



David Alexandre Victoriano Ferreira Lima

Licenciado em Matemática Aplicada à Tecnologia e à Empresa

# Relatório de Estágio – Aprendizagem de Conceitos de Funções com Recurso a Tarefas Exploratórias e a Tecnologias

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO  
BÁSICO E NO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa  
Julho, 2023





## Relatório de Estágio – Aprendizagem de Conceitos de Funções com Recurso a Tarefas Exploratórias e a Tecnologias

**David Alexandre Victoriano Ferreira Lima**

Licenciado em Matemática Aplicada à Tecnologia e à Empresa

**Orientadora:** Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha,  
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa

**Coorientadora:** Doutora Alexandra Sofia da Cunha Rodrigues,  
Professora Auxiliar Convidada da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa

### Júri:

**Presidente:** Doutor António Manuel Dias Domingos,  
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

**Arguentes:** Doutora Maria Teresa Bixirão Neto,  
Professora Auxiliar do Departamento de Educação e Psicologia,  
Universidade de Aveiro

**Orientador:** Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha,  
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa

**Membros:** Mestre Hélder Manuel da Conceição Barão Martins  
Professor na Escola Secundária António Damásio

## **Relatório de Estágio – Aprendizagem de Conceitos de Funções com Recurso a Tarefas Exploratórias e a Tecnologias**

Copyright © David Alexandre Victoriano Ferreira Lima, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

## **Agradecimentos**

Ao professor cooperante da turma principal, pelo encorajamento e pelos ensinamentos que proporcionaram uma valiosa experiência inicial da prática pedagógica.

À professora Alexandra Rodrigues, pela orientação e pelos momentos de aprendizagem, que me motivaram a seguir ainda mais esta profissão.

Ao Guilherme, por todo apoio, desabafo, cooperação e troca de ideias que me fizeram ser melhor a cada dia.

A todos aqueles que serviram como fonte de inspiração a seguir esta nobre vocação.



“I realized if you can change a classroom, you can change a community, and if you change enough communities, you can change the world.” (Erin Gruwell).



# Resumo

O presente relatório de estágio está dividido em duas partes: a primeira é dedicada ao relatório do estágio realizado como parte da prática pedagógica supervisionada, enquanto a segunda trata da investigação desenvolvida dentro do contexto da prática pedagógica.

O estágio foi realizado ao longo do ano letivo de 2022/2023, com uma turma principal do 10.º ano e uma turma secundária do 9.º ano. Na primeira parte do relatório, será apresentada uma breve descrição das turmas, das aulas lecionadas, das atividades realizadas, assim como uma reflexão acerca da prática pedagógica.

Na segunda parte, a investigação pretende compreender a aprendizagem de novos conceitos do tópico *Funções*, lecionados na disciplina de Matemática A, no 10.º ano, formulando conjecturas, com recurso a tarefas exploratórias. Para a concretização destes objetivos, procurou-se responder às seguintes questões de investigação: i) como se caracteriza a formulação de conjecturas a partir de tarefas de exploração; ii) como é que influencia a formulação de conjecturas a aprendizagem de novos conceitos; iii) qual o papel das tecnologias na aprendizagem de novos conceitos matemáticos.

O estudo seguiu uma metodologia qualitativa em que foram considerados quatro estudos de caso. A recolha de dados teve lugar com a aplicação de três tarefas, em três momentos distintos e uma entrevista semi-estruturada aplicada aos quatro estudos de caso. As três tarefas envolveram conteúdos integrados no programa de 10.º ano e foram aplicadas antes dos conteúdos serem lecionados em contexto de aula.

Na investigação, é possível concluir que os alunos revelam dificuldades em formular conjecturas se não forem devidamente direcionados, levando-os a constatar factos superficiais ao invés de relacionar os parâmetros das funções com os seus gráficos. A dificuldade de expressar ideias de forma clara e de comunicar matematicamente também afetou a formulação de conjecturas significativas. Por outro lado, testar e verificar conjecturas mostrou ser um fator importante na aprendizagem de novos conceitos matemáticos. Esta abordagem exploratória teve um impacto positivo na compreensão das translações de funções, o mesmo não sendo evidente nas contrações e dilatações.

A utilização da calculadora gráfica demonstrou ser uma mais-valia para a aprendizagem de novos conceitos matemáticos, mas, por si só, não garante a aprendizagem, visto que a falta de rigor e má interpretação dos gráficos pode afetar negativamente a aprendizagem dos alunos.

**Palavras chave:** Estágio pedagógico; tarefas exploratórias; conjecturas; transformações de funções; calculadora gráfica.



# Abstract

The present internship report is divided in two parts: the first is dedicated to the internship report conducted as part of supervised pedagogical practice, while the second addresses the research conducted within the context of pedagogical practice.

The internship took place throughout the academic year of 2022/2023, within two classes. A main class of 10th grade students and a secondary class of 9th grade students. The first part of the report includes a brief description of the classes, lessons taught, activities carried out, and a reflection on pedagogical practice will be presented.

In the second part, the research aims to understand the learning of new concepts in the topic of Functions, taught in 10th grade on the subject Mathematics A, by formulating conjectures in a qualitative investigation with an interpretive paradigm, using exploratory tasks. To achieve these objectives, the following research questions were addressed: i) how is the formulation of conjectures characterized from exploratory tasks; ii) how does the formulation of conjectures influence the learning of new concepts; iii) what is the role of new technologies in the learning of new mathematical concepts.

A qualitative methodology was followed, considering four case studies. The data collection took place through the application of three tasks at three different moments, and a semi-structured interview applied to the case studies. The three tasks involved content of 10th-grade curriculum and were applied before teaching the content in the classroom context. The research concludes that students encounter difficulties in formulating conjectures if not properly guided, leading them to observe superficial facts instead of relating function parameters to their graphs. The difficulty of expressing ideas clearly and communicating mathematically also affected the formulation of meaningful conjectures. On the other hand, testing and verifying conjectures proved to be an important factor in the learning of new mathematical concepts. This exploratory approach had a positive impact on the understanding of function translations, unlike contractions and dilations of function graphs.

The use of the graphing calculator has proven to be a valuable asset in learning new mathematical concepts, but, on its own, does not guarantee learning, as the lack of accuracy and misinterpretation of graphs can negatively affect students' learning."

**Keywords:** Pedagogical internship; exploratory tasks; conjectures; function transformations; graphing calculator.



# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>PARTE I – RELATÓRIO DE ESTÁGIO</b> .....            | <b>1</b>  |
| <b>1. Introdução</b> .....                             | <b>3</b>  |
| <b>2. Prática de Ensino Supervisionada</b> .....       | <b>5</b>  |
| 2.1. Prática pedagógica no 10.º ano .....              | 5         |
| 2.1.1. Aulas lecionadas .....                          | 6         |
| 2.1.2. Avaliação e Classificação.....                  | 12        |
| 2.2. Prática pedagógica no 9.º ano .....               | 13        |
| 2.2.1. Aulas lecionadas .....                          | 13        |
| <b>3. Atividades Não Letivas</b> .....                 | <b>17</b> |
| 3.1. Reuniões assistidas .....                         | 17        |
| 3.2. Olimpíadas Portuguesas de Matemática.....         | 18        |
| 3.3. Bebras – Castor Informático .....                 | 18        |
| 3.4. Visita de estudo.....                             | 18        |
| 3.5. Tarefa Geometria Sintética .....                  | 19        |
| <b>4. Reflexão sobre o estágio</b> .....               | <b>21</b> |
| <b>PARTE II– PROJETO DE INVESTIGAÇÃO</b> .....         | <b>25</b> |
| <b>1. Introdução</b> .....                             | <b>27</b> |
| 1.1. Motivações Pessoais e Pertinência do Estudo ..... | 27        |
| 1.2. Objetivos e Questões de Investigação.....         | 28        |
| <b>2. Revisão Bibliográfica</b> .....                  | <b>29</b> |
| 2.1. Aprendizagem por Descoberta.....                  | 29        |
| 2.2. Tarefas Matemáticas.....                          | 31        |
| 2.2.1. Tarefas de Exploração.....                      | 33        |
| 2.3. Uso da Tecnologia .....                           | 35        |
| <b>3. Metodologia</b> .....                            | <b>37</b> |
| 3.1. Investigação Qualitativa .....                    | 37        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 3.2.      | Estudo de Caso.....                          | 38        |
| 3.3.      | Técnicas de Recolha de Dados .....           | 39        |
| 3.3.1.    | Observação.....                              | 39        |
| 3.3.2.    | Diário de Bordo.....                         | 39        |
| 3.3.3.    | Análise Documental .....                     | 40        |
| 3.3.4.    | Entrevista.....                              | 40        |
| 3.4.      | Procedimentos Metodológicos.....             | 40        |
| 3.4.1.    | Estratégia de Recolha de Dados.....          | 40        |
| 3.4.2.    | Escolha dos Participantes .....              | 43        |
| <b>4.</b> | <b>Apresentação e Análise de Dados .....</b> | <b>45</b> |
| 4.1.      | Estudo de Caso: René.....                    | 45        |
| 4.2.      | Estudo de Caso: Pitágoras .....              | 51        |
| 4.3.      | Estudo de Caso: Sofia .....                  | 56        |
| 4.4.      | Estudo de Caso: Hipátia .....                | 63        |
| <b>5.</b> | <b>Conclusões .....</b>                      | <b>71</b> |
|           | <b>Referências .....</b>                     | <b>75</b> |
|           | <b>Anexos.....</b>                           | <b>79</b> |
|           | Anexo 1 (Plano tema).....                    | 80        |
|           | Anexo 2 (Plano aula) .....                   | 82        |
|           | Anexo 3 (Ficha formativa) .....              | 86        |
|           | Anexo 4 (Ficha calculadora).....             | 87        |
|           | Anexo 5 (Tarefa de grupo).....               | 90        |
|           | Anexo 6 (Tarefa lugares geométricos) .....   | 91        |
|           | Anexo 7 (Tarefa geometria sintética) .....   | 93        |
|           | Anexo 8 (Tarefa 1).....                      | 94        |
|           | Anexo 9 (Tarefa 2).....                      | 97        |
|           | Anexo 10 (Tarefa 3).....                     | 100       |
|           | Anexo 11 (Guião Entrevista) .....            | 107       |



# Índice de Figuras

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.1. – Relação entre os diversos tipos de tarefas, considerando o seu grau de desafio e de abertura, de Ponte (2005, p. 17).....                                     | 32 |
| Figura 4.1. – Representações gráficas de $y = mx$ , variando $m$ para valores positivos (René). .....   | 46 |
| Figura 4.2. – Representações gráficas de $y = x^2 + d$ , variando $d$ para valores positivos e negativos, respetivamente (René).....  | 47 |
| Figura 4.3. – Resoluções gráficas de $y = (x + c)^2$ , variando $c$ para valores positivos e negativos, respetivamente (René).....  | 47 |
| Figura 4.4. – Representações gráficas de $y = ax^2$ com diferentes valores de $a$ : $1$ e $-1$ , $2$ e $-2$ , $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ , respetivamente (René).....   | 48 |
| Figura 4.5. – Resolução da quinta questão da tarefa 2 (René). .....   | 49 |
| Figura 4.6. – Parte da resolução da sétima questão da tarefa 3 (René). .....  | 50 |
| Figura 4.7. – Representações gráficas de $y = mx$ , variando $m$ para valores positivos e negativos, respetivamente (Pitágoras).....  | 52 |
| Figura 4.8. – Representações gráficas de $y = x^2 + d$ , variando $d$ para valores positivos e negativos, respetivamente (Pitágoras).....                                   | 53 |
| Figura 4.9. – Resoluções gráficas de $y = (x + c)^2$ , variando $c$ para valores positivos e negativos, respetivamente (Pitágoras).....                                     | 53 |
| Figura 4.10. – Resolução da quinta e sexta questão da tarefa 2 (Pitágoras). .....   | 54 |
| Figura 4.11. – Resolução da nona questão da tarefa 3 (Pitágoras).....   | 55 |
| Figura 4.12. – Representações gráficas de $y = x^2 + d$ , variando $d$ para valores positivos e negativos, respetivamente (Sofia).....                                      | 58 |
| Figura 4.13. – Resolução da segunda questão da tarefa 2 (Sofia).....  | 59 |
| Figura 4.14. – Representações gráficas de $y = ax^2$ com diferentes valores de $a$ : $1$ e $-1$ , $2$ e $-2$ , $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ , respetivamente (Sofia)..... | 59 |
| Figura 4.15. – Resoluções gráficas de $y = 2x + b$ , variando $b$ para valores positivos e negativos (Sofia). .....   | 60 |
| Figura 4.16. – Funções representadas na terceira questão da tarefa 1 (Sofia). .....   | 61 |
| Figura 4.17. – Resolução da quinta e sexta questão da tarefa 2 (Sofia). .....   | 61 |
| Figura 4.18. – Representações gráficas de $y = mx$ , variando $m$ para valores positivos e negativos (Hipátia). .....   | 65 |
| Figura 4.19. – Representações gráficas de $h(x) = f(x) - 3$ e $i(x) = g(x) + 2$ , respetivamente (Hipátia) .....  | 65 |
| Figura 4.20. – Representações gráficas de $y = x^2 + d$ , variando $d$ para valores positivos e negativos, respetivamente (Hipátia). .....                                  | 66 |
| Figura 4.21. – Resoluções gráficas de $y = (x + c)^2$ , variando $c$ para valores positivos e negativos, respetivamente (Hipátia). .....                                    | 66 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 4.22. – Resolução da segunda questão da tarefa 2 (Hipátia).....        | 67 |
| Figura 4.23. – Resolução da quinta e sexta questão da tarefa 2 (Hipátia)..... | 68 |

## Índice de Tabelas

|  |    |
|--|----|
| Tabela 2.1. – Planificações de temas lecionados no 10.º ano..... | 7  |
| Tabela 2.2. – Aulas lecionadas no 10.º ano. ....                 | 8  |
| Tabela 2.3. – Aulas lecionadas no 9.º ano. ....                  | 13 |
| Tabela 3.1. – Calendário de sessões. ....                        | 41 |



# **PARTE I – RELATÓRIO DE ESTÁGIO**



# 1. Introdução

O presente relatório de estágio foi realizado com o intuito de analisar e descrever a atividade do professor estagiário com turmas do 9.º e do 10.º ano de escolaridade, no decorrer do ano letivo 2022/2023. O estágio enquadra-se no âmbito da unidade curricular *Estágio Pedagógico*, pertencente ao segundo ano do Mestrado em Ensino de Matemática do 3.º ciclo no Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

É apresentado o trabalho desenvolvido no âmbito da prática pedagógica supervisionada, nomeadamente uma descrição das aulas e das turmas em que participou e que lecionou. É feita ainda uma abordagem referente às atividades extracurriculares desenvolvidas na escola, bem como as atividades realizadas no contexto de direção de turma.

Por fim, é apresentada uma reflexão acerca do estágio pedagógico e como este influenciou o autor.



## **2. Prática de Ensino Supervisionada**

Durante o presente ano letivo, o professor estagiário acompanhou, a tempo inteiro, uma turma de ensino secundário do 10.º ano e uma turma do ensino básico do 9.º ano, tendo participado nesta última em dois terços das aulas.

Neste capítulo será apresentada uma breve caracterização das duas turmas, as planificações dos temas e das aulas lecionadas, assim como uma descrição da prática pedagógica supervisionada.

### **2.1. Prática pedagógica no 10.º ano**

A turma do 10.º ano é uma turma do curso científico-humanístico de ciências e tecnologias, constituída por 29 alunos entre os 14 e 15 anos, dos quais 14 são do sexo masculino e 15 do sexo feminino.

É uma turma bastante heterogénea em termos de personalidade, nacionalidade e desempenho na disciplina de Matemática. Na sala de aula, não têm quaisquer problemas em termos de comportamento e em regra são participativos, contudo uma grande parte demonstra ter falta de maturidade, de resiliência perante as adversidades, de empenho e hábito de estudo. Isto deve-se possivelmente a causas relacionadas com a pandemia da doença COVID-19, falta de vocação e motivação para o curso e ainda outros, tais como alguns alunos de outros países, com uma barreira linguística.

Muitos dos alunos desta turma também praticam atividades extracurriculares como clube de música, futebol, ginástica, entre outros. Estes afirmam que estas atividades são essenciais para o seu bem-estar físico e psicológico, o que influencia o rendimento académico dos mesmos.

### 2.1.1. Aulas lecionadas

Antes de cada tema ser lecionado, o professor estagiário elaborava uma planificação das aulas previstas para o tema em questão, com os conteúdos a trabalhar, a metodologia a seguir, o material a utilizar, assim como o papel do professor e dos alunos. Além das planificações por temas, era elaborada pelo professor estagiário, uma planificação das aulas que iria lecionar, de forma mais detalhada, com os objetivos, resolução dos exercícios propostos, observações sobre possíveis problemas que possam ocorrer ao longo da aula e a posterior reflexão relativamente à aula dada.

Tanto as planificações dos temas, como das aulas, foram apresentadas e discutidas em núcleo de estágio, uma semana antes do dia previsto para a leção. Este núcleo é composto por dois professores cooperantes (um titular do 10.º ano e outro do 9.º) e dois professores estagiários.

Inicialmente, a maior adversidade apresentada na elaboração das planificações das aulas, foi dosear a quantidade de exemplos e exercícios a propor e quais é que deveriam ser resolvidos em conjunto pelo professor no quadro e quais os que deveriam ser resolvidos individualmente ou a pares pelos alunos. O mesmo aconteceu com o tempo previsto para a correção dos trabalhos de casa. Com o decorrer das aulas compreendeu-se a relevância de uma boa planificação, da importância desta ter alguma flexibilidade e ser sujeita a ajustamentos tendo em conta a resposta por parte dos alunos aos conteúdos lecionados. Em relação aos trabalhos de casa, entendeu-se que não há necessidade de resolvê-los todos, optando por aqueles que o professor achar que trarão melhor contributo para a aula, ou nos quais os alunos manifestem dúvidas.

No início do ano, pelo facto de este ano de escolaridade ser uma mudança de ciclo e por os alunos virem de escolas maioritariamente diferentes, não se começou pelos conteúdos destinados ao 10.º ano. Durante as duas semanas iniciais, com recurso a fichas de exercícios, fez-se uma recapitulação dos conteúdos dados no ensino básico (3.º ciclo), ao mesmo tempo que se começava a introduzir outros, como o caso da racionalização de denominadores. Os conteúdos abordados nas fichas foram:

- Potências e radicais;
- Conjuntos, condições e intervalos;
- Casos notáveis e equações do 2.º grau;
- Inequações e sistemas de equações;
- Volumes;
- Racionalização de denominadores e potências de expoente racional.

A seguir a estes conteúdos, fez-se um teste diagnóstico em que se identificou uma disparidade significativa relativamente ao conhecimento adquirido.

Após este período de recuperação de aprendizagens, foram iniciadas as aulas abordando os conteúdos programáticos do 10.º ano. Os temas lecionados ao longo do ano letivo encontram-se na tabela 2.1.

*Tabela 2.1. – Planificações de temas lecionados no 10º ano.*

| Período     | Tema  |
|-------------|---|
| 1.º período | 1. Geometria analítica no plano                                     |
|             | 2. Cálculo vetorial no plano  |
|             | 3. Geometria analítica no espaço                                    |
|             | 4. Cálculo vetorial no espaço                                       |
| 2.º período | 5. Generalidades acerca de funções                                  |
|             | 6. Monotonia, extremos e concavidade                                |
|             | 7. Estudo de funções elementares e operações algébricas com funções |
| 3.º período | 8. Polinómios   |
|             | 9. Funções Polinomiais  |

A planificação do tema de Geometria analítica no plano encontra-se em anexo a título de exemplo (Anexo 1). As planificações dos restantes temas, assim como das aulas, encontram-se no dossiê de estágio.

No início de cada período, decidia-se em núcleo de estágio as aulas a serem lecionadas pelo professor estagiário. Ao longo do ano, foram lecionadas 12 aulas. As aulas constituem-se em seis blocos de 90 minutos, tendo sido três deles no 1.º período, um no 2.º período e os restantes no 3.º período. As aulas lecionadas nesta turma, representadas na tabela 2.2., corresponderam a 12 tempos letivos e para além destas, nas aulas lecionadas pelo professor titular da turma, o professor estagiário intervinha frequentemente tirando dúvidas individualmente e no quadro.

Tabela 2.2. – Aulas lecionadas no 10º ano.

| Aula         | Período     | Data            | Tema                            |
|--------------|-------------|-----------------|---------------------------------|
| Aula 1 e 2   | 1.º Período | 11 de outubro   | Geometria analítica no plano    |
| Aula 3 e 4   | 1.º Período | 7 de novembro   | Cálculo vetorial no plano       |
| Aula 5 e 6   | 1.º Período | 12 de dezembro  | Cálculo vetorial no espaço      |
| Aula 7 e 8   | 2.º Período | 28 de fevereiro | Generalidades acerca de funções |
| Aula 9 e 10  | 3.º Período | 3 de maio       | Polinómios                      |
| Aula 11 e 12 | 3.º Período | 22 de maio      | Funções polinomiais             |

### **Aula 1 e 2 – 11 de outubro**

Nestas primeiras aulas, abordou-se o tema de Geometria analítica no plano e teve-se como objetivo que os alunos reconhecessem e calculassem a equação da mediatriz de um segmento de reta.

Inicialmente, lembrou-se o significado da mediatriz como reta equidistante a dois pontos distintos. De seguida, após alguns exemplos práticos sem necessidade de cálculo, usou-se um exemplo e a definição dada no início da aula, para se chegar à equação cartesiana da mediatriz. Por fim, procedeu-se a resolução de exercícios até o final da aula.

Estas primeiras aulas lecionadas tiveram um balanço positivo, muito devido a uma planificação pensada ao detalhe. Teve-se o cuidado de planear a disposição do quadro, dividindo-o ao meio, para que os alunos seguissem de forma clara e sequencial os conteúdos. Durante a resolução de exemplos coletivamente, no desenvolvimento do quadrado dos binómios, também se teve a atenção de não se escolher alguém que não dominasse os casos notáveis, para que não houvesse quebras no seguimento do exercício.

Do bloco de aulas destacaram-se dois pontos fortes. Um deles foi a escolha dos exemplos para se introduzir a equação da mediatriz de um segmento da reta. O facto de estes terem sido simples e sem a necessidade de cálculo, permitiu a melhor compreensão deste conceito. Como esta era a primeira aula ministrada pelo professor estagiário, vários alunos não se sentiam confortáveis em expressar suas dúvidas. Nesse sentido, foi crucial que o professor estivesse atento às expressões faciais dos alunos. Com essa abordagem, foi possível identificar quando

eles não compreenderam algum conteúdo, mesmo sem dizerem nada, e foi adicionando alguns exemplos além dos inicialmente planeados. Por último, o segundo ponto a destacar, foi a ligação com o que havia sido lecionado na aula anterior (distância entre dois pontos), para a dedução da equação da mediatriz no geral.

### **Aula 3 e 4 – 7 de novembro**

Este bloco de duas aulas lecionadas nesta turma, foi referente ao cálculo vetorial no plano. Teve-se como objetivo que os alunos fossem capazes de compreender a relação entre as coordenadas de um vetor diretor e o declive da reta, reconhecer o significado da equação vetorial de uma reta e aplicá-la na resolução de problemas.

Começou-se por representar vários vetores e uma reta  $r$ , a fim de concluir que um vetor diretor partilha a direção da reta, podendo ter qualquer um dos sentidos e qualquer norma. De seguida, usaram-se exemplos para se estabelecer a relação entre o declive de uma reta e um dos seus vetores diretores. Posteriormente, considerando um exemplo de uma reta e os seus sucessivos vetores diretores, deduziu-se a equação vetorial de uma reta no plano e o respetivo sistema de equações paramétricas. Por fim, fizeram-se alguns exercícios de consolidação dos conteúdos abordados.

Nesta aula, notou-se também alguma inexperiência por parte do estagiário no tema de geometria, principalmente no que diz respeito ao rigor matemático, nomeadamente no cálculo das coordenadas de vetores como diferença de dois pontos. Outro facto que torna esta profissão complexa é o facto de o professor ter necessidade de adaptar constantemente a planificação durante a aula. A uma certa altura, percebeu-se que não seria possível concretizar o que estava no plano da aula, então considerou a hipótese de acelerar. No entanto, como se percebeu que os alunos estavam a reagir bem àquele ritmo, o professor conformou-se e deixou as equações paramétricas para a aula seguinte. No que diz respeito aos trabalhos de casa, foi decidido não remover os exercícios que envolviam equações paramétricas, a fim de testar a capacidade de autonomia e autodidatismo dos alunos. Essa abordagem foi bem-sucedida para alguns alunos, como foi evidenciado na aula seguinte.

Um dos comentários feitos pelo professor titular da turma foi que o professor estagiário deverá dosear melhor a quantidade de exercícios propostos. Para essa aula em questão, inicialmente foram apresentados mais exercícios, mas devido à sugestão do professor titular, houve uma diminuição na quantidade proposta. Essa decisão provavelmente teve um impacto significativo no plano de aula.

O ponto positivo a destacar foi a ligação dos exemplos dados para introduzir os novos conceitos, em particular do exemplo usado para se deduzir a equação vetorial de uma reta no plano.

### **Aula 5 e 6 – 12 de dezembro**

À semelhança das aulas anteriores, ficou encarregue ao professor estagiário a lecionação da equação vetorial de uma reta no espaço, assim como o sistema de equações.

Do bloco de aulas, salientou-se a importância de se saber escolher os melhores exercícios a corrigir, que tenham ficado para trabalho de casa. Por terem sido aplicações dos conceitos lecionados na aula anterior, deveriam ter sido escolhidos exercícios com aplicações mais diretas para ajudar na consolidação dos conceitos. Nas aulas em questão, a realização de exercícios mais complexos e abstratos levaram a quase um terço da aula a serem corrigidos. Uma solução seria deixar estes exercícios para a aula prática que se avizinhava. Destacou-se igualmente a relevância de o professor escolher a melhor estratégia de resolução. Na correção de um dos exercícios, o professor estagiário acabou por seguir a estratégia sugerida por um aluno, que trouxe mais inconvenientes que vantagens. Além desta demorar muito mais tempo, foi mais confuso e menos fácil de acompanhar para os restantes.

### **Aula 7 e 8 – 28 de fevereiro**

Estas aulas, cuja planificação se encontra em anexo (Anexo 2), contou com a presença dos professores orientadores do estagiário da Faculdade de Ciências e Tecnologia. Abordou-se o tema de generalidades de funções, mais precisamente de funções reais de variável real e teve como objetivo que os alunos fossem capazes de reconhecer, representar e interpretar graficamente funções quadráticas e usá-las na resolução de problemas, indicando o extremo absoluto, as eventuais raízes, o sentido da concavidade e sinal dos respetivos gráficos. De forma a concretizar este objetivo, elaborou-se uma ficha formativa com problemas em contexto “semi-real” (Anexo 3). A resolução dos problemas (com recurso à calculadora gráfica e analiticamente), permitiu ao professor estagiário fazer a ligação com os conteúdos que queria abordar, nomeadamente o estudo dos zeros da função quadrática (com base no binómio discriminante) e o sinal das mesmas.

Os comentários feitos pelos professores orientadores do estagiário foram que o balanço da aula foi bastante positivo. Afirmou que se conseguiu lecionar tudo o que se pretendia de forma calma e organizada, atingindo assim os objetivos das aulas. Os aspetos positivos destacados foram a organização do quadro, a seleção adequada dos exemplos para conectar com a teoria e a maneira como o professor estagiário intercalou a resolução dos problemas

utilizando tanto a calculadora quanto a abordagem analítica. Além disso, ao ditar as respostas durante os momentos com a calculadora, o professor conseguiu manter o controle sobre a turma, pois nesses momentos os alunos ficavam mais agitados. Essa abordagem de ditar as respostas foi eficaz para acalmar os alunos e garantir que eles prestassem atenção. Outros pontos positivos incluíam a projeção da teoria, o que permitiu que não houvesse tempos mortos nos momentos em que o professor precisava de escrever no quadro, e a utilização da tabela com os seis casos dos gráficos das funções quadráticas. Esta tabela serviu como conclusão do estudo dos zeros e introdução ao estudo do sinal.

