



Tiago Filipe Turras Coelho

Licenciado em Ciências de Engenharia

**ANÁLISE DA INTERACÇÃO PLÁSTICA
MOMENTO FLECTOR – ESFORÇO
TRANSVERSO EM VIGAS DE AÇO**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil

Orientador: Prof. Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves,
FCT-UNL

Presidente:	Prof. Doutor Valter José da Guia Lúcio
Arguente:	Prof. Doutor João Carlos Gomes Rocha de Almeida
Vogal:	Prof. Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves

“Copyright” Tiago Filipe Turras Coelho, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Aos meus pais, que ao longo destes anos sempre me apoiaram em todos os momentos, me incentivaram a fazer melhor e pelo esforço adicional que fizeram para me proporcionar uma formação acadêmica superior. Também a toda a minha família que depositou grande confiança no meu percurso acadêmico.

Ao professor Rodrigo Gonçalves o meu sincero agradecimento por todo o apoio que me concedeu, pela permanente disponibilidade e pelo grande interesse que demonstrou e me incutiu sobre o tema ao longo da elaboração desta Dissertação.

Por fim, a todos os meus colegas de faculdade, com os quais tive o prazer de trabalhar e de me divertir durante estes anos e de onde resultaram grandes amizades.

Resumo

O presente trabalho tem como objectivo analisar a influência da presença de esforço transversal na resistência plástica à flexão de vigas de aço.

Em primeiro lugar apresentam-se, discutem-se e comparam-se as soluções propostas por vários autores (entre as quais se encontra a abordagem actualmente preconizada no Eurocódigo 3) para o problema da flexão recta em vigas de secção rectangular e em I. Para aferir a precisão destas soluções efectuam-se comparações com resultados obtidos através de modelos de elementos finitos bidimensionais. São consideradas diversas condições de apoio e carregamento. Para além de secções transversais rectangulares (de parede fina) e em I, consideram-se também secções tubulares quadradas.

Com base no estudo efectuado é proposto um modelo para determinar a resistência à flexão sob a influência de esforço transversal a actuar nas duas direcções. Este modelo é comparado com resultados obtidos através de modelos de elementos finitos bidimensionais, para vigas com diferentes condições de apoio e secção transversal em I e tubular quadrada.

Os resultados obtidos permitem concluir que a abordagem do Eurocódigo 3 apresenta algumas lacunas, visto que, em alguns casos apresenta soluções contra a segurança, mais concretamente quando as condições de apoio são consideradas como *weak support*. Verificou-se também que é necessário contabilizar a influência do esforço transversal a actuar nos banzos no que diz respeito à redução da resistência à flexão.

Palavras chave:

Vigas de aço

Comportamento elasto-plástico

Interacção momento flector - esforço transversal

Eurocódigo 3

Abstract

Analysis of plastic interaction of bending moment - shear forces on steel beams

The purpose of the present work is to discuss the effect of shear forces on the plastic bending resistance of steel beams.

First, theoretical solutions proposed by various authors are presented, discussed and compared (among which is included the approach presently recommended by Eurocode 3) for the issue of bending under shear for rectangular and I cross-section beams. To assess the precision of these solutions, a comparison is made with the results obtained from two-dimensional finite elements. Several support and load conditions are considered. In addition to rectangular (thin wall) and I cross-sections, square hollow sections are also considered.

Based on this study, a model is suggested to determine the resistance of cross-section bending under shear on both directions. This model is compared against results obtained from two-dimensional finite elements, for beams with different support conditions with I and SHS cross-sections.

The results obtained allow to conclude that the approach given by the Eurocode 3 has some flaws, as, in some cases, leads to solutions against safety, more specifically when the conditions of support are considered as weak support. It was seen also that, it is necessary to take into account the influence of the shear forces acting on the flanges regarding the reduction of the bending resistance.

Keywords:

Steel beams

Elastic-plastic behavior

Combined bending and shear

Eurocode 3 (EN1993)

Índice de Matérias

Índice de Matérias	ix
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xv
Lista de siglas e símbolos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Enquadramento	1
1.1.1 Motivação	1
1.1.2 Abordagem do Eurocódigo 3 (CEN, 2005)	1
1.1.3 Evolução cronológica dos conhecimentos teóricos	2
1.1.4 Organização da Dissertação	3
1.2 Conceitos fundamentais	3
1.2.1 Estado plano de tensão	3
1.2.2 Critérios de cedência para estados planos de tensão	5
1.2.3 Materiais elásticos - perfeitamente plásticos	7
1.2.3.1 Flexão e corte no domínio plástico	8
1.3 Acerca do programa de elementos finitos utilizado	10
2 Estudo da Interação $M_y + V_z$	11
2.1 Secção Rectangular (parede fina)	11
2.1.1 Modelos analíticos baseados em distribuições de tensões	11
2.1.2 Modelos analíticos baseados em mecanismos	19
2.1.3 Soluções pelo Método dos Elementos Finitos	26
2.1.3.1 Discretização	26
2.1.3.2 Modelos	27
2.1.4 Análise geral dos resultados	35
2.2 Secções em I	38
2.2.1 Modelos analíticos	38

Índice de Matérias

2.2.2	Soluções pelo Método dos Elementos Finitos	45
2.2.2.1	Discretização	45
2.2.2.2	Modelos	45
2.2.3	Análise geral dos resultados	48
2.3	Secções tubulares quadradas (SHS)	51
2.3.1	Modelos analíticos	51
2.3.2	Soluções pelo Método dos Elementos Finitos	51
2.3.2.1	Discretização	51
2.3.2.2	Modelos	52
2.3.3	Análise geral dos resultados	53
3	Estudo da Interacção $M_y + V_y$	55
3.1	Secções em I	55
3.1.1	Modelos analíticos	55
3.1.2	Modelos de elementos finitos	57
3.1.2.1	Discretização	57
3.1.2.2	Modelos	57
3.2	Secções tubulares quadradas - SHS	62
3.2.1	Modelos analíticos	62
3.2.2	Modelos de elementos finitos	62
3.2.2.1	Discretização	62
3.2.2.2	Modelos	62
4	Conclusões e desenvolvimentos futuros	67
4.1	Conclusões	67
4.2	Desenvolvimentos futuros	69
	Bibliografia	71

Índice de Figuras

1.1	Corpo sujeito a um estado plano de tensão (Branco, 1998)	4
1.2	Circunferência de Mohr para determinação de tensões e direcções principais num estado plano de tensão (Branco, 1998)	5
1.3	Superfícies de cedência de von Mises (Branco, 1998)	6
1.4	Comparação entre critérios de Tresca e von Mises (Beer e Johnston, 1985)	7
1.5	Critério de von Mises e Tresca comparados com resultados experimentais (Chakrabarty, 2006)	7
1.6	Lei uniaxial do tipo elástico-perfeitamente plástico	8
1.7	Distribuição de tensões normais numa secção rectangular sob flexão pura em regime a) elástico, b) elasto-plástico e c) plástico	9
1.8	Distribuição a) elástica e b) plástica de tensões de corte numa secção rectangular	10
2.1	Viga em consola com carga na extremidade livre (Drucker, 1956)	12
2.2	Secção rectangular: distribuição de tensões na secção transversal (Drucker, 1956)	13
2.3	Viga em consola com carga na extremidade livre (Horne, 1979)	14
2.4	Distribuição de tensões na secção transversal para $V_z \leq (2/3)V_{pl}$ (Horne, 1979)	15
2.5	Distribuição de tensões na secção transversal para $V_z > (2/3)V_{pl}$ (Horne, 1979)	16
2.6	Modelo A de distribuição de tensões (Hirt et al., 2006)	17
2.7	Modelo B de distribuição de tensões (Hirt et al., 2006)	18
2.8	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ para os modelos analíticos de distribuição de tensões	19
2.9	Modos rotura para viga em consola com carga na extremidade livre para a) $0.63 < L/h \leq 5.65$; b) $L/h > 5.65$ (Green, 1954a)	19
2.10	Modo rotura para $L/h \leq 0.63$ (Johnson et al., 1974)	20
2.11	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ para os modelos combinados de Green e Johnson et al.	21
2.12	Modo de rotura para consolas (Drucker, 1956)	21
2.13	Modo rotura para viga simplesmente apoiada com carga aplicada a meio-vão (Drucker, 1956)	22
2.14	Modo rotura para viga em consola (Lubliner, 1990)	23
2.15	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ para os modelos baseados em mecanismos	24

Índice de Figuras

2.16	Comparação LI/LS, para vigas em consola com secção rectangular	24
2.17	Modo de rotura para viga em consola com apoio “fraco” (Green, 1954b)	25
2.18	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ para as soluções de Green (1954a,b)	26
2.19	a) Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} do refinamento da malha; b) refinamento da malha adoptado	27
2.20	Secção rectangular genérica	27
2.21	Modelo, <i>Mod1 R</i>	28
2.22	Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , <i>ModR 1</i>	28
2.23	Distribuição de tensões no modelo <i>Mod1 R</i>	29
2.24	Modelo, <i>Mod2 R</i>	29
2.25	Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , <i>Mod2 R</i>	30
2.26	Modelo, <i>Mod3 R</i>	30
2.27	Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , <i>Mod3 R</i>	31
2.28	Modelo, <i>Mod4 R</i>	31
2.29	Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , <i>Mod4 R</i>	32
2.30	Modelo, <i>Mod5 R</i>	33
2.31	Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , <i>Mod5 R</i>	33
2.32	Distribuição de tensões no elemento, <i>Mod5 R</i>	34
2.33	Modelo, <i>Mod6 R</i>	34
2.34	Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , <i>Mod6 R</i>	35
2.35	Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , soluções de Green (1954a,b) VS resultados de modelos de elementos finitos	36
2.36	Distribuição de tensões na secção $x = 0$, <i>Mod1 R</i>	37
2.37	Distribuição de tensões na secção $x = 0$, <i>Mod5 R</i>	37
2.38	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$, solução de Drucker (1956)	39
2.39	Distribuição de tensões numa secção transversal em I (Horne, 1979)	40
2.40	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$, solução de Horne (1979)	41
2.41	Distribuição de tensões numa secção transversal em I Modelo A (Hirt et al., 2006)	41
2.42	Distribuição de tensões numa secção transversal em I Modelo B (Hirt et al., 2006)	42
2.43	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ para a) Modelo A e b) Modelo B, soluções de Hirt et al. (2006)	43
2.44	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$, soluções de Green (1954b)	44
2.45	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$, Eurocódigo 3	44
2.46	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ dos vários modelos analíticos para secções em I com a) $\beta = 0.76$ e b) $\beta = 0.87$	45
2.47	Secção I genérica	46
2.48	Modelo, <i>Mod1 I</i>	46
2.49	Modelo, <i>Mod2 I</i>	47
2.50	Modelo, <i>Mod3 I</i>	48
2.51	Distribuição de tensões no elemento, <i>Mod1 I</i>	48
2.52	Distribuição de tensões no elemento, <i>Mod2 I</i>	49
2.53	Distribuição de tensões no elemento, <i>Mod3 I</i>	50
2.54	Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} para os modelos analisados na secção 2.2.2	50
2.55	Comparação entre soluções analíticas de Green (1954a,b) e resultados numéricos para as secções a) I1 e b) I2	50
2.56	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ dos vários modelos analíticos adaptados a secções SHS com $\beta = 0.70$	51
2.57	Secção genérica SHS	52

2.58	Modelo, <i>Mod1 SHS</i>	52
2.59	Modelo, <i>Mod2 SHS</i>	53
2.60	Distribuição de tensões no modelo, <i>Mod2 SHS</i>	54
2.61	Comparação entre a solução analítica de Green e resultados numéricos para a secção SHS	54
3.1	Adaptação do Modelo A de distribuição de tensões de Hirt et al. (2006) para a interação de esforços $M_y + V_z + V_y$	55
3.2	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ com influência de V_y para uma secção com $\beta = 0.76$, Modelo A de Hirt et al. (2006)	56
3.3	Modelo, <i>Mod1V_y I</i>	57
3.4	Relação entre $V_z/V_{pl,z}$ e M_y/M_{pl} para resultados do <i>Mod1V_y I</i> com a secção I1	58
3.5	Comparação entre modelo analítico e resultados numéricos, <i>Mod1V_y I</i>	58
3.6	Modelo, <i>Mod2V_y I</i>	59
3.7	Modelo, <i>Mod2V_z I</i>	60
3.8	Comparação entre o EC3 e resultados numéricos, <i>Mod2V_y I</i>	61
3.9	Comparação entre o EC3 e resultados numéricos, <i>Mod2V_z I</i>	61
3.10	Comparação entre critérios de verificação à flexão desviada para secção I1, EC3 VS Baptista (2011)	61
3.11	Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ com influência de V_y para uma secção com $\beta = 0.70$, Modelo A de Hirt et al. (2006)	62
3.12	Modelo, <i>Mod1V_y SHS</i>	63
3.13	Relação entre $V_z/V_{pl,z}$ e M_y/M_{pl} para resultados do <i>Mod1V_y SHS</i> com a secção SHS	64
3.14	Comparação entre modelo analítico e resultados numéricos, <i>Mod1V_y SHS</i>	64
3.15	Modelo, <i>Mod2V_y SHS</i>	65
3.16	Relação entre $V_z/V_{pl,z}$ e M_y/M_{pl} para resultados do <i>Mod2V_y SHS</i> com a secção SHS	65
3.17	Comparação entre modelo analítico e resultados numéricos, <i>Mod2V_y SHS</i>	65

Índice de Tabelas

2.1	Características das secções em I e H analisadas	46
2.2	Características da secção SHS	52
3.1	Características da secção I1	57
3.2	Características da secção SHS	63

Lista de siglas e símbolos

Siglas

LM Linha Média

LI Limite Inferior

LS Limite Superior

SHS Square Hollow Section

UNL Universidade Nova de Lisboa

Letras gregas

β coeficiente que relaciona $M_{pl,f}$ e M_{pl}

γ_{M0} coeficiente parcial de segurança

ε extensão

η factor de redução de $M_{pl,w}$ na presença de esforço transversal

ν coeficiente de Poisson

ρ coeficiente de redução para determinar os valores de cálculo do momento flector resistente, tendo em conta a interacção com o esforço transversal

σ tensão normal

τ tensão de corte

τ_y tensão de cedência ao corte puro

Letras latinas

A_f área de um banzo

A_v área de corte

A_w área da alma

b_f largura do banzo

E módulo de elasticidade

Lista de siglas e símbolos

- f_y tensão de cedência uniaxial
- f_{yr} tensão de cedência reduzida
- h altura da secção
- h_m dimensão de um lado de um elemento da malha de elementos finitos
- h_w altura da alma
- I momento de inércia
- L comprimento do elemento
- L_{ap} comprimento da zona apoiada
- L_i comprimento do troço i
- M_{ced} momento flector que leva as fibras extremas à cedência
- M_{pl} momento flector plástico
- $M_{pl,V}$ momento flector plástico reduzido na presença de esforço transversal
- M_{Ed} valor de cálculo do momento flector actuante
- $M_{pl,V,Rd}$ valor de cálculo do momento flector plástico reduzido na presença de esforço transversal
- $M_{pl,f}$ momento flector plástico dos banzos
- $M_{pl,w}$ momento flector plástico da alma
- $M_{pl,f,V}$ momento flector plástico dos banzos reduzido na presença de esforço transversal
- $M_{pl,w,V}$ momento flector plástico da alma reduzido na presença de esforço transversal
- M_y momento flector actuante segundo o eixo y
- M_z momento flector actuante segundo o eixo z
- p carga distribuída
- W_{el} módulo de flexão elástico
- $W_{pl,i}$ módulo de flexão plástico em torno do eixo i
- S momento estático
- t espessura da secção transversal
- t_w espessura da alma
- t_f espessura do banzo
- V_{ced} esforço transversal que leva a fibra central à cedência
- $V_{pl,i}$ esforço transversal plástico segundo o eixo i

$V_{pl,Rd}$ valor de cálculo do esforço transversal plástico resistente

V_y esforço transversal actuante segundo o eixo y

V_z esforço transversal actuante segundo o eixo z

Capítulo 1

Introdução

1.1 Enquadramento

1.1.1 Motivação

O presente estudo tem por objectivo efectuar uma análise crítica relativamente à abordagem da norma CEN (2005) (Eurocódigo 3, Parte 1.1, doravante designado por EC3) no que diz respeito à verificação da resistência da secção quando sujeita a esforços de flexão e de corte combinados. No EC3 é referido que se deve ter em conta a influência da interacção entre estes dois esforços na determinação da resistência à flexão da secção transversal. Essa influência consiste na redução do momento flector plástico resistente, através da redução da tensão de cedência que depende do esforço transversal actuante (V_{Ed}) e do esforço transversal plástico resistente ($V_{pl,Rd}$). Segundo o Eurocódigo 3 essa redução deve ser apenas considerada se o esforço transversal actuante for superior a 50% do esforço transversal plástico resistente. No entanto, a origem desta metodologia não é amplamente conhecida. Assim, um dos objectivos da presente Dissertação é contribuir para a divulgação dos estudos que estiveram na sua base. Por outro lado, o EC3 não refere explicitamente qual é o procedimento a seguir para calcular a resistência da secção no caso de existir esforço transversal em ambas as direcções. Por isso, será abordada nesta Dissertação a análise da resistência à flexão de secções transversais na presença de esforços de corte nas duas direcções ortogonais.

1.1.2 Abordagem do Eurocódigo 3 (CEN, 2005)

A interacção entre momento flector e esforço transversal é abordada na secção 6.2.8 do EC3. É referido o seguinte:

- Na presença de esforço transversal, os seus efeitos devem ser tidos em conta na determinação do momento flector resistente.
- Quando o esforço transversal actuante (V_{Ed}) for inferior a metade do esforço transversal plástico resistente ($V_{pl,Rd}$), pode-se desprezar o seu efeito sobre o momento flector resistente, excepto se a resistência da secção for reduzida pela encurvadura por esforço transversal (problemática não abordada na presente Dissertação).
- No caso em que $V_{Ed} > 0.5V_{pl,Rd}$, o momento flector resistente deverá ser reduzido. A redução da resistência pode ser obtida considerando uma tensão de cedência reduzida (f_{yr})

na área resistente ao esforço transversal, definida por

$$f_{yr} = (1 - \rho) f_y, \quad (1.1)$$

onde $\rho = \left(\frac{2V_{Ed}}{V_{pl,Rd}} - 1 \right)^2$ para $V_{Ed} > 0.5V_{pl,Rd}$ e $\rho = 0$ quando $V_{Ed} < 0.5V_{pl,Rd}$.

- No caso de secções transversais em I com banzos iguais, cuja flexão se dê em torno do eixo de maior inércia, o valor de cálculo do momento flector plástico resistente reduzido poderá ser calculado da seguinte forma

$$M_{pl,V,Rd} = \left(W_{pl,y} - \frac{\rho A_w^2}{4t_w} \right) f_y / \gamma_{M0}, \quad (1.2)$$

onde A_w e t_w são, respectivamente, a área e a espessura da alma, $W_{pl,y}$ o módulo de flexão plástico da secção e γ_{M0} o coeficiente parcial de segurança.

1.1.3 Evolução cronológica dos conhecimentos teóricos

Alguns dos primeiros estudos relativos a vigas em consola sujeitas a momento flector e esforço transversal, resultantes de uma carga pontual na extremidade livre, são devidos a Green (1954a). Este autor propôs uma solução cinematicamente admissível através da definição de dois mecanismos de colapso, cada um para diferentes rácios vão/altura da secção (L/h). Green apresentou também um mecanismo de colapso para o mesmo tipo de viga mas com um apoio “fraco” (*weak support*)¹. Para cada um dos dois problemas apresentados, Green apresentou expressões aproximadas, que traduzem a interação entre o momento flector, o esforço transversal e os respectivos esforços resistentes. No entanto, as soluções obtidas não são válidas para vigas muito “curtas” ($L/h < 0.63$). O autor propôs também que a solução da secção rectangular fosse aplicada à alma de uma secção em I, determinando assim a redução de resistência da respectiva secção.

Mais tarde Drucker (1956), propôs uma solução cinematicamente admissível com um mecanismo de rotura mais simples, para uma viga carregada a meio-vão com uma força concentrada, com objectivo de simplificar a análise do problema da viga em consola. Neste caso a solução obtida abrange todos os valores de L/h . No mesmo documento são apresentadas várias soluções estaticamente admissíveis, para uma viga em consola carregada na extremidade, dependentes da relação L/h . Estas soluções são obtidas cumprindo as equações de equilíbrio para estados planos de tensão e também o critério de cedência de Tresca. De facto, ao contrário de Green, Drucker utiliza o critério de cedência de Tresca ao invés do critério de von Mises, quer na obtenção das soluções estaticamente admissíveis quer das soluções cinematicamente admissíveis. Deste trabalho salienta-se uma frase: “*Em problemas onde a influência do esforço transversal é significativa, uma curva de interacção M-V para secções rectangulares e em I, em regime plástico, seria bastante desejável. Tal curva não existe para nenhum tipo de secção, visto que a solução depende da geometria e do carregamento de todo o elemento e não apenas das propriedades da secção*” (Drucker, 1956).

Com base no estudo desenvolvido por Green, utilizando os mesmos mecanismos de rotura, Johnson et al. (1974) completaram a solução adicionando um terceiro mecanismo de rotura. Com este trabalho os autores definiram três soluções de interacção de esforços, que em conjunto fornecem uma solução para qualquer valor de L/h .

¹Condição de apoio que consiste em impedir os deslocamentos apenas na face inferior de uma viga

Horne (1979) apresentou uma distribuição de tensões para uma secção rectangular, com comportamento elástico no núcleo central e comportamento plástico nas fibras mais afastadas da linha neutra. O autor refere também que a redução da resistência da secção rectangular pode ser utilizada de modo análogo na alma de uma secção em I, de forma a determinar a redução da resistência do momento plástico. Embora seja uma distribuição mais simples do que a proposta por Drucker, não é estaticamente admissível, visto que não cumpre as equações de equilíbrio.

1.1.4 Organização da Dissertação

O presente documento encontra-se dividido em quatro capítulos.

Neste primeiro capítulo (i) apresenta-se a motivação do estudo, (ii) introduz-se a abordagem por parte do EC3, (iii) resumem-se as principais abordagens teóricas, por ordem cronológica, e (iv) abordam-se alguns conceitos fundamentais para os capítulos seguintes.

No segundo capítulo é abordada a interação entre o momento flector e o esforço transversal. São apresentadas, detalhadamente, várias soluções de diferentes autores para secções transversais rectangulares e em I. Para cada uma das secções são utilizados modelos de elementos finitos de modo a comparar os resultados daí obtidos com as soluções analíticas.

O terceiro capítulo é dedicado à interação entre o momento flector e o esforço transversal nas duas direcções. É proposto um modelo analítico que resulta de uma adaptação de uma solução existente. Para testar esse modelo para secções em I e SHS são utilizados modelos de elementos finitos.

No quarto e último capítulo são apresentadas as conclusões finais e propostos desenvolvimentos futuros.

1.2 Conceitos fundamentais

1.2.1 Estado plano de tensão

Em elementos em que uma dimensão do corpo é muito menor do que as restantes, tais como chapas, placas ou outros elementos de espessura reduzida, costuma-se considerar que as tensões são nulas em facetas cuja normal é perpendicular ao folheto médio do elemento. Estes estados de tensão são designados por estados planos de tensão. Na Figura 1.1 encontra-se representado um corpo de espessura reduzida onde se considera que as tensões σ_{yy} , τ_{xy} e τ_{yz} são nulas e o estado de tensão é então definido por σ_{xx} , σ_{zz} e τ_{xz} .

Neste caso, as tensões normais e tangenciais que actuam na faceta a tracejado na Figura 1.1, com normal ON, são dadas por

$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha \quad (1.3)$$

$$\tau = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xz} \cos 2\alpha \quad (1.4)$$

e a tensão resultante é dada por

$$R = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.5)$$

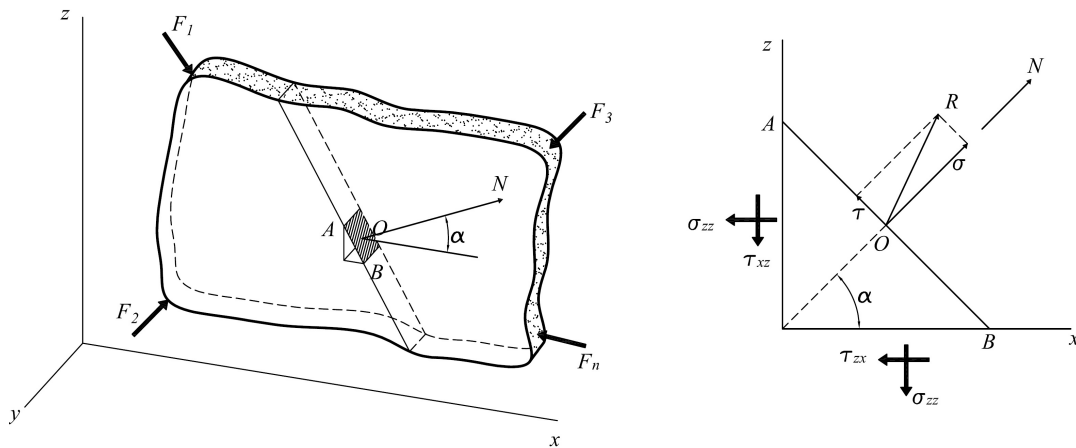


Figura 1.1: Corpo sujeito a um estado plano de tensão (Branco, 1998)

As tensões e direcções principais podem ser determinadas através da circunferência de Mohr. A partir da Figura 1.2c, obtêm-se as seguintes equações

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} + \left[\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 \right]^{1/2} = \sigma_{max}, \quad (1.6)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} - \left[\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 \right]^{1/2} = \sigma_{min} \quad (1.7)$$

onde σ_1 e σ_2 , representam as tensões principais máxima e mínima, respectivamente, no plano xz . As direcções principais são as soluções da equação

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}. \quad (1.8)$$

A tensão tangencial máxima no plano xz é dada por

$$\tau_{max} = \left[\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 \right]^{1/2}. \quad (1.9)$$

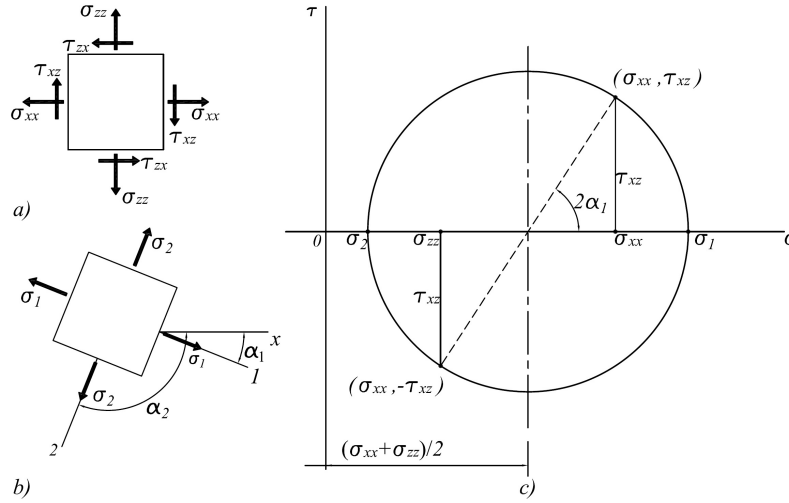


Figura 1.2: Circunferência de Mohr para determinação de tensões e direcções principais num estado plano de tensão (Branco, 1998)

1.2.2 Critérios de cedência para estados planos de tensão

Para metais é frequente utilizar o critério de von Mises. Tal como o critério de Tresca, este critério é baseado na observação experimental de que a pressão hidrostática, responsável pela variação de volume num sólido, não provoca a cedência (Branco, 1998). No entanto, este critério difere do de Tresca por ser baseado na energia de distorção. A expressão que define a tensão efectiva num material sujeito a um dado estado plano de tensão é

$$\sigma_{efe}^2 = (\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}^2 + 3\tau_{xz}^2), \quad (1.10)$$

Se a tensão efectiva num ponto for igual à tensão de cedência uniaxial (f_y), então a cedência foi atingida nesse ponto.

Em casos particulares de tensão, tais como os resultantes de flexão pura e de corte puro, a equação (1.10) pode ser simplificada. No caso da flexão pura tem-se $\tau_{xz} = 0$, $\sigma_{zz} = 0$ e $\sigma_{xx} \neq 0$, o que, substituindo na equação (1.10), resulta em

$$\sigma_{efe} = \sigma_{xx}. \quad (1.11)$$

Para um estado de tensão de corte puro $\tau_{xz} \neq 0$, $\sigma_{zz} = 0$ e $\sigma_{xx} = 0$, logo

$$\sigma_{efe}^2 = 3\tau_{xz}^2, \quad (1.12)$$

o que permite concluir que a tensão de cedência ao corte puro, τ_y , é igual a $f_y/\sqrt{3}$.

Na Figura 1.3 estão representadas várias superfícies de cedência para o critério de von Mises, definidas pela equação (1.10), para vários valores de τ_{xz}/τ_y .

