\omega} H(\omega)_{Teo} - \sum_{\omega} H(\omega)_{Iden} \right)^2 \quad (6.0)$$

$$e_{\mu_k}^2 = \sum_i \sum_j e_{ij_k}^2 \quad (6.1)$$

Sendo anteriormente  $e_{\mu}^2$  (eq. (5.2)) um vector de valores para o intervalo de  $\mu$ ,  $k$  agora  $e_{\mu_k}^2$  corresponde a uma matriz composta pelo mesmo vector para de todos os elementos da estrutura. É esperado que se vá localizar através do vector com um valor mínimo que não corresponde ao valor de profundidade adimensional igual a 0 (Elementos não danificados). Esse valor vai corresponder à profundidade adimensional estimada (Elemento danificado).

Este método vai ser implementado na estrutura B pois apresenta uma computação mais simples que a estrutura A mas com complexidade suficiente para cumprir os propósitos definidos em que este método tem de demonstrar.

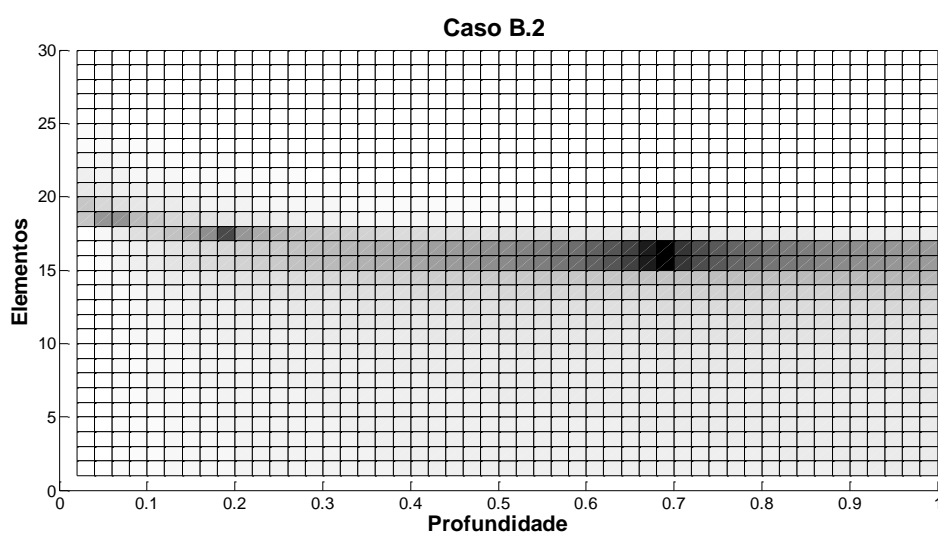
---

## Estrutura B

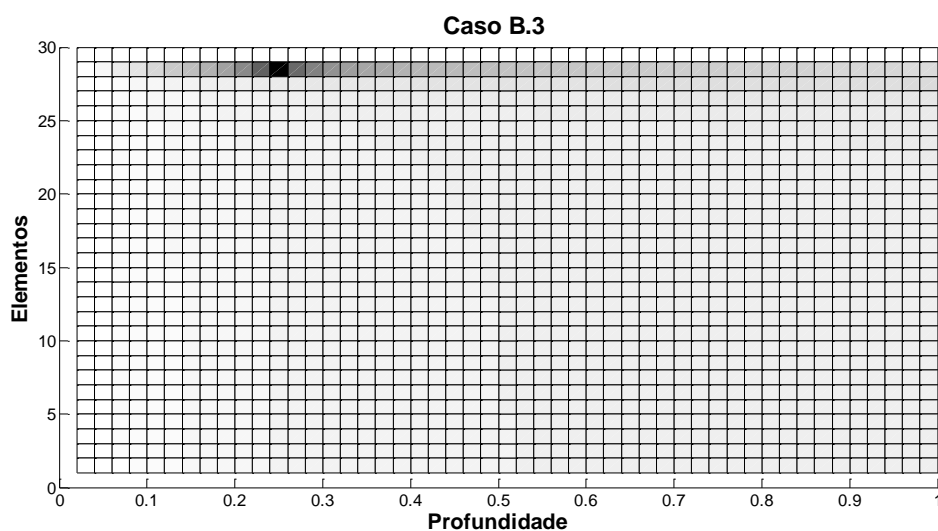
Este método irá ser apenas implementado a título de exemplo na estrutura B, e analogamente à metodologia anterior, esta implementação irá recorrer apenas aos casos B.2, B.3, B.4, B.6 e B.8, visto não os restantes casos não adicionarem informação relevante para a análise pretendida.