Foram ressaltados também aspectos que o professor estagiário precisava trabalhar para aprimorar, nomeadamente o seu posicionamento no quadro, evitando ao máximo virar as costas para os alunos. Além disso, ao utilizar o projetor, é necessário ter atenção à iluminação.

### **Aula 9 e 10 – 3 de maio**

Neste primeiro bloco de aulas lecionadas no 3.º período pelo professor estagiário, estiveram igualmente presentes os professores orientadores do estagiário. Foi abordado o tema dos polinómios e teve como objetivo que os alunos fossem capazes de fatorizar polinómios, assim como reconhecer e identificar a multiplicidade da raiz de um polinómio. A estratégia para a concretização dos objetivos foi a realização de exemplos envolvendo a divisão de polinómios usando a regra de Ruffini, o teorema do resto e o corolário do teorema do resto, para se chegar à generalização da factorização de polinómios de grau  $n$ , com  $n$  raízes. De seguida, antes da resolução de exercícios de consolidação, foi igualmente lecionado como identificar raízes inteiras de um polinómio.

Sem contar com um pequeno imprevisto com o projetor, considerou-se que as aulas foram produtivas. Os alunos participaram ativamente e, em geral, conseguiram atingir os objetivos propostos. A capacidade do professor estagiário de responder com sucesso a todas as dúvidas dos alunos, inclusive as mais confusas, de maneira clara e simples, foi elogiada pelos professores orientadores.

Finalmente, em comparação com as aulas anteriores lecionadas pelo professor estagiário, este melhorou a sua postura no quadro, evitando voltar as costas aos alunos, exceto quando estavam ocupados a copiar as informações dos diapositivos.

## **Aula 11 e 12 – 22 de maio**

Estas últimas aulas lecionadas pelo professor estagiário, tiveram como objetivo fazer com que os alunos aprofundassem o domínio sobre as funcionalidades da calculadora gráfica e que desenvolvessem a capacidade de transpor os dados visualizados na calculadora para o papel e de interpretar os dados. Para tal, foi elaborada pelo professor orientador, uma ficha (Anexo 4) envolvendo os diversos tipos de funções (afins, quadráticas, cúbicas, quárticas, racionais, módulo e por ramos).

As aulas decorreram como se estava à espera. Houve alguma instabilidade por ter sido uma aula diferente e com mais autonomia, mas nada que boicotasse o normal o seu funcionamento. Portanto, os objetivos traçados foram atingidos.

Destas aulas, salientou-se a importância de se dar mais autonomia aos alunos na resolução de problemas, pois só assim é que as dúvidas surgem. Apesar de já terem tido algumas aulas em que foi possível confirmarem com a calculadora gráfica resoluções analíticas, no presente bloco de aulas, o professor estagiário teve de explicar algumas das suas funcionalidades como se fosse a primeira vez. Também se destacou a dificuldade e resistência de os alunos representarem gráficos e apresentarem resultados de maneira adequada. Por isso, recomenda-se a realização de atividades deste tipo de forma regular, para desenvolver os alunos estas capacidades, melhorando assim o raciocínio e a comunicação matemática.

Além das aulas lecionadas em sala de aula, o professor estagiário prestava apoio a alunos com aproveitamento insuficiente de três turmas do 10.º ano. As sessões de apoio eram uma vez por semana, com uma duração de 45 minutos.

### **2.1.2. Avaliação e Classificação**

Durante o ano letivo, o professor estagiário esteve envolvido no processo de avaliação dos alunos. Em todas as avaliações, quer seja teste diagnóstico, apresentações, mini-teste, tarefa de grupo ou teste de avaliação, além de o professor estagiário criar um par de questões para as referidas avaliações, preparava uma proposta de resolução e as distribuições das cotações. Chegou inclusive a criar de raiz uma tarefa de grupo (Anexo 5). Posteriormente, tanto as avaliações propostas, como as resoluções e distribuição das cotações eram discutidas em núcleo de estágio.

No final de cada período, após análise de todos os processos de avaliação, era discutida em núcleo de estágio a classificação final de cada aluno. Em casos de insucesso, eram revistas estratégias para o combate do mesmo.

## 2.2. Prática pedagógica no 9.º ano

A turma do 9.º ano é constituída por 19 alunos, entre os 13 e 16 anos de idade, dos quais 13 são do sexo masculino e 6 do sexo feminino. É uma turma que demonstrou falta de maturidade e que, coletivamente, tem problemas de comportamento, falta de disciplina, de empenho e de participação nas aulas. Verificou-se também falta de bases essenciais para a disciplina, neste ano de escolaridade, contudo, quando lhes é abordado e dada atenção individualmente, mostram interesse, frustração quando não compreendem e grande satisfação quando fazem algo corretamente.

### 2.2.1. Aulas lecionadas

Nesta turma, o professor estagiário lecionou um total de três aulas, uma de 45 minutos e um bloco de 90 minutos, correspondendo a três tempos letivos. Ambas foram lecionadas no 2.º período e, à semelhança com a turma do 10.º ano, nas restantes aulas lecionadas pelo professor titular da turma, o professor estagiário intervinha frequentemente tirando dúvidas individualmente e no quadro. Na tabela 2.3. encontram-se representadas as aulas lecionadas.

Tabela 2.3. – Aulas lecionadas no 9º ano.

| Aula       | Período     | Data            | Tema                                 |
|------------|-------------|-----------------|--------------------------------------|
| Aula 1 e 2 | 2.º Período | 28 de fevereiro | Lugares geométricos e circunferência |
| Aula 3     | 2.º Período | 1 de março      | Lugares geométricos e circunferência |

### Aula 1 e 2 – 28 de fevereiro

Estas primeiras aulas lecionadas pelo professor estagiário tiveram como objetivo que os alunos fossem capazes de aprender o conceito de lugar geométrico, identificando a mediatriz e a circunferência como o mesmo. Pelo facto da turma normalmente não reagir bem a aulas clássicas mais expositivas, para a concretização do presente objetivo, elaborou-se uma tarefa ao ar livre. A tarefa (Anexo 6) consistia num problema de desaparecimento de um cão e em cada questão tinha um conjunto de informações para que os alunos pudessem descrever o conjunto de todos os lugares em que o cão poderia estar. Ao longo da tarefa, para uma melhor visualização, os alunos construía esses lugares geométricos com recurso a cordéis de lã.

Apesar de ter sido diferente do que se estava à espera, o balanço da aula foi positivo. Primeiramente, achou-se que a conversa inicial sobre o comportamento, em sala de aula, foi importante, mas a explicação do enunciado não teve qualquer efeito, uma vez que foi explicado novamente no início da resolução. Já no local da tarefa, começou-se por dividir a turma em dois grupos, tendo como critério de seleção o comportamento em sala de aula, os conflitos entre os alunos e o seu interesse pela disciplina, buscando a maior heterogeneidade possível. No início da tarefa, ao contrário do que se desejava, foi necessária uma maior intervenção por parte do professor estagiário, devido à falta de autonomia dos grupos e à incapacidade de compreender o objetivo da tarefa e distribuir funções para cada membro do grupo. Durante a realização da tarefa, houve algumas surpresas. Em um dos grupos, onde a maioria dos alunos não se interessou pela mesma e não participou de forma ativa, inclusive alunos que costumam envolver-se durante as aulas, um aluno destacou-se. Apesar de não fazer os trabalhos de casa, faltar constantemente às aulas e, quando presente, muitas vezes manter o caderno fechado, ele demonstrou um comportamento diferente na tarefa. Após compreender o objetivo, definiu as funções de cada membro, mediu e cortou os cordéis, ditou as respostas e ilustrou as figuras de forma rápida e correta, mesmo tentando debater com os colegas, embora estes não correspondessem à sua iniciativa. O outro grupo foi mais demorado, pois houve mais trabalho em equipa, debates intensos, inclusive envolvendo alunos que costumam ser mais tímidos durante as aulas e que têm classificações muito baixas na disciplina. No mesmo grupo, é importante destacar a melhor aluna da turma, que geralmente é sempre ativa durante as aulas. No entanto, durante a realização de uma tarefa com estas características, esteve bastante ausente, não participando dos debates, apenas ouvindo e escrevendo as informações.

Em geral, os alunos descreveram com sucesso o conjunto de todos os pontos que se encontram a uma certa distância de um certo ponto (circunferência). No entanto, tiveram mais dificuldade em descrever o conjunto de todos os pontos à mesma distância de dois pontos (mediatriz), embora conseguissem visualizá-lo.

Numa aula futura com a mesma duração e utilizando a mesma tarefa, acredita-se que seria mais vantajoso acrescentar um exercício, considerando, por exemplo, o círculo ou a bissetriz, e retirar o debate sobre a possível definição de lugar geométrico.

### **Aula 3 – 1 de março**

A presente aula foi uma continuação da aula anterior. Primeiramente começou-se por, em conjunto, se chegar a uma definição de lugar geométrico, com base no que haviam feito na tarefa da aula anterior. Depois, deram-se exemplos e foram-se caracterizando os lugares

geométricos à medida que se fazia a correção da tarefa. De seguida, demonstrou-se a construção da mediatriz de um segmento de reta, utilizando régua e compasso, com recurso ao software de geometria dinâmica GeoGebra. Por fim, realizaram-se exercícios até o final da aula.

Notou-se que na presente aula houve um maior envolvimento dos alunos nas tarefas propostas. Pelo facto de a aula passada ter sido diferente e porque estavam curiosos para saber se o que havia sido feito na tarefa estava correto, eles estavam mais atentos e participativos. O que leva a refletir sobre a importância de evitar monotonia nas aulas e optar por um modelo de ensino-aprendizagem ativo, no qual os alunos desempenham um papel protagonista.

De seguida, apresentar-se-á uma descrição das atividades não letivas desenvolvidas na prática de ensino supervisionada.



## **3. Atividades Não Letivas**

Durante o ano letivo, foram elaboradas atividades não letivas com as turmas, nomeadamente visitas de estudo, um projeto de pensamento computacional e as olimpíadas da matemática. Adicionalmente, foi criada e proposta uma tarefa aos professores do grupo de matemática, envolvendo conteúdos das novas aprendizagens essenciais que serão implementadas a partir do ano letivo de 2024/25.

Ao longo do ano letivo, foi também frequente a participação em reuniões gerais de professores e diretores de turma, do conselho de turma, do grupo de recrutamento 500, assim como em reuniões de pais.

### **3.1. Reuniões assistidas**

O professor estagiário participou em reuniões gerais de professores que ocorriam no início de cada período e na reunião geral de diretores de turma que se realizou no início do ano letivo, onde foram transmitidas todas as informações gerais que se consideraram importantes ao bom funcionamento da escola. Participou também em reuniões do grupo disciplinar 500 e de articulação curricular, onde se faziam balanços do ponto de situação das turmas, discutiam-se estratégias e planificações de aulas, fichas e testes de avaliação. Na última reunião do grupo de Matemática, analisaram-se e escolheram-se os livros a utilizar no próximo ano letivo, tanto no 8.º ano como do 9.º ao 12.º, devido à interrupção da editora dos livros atualmente em vigor. Esteve igualmente presente em reuniões de pais e de conselho de turma, onde se discutiam situações relativas aos alunos, se formalizavam as classificações de todas as disciplinas, tanto intercalares, como de final de período. Em relação ao trabalho de direção de turma, o professor estagiário reuniu uma vez com a diretora de turma do 10.º no início do ano, com objetivo de aprender o funcionamento da plataforma digital adotada pela escola, nomeadamente na marcação de faltas, comunicação com os encarregados de educação, submissão de sumários e elaboração de documentos individuais dos alunos. Além das reuniões pontuais referidas acima, às segundas-feiras o núcleo de estágio reunir para discutir planificações de temas e

aulas, propostas de questões para avaliações e as suas correções e cotações, classificações finais e estratégias que ajudassem o sucesso dos alunos.

## **3.2. Olimpíadas Portuguesas de Matemática**

As Olimpíadas Portuguesas de Matemática (OPM), organizadas anualmente pela Sociedade Portuguesa de Matemática, são um concurso de problemas de Matemática, dirigido aos estudantes dos 1.º, 2.º e 3.º ciclos do ensino básico e também aos que frequentam o ensino secundário, que visa incentivar e desenvolver o gosto pela Matemática. Os problemas propostos neste concurso fazem sobretudo apelo à qualidade do raciocínio, à criatividade e à imaginação dos estudantes.

Participaram no concurso diferentes turmas dos três anos do ensino secundário e após o concurso, os dois professores estagiários, do núcleo de estágio, ficaram responsáveis pela correção, atribuição de cotações e pela distribuição dos diplomas aos concorrentes.

## **3.3. Bebras – Castor Informático**

O Bebras – Castor Informático é uma iniciativa internacional, organizada em mais de 50 países, com o objetivo de promover e introduzir a informática e o pensamento computacional para estudantes de todas as idades, tendo participado em Portugal, na presente edição, mais de 75000 alunos de cerca de 500 escolas. O desafio foi aplicado à turma do 10.º ano, no 1.º período. Consistia em pequenos problemas divertidos, estimulantes e baseados em tarefas que os cientistas de computadores encontram com frequência e gostam de resolver. Os problemas não requerem nenhum conhecimento prévio, mas requerem algum pensamento lógico. Depois de realizado o desafio, o professor estagiário submeteu os resultados numa plataforma fornecida pela entidade organizadora, para a posterior correção. Após os resultados serem revelados, foram distribuídos os diplomas aos alunos.

Encontra-se abaixo a hiperligação da página oficial, onde se podem visualizar os enunciados, tanto da presente edição, como das anteriores.

Hiperligação: <https://bebras.dcc.fc.up.pt/previous.html>

## **3.4. Visita de estudo**

No dia 19 de abril, acompanhou-se a turma do 10.º ano à EXPO da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa. Esta visita teve como objetivo que os alunos tivessem um primeiro contacto com a faculdade, ao mesmo tempo que experienciavam o potencial ilimitado da ciência, tecnologia e engenharia, com palestras, atividades de exterior e

experiências ao vivo. Ao longo da visita, os alunos poderiam seguir três percursos inspirados em figuras de destaque na ciência: Albert Einstein (Física), Marie Curie (Biologia e Química) e Nikola Tesla (Mecânica, Eletrotécnica e Informática).

Como projeto de cidadania e desenvolvimento, foi proposto aos alunos (em grupos de 4/5) a realização de um estudo abordando temáticas que experienciaram na visita de estudo e a elaboração de um póster científico para a posterior apresentação.

### **3.5. Tarefa Geometria Sintética**

Foi ainda elaborada e apresentada, pelo professor estagiário ao grupo de matemática, uma tarefa (Anexo 7) com conteúdos das novas aprendizagens essenciais que entrarão em vigor em 2024/25. A tarefa abordava tópicos de geometria sintética do 10.º ano e além se pretender que os docentes se familiarizassem com os novos conteúdos deste tema, tinha igualmente como objetivo desenvolver a capacidade de visualizar lugares geométricos e aprofundar a manipulação das ferramentas do *GeoGebra*.



## 4. Reflexão sobre o estágio

Durante um ano letivo, o professor estagiário teve o privilégio de realizar um estágio numa escola secundária e numa de ensino básico. Teve a oportunidade de acompanhar e lecionar uma turma do 10.º ano de escolaridade e outra do 9.º ano. Essa experiência foi extremamente enriquecedora, permitindo-lhe colocar em prática os conhecimentos adquiridos ao longo da sua formação e, ao mesmo tempo, aprender mais sobre o ensino e como uma escola funciona.

O início da sua jornada de estágio foi marcado por uma semana de reuniões iniciais, onde foi calorosamente acolhido pelos demais professores. Apesar da sua juventude e inexperiência, ele foi prontamente integrado. Durante essas primeiras reuniões, não pôde deixar de imaginar como eram as reuniões dos próprios professores quando ele era aluno, e a ansiedade de agora fazer parte desses momentos foi inevitável. Mais tarde, teve a oportunidade de ter uma reunião com a diretora de turma do 10.º ano, na qual aprendeu sobre o uso da plataforma digital implementada pela escola e discutiu alguns passatempos praticados pelos alunos e problemas pessoais enfrentados por eles. Essa experiência deixou-o motivado e alimentou o desejo de querer assumir o mais rápido possível a função de diretor de turma, lidar com tais desafios e contribuir para a resolução dos problemas dos alunos. Ao sair dessa reunião, ficou com a convicção de que finalmente tinha encontrado sua verdadeira vocação.

Nos primeiros dias de aula, o professor estagiário foi surpreendido pelo número de alunos na turma do 10.º ano. Enquanto no ensino básico e secundário as turmas a que pertenceu eram compostas por cerca de 10 alunos, agora deparava-se com uma realidade bem diferente. Inicialmente, essa situação deixou-o chocado, mas não teve muito tempo para ficar nervoso, pois o professor titular da turma prontamente o incentivou a interagir com a turma, a circular pela sala e até mesmo participar coletivamente no quadro. Antes de serem lecionados os conteúdos do 10.º ano, fizeram-se revisões de temas aprendidos em anos anteriores e, somente em seguida, aplicou-se um teste diagnóstico. Essa abordagem era nova para ele e fez total sentido. Proporcionou uma visão mais clara das necessidades de cada aluno, antes de se

avançar para novos conteúdos. Após essa etapa inicial, quando se começou a abordar novos conceitos, sentiu o nervosismo a voltar, pois a planificação anual começava pelo tópico de Geometria. Esse tema sempre foi o seu "calcanhar de Aquiles" devido a ter frequentado o ensino profissional, que não abrangeu a maioria desses conteúdos. No entanto, graças à sua dedicação em realizar todos os exercícios do livro e às orientações do professor titular da turma, principalmente em relação ao rigor matemático, e também às planificações de aulas bem estruturadas, começou a ganhar confiança na sua capacidade de lecionar. Essas planificações minuciosas, pensadas ao detalhe, e o esforço para estar sempre um passo à frente, foram extremamente úteis nas aulas lecionadas. Além de auxiliarem na "história" a ser contada, prepararam-no para esclarecer qualquer tipo de dúvidas que pudessem surgir. No entanto, numa das aulas lecionadas, teve-se mais uma certeza da complexidade que é a profissão de um professor. Quando está mais adoentado ou com o humor em baixo, por mais que se queira esconder, acaba por transparecer na aula, demorando-se mais a raciocinar, aumentando a probabilidade de haver enganos e enfrentando o olhar dos alunos quando isso acontece.

Durante a época de testes, o professor estagiário pôde perceber a complexidade envolvida na planificação de um teste. Ficou consciente da importância de se decidir de forma clara sobre o que se pretende avaliar e de ser criterioso na atribuição das cotações, de maneira a ser o mais justo possível e congruente nas correções. No entanto, confessa que este é um aspeto em que ainda precisa aprimorar no futuro. No meio do primeiro período, não ficou satisfeito com o desempenho no primeiro teste da maioria dos alunos. Percebeu-se que este baixo desempenho além de estar ligado à falta de vocação e desmotivação em relação ao curso (cuja mudança não dependia exclusivamente dos alunos), estava ligado com a falta de hábitos de estudos, dedicação, autonomia e resiliência por parte dos alunos. Outro fator relacionado é a falta de bases matemáticas. Os alunos podem até compreender certos conceitos, como no tema de geometria, mas o facto de não conseguirem resolver equações ou desenvolver casos notáveis, os impossibilita de chegar ao resultado pretendido, gerando dessa forma desmotivação. Essa situação em particular, aliada à grande disparidade de desempenho entre os alunos, levou-o a refletir sobre a importância de implementar estratégias de diferenciação em sala de aula. Percebeu que seria útil aplicar tarefas de remediação para os alunos com mais dificuldades, permitindo que eles dessem um passo atrás para, então, darem dois em frente. Ao mesmo tempo, reconheceu a necessidade de aplicar tarefas de enriquecimento para os alunos mais avançados, estimulando-os e desafiando-os a alcançar todo o seu potencial. Essa experiência despertou o seu interesse em estudar e investigar mais a fundo essas estratégias no futuro, a fim de verificar a sua viabilidade e como podem contribuir para o desempenho dos alunos. Diante dos resultados do primeiro teste, além de se sugerir sessões de apoio aos alunos que necessitavam, uma das estratégias implementadas para melhorar os resultados foi a mudança

da planta da sala de aula e a criação de pares pedagógicos. Essas medidas tiveram um efeito positivo, proporcionando um ambiente mais propício à aprendizagem e favorecendo a troca de conhecimentos entre os alunos.

Relativamente à turma do 9.º ano, devido ao contexto e às características da turma, a experiência foi diferente. Os alunos apresentavam características distintas, eram mais imaturos, menos colaborativos, com pouco interesse e disciplina, além de evidenciarem lacunas em bases essenciais. Inicialmente, adotou-se a abordagem clássica em que o professor titular lecionava as aulas e, em seguida, os professores estagiários circulavam para auxiliar com dúvidas. Porém, apenas alguns alunos demonstravam interesse e persistência em trabalhar, enquanto outros precisavam ser instigados e não mostravam iniciativa própria para tirar dúvidas. Perante esse cenário, optou-se por adotar uma estratégia diferente. Decidiu-se dar maior importância aos poucos alunos que realmente estavam motivados a aprender, na esperança de que, ao presenciarem o empenho e a evolução dos colegas, os demais alunos mudassem de atitude. Após pouco tempo, essa estratégia começou a surtir efeito: os alunos interessados passaram a repreender aqueles que atrapalhavam a aula, e estes, por sua vez, demonstraram ciúmes em relação à interação dos outros colegas com os professores estagiários e passaram a buscar mais esclarecimento de dúvidas. No entanto, nesse mesmo período, houve uma interrupção nas aulas de Matemática devido à indisponibilidade do professor titular, o que fez com que os alunos perdessem quase um mês de aulas.

Com a chegada de um novo professor, todo o progresso alcançado até então teve de ser recuperado, juntamente com os conteúdos que não foram lecionados. Esta situação gerou preocupação, pois os alunos já enfrentavam grandes dificuldades e agora teriam de correr contra o tempo para recuperar o atraso. Lamenta-se que, mesmo havendo alunos com imenso potencial, estes não o atinjam devido a essa situação e ao ambiente desmotivador em que estão inseridos. Os bons alunos não eram devidamente estimulados, o que os levava a contentarem-se com o básico, enquanto os alunos com menos aproveitamento não recebiam a motivação necessária para melhorar.

Ao observar o ambiente da escola, notou-se que era diferente da escola secundária. Parecia mais antiquada e os professores demonstravam mais cansaço e menos entusiasmo do que no início de suas carreiras. A sala de professores, infelizmente, era um local de constante crítica e desabafo negativo, o que podia ser desencorajante para pessoas em início de carreira, ao invés de ser um local de troca de experiências e ideias para o aprimoramento de práticas pedagógicas. Essa falta de energia e motivação refletia-se nas salas de aula, impactando diretamente a aprendizagem dos alunos e impedindo-os de alcançar o seu pleno potencial. Diante dessas situações, a motivação e desejo de o professor estagiário ter a sua própria turma só aumentaram. No futuro, espera-se que mantenha esse entusiasmo e vontade de contribuir

não apenas para o desenvolvimento dos alunos, mas também para criar um ambiente de trabalho mais produtivo e inspirador para os professores.

Em conclusão, apesar dos desafios enfrentados, tanto na turma do 10.º ano como na turma do 9.º ano, considera-se que o estágio foi uma experiência valiosa. Não só o professor estagiário teve a oportunidade de colocar em prática os conhecimentos adquiridos, mas também percebeu a importância da relação professor-aluno, a constante evolução profissional, da reflexão sobre as práticas pedagógicas e da busca por estratégias inovadoras que pudessem promover um ensino de qualidade.

## **PARTE II– PROJETO DE INVESTIGAÇÃO**



# 1. Introdução

## 1.1. Motivações Pessoais e Pertinência do Estudo

Sem nos apercebermos, a Matemática está constantemente presente em tarefas do nosso cotidiano, como por exemplo o valor a pagar pela gasolina em função dos litros que depositamos, ou mesmo no supermercado ao pagarmos pela fruta uma determinada quantia, em função do seu peso.

O conceito de função é central no ensino da matemática e os conhecimentos sobre as mesmas são indispensáveis para a compreensão do mundo que vivemos assumindo potencialidades de interdisciplinaridade, pois além da Matemática, é possível aplicá-las na Física, Engenharia, Economia, (Ponte, 1990) bem como em outras áreas de conhecimento. No entanto, os alunos tendem a manifestar dificuldades no estudo da Matemática, em particular no estudo das funções (Sproesser et al., 2018), por estarem habituados a aplicá-las de forma direta em exercícios, por processos algébricos e mecanizados, ao invés de processos que os façam raciocinar e que estimulem a compreensão, como o uso de tarefas matemáticas que contemplem a modelação e exploração matemática, assim como o estudo de situações em contexto real, tal como recomenda a Direção Geral de Educação (Silva et al., 2023). Duarte (2000) defende que a Matemática não deve ser vista como um aglomerado de exercícios, dado que o aluno não desenvolverá a persistência e flexibilidade necessárias para resolver problemas num mundo cada vez mais tecnológico, pelo que consideramos fundamental incorporar o uso da tecnologia no ensino da Matemática. Ao utilizarem a tecnologia para efetuar cálculos, representar graficamente, de forma instantânea, funções manipuladas, os alunos ficam com mais tempo disponível para a reflexão do problema. Desta maneira, a tecnologia auxilia-os na compreensão de conceitos e no desenvolvimento de atividades que contribuam para a sua educação, de modo a tornarem-se cidadãos reflexivos, críticos e intervenientes na sociedade, como sublinha DES (2001). Ainda assim, muitos dos alunos têm problemas com a utilização da calculadora gráfica, por a verem como um simples instrumento que faz gráficos. Isto deve-se à “falta de compreensão da representação simbólica e gráfica das

funções, bem como da relação entre estas, e a forma como a informação deve ser introduzida ou a forma como é apresentada pela calculadora” (Rocha, 2002, p. 6).

No meu caso, obtive consistentemente resultados excelentes em Matemática e Físico-Química durante o ensino secundário. Realizava e resolvia os exercícios apresentados sem grande esforço, pois estava familiarizado com esses processos de forma quase automática. No entanto, na faculdade, onde frequentemente me deparava com trabalhos que tinham por base a compreensão, nomeadamente de funções, apercebi-me de algumas lacunas no meu conhecimento. No presente mestrado, fui confrontado com diversas tarefas em que era preciso “meter as mãos na massa”, usar funções para definir um modelo que se ajuste ao conjunto de dados recolhidos, explorá-lo, fazer conjecturas, etc. Foi aí que me apercebi do “poder” deste tipo de tarefas e que por mais simples que sejam, com pequenas alterações, seria possível abordar conteúdos de vários anos de ensino básico e secundário. Outro fator que ajudou na melhor compreensão destes conceitos, foi o uso da tecnologia, como a calculadora gráfica ou softwares de geometria dinâmica, que permitem a visualização instantânea das representações gráficas, o que permitiu que o foco estivesse mais na compreensão e interpretação e não na álgebra.

Devido às problemáticas mencionadas, torna-se pertinente a realização de uma investigação sobre a aprendizagem das funções com recurso a tarefas exploratórias usando a tecnologia.

## 1.2. Objetivos e Questões de Investigação

O presente estudo tem como objetivo compreender a aprendizagem de novos conceitos do tópico *Funções*, lecionado na disciplina de Matemática A, no 10.º ano, formulando conjecturas, com recurso a tarefas exploratórias. Resultam deste objetivo as seguintes questões de investigação:

1. Como se caracteriza a formulação de conjecturas a partir de tarefas de exploração?
2. Como é que a formulação de conjecturas influencia a aprendizagem de novos conceitos?
3. Qual o papel das tecnologias na aprendizagem de novos conceitos matemáticos?

## 2. Revisão Bibliográfica

No presente capítulo é apresentada uma secção dedicada à aprendizagem por descoberta, uma das principais teorias de ensino-aprendizagem utilizadas atualmente. Nessa secção, são discutidos os princípios e as características desse modelo pedagógico, bem como as suas implicações para o ensino da Matemática.

De seguida aborda-se o que são tarefas matemáticas, as características de uma tarefa considerada enriquecedora e os principais tipos existentes. Uma vez que este projeto de investigação se enquadra na segunda teoria de aprendizagem referida, pretendeu-se que as tarefas aplicadas na investigação fossem de carácter exploratório.