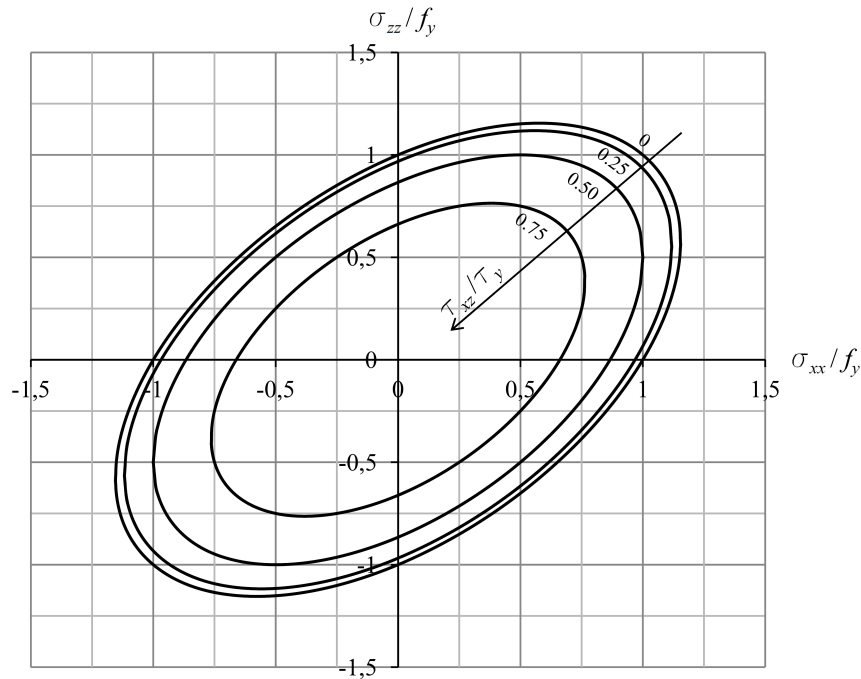


Figura 1.3: Superfícies de cedência de von Mises (Branco, 1998)

Outro critério de cedência utilizado para metais é o critério de Tresca, que estabelece que a cedência se verifica quando a tensão de corte máxima atinge o valor da tensão de cedência ao corte. O valor de τ_y é igual a metade da tensão normal de cedência ($\tau_y = f_y/2$). A expressão que define o critério de Tresca para um estado plano de tensão é

$$\sigma_{efe}^2 = (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\tau_{xz}^2, \quad \sigma_{xx}\sigma_{zz} \leq \tau_{xz}^2. \quad (1.13)$$

Na Figura 1.4 estão representados os critérios de von Mises e Tresca. Pode-se observar o hexágono de Tresca se encontra dentro da elipse definida pelo critério de von Mises. Estes dois critérios apresentam o mesmo resultados em vários pontos, mas o critério de Tresca é, em geral, mais conservativo, ou seja, considera a plastificação para estados de tensão mais baixos.

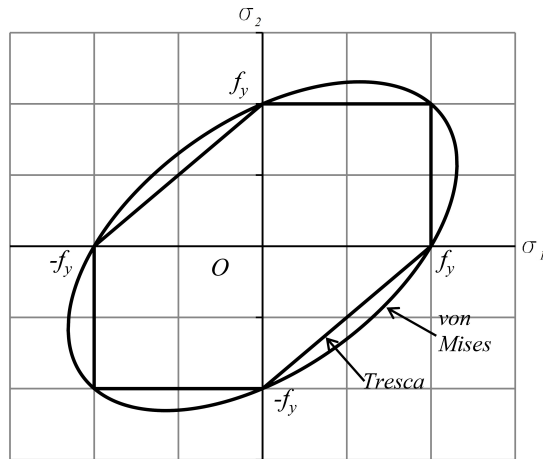


Figura 1.4: Comparação entre critérios de Tresca e von Mises (Beer e Johnston, 1985)

Resultados experimentais (Figura 1.5) mostram que para a maioria dos metais, o critério de von Mises é mais preciso do que o de Tresca (Chakrabarty, 2006).

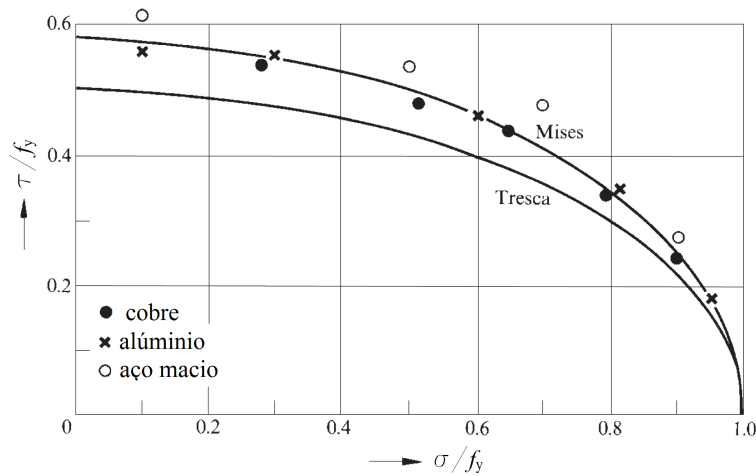


Figura 1.5: Critério de von Mises e Tresca comparados com resultados experimentais (Chakrabarty, 2006)

1.2.3 Materiais elásticos - perfeitamente plásticos

A teoria da plasticidade estuda o comportamento mecânico dos materiais quando estes estão sujeitos a deformações inelásticas. A deformação plástica é um processo irreversível ao contrário da deformação elástica. Neste trabalho consideram-se apenas materiais com uma lei do tipo elástico - perfeitamente plástico, conforme mostra a Figura 1.6. O material segue a lei de Hooke até atingir a tensão de cedência uniaxial f_y , a partir da qual se deforma em regime plástico, sem aumento de tensão.

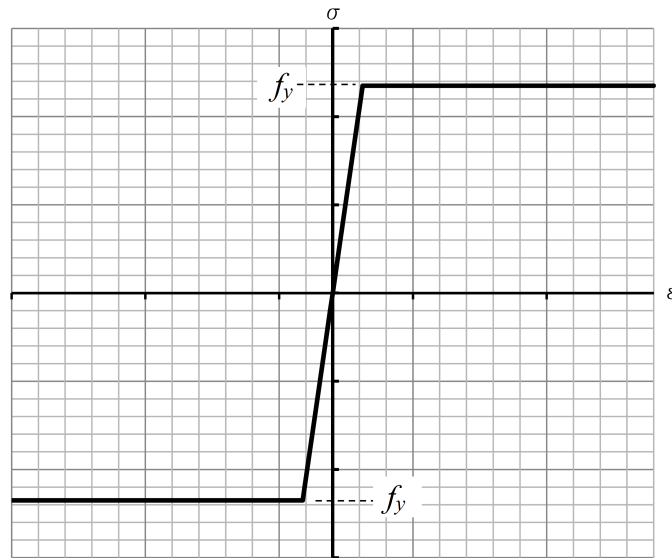


Figura 1.6: Lei uniaxial do tipo elástico-perfeitamente plástico

Para todos os modelos de elementos finitos, analisados nos Capítulos 2 e 3, foi utilizado um aço com comportamento elástico - perfeitamente plástico, com uma tensão de cedência de 235 MPa, um módulo de elasticidade (E) igual a 210 GPa e um coeficiente de Poisson (ν) igual a 0.3.

Para um material elástico - perfeitamente plástico os teoremas estático e cinemático da análise limite permitem obter aproximações dessa carga de colapso (Chakrabarty, 2010):

- Teorema estático – Se para uma determinada carga aplicada for possível definir uma distribuição de tensões estaticamente admissível, então essa carga é inferior, ou no máximo igual à carga de colapso. Uma distribuição de tensões é considerada estaticamente admissível se satisfizer as equações de equilíbrio (no domínio e na fronteira) e respeitar a condição de cedência. Este teorema estabelece um limite inferior da carga de colapso.
- Teorema cinemático – Se para uma dada carga for possível definir um mecanismo cinematicamente admissível, i.e., que respeite a condição de incompressibilidade plástica e seja cinematicamente admissível (no domínio e na fronteira), então essa carga é igual ou superior à carga de colapso. Esta condição estabelece um limite superior da carga de colapso.

1.2.3.1 Flexão e corte no domínio plástico

Numa secção rectangular, de altura h e largura t , sujeita à flexão pura, o valor do momento flector para o qual a tensão máxima nas fibras extremas atinge a tensão de cedência (Figura 1.7a) é dado pela equação

$$M_{ced} = W_{el} f_y = \frac{h^2 t}{6} f_y, \quad (1.14)$$

onde W_{el} representa o módulo de flexão elástico. Quando o momento flector é aumentado para além de M_{ced} começam a formar-se zonas plásticas desde as extremidades até ao eixo

central (Figura 1.7b) até se atingir a plastificação de todas as fibras da secção (Figura 1.7c), correspondendo ao momento plástico

$$M_{pl} = W_{pl} f_y = \frac{h^2 t}{4} f_y, \quad (1.15)$$

sendo W_{pl} o módulo de flexão plástico.

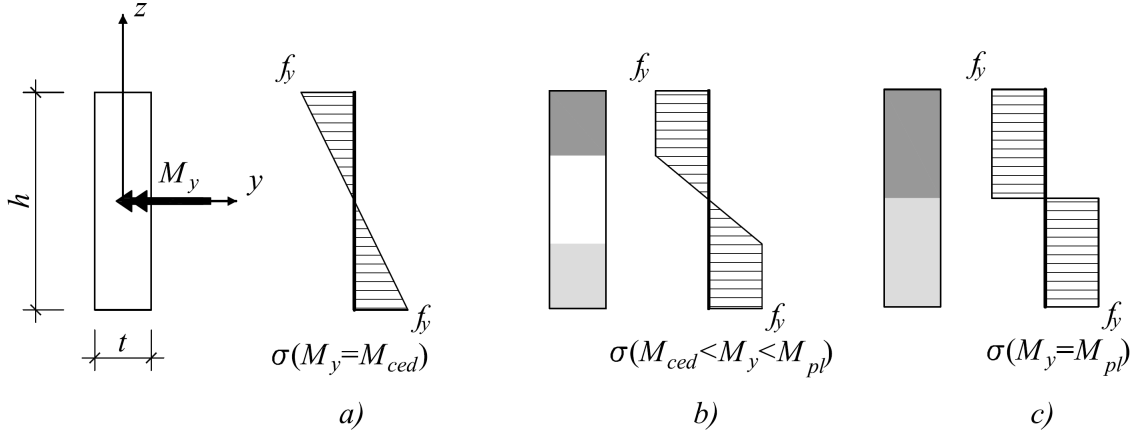


Figura 1.7: Distribuição de tensões normais numa secção rectangular sob flexão pura em regime a) elástico, b) elasto-plástico e c) plástico

No que respeita a secções transversais sujeitas a um esforço transverso V_z , em regime elástico (Figura 1.8a), a distribuição de tensões tangenciais é definida por

$$\tau_{xz} = \frac{V_z S_y}{I_y t}, \quad (1.16)$$

onde S_y é o momento estático em relação a y e I_y é o momento de inércia relação a y . Simplificando a expressão anterior e considerando A_v a área de corte, obtém-se

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{A_v} \left(1 - \frac{z^2}{(h/2)^2} \right), \quad (1.17)$$

sendo o valor máximo

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{A_v}. \quad (1.18)$$

O valor de V_z que iguala a máxima tensão de corte à tensão de cedência ao corte puro (τ_y), V_{ced} , é igual a

$$V_{ced} = \frac{2}{3} A_v \tau_y. \quad (1.19)$$

Considerando agora uma distribuição plástica uniforme das tensões de corte ao longo da secção (Figura 1.8b), o valor do esforço transversal que tem a capacidade de levar a tensão de corte de todas as fibras até τ_y é definido por

$$V_{pl} = A_v \tau_y. \quad (1.20)$$

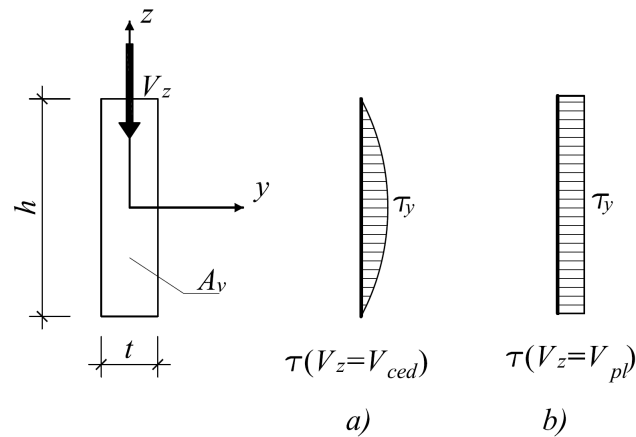


Figura 1.8: Distribuição a) elástica e b) plástica de tensões de corte numa secção rectangular

1.3 Acerca do programa de elementos finitos utilizado

Os resultados numéricos foram obtidos através o método dos elementos finitos, sendo para tal utilizado o software de cálculo automático ADINA 8.7 (Bathe, 2010). Todos os modelos são definidos por elementos de casca de 9 nós (quadrangulares ou triangulares).

Capítulo 2

Estudo da Interação $M_y + V_z$

Neste capítulo é analisada a influência da interação do esforço transversal V_z com o momento flector M_y (flexão simples). Em primeiro lugar será analisado o caso de secções transversais rectangulares de parede fina, que servirá como base para as análises posteriores. Para a secção rectangular são apresentadas várias soluções analíticas de diferentes autores. Algumas soluções representam limites superiores ou inferiores da carga de colapso e outras não podem ser consideradas como limites da mesma. Serão também apresentadas soluções analíticas adaptadas a secções em I e secções tubulares quadradas (SHS). Estas soluções analíticas irão ser comparadas com resultados numéricos, obtidos através do programa de cálculo automático de elementos finitos ADINA 8.7. O mesmo procedimento será feito para secções em I e SHS.

2.1 Secção Rectangular (parede fina)

2.1.1 Modelos analíticos baseados em distribuições de tensões

Drucker (1956)

Drucker apresentou uma solução para um elemento em consola, de comprimento L , com secção rectangular, de dimensões $h \times t$, sujeita a uma carga concentrada (V_z) (Figura 2.1). Esta solução consiste numa distribuição de tensões na secção transversal, estaticamente admissível e, logo, correspondente a um limite inferior (LI) da carga de colapso, adoptando o critério de Tresca. As equações de equilíbrio são definidas por

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

e, o critério de Tresca fornece

$$\sigma_{xx}^2 + 4\tau_{xz}^2 = \sigma_{efe}^2 \leq f_y^2. \quad (2.3)$$

Se, como é habitual considerar, na equação (2.2) as tensões normais transversais, σ_{zz} , forem tidas como nulas (hipótese de Navier), o termo τ_{xz} é constante ao longo de x . É igualmente conhecido o valor de σ_{xx} quando $x = 0$ ($\sigma_{xx}(0) = 0$). Integrando a equação (2.1) tem-se

$$\sigma_{xx} = -x \frac{d\tau_{xz}}{dz}. \quad (2.4)$$

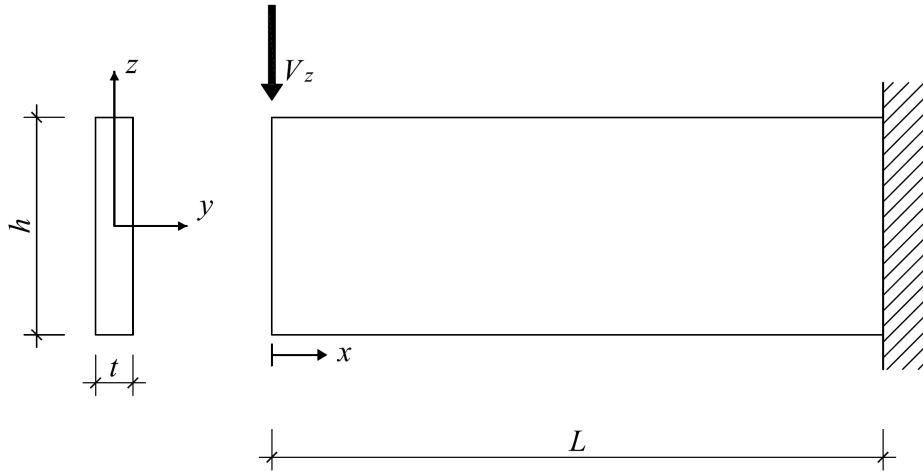


Figura 2.1: Viga em consola com carga na extremidade livre (Drucker, 1956)

Se o critério de cedência for aplicado na zona de encastramento, substituindo (2.4) em (2.3) quando $x = L$, resulta na equação diferencial

$$\left(-L \frac{d\tau_{xz}}{dz}\right)^2 + 4\tau_{xz}^2 = f_y^2, \quad (2.5)$$

cuja solução, para z positivo, é dada por

$$\frac{2\tau_{xz}}{f_y} = \sin \left[\frac{h}{L} \left(1 - \frac{2z}{h} \right) \right] \quad (2.6)$$

e, substituindo τ_{xz} na equação (2.4),

$$\frac{\sigma_{xx}}{f_y} = \cos \left[\frac{h}{L} \left(1 - \frac{2z}{h} \right) \right]. \quad (2.7)$$

As duas ultimas equações são válidas para $h/L \leq \pi/2$ (Figuras 2.2a e 2.2b). Para valores superiores de h/L as tensões apresentam uma distribuição de acordo com a Figura 2.2c, onde numa zona central de altura $2d$, em que as tensões normais são nulas, as tensões de corte são constantes com o valor de $f_y/2$. Na Figura 2.2a, σ_1 e τ_1 assumem valores dependentes dos respectivos esforços e cumprindo a equação (2.3).

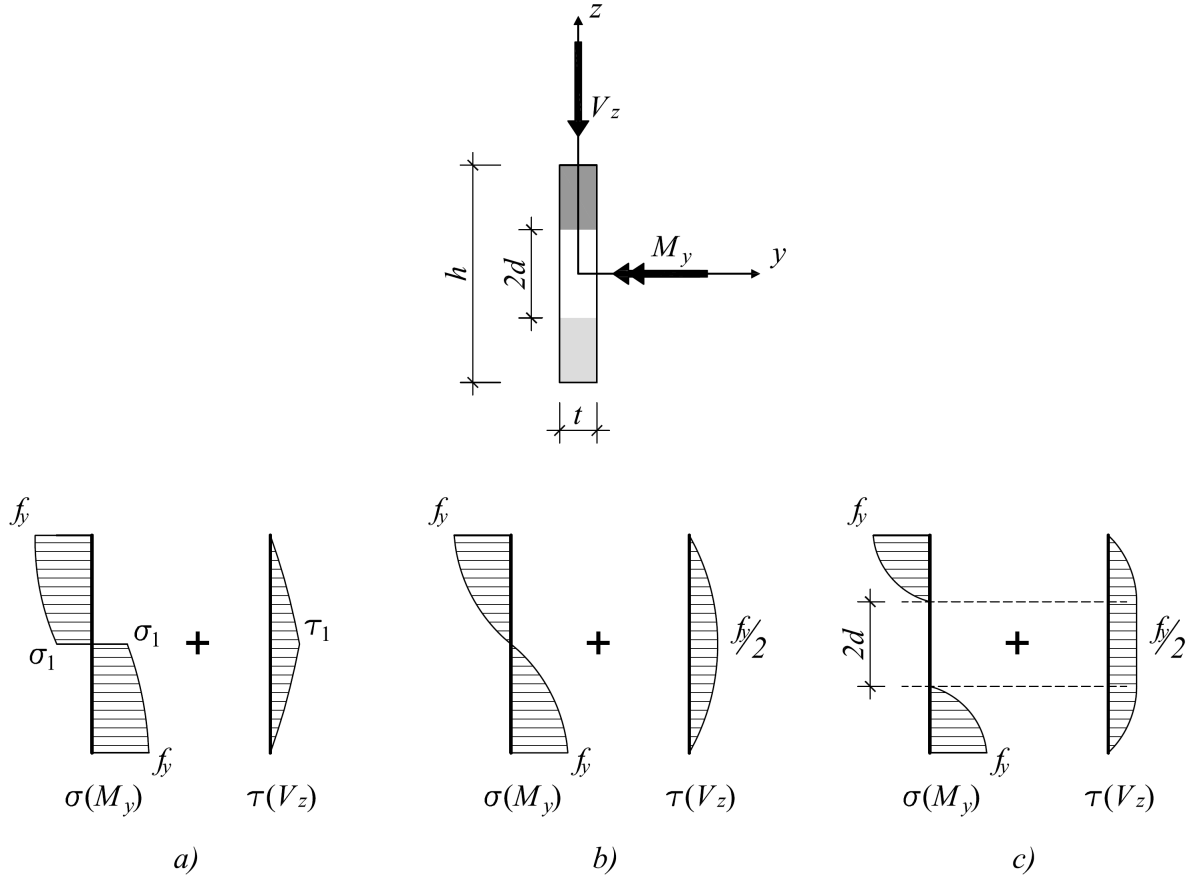


Figura 2.2: Secção rectangular: distribuição de tensões na secção transversal (Drucker, 1956)

A integração das equações (2.6) e (2.7) resulta em

$$\frac{V_z}{V_{pl}} = \frac{L}{h} \left(1 - \cos \frac{h}{L} \right), \quad (2.8)$$

$$M_{pl,V} = 2M_{pl} \left(\frac{L}{h} \right)^2 \left(1 - \cos \frac{h}{L} \right), \quad (2.9)$$

para $h/L \leq \pi/2$ ou $V_z/V_{pl} \leq 2/\pi$, e

$$\frac{V_z}{V_{pl}} = \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{2d}{h} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right], \quad (2.10)$$

$$M_{pl,V} = M_{pl} \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{2d}{h} \right) \frac{V_z}{V_{pl}}, \quad (2.11)$$

para $V_z/V_{pl} \geq 2/\pi$.

Para poder exprimir $M_{pl,V}$ em função de apenas V_z/V_{pl} , efectuou-se uma regressão polinomial de terceiro grau dos valores obtidos através das equações (2.8) e (2.9). A expressão que

resultou desse ajuste foi determinada através de cálculo automático, obtendo um coeficiente de determinação $R^2 = 0.999$, sendo dada por

$$M_{pl,V} = M_{pl} \left[1 - 0.06 \frac{V_z}{V_{pl}} + 0.614 \left(\frac{V_z}{V_{pl}} \right)^2 \left(0.039 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right) \right], \quad (2.12)$$

a qual é válida para $V_z/V_{pl} \leq 2/\pi$. Para exprimir a equação (2.11) apenas em função de V_z/V_{pl} basta substituir (2.10) em (2.11), originando

$$M_{pl,V} = M_{pl} \frac{4}{\pi - 2} \frac{V_z}{V_{pl}} \left(1 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right), \quad (2.13)$$

sendo válida para $V_z/V_{pl} > 2/\pi$.

A representação gráfica das equações (2.12) e (2.13) encontra-se na Figura 2.8.

Horne (1979)

Uma distribuição de tensões mais simples, para o mesmo tipo de problema, foi proposta por Horne (1979). Seja a consola AB , de comprimento L , com uma secção rectangular $h \times t$, carregada no extremo livre com uma força V_z (Figura 2.3). O aparecimento de zonas plásticas começa a partir do instante em que a força V_z implique um valor de momento flector na secção de encastramento igual a $V_z L = M_{ced}$. Se V_z for aumentado para além desse valor, zonas plásticas irão formar-se nas faces inferior e superior, espalhando-se a partir do cantos. O elemento apresenta uma distribuição elástica de tensões até à secção $A_1 A_1$, onde $M_{ced} = V_z x_1$ e a partir da qual se começam a formar zonas plásticas de compressão e de tracção nas faces inferior e superior, respectivamente. A barra encastrada tem de ter um comprimento mínimo de modo a que sejam as fibras extremas a plastificar antes da fibra central, ou seja, $V_z L \geq M_{ced}$, que resulta em $L \geq (\sqrt{3}/4)h \cong 0.433h$ segundo o critério de von Mises, caso contrário, para uma viga muito curta, a força V_z não tem capacidade de gerar um momento flector superior a M_{ced} e a secção transversal começa a plastificar devido às tensões de corte.

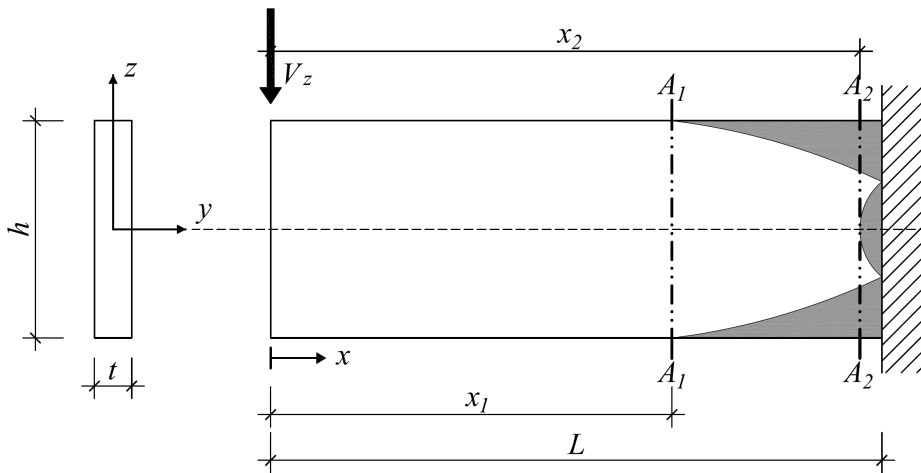


Figura 2.3: Viga em consola com carga na extremidade livre (Horne, 1979)

À medida que as zonas plásticas aumentam para $x > x_1$, devido ao aumento do momento flector, as tensões de corte são resistidas unicamente pelo núcleo elástico que vai diminuindo e

2.1. Secção Rectangular (parede fina)

a máxima tensão de corte vai aumentando até atingir τ_y , onde se forma uma nova zona plástica na fibra central para $x = x_2$. É nesta secção, A_2A_2 da Figura 2.3, que Horne propõe uma distribuição de tensões conforme a Figura 2.4, em que as tensões de corte têm uma distribuição parabólica ao longo do núcleo elástico de altura $2d$. Neste caso o momento resistente da secção

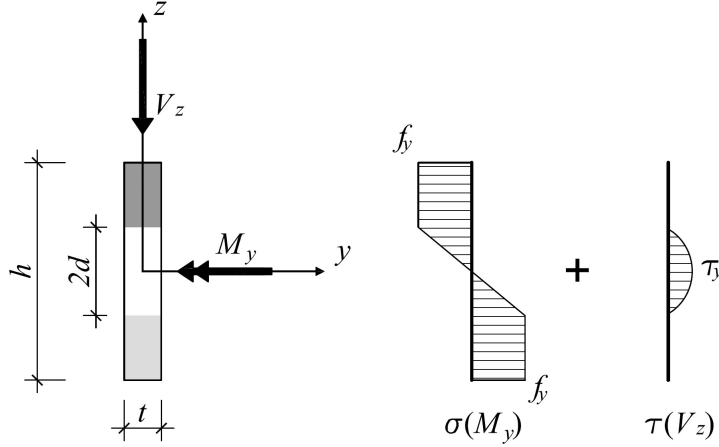


Figura 2.4: Distribuição de tensões na secção transversal para $V_z \leq (2/3)V_{pl}$ (Horne, 1979)

é dado por

$$V_z x_2 = M_{pl,V} = \left[\frac{h^2 t}{4} - \frac{(2d)^2 t}{4} \right] f_y + \frac{(2d)^2 t}{6} f_y = t \left[\frac{h^2}{4} - \frac{d^2}{3} \right] f_y. \quad (2.14)$$

Recorrendo à equação (1.19), a altura do núcleo elástico depende do esforço de corte actuante e é dada por

$$2d = \frac{3V_z}{2t\tau_y} \Rightarrow d = \frac{3V_z}{4t\tau_y}. \quad (2.15)$$

Substituindo (1.15), (1.20) e (2.15) em (2.14), a estimativa do momento plástico reduzido é dada por

$$M_{pl,V} = M_{pl} \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{V_z}{V_{pl}} \right)^2 \right], \quad (2.16)$$

sendo esta expressão válida apenas para $2d \leq h$, ou de modo equivalente

$$V_z \leq \frac{2}{3} V_{pl}.$$

A partir do momento em que $2d = h$ ou $V_z > 2/3 V_{pl}$ as tensões têm uma distribuição de acordo com a Figura 2.5, onde as tensões normais nas fibras extremas não atingem a tensão de cedência uniaxial f_y , de modo a cumprir o critério de cedência (1.10). Nesta situação o momento resistente é determinado por

$$M_{pl,V} = \frac{h^2 t}{6} \sigma_1, \quad (2.17)$$

onde σ_1 é calculada recorrendo à equação (1.10), de onde resulta

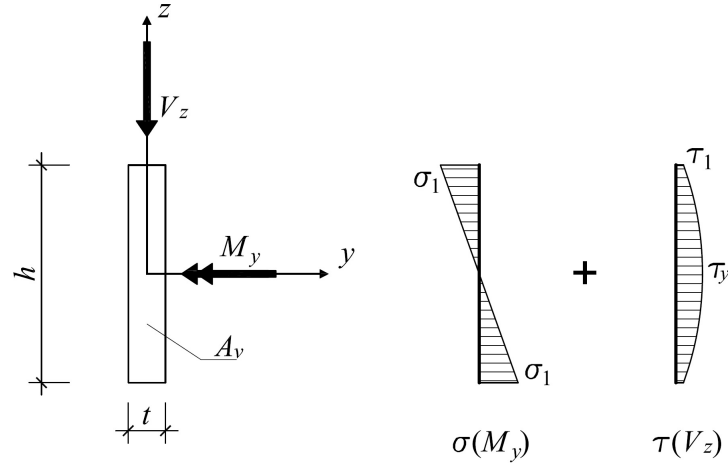


Figura 2.5: Distribuição de tensões na secção transversal para $V_z > (2/3)V_{pl}$ (Horne, 1979)

$$\sigma_1 = \sqrt{f_y^2 - 3\tau_1^2}. \quad (2.18)$$

O esforço transversal actuante, definido em função de τ_y e τ_1 , vem,

$$V_z = A_v \tau_1 + A_v \left[\frac{2}{3} (\tau_y - \tau_1) \right], \quad (2.19)$$

de onde

$$\frac{V_z}{V_{pl}} = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\tau_1}{\tau_y} \right). \quad (2.20)$$

Combinando as equações (1.15), (1.12), (2.17), (2.18) e (2.20), a equação (2.17) pode ser expressa como

$$M_{pl,V} = M_{pl} \left[\frac{2}{3} \sqrt{1 - \left(3 \frac{V_z}{V_{pl}} - 2 \right)^2} \right], \quad (2.21)$$

a qual apenas pode ser utilizada nos casos em que

$$\frac{2}{3} V_{pl} \leq V_z \leq V_{pl}.$$

Note-se que, para esta solução, a distribuição de tensões não respeita as equações de equilíbrio, o que implica que a solução não é estaticamente admissível e, portanto, não constitui um verdadeiro limite inferior da solução exacta. A interação entre esforços, definida pelas equações (2.16) e (2.21), é apresentada na Figura 2.8.