Os resultados para o método proposto são apresentados nas figuras 6.1 a 6.5.

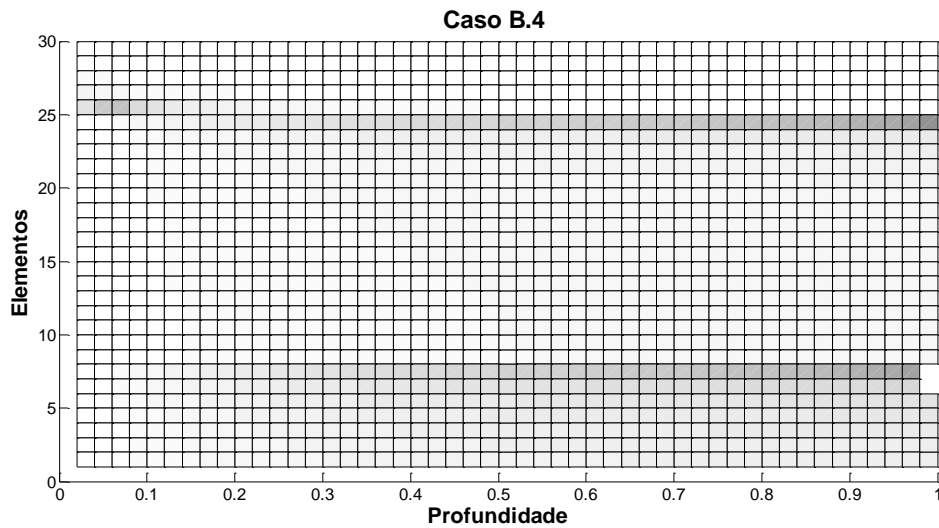
### Resultados do método proposto



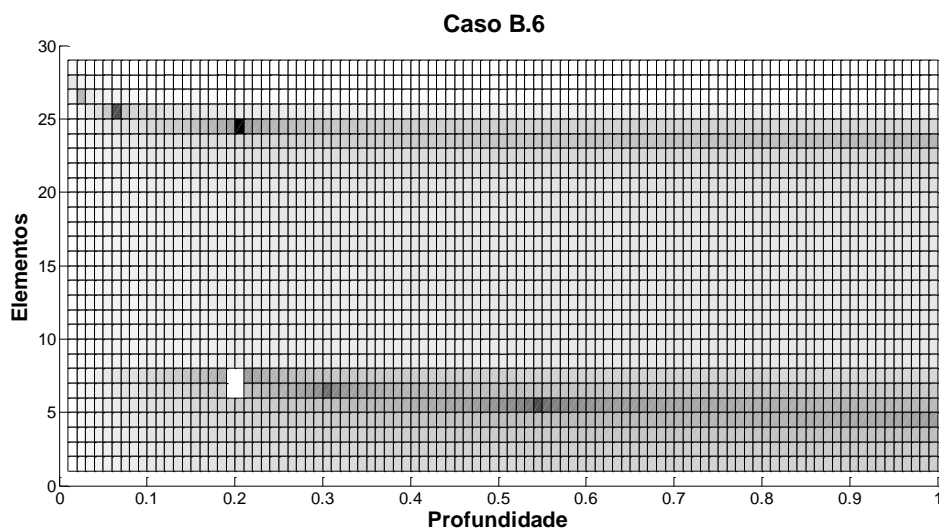
**Figura 6.1** – Método Localização e Quantificação aplicado ao Caso B.2