Por fim é feito um breve retrato do uso da tecnologia no ensino em Portugal e como esta é essencial no ensino e na aprendizagem da Matemática.

### 2.1. Aprendizagem por Descoberta

Em algumas correntes de ensino e aprendizagem acreditava-se que as pessoas aprendiam sem se preocuparem verdadeiramente com a natureza desse processo e ensinavam sem procurar um suporte teórico explicativo do processo de ensino-aprendizagem (Vasconcelos et al., 2003). Mais tarde, esse pensamento foi mudando, tal como refere Bigge (1997, p. 3), que salienta que “o homem não só quis aprender como também, frequentemente, sua curiosidade o impeliu a tentar aprender como se aprende”. A partir desse pressuposto surgiram, possivelmente, teorias de aprendizagens como a teoria da aprendizagem por transmissão e a aprendizagem por descoberta.

Em Portugal, nas salas de aula, é predominante a aprendizagem por transmissão ou também conhecida por ensino direto, na qual o professor assume um papel central no processo de aprendizagem e “o aluno aprende ouvindo o que lhe é dito e fazendo exercícios” (Ponte, 2005, p. 12). Este ensino expositivo, caracteriza-se pelo pouco envolvimento dos alunos, e a aprendizagem consiste em “saber como se fazem” os exercícios para provas de avaliação (Ponte, 2005, p. 13). Desta forma, o aluno ao invés de aprender, e menos ainda aprender a

aprender, apenas acumula saberes que deverá ser capaz de repetir fielmente. O aluno é passivo na sua aprendizagem, um mero recetor de informação, que não desenvolve a sua criatividade, motivação, a capacidade de formular conjeturas e outras competências do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO). Contudo, houve quem se preocupasse com o aprender a pensar e o aprender a aprender e não com a obtenção de comportamentos observáveis. Bruner (1961) alega que a aquisição do conhecimento é menos importante do que a aquisição da capacidade para descobrir o conhecimento de forma autónoma. Assim, devem os professores promover uma aprendizagem pela descoberta por meio de atividades exploratórias por parte dos alunos. Nessa perspetiva, cabe ao professor a capacidade de lançar perguntas que despertem a curiosidade, mantenham o interesse e provoquem e desenvolvam o pensamento. É fundamental reconhecer o aluno como um participante ativo, contribuindo de forma interativa para a construção de conhecimento. Como afirma Freitas, “tem de ser criativo no processo de ensino-aprendizagem e não apenas um recetor do conhecimento. Ele deverá ser criador do seu próprio conhecimento” (2012, p. 16). O presente trabalho de investigação enquadra-se nesta perspetiva de ensino e aprendizagem, no ensino ou aprendizagem por descoberta.

No ensino por descoberta, também designado por Ponte (2005) como ensino ativo, a aprendizagem dos alunos ocorre, “não de ouvir diretamente o professor ou de fazer esta ou aquela atividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou” (Ponte, 2005, p. 15). Como o próprio nome indica, defende-se uma aprendizagem ativa, exigindo explorações e descobertas efetivas para o alcance de uma verdadeira compreensão.

Aprender matemática com compreensão tem a capacidade de tornar mais fácil a aprendizagem subsequente. Ideias e conceitos bem fundamentados e eficazmente relacionados são mais facilmente aplicados a novas situações (NCTM, 2007, p. 21).

Todavia, sendo a aprendizagem por descoberta um processo individual e coletivo que resulta da interação social (colegas e professor) e da negociação de significados matemáticos, no contexto de uma tarefa matemática (Canavarro, 2011; Oliveira et al., 2013), este é um processo difícil e moroso, que será porventura compensado, porque, como referido, ajuda o aluno a ter uma aprendizagem mais baseada na compreensão e no significado, do que na memorização (Vasconcelos et al., 2003).

A seguir apresentar-se-á o que são tarefas matemáticas, o que uma boa tarefa matemática deve englobar e os principais tipos existentes.

## 2.2. Tarefas Matemáticas

Sendo a Matemática uma área onde os conhecimentos se aprofundam através da sua aplicação, é na resolução de uma tarefa que os alunos utilizam e ampliam os saberes (Cavaco, 2015). Gimeno (2000) define tarefas como sendo, genericamente, atividades de ensino e aprendizagem dentro de ambientes escolares. Para este autor, as tarefas inserem-se no currículo em ação. Para Ponte (2005), quando um aluno está envolvido numa tarefa, realiza uma certa atividade e, como tal, uma tarefa constitui-se como o objetivo da atividade.

Carvalho e Silva et al. (2023) mencionam que a construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor e que uma tarefa matemática para que seja enriquecedora, deve ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso, devendo ainda ser diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. As tarefas devem ainda promover a utilização de recursos variados, como a tecnologia, a diversificação de contextos de aprendizagens como espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros. Por fim salientam que, pelo seu potencial pedagógico, deverão ser explorados episódios e problemas da História da Matemática.

Ponte (2005) considera que uma tarefa pode surgir sob quatro formas distintas: exercício, problema, investigação e exploração. O mesmo autor propõe duas dimensões fundamentais para a análise das tarefas, a estrutura e o grau de desafio. O grau de desafio (dificuldade de uma questão) varia entre desafio “reduzido” e “elevado”. A estrutura varia entre “aberto” e “fechado”. Uma tarefa fechada é aquela onde se explicita claramente o que é dado e o que é pedido, ao contrário da tarefa aberta que há uma certa indeterminação no que é dado e/ou o que se pretende.

- Um *exercício* é uma tarefa fechada e de desafio reduzido;
- Um *problema* é uma tarefa também fechada, mas com elevado desafio;
- Uma *investigação* é uma tarefa também com um grau de desafio elevado, mas aberta;
- Uma *exploração* é igualmente uma tarefa aberta, com um desafio reduzido.

A figura 2.1. representa a relação entre os quatro tipos de tarefas mencionadas, considerando as duas dimensões citadas.



Figura 2.1. – Relação entre os diversos tipos de tarefas, considerando o seu grau de desafio e de abertura, de Ponte (2005, p. 17).

Num *exercício* o aluno dispõe de um processo mais ou menos imediato para o resolver, mas em que é suposto o aluno conhecer o processo de resolução. Usam-se exercícios quando se pretende desenvolver no aluno mecanismos rotineiros e de consolidação, que envolvam alguma sistematização (Martins, 2016).

Quando um aluno resolve um *problema*, tem por base o princípio da descoberta. Isto é, um professor propõe um problema a um aluno quando quer desafiar as suas capacidades matemáticas e quer que o aluno desenvolva algum gosto pela disciplina. Os problemas devem funcionar como desafios, no entanto não devem ser nem demasiado difíceis, de forma a desmotivar o aluno, e fazer com que este desista da sua resolução, nem demasiado fáceis, pois nesse sentido podem confundir-se com exercícios.

Numa *investigação* pretende-se levantar questões e apresentar alguma informação relevante, no entanto, deixa-se para o aluno a definição de estratégias, de forma a resolver as questões formuladas, sendo que os modos de resposta podem variar de aluno para aluno. Quer as investigações, quer os problemas surgem em norma associados a contextos reais. Por sua vez, uma *exploração*, pode constituir-se como uma tarefa de investigação em que o objetivo é por norma encontrar regularidades ou padrões e não requer por parte do aluno uma grande planificação.

Outra dimensão importante a ter em conta, podendo estar presente nos tipos de tarefas mencionados, é o contexto. As tarefas poderão estar enquadradas num contexto de realidade ou formuladas em termos *puramente matemáticos* (Ponte, 2005). Skovsmose (2000) distingue ainda um contexto intermediário que designa por “semi-realidade” que “não se trata de uma realidade que “de facto” observamos, mas de uma realidade construída” (Skovsmose, 2000, p. 74). Tal como sublinha Ponte (2005), este contexto é muito frequente em exercícios e problemas de Matemática em que a maior parte das propriedades reais das situações não são tidas em conta, mas sim propriedades que interessam a quem enunciou o problema.

O presente estudo de investigação terá como recurso tarefas de exploração enquadradas neste último contexto.

### **2.2.1. Tarefas de Exploração**

Viu-se anteriormente quais as características de uma tarefa de investigação e os seus objetivos. O ensino exploratório contraria a ideia de transmissão unidirecional de conhecimento do professor para o aluno, proporcionando condições para que os alunos aprendam através da resolução de tarefas e da sua discussão coletiva posterior, para sistematizar conhecimentos (Canavarro, 2011). Realizar uma tarefa de exploração significa “entrar em terreno desconhecido, recolher dados, detetar diferenças, ser sensível às repetições e às analogias, reconhecer regularidades e padrões – ou porventura um sentido ainda mais forte – investigar, procurar, encontrar e descobrir” (Associação de Professores de Matemática, 1988, p. 59). Canavarro (2011) sublinha ainda que, deste modo, os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. O aluno desenvolve essas capacidades passando por quatro etapas que Ponte et al (1999) definiram como características de uma investigação matemática:

1. Formular a questão a investigar;
2. Formular conjecturas relativamente a essa questão;
3. Testar as conjecturas e, eventualmente, reformulá-las;
4. Validar e comunicar os resultados.

Este trabalho de investigação terá um foco maior na formulação das conjecturas, na tentativa de provar a veracidade das afirmações e na descoberta de contraexemplos que refutam essas mesmas afirmações. O NCTM (1991) alega que em todos os níveis de ensino, os alunos devem viver a experiência de fazer conjecturas, abstrair propriedades matemáticas, comunicar os seus raciocínios, validar as suas conclusões, questionar e discutir o seu próprio raciocínio e o dos outros. Nesta perspetiva de descoberta, os alunos geram, na comunidade turma, novo conhecimento ao articular todos os tipos de raciocínio, contribuindo assim para o desenvolvimento de competências demonstrativas (Oliveira, 2002).

Canavarro (2011) reforça que o ensino exploratório da Matemática não advoga que os alunos descubram sozinhos as ideias matemáticas que devem aprender, nem tão pouco que inventam conceitos e procedimentos ou lhes adivinham os nomes. Embora sejam os alunos os responsáveis por realizar a tarefa, o professor tem um papel fundamental desde o início até ao fim da mesma. Depois de inicialmente apresentar a tarefa, para além de gerir o trabalho dos

alunos, o professor precisa de compreender e interpretar como estes resolvem a tarefa e de explorar as suas respostas, de modo a aproximar e articular as suas ideias com aquilo que é esperado que aprendam. Quando há dúvidas, o professor deve resistir explicar para não fornecer indicações que possam reduzir o nível cognitivo da tarefa, ao invés disso, deve questioná-los, na expectativa de os fazer pensar, como aconselham Stein e Smith (2009). Depois de concluído o tempo destinado para a realização da tarefa, deverá proceder-se a uma discussão matemática com as tarefas, cujas resoluções melhor contribuem para esclarecer os aspetos mais significativos do problema. Para proporcionar ao professor melhores condições de orquestrar produtivamente esta fase, Stein e Smith (2009) recomendam cinco práticas: 1. Antecipar; 2. Monitorizar; 3. Selecionar; 4. Sequenciar e 5. Estabelecer conexões.

Na planificação do trabalho, o professor deve prever e antecipar a interpretação e as diferentes estratégias, corretas ou incorretas, que os alunos possam optar, deste modo conseguirá estar preparado para potenciais dificuldades. Na etapa a seguir à apresentação da tarefa, deverá circular pela sala, não só para acompanhar o trabalho, avaliar o potencial da tarefa, como foi mencionado, mas também é igualmente importante tomar anotações sobre os aspetos chave de diferentes tipos de resoluções para posterior discussão. Através dessa monitorização, o professor será então capaz de selecionar as resoluções que achar mais adequadas para a discussão. Após a seleção, é relevante a ordem pela qual as resoluções serão apresentadas, essa sequência é muito orientada pelo percurso de exploração das ideias matemáticas que o professor entende ser mais adequado para os seus alunos tendo em vista atingir o propósito matemático da aula. Ao tomar decisões ponderadas acerca da ordem pela qual se dá a apresentação e partilha dos trabalhos dos alunos, o professor pode maximizar as hipóteses de a discussão e síntese serem matematicamente bem-sucedidas. Por fim, será de valor procurar estabelecer conexões com vista ao desenvolvimento coletivo de ideias matemáticas poderosas que sintetizam as aprendizagens matemáticas dos alunos (Canavarro, 2011).

Como referido anteriormente, na sala de aula é predominante o ensino direto. Assim, ao encararem tarefas desta natureza, é de esperar que os alunos, numa primeira instância, tenham dificuldades na realização das mesmas, pois não estão habituados a terem de pensar, a questionar-se e terem a resiliência necessária. A implementação do trabalho exploratório é um processo moroso para o qual é preciso insistência, pois, traz benefícios para a aprendizagem dos alunos. Freitas (2012) refere que para além de motivar os alunos para a matemática, as tarefas exploratórias fomentam o raciocínio, contribuem para desenvolver o espírito crítico, o gosto pela pesquisa que, através das aulas tradicionais e expositivas não seriam estimulados e incrementados. De acordo com Ponte et al. (2003), em qualquer disciplina, o envolvimento do aluno é condição fundamental da aprendizagem. Segundo Branco (2011), este tipo de

abordagem parece ter contribuído também para aumentar a motivação dos alunos, uma vez que mesmo os alunos mais fracos se empenharam na exploração das tarefas propostas:

Se calhar com outro tipo de aulas, os alunos mais fracos ficavam mais de lado e aqui foram participando. Com o decorrer da experiência os alunos tornaram-se mais ativos, empenhados e participativos, mesmo os alunos que mostravam ter pouco à vontade para contribuir com as suas ideias e raciocínios para a discussão no grupo turma, no final da experiência conseguiam fazê-lo, o que para alguns deles foi uma conquista. (Branco, 2011, p. 253)

Outro fator que é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática é o uso da tecnologia (NCTM, 2007).

### **2.3. Uso da Tecnologia**

A utilização da tecnologia nas aulas de Matemática do nosso país, tem vindo a mudar desde os finais do século XX, uma época em que o acesso à tecnologia era ainda escasso e pouco democrático Domingos (2016). No início restringia-se ao uso das calculadoras científicas e mais tarde introduziu-se o computador com a folha de cálculo e softwares que permitiam a representação de funções. Com o passar do tempo, o uso da calculadora gráfica foi sendo aceite e, atualmente, pela sua mobilidade, custo acessível, nível de desenvolvimento e sofisticação, permite competir com o computador na aula de Matemática, estando a sua utilização prevista nos programas de Matemática para o Ensino Secundário, em Portugal.

Segundo Silva et al. (2023), uma das ideias-chave do currículo é incentivar a exploração de ideias e conceitos integrando a tecnologia, integração essa que é considerada indispensável pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, de cálculo simbólico e numérico. Sublinham ainda que o recurso às tecnologias como a folha de cálculo, ambientes de geometria dinâmica, aplicativos digitais, simulações, smartphones, calculadora gráfica e sensores, deve ser feito de forma sistemática. Esta prática ajuda a criação de novas dinâmicas na sala de aula, de ambientes de trabalho que estimulam a discussão e a partilha de ideias, que incentivam a formulação de conjecturas e a comunicação matemática (Ponte & Canavarro, 1997).

Neste trabalho de investigação será explorado o tema das funções do 10.º ano de escolaridade e serão abordados conteúdos como generalidades acerca de funções e transformações de funções reais de variável real em funções lineares, afins e quadráticas. Não é o primeiro contacto destes alunos com as funções, já que têm conhecimento prévio de funções lineares, afins, de proporcionalidade inversa e quadráticas, contudo é de esperar que tais tópicos não tenham sido bem consolidados, uma vez que estes são vítimas da pandemia de

COVID-19, que os obrigou a ter largos períodos de ensino a distância. Assim, é vantajoso aplicar-se a tecnologia na aprendizagem destes conteúdos, por ser um catalisador da aprendizagem, que auxilia os alunos na compreensão de conceitos matemáticos e prepara-os para aplicar a matemática num mundo cada vez mais tecnológico, como defende Freitas (2012) no seu trabalho de investigação:

...as tarefas de exploração de famílias de funções quadráticas, com recurso à calculadora gráfica, contribuíram para o desenvolvimento das capacidades de explorar, pois este instrumento facilitou a pesquisa, incentivando os alunos nas tarefas e permitiu a confrontação constante das várias formas de representar funções, o que parece ter promovido uma melhor compreensão das funções e das suas propriedades. (Freitas, 2012, p. 81)

Atualmente, uma das tecnologias mais usada nas salas de aula, em Portugal, no Ensino Secundário, é a calculadora gráfica, que é recomendada nas Aprendizagens Essenciais. Além de gerar um maior envolvimento dos alunos, por a sala ser transformada num laboratório de Matemática, outra vantagem do uso da calculadora gráfica no estudo das funções é, como afirma Ponte (1995), a valorização da linguagem gráfica e de novas formas de representação, uma vez que as representações múltiplas que as máquinas proporcionam, com especial destaque para a gráfica, permitem outras abordagens às situações matemáticas, para além dos processos formais de cunho algébrico ou analítico.

Deste modo, os alunos podem concentrar-se mais na tomada de decisões, na reflexão, no raciocínio e na resolução de problemas (NCTM, 2007). Os alunos ao aprenderem a reconhecer como os valores dos parâmetros moldam os gráficos das funções, podem explorar facilmente, através de uma calculadora, os efeitos das mudanças desses parâmetros (NCTM, 2007). Também Nunes (2022) no seu trabalho de investigação conclui que a aplicação de tarefas de exploração, com recurso à calculadora gráfica, ao gerar entusiasmo, interesse, motivação e facilitar a pesquisa dos alunos, contribuiu para o desenvolvimento das capacidades de exploração e para a melhoria da compreensão das funções e das suas propriedades tendo assumido um papel importante na visualização de gráficos de funções e na validação de conjecturas. Contudo, tal como refere Martins (2016), o uso da tecnologia não elimina a necessidade de o aluno aprender algoritmos. É igualmente importante que este tenha alguma proficiência nos algoritmos de cálculo com papel e lápis, mas tal conhecimento deve partir de situações problemáticas em que o aluno esteja consciente que existem vários métodos possíveis que pode escolher, adotando o processo que se afigure mais adequado à resolução do problema.

## 3. Metodologia

Neste capítulo é apresentada a metodologia adotada na aplicação da investigação, nomeadamente o tipo de investigação, as técnicas de recolha de dados, os procedimentos metodológicos e a escolha dos participantes.

### 3.1. Investigação Qualitativa

Segundo Leal (1992), a escolha do método de investigação deve-se fazer de acordo com a natureza do problema em estudo. Tendo em conta os objetivos e as questões norteadoras da investigação, em que se pretende compreender como os alunos pensam e agem, optou-se por uma abordagem qualitativa com um paradigma interpretativo, pois esta investigação foca-se mais no processo do que no resultado e tenciona descobrir, descrever, explicar e induzir (Fortin, 2003).

Bogdan e Biklen (2013) definem cinco características da investigação qualitativa: (1) os dados são recolhidos no ambiente natural, no local do estudo, sendo o investigador o principal responsável dessa recolha; (2) é descritiva – no sentido que os dados recolhidos referem-se aos processos de aprendizagem dos alunos e assim sendo, para uma compreensão dos mesmos, os dados obtidos são recolhidos na forma de palavras e não de números; (3) maior interesse pelo processo do que pelos resultados ou produtos; (4) os dados são analisados de forma indutiva – o investigador não recolhe dados com o objetivo de confirmar hipóteses construídas previamente, é ao longo do estudo que vai analisando e tirando conclusões e (5) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa - o investigador tenta compreender o ponto de vista e as opiniões dos intervenientes no estudo face às suas experiências.

Como referido anteriormente, uma vez que o foco da investigação está em compreender a aprendizagem do aluno, decidiu-se envergar por uma abordagem integrada no estudo de caso.

## 3.2. Estudo de Caso

Considerando as características da investigação, optou-se pela realização de estudos de caso. Segundo Ponte (2006), um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O mesmo autor afirma que “o seu objetivo é compreender em profundidade o ‘como’ e os ‘porquês’ dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspetos que interessam ao pesquisador” (p. 106).

Para caracterizar o estudo de caso, Ludke e André (1986) referem sete características para este tipo de investigação qualitativa: (1) visam a descoberta, na medida em que podem surgir, em qualquer altura, novos elementos e aspetos importantes para a investigação além dos pressupostos do enquadramento teórico inicial; (2) enfatizam a interpretação em contexto, pois todo o estudo desta natureza tem que ter em conta as características da escola, o meio social em que está inserida, os recursos materiais e humanos, entre outros aspetos; (3) retratam a realidade de forma completa e profunda; (4) usam uma variedade de fontes de informação; (5) permitem generalizações naturalistas; (6) procuram representar as diferentes perspetivas presentes numa situação social e (7) utilizam uma linguagem e uma forma mais acessível do que outros métodos de investigação. Dias (2019) refere que dependendo das características e procedimentos utilizados no estudo de caso ele pode ser classificado de diferentes modos. Por sua vez, Aires (2011) faz referência a seis modalidades distintas de estudos de caso: (1) estudos de caso ao longo do tempo - estudo de um fenómeno, sujeito ou situação a partir de diferentes perspetivas temporais; (2) observacionais - caracterizam-se pelo recurso à observação participante e podem referir-se a diferentes temáticas; (3) estudos de comunidades - consistem na descrição e compreensão de uma determinada comunidade educativa, por exemplo, escolas, agrupamentos, etc.; (4) estudos micro-etnográficos - desenvolvem-se em pequenas unidades organizativas ou numa atividade específica organizativa; (5) estudos de caso múltiplos - estudam dois ou mais sujeitos, situações ou fenómenos e podem adotar diferentes modalidades; e (6) estudos multisituacionais - aplicam-se no desenvolvimento de uma teoria, exigindo a exploração de muitas situações e sujeitos. Nesta investigação abordar-se-ão estudos de caso múltiplos.

Independentemente da modalidade de estudo de caso, é importante que a seleção dos casos, não seja feita de forma aleatória. O investigador escolhe os participantes, de acordo com critérios definidos, procurando a maior variabilidade possível, com objetivo de obter informação máxima (Aires, 2011).

### **3.3. Técnicas de Recolha de Dados**

A escolha das técnicas de recolha de dados é uma etapa de extrema importância no processo de investigação, pois desta depende a concretização dos objetivos do estudo, pelo que o investigador não a pode minimizar (Aires, 2011). Na presente investigação, escolheu-se as técnicas de recolha de dados que Olabuenaga (1996) considera como principais: a observação, a entrevista e a análise documental. Além destas principais, de maneira a recolher e registar informação suficiente e pertinente para o estudo, optou-se por utilizar o diário de bordo.

Seguidamente, é feita uma breve caracterização das diversas técnicas escolhidas.

#### **3.3.1. Observação**

A observação é uma técnica de recolha de dados que consiste no registo de unidades de interação, numa dada situação (Coutinho, 2015). Bogdan e Biklen (2013) consideram esta técnica, em que o observador regista o que vê e ouve, a melhor técnica de recolha de dados nos estudos qualitativos, podendo essa observação ser participante e não participante. Segundo Meirinhos e Osório (2010), a observação participante ocorre quando o investigador não é um observador passivo, podendo este assumir um papel ativo no desenvolvimento do estudo de caso, enquanto a observação não participante subentende a ideia contrária, de que o investigador é um mero observador da ação, não interferindo com mesma. Bogdan e Biklen (2013) referem que, ao longo do estudo, o tipo de observação pode ser alterado conforme a necessidade e as circunstâncias, podendo a participação do investigador ser mais ativa nuns momentos e menos noutros.

#### **3.3.2. Diário de Bordo**

Posteriormente à observação no campo de estudo, participante ou não participante, é no diário de bordo que o investigador faz as suas anotações. Essas notas de campo são “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados” (Bogdan & Biklen, 2013, p. 102).

Na presente investigação, tanto a observação, o diário de bordo, foram utilizados nas sessões de realização das tarefas.

### **3.3.3. Análise Documental**

As análises de documentos podem desempenhar diversas funções, sendo duas delas o papel de completar a informação previamente obtida por outros procedimentos e como método de pesquisa principal.

Como salienta Dias (2019), estes documentos podem ser oficiais (internos e externos) e pessoais. Os documentos oficiais são os que contêm informação sobre as organizações, registros sobre os estudantes, o seu percurso escolar e etc. Enquanto os pessoais são produzidos pelos próprios sujeitos do estudo, tais como cartas, diários, memorandos, autobiografias, filmes, fotografias e entre outros com uma vertente mais íntima.

Neste caso, além do diário de bordo, foram analisadas as resoluções das tarefas resolvidas por parte dos alunos.

### **3.3.4. Entrevista**

Após a análise documental, realizou-se uma entrevista a cada um dos estudos de caso, a fim de rever as resoluções. Considerada por Olabuenaga (1996) como a segunda grande técnica de investigação qualitativa, a entrevista consiste numa conversa intencional, normalmente entre duas pessoas, dirigida por uma delas, o entrevistador, com o objetivo de obter informações sobre a outra, o entrevistado (Bogdan & Biklen, 2013). Segundo Stake (1999), a entrevista tem também como objetivo compreender a experiência única de cada sujeito e alcançar alguma explicação ou a descrição de um episódio ou história, ou seja, procura-se abordar questões, normalmente com revisões de resoluções, cuja resposta não foi perceptível nas sessões de trabalho. As questões não devem ser de resposta fechada, de maneira a permitir maior diálogo entre o entrevistador e o entrevistado e que permitam que este justifique determinados procedimentos que aplicou nas tarefas. Silva e Menezes (2005) referem dois tipos de entrevista: estruturada e não estruturada. A entrevista estruturada ou padronizada apresenta um guião previamente estabelecido enquanto a não estruturada permite explorar outras questões não existentes no guião.

## **3.4. Procedimentos Metodológicos**

### **3.4.1. Estratégia de Recolha de Dados**

Considerando a problemática do presente estudo e de maneira a concretizar os objetivos de investigação, elaboraram-se três tarefas de exploração, tendo em consideração as orientações de Silva et al. (2023), procurando que estas fossem interessantes, desafiantes e que permitissem ao aluno aplicar e ampliar os seus conhecimentos, procurando padrões,

registando observações para posteriormente formularem conjeturas com recurso à calculadora gráfica, onde podem representar e visualizar funções de forma instantânea, priorizando desta forma a compreensão e raciocínio, ao mesmo tempo que permitissem ao investigador averiguar a compreensão dos alunos.

Uma vez que um dos objetivos do estudo é averiguar como a formulação de conjeturas influencia a aprendizagem de novos conceitos, nomeadamente de funções, as tarefas foram aplicadas antes destes conteúdos serem lecionados em sala de aula, fora do horário, em três sessões de trabalho durante o 2.º período, onde os alunos trabalharam individualmente. A primeira sessão teve uma duração de 45 minutos, enquanto as últimas duas tiveram 90 minutos de duração.

Durante as sessões, seguindo as práticas propostas por Stein e Smith (2009) o investigador foi observando como os alunos resolviam a tarefa e nos momentos de dúvida ao invés de explicar logo de seguida, procurava questionar os alunos de forma a guiá-los e fazê-los pensar, ao mesmo tempo que apontava o que observava e ouvia no seu diário de bordo.

Na tabela 3.1. estão apresentados os dias de cada sessão, assim como as tarefas referentes.

*Tabela 3.1. – Calendário de sessões*

|          | Data          | Tarefa   | Tema   |
|----------|---------------|----------|--|
| Sessão 1 | 24 de janeiro | Tarefa 1 | Funções afins.   |
| Sessão 2 | 27 de janeiro | Tarefa 2 | Translações de gráficos de funções.                        |
| Sessão 3 | 31 de janeiro | Tarefa 3 | Contrações, dilatações e reflexões de gráficos de funções. |

### **Sessão 1 - 24 de janeiro**

Na primeira sessão, com a duração de 45 minutos, foi aplicada a Tarefa 1 (Anexo 8). Esta tarefa tinha como objetivos principais que os alunos fossem capazes de manipular a calculadora gráfica como instrumento de exploração, uma vez que foi o primeiro contacto que tiveram com a mesma. Pretendia-se ainda que se familiarizassem com este tipo de tarefas, para os preparar para as seguintes.