Hirt et al. (2006)

Estes autores propõem os dois modelos de distribuição plástica de tensões apresentadas nas Figuras 2.6 e 2.7. Tal como o modelo de distribuição de tensões proposto por Horne, estes modelos não constituem uma solução estaticamente admissível, não representando um verdadeiro limite inferior.

2.1. Secção Rectangular (parede fina)

No primeiro modelo, Modelo A (Figura 2.6), é admitido que as tensões de corte se distribuem uniformemente ao longo de toda a secção, sendo o seu valor dado por

$$\tau_1 = \frac{V_z}{A_v}. \quad (2.22)$$

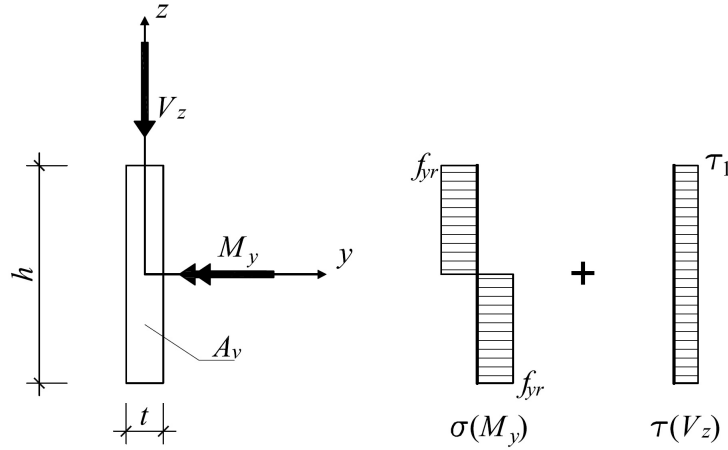


Figura 2.6: Modelo A de distribuição de tensões (Hirt et al., 2006)

No caso das tensões normais, estas também apresentam uma distribuição uniforme em cada troço da secção, com valor igual a uma tensão normal de cedência reduzida, f_{yr} , obtida através do critério de cedência (1.10), ou seja,

$$f_y^2 = f_{yr}^2 + 3\tau_1^2 \Rightarrow f_{yr} = \sqrt{f_y^2 - 3\tau_1^2}. \quad (2.23)$$

Assim, o momento resistente reduzido da secção é dado por

$$M_{pl,V} = \frac{h^2 t}{4} f_{yr}. \quad (2.24)$$

Substituindo as equações (1.12), (1.15), (1.20), (2.22) e (2.23) na equação (2.24), obtém-se

$$M_{pl,V} = M_{pl} \sqrt{1 - \left(\frac{V_z}{V_{pl}} \right)^2}, \quad (2.25)$$

cujos resultados são representados na Figura 2.8.

O segundo modelo, Modelo B, apresenta uma distribuição de tensões em que apenas uma parte da zona central da secção resiste ao corte, enquanto que as zonas mais afastadas do centro resistem às tensões normais devidas à flexão (Figura 2.7). A altura da área que resiste ao corte, $2d$, depende do valor de V_z e pode ser determinada recorrendo à equação (1.20)

$$V_z = 2dt\tau_y \Rightarrow 2d = \frac{V_z}{t\tau_y}. \quad (2.26)$$

O momento resistente da restante área da secção pode ser determinado utilizando o binário representado na Figura 2.7, resultando em

$$M_{pl,V} = M_{pl} - \frac{(2d)^2 t}{4} f_y. \quad (2.27)$$

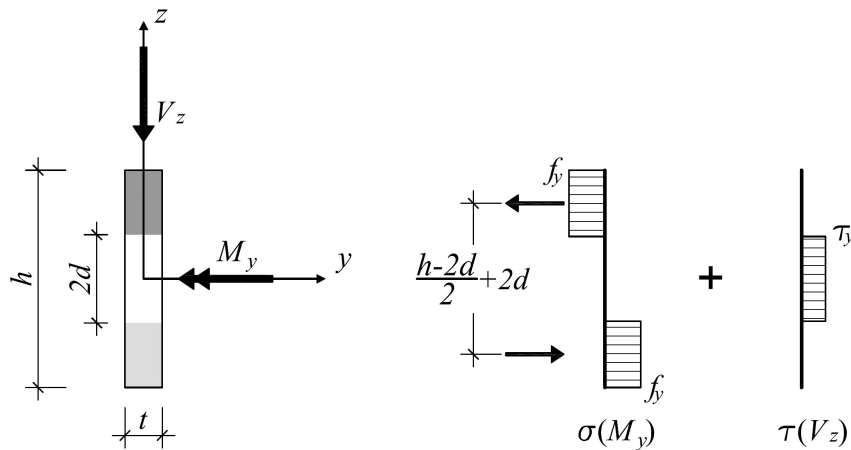


Figura 2.7: Modelo B de distribuição de tensões (Hirt et al., 2006)

O mesmo procedimento utilizado nos modelos anteriores para re-escrever o momento resistente da secção em função de V_z e V_{pl} , pode ser utilizado neste modelo. Assim, recorrendo às equações (1.15), (1.20) e (2.26), substituindo-as na equação (2.27), resulta

$$M_{pl,V} = M_{pl} \left[1 - \left(\frac{V_z}{V_{pl}} \right)^2 \right]. \quad (2.28)$$

A interacção entres os esforços actuanes e resistentes do Modelo B é exibida na Figura 2.8.

Representação gráfica das várias soluções baseadas em distribuição de tensões

A Figura 2.8 representa graficamente as soluções dos modelos analisados nesta secção e também a solução proposta pelo Eurocódigo 3 abordada na secção 1.1.2. Dos quatro modelos de distribuição de tensões, apenas o de Drucker corresponde a uma solução estaticamente admissível, que como já foi referido representa um limite inferior da solução exacta.

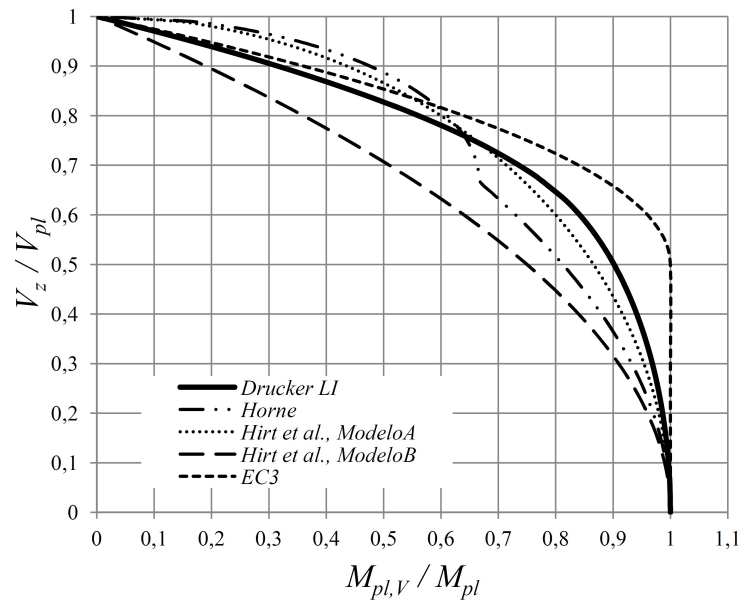


Figura 2.8: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ para os modelos analíticos de distribuição de tensões

2.1.2 Modelos analíticos baseados em mecanismos

Green (1954a)

Green, adoptando o critério de von Mises, apresentou as soluções cinematicamente admissíveis representadas na Figura 2.9, sendo a sua resolução baseada na relação entre o trabalho realizado pelas forças externas (V_z) e a energia dissipada pelas forças internas.

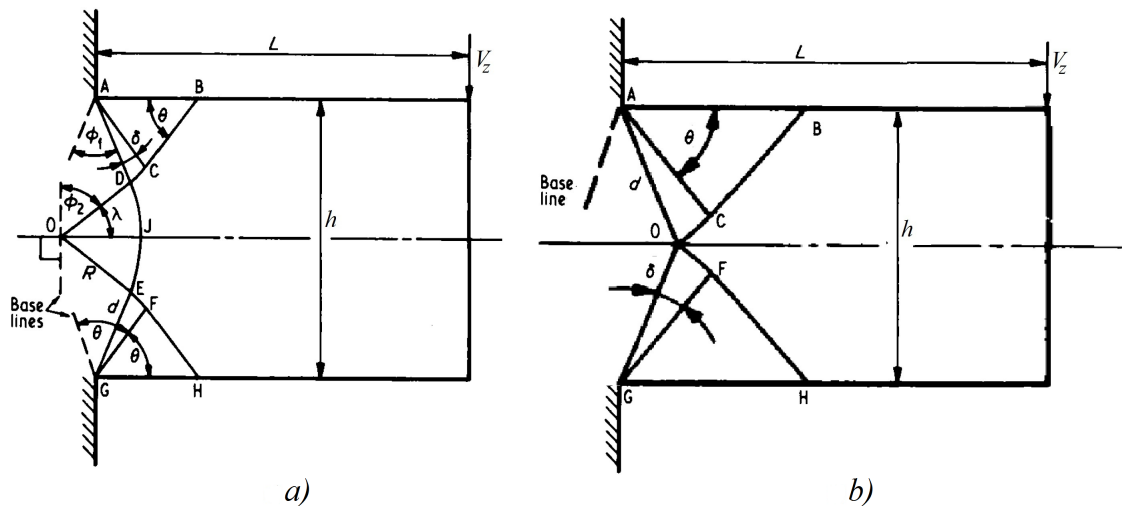


Figura 2.9: Modos rotura para viga em consola com carga na extremidade livre para a) $0.63 < L/h \leq 5.65$; b) $L/h > 5.65$ (Green, 1954a)

O modo de rotura da Figura 2.9a é válido para valores de L/h entre 0.63 e 5.65, enquanto

que o modo de rotura da Figura 2.9b é indicado para $L/h \geq 5.65$. A solução que resulta do modo de rotura da Figura 2.9a é dada pelas equações

$$\frac{d}{h} = 0.3698 + 0.9167 \left(\frac{L}{h} - \sqrt{0.9851 - 0.5182 \frac{L}{h} + \frac{L^2}{h}} \right) \quad \text{e} \quad \frac{V_z}{V_{pl}} = 0.6265 - 1.0317 \frac{d}{h}. \quad (2.29)$$

No caso do modo de rotura da Figura 2.9b) a solução é da pelas equações

$$\frac{L}{h} = \frac{\cot \delta}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3} \sin \delta \sin(\theta + \delta)} \right) \quad \text{e} \quad \frac{V_z}{V_{pl}} = \frac{\sin^2 \delta}{\sin(\theta + \delta)}. \quad (2.30)$$

Green apresentou uma expressão que resulta de uma regressão polinomial aos valores de V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ obtidos através das equações (2.29) e (2.30), dada por

$$M_{pl,V} = M_{pl} \left[1 + 1.23 \frac{V_z}{V_{pl}} \left(0.49 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right) \right], \quad (2.31)$$

a qual é válida para $V_z/V_{pl} \leq 0.62$. A representação gráfica desta equação encontra-se na Figura 2.11.

A Figura 2.11 mostra que se regista um aumento de resistência acima de M_{pl} para valores de V_z/V_{pl} entre 0 e 0.5. O aumento de resistência deve-se ao efeito de restrição imposto pelo encastramento, que “afasta” as zonas plásticas na direcção da extremidade livre (Green, 1954b).

Johnson et al. (1974)

Dando continuidade à solução proposta por Green e utilizando os modos de rotura da Figura 2.9, Johnson et al. complementaram a solução descrita pela equação (2.31), propondo um modo de rotura para vigas curtas ($L/h \leq 0.63$) o qual se representa na Figura 2.10. As

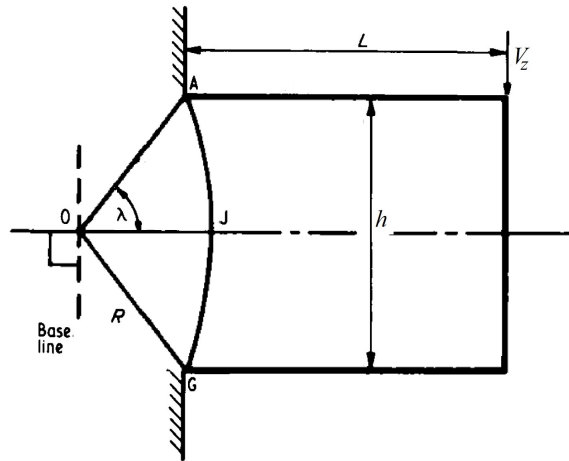


Figura 2.10: Modo rotura para $L/h \leq 0.63$ (Johnson et al., 1974)

equações que traduzem a respectiva solução são

$$\frac{L}{h} = \frac{\tan \lambda}{2} \quad \text{e} \quad \frac{V_z}{V_{pl}} = \cos \lambda, \quad (2.32)$$

e são válidas para $L/h \leq 0.63$.

Os autores não forneceram nenhuma expressão de (2.32) em termos de V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$. Foi por isso necessário calcular diferentes valores para as equações (2.32), de modo a poder desenhar a curva respectiva, que se representa na Figura 2.11.

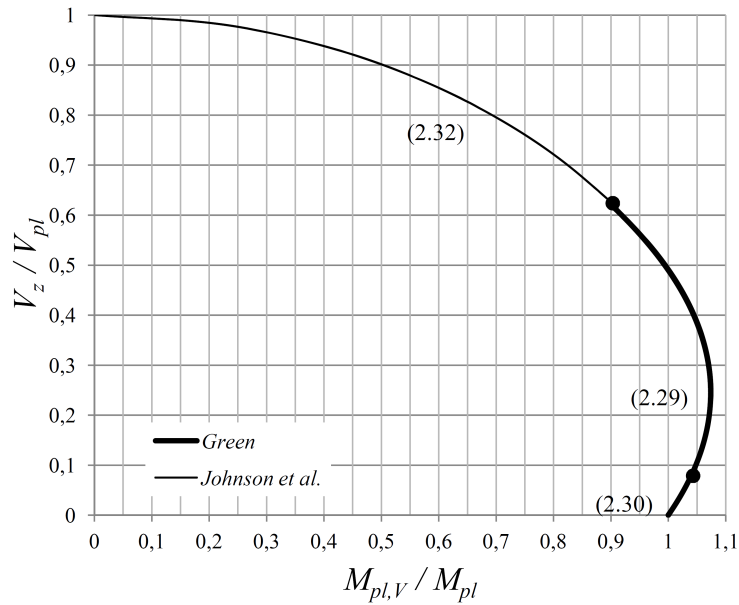


Figura 2.11: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ para os modelos combinados de Green e Johnson et al.

Drucker (1956)

Para o caso de vigas simplesmente apoiadas com uma carga a meio-vão, Drucker propôs o modo de rotura da Figura 2.13. Contudo a respectiva solução não pode ser utilizada como um limite superior para vigas encastradas com metade do comprimento (simplificação de simetria), porque na viga simplesmente apoiada a rótula plástica se situa a meio-vão e, numa consola suficientemente longa, de acordo com Drucker, forma-se uma rótula plástica a $h/2$ da zona de encastramento (Figura 2.12).

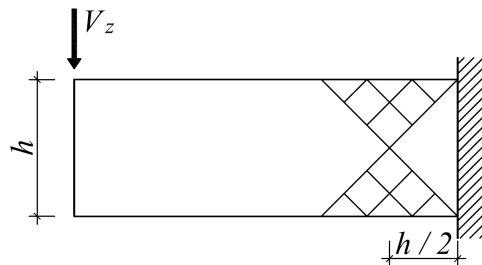


Figura 2.12: Modo de rotura para consolas (Drucker, 1956)

No entanto, Drucker explorou a solução do modo de rotura da Figura 2.13 com o critério de Tresca. Tal como no modelo cinemático de Green, a solução é determinada através da

relação do trabalho realizado pelas forças externas (V_z) e da energia dissipada,

$$V_z \Delta = \frac{f_y}{2} \frac{\Delta}{L} t L d + f_y \frac{\Delta}{L} t \left(\frac{h-d}{2} \right)^2, \quad (2.33)$$

que resulta em,

$$V_z = \frac{f_y}{2} \left[\frac{d}{h} + \frac{h}{2L} \left(1 - \frac{d}{h} \right)^2 \right] \quad (2.34)$$

o que para $V_z/V_{pl} \geq 0.5$ pode ser expresso como

$$M_{pl,V} = 4M_{pl} \frac{V_z}{V_{pl}} \left(1 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right). \quad (2.35)$$

Nos casos em que $0 \leq V_z/V_{pl} < 0.5$ não existe redução do momento plástico resistente e

$$M_{pl,V} = M_{pl}. \quad (2.36)$$

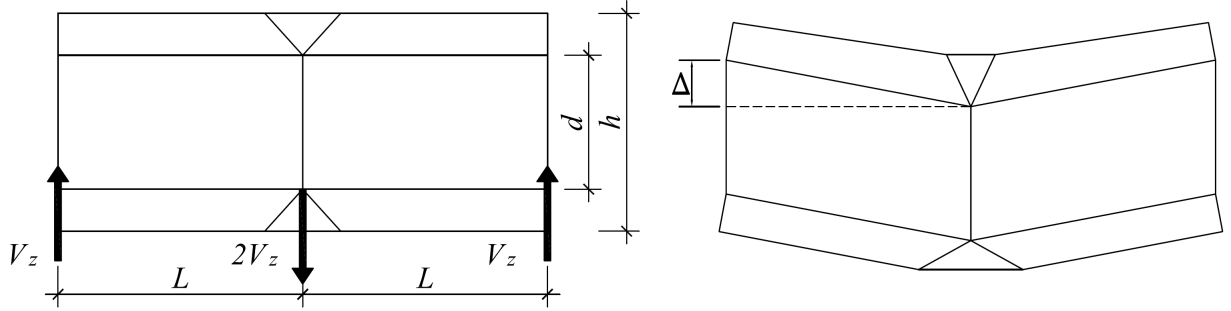


Figura 2.13: Modo rotura para viga simplesmente apoiada com carga aplicada a meio-vão (Drucker, 1956)

A representação gráfica desta solução, definida pelas equações (2.35) e (2.36), é apresentada na Figura 2.15.

Lubliner (1990)

Lubliner utilizou o modelo da Figura 2.14, que consiste numa simplificação de simetria do modelo de rotura de Drucker (Figura 2.13). Ao igualar o trabalho das forças exteriores à energia dissipada obteve

$$V_z \Delta = \tau_y \frac{\Delta}{L} t L d + 2\tau_y \frac{\Delta}{L} t \left(\frac{h-d}{2} \right)^2 \quad (2.37)$$

que, simplificando, conduz a

$$V_z = \tau_y \left[\frac{d}{h} + \frac{h}{2L} \left(1 - \frac{d}{h} \right)^2 \right]. \quad (2.38)$$

Ao adoptar o critério de von Mises, a equação pode ser expressa na seguinte forma

$$M_{pl,V} = \frac{8}{\sqrt{3}} M_{pl} \frac{V_z}{V_{pl}} \left(1 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right) \quad (2.39)$$

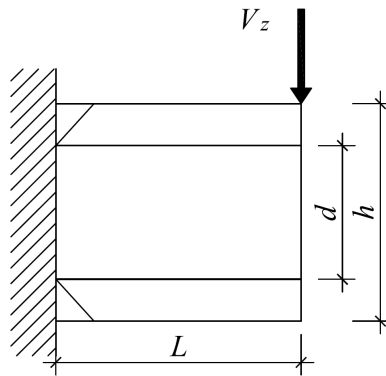


Figura 2.14: Modo rotura para viga em consola (Lubliner, 1990)

a qual é válida para $V_z/V_{pl} \geq 0.5$.

Para valores de $V_z/V_{pl} < 0.5$ o valor do momento plástico é dado por

$$M_{pl,V} = \frac{2}{\sqrt{3}} M_{pl} \quad (2.40)$$

Note-se que, como foi já referido, este modelo não é cinematicamente admissível, porque nas zonas triangulares o deslocamento vertical é diferente de zero. Assim, a solução não pode ser considerada com um limite superior.

A curva que define a solução descrita pelas equações (2.39) e (2.40) é apresentada na Figura 2.15.

Representação gráfica das soluções para modelos baseados em mecanismos

De modo a poder comparar as várias soluções (Green (1954a), Johnson et al. (1974), Drucker (1956) e Lubliner (1990)), a Figura 2.15 apresenta as soluções dos diferentes modelos.

Salienta-se que, muito embora as soluções de Drucker e Green+Johnson et al. constituam limites superiores, não dizem respeito ao mesmo problema e, em acréscimo, a solução de Drucker foi obtida com o critério de Tresca.

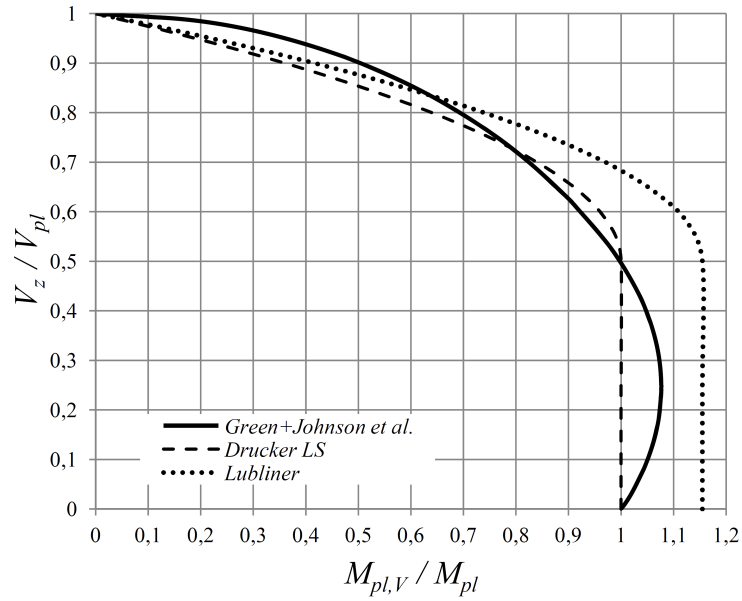


Figura 2.15: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ para os modelos baseados em mecanismos

Na Figura 2.16 comparam-se as soluções que constituem os limites superior e inferior para vigas em consola.

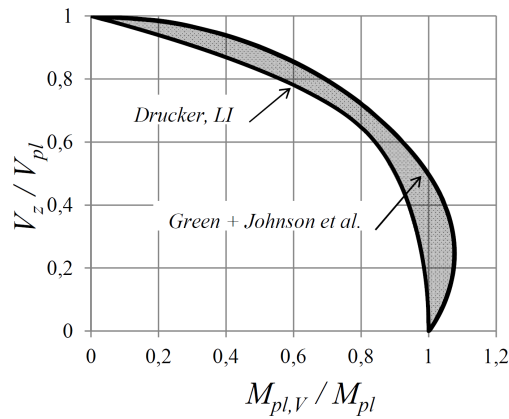


Figura 2.16: Comparação LI/LS, para vigas em consola com secção rectangular

Green (1954b) – apoio “fraco” (*weak support*)

Conforme referido por Drucker (1956), de entre vários parâmetros que influenciam a solução, o tipo de apoio desempenha um papel fundamental. Green (1954b) analisou o efeito de um apoio “fraco” (*weak support*) (ver também Chakrabarty (2010)). Este apoio fixa os deslocamentos apenas na face inferior da viga (Figura 2.17). A solução para o modo de rotura da Figura 2.17 é

$$\frac{L}{b} = \cos(\beta + \delta) + \frac{\tau_y b}{V_z} \left(\cos(\beta + \delta) + \frac{\sqrt{3}a^2}{2b^2} \right) \quad \text{e} \quad a = h - b \sin(\beta + \delta) \quad (2.41)$$

e é válida para $L/h \geq 1.33$ (Chakrabarty, 2010). Green apresenta uma expressão aproximada em função de V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$, definida por

$$M_{pl,V} = M_{pl} \left[1 + 1.45 \frac{V_z}{V_{pl}} \left(0.34 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right) \right], \quad (2.42)$$

sendo válida $V_z/V_{pl} \leq 0.33$.

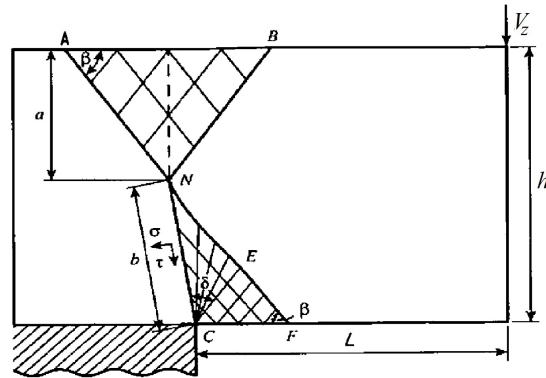


Figura 2.17: Modo de rotura para viga em consola com apoio “fraco” (Green, 1954b)

A reprodução gráfica da equação (2.42) encontra-se na Figura 2.18, onde se pode comparar com a solução para um encastramento total, definida pela equação (2.31). Como se pode observar, no caso do apoio “fraco” não existe um acréscimo tão pronunciado de resistência à flexão para um esforço transversal reduzido.

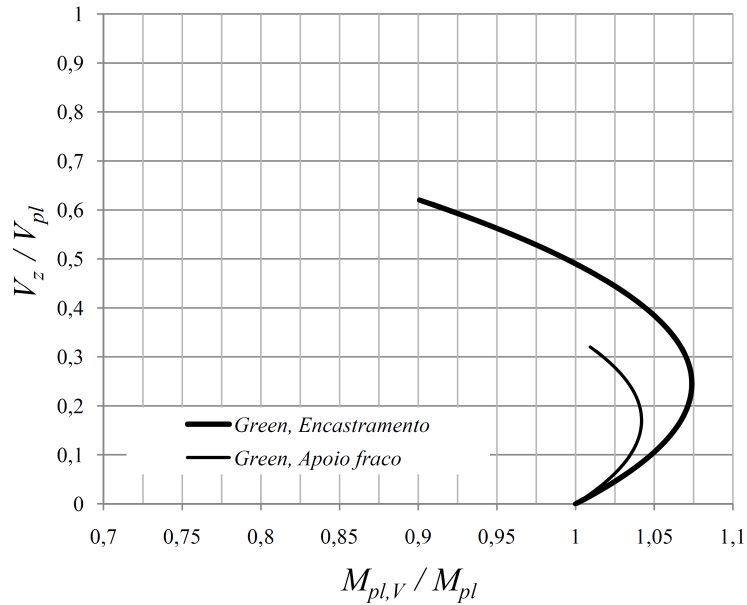


Figura 2.18: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ para as soluções de Green (1954a,b)

2.1.3 Soluções pelo Método dos Elementos Finitos

2.1.3.1 Discretização

Para aferir o refinamento adequado para estudar este tipo de problemas, foram testados três níveis de refinamento para a viga em consola da Figura 2.19b. Numa primeira abordagem, os elementos foram definidos com dimensões $h_m \times h_m$, com $h_m = 15\%h$, onde h é a altura da secção transversal da viga. Numa segunda fase considerou-se $h_m = 10\%h$, e por fim, $h_m = 2\%h$. Os resultados mostram que são necessárias malhas relativamente refinadas (Figura 2.19a). No entanto, o refinamento apenas é necessário perto das zonas críticas, onde ocorrem concentrações de tensões e escoamento plástico. Assim, apenas junto destas zonas a malha será mais refinada, com $h_m = 2\%h$ e, nas restantes zonas, será composta com elementos de $h_m = 10\%h$ (Figura 2.19b).