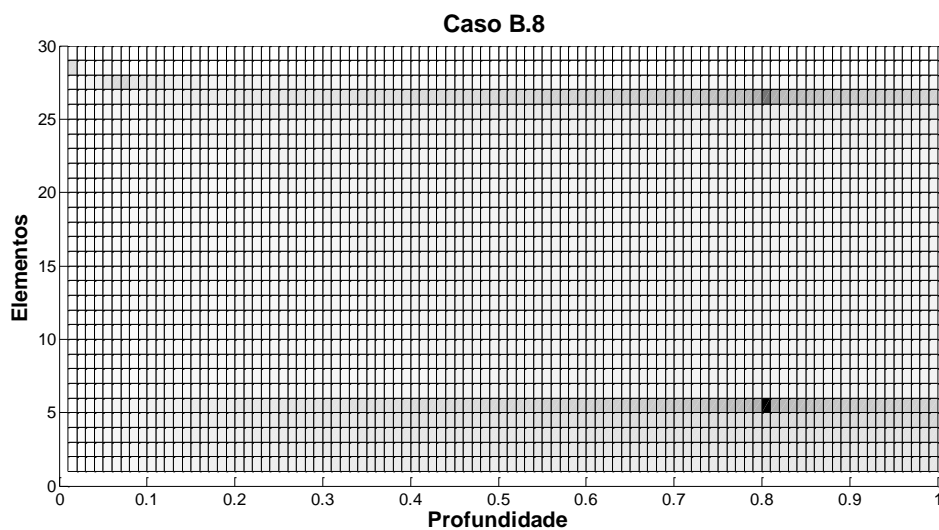
**Figura 6.2** – Método Localização e Quantificação aplicado ao Caso B.3



**Figura 6.3 – Método Localização e Quantificação aplicado ao Caso B.4**



**Figura 6.4 – Método Localização e Quantificação aplicado ao Caso B.6**



**Figura 6.5 – Método Localização e Quantificação aplicado ao Caso B.8**

---

Nas Figuras 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5 estão demonstrados os resultados obtidos na implementação do método Localização e Quantificação nos diversos casos da estrutura B.

É possível notar que embora o erro menor coincide sempre com o elemento correcto, existe um efeito de simetria nos resultados, originando um falso indicador num elemento simétrico ao elemento danificado. Esta situação é visível nas figuras 6.4 e 6.5 (Casos B.6 e B.8) mas na figura 6.3 (Caso B.4) o elemento simétrico adquire um menor erro que o elemento danificado. É importante notar que as partes a preto correspondem às zonas inferiores do erro (zona danificada) mas nos casos B.4 e B.6 (figuras 6.3 e 6.4) a zona danificada está indicada pela ausência grelha.

---

## 6.1. Epítome do Capítulo

Neste capítulo foi proposto e apresentado um método inovador de carácter simples que descobre em simultâneo duas áreas de identificação de dano, a Localização e Quantificação de dano.

Este método foi elaborado a partir do método modificado, proposto no capítulo anterior, onde através de uma ligeira alteração é possível combinar duas áreas da identificação de dano.

No contexto de validar e confirmar a metodologia proposta, foi feita uma implementação na estrutura B considerando diferentes profundidades e localizações do elemento danificado.



---

## 7. Conclusão

---

No desenvolvimento da presente dissertação procedeu-se ao estudo comparativo de diversos métodos na área de identificação de dano em dinâmica estrutural, dando ênfase aos métodos com base nas FRFs. O estudo é focado nas duas áreas da identificação de dano, a localização e a quantificação.

As três estruturas desenvolvidas computacionalmente servem de suporte à implementação e desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, a modelação da estrutura B que serviu como base para a verificação da simulação numérica, pois foi possível verificar que o MEF estava bem construído em comparação com os dados do artigo [3]. Assim, foi de seguida modelada a estrutura A, mais próxima de uma viga existente no laboratório de vibrações. A estrutura C serviu como uma primeira abordagem aos métodos de localização e quantificação, permitindo implementá-los num sistema simples mas com resultados satisfatórios para as vertentes de localização e quantificação.

Como um dos objectivos deste trabalho é a aproximação à componente experimental, as referidas estruturas foram concebidas recorrendo ao MEF, tendo em conta conceitos de incompletude e de modelos reduzidos. Ou seja, foi simulada a incompleta informação proveniente dos dados experimentais e foram compatibilizados os GDL para corresponderem aos das estruturas experimentais, aqui experimentais simuladas.