Posto isto, elaboraram-se duas questões com duas alíneas cada, que abordam conteúdos de funções dos anos anteriores, em particular funções afins, em que se pretendia que os alunos

fizessem variar os parâmetros do declive e da ordenada na origem, representassem as diferentes funções na calculadora e um posterior esboço, de maneira a compreender a relação desses parâmetros com o gráfico da função. Ainda foi elaborada uma terceira questão para que associassem expressões analíticas com funções que representam situações de contexto real, no caso a representação de distâncias em função do tempo.

### **Sessão 2 - 27 de janeiro**

Na mesma semana, foi aplicada a segunda tarefa (Anexo 9) com a duração de 90 minutos, com o objetivo de que os alunos fossem capazes de compreender a relação dos parâmetros  $c$  e  $d$  de funções da família  $y = f(x + c) + d$  com os gráficos das mesmas.

A tarefa foi dividida em duas partes, uma sem a utilização da calculadora e a outra com. Na primeira parte, elaborou-se uma questão inicial, em que dado o gráfico de uma função e a aplicação de uma translação vertical, se marcassem pontos da função transformada para o posterior esboço e análise. Numa segunda questão, dados dois gráficos de funções, intencionava-se que os alunos explicassem por palavras, que transformações seriam necessárias para transformar o gráfico de uma, na outra (com uma alínea envolvendo apenas transformações horizontais e outra envolvendo tanto estas como as verticais).

Na parte com a utilização da calculadora, numa primeira fase, pretendia-se a exploração e o estudo das funções, variando o parâmetro relativo às translações verticais e na fase a seguir, o mesmo procedimento, mas variando o parâmetro relativo às translações horizontais. Por fim, criaram-se questões com o objetivo de se explicar por palavras as transformações aplicadas a uma função inicial, a partir da expressão analítica da transformada e vice-versa, envolvendo as translações.

### **Sessão 3 - 31 de janeiro**

Na última sessão de trabalho, igualmente com duração de 90 minutos, foi aplicada a Tarefa 3 (Anexo 10), cujo objetivo era que os alunos fossem capazes de representar graficamente, interpretar e descrever gráficos que traduzem situações em contexto real e de compreender a relação dos parâmetros  $a$  e  $b$  de funções da família  $y = af(bx)$  com os gráficos das mesmas.

Esta encontrava-se igualmente dividida em duas partes, sem e com calculadora gráfica. Numa primeira instância, foi descrita uma situação em contexto semi-real, envolvendo um percurso e pretendia-se o esboço de um gráfico que a representasse e vice-versa. A seguir, ainda em contexto semi-real, foi criada uma questão com a finalidade de se averiguar a influência do parâmetro  $a$ , contraindo e dilatando o gráfico relativo ao percurso.

Na parte com a utilização da calculadora, intencionava-se a exploração e o estudo das funções, variando os parâmetros relativos às dilatações/contrações verticais e horizontais, para valores pertencentes aos intervalos  $]0, 1[$  e  $]1, +\infty[$ , assim como para os parâmetros negativos, de maneira a observarem reflexões em torno dos eixos das abcissas e das ordenadas.

Por fim, à semelhança da segunda tarefa, foram criadas questões com o propósito de se explicar por palavras as transformações aplicadas a uma função inicial, a partir da expressão analítica da transformada e vice-versa, envolvendo contrações, dilatações e reflexões.

Uma semana após a aplicação das tarefas, foi realizada uma entrevista a todos os participantes, com o objetivo de rever e compreender a resolução das mesmas. As entrevistas foram realizadas individualmente, tendo sido semiestruturadas, na medida em que o entrevistador tinha como suporte um guião (Anexo 11) com questões iniciais base para envolver o entrevistado e deixá-lo à vontade. No decorrer da entrevista, o investigador foi colocando questões que considerou pertinentes a cada um dos entrevistados, de maneira a concretizar a finalidade da entrevista, na medida que o aluno poderia refletir sobre o seu raciocínio e sobre as respostas, conforme vai conversando com o investigador. No final, foram igualmente colocadas questões gerais (presentes no guião) para saber a opinião dos entrevistados em relação às tarefas, à calculadora gráfica e que influência (se alguma) teve a resolução das tarefas, quando foram abordados estes conteúdos em sala de aula.

### **3.4.2. Escolha dos Participantes**

Como referido anteriormente, este projeto de investigação foi realizado com alunos de uma turma do 10.º ano do Ensino Secundário, sendo que as tarefas foram aplicadas a oito alunos dessa turma. Para escolha estes participantes, por forma a garantir a maior variabilidade possível, teve-se em consideração as notas referentes ao 1.º período, procurando diversificar alunos com diferentes níveis de aproveitamento, que durante as aulas demonstraram algum empenho na disciplina dentro e fora de aula e a disponibilidade para a realização das tarefas nas duas semanas previstas para a recolha de dados.



## 4. Apresentação e Análise de Dados

No presente capítulo serão descritos os quatro estudos de caso que se consideraram como mais relevantes para a investigação. Todos os nomes utilizados, René, Pitágoras, Sofia e Hipátia, são fictícios, de modo a preservar a identidade dos alunos e nos excertos transcritos das entrevistas, serão identificados pelas suas iniciais, enquanto o investigador será apresentado como “I”.

### 4.1. Estudo de Caso: René

René é um aluno introvertido, sossegado, mas colaborativo. Durante a aula, procura estar sempre atento, colaborando nas tarefas que lhe são propostas e oferece-se regularmente para ir ao quadro. Demonstra alguma dificuldade em expressar-se, tanto oralmente como na escrita, não conseguindo organizar as suas ideias de forma clara. Nos testes constantemente perde-se no raciocínio e confunde-se com a própria letra.

No 1.º período obteve uma classificação de onze valores e admite que teria melhores resultados se melhorasse a sua organização, estudando de forma mais regular.

**I:** Como é o teu método de trabalho e estudo a Matemática?

**R:** Nas aulas tento prestar atenção aos exercícios, mas só quando faço em casa é que percebo mesmo e só estudo mais quando falta uma semana para o teste, por causa das outras disciplinas, aí é que estudo um bocadinho todos os dias.

### Análise das Tarefas

Relativamente à primeira questão de investigação, na tarefa 1, foi pedido para comparar os diferentes gráficos de funções da família  $y = mx$ , como se pode observar na figura 4.1., atribuindo ao parâmetro  $m$  valores positivos. Na entrevista, René afirmou que “quanto maior

o  $m$ , as imagens de cada objeto vão ser maiores e o gráfico vai estar mais inclinado no sentido contrário ao do relógio”, na realização da tarefa observou que “as retas passam nos quadrantes ímpares (1.º e 3.º) e no ponto  $O$ ”, não referindo a influência do parâmetro no declive do gráfico das funções.

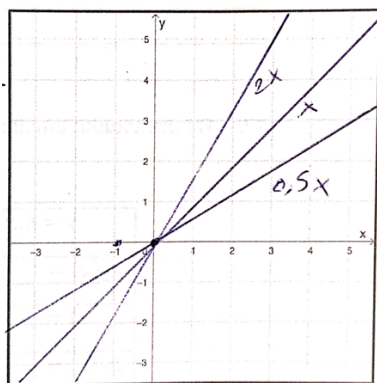


Figura 4.1. – Representações gráficas de  $y = mx$ , variando  $m$  para valores positivos (René).

Em relação ao associar expressões analíticas à gráficos de funções do tipo  $y = mx$ , que representam a distância percorrida ( $y$ ), em metros, em função do tempo ( $x$ ), em segundos, de uma situação em contexto real, não faz comparando o declive dos gráficos, mas sim assumindo que o parâmetro  $m$  representa a velocidade. Logo, corresponde a função do amigo que chegou primeiro, ao que tem maior velocidade.

**I:** Porquê que dizes que o Joel tem maior número (declive)?

**R:** Porque se o  $x$  é o tempo e o  $y$  é a distância, este número (declive) é, por exemplo, metros por segundo. Como o Joel chegou primeiro, tem de ter sido o mais rápido, com mais velocidade, logo a função dele é  $y = 3,2x$ , que é o maior valor dali.

Na tarefa 2, depois de observar gráficos da família de funções  $y = x^2 + d$  (figura 4.2.), em que se atribuiu valores positivos (e negativos) ao parâmetro  $d$ , verificou que “todas as funções neste gráfico são parábolas, sendo também paralelas, cada uma passando apenas no eixo das abcissas no ponto igual ao número que lhe é somado (ou subtraído) na função. Também sendo esse número o centro da função”, descrevendo como “centro da função” a ordenada do vértice da parábola, não associando essas transformações como translações e referindo o paralelismo, que não se aplica neste contexto.

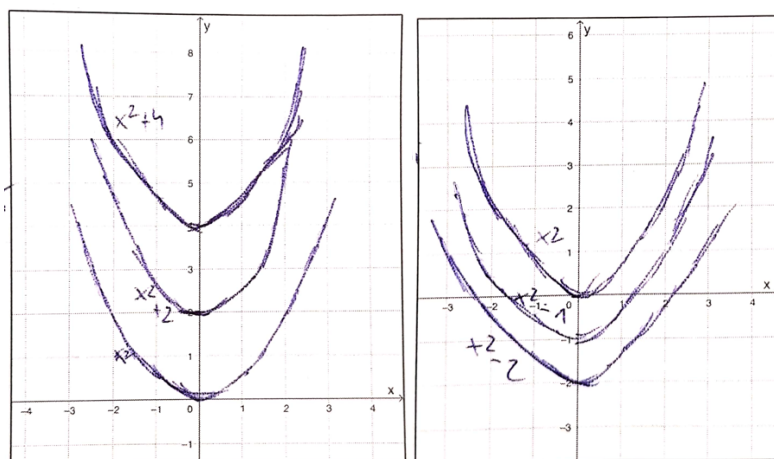


Figura 4.2. – Representações gráficas de  $y = x^2 + d$ , variando  $d$  para valores positivos e negativos, respetivamente (René).

Com esta abordagem, não consegue formular conjecturas, afirma que o parâmetro  $d$  “tem bastante influência, sendo um número que pode alterar a função toda. E numa função parabólica sendo o número que é o centro da mesma”. O aluno refere-se à função quadrática como “função parabólica” pelo gráfico desta ser representado por uma parábola. Depois de observar funções do tipo  $y = (x + c)^2$  (figura 4.3.), em relação ao parâmetro  $c$ , à semelhança do caso anterior afirma que “ $c$  vai ser muito importante, pois ele altera a função toda, sendo também o número inverso ao centro da função”. Neste caso, René considera como “centro da função” a abcissa do vértice da parábola e refere-se como inverso, o simétrico do número.

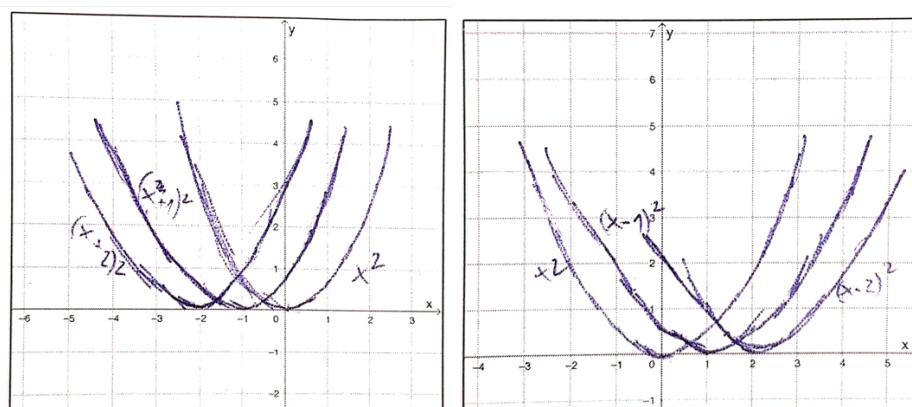


Figura 4.3. – Resoluções gráficas de  $y = (x + c)^2$ , variando  $c$  para valores positivos e negativos, respetivamente (René).

Na questão 2, quando é pedido para explicar que transformações são necessárias transformar os gráficos das funções  $t$  e  $r$  nos gráficos das funções  $s$  e  $p$ , respetivamente, explica que “nestes casos alteram-se os objetos em vez das imagens”. Como tal, não é capaz de escrever uma expressão analítica que represente tais transformações na questão 6.

**I:** Consegues explicar como é que fizeste a 6?

**R:** Eu aqui substituí os números ..., menos um mais cinco dá quatro... hmm... não me lembro bem como fiz isto.

Na tarefa 3, ao contrário da anterior, ao analisar gráficos de funções do tipo  $y = g(ax)$ , já formula conjecturas acerca do parâmetro  $a$ , dizendo que “o  $a$  aumenta ou diminui a amplitude da figura do gráfico, também aumentando ou diminuindo as imagens de cada objeto consoante o  $a$ ”. E acerca do sinal menos, afirma que “se o menos estiver com o  $x$ , fica com duas funções espelho uma da outra”, mas não refere qual o eixo de simetria. No entanto, em relação ao parâmetro  $a$  das funções do tipo  $y = af(x)$ , não formula conjecturas, devido a estarem em referenciais diferentes (figura 4.4.), concluindo que “todos eles são muito similares uns com os outros e em cada um têm duas figuras espelho uma da outra”.

**I:** Porque é que na questão 6, em relação às funções do tipo  $y = g(ax)$ , explicaste a influência do parâmetro  $a$  e em relação às funções do tipo  $y = af(x)$  não?

**R:** Ah! Porque como estavam separadas, não me passou pela cabeça, aqui (questão 6) como estavam no mesmo desenho, pareceu-me boa ideia.

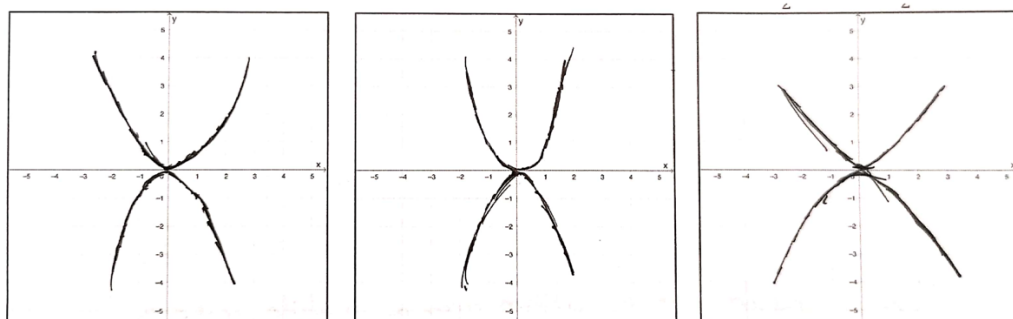


Figura 4.4. – Representações gráficas de  $y = ax^2$  com diferentes valores de  $a$ :  $1$  e  $-1$ ,  $2$  e  $-\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{2}$  respetivamente (René).

No que respeita à segunda questão de investigação, considera-se que uma vez que René não conseguiu formular conjecturas significativas, este aluno não apreendeu o conceito de transformações de funções.

Na segunda tarefa, o aluno não conseguiu escrever uma expressão analítica que represente uma função que sofreu translações verticais e horizontais, também não explica as transformações de uma função, dada a sua expressão analítica, como se observa na figura 4.5. Repare-se que a não sistematização da aprendizagem na tarefa 1, condiciona a resolução da tarefa 2.

5. Considera a função  $j_1(x) = x^2$ , que sofreu translações ao seu gráfico, podendo no final ser definido por  $j_2(x) = j_1(x + 2) - 3$ . Sem a utilização da calculadora gráfica, explica por palavras tuas que transformações sofreu o gráfico da função  $j_1$ .

*My 1 é (x+2) então My 1(x) = (x+2)² e My 2 é o My 1 - 3. Portanto o gráfico de My 2 em vez do My 1 ~~aparece~~ ~~está~~ ~~na~~ ~~função~~ ~~em~~ ~~depois~~ ~~esse~~  
 o seu parâmetro ficou dim.*

Figura 4.5. – Resolução da quinta questão da tarefa 2 (René).

Do mesmo modo, na terceira tarefa, não consegue explicar as translações e as contrações/dilatações que sofreu uma função, dada a expressão analítica. Tenta descrever as mesmas de uma forma analítica.

**I:** Consegues explicar qual foi o teu raciocínio na questão 9A?

**R:** Consoante o  $x$  for maior, o  $t$  também aumenta, por exemplo, o  $t$  é  $(x + 1)^2$ , se o  $x$  fosse 2, fica 9. Neste caso como o  $x$  é negativo, iria ficar ao contrário e o  $t$  diminui.

Dada a função  $t(x) = (x + 1)^2$  e a função  $s(x) = 2t(-x) - 3$ , repare-se que o aluno não associa  $s$  como uma função transformada de  $t$ . Ao invés disso, associa como produto da função  $t$  com o fator  $(-x)$ . Por isso afirma que à medida que  $x$  aumenta,  $s$  diminui.

No que concerne à terceira questão de investigação, René mostrou-se entusiasmado por finalmente utilizar a calculadora gráfica.

**R:** Foi fixe fazer com a calculadora, já sei mexer e fazer muita coisa, na aula até já ensino os meus colegas.

Ao longo das tarefas, não solicitou ajuda do investigador para manuseá-la, preferindo explorá-la de forma autónoma. Sempre que possível, utilizou a mesma para visualizar os gráficos das funções e confirmar respostas. No entanto, não foi rigoroso no esboço dos gráficos, como por exemplo na figura 4.6., em que as funções se intersectam, de forma correta, no ponto de coordenadas (0,4), mas não teve em consideração que os vértices das parábolas coincidem com o eixo das abcissas, nomeadamente nos pontos (-2,0) e (2,0).

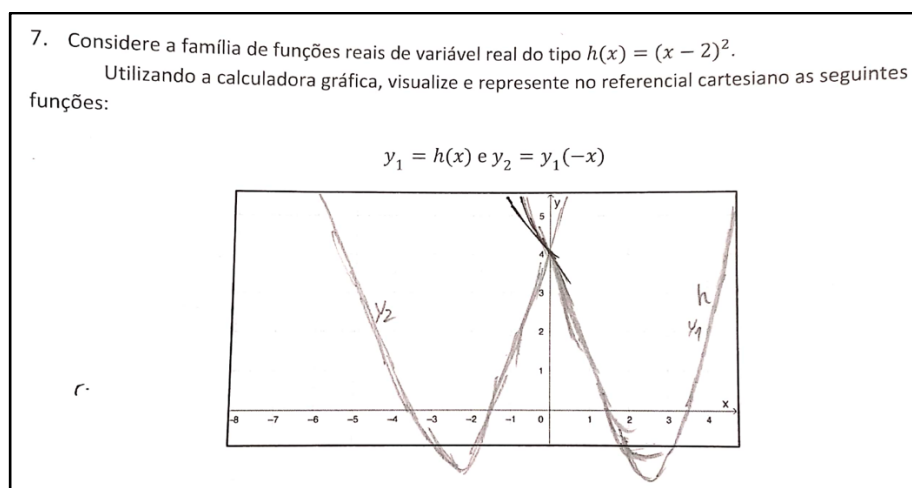


Figura 4.6. – Parte da resolução da sétima questão da tarefa 3 (René).

## Considerações finais

Ao contrário do que Nunes (2022) testemunhou na sua investigação, que a aplicação de tarefas de exploração, com recurso à calculadora gráfica, ao gerar entusiasmo, interesse, motivação e facilitar a pesquisa dos alunos, contribuiu para o desenvolvimento das capacidades de exploração e para a melhoria da compreensão das funções, esta abordagem não ajudou René na aprendizagem de novos conceitos, nomeadamente nas transformações de gráficos de funções. Embora o aluno tenha mostrado motivação e entusiasmo para o uso da calculadora, inclusive para ensinar aos restantes colegas como manuseá-la, não a utiliza da forma que se pretendia. Nas suas observações não compara os diferentes gráficos com a influência dos parâmetros das funções. Foca-se em constatar simples factos por observação das representações na calculadora e é vago nas suas observações. Embora o aluno tenha evidenciado esforço na resolução das tarefas, parece que lacunas a nível da linguagem e comunicação matemática dificultaram a formulação de conjecturas, mesmo tendo encontrado regularidades. Repare-se que refere como função parabólica as funções quadráticas e mesmo não existindo o termo “centro” da parábola, foi esse que o René usou para mencionar ao vértice. O aluno também confunde os conceitos de inverso e simétrico de um número.

Posto isto, não consegue formular conjecturas relativamente aos parâmetros das funções, nem passar pelas restantes etapas que Ponte et al. (1999) definiram como características de uma investigação matemática e, como tal, não aprendeu de forma significativa estes novos conceitos, como se analisou nas questões finais das tarefas 2 e 3.

Em conclusão, quando inquirido pelo investigador sobre de que forma a realização das tarefas o ajudou na aprendizagem das transformações, este assume que embora tenha

apreciado usar a calculadora, sente que a realização das tarefas não foi proveitosa devido à falta de compreensão e exploração de forma autónoma.

**I:** E agora que já aprendeste este conteúdo em sala de aula, achas que as tarefas ajudaram? Se sim, como?

**R:** Não realmente. Aqui como não explicava o que era para fazer, nós é que tínhamos de tentar descobrir, não entendi bem. Só na aula, com o professor a explicar, é que percebi e associei com as coisas que estavam nas tarefas. Vi que o que tinha feito não estava certo.

## 4.2. Estudo de Caso: Pitágoras

Pitágoras é um aluno curioso, extrovertido e trabalhador. No primeiro período teve a classificação máxima em todos os momentos de avaliação. Participa de forma ativa nas tarefas propostas, questionando sempre o porquê das coisas e está sempre pronto a ajudar os colegas. O seu método de estudo baseia-se na compreensão dos conteúdos e na resolução de exercícios de forma regular.

**I:** Qual é o teu segredo para teres estas notas à Matemática?

**P:** Eu primeiro vejo a parte teórica para compreender as definições e o porquê das fórmulas. Tento perceber bem um capítulo e depois faço todos os exercícios desse capítulo, só depois de perceber tudo é que avanço para outro.

### Análise das Tarefas

Relativamente à primeira questão de investigação, na tarefa 1, com base nos esboços dos gráficos de funções da família  $y = mx$  representados na figura 4.7., afirma que “quanto maior o  $m$ , o declive, mais inclinada a reta fica, ou seja, cada vez mais a subir”. Nos casos em que o parâmetro  $m$  é negativo, diz que “quanto menor o declive, mais inclinada a reta fica, ou seja, cada vez mais a descer”.

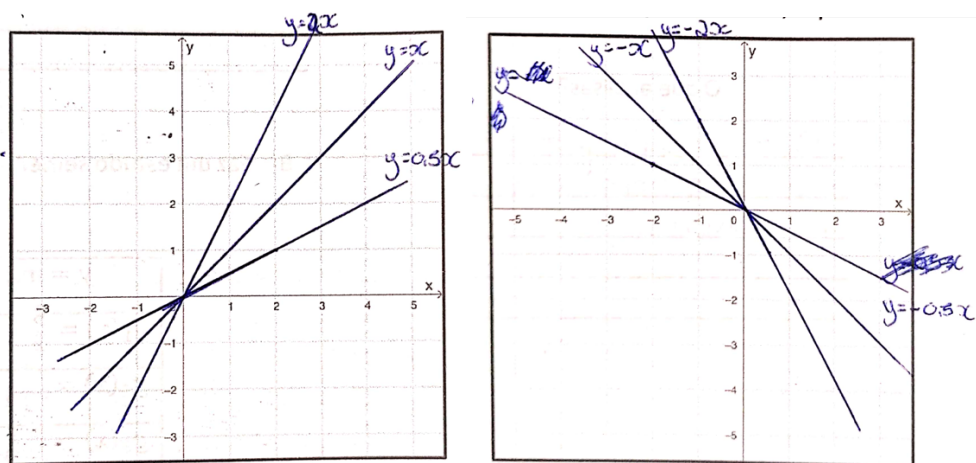


Figura 4.7. – Representações gráficas de  $y = mx$ , variando  $m$  para valores positivos e negativos, respetivamente (Pitágoras).

Quanto a associar expressões analíticas a gráficos de funções do tipo  $y = mx$ , que representam a distância percorrida ( $y$ ), em metros, em função do tempo ( $x$ ), em segundos, de uma situação em contexto real, faz a correspondência comparando o declive. Afirma que “quanto maior o declive, mais inclinada fica a reta” e identifica o Joel como  $f_1$  porque “pela análise do gráfico vimos quem percorreu a distância toda em menos tempo, ou seja, quem chegou primeiro corresponde ao  $f_1$ ...”.

Na tarefa 2, representa gráficos da família de funções do tipo  $f(x) = x^2 + d$  (figura 4.8.), variando o parâmetro  $d$ , com valores positivos e negativos. Nas suas conjeturas, Pitágoras denomina o coeficiente do  $x^2$  como “declive” e o parâmetro  $d$  como “ordenada na origem”, mesmo reconhecendo que essas denominações podem não ser as mais corretas, colocando um ponto de interrogação sempre que o faz. Reconhece que  $d$  é a ordenada do ponto de interseção da função com o eixo das ordenadas e como “ordenada na origem”, por não saber como chamar o parâmetro. Também considera a abertura da parábola como “ângulo”. Quanto à influência do parâmetro  $d$ , afirma que “ $d$  não vai determinar a forma da função, mas sim a localização do gráfico. Mantendo o declive (?), as parábolas ficam com os ângulos iguais e quanto maior a ordenada na origem(?), cada vez mais sobe e quanto menor, cada vez mais desce”.

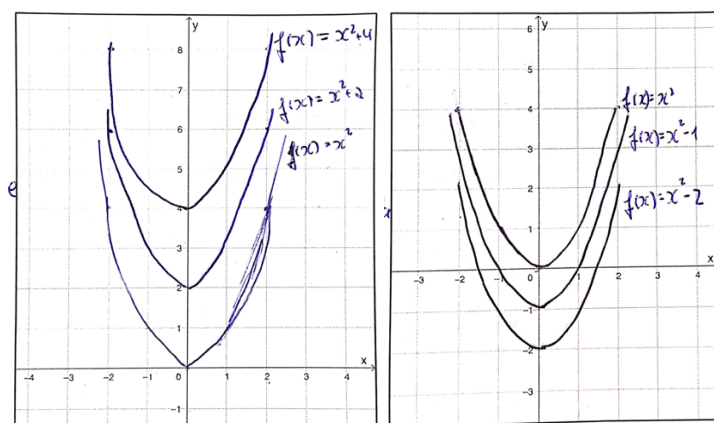


Figura 4.8. – Representações gráficas de  $y = x^2 + d$ , variando  $d$  para valores positivos e negativos, respetivamente (Pitágoras).

De seguida, ao representar, com auxílio da calculadora gráfica, funções do tipo  $y = g(x + c)$ , sendo  $g$  uma função quadrática (figura 4.9.), variando o parâmetro  $c$  para valores positivos e negativos, afirma que “se o número que adicionarmos está dentro dos parêntesis, também ao quadrado, a função não vai subir, mas sim andar para os lados. Quanto maior o número, mais para a esquerda fica e quanto menor, mais para a direita”.

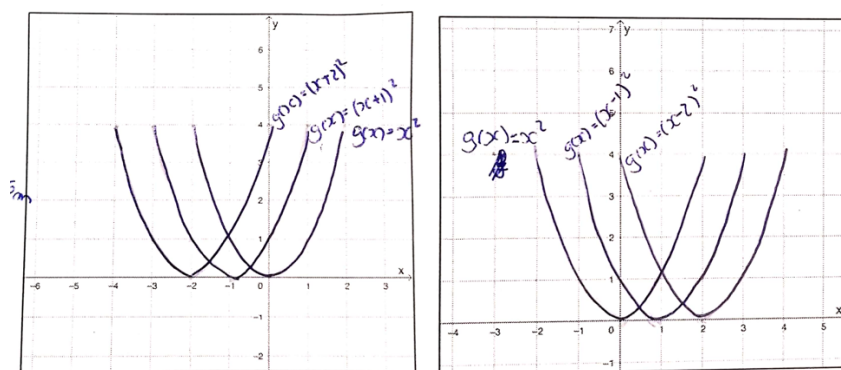


Figura 4.9. – Resoluções gráficas de  $y = (x + c)^2$ , variando  $c$  para valores positivos e negativos, respetivamente (Pitágoras).