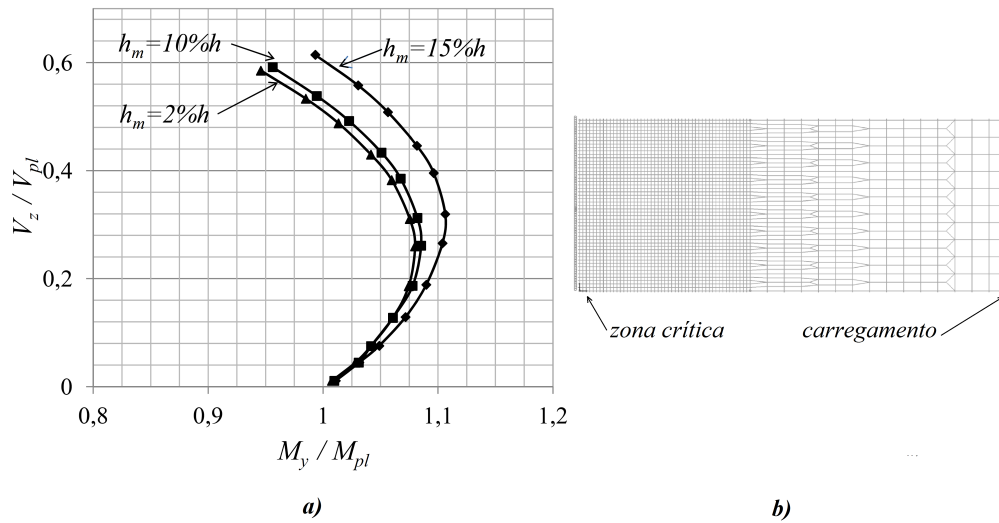


Figura 2.19: a) Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} do refinamento da malha; b) refinamento da malha adoptado

2.1.3.2 Modelos

Nesta secção são apresentados seis modelos diferentes, para vigas com secção rectangular, diferindo as condições de apoio e o tipo de carregamento. Todos os modelos têm uma secção rectangular com $h = 0.50$ m e $t = 0.01$ m (Figura 2.20). O valor do momento plástico (M_{pl}) é de 146.88 kNm e o esforço transversal plástico (V_{pl}) é igual a 678.39 kN.

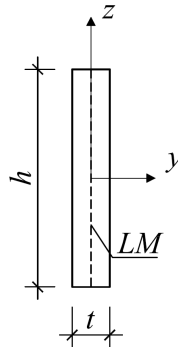


Figura 2.20: Secção rectangular genérica

Modelo 1

O primeiro modelo (*Mod1 R*) é composto por uma viga em consola, com o encastramento em $x = 0$ e com uma carga (p) no bordo livre em $x = L$, ambos distribuídos ao longo da altura da secção (Figura 2.21). De modo a obter diferentes valores para a interacção M-V na rotura, representada na Figura 2.22, fez-se variar a razão L/h entre 0.7 e 40. Não foi no entanto possível obter resultados para valores de esforço transversal elevado ($L/h < 0.7$) porque para vigas muito curtas o carregamento tinha influência na distribuição de tensões dado à sua proximidade do apoio.

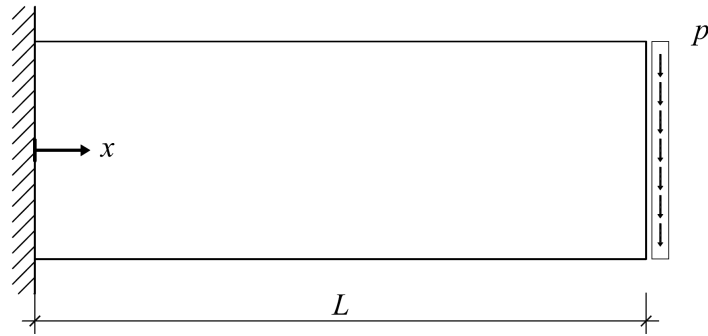


Figura 2.21: Modelo, *Mod1 R*

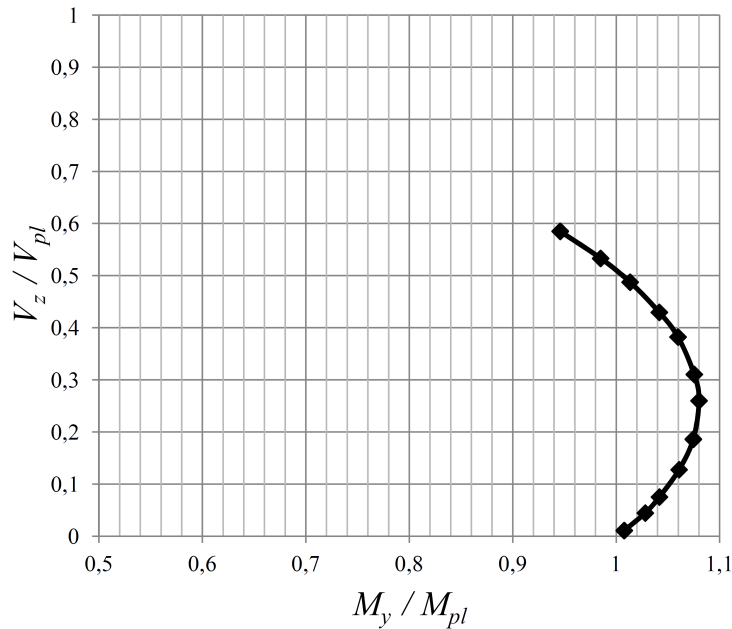


Figura 2.22: Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , *ModR 1*

Na Figura 2.22 mostra-se a curva $V_z/V_{pl} - M_y/M_{pl}$ obtida. Na Figura 2.23 estão representadas as distribuições de tensões σ_{xx} , σ_{zz} , τ_{xz} e σ_{efe} ao longo da viga. Estas tensões são referentes ao modelo *Mod1 R* com $L/h = 2.5$. Os esforços que originaram o colapso desta viga são $M_y = 1.07M_{pl}$ e $V_z = 0.19V_{pl}$. Nas tensões efectivas pode-se observar que a rótula plástica se forma um pouco afastada da zona do apoio, dando origem a um pequeno núcleo elástico triangular junto do apoio, tal como referido por Drucker (1956). É também visível a acumulação de tensões normais transversais (σ_{zz}) junto do encastramento. São estas tensões as responsáveis pelo acréscimo de resistência, que surgem devido ao efeito de restrição de deformação imposto pelo apoio. A presença destas permite baixar o valor da tensão efectiva de von Misses (σ_{efe}) que por consequência permite aumentar a tensão normal longitudinal (σ_{xx}) acima de f_y , o que permite aumentar o momento resistente para além de M_{pl} .

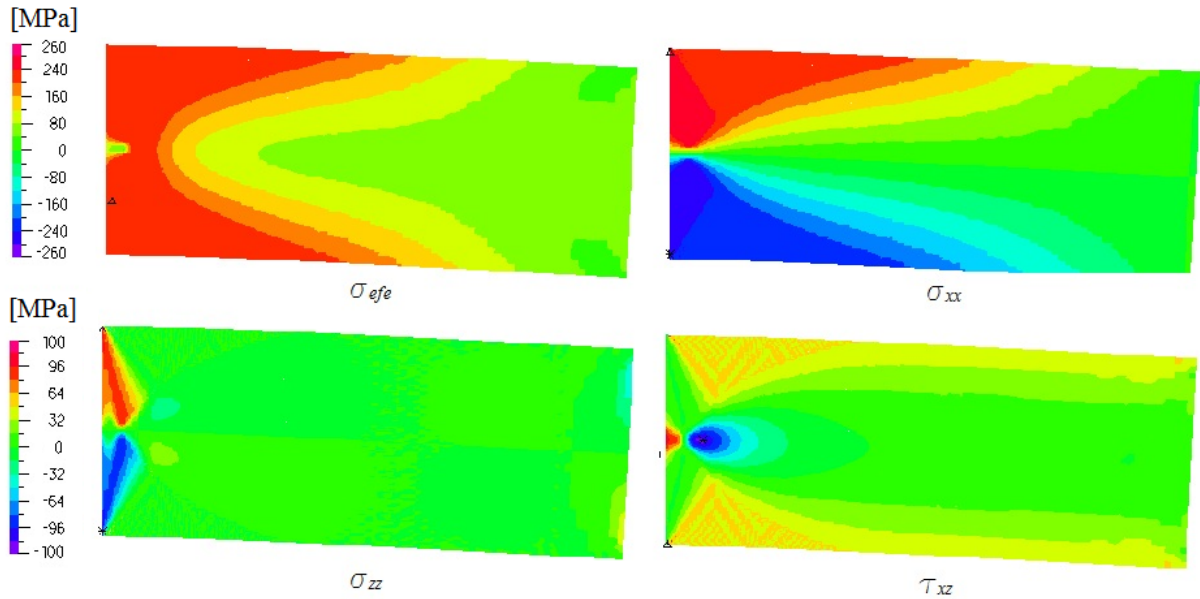


Figura 2.23: Distribuição de tensões no modelo *Mod1 R*

Modelo 2

O segundo modelo (*Mod2 R*) consiste numa viga com um encastramento deslizante numa extremidade e com um apoio simples na outra. Na secção de encastramento deslizante foi colocada uma carga distribuída p . Uma vez que a secção crítica ocorre na vizinhança de $x = 0$, isso implicaria que o carregamento iria influenciar a distribuição das tensões nessa zona, mais propriamente, teria influência directa nas tensões de corte τ_{xz} . De modo a evitar tal influência, optou-se por separar a viga em dois elementos com comportamentos diferentes. Na zona de aplicação da carga o material terá um comportamento elástico e, na restante viga, o comportamento será elasto-plástico (Figura 2.24).

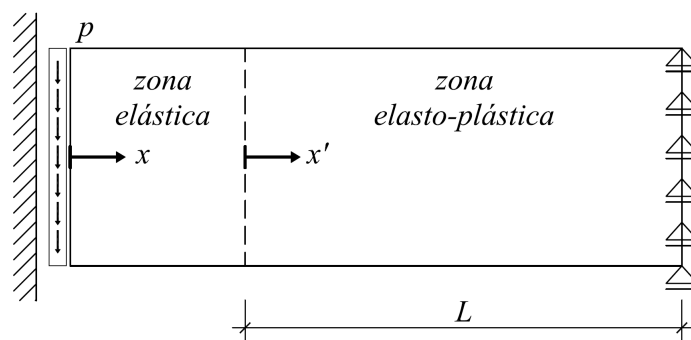


Figura 2.24: Modelo, *Mod2 R*

A introdução da zona elástica implica que a secção crítica passe a ser em $x' = 0$ (ou na sua vizinhança). Os resultados são representados na Figura 2.25, tendo sido obtidos fazendo variar o valor de L/h entre 0.7 e 40. Na Figura 2.25 observa-se um comportamento muito semelhante ao obtido com o *Mod1 R*, o que se deve ao facto da transição entre as zonas

elástica e elasto-plástica, tal como o encastramento do Modelo 1, “afastar” a formação da rótula plástica no sentido do apoio da direita.

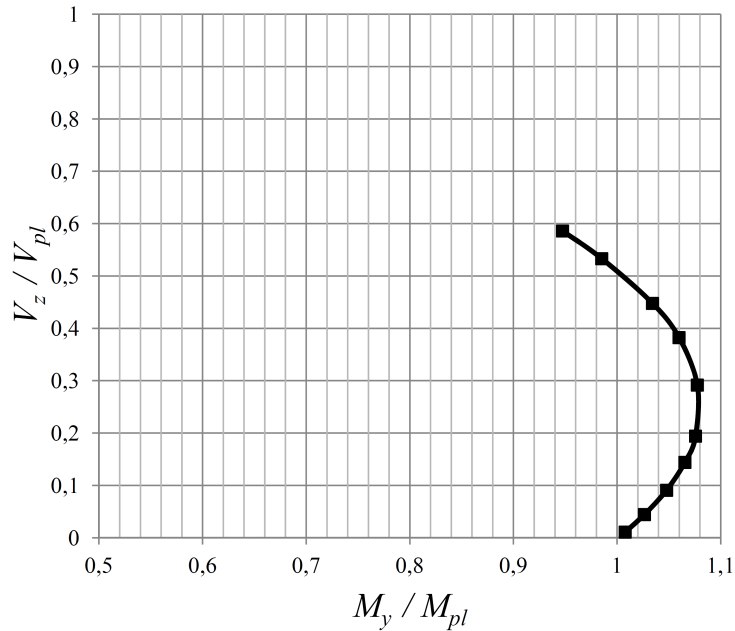


Figura 2.25: Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , *Mod2 R*

Modelo 3

O terceiro modelo (*Mod3 R*) é composto por uma viga com um troço apoiado, entre $x = 0$ e $x = L_1$, e outro troço em consola entre $x = L_1$ e $x = L_1 + L_2$. Na extremidade livre, $x = L_1 + L_2$, é aplicada uma carga p . As secções em $x = 0$ e em $x = L_1$ são apoiadas em toda a altura da secção (Figura 2.26).

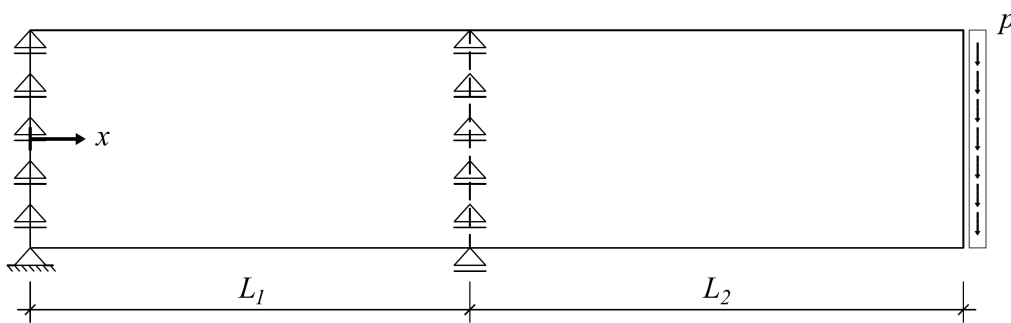


Figura 2.26: Modelo, *Mod3 R*

Numa primeira análise os dois troços foram definidos com o mesmo comprimento, $L_1 = L_2$. Os resultados, presentes na Figura 2.27, foram obtidos para valores de L_1/h entre 0,7 e 40. Foi feito um segundo modelo, em que o troço apoiado tem o dobro do comprimento da parte em consola, $L_1 = 2L_2$. Neste caso também o rácio L/h foi considerado entre 0,7 e 40, mas apenas para o troço L_2 , ou seja, $0,7 \leq L_2/h \leq 40$. A curva que define os valores de resistência

2.1. Secção Rectangular (parede fina)

desta segunda análise encontra-se igualmente na Figura 2.27. Observa-se que, para $L_1 = L_2$, o comportamento é, mais uma vez, semelhante ao dos casos anteriores. Para $L_1 = 2L_2$, o acréscimo de resistência à flexão para $V_z/V_{pl} < 0.35$ é menos pronunciado, isto deve-se ao facto da rótula plástica de formar à esquerda de $x = L_1$. No limite, quando $L_1 \gg L_2$, na zona à esquerda de $x = L_1$ o esforço transversal é muito pequeno (quase nulo) e, por isso, a viga fica sujeita à flexão simples e sua resistência é igual a M_{pl} ($M_{pl,v}/M_{pl} = 1$) para $V_z/V_{pl} < 0.5$. Para valores de esforço transversal superiores a 50% de V_{pl} a rótula plástica forma-se à direita de $x = L_1$, isto porque as tensões de corte passam a ser condicionantes.

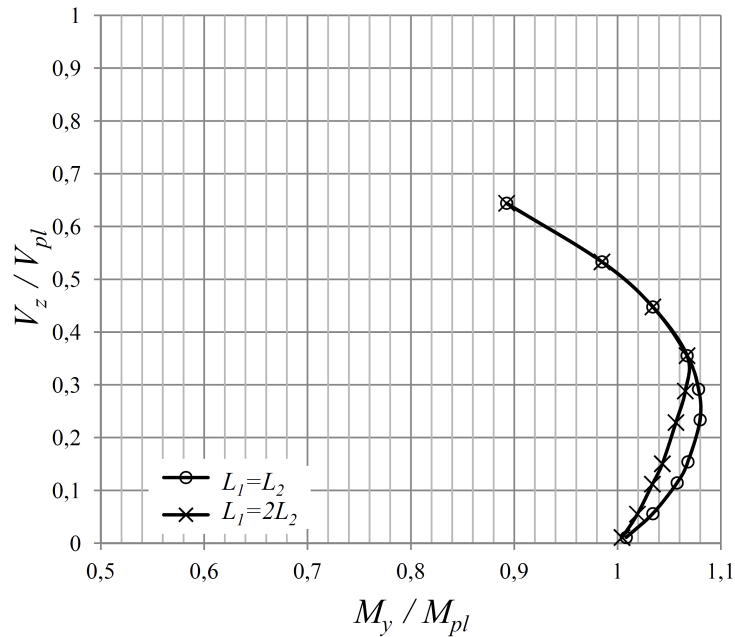


Figura 2.27: Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , *Mod3 R*

Modelo 4

O quarto modelo (*Mod4 R*) consiste numa viga simplesmente apoiada com uma carga (p) aplicada a meio-vão. A secção crítica deste modelo é a meio-vão, para $x = L/2$. Neste caso o carregamento está aplicado directamente na secção a analisar e, portanto, terá influência na distribuição das tensões, como já referido no caso do *Mod2 R*.

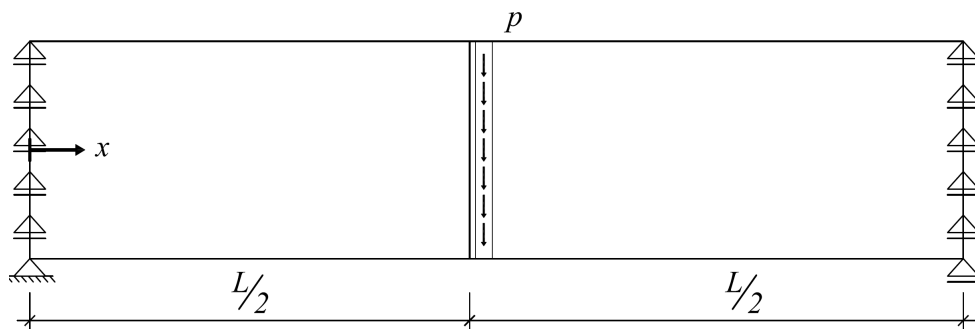


Figura 2.28: Modelo, *Mod4 R*

Os valores que definem a resistência deste modelo foram determinados para $1.2 \leq L/h \leq 40$ e estão representados na Figura 2.29. Neste modelo, embora não exista restrição da deformação na zona crítica ($x = L/2$), também se verificou um acréscimo de resistência. No entanto, existem algumas diferenças comparando com os modelos anteriores, observando-se uma resistência à flexão ligeiramente inferior (Figura 2.35). O facto de o carregamento ser distribuído ao longo da altura da secção influencia a distribuição das tensões e gera tensões normais transversais (σ_{zz}), responsáveis por permitir o aumento das tensões σ_{xx} para além de f_y .

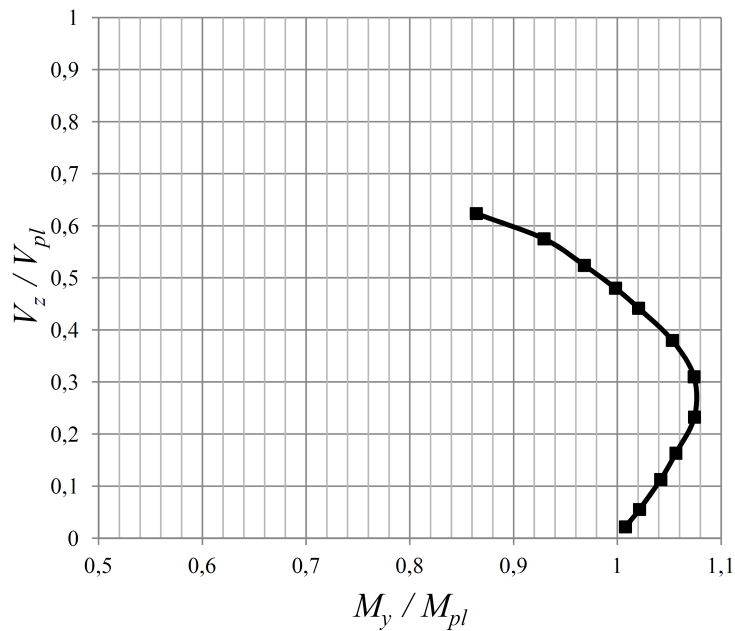


Figura 2.29: Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , *Mod4 R*

Modelo 5

Este modelo tem como objectivo analisar o apoio “fraco” de Green (1954b). Para isso, foi definido um encastramento na face inferior da viga com um comprimento L_{ap} , muito maior que o troço em consola (Figura 2.30). Na extremidade livre da viga ($x = L$) foi aplicada uma carga distribuída p .

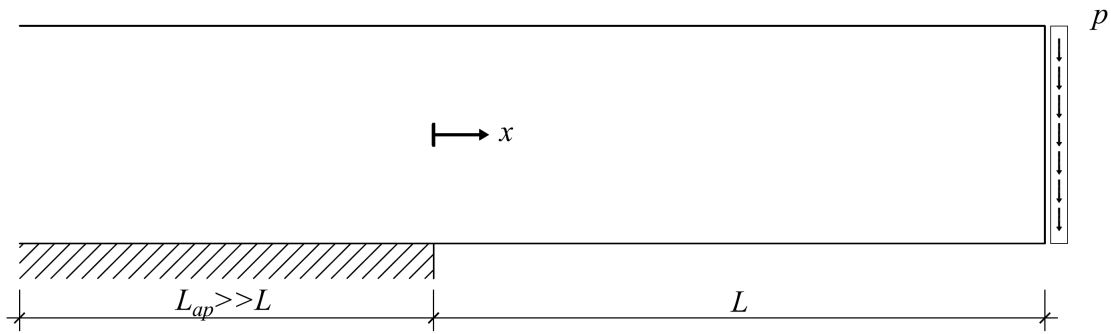


Figura 2.30: Modelo, *Mod5 R*

Na Figura 2.31 apresenta-se a curva de interacção de esforços que define a resistência à flexão para o *Mod5 R*, a qual foi obtida calculando os esforços de colapso para $0.8 \leq L/h \leq 40$. Este modelo apresenta uma resistência inferior à dos modelos anteriores. Também se verifica uma resistência à flexão superior a M_{pl} , mas agora apenas para valores de $V_z/V_{pl} < 0.35$.

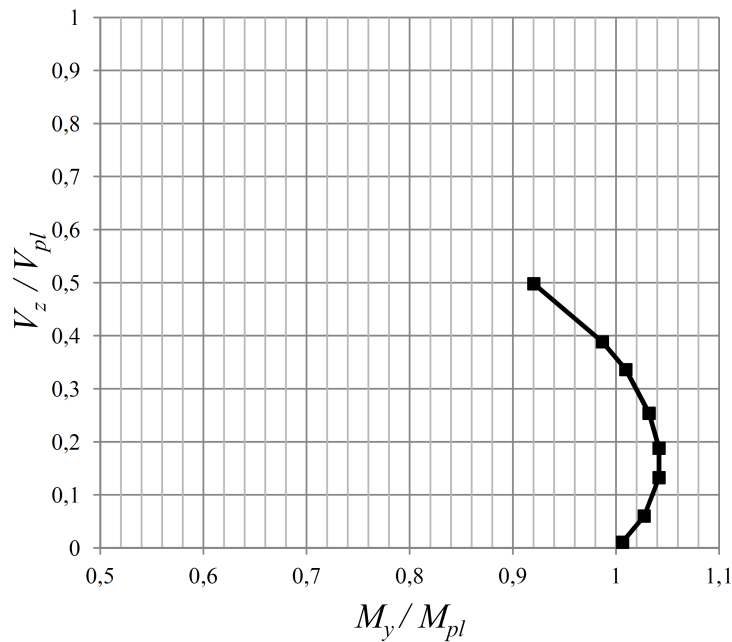


Figura 2.31: Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , *Mod5 R*

Na Figura 2.32 representam-se as distribuições de tensões no colapso, para $L/h = 2.4$. Os esforços que originaram o colapso desta viga são $M_y = 1.04M_{pl}$ e $V_z = 0.19V_{pl}$. Para esta viga, no diagrama das tensões efectivas, pode-se observar que a rótula plástica se forma ligeiramente afastada da zona do apoio na direcção da extremidade livre. Observando o diagrama das tensões σ_{zz} verifica-se que estas surgem para $-h/2 \leq x \leq 0$. Observa-se que o aumento da resistência da secção à flexão, para V_z/V_{pl} pequeno, é inferior ao registado no *Mod1 R*. Conforme se verá na secção 2.1.4, o facto de não se formarem tensões σ_{zz} na metade superior da viga implica que não haja um aumento das tensões σ_{xx} acima da tensão

de cedência uniaxial, o que justifica que não haja um acréscimo de resistência igual ao do modelo *Mod1 R*.

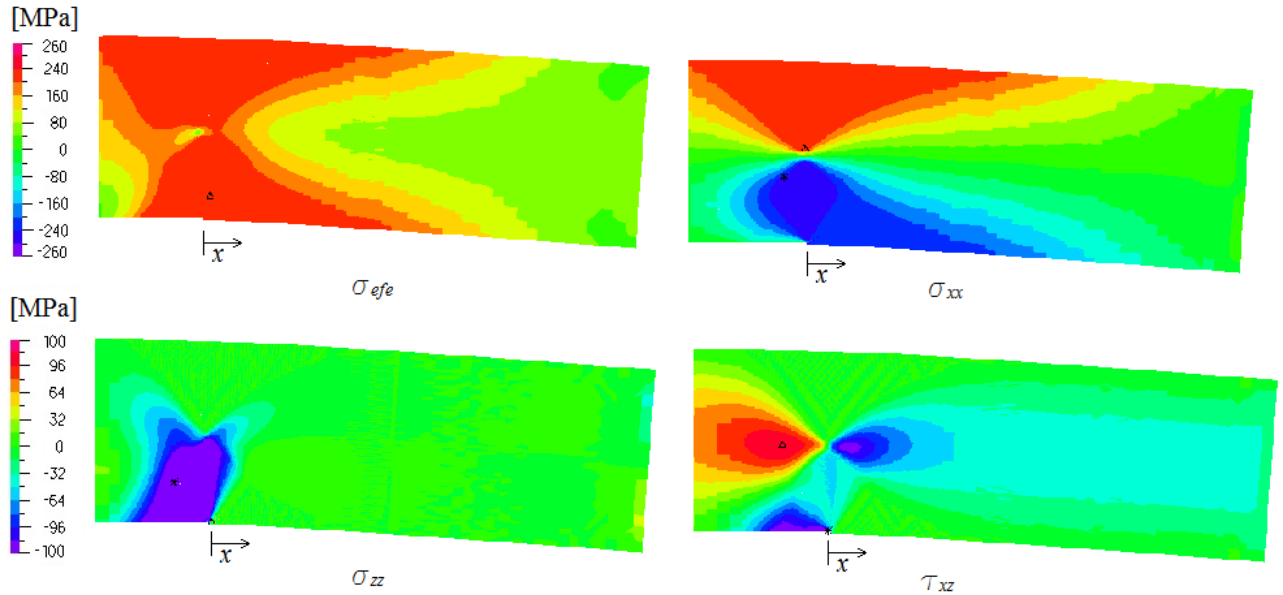


Figura 2.32: Distribuição de tensões no elemento, *Mod5 R*

Modelo 6

Um sexto modelo (*Mod6 R*) foi elaborado com o objectivo de averiguar a influência de distribuição de tensões representada na Figura 2.33 e que pode ocorrer na alma de um perfil em I. Para isso, foram aplicados dois carregamentos distintos em simultâneo. O primeiro carregamento é definido pela carga g , que sujeita a viga a um estado de corte puro, e o segundo carregamento é semelhante ao carregamento aplicado no *Mod1 R*, sendo definido pela carga p , que sujeita a viga à flexão (Figura 2.33).

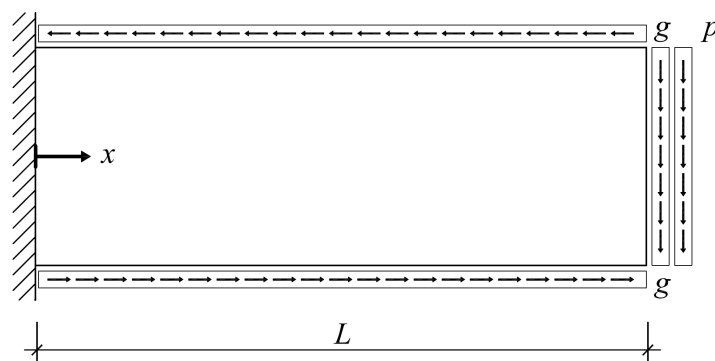


Figura 2.33: Modelo, *Mod6 R*

Para este modelo a relação entre os carregamentos foi alternada, efectuando ao todo três análises, para p/g igual a 1, 0.5 e 0.1. Para cada uma das análises fez-se variar a relação entre o vão e a altura (L/h) entre 1.6 e 32. Na Figura 2.34 podem-se observar os resultados obtidos, os quais mostram que quanto maior for o carregamento g em relação ao carregamento p , ou

2.1. Secção Rectangular (parede fina)

seja, quanto mais influente for o carregamento que induz corte puro, menor é a resistência da secção transversal. Nos casos em que $p/g = 1$ e $p/g = 0.5$ ainda houve um aumento de resistência acima de M_{pl} , isto significa que continuam a existir tensões σ_{zz} junto da zona crítica, porque conforme já foi referido estas tensões surgem devido ao efeito de restrição gerado pelo apoio. No entanto, comparativamente com os modelos anteriores, esse acréscimo de resistência é menor. No caso em que $p/g = 0.1$ não se registou uma resistência à flexão acima de M_{pl} , isto pode ser justificado pelo facto das tensões de corte serem muito elevadas e superarem o efeito benéfico do aumento de resistência dado pela restrição do apoio.