Na área da localização, os métodos escolhidos têm por base as respostas dinâmicas das estruturas sob a forma de FRFs. Através dos resultados obtidos para os referidos métodos é possível analisar e avaliar as competências de cada método, tendo por base o desempenho destes em diversos critérios. Deste modo, foram considerados dois momentos de avaliação para eleger o método mais proeminente. No primeiro momento, cada método foi classificado numa escala de 1 a 8, onde 1 corresponde a informação inconclusiva e 8 a informação clara e concisa referente à localização de dano. Neste primeiro momento conclui-se que os métodos mais promissores são, o ERC com pontuação mais alta, o FRF\_MSC, o FRF\_MSS e FRF\_MS. No segundo momento de avaliação foram avaliados apenas os métodos seleccionados no primeiro momento. Esta avaliação incide em características que se julgam importantes num método de localização. Assim, foi verificada a correspondência destes métodos a estas características como a adaptação do método a diversas estruturas, a capacidade do método para obter resultados com vista à quantificação de dano, a adaptação demonstrada por parte do método ao uso de dados experimentais e por último a caracterização do método quanto à complexidade da sua formulação. O método que apresentou características mais promissoras para ser utilizados em trabalhos futuros foi o ERC, sendo assim o método mais proeminente na área da localização de

---

dano, embora tenha associado a este uma formulação mais complexa e maior exigência computacional.

Na área da quantificação de dano são analisadas duas vertentes que de uma forma generalizada podem ser definidas como os dois parâmetros fundamentais na quantificação de dano estrutural. Estes dois parâmetros são entendidos como a largura e a profundidade da zona danificada, sendo apresentadas duas metodologias inovadoras para estimar o valor aproximado destas duas características.

A metodologia para quantificar a largura é uma técnica que se baseia na refinação da malha de elementos finitos para estimar o valor aproximado da largura do elemento danificado, ou seja, através de um método de localização de dano é possível determinar o elemento danificado. Assim, ao se refinar a malha ir-se-á chegar ao ponto em que dois elementos adjacentes são identificados como danificados, e deste modo é possível estimar a largura do dano através da refinação local da malha.

A metodologia referente à quantificação da profundidade de dano, aqui proposta, tem por base a diferença entre FRFs simuladas e experimentais. O método proposto permite determinar a profundidade de dano que minimiza a diferença entre FRFs. As FRFs comparadas são as referentes à estrutura danificada e as FRFs simuladas pelo modelo onde se faz variar o valor da profundidade no elemento danificado previamente localizado. Este Método foi implementado para diversos casos de estudo para as três estruturas e obteve em todas as situações resultados correspondentes aos parâmetros de cada caso, assim foi comprovada a sua capacidade para quantificar a profundidade de dano.

Através dos resultados favoráveis obtidos pelo novo método de quantificação de dano, surgiu a hipótese de desenvolver o método que em simultâneo localize e quantifique o dano numa estrutura. Neste contexto foi proposto um método de localização e quantificação de dano que, com base na aplicação do método de quantificação anteriormente descrito a todos os elementos, permite determinar qual o elemento danificado e a profundidade do seu dano. Este método foi aplicado inicialmente apenas para a estrutura B, para demonstrar a aplicabilidade do método. Os resultados obtidos na implementação desta metodologia indicam um bom desempenho em ambas as vertentes de identificação de dano, excepto para situações de dano em que as respostas do MEF tenham possibilidade de simetria, para as quais se observam resultados semelhantes em dois elementos em posições simétricas com o mesmo valor de profundidade de dano.

Numa apreciação final deste trabalho é possível cumprir com o objectivo de evidenciar um método indicado à área de localização de dano e a proposta de um método para a área da quantificação de dano. É adicionalmente possível esquematizar um processo de identificação de dano através dos dois métodos evidenciados ou apenas com o método proposto para localização

---

e quantificação de dano em simultâneo, permitindo o acesso às duas áreas recorrendo a um só método.

## 7.1. Trabalhos Futuros

Na sequência do estudo efectuado é necessário validar as diversas técnicas e métodos propostos. Neste sentido, é sugerida a elaboração de um trabalho laboratorial, com o qual se espera verificar se os resultados obtidos no presente trabalho correspondem aos resultados obtidos nos casos reais, nomeadamente no que se refere à Estrutura A.

Num aspecto de desenvolvimento teórico, foi apresentado uma metodologia onde através da refinação de malha é possível estimar um valor aproximado para a largura do elemento danificado (largura de dano), e através de um desenvolvimento numérico é proposto como trabalho futuro aplicar este estudo num caso concreto e verificar a sua adaptabilidade a diversos casos de dano.

Outra variante deste estudo pode ser enquadrada no desenvolvimento de diversos tipos de dano implementados nas estruturas, ou seja, como neste trabalho foi apenas modelado dano com geometria semelhante a um entalhe será necessário, no âmbito da aproximação à realidade, desenvolver um elemento danificado com geometria semelhante a uma fissura de dimensões não simétricas.