Na mesma tarefa, quando é pedido para explicar que transformações são necessárias transformar os gráficos das funções  $t$  e  $r$  nos gráficos das funções  $s$  e  $p$ , não se limita a mencioná-las, mas também conjectura como o fazer.

**P:** a função teria de “chegar” um pouco à direita (3 unidades), talvez adicionando 3 unidades à função?

Já na segunda alínea ao observar translações verticais e horizontais, nota que adicionar ou subtrair valores à função não é suficiente, afirmando que “a função teria de subir duas quadrículas e avançar para a direita três, alterando de alguma forma a função”.

Na tarefa 3, ao observar gráficos da família de funções do tipo  $y = af(x)$  para  $a > 0$ , afirma que “ $a$  vai fazer com que as funções fiquem mais “altas ou baixas”. Basicamente, os mesmos objetos vão ter imagens diferentes causando deformação na altura (?) do gráfico”. Embora refira as contrações e dilatações como tornar a função mais alta ou mais baixa, não refere que o gráfico sofre uma contração ou dilatação, dependendo do valor de  $a$  ser superior ou inferior a um, para  $a > 0$ . Em relação à família de funções  $y = ax^2$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , Pitágoras conjectura que “ $a$  vai influenciar o quão fechada a parábola é, ou seja, o tamanho em relação ao eixo  $Ox$ . Quanto maior o  $a$ , mais fechada a parábola fica, sendo que nos positivos a parábola fica para cima e nos negativos, para baixo”. Como se pode verificar, em relação ao sinal de menos, refere que a função fica para cima ou para baixo, não associando tal acontecimento à uma reflexão em torno do eixo do  $x$ . Na família de funções do tipo  $y = g(ax)$ , sendo  $g$  uma função quadrática, verifica que “quanto maior o número em  $a$ , mais apertada ou fina é a parábola e quanto menor, mais longa e aberta fica” e que “objetos simétricos têm a mesma imagem”, no caso do menos dentro dos parêntesis, não associando igualmente a uma reflexão em torno do eixo do  $y$ .

No que diz respeito à segunda questão de investigação, ao conseguir formular conjecturas significativas, é bastante evidente que este aluno aprendeu o conceito de transformações de funções. Na tarefa 2, além de explicar de forma correta as transformações de uma função, dada a sua expressão analítica, foi capaz de escrever uma expressão analítica que represente uma função que sofreu translações verticais e horizontais, conforme se pode observar na figura 4.10.

5. Considera a função  $j_1(x) = x^2$ , que sofreu translações ao seu gráfico, podendo no final ser definido por  $j_2(x) = j_1(x + 2) - 3$ . Sem a utilização da calculadora gráfica, explica por palavras tuas que transformações sofreu o gráfico da função  $j_1$ .

*A função inicia aonde duas unidades para a esquerda e desce 3 unidades.*

---



---



---

6. Considera a função  $p(x)$ , representada em 2B. Escreve uma expressão analítica de  $r(x)$  em função de  $p$ , cujo gráfico é o transformado do gráfico de  $p$ .

$r(x) = p(x-3) + 2$

Figura 4.10. – Resolução da quinta e sexta questão da tarefa 2 (Pitágoras).

De igual modo, na terceira tarefa, consegue explicar as translações e as contrações/dilatações que sofreu uma função, dada a expressão analítica, como se pode

observar na figura 4.11. Durante as explicações, demonstra que compreendeu que o sinal de menos faz com que a função sofra uma reflexão em torno do eixo  $Ox$  ou do eixo  $Oy$ , o que não tinha ficado claro nas suas conjeturas.

9. Considera a função  $t(x) = (x + 1)^2$  que sofreu transformações, resultando nas funções abaixo. Sem a utilização da calculadora gráfica, explica por palavras tuas que transformações sofre a função  $t$ .

a)  $s(x) = 2t(-x) - 3$

Devido a estar a multiplicar por dois a função vai ser mais fina, uma parábola fechada, os mesmos objetos passam a ter imagens maiores. Devido a  $x(-x)$  a função vai sofrer reflexão pelo eixo  $Oy$ , objetos simétricos terão a mesma imagem então a função  $f$  e a  $t$ . A função vai descer 3 unidades.

b)  $r(x) = -t(2x - 1)$

A função vai sofrer reflexão pelo eixo  $Ox$  por causa do "-". Vai apertar (ficar mais fina) a parábola e esta vai andar uma unidade para a direita.

Figura 4.11. – Resolução da nona questão da tarefa 3 (Pitágoras).

No que concerne à terceira questão de investigação, durante as tarefas, Pitágoras optou por explorar a calculadora de forma independente, sem solicitar assistência do investigador. Ele usou a calculadora sempre que possível para visualizar os gráficos das funções e confirmar suas respostas. Acha que embora a calculadora gráfica tenha sido útil para confirmar as suas hipóteses, o seu uso é-lhe indiferente. Este, em entrevista, revela que na sua opinião, seria mais útil ser o próprio aluno a esboçar os gráficos de raiz, para o obrigar a pensar e não apenas ver e copiar.

**P:** A calculadora ajudou, obviamente, porque mostra as imagens, mas por vezes... como hei de explicar? Por exemplo, ao fazer e pensar sem a calculadora, vamos sempre aprender mais e perceber melhor, do que se usarmos a calculadora. Ela é boa quando não sabemos, ou quando é uma função mais complicada. Assim, estamos só a copiar.

## Considerações finais

No decorrer das tarefas, Pitágoras passa por três das etapas que Ponte et al (1999) definiram como características de uma investigação matemática. Perante a questão a investigar, ao encontrar padrões e regularidades, este formula conjeturas quase sem indicações do investigador. Não se restringe a simplesmente observar factos e busca manter a comunicação matemática, mesmo sem conhecer as designações corretas. No entanto, demonstra consciência ao usar termos que considera incertos, indicando essa incerteza ao

colocar um ponto de interrogação entre parênteses. Em entrevista, o aluno referiu que este processo de descoberta foi interessante e desafiante na medida em que o obrigava a comunicar os seus raciocínios, coisa a que não estava habituado.

**I:** O que achaste das tarefas? Gostaste de fazer?

**P:** Sim, acho foram interessantes, principalmente porque obrigou-me a explicar o meu raciocínio.

**I:** Porque dizes isso?

**P:** Normalmente, não estou habituado a ter de explicar as minhas ideias, faço os exercícios e pronto. E com estas fichas, ao ter de explicar tudo, apercebi-me desta dificuldade, principalmente com alguns termos matemáticos, por isso foi um desafio.

Ao encontro do que afirma Oliveira (2022), ao articular todos os tipos de raciocínio nesta perspetiva de descoberta, o aluno gera novo conhecimento e reconhece-se que o Pitágoras aprendeu de forma significativa estes novos conceitos, ao analisar as questões finais das tarefas 2 e 3, o que se confirmou na entrevista. Considera-se que este processo de formular conjecturas e explicá-las foi decisivo para a sua aprendizagem e que a utilização da calculadora não teve influência, uma vez que o mesmo afirma que só a utilizou para ser mais rápido e que preferia não o ter feito.

Em conclusão, quando inquirido pelo investigador sobre de que forma a realização das tarefas o ajudou na aprendizagem das transformações, este assume que as tarefas foram úteis e que o ajudou a compreender mais rápido e melhor, quando confrontado com estes conteúdos em sala de aula.

**I:** E agora que já aprendeste este conteúdo em sala de aula, achas que as tarefas ajudaram? Se sim, como?

**P:** Ajudou porque estavam a falar de algo que eu já tinha visto, só que com palavras mais formuladas, os exemplos já eram familiares, o que me permitiu compreender mais rápido e melhor, principalmente aquilo do  $x$  ser “mentiroso”.

### **4.3. Estudo de Caso: Sofia**

Sofia é uma aluna extrovertida, atenta, evidenciando alguma insegurança nas tarefas que lhe são propostas e na participação em aula. Teve uma classificação de sete valores no final do primeiro período, que se deve ao pouco trabalho autónomo, por parte da aluna, fora de aula.

**I:** Como é o teu método de trabalho e estudo à Matemática?

**S:** Eu ainda estou a testar os meus métodos. Nas outras disciplinas eu faço resumos para decorar, resumos é a minha cena, mas a Matemática não dá para fazer isso, então tenho de fazer muitos exercícios, mas tenho bué de preguiça.

## **Análise das Tarefas**

Relativamente à primeira questão de investigação, ao longo das tarefas, Sofia foi evoluindo em relação à formulação de conjeturas. Sempre que esboçava gráficos, a aluna o fazia com diferentes cores, tal como visualizava na calculadora gráfica, por se considerar como uma pessoa visual. Na primeira tarefa, Sofia começou por esboçar gráficos de funções da família  $y = mx$ , fazendo variar o parâmetro  $m$  para valores positivos e posteriormente negativos. Na observação dos gráficos, a aluna não formula conjeturas, focando-se em constatar factos, tais como “diferentes gráficos têm declives diferentes”, não relacionando como a alteração do parâmetro  $m$  altera os gráficos das funções. O mesmo acontece ao observar funções do tipo  $y = 2x + b$ . Alterando o valor do parâmetro  $b$ , afirma que “todas as retas são paralelas entre si, ou seja, têm o mesmo declive”.

Na segunda tarefa, ao observar gráficos da família de funções do tipo  $f(x) = x^2 + d$ , (figura 4.12.), variando o parâmetro  $d$ , com valores positivos e negativos, afirma que “se  $d$  for negativo, a função passa para baixo do eixo das abcissas, se o  $d$  for positivo, passa para cima”. No entanto, Sofia não parece associar o parâmetro a translações verticais e essas representações gráficas levaram a aluna a acreditar que houve uma alteração na abertura da parábola ao modificar o parâmetro  $d$ . Esta designa a abertura da parábola como “inclinação”. Nesse sentido demonstra não dominar certos conceitos matemáticos, nomeadamente de simetria, uma vez que considera que os gráficos são “simétricos” por não se intersectarem.

**S:** Verifico que todos os gráficos são simétricos e que todos têm inclinações diferentes...

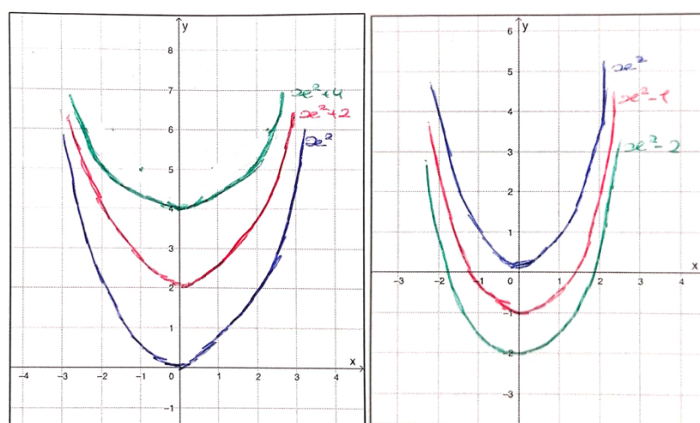


Figura 4.12. – Representações gráficas de  $y = x^2 + d$ , variando  $d$  para valores positivos e negativos, respectivamente (Sofia).

Na mesma tarefa, ao observar gráficos de funções da família  $y = g(x + c)$ , sendo  $g$  uma função quadrática, ao variar o parâmetro  $c$  para valores positivos e negativos, já considera que “os gráficos são todos iguais” e já associa o parâmetro  $c$  a translações horizontais, afirmando que “se o  $c$  for positivo, as funções andam para a esquerda e ficam no lado negativo, se forem negativos andam para a direita e ficam no lado positivo”. Ainda na tarefa 2, quando é pedido para explicar que transformações são necessárias para transformar os gráficos das funções  $t$  e  $r$  nos gráficos das funções  $s$  e  $p$ , respectivamente, explica de forma correta usando uma linguagem simples e clara. Como se pode verificar na figura 4.13., na primeira alínea, além da aluna explicar por palavras, tenta representar essa translação horizontal com uma expressão analítica. Já na segunda alínea, acaba por explicar apenas por linguagem corrente.

**I:** Porquê que na primeira alínea tentaste representar a transformação com uma expressão analítica e na segunda não?

**S:** Porque na primeira alínea, para a função andar três quadrículas para a direita, eu pensei em somar três unidades. Na segunda alínea, eu queria fazer o mesmo, tinha que subtrair três, para andar para a esquerda, mas não sabia como somar/subtrair para andar para cima ou para baixo.

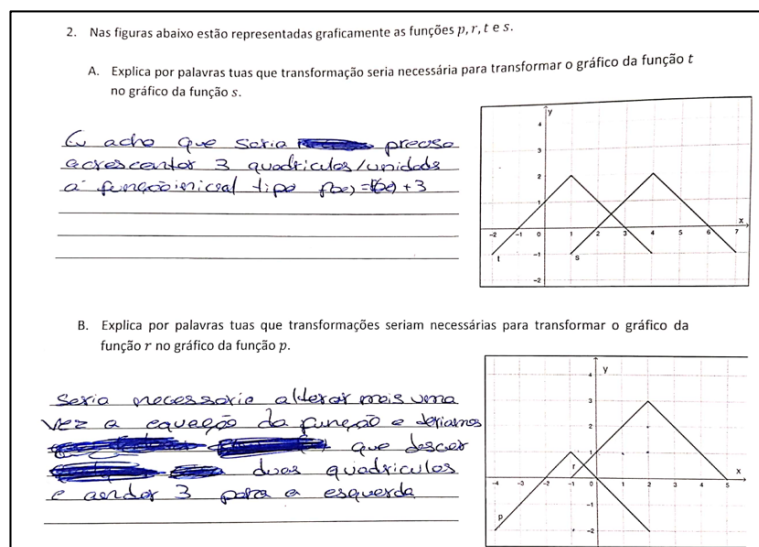


Figura 4.13. – Resolução da segunda questão da tarefa 2 (Sofia).

Na terceira tarefa, à semelhança da anterior, formula algumas conjecturas. Quando analisa a influência do parâmetro  $a$  na família de funções do tipo  $y = af(x)$ , com marcação de pontos apenas conclui que “o parâmetro  $a$  influencia completamente os gráficos pois tudo depende literalmente dele”, não associando uma contração/dilatação, se  $a$  for maior ou menor que um, para  $a > 0$ , mesmo no enunciado das situações descritas estarem escritas palavras como “o dobro” e “metade”. Quando analisa funções quadráticas com recurso à calculadora gráfica, como se observa na figura 4.14., refere que “ $a$  influencia na abertura/forma da função representada e quanto menor o número maior a abertura”. Quanto ao sinal de menos, afirma que “funções com número negativo ficam viradas para baixo”.

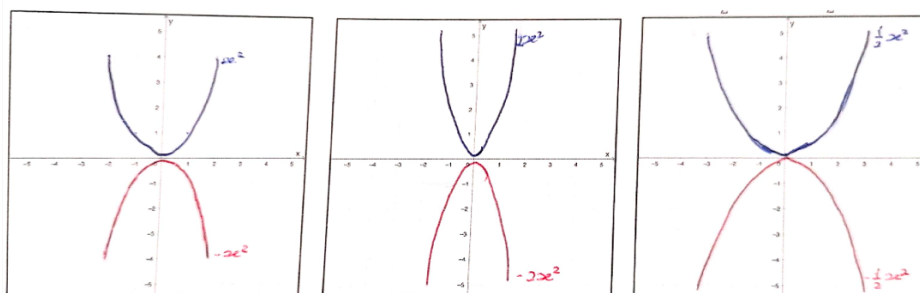


Figura 4.14. – Representações gráficas de  $y = ax^2$  com diferentes valores de  $a$ :  $1$  e  $-1$ ,  $\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{2}$ , respetivamente (Sofia).

Sofia acaba por fazer as mesmas observações acerca do parâmetro  $a$  da família de funções do tipo  $y = f(ax)$  e para valores negativos conclui que “os gráficos são iguais, mas em posições

diferentes, um para o lado direito positivo do eixo  $x$  e o outro para o lado esquerdo/negativo do eixo  $x$ ...". Tanto no caso anterior, como neste, a aluna reconhece que os gráficos das funções são iguais e que "ficam viradas para baixo" ou "para o lado direito/esquerdo do eixo do  $x$ " dependendo da posição do sinal de menos, porém não associa tal facto a uma reflexão. Reforça-se tal conclusão com o facto de a aluna não mencionar os eixos de simetria.

Ainda na mesma tarefa, na primeira questão, é dado um problema com a descrição de um percurso (em metros) em função do tempo (em minutos) e pedido para representar num referencial. A aluna o critica dizendo que "os valores do problema não têm sentido, pois ninguém faz 20 metros em 4 minutos" e que "uma pessoa normal faz em 30 segundos", demonstrando assim um espírito crítico.

No que respeita à segunda questão de investigação, embora na tarefa 1 a aluna não tenha feito conjeturas acerca do parâmetro  $m$  das funções do tipo  $y = mx$ , quando questionado pelo investigador, demonstra saber a influência do parâmetro. Tal não acontece ao observar funções do tipo  $y = mx + b$ , representadas na figura 4.15. A aluna associa o parâmetro  $b$  a translações horizontais e não verticais.

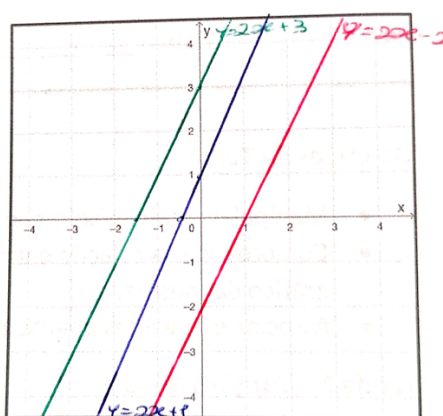


Figura 4.15. – Resoluções gráficas de  $y = 2x + b$ , variando  $b$  para valores positivos e negativos (Sofia).

**I:** O que acontece aos gráficos das funções, conforme formos alterando o valor de  $m$ ?

**S:** Quando aumentamos o  $m$ , fica mais próximo do eixo dos  $y$  e quando diminuimos, fica mais próximo do eixo dos  $x$ .

**I:** E se o  $m$  for negativo?

**S:** Se o  $m$  for negativo, é ao contrário, se diminuirmos, fica mais próximo dos eixos dos  $y$  e vice-versa.

**I:** Porquê que não escreveste essas observações na tarefa?

**S:** Porque ainda não tinha percebido a dinâmica.

**I:** Já agora e quanto ao parâmetro  $b$ ?

**S:** Se aumentar o  $b$ , o gráfico anda para a esquerda e se diminuirmos, para a direita.

Na mesma tarefa, ao associar expressões analíticas com funções, interpretar e descrever gráficos que traduzem situações em contexto real, Sofia demonstrou não dominar ainda a influência do parâmetro do declive. Ao fazer a correspondência das funções representadas na figura 4.16., com as expressões analíticas, a aluna compara o quão próximos os gráficos estão uns dos outros, dizendo que “o do meio tem de ser 2,6 e 2,6 está mais próximo de 3,2 do que de 1,8 e como  $f_2$  está mais próximo de  $f_1$ , então  $f_1$  é do  $3,2x$ ” e quando questionada porque razão acha que  $f_1$  representa o trajeto do amigo que chegou primeiro, afirma que “o Joel é  $f_1$  porque se eu fizer uma linha nos 10 metros, a  $f_1$  chega em 2 segundos e qualquer coisa e a  $f_2$  quase aos 4 segundos, então pronto!”.

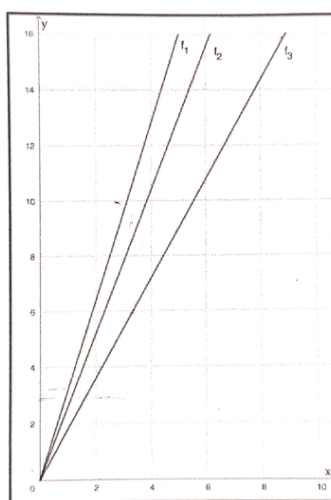


Figura 4.16. – Funções representadas na terceira questão da tarefa 1 (Sofia).

Na segunda tarefa, com base nas suas conjeturas, além de explicar de forma correta as transformações de uma função, dada a sua expressão analítica, foi capaz de escrever uma expressão que represente uma função que sofreu translações verticais e horizontais, conforme se pode observar na figura 4.17.

5. Considera a função  $j_1(x) = x^2$ , que sofreu translações ao seu gráfico, podendo no final ser definido por  $j_2(x) = j_1(x + 2) - 3$ . Sem a utilização da calculadora gráfica, explica por palavras tuas que transformações sofreu o gráfico da função  $j_1$ .

O gráfico  $j_1$  mudou duas coisas para a esquerda e desceu 3 coisas.

---

6. Considera a função  $p(x)$ , representada em 2B. Escreve uma expressão analítica de  $r(x)$  em função de  $p$ , cujo gráfico é o transformado do gráfico de  $p$ .

$$R(x) = P(x - 3) + 2$$

Figura 4.17. – Resolução da quinta e sexta questão da tarefa 2 (Sofia).

Na terceira tarefa, ao não formular conjeturas significativas em relação a contrações/dilatações, não consegue explicar de forma correta as transformações que sofreu uma função, dada a sua expressão analítica. Na questão final, a aluna assume que todas as funções “começam” no primeiro quadrante. Na primeira alínea descreve que “a função  $t$  vai para a esquerda do eixo do  $x$ , por causa do menos e vai descer 3 casinhas para aqui” (apontando para o 4.º quadrante) e não menciona a influência do coeficiente 2.

**I:** E em relação ao 2 antes do  $t$ ?

**S:** O  $2t$  não sabia bem, se calhar ficava maior, não sei...

Na segunda alínea, volta a encarar o sinal de menos como uma reflexão pelo eixo do  $y$ , quer esteja dentro ou fora do parêntesis e o número a subtrair dentro do parêntesis como translação vertical.

**I:** Qual foi o teu raciocínio aqui?

**S:** a função  $t$  ia começar aqui (apontando para o 1º quadrante), mas como o tem o menos, ia para aqui (2.º quadrante) e com o  $2x - 1$  ia para aqui (3.º quadrante) porque anda para baixo.

No que concerne à terceira questão de investigação, Sofia solicitou constantemente a ajuda do investigador para manusear a calculadora gráfica, principalmente para encontrar a melhor janela de visualização. Durante a exploração, mostrou-se contente e motivada com as suas funcionalidades, especialmente o facto de diferentes funções terem cores diferentes, o que a estimulou a esboçar os gráficos de forma rigorosa.

## Considerações finais

A aplicação destas tarefas de exploração com recurso à calculadora gráfica, gerou entusiasmo e interesse na resolução das mesmas, contribuindo para a melhor compreensão das funções, à semelhança do que Nunes (2022) testemunhou na sua investigação. Relativamente às transformações de funções, esta abordagem ajudou Sofia na aprendizagem de translações de gráficos de funções, quando vistas isoladamente. Quando há igualmente reflexões e contrações/dilações, se não houver um apoio gráfico, a aluna baralha-se com as translações verticais e horizontais. Em relação às contrações e dilatações, esta abordagem parece não ter ajudado na aprendizagem deste novo conceito.

Ao contrário da primeira tarefa, em que a aluna ainda não tinha percebido a dinâmica associada às tarefas exploratórias, na segunda passa pelas etapas que Ponte et al. (1999) definiram como características de uma investigação matemática. Face à questão a investigar, a aluna já começou a formular conjecturas, embora não tendo uma comunicação matemática adequada, preferindo utilizar linguagem corrente. Após as conjecturas, Sofia testava a veracidade das mesmas na calculadora gráfica. Ao analisar as questões finais da tarefa, conclui-se que este processo a ajudou na aprendizagem das transformações, mais especificamente translações de funções. O mesmo não se pode concluir em relação às contrações/dilatações de gráficos de funções.

Na tarefa três, embora tenha feito algumas conjecturas, estas não foram tão significativas como na tarefa anterior, tendo-se limitado a constatar factos em algumas questões à semelhança da tarefa 1.

Assim, ao não seguir as etapas mencionadas anteriormente, ao analisar as questões finais da tarefa, é possível concluir que a aluna não aprendeu de maneira significativa as contrações e dilatações de gráficos de funções. Isso é corroborado pela própria afirmação da aluna no final da entrevista, quando questionado pelo investigador sobre como a realização das tarefas contribuiu para sua aprendizagem das transformações.

**A:** Senti que na aula tive um avanço em relação aos meus colegas. Para já, ajudei-os com a calculadora, o que me deixou contente porque as minhas amigas não paravam de me chamar e quando o professor estava a explicar a matéria, já percebi melhor porque não era algo novo. Consegui entender melhor aquilo do menos e o número que fica a multiplicar, dentro e fora do parêntesis. Por isso acho que devíamos fazer isto mais vezes!

Em conclusão, considera-se que a aplicação de tarefas matemáticas com estas características teve um efeito positivo na aluna. Além de a ter ajudado na aprendizagem de translações de gráficos de funções, revelou o seu potencial e sua capacidade de pensar criticamente, descrever gráficos com precisão e trazer uma abordagem visual envolvente no seu processo de aprendizagem.

#### **4.4. Estudo de Caso: Hipátia**

Hipátia é uma aluna extrovertida, dedicada e trabalhadora nas aulas, participando de uma forma ativa nas tarefas propostas e voluntaria-se regularmente para ir ao quadro. É também uma aluna que se baralha constantemente no seu raciocínio. Quando tem uma dúvida, tem a necessidade de colocá-la imediatamente, pois só quando fala em voz alta é que

pensa sobre a questão e muitas vezes chega à resposta sozinha, antes da intervenção do professor. No primeiro período teve uma classificação de 10 valores e assume que poderia conseguir melhor se estudasse de forma regular.

**I:** Como é o teu método de trabalho e estudo a Matemática?

**H:** Eu não estudo matemática com tanta regularidade, porque ainda me estou a organizar com as outras disciplinas, mas quando se aproxima o teste, faço todos os exercícios do livro e do caderno de atividades, mas não sei porquê, no teste baralho-me.

### **Análise das Tarefas**

Relativamente à primeira questão de investigação, na tarefa 1, quando pedido para comparar os diferentes gráficos de funções da família  $y = mx$ , atribuindo valores positivos e negativos ao  $m$ , limitou-se a constatar factos como “nos diferentes gráficos, mesmo tendo  $m$  com valores diferentes, todos passam na origem, mas com inclinações diferentes e todas as funções estão nos quadrantes positivos”.

**I:** O que queres dizer com quadrantes positivos?

**H:** Ah pois, está mal, eu só pensei nestes (apontando para o 1.º e 2.º quadrantes). Quando digo positivo, quero dizer que está no 1.º e 3.º quadrante.

Como se pode observar na figura 4.18., mesmo com os gráficos das funções estarem igualmente representados no terceiro quadrante, em que todos os pontos têm as coordenadas das abcissas e das ordenadas negativas, a aluna ignora tal facto, considerando apenas o primeiro quadrante em que as coordenadas são positivas. Desta maneira refere-se de forma errada aos dois quadrantes como “quadrantes positivos”. Da mesma maneira, na alínea a seguir, denomina o segundo e quarto quadrante como “quadrantes negativos”, por considerar apenas o segundo e que os pontos contidos neste terem as coordenadas das abcissas negativas.

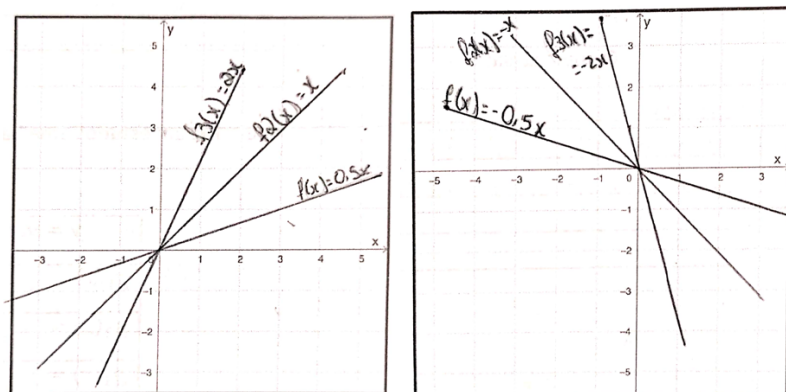


Figura 4.18. – Representações gráficas de  $y = mx$ , variando  $m$  para valores positivos e negativos (Hipátia).