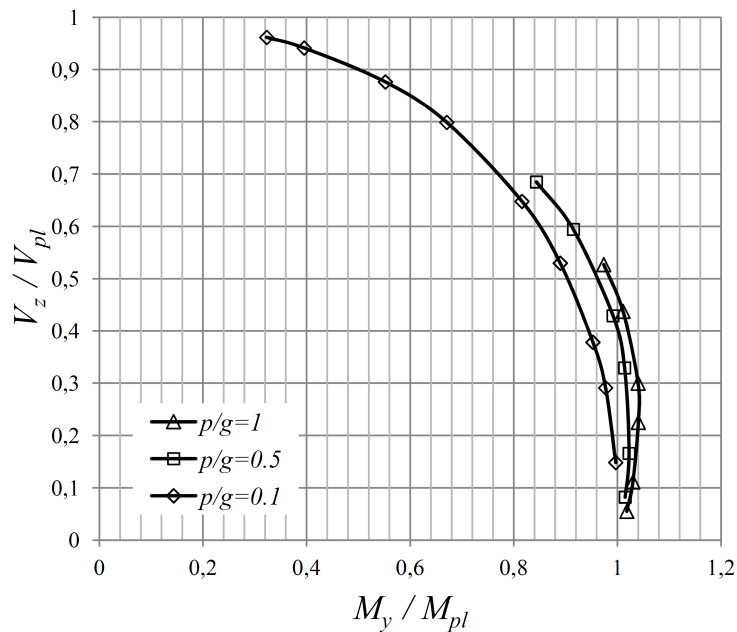


Figura 2.34: Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , *Mod6 R*

2.1.4 Análise geral dos resultados

Na Figura 2.35 comparam-se os resultados obtidos com os modelos 1 a 5 com os limites superiores fornecidos por Green (1954a,b). Observa-se que os modelos 1 a 5 fornecem resultados muito semelhantes aos obtidos por Green, quer para o encastramento quer para o apoio “fraco”.

Os quatro primeiros modelos apresentam curvas bastante semelhantes, isto deve-se ao facto de em todos eles surgirem tensões σ_{zz} bastante altas. O primeiro modelo representa um verdadeiro encastramento. No caso do *Mod2 R*, a fronteira entre as duas zonas (elástica e elasto-plástica) actua como um encastramento para o escoamento plástico. No terceiro modelo os apoios intermédios introduzem σ_{zz} . Por último, no quarto modelo as tensões aplicadas geram tensões σ_{zz} .

Na curva de interação dos esforços $M-V$ os modelos 1, 2, 3 e 4 apresentam um acréscimo de resistência superior a M_{pl} para valores de $0 < V_z/V_{pl} < 0.5$. A resistência à flexão aumenta até $M_y/M_{pl} = 1.08$, para $V_z/V_{pl} = 0.25$.

Também no *Mod5 R* se verifica um acréscimo de resistência acima de M_{pl} embora, neste caso, apenas para $0 < V_z/V_{pl} < 0.35$, o que está em excelente acordo com a solução de Green.

A curva deste modelo apresenta igualmente uma distribuição parabólica, embora com máximo de $M_y/M_{pl} = 1.04$ em $V_z/V_{pl} = 0.15$.

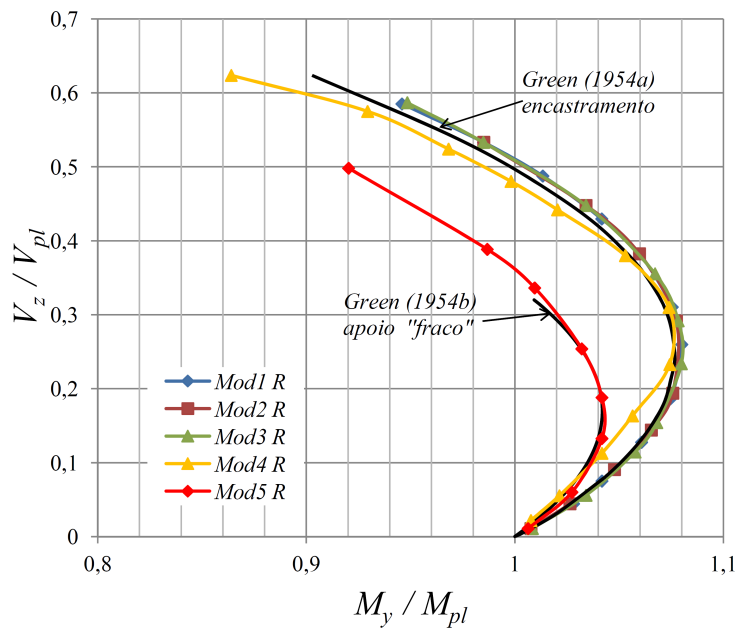


Figura 2.35: Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} , soluções de Green (1954a,b) VS resultados de modelos de elementos finitos

Na Figura 2.36 estão representadas as tensões σ_{xx} , σ_{zz} e τ_{xz} , na secção $x = 0$, para o *Mod1 R*. Como referido anteriormente, a presença das tensões σ_{zz} permite aumentar σ_{xx} acima da tensão de cedência f_y (235 MPa). Por exemplo, no caso de $V_z/V_{pl} = 0.25$, a presença das tensões normais transversais (σ_{zz}) permitiu que as tensões normais longitudinais (σ_{xx}) atingissem, aproximadamente, 255 MPa. É também neste ponto da curva M-V que se obtém a máxima resistência da secção com $M_y/M_{pl} = 1.08$ (ver Figura 2.36).

2.1. Secção Rectangular (parede fina)

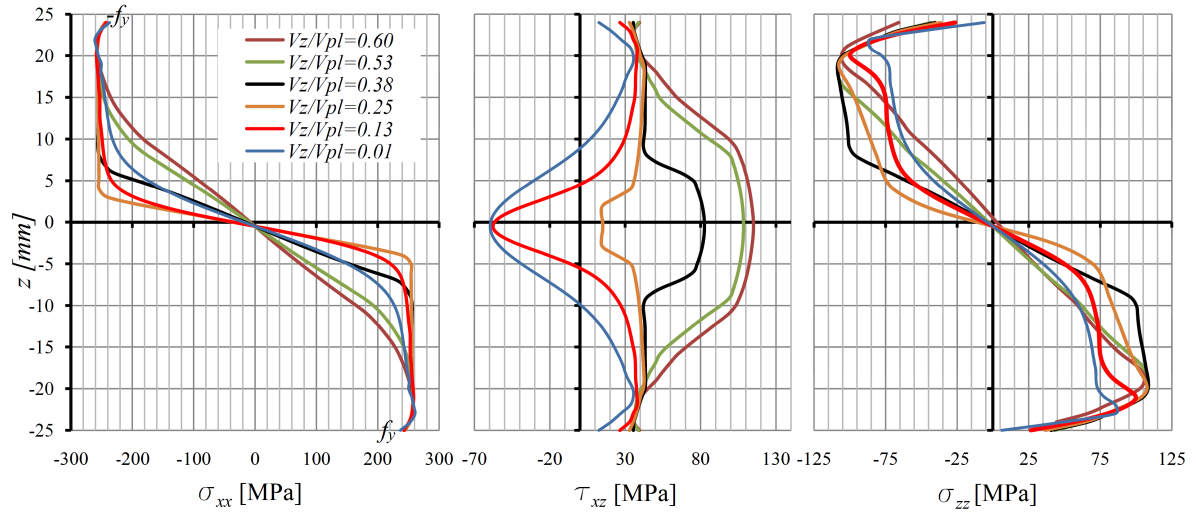


Figura 2.36: Distribuição de tensões na secção $x = 0$, *Mod1 R*

Efectuando agora uma análise semelhante para o *Mod5 R*, que replica o *weak support*, apresenta-se na Figura 2.37 a distribuição de tensões, σ_{xx} , σ_{zz} e τ_{xz} , em $x = 0$ e para diferentes valores de V_z/V_{pl} . Analisando o caso $V_z/V_{pl} = 0.13$, que também corresponde à resistência mais elevada da secção ($M_y = 1.04M_{pl}$), observa-se que neste caso não se formam tensões σ_{zz} para z positivo. Assim, apenas as tensões σ_{xx} para z negativo são superiores a f_y (aproximadamente 255 MPa). A ausência de σ_{zz} em z positivo faz com que o máximo de σ_{xx} seja $f_y = 235$ MPa, o que implica que o acréscimo de resistência à flexão seja menor comparativamente ao *Mod1 R*. Embora nos restantes valores de V_z/V_{pl} se verifiquem tensões σ_{zz} em z positivo, esse efeito é contrariado pelas tensões de corte que surgem, não permitindo que a tensão σ_{xx} seja superior a f_y .

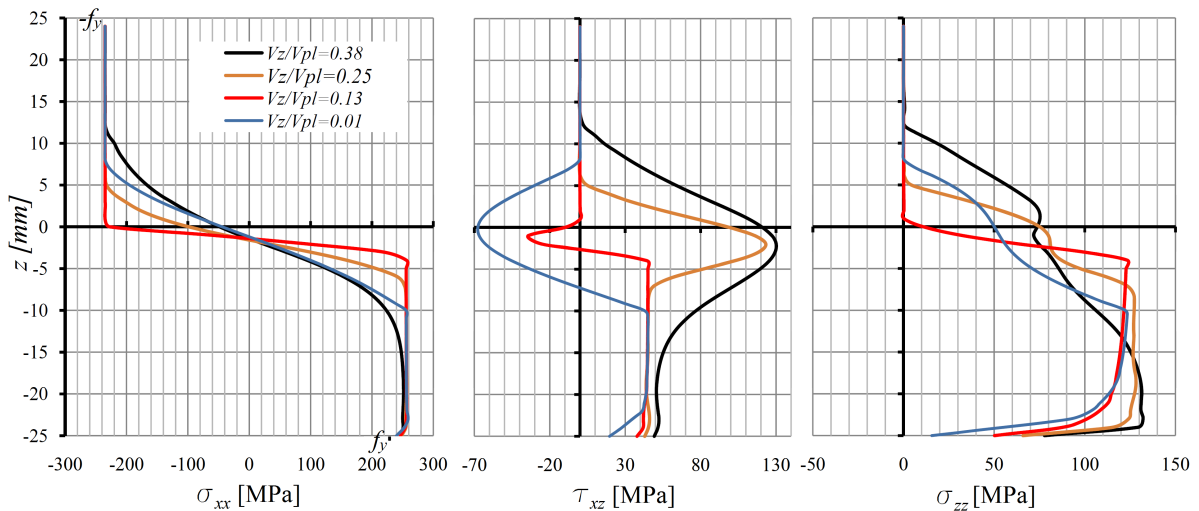


Figura 2.37: Distribuição de tensões na secção $x = 0$, *Mod5 R*

A propósito destes resultados, note-se que, na Figura 1.3, $\sigma_{xx} = f_y$ quando $\tau/\tau_y = 0.5$. Na Figura 2.35, para o caso do encastramento, quando $V_z/V_{pl} = 0.5$ a resistência à flexão é

igual a M_{pl} ($M_y/M_{pl}=1.0$).

2.2 Secções em I

Será analisada nesta secção a influência da interação dos esforços em secções em I, de acordo com Horne (1979), Hirt et al. (2006) e Green (1954b) (ver também Chakrabarty (2010)). Para efeitos de comparação, foram definidos três modelos de elementos finitos com diferentes condições de apoio.

2.2.1 Modelos analíticos

É assumido pelos vários autores que apenas a alma resiste a tensões de corte. Assim, a redução de resistência será então apenas aplicada ao momento plástico resistente da alma, de área $A_w = h_w t_w$, onde t_w e h_w representam a espessura e altura da alma, respectivamente. A área de cada banzo é representada por $A_f = b_f t_f$, onde t_f é a espessura do banzo e b_f a sua largura.

Seja M_{pl} o momento plástico total da secção em I, o qual pode ser definido como soma do momento plástico dos banzos, $M_{pl,f}$, e do momento plástico da alma, $M_{pl,w}$, ou seja

$$M_{pl} = M_{pl,f} + M_{pl,w}. \quad (2.43)$$

De um modo genérico, o momento plástico reduzido da secção pode ser definido como a soma do momento plástico dos banzos com o momento plástico reduzido da alma, $M_{pl,w,V}$,

$$M_{pl,V} = M_{pl,f} + M_{pl,w,V}. \quad (2.44)$$

Substituindo $M_{pl,f}$ de (2.43) na equação (2.44), esta assume a forma

$$M_{pl,V} = M_{pl} - M_{pl,w} + M_{pl,w,V} \quad (2.45)$$

e pode ser escrita numa forma adimensional, dependendo de um parâmetro, β , que relaciona o momento plástico dos banzos com o momento plástico total da secção e de um parâmetro η que representa o factor de redução do momento plástico da alma, ou seja,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{M_{pl,f}}{M_{pl}}, \\ \eta &= \frac{M_{pl,w,V}}{M_{pl,w}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Assim, pode escrever-se (2.45) como

$$M_{pl,V} = M_{pl} [(1 - \beta) \eta + \beta]. \quad (2.47)$$

Após recorrer a tabelas de perfis comerciais e determinar o valor de β para diversas secções, constatou-se que os valores mais comuns para secções IP e HE são respectivamente $\beta = 0.76$ e $\beta = 0.87$, os quais servirão como exemplo para as diferentes soluções apresentadas em seguida.

Drucker (1956)

Para o modelo de Drucker baseado em distribuições de tensões, as equações (2.12) e (2.13) definem a resistência plástica de uma secção rectangular à flexão na presença de esforço transversal,

$$M_{pl,V} = M_{pl} \left[1 - 0.06 \frac{V_z}{V_{pl}} + 0.614 \left(\frac{V_z}{V_{pl}} \right)^2 \left(0.039 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right) \right], \quad \frac{V_z}{V_{pl}} \leq 2/\pi \quad (2.48)$$

$$M_{pl,V} = M_{pl} \frac{4}{\pi - 2} \frac{V_z}{V_{pl}} \left(1 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right), \quad \frac{V_z}{V_{pl}} > 2/\pi. \quad (2.49)$$

Para re-escrever estas equações na forma de (2.47), há que definir o factor η para o modelo de Drucker,

$$\eta = 1 - 0.06 \frac{V_z}{V_{pl}} + 0.614 \left(\frac{V_z}{V_{pl}} \right)^2 \left(0.039 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right), \quad \frac{V_z}{V_{pl}} \leq 2/\pi \quad (2.50)$$

$$\eta = \frac{4}{\pi - 2} \frac{V_z}{V_{pl}} \left(1 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right), \quad \frac{V_z}{V_{pl}} > 2/\pi, \quad (2.51)$$

o que substituindo na equação (2.47), pode ser representado graficamente para os valores representativos de β (Figura 2.38).

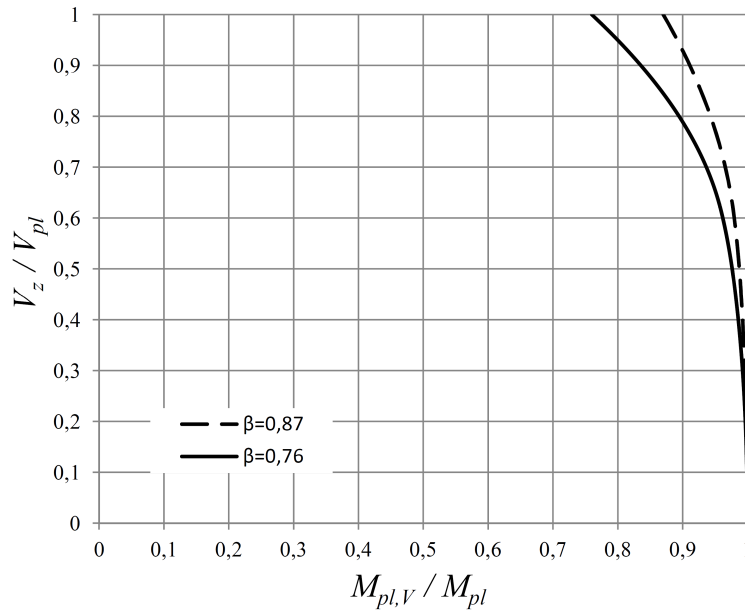


Figura 2.38: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$, solução de Drucker (1956)

Horne (1979)

A aplicação do modelo de Horne a uma secção em I é representada na Figura 2.39. Como demonstra o diagrama de tensões, no caso em que $V_z > (2/3)V_{pl}$, toda a alma está a resistir ao corte e a resistência dos banzos não é afectada.

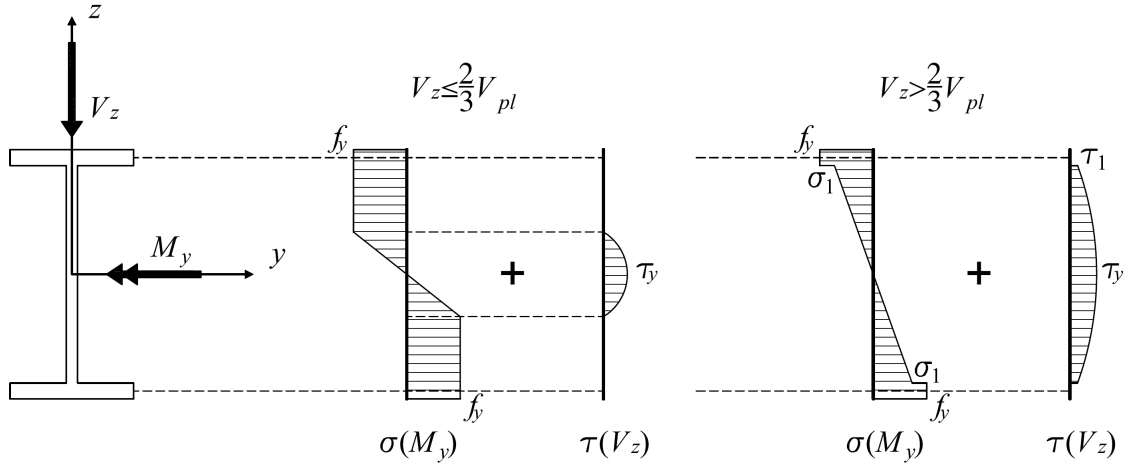


Figura 2.39: Distribuição de tensões numa secção transversal em I (Horne, 1979)

O momento plástico reduzido para este caso pode ser determinado utilizando a expressão (2.16) para o momento plástico reduzido da alma, substituindo-o em (2.45). Para $V_z \leq (2/3)V_{pl}$ tem-se assim,

$$M_{pl,V} = M_{pl} - \frac{3}{4} \left(\frac{V_z}{V_{pl}} \right)^2 M_{pl,w} \quad (2.52)$$

e, utilizando o mesmo processo, usando agora a equação (2.21) para $V_z > (2/3)V_{pl}$,

$$M_{pl,V} = M_{pl} - \left[1 - \frac{2}{3} \sqrt{1 - \left(3 \frac{V_z}{V_{pl}} - 2 \right)^2} \right] M_{pl,w}. \quad (2.53)$$

Estas equações podem também ser escritas na forma adimensional. Para isso basta definir o factor de redução do momento plástico da alma. Nos casos em que $V_z \leq (2/3)V_{pl}$ esse factor resulta da equação (2.16) e é definida por

$$\eta = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{V_z}{V_{pl}} \right)^2 \quad (2.54)$$

e, quando $V_z > (2/3)V_{pl}$, o factor de redução assume a seguinte forma

$$\eta = \frac{2}{3} \sqrt{1 - \left(3 \frac{V_z}{V_{pl}} - 2 \right)^2}. \quad (2.55)$$

A representação gráfica desta solução resulta da substituição dos factores de redução na equação (2.47). Na Figura 2.40 estão representadas as curvas de interação para os dois valores representativos de β .

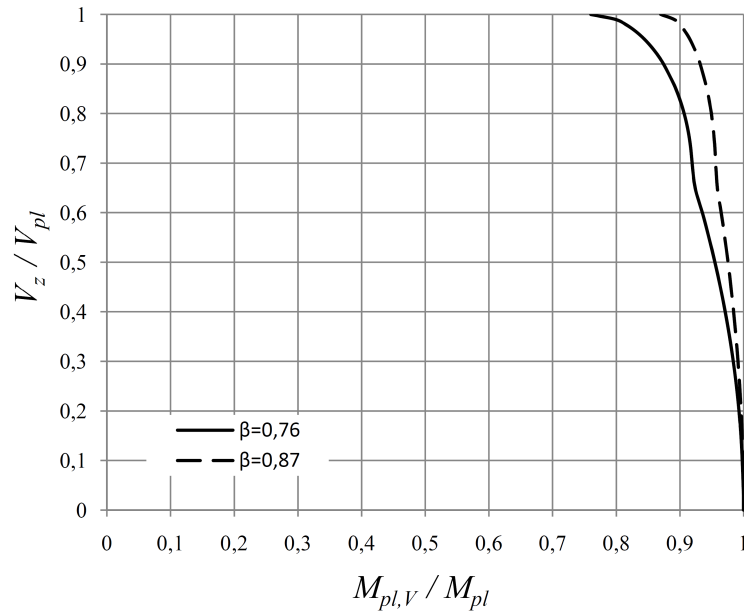


Figura 2.40: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$, solução de Horne (1979)

Hirt et al. (2006)

A distribuição de tensões numa secção em I, de acordo com o Modelo A de Hirt et al., é representada na Figura 2.41 e o momento plástico reduzido respectivo é obtido aplicando o mesmo processo do parágrafo anterior, neste caso com a introdução da equação (2.25), resultando na expressão

$$M_{pl,V} = M_{pl} - \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{V_z}{V_{pl}} \right)^2} \right] M_{pl,w}. \quad (2.56)$$

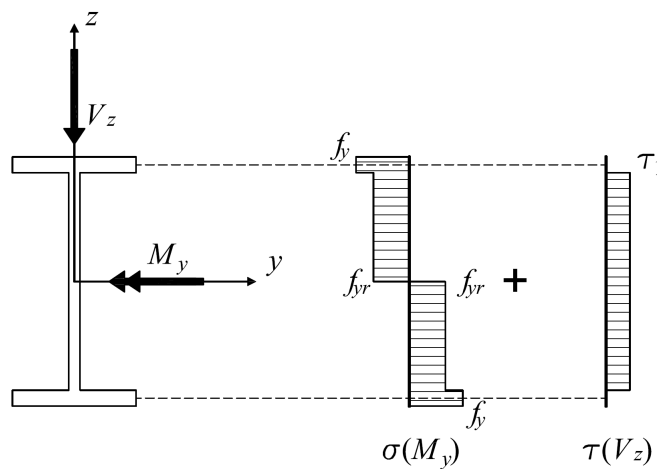


Figura 2.41: Distribuição de tensões numa secção transversal em I Modelo A (Hirt et al., 2006)

O factor de redução, η , para este modelo é obtido a partir da equação (2.25), o que fornece

$$\eta = \sqrt{1 - \left(\frac{V_z}{V_{pl}}\right)^2}. \quad (2.57)$$

Substituindo o factor de redução anterior na equação (2.47), podem-se representar as curvas de interação $M - V$ presentes na Figura 2.43a.

A expressão que resulta da aplicação do Modelo B de Hirt et al. a secções em I é determinada de modo idêntico ao anterior. Recorrendo à equação (2.28), o momento plástico reduzido da secção, para a distribuição de tensões representado na Figura 2.42, resulta em

$$M_{pl,V} = M_{pl} - \left(\frac{V_z}{V_{pl}}\right)^2 M_{pl,w}. \quad (2.58)$$

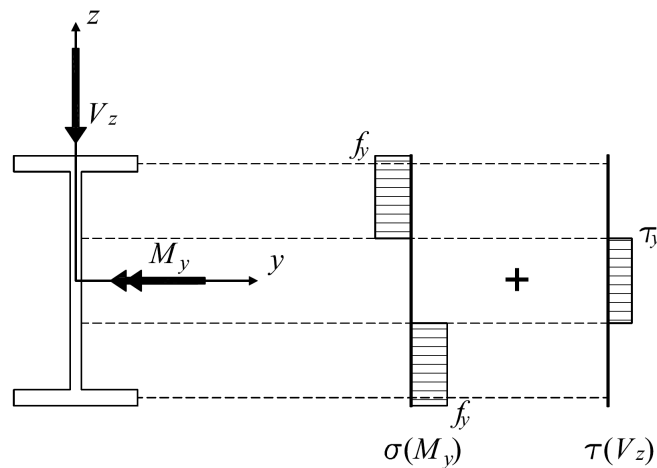


Figura 2.42: Distribuição de tensões numa secção transversal em I Modelo B (Hirt et al., 2006)

Tal como no Modelo A, a equação (2.58) pode ser re-escrita utilizando (2.47). Para isso é necessário conhecer a expressão do factor de redução, η , que para este caso é obtida a partir da equação (2.28), sendo dado por

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_z}{V_{pl}}\right)^2. \quad (2.59)$$

A Figura 2.43b apresenta a interação de esforços correspondente ao Modelo B de Hirt et al. aplicado a uma secção em I.

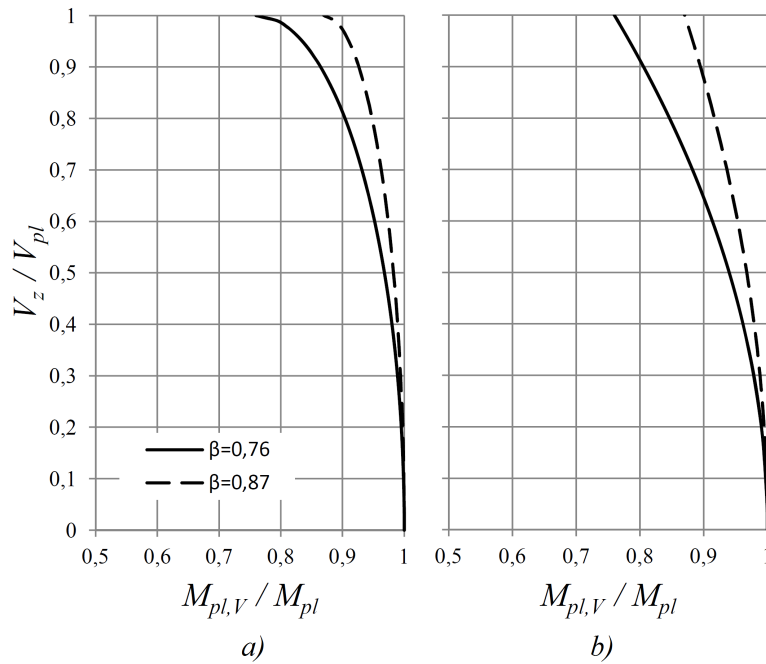


Figura 2.43: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ para a) Modelo A e b) Modelo B, soluções de Hirt et al. (2006)

Green (1954b)

De acordo com Green a redução do momento plástico de uma secção rectangular, pode ser aplicada à redução do momento plástico de alma de uma secção em I. A partir de (2.31) tem-se imediatamente

$$\eta = 1 + 1.23 \frac{V_z}{V_{pl}} \left(0.49 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right), \quad (2.60)$$

sendo válida apenas para $V_z/V_{pl} \leq 0.62$.

Também o efeito de *weak support*, analisado para uma secção rectangular, pode ser aplicado a secções em I (Green, 1954b). Para este caso o factor de redução é dado por

$$\eta = 1 + 1.45 \frac{V_z}{V_{pl}} \left(0.34 - \frac{V_z}{V_{pl}} \right), \quad (2.61)$$

válido para valores de $V_z/V_{pl} \leq 0.33$.

Na Figura 2.44 encontram-se as curvas de resistência dos dois modelos de Green (1954b). Verifica-se que, no caso da secção em I, esta atinge um acréscimo de resistência máxima à flexão superior ao da secção em H. No entanto, para valores de esforço transversal superior a 50% de V_{pl} a secção em H apresenta uma redução resistência inferior à do I. Isto é justificado pela contribuição do momento resistente da alma, que difere das secções em I para as secções em H.

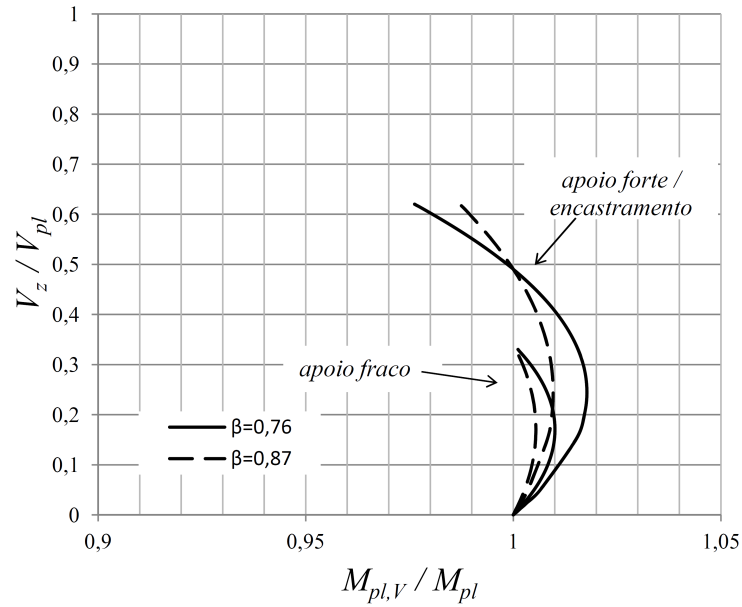


Figura 2.44: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$, soluções de Green (1954b)

Eurocódigo 3

Na secção 1.1.2 foi enunciada a abordagem do Eurocódigo 3 relativamente à redução do momento plástico resistente na presença de esforço transversal. No último ponto dessa secção foi apresentada uma expressão para o cálculo do momento plástico reduzido para secções em I (equação (1.2)). A representação gráfica dessa expressão encontra-se na Figura 2.45.