---

## 8. Bibliografia

---

- [1] B. Faverjon and J. J. Sinou, "Identification of an open crack in a beam using an a posteriori error estimator of the frequency response functions with noisy measurements," *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 28, no. 1, pp. 75–85, 2009.
- [2] T. A. N. Silva, "Development and Implementation of Model Updating Techniques in Structural Dynamics," 2015.
- [3] T. A. N. Silva and M. A. R. Loja, "A remote virtual experiment in mechanical engineering," *Proc. - 2013 2nd Exp. Int. Conf. exp.at 2013*, pp. 26–31, 2013.
- [4] G. R. J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *Aiaa J.*, vol. 3 (2), pp. 961–962, 1965.
- [5] P. G. Coelho and J. B. Cardoso, "Métodos Computacionais Em Engenharia Mecânica," *Dep. Eng. Mecânica e Ind. Fac. Ciências e Tecnol. - Univ. Nov. Lisboa*, p. 171, 2012.
- [6] M. R. Hatch, *Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS*. 2001.
- [7] Den Hartog J P, *Mechanical Vibrations*. 1934.
- [8] T. Marwala, *Finite Element Model Updating Using Computational Intelligence Techniques: Applications to Structural Dynamics*. 2010.
- [9] D. Noble, M. Nogal, A. O'Connor, and V. Pakrashi, "The effect of prestress force magnitude and eccentricity on the natural bending frequencies of uncracked prestressed concrete beams," *J. Sound Vib.*, vol. 365, pp. 22–44, 2016.
- [10] J. Mackerle, "Finite element linear and nonlinear, static and dynamic analysis of structural elements: a bibliography (1992-1995)," *Eng. Comput.*, vol. 14, no. 4, pp. 347–440, 1997.
- [11] J. J. Sinou and A. W. Lees, "The influence of cracks in rotating shafts," *J. Sound Vib.*, vol. 285, no. 4–5, pp. 1015–1037, 2005.
- [12] R. P. C. Sampaio, N. M. . Maia, and J. M. M. Silva, "Damage detection using the frequency response function curvature method," *J. Sound Vib.*, vol. 226, no. 5, pp. 1029–1042, 1999.
- [13] Y. K. Ho and D. Ewins, "On the structural damage identification with mode shapes," in *European COST F3 Conference on System Identification & Structural Health Monitoring*, pp. 677–684, 2000.
- [14] N. M. M. Maia, J. M. M. Silva, E. A. M. Almas, and R. P. C. Sampaio, "Damage Detection in Structures: From Mode Shape To Frequency Response Function Methods," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 17, no. 3, pp. 489–498, 2003.
- [15] A. K. Pandey, M. Biswas, and M. M. Samman, "Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes," *J. Sound Vib.*, vol. 145, no. 2, pp. 321–332, 1991.
- [16] I. Trendafilova, W. Heylen, and P. Sas, "Damage localization in structures . A pattern recognition perspective," in *Pattern Recognition*, pp. 99–106, 1998.

- 
- [17] T. A. N. Silva and N. M. M. Maia, Error localization in the finite element modelling of structures, 2015.
- [18] P. Ladevèze, "Recalage de modélisations des structures complexes (Note technique 33.11.01.4)," in *Tech. rep., Aerospatiale*, pp. 38, 83, 1983.
- [19] A. Chouaki and P. Ladeveze, A Posteriori Constitutive Relation Error For Dynamic Model Updating,. pp. 692–698, 1998.
- [20] B. Faverjon and J. J. Sinou, "Identification of an open crack in a beam using an a posteriori error estimator of the frequency response functions with noisy measurements," *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 28, no. 1, pp. 75–85, 2009.
- [21] Cook R.D., Maikus D.S., Plesha M.E. and Witt R.J., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4<sup>th</sup> ed., 2001.
- [22] Reddy J.N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill Education, 3<sup>d</sup> ed., 2005.
- [23] Maia N.M.M., Silva J.M.M., He J., Lieven N.A.J., Lin R.M., Skingle G.W., To W.-M. and Urgueira A.P.V., *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Eds. Maia & Silva, Research Studies Press Ltd., Baldock, Hertfordshire, England, 1997.
- [24] Ewins D.J., *Modal Testing: Theory and Practice*. Research Studies, 1984.