Em relação ao parâmetro  $b$ , ao observar gráficos de funções da família  $y = 2x + b$ , a aluna refere que “as funções vão ser paralelas e com o mesmo declive”.

Na tarefa 2, a aluna começa por marcar pontos de funções que sofreram translações verticais em relação a original, conforme representado na figura 4.19.

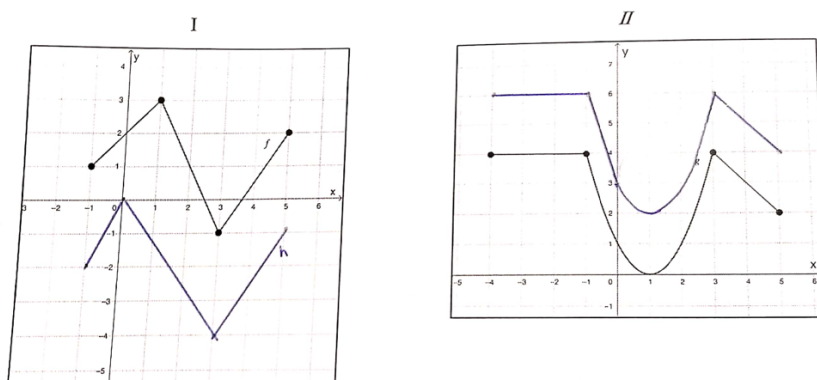


Figura 4.19. – Representações gráficas de  $h(x) = f(x) - 3$  e  $i(x) = g(x) + 2$ , respetivamente (Hipátia).

Após observar estes dois conjuntos de gráficos, repare-se que a aluna se enganou a traçar a função  $h$ . O ponto resultante da translação do ponto  $(1,3)$  segundo um vetor  $\vec{u}(0, -3)$ , é o ponto de coordenadas  $(1,0)$  e não  $(0,0)$ , como esboçado. Verifica-se também que Hipátia não reconhece uma translação vertical nos gráficos, apenas assumindo que são “simétricos”.

**I:** O que queres dizer com “simétricos”?

**H:** Então, por exemplo no gráfico da esquerda, vão estar em baixo com a mesma medida, por exemplo este ponto (ponto  $(-1,2)$ ) está à uma distância de três casinhas para este (ponto  $(-1,1)$ ) e acontece o mesmo para todos...

Posto isto, verifica-se que a aluna não adquire a noção de simetria. Considera que dois gráficos são simétricos quando todos os pontos de uma primeira função, estão à mesma distância dos pontos de igual abscissa de uma segunda função. Ao observar gráficos da família de funções  $y = f(x) + d$ , sendo  $f$  uma função quadrática, variando o parâmetro  $d$  para valores positivos e negativos (figuras 4.20.), Hipátia conjectura que “modificando  $d$ , a função muda de direção (positivo ou negativo) na reta  $y$ ”, não associando como translações.

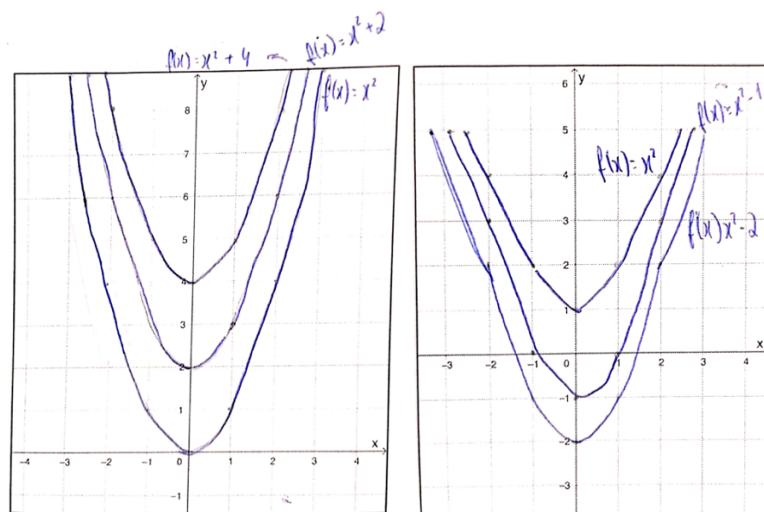


Figura 4.20. – Representações gráficas de  $y = x^2 + d$ , variando  $d$  para valores positivos e negativos, respetivamente (Hipátia).

Também o faz de forma semelhante para a família de funções do tipo  $y = f(x + c)$  representadas na figura 4.21., dizendo que “a influência que tem o parâmetro  $c$ , é que modificando o seu valor, a função muda de direção (positivo ou negativo) na reta do  $x$ ”.

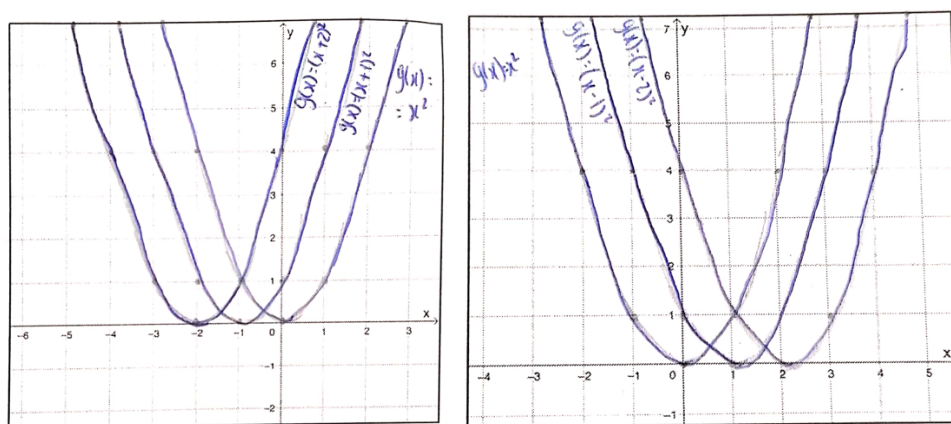


Figura 4.21. – Resoluções gráficas de  $y = (x + c)^2$ , variando  $c$  para valores positivos e negativos, respetivamente (Hipátia).

Ainda na tarefa 2, quando é pedido para explicar que transformações são necessárias transformar os gráficos das funções  $t$  e  $r$  nos gráficos das funções  $s$  e  $p$ , como se pode observar na figura 4.22., Hipátia coloca em hipótese “ser necessário acrescentar três valores à equação inicial” e que na alínea a seguir “poderá ser necessário subtrair dois valores à equação inicial”. Nesta última alínea, a aluna apenas menciona a translação vertical e não a horizontal.

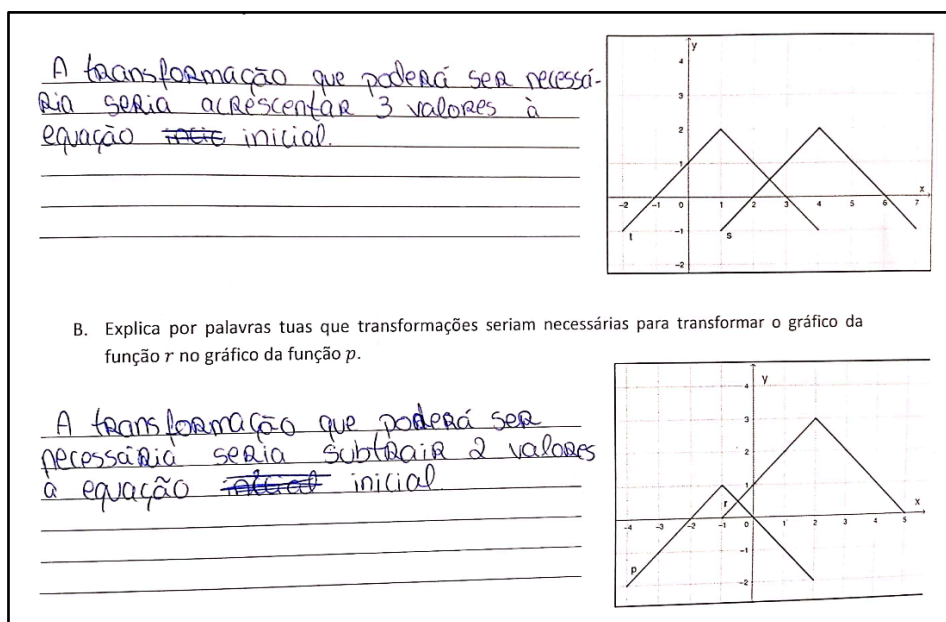


Figura 4.22. – Resolução da segunda questão da tarefa 2 (Hipátia).

**I:** Aqui na 2A, o que queres dizer com “acrescentar”?

**H:** Eu tinha de somar três unidades para andar três casas para a direita.

**I:** Então aqui (em 2B) o que queres dizer com “subtrair”?

**H:** Ah pois, eu não sabia o que dizer quando é para andar para cima ou para baixo e quando é para os lados, mas aqui eu queria que ela baixasse duas casas, mas já me apercebi que está errado, não vai para o mesmo sítio que a  $p$ , esqueci-me de andar para o lado.

Na terceira tarefa, no estudo da família de funções do tipo  $y = af(x)$ , a aluna começa por marcar pontos e esboçar gráficos da situação em que se manteve os tempos de deslocamento e aumentou-se para o dobro a distância percorrida. De seguida fez o mesmo, mas diminuindo a distância percorrida pela metade. Ao observar estas duas situações, assume que “quanto maior for o  $a$ , mais para cima fica do gráfico original e quanto menor for o  $a$ , mais para baixo fica”, não associando uma contração/dilatação vertical. Posto isto, apenas descreve que “ $a$  influencia, pois muda a forma da função  $t$ ”, mesmo depois de nas observações gráficas de

funções quadráticas concluir que “cada vez que vai aumentando o número de  $a$ , a curva da função vai diminuindo”. Na mesma tarefa, também não faz conjecturas acerca do parâmetro  $a$  da família de funções do tipo  $y = g(ax)$ , sendo  $g$  uma função quadrática, comparando os diferentes gráficos. Apenas descreve por exemplo “observo 3 funções no mesmo gráfico com diferentes tamanhos aproximando do eixo das ordenadas” e que este “influencia, pois muda a forma da função  $g$ ”.

No que respeita à segunda questão de investigação, considera-se que uma vez que Hipátia não conseguiu formular conjecturas, esta aluna não aprendeu de forma significativa o conceito de transformações de funções. Nas questões finais da tarefa 2 (figura 4.23.), embora reconheça que os parâmetros modificam a localização da função inicial, não reconhece como translações e na alínea a seguir também não foi capaz de escrever uma expressão analítica que represente uma função que sofreu translações verticais e horizontais, pois não conseguiu sequer explicar por palavras as mesmas transformações, ao observar as duas funções.

5. Considera a função  $j_1(x) = x^2$ , que sofreu translações ao seu gráfico, podendo no final ser definido por  $j_2(x) = j_1(x + 2) - 3$ . Sem a utilização da calculadora gráfica, explica por palavras tuas que transformações sofreu o gráfico da função  $j_1$ .

*No parâmetro e Na função  $j_1$ , a função situa-se no lado negativo da reta  $x$  e no  $-3$  da Reta  $y$ , e pois  $(x+2)$  representa-se na ~~negati~~ Reta negativa de  $x$  e  $-3$  na Reta negativa de  $y$*

6. Considera a função  $p(x)$ , representada em 2B. Escreve uma expressão analítica de  $r(x)$  em função de  $p$ , cujo gráfico é o transformado do gráfico de  $p$ .

$$R(x) = \frac{1}{2} p(x-1) + 2$$

Figura 4.23. – Resolução da quinta e sexta questão da tarefa 2 (Hipátia).

Do mesmo modo, na tarefa 3 não consegue explicar as translações e as contrações/dilatações que sofreu uma função, dada a expressão analítica, tentando apenas descrever onde se situa a função. Na alínea a) a aluna assume que “a função começa no 1.º quadrante” não considerando a expressão da função  $t$  e afirma que “a função se situa no 2.º quadrante por causa do menos dentro do parêntesis e com  $y$  no ponto  $-3$ ”, referindo-se ao vértice da parábola. Esta não associa as transformações como um todo. Se o vértice da parábola tem como ordenada  $-3$ , como é que a função vai estar somente no 2.º quadrante? Na mesma alínea também não refere o coeficiente 2 que multiplica a função.

No que concerne à terceira questão de investigação, no decorrer das tarefas, requisitou constantemente a ajuda do investigador para encontrar uma janela de visualização adequada. A aluna também não manifestou grande entusiasmo com a utilização da calculadora, apenas

uma pequena curiosidade por ser o primeiro contacto com a mesma. Ao longo das tarefas, apenas a manuseou para visualizar os gráficos que iria posteriormente esboçar, não a usando para testar as suas hipóteses. No decorrer das tarefas, requisitou constantemente a ajuda do investigador para encontrar uma janela de visualização adequada.

## Considerações finais

Ao contrário do que testemunhou Freitas (2012), a aplicação de tarefas de exploração de funções, com recurso à calculadora gráfica, não incentivou a aluna a explorá-la na realização das mesmas e embora tenha havido compreensão de algumas propriedades das funções, considera-se que a aluna não atribuiu significado a estes novos conceitos de transformações de funções. Tal deve-se igualmente ao facto de Hipátia não ter passado pelas etapas que Ponte et al (1999) definiram como características de uma investigação matemática. Perante a questão a investigar, a aluna apesar de ter formulado algumas conjeturas, estas nem sempre foram significativas, principalmente em relação às reflexões e contrações/dilatações de gráficos, tendo maior êxito na compreensão dos conceitos de translações de funções, cuja tarefa fez mais conjeturas consideráveis. Durante a formulação das conjeturas, a aluna apresentou igualmente dificuldade em comunicar usando terminologia própria da matemática, confundindo por exemplo conceitos de simetria e inverso de um número. Após esse processo, não testa as suas hipóteses na calculadora gráfica, como tal não consegue validar de forma correta as suas conjeturas. Nota-se alguma falta de resiliência e persistência na resolução das tarefas, revelando que a Hipátia não evidencia autonomia na atividade, confirmando o que se verifica na aula, em que pede constantemente o apoio do docente e dos colegas.

No final da entrevista, quando inquirido pelo investigador sobre de que forma a realização das tarefas a ajudou na aprendizagem das transformações, Hipátia acredita que teve um efeito positivo na sua aprendizagem, fazendo com que compreendesse melhor os conteúdos em sala de aula.

**H:** Quando dei em aula, lembrei-me que já tinha visto em algum lado e prontos, era das fichas e percebi melhor quando o professor explicou, porque começou tudo a fazer sentido, não apareceu do nada.

**I:** E em relação à calculadora gráfica?

**H:** A calculadora ajudou porque dava para ver mesmo o que estava a acontecer, por exemplo aquilo do  $x$  ser mentiroso, sem a calculadora era bué confuso, não fazia sentido, nunca ia chegar lá.



## 5. Conclusões

Este estudo foi desenvolvido durante o ano letivo 2022/2023 e envolveu alunos de uma turma do 10.º ano. Seguiu uma metodologia qualitativa em que foram considerados quatro estudos de caso. A recolha de dados teve lugar com a aplicação de três tarefas, em três momentos distintos e uma entrevista semi-estruturada aplicada a quatro estudos de caso. Nas três sessões, que decorreram em horário estabelecido com a concordância dos alunos e do professor investigador, as tarefas propostas foram resolvidas pelos participantes individualmente. As três tarefas envolveram conteúdos integrados no programa de 10.º ano e foram aplicadas antes da lecionação dos conteúdos em contexto de aula.

O estudo teve como objetivo compreender a aprendizagem de novos conceitos do tópico *Funções*, lecionado na disciplina de Matemática A, no 10.º ano, formulando conjeturas, numa investigação qualitativa com paradigma interpretativo, com recurso a tarefas exploratórias. Nesse sentido procurou-se dar resposta às seguintes questões de investigação:

1. Como se caracteriza a formulação de conjeturas a partir de tarefas de exploração?
2. Como a formulação de conjeturas influencia a aprendizagem de novos conceitos de funções?
3. Qual o papel da tecnologia na aprendizagem de novos conceitos matemáticos?

Tal como afirma Cavaco (2015), os alunos adquirem e expandem o seu conhecimento quando se envolvem na resolução de uma tarefa matemática. Esta investigação teve como base teórica as características que uma tarefa matemática de carácter exploratório deve ter. Para que seja enriquecedora, além de promover a utilização de recursos tecnológicos, a tarefa deve ser interessante, desafiante e estimular o aluno a uma aprendizagem ativa, proporcionando oportunidades que os façam utilizarem diferentes estratégias de resolução, a fim de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio

matemático e a comunicação matemática. Constatou-se que o aluno desenvolve essas capacidades passando por quatro etapas que Ponte et al. (1999) consideram como características de uma investigação matemática, nomeadamente a formulação da questão a investigar, a formulação e teste de conjecturas, assim como a validação e comunicação dos resultados.

Com base nessa metodologia, de forma a responder às questões de investigação, elaboraram-se tarefas matemáticas para promover uma aprendizagem ativa, encorajando os alunos a explorarem por si mesmos e fazerem as suas próprias descobertas, para uma compreensão mais profunda dos conteúdos. Nas suas explorações, os alunos tiveram como recurso a calculadora gráfica, por ser um catalisador da aprendizagem, ao permitir manipular as funções e oferecer uma visualização instantânea dessas manipulações.

Após análise dos dados, esta investigação permitiu concluir que os alunos tendem a ter dificuldades em formular conjecturas a partir de tarefas de exploração. Embora pudessem ser capazes de observar e descrever certas características de gráficos de funções, se não forem mais direcionados, focam-se em constatar factos e realizar observações superficiais, ao invés de relacionarem essas características com os parâmetros das funções. Percebe-se igualmente que a comunicação matemática pode afetar a capacidade de o aluno formular conjecturas significativas. A falta de conhecimento de terminologia específica da matemática, pode gerar adversidades no raciocínio dos alunos, impedindo-os de explicar as suas ideias de forma clara e justificar as suas conclusões. A título de exemplo verifica-se que num dos estudos de caso, o participante assume que os gráficos das famílias de funções do tipo  $y = mx$  e  $y = -mx$ , com  $m > 0$ , pertencerem aos quadrantes “positivos” e “negativos”, respetivamente, por considerar apenas o primeiro e segundo quadrante.

Quando foram formuladas conjecturas, o processo de testagem e verificação da veracidade das mesmas, mostrou ser um fator importante na aprendizagem significativa de novos conceitos matemáticos. Os alunos foram incentivados a pensar criticamente e a explorar diferentes possibilidades, o que levou a uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Esta metodologia demonstrou ter um impacto positivo na aprendizagem dos alunos em relação às translações de funções. Ao abordarem este conteúdo em sala de aula, os alunos já possuíam algum conhecimento prévio, o que os ajudou a compreender melhor o assunto, o que se comprovou durante as entrevistas. No que se refere à compreensão das contrações e dilatações de gráficos de funções, esta abordagem não se mostrou eficaz. Embora conseguissem visualizar e descrever como os parâmetros influenciam os gráficos de funções quadráticas, o mesmo não aconteceu para as funções em geral. Isto pode ser devido à estrutura das questões, à forma como estas estavam formuladas, à dificuldade de perceção perante a visualização ou ao facto de os alunos não terem tido anteriormente contacto com uma metodologia de ensino e aprendizagem com recurso a tarefas exploratórias, ou ainda por não

terem tido feedback por parte do investigador em relação às duas primeiras tarefas. Como resultado, tiveram dificuldades em formular hipóteses e apenas conseguiram compreender a influência dos parâmetros quando o assunto foi abordado em sala de aula.

Por fim, conclui-se que a utilização da calculadora gráfica é uma mais-valia na aprendizagem de novos conceitos matemáticos, pois além de gerar entusiasmo, motivação e interesse na resolução de tarefas de exploração, ao possibilitar uma visualização instantânea e atrativa dos gráficos após a manipulação dos parâmetros das funções, facilita a formulação e teste de conjecturas. No entanto, é importante ressaltar que o uso dessas tecnologias não garante a aprendizagem desses novos conceitos, visto que a falta de rigor e má interpretação dos gráficos pode afetar negativamente a aprendizagem dos alunos, sendo necessário um acompanhamento por parte do professor.

Com base nas problemáticas apresentadas pelos alunos durante a investigação, para que estes possam ter uma melhor aprendizagem no estudo das funções, recomenda-se que haja uma maior orientação no processo de formulação de conjecturas. Tal deve-se ao facto de a maioria não ser capaz de formular conjecturas significativas perante questões menos diretas como “que influência tem o parâmetro  $d$ ...?”. Dessa forma espera-se desenvolver competências de análise e interpretação gráfica. De igual modo, sugere-se, no futuro, que os professores incentivem a exposição de ideias (tanto na escrita como oralmente), com atividades que estimulem o desenvolvimento da comunicação matemática. Este deverá fornecer constantemente feedback construtivo sublinhando pontos fortes e aspetos que deverão ser melhorados. Sugere-se igualmente que os professores os orientem para um uso adequado da tecnologia sem desprezar o raciocínio lógico, de maneira a manusearem como ferramentas e não um mero instrumento.

Para trabalhos futuros, sugere-se a utilização do *software* de geometria dinâmica *GeoGebra* na aplicação das tarefas, ao invés da calculadora gráfica. Este *software* é mais prático na criação de um seletor para os parâmetros das funções. Ao fazê-lo variar, é possível que os alunos possam ter uma melhor perceção da influência dos parâmetros nos gráficos das funções, nomeadamente quando há contrações e dilatações.

Este estudo vai ao encontro dos objetivos das novas aprendizagens essenciais que entrarão em vigor no ano letivo 2024/25, na medida em que incentiva a criação de tarefas que obriguem os alunos a explorar situações problemáticas, formularem e validarem conjecturas com recurso sistemático à tecnologia. Esta tipologia de tarefa, desenvolve o raciocínio, o pensamento crítico e a comunicação matemática, contribuindo para uma melhor compreensão dos conteúdos. Portanto, espera-se que este estudo contribua para a aprendizagem deste tema de Funções do 10.º ano, assim como para a prática de lecionação dos atuais e futuros novos professores, neste paradigma de exploração e descoberta e cada vez menos por processos em que o professor assume o papel principal.



## Referências

- Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. (1.ª ed.). Universidade Aberta. <http://hdl.handle.net/10400.2/2028>
- Alves, D. (2018). *As aplicações da função quadrática no dia a dia, uma experiência com alunos de 10º ano numa turma de Ciências e Tecnologias*. [Tese de mestrado, Universidade do Minho]. Repositório da Universidade do Minho. <https://hdl.handle.net/1822/58347>
- Araújo, P. (1998). *Curso de Geometria* (1.ª ed.). Gradiva.
- Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. APM
- Bigge, M.L. (1997). *Teorias da aprendizagem para professores*. Editora Pedagógica e Universitária.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Branco, M. (2011). *Tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da Geometria: Uma exploração com alunos do 10.º ano de escolaridade*. [Tese de mestrado, Universidade do Minho]. Repositório da Universidade do Minho. <https://hdl.handle.net/1822/18600>
- Bruner, J. (1961). The act of discovery. *Harvard Educational Review*, 31, 21-32.
- Canavarro, A.P. (2011). Ensino Exploratório da Matemática: práticas e desafios. *Educação Matemática*, 115, 11-17. <http://hdl.handle.net/10174/4265>
- Cavaco, L. (2015). *Tarefas matemáticas em diferentes contextos escolares*. [Tese de mestrado, Universidade do Algarve]. Repositório da Universidade do Algarve. <http://hdl.handle.net/10400.1/7994>
- Coutinho, C. (2015). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria e prática*. (2.ª ed.). Almedina.
- DES (2001). *Programa de Matemática A do 10.º ano de escolaridade*. Lisboa. Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário.
- Dias, M. (2019). *Relatório de Estágio e Influência da Calculadora Gráfica no Processo de Demonstração*. [Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa]. Repositório da Universidade Nova de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10362/90749>
- Domingos, A. (2016). 30 Anos com Tecnologia: afinal onde é que estamos? *Educação e Matemática*, 139 e 140, 2-5.

Duarte, J. (2000). A resolução de problemas no ensino da Matemática. *Educação e Comunicação*, 4, 97-100.

Fortin, M. (2003). *O processo de investigação: da concepção à prática*. Lusociência.

Freitas, M. (2012). *Tarefas de Natureza Exploratória e Investigativa no Ensino e Aprendizagem das Funções Quadráticas Envolvendo o Uso da Calculadora Gráfica*. [Tese de mestrado, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10400.13/1608>

Gimeno, J. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. Artmed.

Leal, L. (1992). *Avaliação das aprendizagens num contexto de inovação curricular*. [Tese de mestrado, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/41429>

Ludke, M. & André, M., (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. Editora Pedagógica e Universitária Ltda.

Martins, H. (2016). *Tarefas para a Aprendizagem de Estatística no Ensino Secundário com Calculadora Gráfica*. [Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa]. Repositório da Universidade Nova de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10362/21580>

Meirinhos, M., & Osório, A. (2010). O Estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EduSer: Revista de Educação*, 2(2), 49-65.

Negra, C., Martinho, E., & Martins, H. (2015). *Dimensões Matemática 10.º ano – Manual do Aluno (Volume 2)*. Santillana.

Negra, C., Martinho, E., & Martins, H. (2015). *Dimensões Matemática 10.º ano – Manual do Aluno (Volume 3)*. Santillana.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. APM.

Nunes, E. (2022). *A resolução de problemas na aprendizagem de tópicos de Funções de alunos do 10º ano com recurso à calculadora gráfica*. [Tese de mestrado, Universidade do Minho]. Repositório da Universidade do Minho. <https://hdl.handle.net/1822/78701>

Olabuenaga, J. I. R. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Universidad de Deusto.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, XXII (2), 29-53.

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, da matemática e do aluno: Uma discussão epistemológica*. [Tese de mestrado, Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/43019>

Ponte, J. P. (1990). *Novas tecnologias de informação uma oportunidade de renovação educativa?*. Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de matemática. *Educação e Matemática*, 34, 2-7. <http://hdl.handle.net/10451/4470>

Ponte, J. P., & Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias*. Universidade Aberta. <http://hdl.handle.net/10400.2/9542>

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J., & Ferreira, C. (1999). *Investigando as Aulas de Investigações Matemáticas*. Em *Investigações matemáticas na aula e no currículo*, (pp. 133-151). Projeto MPT e APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., & Brocardo, J. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, 11-34, APM. <http://hdl.handle.net/10451/3008>

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 5, 105-132. <http://hdl.handle.net/10451/3007>

Rocha, H. (2002). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrante*, XI (2), 3-28.

Silva, E. L., & Menezes, E. M. (2005). *Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação* (4ª ed.). UFSC.

Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M., Santos, M., Felipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil do aluno*. Ensino Secundário. Lisboa: DGE. <https://www.dge.mec.pt/noticias/consulta-publica-aprendizagens-essenciais-de-matematica-para-o-ensino-secundario>.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.

Sproesser, U., Vogel, M., Dörfler, T., & Eichler A. (2018). How to deal with learning difficulties related to functions – assessing teachers' knowledge and introducing a coaching. Em *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 2996–3003). DCU Institute of Education and ERME.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática*, 105, 22-28.

Vasconcelos, C., Praia, J., & Almeida, L. (2003). Teorias de aprendizagem e o ensino/aprendizagem das ciências: da instrução à aprendizagem. *Psicologia Escolar e Educacional*, 7 (1), 11-19.

# Anexos

# Anexo 1 (Plano tema)

## Plano de tema – Geometria analítica no plano

### Aula 1

**Conteúdos:** Referenciais ortonormados; Distância entre dois pontos; Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta.

#### Momentos da aula

- Definição de referencial ortonormado;
- Exemplo (Tarefa 1 (p. 6) – Extra: simetrias nos eixos do referencial);
- Exercícios: 1 e 3 (pp. 7-8);
- Definições/fórmulas da distância entre dois pontos e do ponto médio de um segmento de reta (caso de uma dimensão; caso de duas dimensões como aplicação do Teorema de Pitágoras);
- Exemplos (Tarefa 3 e Exercício resolvido 2 (pp. 10-11));
- Exercícios: 6, 8 e 10 (pp. 10-12);
- **TPC:** 2 e 11 (p. 7 e p. 12).