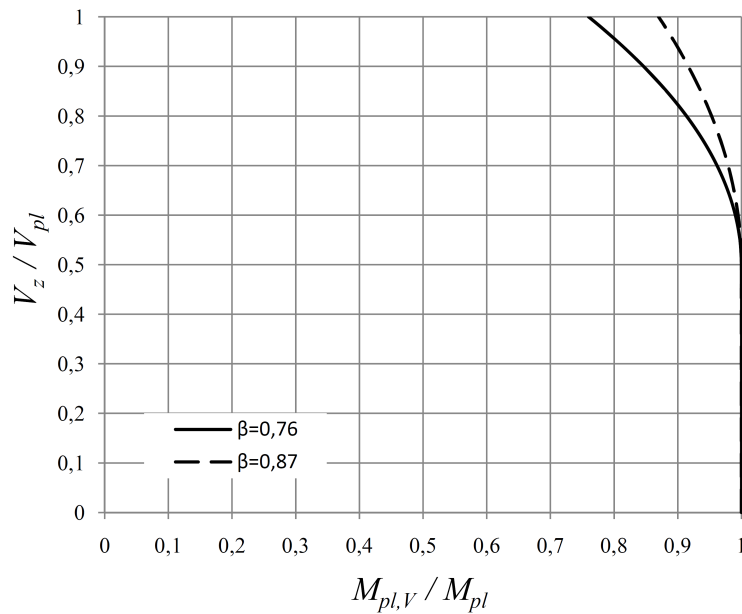


Figura 2.45: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$, Eurocódigo 3

Na Figura 2.46 estão representados as seis soluções abordados nesta secção, que traduzem a resistência plástica da secção transversal sujeita as esforços de flexão com esforço transversal. A Figura 2.46a é relativa a uma secção do tipo IP com $\beta = 0.76$ e a Figura 2.46b a uma secção do tipo HE com $\beta = 0.87$.

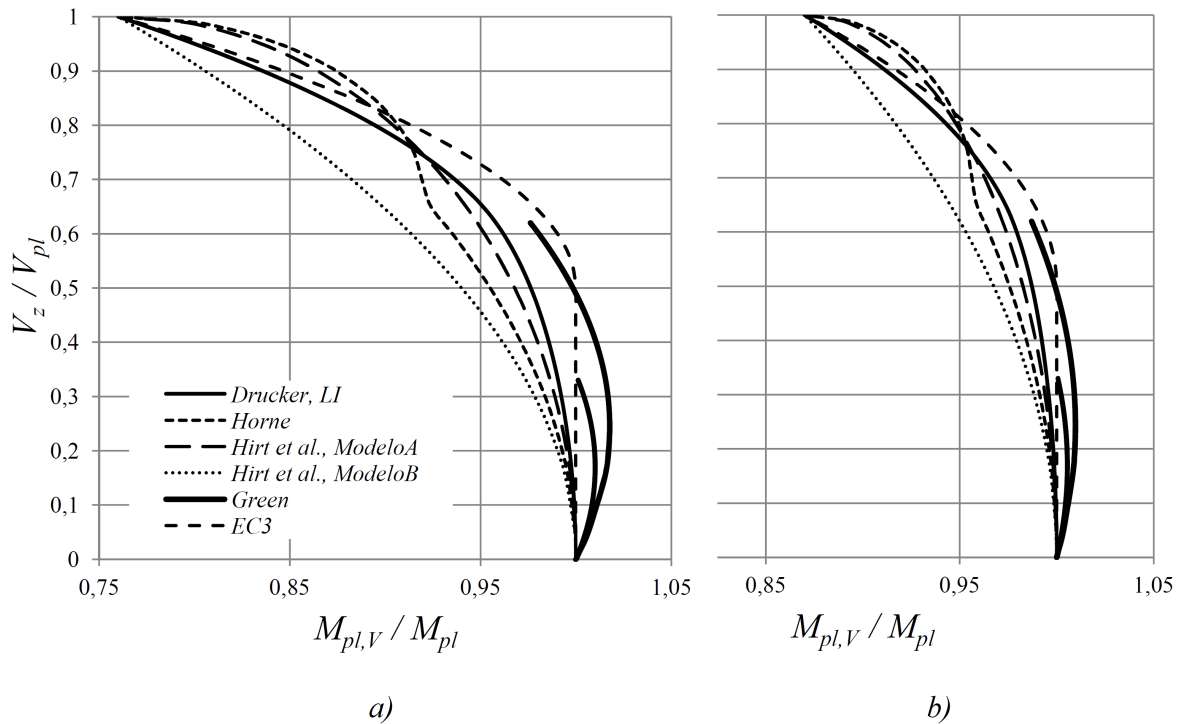


Figura 2.46: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ dos vários modelos analíticos para secções em I com a) $\beta = 0.76$ e b) $\beta = 0.87$

2.2.2 Soluções pelo Método dos Elementos Finitos

2.2.2.1 Discretização

Utilizando os resultados obtidos na secção 2.1.3.1, o refinamento da malha da secção em I será determinado de acordo com a altura da alma h_w . Assim a dimensão do lado de um elemento da malha, junto da secção crítica, é definido por $h_m = 2\%h_w$, sendo o refinamento da malha igual na alma e nos banzos.

2.2.2.2 Modelos

Para as secções em I foram estudados três modelos de elementos finitos. Para cada modelo foram analisadas duas secções diferentes, de modo a testar valores de β diferentes. Foram analisadas duas secções, I1 ($\beta = 0.75$) e I2 ($\beta = 0.87$), que foram definidas de modo a terem características semelhantes às secções do tipo IPE e HEB, respectivamente. As características das secções em análise, presentes na Tabela 2.1, foram determinadas para a notação indicada na Figura 2.47.

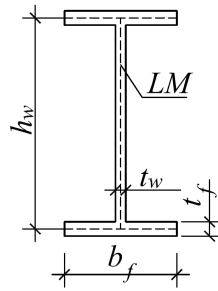


Figura 2.47: Secção I genérica

Tabela 2.1: Características das secções em I e H analisadas

Secção	h_w [mm]	b_f [mm]	t_w [mm]	t_f [mm]	M_{pl} [kNm]	V_{pl} [kN]	β
I1	300	150	7.1	10.7	150.7	289.0	0.75
I2	300	300	11	19	460.0	447.7	0.87

Modelo 1

Este primeiro modelo (*Mod1 I*) resulta da transposição do *Mod1 R*, utilizado na secção rectangular, para a secção em I. Isto implica que toda a secção transversal em $x = 0$ se encontra encastrada. O carregamento é aplicado em $x = L$, ao longo a alma.

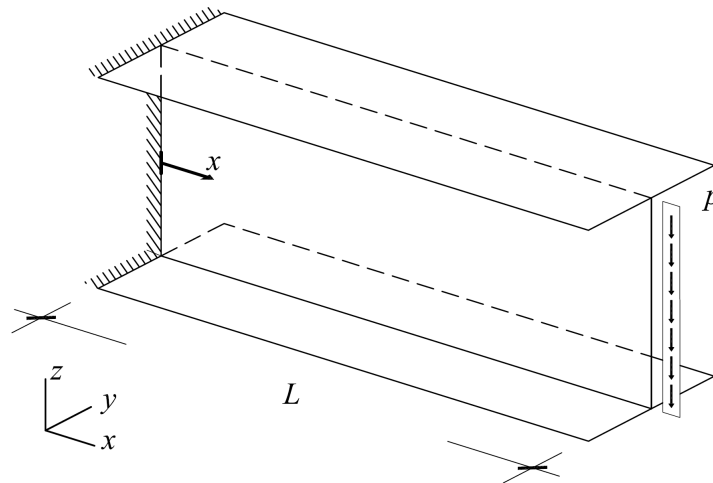


Figura 2.48: Modelo, *Mod1 I*

Na Figura 2.54 são apresentadas as curvas que traduzem a resistência à flexão das secções estudadas. As curvas que resultaram da análise deste modelo foram obtidas variando o parâmetro L/h_w entre 2 e 30 para a secção I1 e entre 4 e 65 para a secção I2. Estes intervalos de valores para os vãos das vigas foi definido de modo a abranger o maior intervalo possível de V_z/V_{pl} .

Modelo 2

Este segundo modelo (*Mod2 I*) é baseado no *Mod3 R*, para secções rectangulares. Consiste numa viga simplesmente apoiada com um troço em consola, estando os apoios em $x = 0$ e $x = L$ aplicados apenas na alma da secção. Na extremidade livre ($x = 2L$) é aplicada uma carga p ao longo da alma (Figura 2.49).

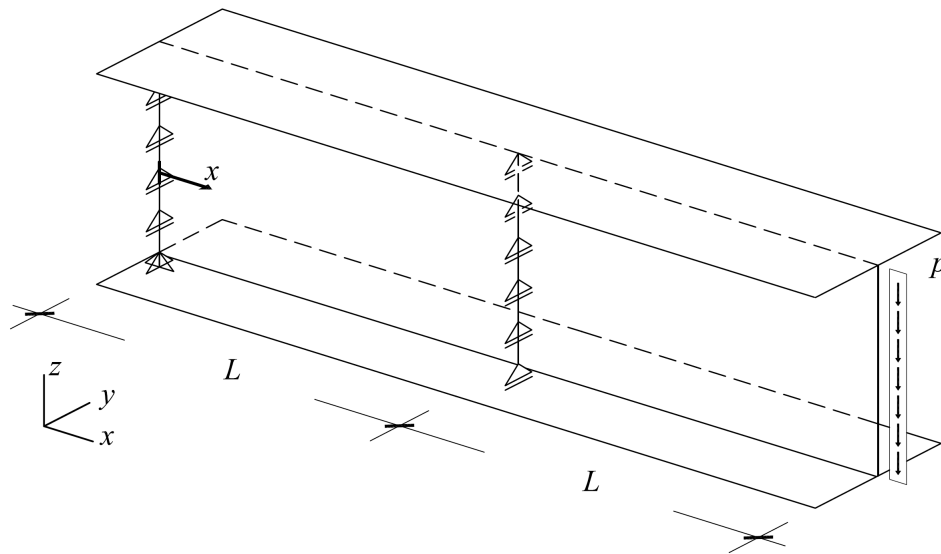


Figura 2.49: Modelo, *Mod2 I*

Tal como no *Mod3 R*, a análise deste modelo consistiu em variar o comprimento dos dois troços da viga em proporções iguais. À semelhança do *Mod1 I*, o parâmetro L/h_w variou entre 2 e 30 para a secção I1 e entre 4 e 65 para a secção I2. Os resultados são mais uma vez mostrados na Figura 2.54.

Modelo 3

O terceiro modelo (*Mod3 I*) tem como objectivo analisar o efeito de *weak support* em secções em I. Este é definido por uma viga em consola com uma carga p aplicada na extremidade livre, ao longo da alma, e o apoio é aplicado em $x < 0$, em toda a superfície do banzo inferior. Este apoio tem um comprimento L_{ap} muito maior que L e impede apenas os deslocamentos segundo z . Colocaram-se ainda dois apoios fixos em $x = -L_{ap}$ (Figura 2.50). Os resultados, os quais estão representados na Figura 2.54, foram determinados variando L/h_w entre 2 e 65 para a secção I1 e entre 4 e 65 para a secção I2.

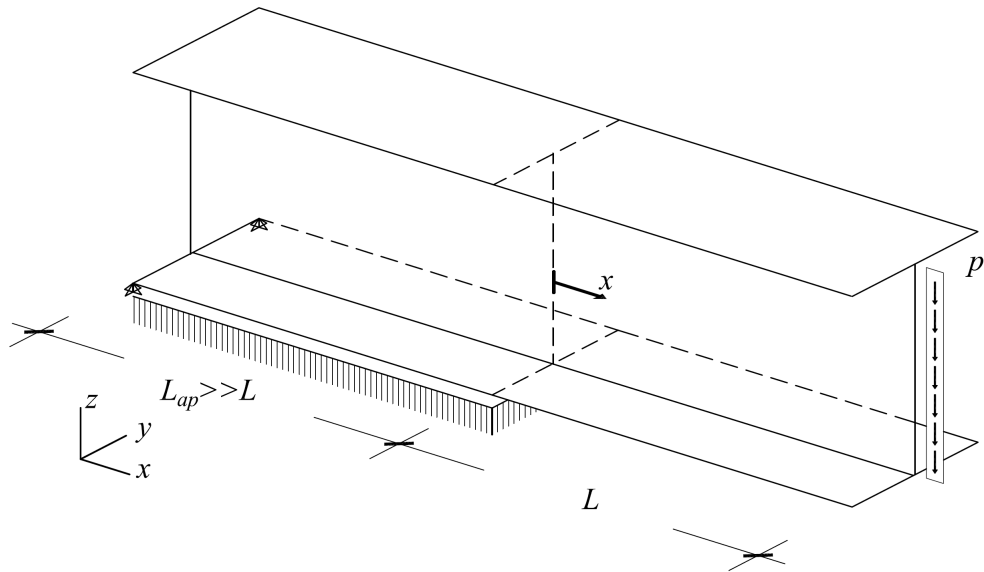


Figura 2.50: Modelo, *Mod3 I*

2.2.3 Análise geral dos resultados

Na Figura 2.54 estão representados os resultados obtidos nos três modelos numéricos para as secções I1 e I2. Observa-se que os resultados para o *Mod1 I* apresentam uma resistência à flexão superior a M_{pl} para um intervalo de V_z/V_{pl} maior, comparativamente à secção rectangular. Este acréscimo de resistência deve-se à presença de tensões normais transversais (σ_{yy}) nos banzos, o que permite aumentar o momento resistente dos banzos além de $M_{pl,f}$. Na Figura 2.51 estão representadas, para o *Mod1 I*, as tensões σ_{zz} e σ_{yy} para a secção I1 com $L/h_w = 3.33$.

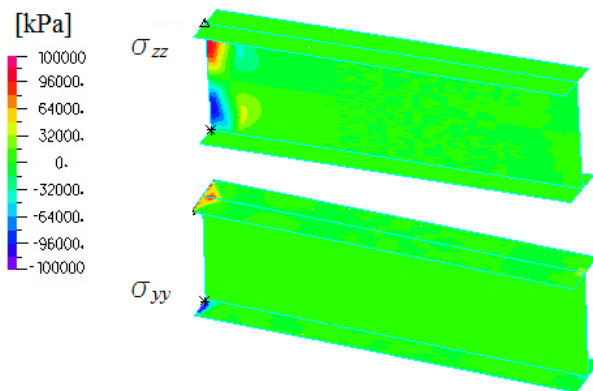


Figura 2.51: Distribuição de tensões no elemento, *Mod1 I*

No *Mod2 I* não ocorre um acréscimo de resistência tão elevado como o *Mod1 I*, isto porque, devido à livre deformação dos banzos, não se desenvolvem tensões σ_{yy} em $x = L$ (Figura 2.52). Assim, o acréscimo de resistência, para $V_z/V_{pl} < 0.5$, ocorre apenas devido à restrição da deformação transversal da alma, tal como se observou nas secções rectangulares.

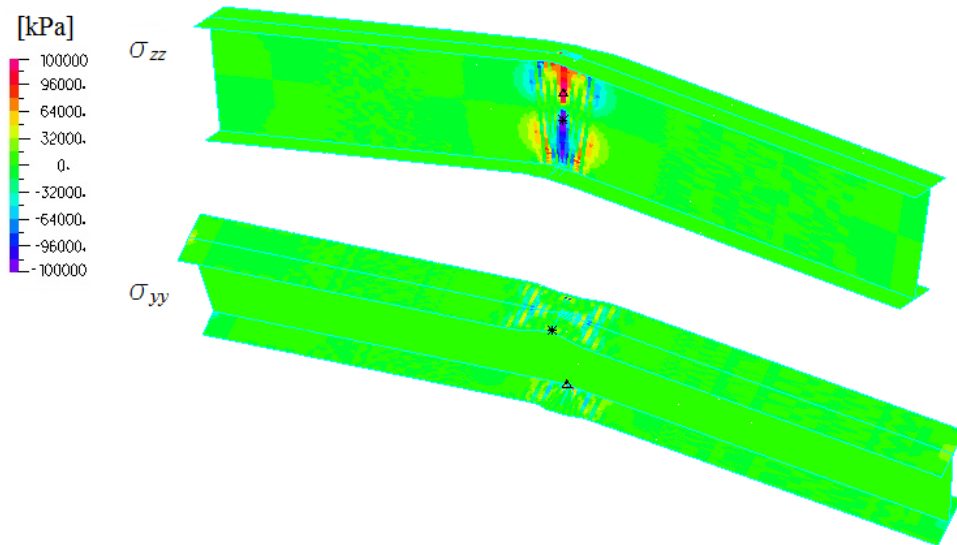


Figura 2.52: Distribuição de tensões no elemento, *Mod2 I*

Analisando agora o *Mod3 I*, na Figura 2.53 estão representadas as tensões σ_{zz} e σ_{yy} . Também neste caso a inexistência de tensões σ_{yy} no banzo superior faz com que não exista um acréscimo de resistência de $M_{pl,f}$. Quanto às tensões σ_{zz} , estas apresentam uma distribuição semelhante às verificadas no *Mod5 R*. Na Figura 2.54 observa-se que, para as duas secções, o efeito de *weak support* resulta numa redução de resistência à flexão, comparativamente ao *Mod2 I*. No entanto, existe um acréscimo de resistência para $V_z/V_{pl} > 0.35$. Este acréscimo é mais evidente para a secção I2 e pode ser justificado pela existência de tensões σ_{yy} na fronteira do apoio (Figura 2.53), que aumentam o momento resistente dos banzos. Estas tensões aumentam proporcionalmente com o aumento do esforço transversal, o que justifica o facto de, na secção I2, os resultados do *Mod2 I* e do *Mod3 I* coincidirem para valores de esforço transversal elevado.

A Figura 2.54 permite comparar os resultados da secção em I com a secção em H para os diferentes modelos numéricos. Na Figura 2.55 comparam-se os resultados numéricos, para as secções analisadas, com os modelos analíticos. A Figura 2.55a e 2.55b correspondem às secções I1 e I2, respectivamente. De todos os modelos analíticos abordados, os modelos propostos por Green (1954a,b) são os que apresentam um resultado bastante satisfatório comparando com os resultados obtidos no *Mod2 I* e *Mod3 I*. As curvas analíticas resultam das soluções de Green (1954a,b), substituindo o parâmetro β correspondente a cada secção, presente na Tabela 2.1. Como seria de esperar, os modelos *Mod2 I* e *Mod3 I* estão respectivamente relacionados com as soluções de *weak support* e *strong support* (encastramento).

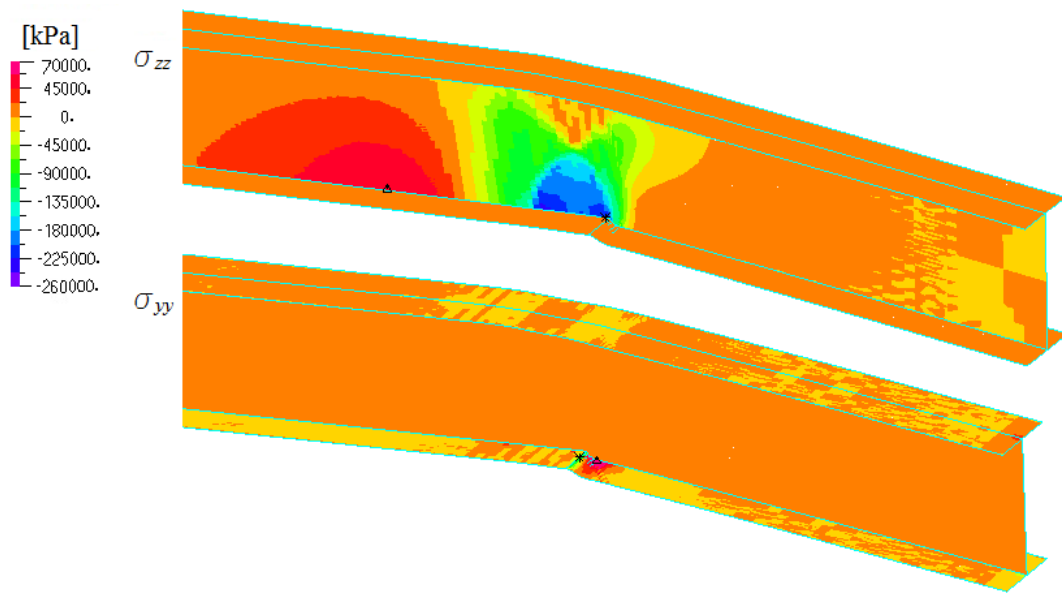


Figura 2.53: Distribuição de tensões no elemento, *Mod3 I*

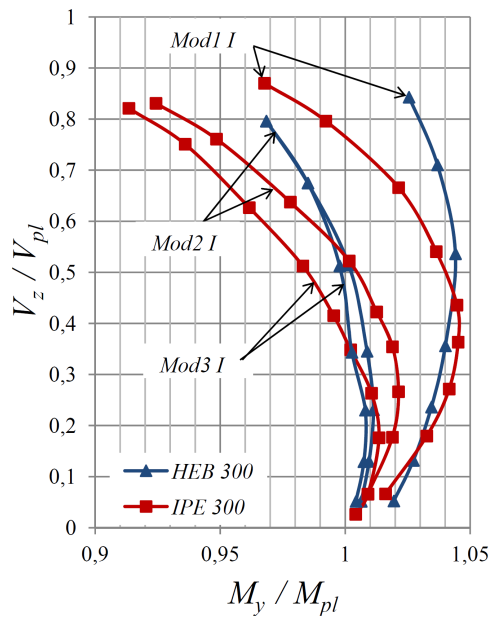


Figura 2.54: Relação entre V_z/V_{pl} e M_y/M_{pl} para os modelos analisados na secção 2.2.2

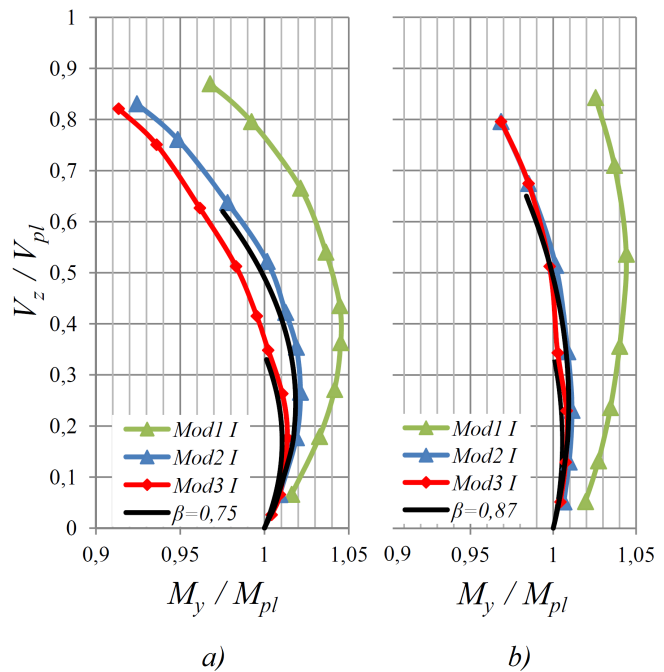


Figura 2.55: Comparação entre soluções analíticas de Green (1954a,b) e resultados numéricos para as secções a) I1 e b) I2

2.3 Secções tubulares quadradas (SHS)

Nesta secção serão apresentadas as adaptações dos modelos analíticos da secção 2.2.1 para secções SHS, que serão comparados com os resultados obtidos por modelos de elementos finitos. Um primeiro modelo consiste numa viga em consola com uma carga aplicada na extremidade livre, e um segundo modelo que consiste numa viga apoiada com um troço em consola, também com uma carga aplicada na extremidade, (modelos semelhantes aos utilizados nas secções em I, na secção 2.2.2.2).

2.3.1 Modelos analíticos

Os modelos analíticos para as secções SHS são semelhantes aos aplicados a secções em I abordados na secção 2.2.1. A principal diferença entre as secções SHS e secções em I reside no valor de β que, no caso das secções SHS ronda 0.70. Na Figura 2.56 representam-se os resultados obtidos quando se aplicam os modelos da secção 2.2.1 a uma secção SHS precisamente com $\beta = 0.70$.

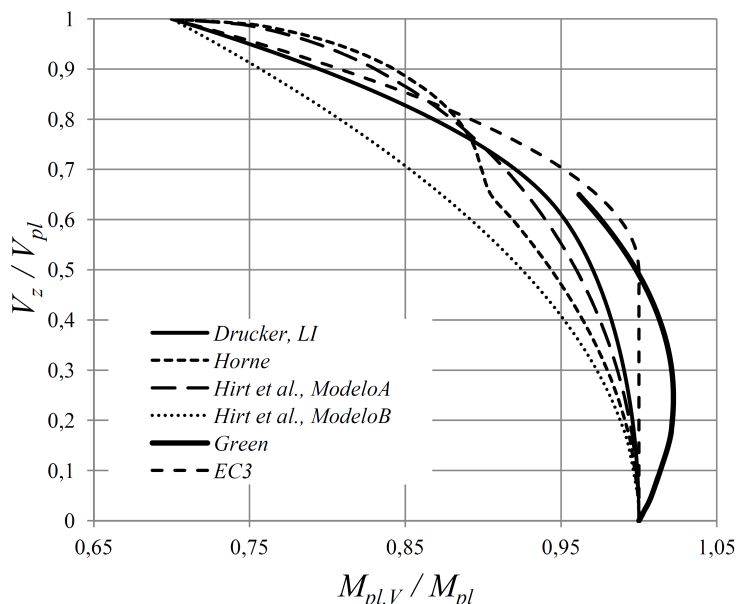


Figura 2.56: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ dos vários modelos analíticos adaptados a secções SHS com $\beta = 0.70$

Observa-se que no caso da solução de Green, as secções SHS atingem uma resistência máxima superior à registada nas secções em I, isto porque a contribuição do momento plástico das almas é superior no caso das secções SHS (30%). Também comparando com as secções em I, a resistência à flexão para $V_z/V_{pl} > 0.5$ é inferior.

2.3.2 Soluções pelo Método dos Elementos Finitos

2.3.2.1 Discretização

Tal como nos modelos para as secções em I, o refinamento da malha para os modelos SHS será determinado de acordo com a altura da alma h_w . Também neste caso, a dimensão do lado de

um elemento da malha é definido por $h_m = 2\%h_w$, perto da secção crítica. O refinamento da malha é igual na alma e nos banzos.

2.3.2.2 Modelos

As características da secção tubular analisada (SHS) estão presentes na Tabela 2.2, de acordo com a notação da Figura 2.57.

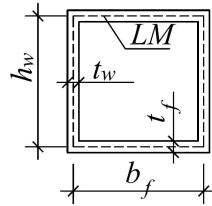


Figura 2.57: Secção genérica SHS

Tabela 2.2: Características da secção SHS

Secção	h_w [mm]	b_f [mm]	t_w [mm]	t_f [mm]	M_{pl} [kNm]	V_{pl} [kN]	β
SHS	200	200	10	10	141.0	542.7	0.67

Modelo 1

O primeiro modelo da secção SHS (*Mod1 SHS*) é semelhante ao *Mod1 I*, sendo que a única diferença reside no carregamento, que neste caso consiste em duas cargas distribuídas, cada uma delas aplicadas ao longo das almas da secção da extremidade livre (Figura 2.58).

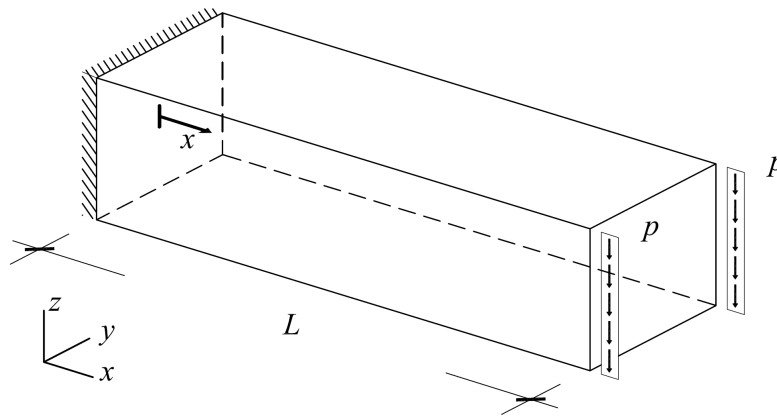


Figura 2.58: Modelo, *Mod1 SHS*

Os resultados para este modelo são representados na Figura 2.61, tendo sido obtidos calculando os esforços de colapso para $1.5 \leq L/h_w \leq 15$.