### Aula 2

**Conteúdos:** Condições e conjuntos: equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta.

#### Momentos da aula

- Resolução de exercícios de matéria da aula anterior (TPC);
- Definição/fórmula da equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta (mencionar o recurso à fórmula da distância entre dois pontos e a relação intrínseca que esta tem com o objeto geométrico que é a mediatriz);
- Exemplo 3 (p. 14);
- Exercícios: 16 e 17 (pp. 14-15);
- Exercício resolvido 4 (p. 15);
- Exercício: 18 (p. 15);
- **TPC:** 15 e 19 (pp. 14-15);

### **Aula 3**

**Conteúdos:** Equação cartesiana reduzida da circunferência; Inequações cartesianas de semiplanos e de círculos.

#### **Momentos da aula**

- Resolução de exercícios de matéria da aula anterior (TPC);
- Definição/fórmula da equação cartesiana reduzida da circunferência (relação geométrica com a fórmula da distância entre dois pontos e aplicação do Teorema de Pitágoras);
- Exemplos genéricos (duas circunferências com um dado centro e um dado raio);
- Exercícios: 20 e 22 (pp. 16-17);
- Definição/fórmula da inequação de círculos;
- Exercícios: 41 e 42(b)(c) (pp. 27-28);
- Definição/fórmula da inequação de semiplanos;
- Exemplo 9 (p. 29);
- Exercícios: 45 e 46 (pp. 30-31);
- **TPC:** 12-14 (consolidar aulas anteriores), 23, 28, 43 e 47.

**Fonte:** Negra, C., Matinho, E., & Martins, H. (2015). *Dimensões (Volume 2)*. Santillana.

# Anexo 2 (Plano aula)

## Plano da aula lecionada IV

| Capítulo: Generalidades acerca de funções   |   |
|---|---|
| <b>Sumário:</b><br>Zeros e sinal das funções quadráticas.   | <b>Recursos Disponíveis:</b><br>Manual.<br>Calculadora gráfica.<br>Ficha Formativa.   |
| OBJETIVOS   | AÇÕES A DESENVOLVER COM OS ALUNOS   |
| Reconhecer, representar e interpretar graficamente funções quadráticas e usá-las na resolução de problemas, identificando o extremo absoluto, as eventuais raízes, o sentido da concavidade e sinal dos respetivos gráficos.  | Participação ativa dos alunos quando solicitada e por iniciativa própria.<br><br>Resolução de exercícios autónoma e/ou com o colega de carteira.<br><br>Recurso à calculadora gráfica para resoluções de problemas. |
| <b>Desenvolvimento da aula/Estratégias:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Introdução fazendo uma recapitulação do que foi dado nas aulas anteriores, nomeadamente da noção de função quadrática e as coordenadas do vértice:<p>Designa-se por função quadrática qualquer função <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math> que possa ser definida por uma expressão do tipo:</p><math display="block">f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ com } a \neq 0</math><p>Sendo uma parábola de vértice <math>V(v_x, v_y)</math> com <math>v_x = -\frac{b}{2a}</math> e <math>v_y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)</math>.</p></li><li>Resolução de um problema em contexto “semi-real”, com recurso à calculadora gráfica e analiticamente, em pares. (30 min.)</li><li>Zeros da função quadrática (12 min):<p><b>Exemplos</b><br/>Calcula os zeros das seguintes funções:</p><p>a) <math>f(x) = -x^2 + 6x - 9</math></p><p><b>Resolução:</b></p><math display="block">f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow</math><math display="block">\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times (-1) \times (-9)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{-2} \Leftrightarrow x = 3</math><p>Zero de <math>f</math>: 3</p></li></ul> |   |

b)  $g(x) = -x^2 + 4x - 7$

**Resolução:**

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-1) \times (-7)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{-2} \text{ (impossível)}$$

A função  $g$  não tem zeros.

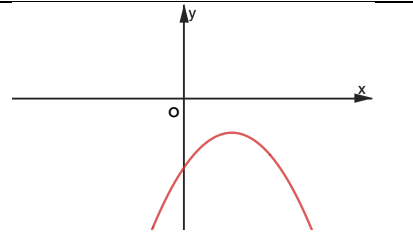
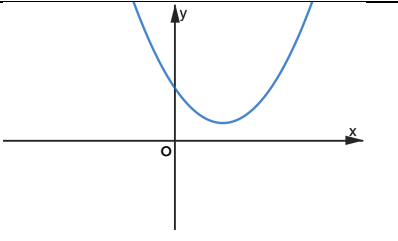
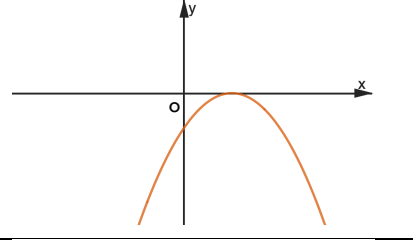
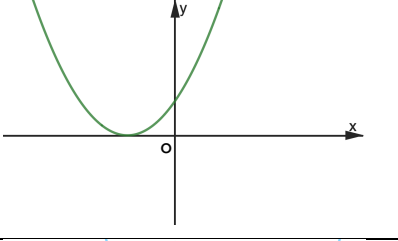
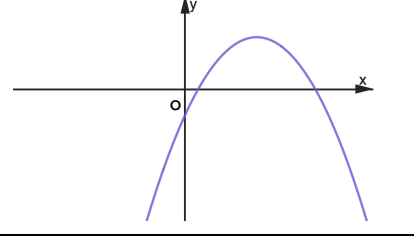
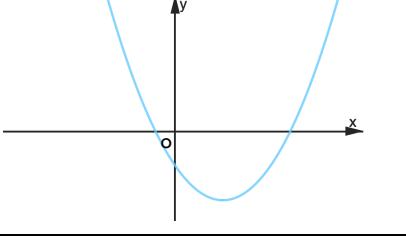
Com auxílio dos exemplos anteriores e do problema, averiguar a existência de zeros da função para os diferentes valores do binómio discriminante ( $\Delta = b^2 - 4ac$ ):

Numa função quadrática definida pela expressão  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , sendo  $\Delta = b^2 - 4ac$ :

- $\Rightarrow$  Se  $\Delta < 0$ , não tem zeros reais;
- $\Rightarrow$  Se  $\Delta = 0$ , tem um zero duplo.
- $\Rightarrow$  Se  $\Delta > 0$ , tem dois zeros distintos;

• Sinal da função quadrática (10 min):

Com as conclusões tiradas anteriormente, estudar o sinal das funções construindo a tabela seguinte:

|                                | $a < 0$   | $a > 0$  |
|--------------------------------|---|--|
| $\Delta < 0$<br>Não tem zeros  |   |   |
| $\Delta = 0$<br>Tem um zero    |  |  |
| $\Delta > 0$<br>Tem dois zeros |  |  |

Na tabela anterior observa-se o seguinte:

- $\Rightarrow$  Se uma função quadrática não tem zeros,  $f(x)$  assume sempre o sinal de  $a$ .
- $\Rightarrow$  Se tem um zero duplo  $x_1$ ,  $f(x)$  assume o sinal de  $a$  para qualquer  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$ .
- $\Rightarrow$  Se tem dois zeros distintos  $x_1 < x_2$ , assume o sinal de  $a$  em  $]-\infty, x_1[ \cup ]x_2, +\infty[$  e o sinal contrário ao de  $a$  em  $]x_1, x_2[$ .

- Exemplos (25 min)

1. Estude o sinal das seguintes funções quadráticas:

a)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$

**Resolução:**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

A função  $f$  tem um zero em  $x = 1$ .

O coeficiente do termo  $x^2$  é 2, pelo que o gráfico de  $f$  tem concavidade para cima.

Portanto,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

b)  $g(x) = -(x - 3)^2 - 2$

**Resolução:**

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -(x - 3)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow -(x - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = -2 \Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{-2} \text{ (impossível)}$$

Logo a função  $g$  não tem zeros em  $\mathbb{R}$ .

O coeficiente do termo  $x^2$  é  $-1$ , pelo que o gráfico de  $g$  tem concavidade para baixo.

Portanto,

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

c)  $h(x) = -x^2 + 3x$

**Resolução:**

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

A função  $h$  tem dois zeros distintos em  $x = 0$  e  $x = 3$ .

O coeficiente do termo  $x^2$  é  $-1$ , pelo que o gráfico de  $h$  tem concavidade para baixo.

Portanto,

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; 0[ \cup ]3; +\infty[ \text{ e } h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]0, 3[$$

2. Determine os valores de  $k$ , para os quais a função quadrática, definida por  $j(x) = -2x^2 + 6x + k$ , é sempre negativa.

**Resolução:**

Para que a função quadrática seja sempre negativa, como  $a = -2 < 0$ , temos que:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 36 - 4 \times (-2) \times k < 0 \Leftrightarrow 36 + 8k < 0 \Leftrightarrow 8k < -36 \Leftrightarrow k < -\frac{36}{8} \Leftrightarrow k < -\frac{9}{4}$$

Logo,  $k \in ]-\infty, -\frac{9}{4}[$ .

- Exercício 16 (p. 84 do manual)

### Observações/Aprendizagem complementar

Os alunos ainda não estão familiarizados com algumas das funcionalidades da calculadora gráfica precisas para a resolução da tarefa, nomeadamente o cálculo do máximo e mínimo de uma função e interseção de funções, pelo que é importante dar suporte nesse aspeto. Em particular, é necessário estar preparado para auxiliar os utilizadores dos diferentes modelos da Casio e da Texas e, ainda, da calculadora da Numworks.

**Trabalho autónomo (TPC)**

Exercícios 10 – 15 (pp. 81-84) e tarefa 3 (p. 82), do manual.

**Reflexão:**

Na minha opinião, o balanço da aula foi bastante positivo. Conseguiu-se lecionar tudo o que se pretendia de forma calma e organizada, atingindo assim os objetivos da aula.

Os pontos fortes foram a organização do quadro, a escolha dos exemplos para fazer a ligação com a teoria e o facto de ao resolver o problema, ir intercalando a resolução com a calculadora e analiticamente, inclusive ditar respostas, de maneira a ter mão na turma, pois nos momentos com a calculadora encontravam-se mais agitados e ao ditar as respostas, era uma forma de eles se calarem, pararem e ouvirem. Outros pontos positivos foram a teoria estar projetada, o que permitiu que não houvesse tempos mortos do professor ao escrever no quadro e a tabela com os seis casos dos gráficos das funções quadráticas, que serviu como conclusão do estudo dos zeros e introdução ao estudo do sinal.

Numa próxima aula será importante ter em atenção determinados aspetos, nomeadamente a iluminação do projetor e no meu posicionamento no quadro, evitando ao máximo voltar as costas aos alunos.

**Fonte:** Negra, C., Matinho, E., & Martins, H. (2015). *Dimensões (Volume 3)*. Santillana.

## Anexo 3 (Ficha formativa)

### Ficha Formativa

#### Função Quadrática

Designa-se por função quadrática qualquer função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que possa ser definida por uma expressão do tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ com } a \neq 0$$

Sendo uma parábola de vértice  $V(v_x, v_y)$  com  $v_x = -\frac{b}{2a}$  e  $v_y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

#### Problema I – Combate ao incêndio

Às **10 horas da manhã** de um dia de verão, os bombeiros iniciaram um combate a um incêndio que tinha deflagrado há algumas horas numa floresta. Passado algum tempo, como não conseguiram controlar as chamas, pediram o reforço de meios aéreos. Assim que os meios aéreos entraram em ação, começou a verificar-se uma diminuição na velocidade de propagação do incêndio. No rescaldo, o chefe dos bombeiros locais declarou que a área ardida variou segundo uma velocidade descrita pelo modelo matemático,  $v(x) = -\frac{1}{14}x^2 + \frac{6}{7}x + 2$ , em hectares por hora, onde  $x = 0$  refere-se ao início do combate ao incêndio.

- Determina a velocidade a que a área florestal ardia às 12 horas.
- Indica, justificando, quanto tempo decorreu desde que o incêndio deflagrou até ser extinto.
- Determina a velocidade máxima a que se propagou o incêndio.
- Diz, justificando, a que horas os meios aéreos iniciaram o combate ao incêndio.

#### Fonte:

Negra, C., Matinho, E., & Martins, H. (2015). *Dimensões (Volume 3)*. Santillana.

Alves, D. (2018). *As aplicações da função quadrática no dia a dia, uma experiência com alunos de 10º ano numa turma de Ciências e Tecnologias*. [Tese de mestrado, Universidade do Minho]. Repositório da Universidade do Minho. <https://hdl.handle.net/1822/58347>

# Anexo 4 (Ficha calculadora)

## Ficha de funções polinomiais com a utilização da calculadora gráfica

### Objetivos da ficha:

- Aprofundar o domínio sobre as funcionalidades da calculadora gráfica
- Desenvolver a capacidade de transpor os dados visualizados na calculadora para o papel e de interpretar os dados

1. Sejam  $f$  e  $g$ , funções reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = 5|x - 2| - 4 \quad \text{e} \quad g(x) = x + 1$$

Representa as funções  $f$  e  $g$  na tua calculadora gráfica e:

- 1.1. Transpõe as representações gráficas visualizadas para o teu caderno, indicando o contradomínio de cada função.
- 1.2. Determina as coordenadas dos pontos de interseção de  $f$  e de  $g$ , assinalando os pontos relevantes no teu caderno. Utiliza valores arredondados às centésimas para as coordenadas dos pontos assinalados.
- 1.3. Tendo por base 1.2., indica o conjunto-solução da condição:

$$f(x) \leq g(x)$$

Apresenta o conjunto-solução sob a forma de intervalo, com valores arredondados às décimas.

2. Seja  $h$  uma função real de variável real, de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , definida por:

$$h(x) = \frac{1}{x-2} + 1.$$

Representa a função  $h$  na tua calculadora gráfica e:

- 2.1. Transpõe a representação gráfica visualizada para o teu caderno, indicando o seu contradomínio.
- 2.2. Determina os valores exatos das coordenadas dos pontos de interseção da representação gráfica de  $h$  com os eixos coordenados.
- 2.3. Determina o conjunto-solução da condição:

$$h(x) < x$$

sob a forma de união de intervalos, com valores arredondados às centésimas.

3. Seja  $f$ , a função real de variável real, definida por:

$$f(x) = 12x^3 - 20x^2 + x + 3$$

Representa a função  $f$  na tua calculadora gráfica e transpõe a representação gráfica visualizada para o teu caderno, indicando os zeros da função  $f$  e estudando o seu sinal.

4. Sabendo que  $f$  e  $g$  são funções polinomiais de grau 4 e 3, respetivamente, e que  $f(1) = g(1) = -2$ , obtém uma expressão analítica para cada uma das funções que respeite o quadro de sinais apresentado em cada uma das alíneas seguintes e, recorrendo à tua calculadora gráfica, indica os extremos relativos de  $f$  e de  $g$ , se existirem, apresentando, nos valores não exatos, arredondamentos às centésimas.

4.1.

|        |           |      |     |     |     |     |     |     |           |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-2$ |     | $0$ |     | $2$ |     | $3$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$       |

4.2.

|        |           |      |     |     |           |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-1$ |     | $3$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $-$       |

5. A Dona Adelaide foi ao Aquashow e, como tinha algum receio de parques aquáticos, foi experimentar o escorrega das crianças.

Considera que a Dona Adelaide saiu “disparada” do escorrega no instante  $t = 2,5s$  e que, para um determinado valor real  $k$ , que corresponde ao instante em que atinge o solo, a função  $h$ , que descreve a distância, em metros, a que se encontrou a Dona Adelaide do chão em função do tempo, em segundos, é definida por::

$$h(t) = \begin{cases} t^2 - 4t + 4 & \text{se } 0 \leq t < 2,5 \\ -5t^2 + 30t - \frac{87}{2} & \text{se } 2,5 \leq t \leq k \end{cases}$$

Representando a função  $h$  na calculadora gráfica e transpondo a representação gráfica visualizada para o teu caderno, indica:

- 5.1. A altura do escorrega;
- 5.2. O valor do instante  $k$ ;
- 5.3. A distância máxima ao chão atingida pela Dona Adelaide após sair do escorrega;
- 5.4. Em que instantes a distância da Dona Adelaide ao chão foi superior a 1 metro.

Nos valores não exatos, apresenta arredondamentos às centésimas.

## Soluções

---

**1.1.**  $CD_f = [-4, +\infty[$  e  $CD_g = \mathbb{R}$       **1.2.**  $I_1(0,83; 1,83)$  e  $I_2(3,75; 4,75)$       **1.3.**  $C.S. = [0,8; 3,8]$

**2.1.**  $CD_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$       **2.2.**  $I_1(0; 0,5)$  e  $I_2(1; 0)$       **2.3.**  $C.S. = ]0,38; 2[ \cup ]2,62; +\infty[$

**3.** Os zeros são  $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{2}$ , sendo que  $f$  é positiva em  $]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{3}{2}, +\infty[$  e é negativa em  $]-\infty, -\frac{3}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$

**4.1.**  $f(x) = -\frac{1}{3}(x+2)(x)(x-2)(x-3)$ . Mínimo relativo:  $-2,01$ . Máximos relativos:  $4,32$  (máx. abs.) e  $0,96$ .

**4.2.**  $g(x) = -\frac{1}{4}(x+1)(x-3)^2$ , sendo que o mínimo relativo é  $-2,37$  e o máximo relativo é  $0$ .

**5.1.**  $4$  m      **5.2.**  $3,55$  s      **5.3.**  $1,5$  m      **5.4.**  $t \in [0; 1[ \cup ]2,68; 3,32[$

**Fonte:** Espólio pessoal do professor cooperante.

## Anexo 5 (Tarefa de grupo)

### Tarefa de Grupo

Na resposta a cada um dos itens seguintes, apresentem todos os cálculos efetuados e todas as justificações. Quando, para um resultado, não for pedida aproximação, apresentem sempre o valor exato.

1. (30p) Seja  $f$ , a função de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida analiticamente por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x > 0 \\ -3 + |x + 1| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Sem recorrer à calculadora, representem  $f$  graficamente e determinem o(s) seu(s) zero(s).

2. Recorrendo a **processos exclusivamente analíticos**, resolvam as condições seguintes:

a) (30p)  $1 - 2|x + 3| > -5$

b) (30p)  $\sqrt[3]{x^2 + 6x} = 3$

3. (25p) Seja  $P(x) = -6x^3 + x^2 - 2x + 1$

Determinem o quociente e o resto da divisão do polinómio  $P(x)$  por  $3x + 1$ .

4. (30p) Seja  $a \in \mathbb{R}$ .

Considerem o polinómio:

$$A(x) = 2x^3 - ax^2 + 1$$

Determinem  $a$  de modo que a divisão de  $A(x)$  por  $x - 2$  tenha o mesmo resto que a divisão por  $x + 1$ .

5. Foi detetada, às oito horas do dia 31 de março, uma infeção cutânea num doente. Admitam que a área de pele, em milímetros quadrados, afetada pela doença, é dada em função de  $t$ , por:

$$A(t) = -t^2 + 6t + 7$$

sendo  $t$  o tempo, em dias, decorrido após ter sido detetada a infeção.

Sabe-se, ainda, que a área infetada começou a diminuir quando foi administrado um medicamento.

Determinem, recorrendo a **métodos exclusivamente analíticos**:

a) (25p) A área máxima de pele infetada e indiquem em que dia foi administrado o medicamento.

b) (30p) Ao fim de quanto tempo a infeção se extinguiu? E durante quanto tempo a área infetada foi superior ou igual a  $12 \text{ mm}^2$ ?

Fonte: Própria

## Anexo 6 (Tarefa lugares geométricos)

### Tarefa 9.º ano - Lugares Geométricos

1. O cão da Madalena fugiu de casa. Desesperada, vai à rua perguntar se alguém o viu, quando de repente apareceu uma senhora que disse que o cão estaria exatamente a uma distância de 2 *km* da casa da Madalena.

a) Com a informação dada pela senhora, descreve qual o conjunto de todos os sítios que o cão possa estar.

**Nota:** Começa por demonstrar esse mesmo conjunto de sítios, com a ajuda dos teus colegas, usando os cordéis fornecidos, considerando que 1 m de cordel corresponde a 1 km.

---

---

---

---

---

b) No quadro abaixo, ilustra o conjunto descrito na alínea anterior, considerando que o ponto C é a casa da Madalena.



2. A senhora depois lembrou-se que viu o cão a fazer um percurso, estando sempre à mesma distância da sua casa e da casa da Madalena, sendo que as duas casas distam 3 km uma da outra.

a) Descreve o percurso feito pelas pegadas do cão.

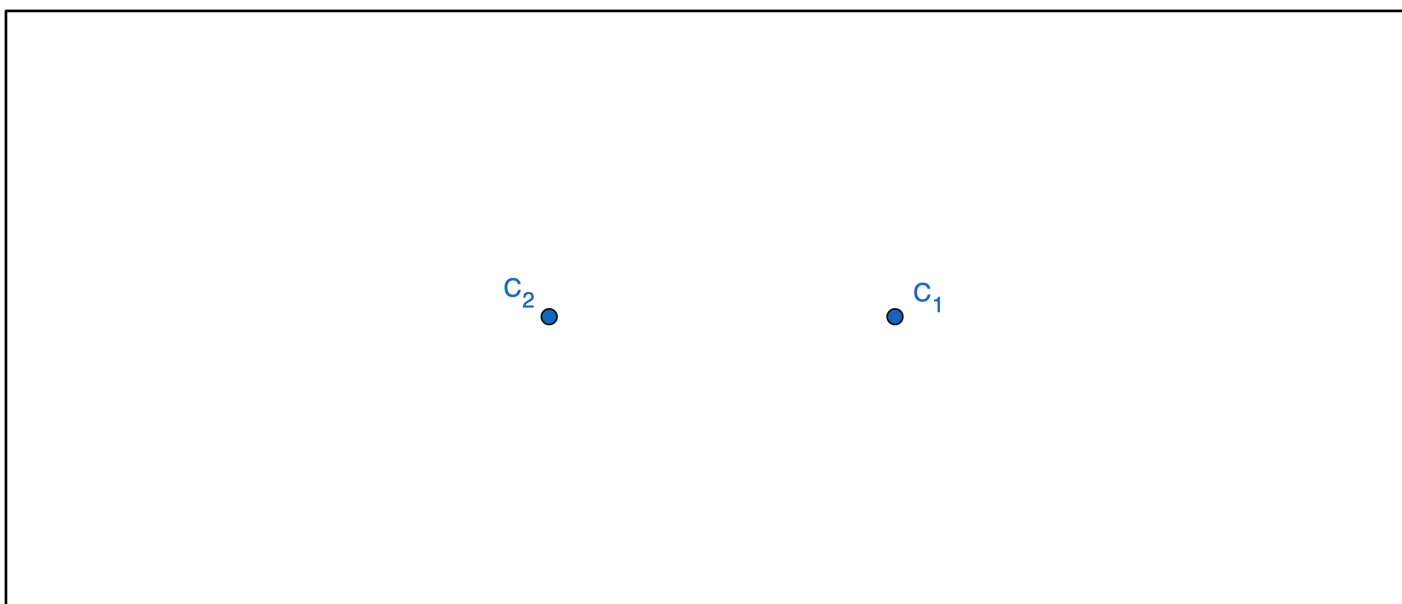
**Nota:** Começa por demonstrar esse mesmo percurso, com a ajuda dos teus colegas, usando os cordéis fornecidos, considerando que 1 m de cordel corresponde a 1 km.

---

---

---

b) No quadro abaixo, ilustra os pontos possíveis da localização do cão, considerando as duas informações descritas em 1a) e 2a), considerando dois pontos  $C_1$  e  $C_2$  como a casa da senhora e a casa da Madalena, respetivamente.



3. Os conjuntos de pontos descritos em 1a) e 2a) são **lugares geométricos**.

Discute com os teus colegas uma possível definição de lugares geométricos.

---

---

---

Fonte: Própria

## Anexo 7 (Tarefa geometria sintética)

### Tarefa geometria sintética

#### Objetivos da tarefa:

- Desenvolver a capacidade de visualizar lugares geométricos;
- Aprofundar a manipulação das ferramentas do *GeoGebra*;
- Familiarizar os docentes com os novos conteúdos de geometria sintética.
- 

#### Objetivos programáticos:

- Identificar circunferência, círculo, bissetriz de um ângulo e mediatriz de segmento como lugares geométricos.

No *GeoGebra*, resolva os seguintes problemas recorrendo à ferramenta *Mostrar traço*.

1. Considere o segmento de reta  $[AP]$ , em que o ponto  $A$  é fixo e o ponto  $P$  se encontra a uma distância fixa de  $4 \text{ u. m.}$  Fazendo variar o ponto  $P$ , esboce e descreva o lugar geométrico que obténs.

*Sugestão:* Utiliza a ferramenta “Segmento de reta (Ponto, Comprimento)”.

2. Um segmento de reta de comprimento 2 desliza da posição vertical até à posição horizontal, mantendo-se a extremidade  $A$  sobre o segmento de reta  $[PO]$  e extremidade  $B$  sobre o segmento de reta  $[QO]$  (Figura 1).

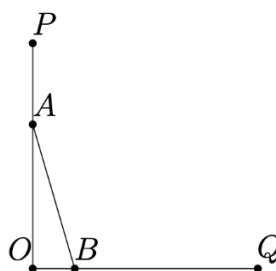


Figura 1

Esboce e descreva o lugar geométrico percorrido pelo ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ .

*Sugestão:* Utiliza a ferramenta “Mostrar Traço” no ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ .

3. Ilustra que num triângulo qualquer os seis triângulos obtidos unindo o baricentro aos vértices e aos pontos médios dos lados têm todos a mesma área.

*Sugestão:* Marque os seis triângulos com a ferramenta “Polígono” e meça as suas áreas com a ferramenta “Área”.

**Fonte:** Araújo, P. (1998). *Curso de Geometria* (1ª ed.). Gradiva.

# Anexo 8 (Tarefa 1)

## Tarefa I – Funções Afins

### Objetivos da Tarefa:

- Manipular a calculadora como instrumento de exploração;
- Compreender a relação entre o declive e ordenada na origem de uma função afim com o gráfico da mesma.
- Associar expressões analíticas com funções que representam situações de contexto real.

I. Considera a família de funções reais de variável real do tipo  $y = mx, m \in \mathbb{R}$ .

A. Com recurso à calculadora gráfica, visualiza e esboça, no referencial abaixo, três exemplos atribuindo ao parâmetro  $m$  valores positivos, como por exemplo,  $m = 0,5$ ;  $m = 1$ ;  $m = 2$ .

Comparando os diferentes gráficos, o que observas?

---

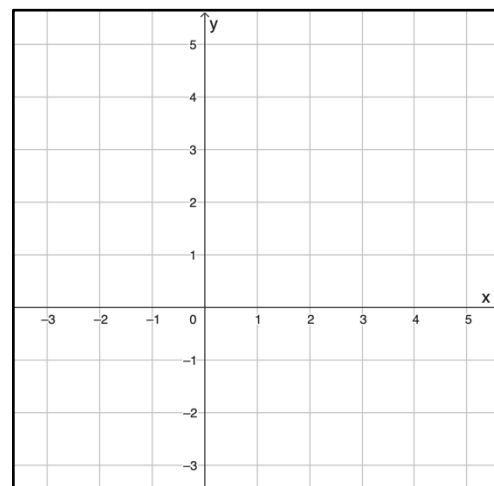
---

---

---

---

---



B. Fazendo um estudo semelhante ao anterior, atribuindo valores negativos ao parâmetro  $m$ , o que verificas?

---

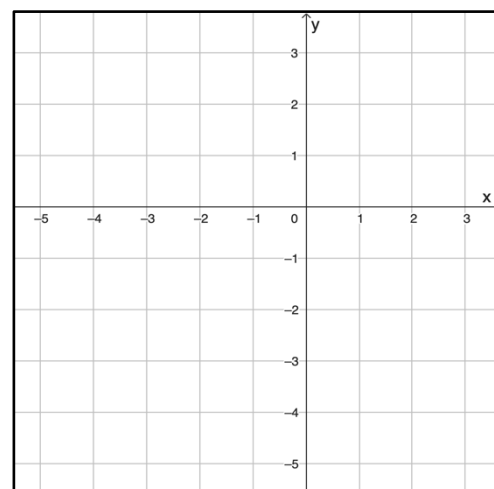
---

---

---

---

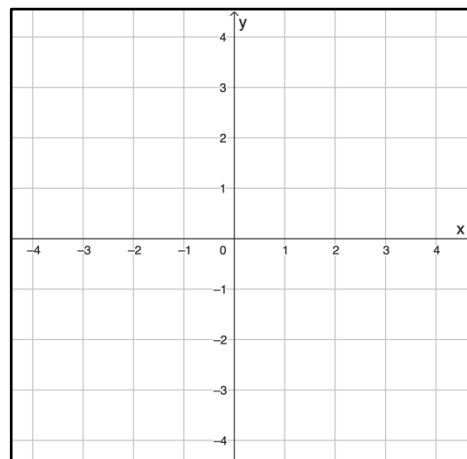
---



2. Considera agora a família de funções reais de variável real do tipo  $y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$ .

A. Recorrendo à calculadora gráfica, visualiza e esboça, no referencial abaixo, exemplos de funções da família acima mencionada, com  $m = 2$  e atribuindo valores ao parâmetro  $b$  (positivo, negativo ou nulo).

|              |
|--------------|
| $y = 2x + b$ |
| $f_1(x) =$   |
| $f_2(x) =$   |
| $f_3(x) =$   |



O que observas?

---



---



---



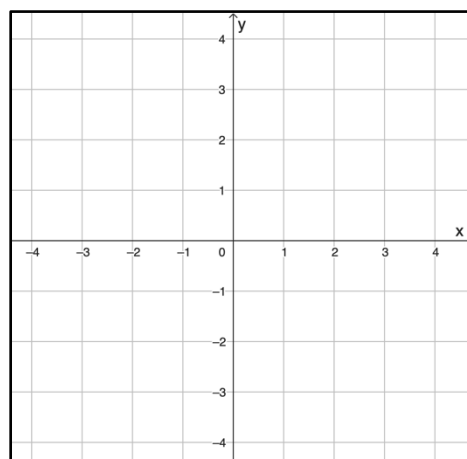
---



---

B. Faz um estudo semelhante ao anterior, mantendo agora  $b = 1$  e atribuindo valores a  $m$ .

|              |
|--------------|
| $y = mx + 1$ |
| $g_1(x) =$   |
| $g_2(x) =$   |
| $g_3(x) =$   |



O que analisas?

---



---



---



---

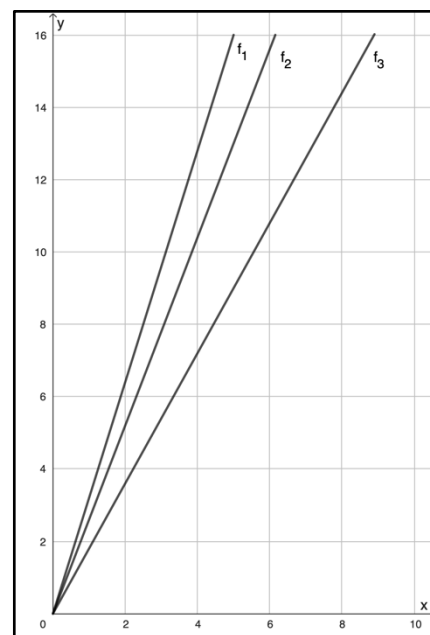


---

3. Três amigos, Diogo, Joel e Matilde, decidem fazer uma corrida até uma gelataria. Dos três, quem chegou primeiro foi o Joel, tendo ficado em último lugar o Diogo. Ao lado, estão assinaladas funções que representam a distância percorrida ( $y$ ), em metros, em função do tempo ( $x$ ), em segundos, para cada um dos amigos.

A. Sem recorrer à calculadora, faz a correspondência entre as funções, com as expressões analíticas.

- |       |   |   |            |
|-------|---|---|------------|
| $f_1$ | • | • | $y = 1,8x$ |
| $f_2$ | • | • | $y = 3,2x$ |
| $f_3$ | • | • | $y = 2,6x$ |



Justifica as tuas escolhas.

---



---



---



---



---

B. Das funções representadas no referencial, qual poderá representar o percurso feito pelo Joel? E pela Matilde? Porquê?

---



---



---



---



---

# Anexo 9 (Tarefa 2)

## Tarefa 2 – Translações de Gráficos de Funções.

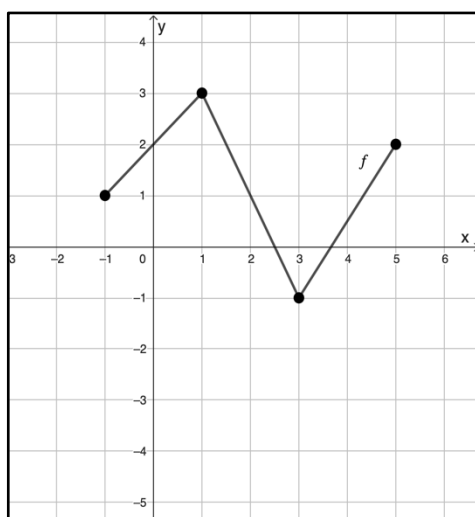
### Objetivos da Tarefa:

- Compreender a relação dos parâmetros  $c$  e  $d$  de funções da família  $y = f(x + c) + d$  com os gráficos das mesmas.

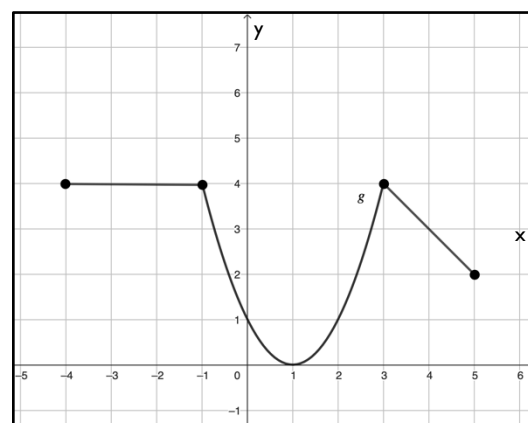
### Parte I

I. Considera as funções reais de variável real  $f$  e  $g$ , representadas graficamente a seguir:

I



II



A. Preenche as seguintes tabelas, sendo que:

- $h(x) = f(x) - 3$ ;
- $i(x) = g(x) + 2$

| $x$    | -1 | 1 | 3 | 5 |
|--------|----|---|---|---|
| $f(x)$ |    |   |   |   |
| $h(x)$ |    |   |   |   |

| $x$    | -4 | -1 | 0 | 3 | 5 |
|--------|----|----|---|---|---|
| $g(x)$ |    |    |   |   |   |
| $i(x)$ |    |    |   |   |   |

B. Com auxílio dos pontos marcados nas tabelas, representa as funções  $h$  e  $i$  nos referenciais I e II, acima, respetivamente. O que observas?

---



---



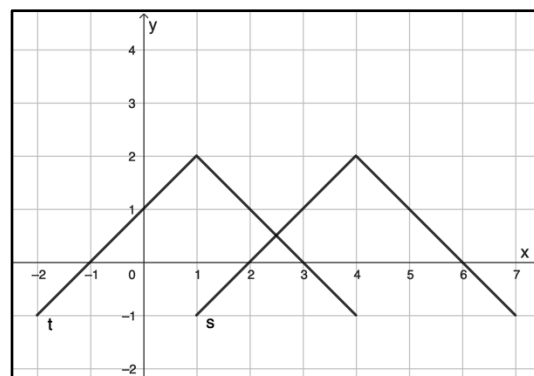
---



---

2. Nas figuras abaixo estão representadas graficamente as funções  $p, r, t$  e  $s$ .

A. Explica por palavras tuas que transformação seria necessária para transformar o gráfico da função  $t$  no gráfico da função  $s$ .




---



---



---



---

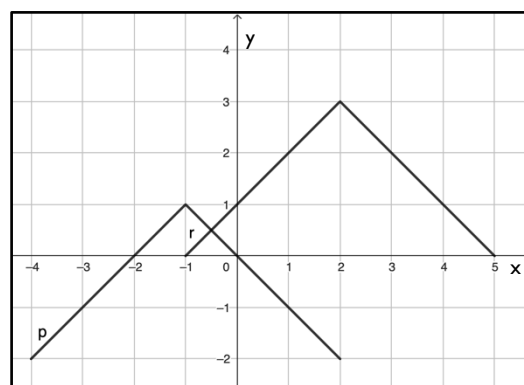


---



---

B. Explica por palavras tuas que transformações seriam necessárias para transformar o gráfico da função  $r$  no gráfico da função  $p$ .




---



---



---



---



---



---

### Parte 2

3. Utilizando a calculadora gráfica, visualiza e representa no referencial cartesiano as seguintes funções:

A.  $f(x) = x^2$ ;  $f(x) = x^2 + 2$ ;  $f(x) = x^2 + 4$

O que verificas?

---



---



---



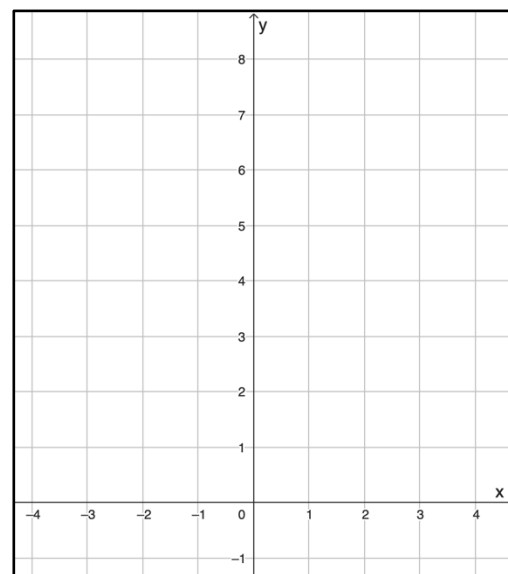
---



---



---



B.  $f(x) = x^2$ ;  $f(x) = x^2 - 1$ ;  $f(x) = x^2 - 2$

O que observas?

---



---



---



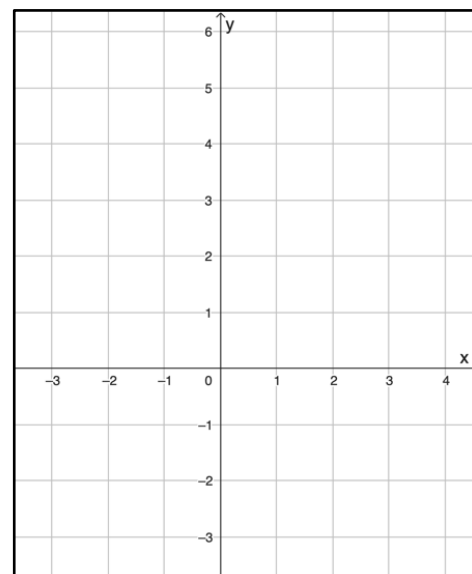
---



---



---



C. Que influência tem o parâmetro  $d$  nos gráficos da família de funções  $y = f(x) + d$ , sendo  $f$  uma função qualquer?

---



---



---



---



---

4. Utilizando a calculadora gráfica, visualiza e representa no referencial cartesiano as seguintes funções:

A.  $g(x) = x^2$ ;  $g(x) = (x + 1)^2$ ;  $g(x) = (x + 2)^2$

O que verificas?

---



---



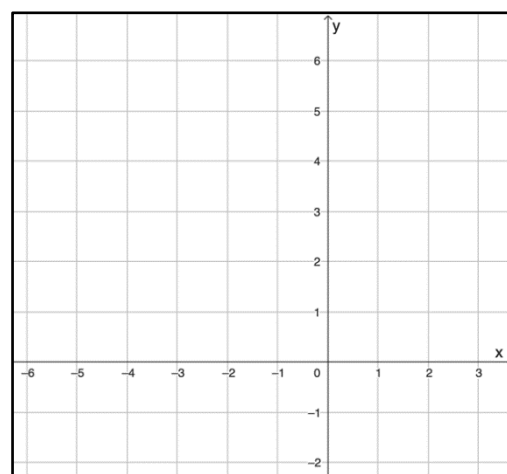
---



---



---



B.  $g(x) = x^2$ ;  $g(x) = (x - 1)^2$ ;  $g(x) = (x - 2)^2$

O que observas?

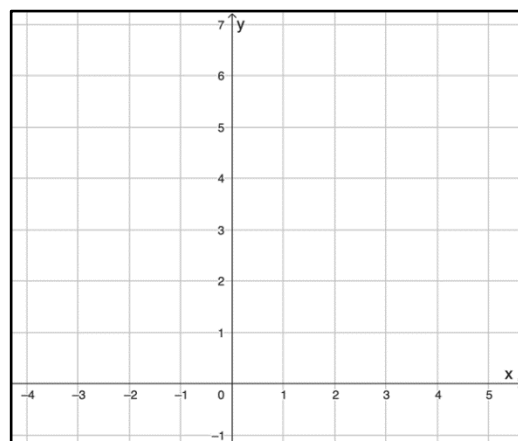
---

---

---

---

---



C. Que influência tem o parâmetro  $c$  nos gráficos da família de funções  $y = g(x + c)$ , sendo  $g$  uma função qualquer?

---

---

---

---

5. Considera a função  $j_1(x) = x^2$ , que sofreu translações ao seu gráfico, podendo no final ser definido por  $j_2(x) = j_1(x + 2) - 3$ . Sem a utilização da calculadora gráfica, explica por palavras tuas que transformações sofreu o gráfico da função  $j_1$ .

---

---

---

---

6. Considera a função  $p(x)$ , representada em 2B. Escreve uma expressão analítica de  $r(x)$  em função de  $p$ , cujo gráfico é o transformado do gráfico de  $p$ .

### Tarefa 3 – Contrações, dilatações e reflexões de gráficos de funções

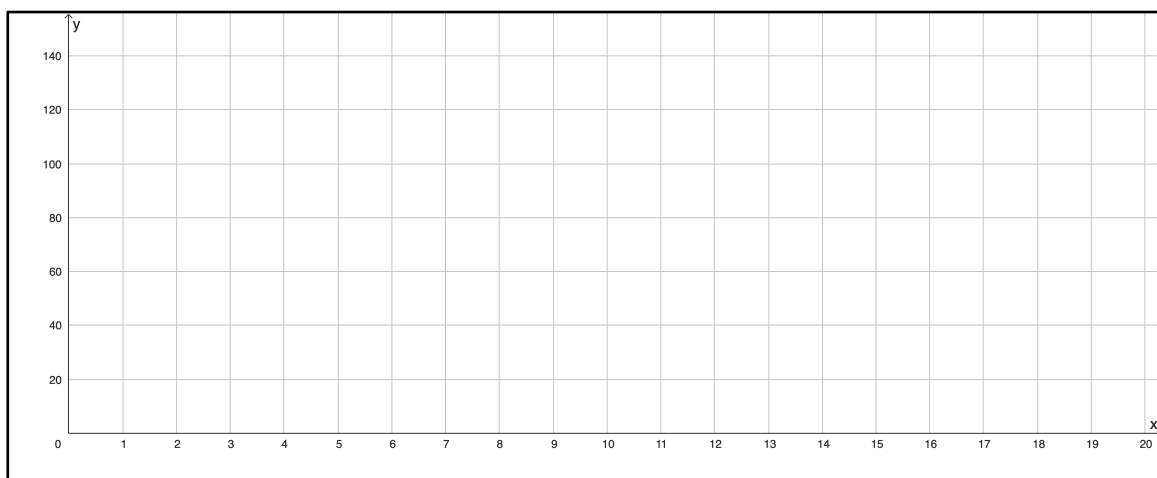
#### Objetivos da Tarefa:

- Representar graficamente situações descritas em contexto real;
- Interpretar e descrever gráficos que traduzem situações em contexto real;
- Compreender a relação dos parâmetros  $a$  e  $b$  de funções da família  $y = af(bx)$  com os gráficos das mesmas.

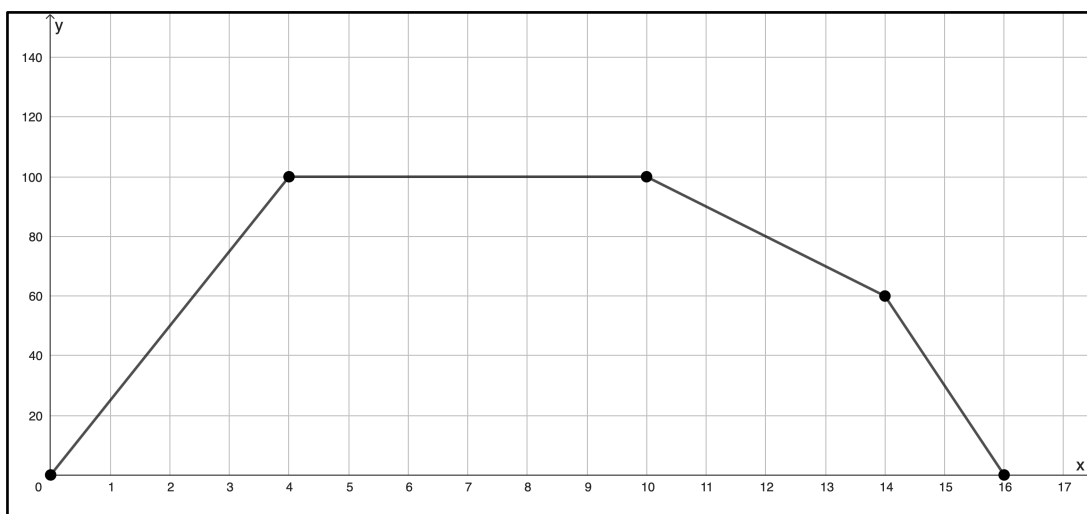
#### Parte I

A Maria precisa de ir ao supermercado, que se encontra a 100 metros de casa, comprar hortaliça para fazer sopa e voltar rapidamente para casa. Durante esse percurso, ela decidiu cronometrar o tempo que levava, começando este a contar assim que saísse de casa. Passados 4 minutos após sair, quando se encontrava a 40 metros de casa, e ter andado a uma velocidade constante, ela reparou que devia acelerar o seu passo se quisesse chegar a horas do seu programa favorito, demorando apenas mais 2 minutos a chegar ao supermercado, onde ficou durante 6 minutos. Assim que acabou as suas compras, voltou para casa ao fim de 4 minutos.

1. Esboça no referencial abaixo, a situação descrita anteriormente, que representa a distância da Maria à sua casa, em metros, em função do tempo, em minutos.



2. No gráfico abaixo está representada a função  $f$ , que traduz um percurso alternativo feito pela Maria.



A. Descreve por palavras tuas o 2º percurso efetuado pela Maria.

---



---



---



---



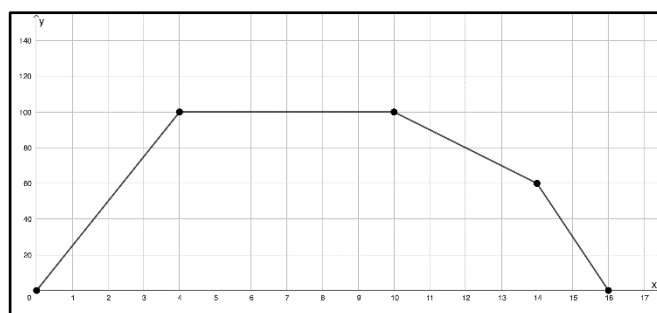
---

B. Completa as tabelas seguintes, considerando que a função  $g$  representa as situações abaixo, em que a Maria demora exatamente o mesmo tempo a chegar ao supermercado, à casa e ao local em que muda a sua velocidade e esboça-a no referencial:

i) O supermercado encontra-se ao dobro da distância inicial

|        |   |   |    |    |    |
|--------|---|---|----|----|----|
| $x$    | 0 | 4 | 10 | 14 | 16 |
| $f(x)$ |   |   |    |    |    |
| $g(x)$ |   |   |    |    |    |

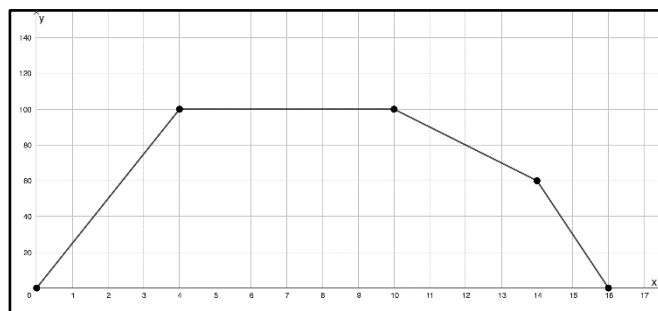
valor de  $a$ ? \_\_\_\_\_



Sabendo que  $g(x) = af(x)$ , qual é o

- ii) O supermercado encontra-se a metade da distância inicial.

|        |   |   |    |    |    |
|--------|---|---|----|----|----|
| $x$    | 0 | 4 | 10 | 14 | 16 |
| $f(x)$ |   |   |    |    |    |
| $g(x)$ |   |   |    |    |    |



Sabendo que  $g(x) = af(x)$ , qual é o valor de  $a$ ? \_\_\_\_\_

- C. Analisando os gráficos anteriores, que influência tem o parâmetro  $a$  nos gráficos da família de funções  $y = af(x)$ , para  $a > 0$ , sendo  $f$  uma função qualquer?

---



---



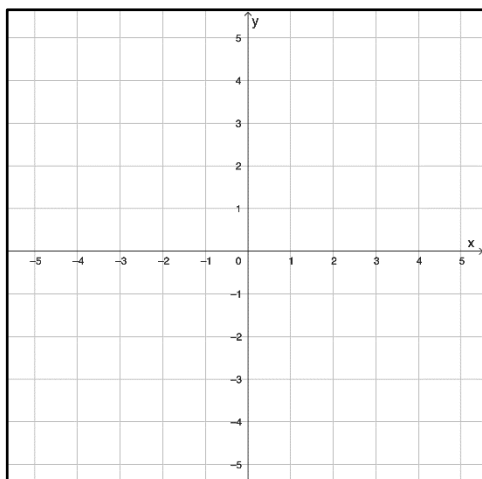
---



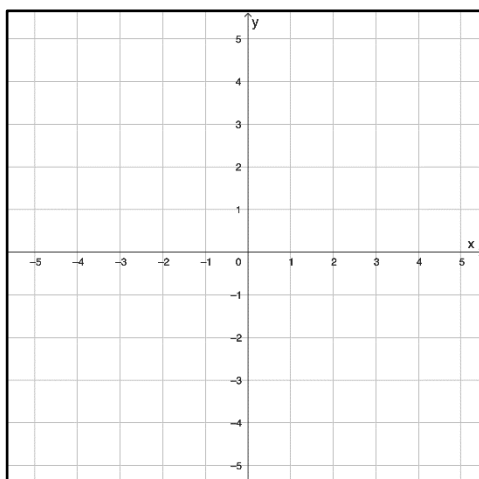
---

### Parte 2

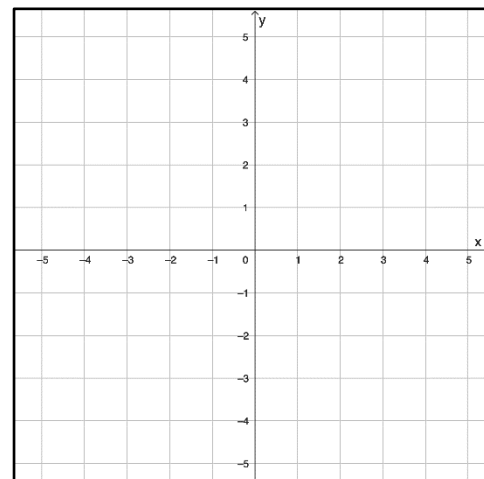
3. Utilizando a calculadora gráfica, visualiza e representa no referencial cartesiano as seguintes funções:



$$y_1 = x^2 \text{ e } y_2 = -x^2;$$



$$y_1 = 2x^2 \text{ e } y_2 = -2x^2;$$



$$y_1 = \frac{1}{2}x^2 \text{ e } y_2 = -\frac{1}{2}x^2$$

O que conclusis?

---



---



---

4. Em geral, que influência tem o parâmetro  $a$  nos gráficos da família de funções  $y = af(x)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , sendo  $f$  uma função qualquer?

---



---



---



---

5. Utilizando a calculadora gráfica, visualiza e representa no referencial cartesiano as seguintes funções:

A.  $y_1 = x^2$ ;  $y_2 = y_1\left(\frac{3}{2}x\right)$ ;  $y_3 = y_1(2x)$

○ que observas?

---



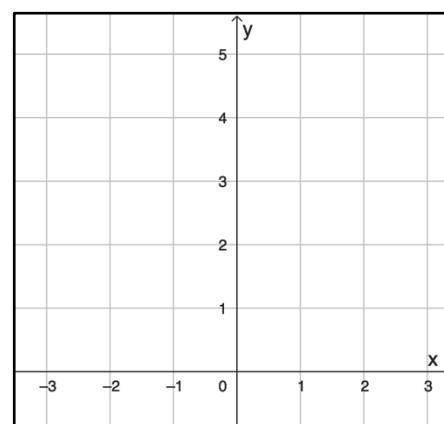
---



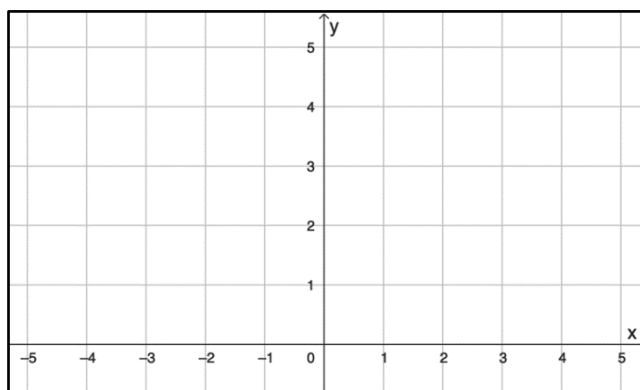
---



---



B.  $y_1 = x^2$ ;  $y_2 = y_1(0,75x)$ ;  $y_3 = y_1(0,5x)$



○ que verificas?

---



---



---



---

6. Que influência tem o parâmetro  $a$  nos gráficos da família de funções  $y = g(ax)$ , para  $a > 0$ , sendo  $g$  uma função qualquer?

---

---

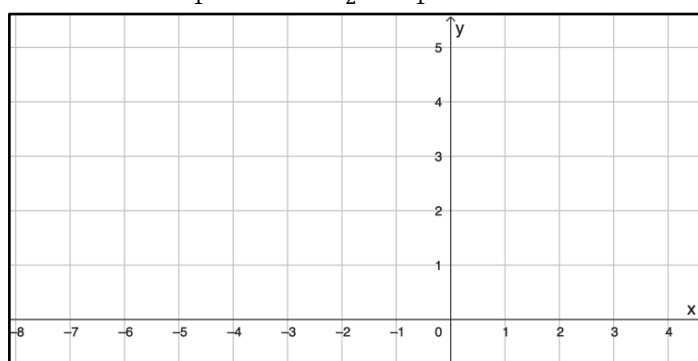
---

---

7. Considere a família de funções reais de variável real do tipo  $h(x) = (x - 2)^2$ .

Utilizando a calculadora gráfica, visualize e represente no referencial cartesiano as seguintes funções:

$$y_1 = h(x) \text{ e } y_2 = y_1(-x)$$



O que conclusis?

---

---

---

---

8. Em geral, que influência tem o parâmetro  $a$  nos gráficos da família de funções  $y = g(ax)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , sendo  $g$  uma função qualquer?

---

---

---

---

9. Considera a função  $t(x) = (x + 1)^2$  que sofreu transformações, resultando nas funções abaixo. Sem a utilização da calculadora gráfica, explica por palavras tuas que transformações sofre a função  $t$ .

a)  $s(x) = 2t(-x) - 3$

---

---

---

---

b)  $r(x) = -t(2x - 1)$

---

---

---

---

# Anexo 11 (Guião Entrevista)

## Guião Entrevista

### Perguntas gerais iniciais

1. Quanto é que tiveste no período passado?
2. Quais são os teus métodos de estudo?
3. Como é que poderias melhoras?

### Perguntas gerais finais

1. Que influência é que teve a calculadora quando estavas a fazer as tarefas?
2. Já tinhas feito alguma tarefa deste tipo? O que achaste?
3. Como foi quando abordaste estes conteúdos em sala?