Modelo 2

À semelhança do *Mod2 I*, também as condições de apoio deste segundo modelo foram definidas de forma a permitir a livre deformação transversal dos banzos na secção crítica ($x = L$). Tal como no *Mod1 SHS*, o carregamento deste modelo é aplicado na extremidade $x = 2L$, com duas cargas distribuídas aplicadas ao longo das almas (Figura 2.59).

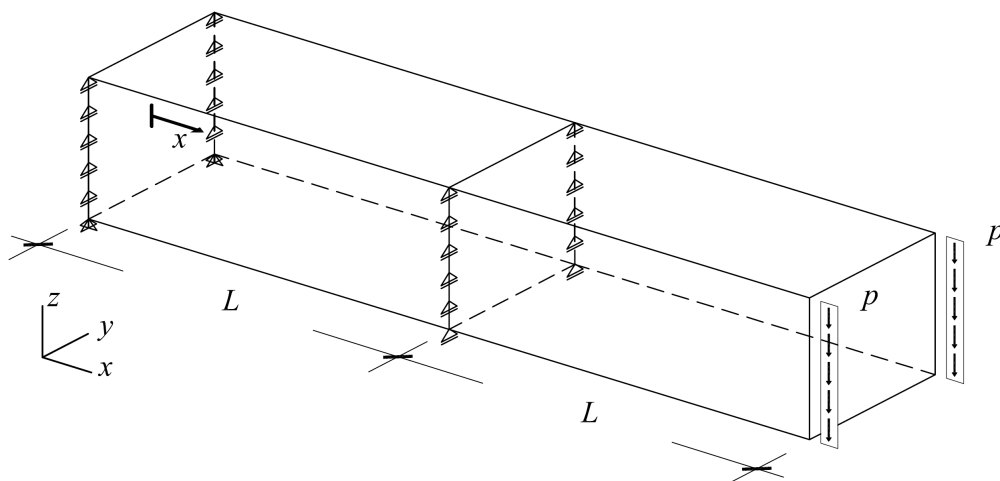


Figura 2.59: Modelo, *Mod2 SHS*

Tal como no primeiro modelo, L/h_w varia entre 1.5 e 15, o que permitiu obter a curva da Figura 2.61.

2.3.3 Análise geral dos resultados

Na Figura 2.61 são apresentados os resultados para os dois modelos numéricos e a solução analítica de Green. O primeiro modelo apresenta uma resistência máxima $M_y/M_{pl} \approx 1.08$, muito superior ao registado nas secções em I. Pode-se também observar que a libertação da deformação transversal dos banzos no *Mod2 SHS* resultou numa ligeira redução da resistência à flexão. No entanto, essa redução de resistência não é tão significativa como a que se verificou no caso das secções em I. Este acréscimo de resistência podem ser explicado pelo facto de, em $x = L$ (*Mod2 SHS*), existirem tensões σ_{yy} nos banzos (ver Figura 2.60), causadas pela restrição (parcial) à deformação das almas nos banzos.

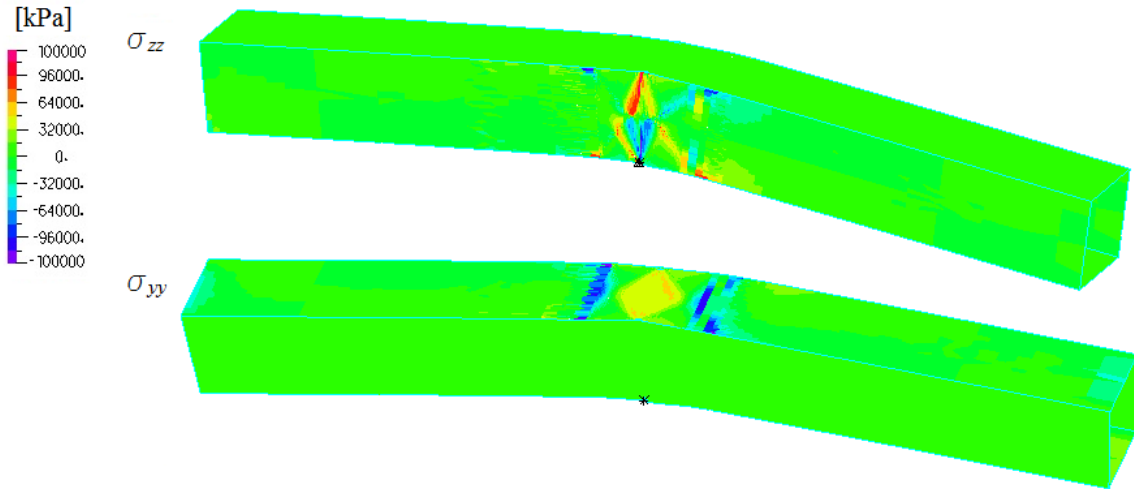


Figura 2.60: Distribuição de tensões no modelo, *Mod2 SHS*

Numa tentativa de adaptar o modelo de Green (1954b) para secções em I a secções tubulares (SHS), verifica-se que a solução analítica se distancia da solução obtida pelo *Mod2 SHS*, não resultando numa boa aproximação.

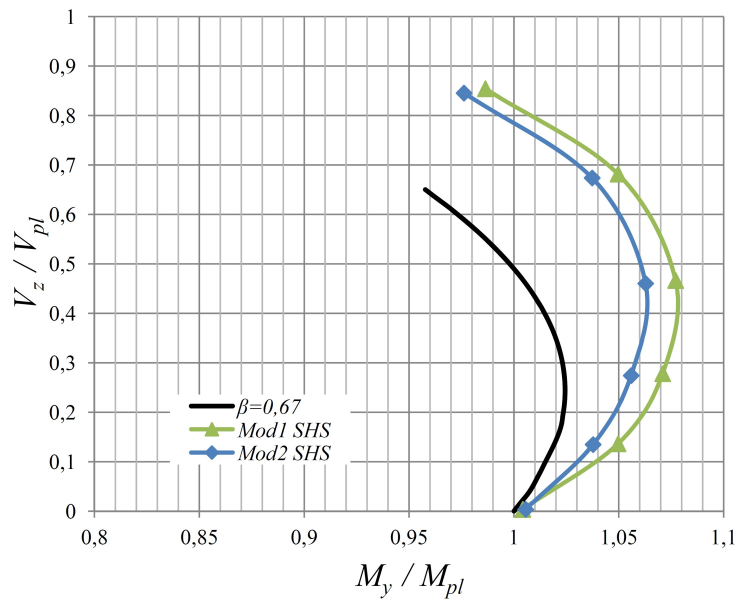


Figura 2.61: Comparação entre a solução analítica de Green e resultados numéricos para a secção SHS

Capítulo 3

Estudo da Interacção $M_y + V_y$

Este capítulo tem como objectivo estudar o efeito do esforço transversal V_y na resistência plástica da secção à flexão em torno do eixo y ($M_{pl,y}$). Mais especificamente, de que forma é que as forças de corte nos banzos reduzem o momento plástico resistente. Esta análise será feita em conjunto com o esforço transversal V_z . Serão também feitas algumas análises para vigas sujeitas à flexão desviada na presença de esforço transversal.

3.1 Secções em I

3.1.1 Modelos analíticos

A adaptação do Modelo A de Hirt et al. (2006) à redução da resistência dos banzos baseia-se na mesma hipótese da redução da resistência da alma, definida pelas equações (2.23) e (2.24). Admitem-se as distribuições de tensões representadas na Figura 3.1, originada pela combinação dos esforços M_y , V_z e V_y . No caso dos banzos, a tensão de cedência reduzida $f_{yr,2}$ é determinada através das tensões de corte originadas pelo esforço transversal V_y . A tensão de cedência reduzida da alma é então definida por $f_{yr,1}$.

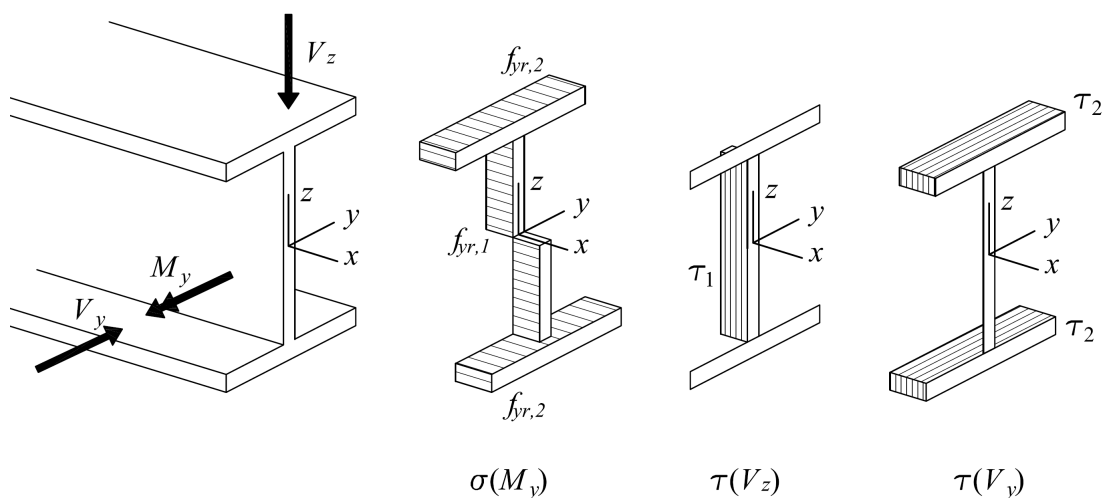


Figura 3.1: Adaptação do Modelo A de distribuição de tensões de Hirt et al. (2006) para a interacção de esforços $M_y + V_z + V_y$

Tal como na equação (2.23), as tensões de cedência reduzidas, $f_{yr,1}$ e $f_{yr,2}$, resultam do critério de von Mises, sendo definidas por

$$f_{yr,1} = \sqrt{f_y^2 - 3\tau_1^2} \quad (3.1)$$

$$f_{yr,2} = \sqrt{f_y^2 - 3\tau_2^2}, \quad (3.2)$$

onde $\tau_1 = V_z/(h_w t_w)$ e $\tau_2 = V_y/(2b_f t_f)$. O momento plástico resistente reduzido da secção, $M_{pl,V}$, é determinado através da distribuição das tensões normais σ , e pode ser expresso na seguinte forma

$$M_{pl,V} = M_{pl,f,V} + M_{pl,w,V} = W_{pl,f} f_{yr,2} + W_{pl,w} f_{yr,1} \quad (3.3)$$

onde $M_{pl,f,V}$ representa o momento plástico reduzido dos banzos, $W_{pl,f}$ e $W_{pl,w}$ são respectivamente os módulos de flexão plásticos dos banzos e da alma.

Utilizando o mesmo procedimento utilizado para determinar a equação (2.25), a expressão anterior pode ser definida por

$$M_{pl,V} = M_{pl,f} \sqrt{1 - \left(\frac{V_y}{V_{pl,y}}\right)^2} + M_{pl,w} \sqrt{1 - \left(\frac{V_z}{V_{pl,z}}\right)^2}, \quad (3.4)$$

onde $V_{pl,y}$ define o esforço transversal plástico resistente segundo a direcção y e $V_{pl,z}$ o esforço transversal plástico resistente segundo a direcção z . No caso da Figura 3.1, o esforço resistente $V_{pl,y}$ é dado pelos banzos e $V_{pl,z}$ corresponde à resistência da alma.

As curvas que definem a resistência da secção em I, para a combinação de esforços $M_y + V_z + V_y$ para o Modelo A de Hirt et al. (2006), são apresentadas na Figura 2.43, para uma secção transversal com $\beta = 0.76$. Observa-se que para valores de $V_y/V_{pl,y}$ pequenos existe uma ligeira redução de resistência, mas quando o esforço transversal V_y é mais elevado a redução da resistência é mais significativa.

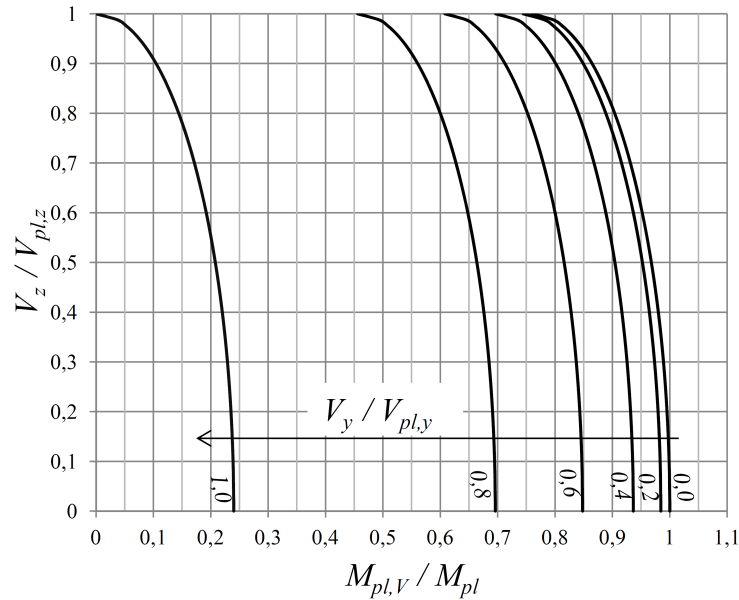


Figura 3.2: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ com influência de V_y para uma secção com $\beta = 0.76$, Modelo A de Hirt et al. (2006)

3.1.2 Modelos de elementos finitos

3.1.2.1 Discretização

A discretização da malha de elementos finitos utilizada nestes modelos foi semelhante à utilizada no Capítulo 2, sendo mais refinada junto da secção crítica, tendo os elementos da malha a mesma dimensão nos banzos e na alma.

3.1.2.2 Modelos

Foram analisados dois modelos, para uma secção em I já considerada no Capítulo 2: I1, cuja geometria e esforços resistentes estão presentes na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Características da secção I1

Secção	h_w [mm]	b_f [mm]	t_w [mm]	t_f [mm]	$M_{pl,y}$ [kNm]	$M_{pl,z}$ [kNm]	$V_{pl,z}$ [kN]	$V_{pl,y}$ [kN]	β
I1	300	150	7.1	10.7	150.7	29.2	289.0	435.5	0.75

Modelo 1

Este modelo (*Mod1V_y I*) tem como objectivo verificar a influência de V_y para valores $V_z/V_{pl,z}$ reduzidos. Consiste numa viga em consola (Figura 3.3), sujeita a esforços de corte (V_z) e de flexão (M_y) devido à carga p . O carregamento relativo à carga g sujeita os banzos a um estado de corte puro, o que permite que, na secção crítica ($x = 0$), exista esforço de corte V_y sem momento flector M_z .

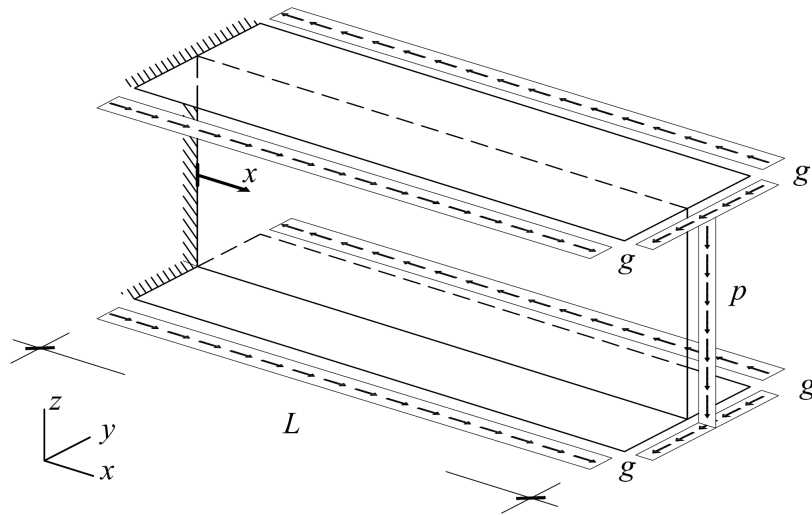


Figura 3.3: Modelo, *Mod1V_y I*

Os resultados representam-se na Figura 3.4, tendo sido obtidos variando a relação g/p e a relação entre o vão e altura da alma (L/h_w). Cada umas das curvas $V_y/V_{pl,y}$ apresentadas está associada a um determinado valor de g/p (no caso de $V_y/V_{pl,y} = 0.20$, o valor de g/p é igual a 2.41 e, para $V_y/V_{pl,y} = 0.80$, g/p é igual a 13.66). Em cada curva $V_y/V_{pl,y}$, os diferentes valores de M_y/M_{pl} foram obtidos variando L/h_w entre 6.7 e 40. Apenas foram determinados resultados para valores de $V_z/V_{pl,z}$ reduzidos, conforme já foi referido.

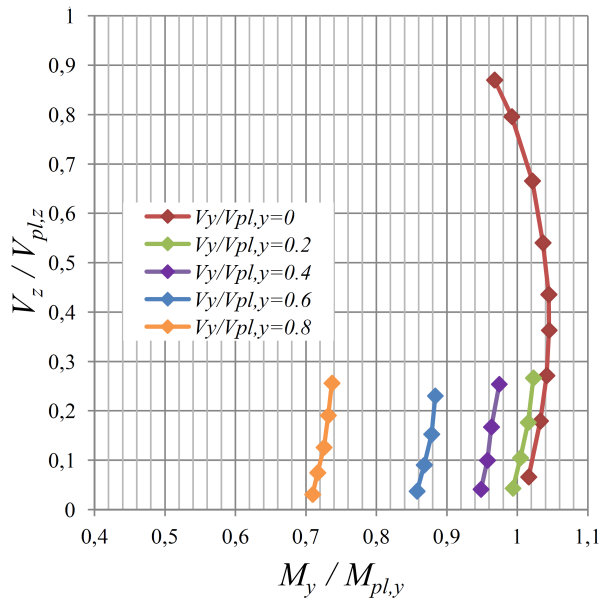


Figura 3.4: Relação entre $V_z/V_{pl,z}$ e M_y/M_{pl} para resultados do $Mod1V_y I$ com a secção II

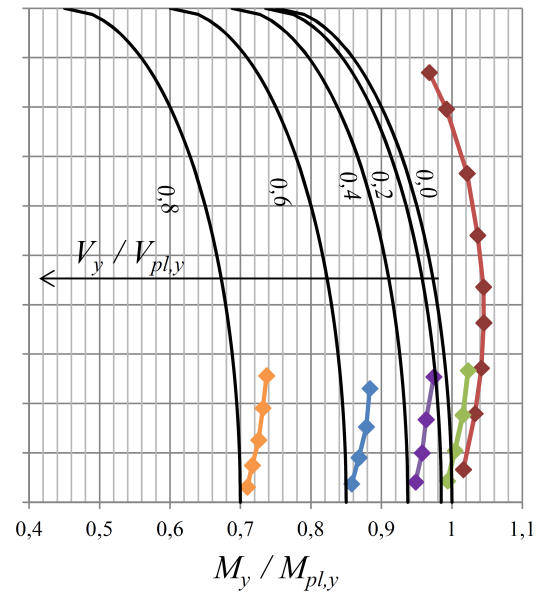


Figura 3.5: Comparação entre modelo analítico e resultados numéricos, $Mod1V_y I$

Analisando os resultados da Figura 3.4, verifica-se que a presença do esforço transversal V_y influencia significativamente a resistência à flexão da viga. Em particular, a resistência à flexão é inferior a M_{pl} para $V_y/V_{pl,y} > 20\%$.

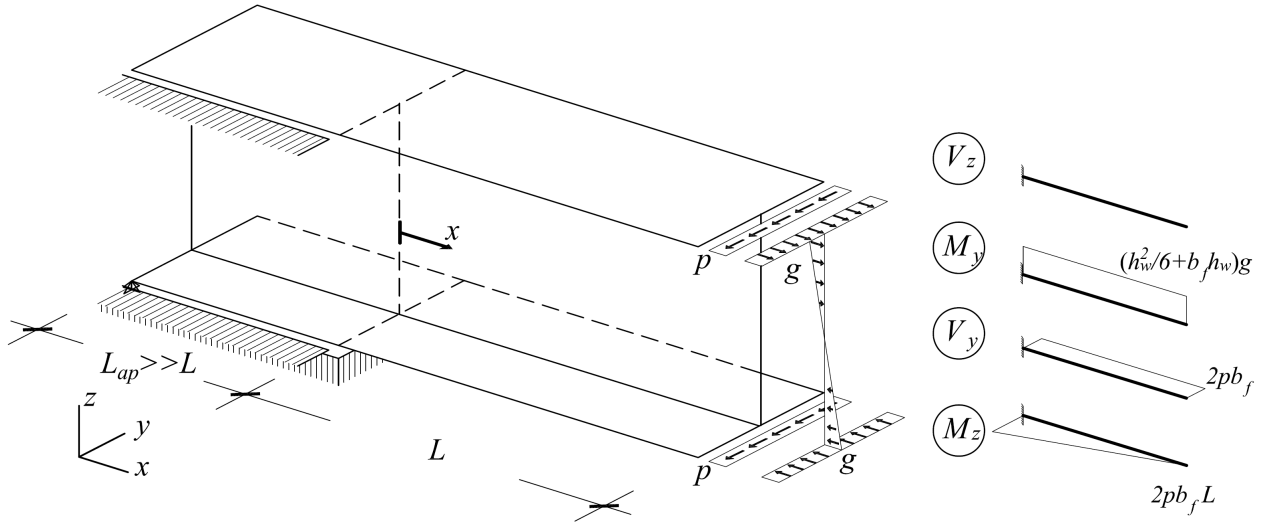
Na Figura 3.5 comparam-se os resultados numéricos com o modelo analítico proposto. Para valores muito baixos de $V_z/V_{pl,z}$, o modelo analítico apresenta uma aproximação relativamente razoável. À medida que $V_z/V_{pl,z}$ aumenta, os resultados do modelo analítico tornam-se progressivamente mais do lado da segurança.

Note-se contudo, que o carregamento g é pouco provável de ocorrer num caso real. No entanto, é de salientar que, mesmo sendo este um caso extremo, ocorre uma redução significativa da resistência à flexão.

Modelo 2

O objectivo deste segundo modelo é analisar o efeito do *weak support* numa viga sujeita à flexão desviada com esforço transversal. Deste modo, foram definidas as condições de apoio “fraco” nos banzos, tal como mostra a Figura 3.6. Foram analisadas duas combinações de carregamentos diferentes para a secção II ($\beta = 0.75$). A primeira combinação ($Mod2V_y I$) sujeitou a secção crítica à combinação de esforços $M_y + M_z + V_y$ (Figura 3.6) e, na segunda combinação ($Mod2V_z I$), a secção crítica foi sujeita a $M_y + M_z + V_z$ (Figura 3.7). Em ambos os modelos aplicou-se em primeiro lugar o valor do momento concentrado pretendido e em seguida levou-se a viga à rotura com a carga relativa ao esforço transversal.

A primeira combinação ($Mod2V_y I$) consistiu em aplicar, em $x = L$, um momento concentrado definido pela carga g , sendo também aplicadas duas cargas p distribuídas ao longo dos banzos que originam V_y e M_z (Figura 3.6). Neste modelo, a razão L/h_w variou entre 0.5 e 67. Os resultados numéricos estão presentes na Figura 3.8, onde são comparados com os


 Figura 3.6: Modelo, $Mod2V_y I$

obtidos através da expressão do EC3 para flexão desviada, a qual é dada por

$$\left(\frac{M_{y,Ed}}{M_{pl,y,V,Rd}} \right)^2 + \frac{M_{z,Ed}}{M_{pl,z,V,Rd}} \leq 1, \quad (3.5)$$

válida para secções em I ou H sem presença de esforço axial. No caso particular da combinação de esforços do $Mod2V_y I$ ($V_z = 0$) a equação (3.5) pode ser expressa por

$$\frac{M_z}{M_{pl,z}} = [(1 - \beta) \eta + \beta] \left[1 - \left(\frac{M_y}{M_{pl,y}} \right)^2 \right], \quad (3.6)$$

onde $\eta = (1 - \rho)$ (ρ é o factor de redução do EC3, apresentado em (1.1)).

No segundo carregamento ($Mod2V_z I$) aplicaram-se, em $x = L$, dois momentos concentrados nos bantos, correspondentes a M_z , e uma carga distribuída na alma responsável pelos esforços V_z e M_y . Os resultados para o $Mod2V_z I$, presentes na Figura 3.9, foram determinados para $2.5 < L/h_w < 67$.

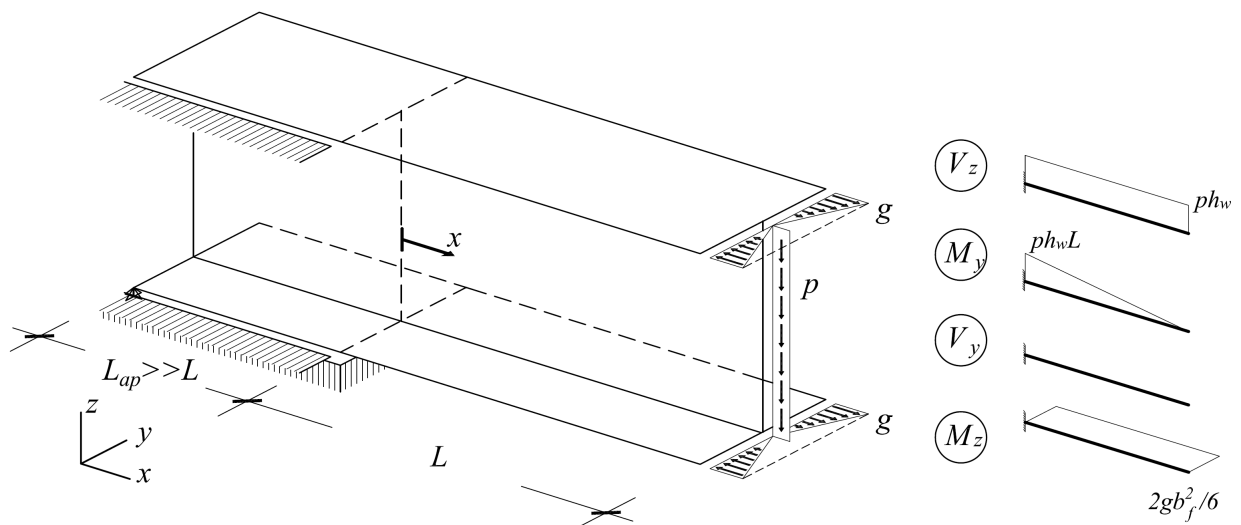


Figura 3.7: Modelo, $Mod2V_z I$

Para o $Mod2V_z I$ ($V_y = 0$), a equação (3.5) pode-se representar como

$$\frac{M_y}{M_{pl,y}} = [(1 - \beta)\eta + \beta] \sqrt{1 - \frac{M_z}{M_{pl,z}}}. \quad (3.7)$$

Pode-se observar na Figura 3.8 que, nas curvas para $M_y/M_{pl,y}$ igual a 0 e 0.2 o critério do EC3 está contra a segurança para $V_y/V_{pl,y} > 0.35$, visto que este fornece um valores de resistência superiores aos obtidos pelos resultados numéricos. Nas restantes curvas a segurança do elemento é verificada, no entanto, para esses casos, o critério do EC3 mostra-se algo conservativo.

No caso da Figura 3.9, apenas a curva $M_z/M_{pl,z} = 0$ apresenta resultados contra a segurança para $V_z/V_{pl,z} > 0.35$. Também para a combinação de esforços do $Mod2V_z I$, o critério do EC3 (equação (3.7)) apresenta resultados conservativos, embora não sejam tão pronunciados como o verificado através do critério dado pela equação (3.6).

Baptista (2011) propõe um critério alternativo para a verificação de segurança de secções em I sujeitas a flexão desviada. Esse critério é dado por equações que dependem de características específicas das secções transversais e dos esforços actuaentes. Na Figura 3.10 é comparado o critério proposto por Baptista com o critério do EC3 (equação (3.5)) para a secção I1. Observa-se que a solução de Baptista apresenta resistências superiores à do EC3.

Os valores correspondentes à aplicação da metodologia de Baptista (2011) à secção I1 estão, igualmente, representados nas Figuras 3.8 e 3.9. Verifica-se que os resultados não são tão conservativos como os propostos pelo EC3 e se aproximam dos resultados numéricos obtidos.

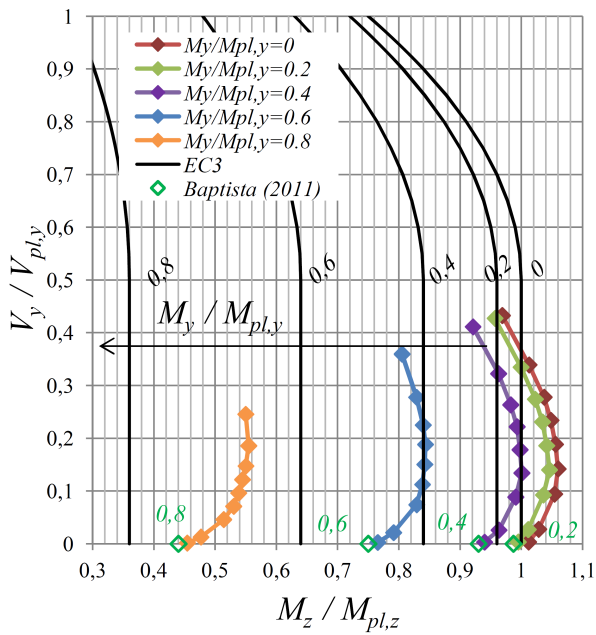


Figura 3.8: Comparação entre o EC3 e resultados numéricos, $Mod2V_y I$

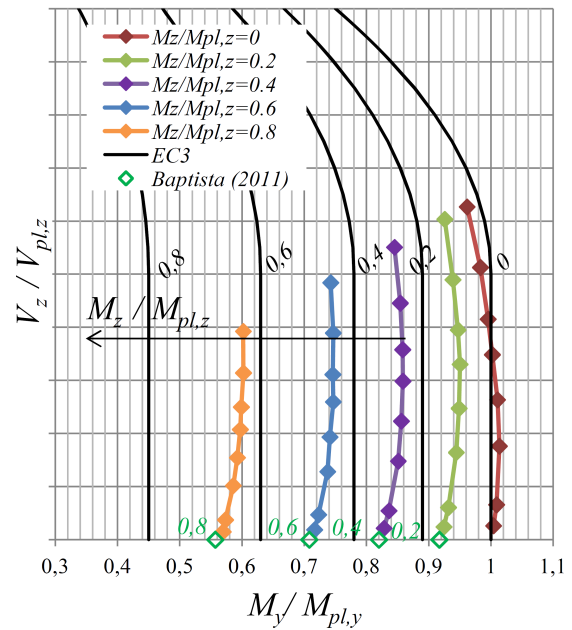


Figura 3.9: Comparação entre o EC3 e resultados numéricos, $Mod2V_z I$

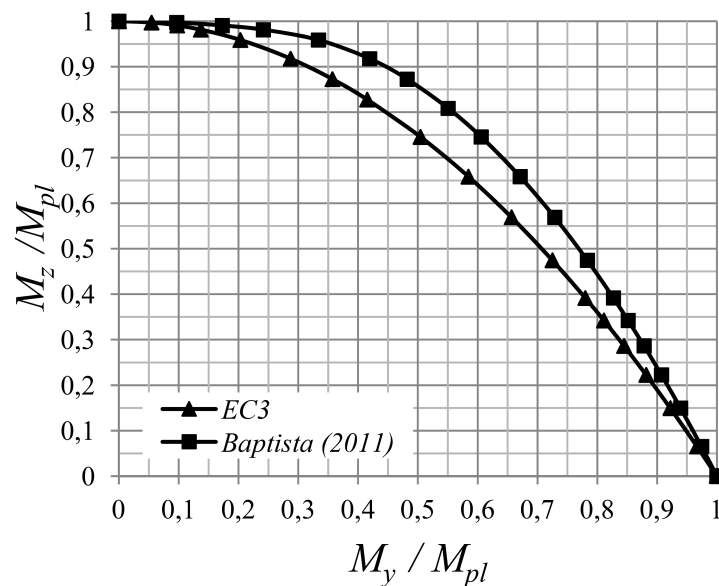


Figura 3.10: Comparação entre critérios de verificação à flexão desviada para secção I1, EC3 VS Baptistina (2011)

3.2 Secções tubulares quadradas - SHS

3.2.1 Modelos analíticos

Tal como foi feito na secção 2.3.1 do Capítulo 2, o modelo analítico para secções SHS resulta de uma adaptação do modelo de distribuição de tensões para secções em I referido na secção 3.1.1. Como já foi referido no capítulo anterior, o valor típico para β , para uma secção SHS, é 0.70.

Na Figura 3.11 estão representadas, as curvas do modelo analítico para diferentes valores de $V_y/V_{pl,y}$ (para $\beta = 0.70$). Estas apresentam um andamento idêntico ao registado na secção em I, sendo que a única diferença reside na relação $M_{pl,f}/M_{pl}$.

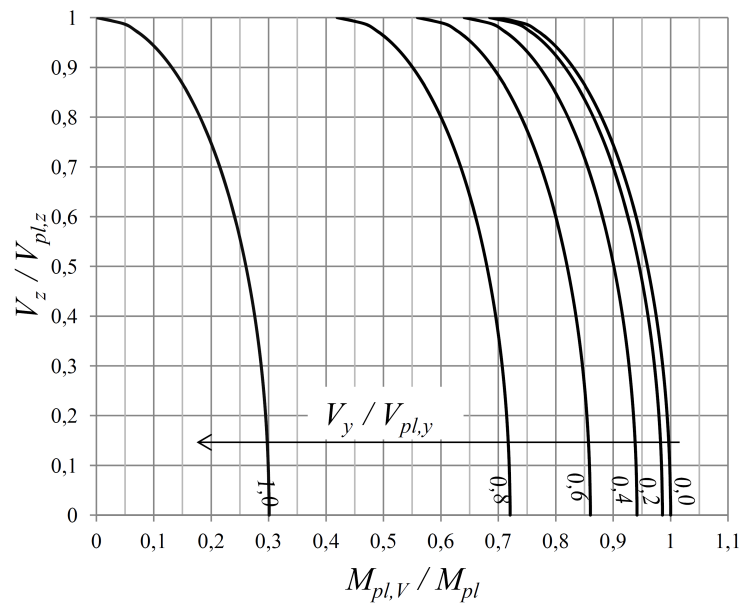


Figura 3.11: Relação entre V_z/V_{pl} e $M_{pl,V}/M_{pl}$ com influência de V_y para uma secção com $\beta = 0.70$, Modelo A de Hirt et al. (2006)

3.2.2 Modelos de elementos finitos

3.2.2.1 Discretização

A discretização da malha de elementos finitos nestes modelos foi semelhante à utilizada nos modelos do Capítulo 2 para as secções SHS. Nestes modelos adoptou-se um refinamento maior nas “zonas 0-plásticas”.

3.2.2.2 Modelos

Para a análise de secções tubulares sujeitas à combinação de esforços $M_y + V_z + V_y$, foram utilizados dois modelos de elementos finitos. As características da secção SHS utilizada, já analisada no Capítulo 2, estão indicadas na Tabela 3.2

Tabela 3.2: Características da secção SHS

Secção	h_w [mm]	b_f [mm]	t_w [mm]	t_f [mm]	$M_{pl,y}$ [kNm]	$M_{pl,z}$ [kNm]	$V_{pl,z}$ [kN]	$V_{pl,y}$ [kN]	β
SHS	200	200	10	10	141.0	141.0	542.7	542.7	0.67

Modelo 1

O primeiro modelo (*Mod1V_y SHS*) é composto por uma viga em consola, onde as cargas p são responsáveis pelos esforços V_z e M_y e as cargas g responsáveis por V_y . De modo a anular o momento flector M_z na secção de encastramento (que resulta das cargas g aplicadas ao longo dos banzos), foi aplicado um binário $M = 2gb_fL$ em $x = L$ (Figura 3.12a). Os carregamentos aplicados resultam na distribuição de esforços representada na Figura 3.12b. Este modelo possui uma zona elástica em quase todo o comprimento da viga, para garantir que a secção crítica corresponde a $x = 0$, onde se encontra a zona elasto-plástica com um comprimento igual a $1.5h_w$.

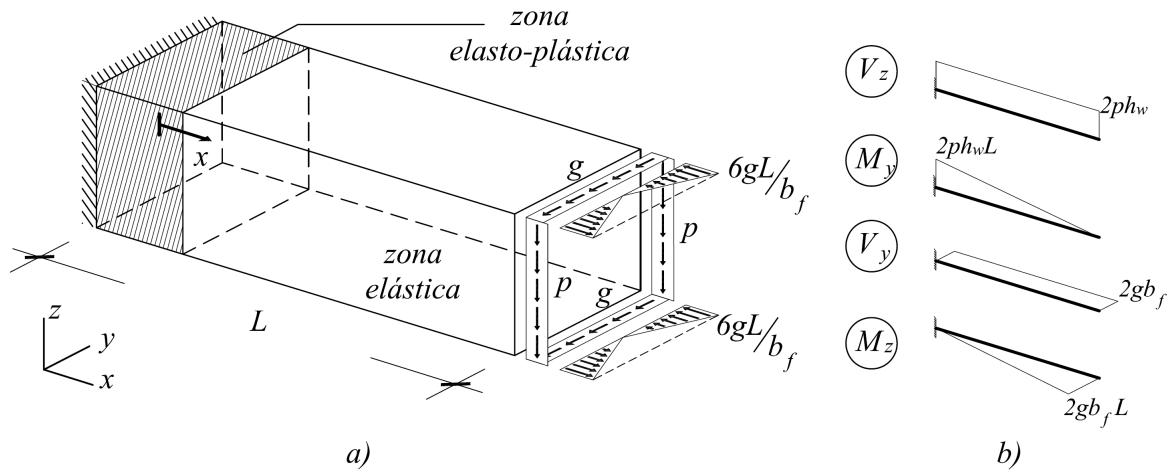


Figura 3.12: Modelo, *Mod1V_y SHS*

Na Figura 3.13 estão representados os resultados numéricos obtidos através dos modelos de elementos finitos. Os carregamentos definidos pelas cargas p e g foram aplicados em fases distintas para que fosse possível definir várias curvas de resistência, cada uma para um valor de $V_y/V_{pl,y}$ diferente. Tomando como exemplo a curva em que $V_y/V_{pl,y} = 0.2$, em primeiro lugar a viga foi submetida aos carregamentos relativos à carga g até que o esforço transversor V_y atingisse 20% de $V_{pl,y}$. Em seguida, aplicou-se o carregamento relativo à carga p até a peça atingir o colapso. Este segundo procedimento foi executado para valores de L/h_w entre 1.5 e 60. Nos pontos representados com o interior “vazio”, o colapso da viga deu-se por flexão desviada numa secção afastada de $x = 0$. Observa-se que, para valores de V_y/V_{pl} superiores ou iguais a 40%, a resistência à flexão é inferior a M_{pl} .

Na Figura 3.14 comparam-se os resultados numéricos com os obtidos através das equações (3.4) e (3.5). De modo a poder representar a equação (3.5), foi necessário determinar qual o valor de V_z e a secção que resultaria na combinação de esforços mais gravosa (dentro da zona

plástica). Para os esforços presentes na Figura 3.12b a equação (3.5) fica igual a

$$\left(\frac{V_z(L-x)}{M_{pl,y}}\right)^2 + \frac{V_y x}{M_{pl,z}} = 1, \quad 0 < x < 1.5h_w \wedge V_z > 0. \quad (3.8)$$

Para cada valor de $V_y/V_{pl,y}$ foram atribuídos vários valores de L , obtendo para cada caso o correspondente valor de V_z que maximiza o critério (3.5). Os resultados são representados na Figura 3.14 a traço interrompido. Observa-se que os dois critérios estão do lado da segurança comparando com os resultados numéricos. No entanto, deve recordar-se que o critério (3.4) resulta de uma adaptação do modelo de Hirt et al. (2006).

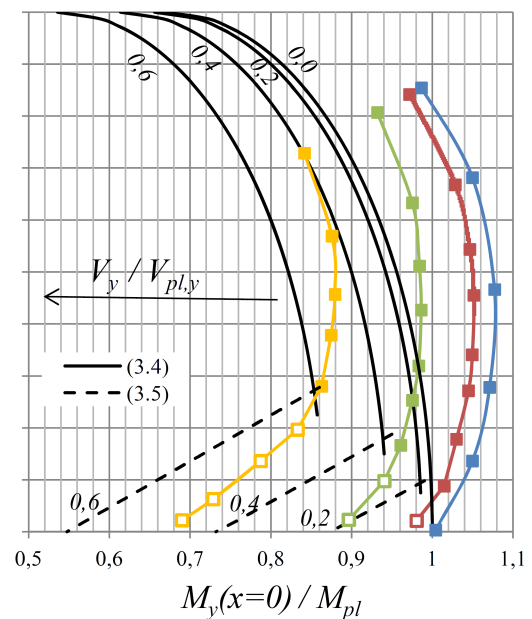
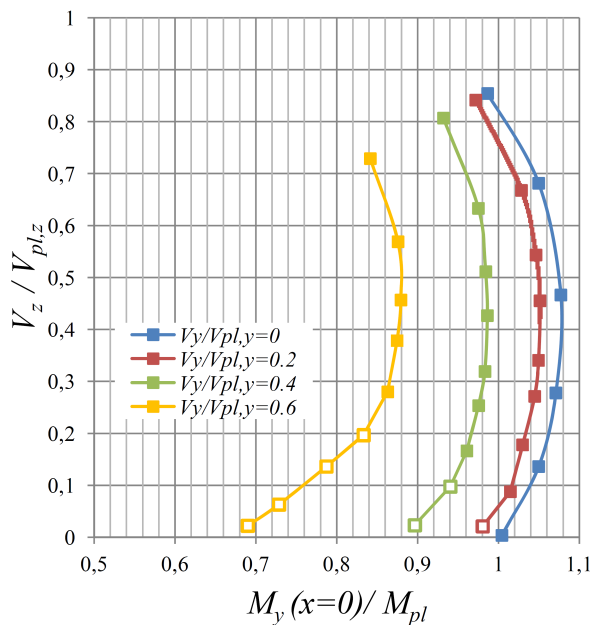


Figura 3.13: Relação entre $V_z/V_{pl,z}$ e M_y/M_{pl} para resultados do *Mod1V_y SHS* com a secção SHS

Figura 3.14: Comparação entre modelo analítico e resultados numéricos, *Mod1V_y SHS*

Modelo 2

No segundo modelo (*Mod2V_y SHS*) tentou-se gerar a mesma combinação de esforços, mas neste caso sem impedir a deformação transversal das almas e dos banzos. Essa livre deformação é conseguida com o sistema estrutural representado na Figura 3.15a. Este tipo de apoio pode ser considerado um *weak support*, uma vez que se apoia apenas em duas paredes.

O carregamento aplicado tem como objectivo fazer com que a secção crítica ocorra imediatamente antes de $x = L$. Os esforços V_z e M_y são originados pela carga p , aplicada em $x = L/2$ e $x = 2L$. A carga em $x = L/2$ é aplicada com dois objectivos: (i) aumentar o valor de V_z em $x = L^-$ e (ii) aumentar a variação do momento flector M_y , de modo a que este seja o menor possível dentro da zona plástica. O esforço transversal V_y resulta do carregamento definido pelas cargas g . Estas encontram-se distribuídas ao longo do troço apoiado, para que a variação do momento flector M_z , junto da secção crítica, seja a menor possível (Figura 3.15b).

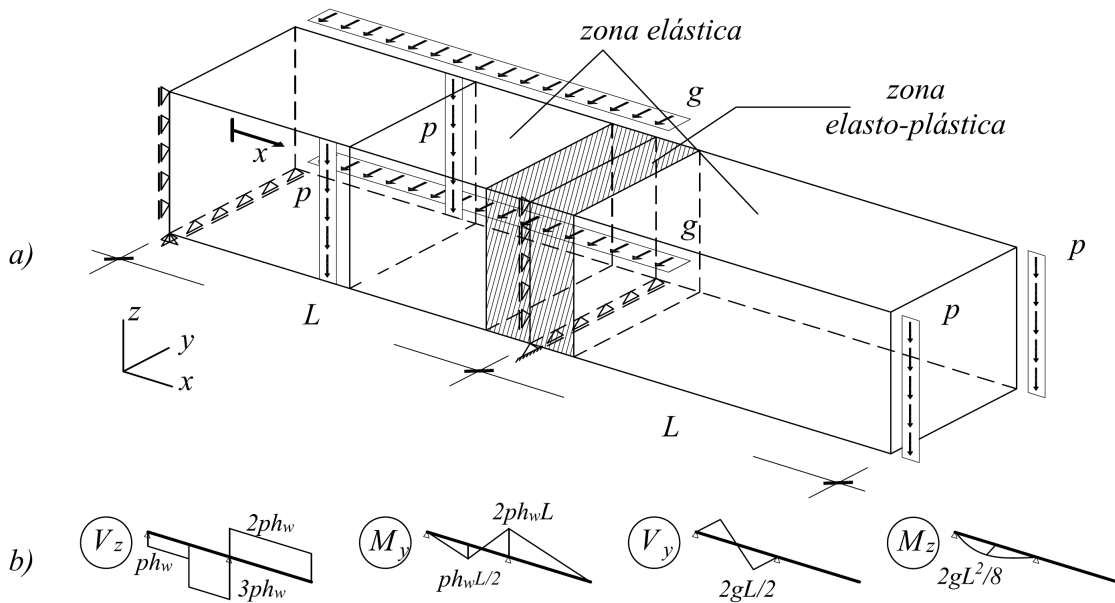


Figura 3.15: Modelo, $Mod2V_y$ SHS

O procedimento que determina os resultados presentes na Figura 3.16, é semelhante ao efectuado para o primeiro modelo. Primeiro aplicou-se o carregamento g até ao valor de $V_y/V_{pl,y}$ pretendido e, em seguida, aplicou-se o carregamento p até atingir a rotura. Para as várias curvas de $V_y/V_{pl,y}$ variou-se o valor de L/h_w entre 10 e 60.

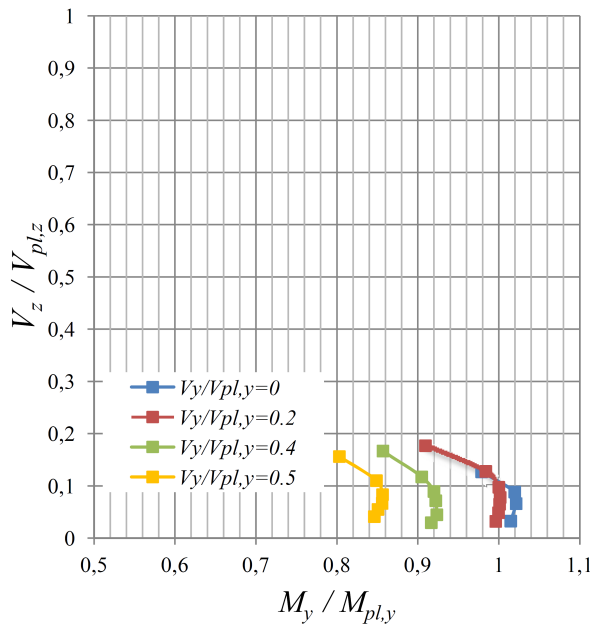


Figura 3.16: Relação entre $V_z/V_{pl,z}$ e M_y/M_{pl} para resultados do $Mod2V_y$ SHS com a secção SHS

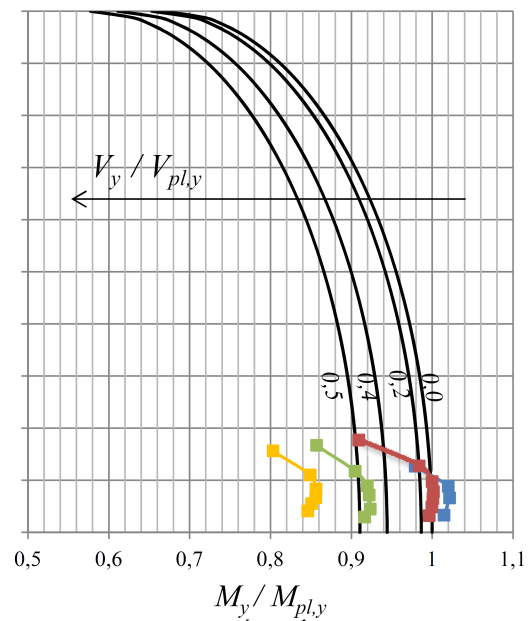


Figura 3.17: Comparação entre modelo analítico e resultados numéricos, $Mod2V_y$ SHS

Também neste caso se obtiveram resistências inferiores a M_{pl} para valores de $V_y/V_{pl,y}$ superiores a 20%. Comparando com o *Mod1V_y SHS*, este modelo apresenta resistências mais baixas, isto porque, como já foi referido, o *Mod2V_y SHS* pode ser considerado como tendo condições de apoio do tipo *weak support*.

Não foi possível obter resultados para vigas mais curtas nem para valores de $V_y/V_{pl,y}$ superiores a 50% porque, para valores de esforço transversal elevado, a secção colapsava por esmagamento da alma ou do banzo. O mesmo sucedeu para valores de $V_z/V_{pl,z}$ superiores a 10% que, como se observa, começam a apresentar valores muito inferiores de M_{pl} . Estes pontos representam também roturas por esmagamento das paredes da viga.

O modelo analítico também não apresenta aproximações aceitáveis (Figura 3.17), muito embora para $V_y/V_{pl,y}$ entre 0 e 0.2 e V_z/V_{pl} entre 0 e 0.1 os resultados sejam bastante próximos dos numéricos.

Capítulo 4

Conclusões e desenvolvimentos futuros

4.1 Conclusões

Os vários estudos realizados neste trabalho permitiram concluir que a interação entre o esforço transversal e o momento flector depende fundamentalmente das condições de apoio e da secção transversal.

No Capítulo 2 foi estudada a interação de esforços $M_y + V_z$ para secções rectangulares (parede fina), em I (IP e HE) e secções SHS, tendo sido possível retirar as seguintes conclusões:

1. Nas secções rectangulares, analisando os resultados numéricos, há a salientar dois pontos importantes:
 - (i) quando as condições de apoio são do tipo *strong support* (encastramento total), verificou-se que para valores de esforço transversal $V_z < 0.5V_{pl}$ a resistência à flexão é superior a M_{pl} (com um acréscimo máximo de 8%); por outro lado, quando $V_z > 0.5V_{pl}$ a resistência à flexão é inferior a M_{pl} ;
 - (ii) no caso em que as condições de apoio da viga são de *weak support* (apoio “fraco”) a sua resistência à flexão é superior a M_{pl} para $0 < V_z/V_{pl} < 0.35$ (com um acréscimo máximo de 4%) e inferior a M_{pl} para valores de esforço transversal superior a $0.35V_{pl}$.

Este acréscimo de resistência deve-se à presença de tensões normais transversais (σ_{zz}) na secção de encastramento que por sua vez permitem aumentar as tensões normais longitudinais (σ_{xx}) além de f_y . No entanto no caso do *weak support* o acréscimo de resistência é menor porque a acumulação de tensões σ_{zz} ocorre apenas na metade inferior da viga (junto do apoio).

2. Nas secções em I foram estudadas secções I1 e I2, cada uma analisada em três modelos (condições de apoio) diferentes, dos quais se retiraram as seguintes conclusões:
 - (i) no primeiro modelo (*Mod1 I*) verificou-se uma resistência à flexão superior a M_{pl} para valores elevados de esforço transversal. Em particular, no caso da secção I2, registaram-se valores de resistência à flexão sempre superiores a M_{pl} . Esse acréscimo de resistência adicional é causado pelo facto de tanto a alma como os banzos estarem com a deformação transversal impedida, o que faz com que se gerem tensões normais transversais, que por sua vez permitem aumentar a tensão σ_{xx} além de f_y ;

- (ii) no segundo modelo, em que apenas a alma se encontra restringida pelo apoio, a curva de resistência resultante dos modelos numéricos apresenta um comportamento semelhante ao verificado nos modelos de secção rectangular, na qual a secção apresenta uma resistência superior a M_{pl} para $V_z < 0.5V_{pl}$ e inferior a M_{pl} para $V_z > 0.5V_{pl}$. Isto ocorre porque a alma tem o comportamento de uma secção rectangular (de parede fina) e a restante parcela da resistência é dada pelo momento resistente dos banzos ($M_{pl,f}$);
 - (iii) no terceiro modelo, que consiste em replicar o *weak support* em secções em I, verificou-se que, para o caso da secção I1, a resistência à flexão é inferior a M_{pl} para um esforço transversal V_z superior a $0.35V_{pl}$. O mesmo não se verificou para a secção I2 que, para $V_z/V_{pl} > 0.35$, apresentou um comportamento semelhante ao *Mod2 I*.
3. Da análise dos dois modelos numéricos para a secção SHS, a principal nota a retirar é que, para o *Mod2 SHS*, mesmo não tendo os banzos restringidos por apoios, estes estão parcialmente restringidos pelas almas, o que origina o aparecimento de tensões normais transversais e o conseqüente aumento do momento resistente dos banzos.
 4. Os resultados obtidos neste capítulo permitem concluir que, para as secções estudadas e para o comportamento do material adoptado, o critério do EC3 para a interacção $M_y - V_z$ apresenta resultados contra a segurança no caso dos modelos com condições de apoio *weak support*.

No Capítulo 3 foi proposto um modelo analítico de distribuição de tensões para a combinação de esforços $M_y + V_z + V_y$. Foram analisados vários modelos de elementos finitos com diferentes condições de apoio e carregamento para secções em I e SHS, dos quais resultaram diferentes combinações de esforços. Os resultados daí obtidos foram comparados com o modelo analítico proposto e com o critério de verificação de segurança do EC3 para a flexão desviada, dependendo da combinação de esforços obtida. Dos diferentes modelos numéricos destacam-se os seguintes pontos:

1. Para as secções em I foram analisados dois modelos com diferentes condições de apoio e carregamento:
 - (i) no primeiro modelo (*Mod1V_y I*), mesmo sendo o carregamento aplicado pouco convencional, verificou-se que a presença do esforço transversal V_y nos banzos teve uma influência significativa na redução da resistência à flexão (essa redução de resistência deve ser tida em conta para $V_y/V_{pl} > 20\%$);
 - (ii) no segundo modelo (*Mod2V_y I* e *Mod2V_z I*), que consiste num *weak support*, foi analisada a resistência à flexão desviada na presença de esforço transversal, na combinação de esforços $M_z + M_y + V_y$. Constatou-se que o critério de segurança foi violado com $M_y/M_{pl,y}$ igual a 0 e 0.2 para $V_y/V_{pl} > 0.35$. Na combinação de esforços $M_z + M_y + V_z$ apenas no caso de flexão simples ($M_z/M_{pl,z} = 0$) não foi verificada a segurança de acordo com o EC3.
2. Também nas secções SHS foram analisados dois modelos diferentes:
 - (i) no primeiro modelo (*Mod1V_y SHS*) verificou-se uma resistência à flexão inferior a M_{pl} para $V_y/V_{pl,y} \geq 0.4$. No caso de vigas mais compridas, a rotura ocorreu por flexão desviada numa secção afastada da zona de encastramento.

- (ii) as condições de apoio do segundo modelo (*Mod1V_y SHS*) originaram que este tivesse um comportamento semelhante ao *weak support*, o que impossibilitou a obtenção de resultados para valores de esforço transversal elevados devido ao esmagamento das paredes da viga. A principal conclusão a retirar dos resultados obtidos deste modelo é que para valores de esforço transversal V_y superior a 20% de $V_{pl,y}$ a resistência à flexão é inferior a M_{pl} .
3. Em suma, quando uma secção está sujeita a esforços de flexão com esforço transversal a actuar nas duas direcções, a resistência à flexão deve ser determinada tendo em conta a presença dos esforços transversais, que, como se verificou, influenciam a redução de M_{pl} mesmo para $V_y/V_{pl,y}$ inferior a 50%. Da análise da flexão desviada na secção em I, pode-se concluir que, quando uma secção está sujeita a esforço transversal apenas nos banzos, apenas dois casos ($M_y/M_{pl,y}$ igual a 0 e 0.2) violam o critério de segurança do EC3. Quando o esforço transversal actua apenas na alma, apenas no caso em que $M_z/M_{pl,z} = 0$ não é verificada a segurança de acordo com o EC3.

4.2 Desenvolvimentos futuros

Nas análises numéricas efectuadas nesta Dissertação foram desprezados o endurecimento do material e a encurvadura por esforço transversal, pelo que se propõe em primeiro lugar o estudo da sua influência.

Para validar os resultados numéricos obtidos, propõe-se também a realização de ensaios experimentais em vigas de aço, para secções em I e SHS.

Para aprofundar a problemática da interacção do esforço transversal na redução da resistência, propõe-se ainda o estudo da influência da torção (uniforme e não uniforme).

Bibliografia

- Baptista, A. M., 2011. Resistance of steel I-sections under axial force and biaxial bending. *Journal of Constructional Steel Research*, doi:10.1016/j.jcsr.2011.07.013
- Bathe, K. J., 2010. *ADINA System (versão 8.7)*, ADINA R&D Inc.
- Beer, F. P. e Johnston, E. R., 1985. *Mechanics of materials*. Metric Editions. Materials science series. McGraw-Hill Ryerson Limited, 3rd edition.
- Branco, C. Moura, 1998. *Mecânica dos materiais*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 3ª edição.
- CEN, 2005. *Eurocode 3: Design of steel structures, Part 1.1: General rules and rules for buildings*. Comité Européen de Normalização, Bruxelas, Bélgica.
- Chakrabarty, J., 2006. *Theory of Plasticity*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2nd edition.
- Chakrabarty, J., 2010. *Applied Plasticity*. Mechanical Engineering Series. Springer, New York, 2nd edition.
- Drucker, D. C., 1956. The effect of shear on the plastic bending of beams. *Journal of Applied Mechanics*, **78**:509-514.
- Green, A. P., 1954a. A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and fixed-ended beams. Part I. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **3**(1):1-15.
- Green, A. P., 1954b. A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and fixed-ended beams. Part II. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **3**(2):143-155.
- Hirt, Manfred A., Bez, R. e Nussbaumer, A., 2006. *Construction métallique: notions fondamentales et méthodes de dimensionnement*, volume 10. PPUR presses polytechniques, Lausanne.
- Horne, M. R., 1979. *Plastic theory of structures*. Pergamon Press, Oxford ; New York, 2nd edition., si/metric units.
- Johnson, W., Chitkara, N. R. e Ranshi, A. S., 1974. Plane-stress yielding of cantilevers in bending due to combined shear and axial load. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, **9**(2): 67-77.
- Lubliner, J., 1990. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Co., 1st edition