



ANA RITA PARENTE CANDEIAS

Licenciada em Matemática

CÁLCULO DA VARIÂNCIA DE RENDAS VITALÍCIAS PARA COBERTURAS DE REFORMA, INVALIDEZ E SOBREVIVÊNCIA

MESTRADO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES
RAMO ATUARIADO, ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Universidade NOVA de Lisboa
Novembro, 2021

CÁLCULO DA VARIÂNCIA DE RENDAS VITALÍCIAS PARA COBERTURAS DE REFORMA, INVALIDEZ E SOBREVIVÊNCIA

ANA RITA PARENTE CANDEIAS

Licenciada em Matemática

Orientador: Doutor Rui Manuel Rodrigues Cardoso,
Professor Associado, NOVA School of Science and Technology

Júri:

Presidente: Doutora Gracinda Rita Diogo Guerreiro
Professora Associada, NOVA School of Science and Technology

Arguente: Doutor Onofre Alves Simões
Professor Auxiliar, Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa

Orientador: Doutor Rui Manuel Rodrigues Cardoso
Professor Associado, NOVA School of Science and Technology

MESTRADO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES
RAMO ATUARIADO, ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Universidade NOVA de Lisboa
Novembro, 2021

Cálculo da variância de rendas vitalícias para coberturas de reforma, invalidez e sobrevivência

Copyright © Ana Rita Parente Candeias, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Aos meus pais e irmã

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer ao meu orientador, o professor Doutor Rui Cardoso, por estar sempre disponível para me ajudar e guiar durante estes meses, pelo seu entusiasmo e pela confiança que depositou em mim para superar este objetivo.

Agradeço, também, a todos os meus amigos, especialmente aos que me são próximos, que nunca deixaram de acreditar em mim e nas minhas capacidades, que me acompanharam sempre ao longo destes anos, pelo apoio e amizade demonstrados. Graças a vocês, levo comigo inúmeras memórias dos melhores anos da minha vida que nunca irei esquecer.

Por último, presto o meu maior agradecimento à minha família por ter acreditado sempre em mim e por me ter apoiado sempre. Aos meus primos, um obrigada pelo grande apoio e ajuda prestados. Aos meus queridos pais e irmã, palavras não chegam para agradecer todos os sacrifícios que fizeram por mim e por tornarem o meu percurso académico o melhor.

RESUMO

Devido a um aumento da esperança de vida e uma diminuição da taxa bruta de natalidade nos últimos anos, o número de indivíduos em idade ativa por cada idoso tem vindo a diminuir. Uma vez que são os ativos que financiam as pensões, provenientes do sistema de previdência social público de Portugal, dos atuais pensionistas, este sistema poderá vir a entrar em declínio, sendo assim cada vez mais procurados sistemas de previdência privados. Desta forma, é importante o cálculo das responsabilidades atuariais, de modo a garantir o financiamento dos Fundos de Pensões.

Esta dissertação tem como objetivo obter uma expressão do cálculo da variância do valor atual dos benefícios para coberturas de sobrevivência, reforma por velhice e invalidez. Através da variância, estabeleceram-se intervalos de confiança para as responsabilidades, o que permite uma melhor estimativa do verdadeiro valor dos benefícios a pagar futuramente.

Depois de uma revisão dos conceitos mais importantes e recorrendo a uma abordagem probabilística, foi elaborada uma modelação das coberturas de modo a obter expressões do valor esperado e variância. Posteriormente, foram aplicadas as metodologias desenvolvidas a um conjunto de pessoas de um Plano de Pensões, onde foram apresentados os valores esperados, a variância e os intervalos de confiança para as responsabilidades, considerando as três coberturas referidas anteriormente.

O estudo feito é uma mais valia para a gestão de Fundos de Pensões, pois permite ter uma melhor visão das estimativas das responsabilidades, garantindo assim um bom supervisionamento do Fundo.

Palavras-chave: Reforma por velhice, invalidez, sobrevivência, fundos de pensões, intervalos de confiança, variância

ABSTRACT

Due to an increase in the life expectancy and a decrease in the gross birth rate in recent years, the number of individuals in working age per elderly person has been decreasing. Since it is the actives that finance the pensions, coming from the public social security system in Portugal, of current pensioners, this system has been falling into decline, therefore private pension systems are increasingly sought after. Thus, it is important to calculate the actuarial liabilities, in order to guarantee the funding of Pension Funds.

This dissertation aims to obtain an expression for the variance calculation of the present value of benefits for survivorship, old-age retirement and disability coverage. Through the variance, confidence intervals were established for the responsibilities, which allows a better estimate of the real value for benefits to be paid in the future.

After a review of the most important concepts and using a probabilistic approach, a modeling of the coverage was elaborated in order to obtain expressions of the expected value and variance. Subsequently, the methodologies developed were applied to a group of people in a Pension Plan, where expected values, variance and confidence intervals for the liabilities were presented, considering the three coverages mentioned above.

The study carried out is an asset for the management of Pension Funds, as it allows a better view for estimates of liabilities, thus ensuring a good supervision of the Fund.

Keywords: Old age retirement, disability, survivor's pension, pension fund, confidence intervals, variance

ÍNDICE

Índice de Figuras	xvii
Índice de Tabelas	xix
Siglas e Acrónimos	xxi
1 Introdução	1
2 Enquadramento Teórico	3
2.1 Planos e Fundos de Pensões	3
2.1.1 Planos de Pensões	4
2.1.2 Fundos de Pensões	4
2.1.3 Avaliação Atuarial	5
2.1.4 Métodos atuariais de financiamento	5
2.2 Mortalidade	6
2.2.1 Tempo de vida futura	6
2.2.2 Tábuas de mortalidade	7
2.3 Invalidez	9
2.3.1 Tempo até ocorrer invalidez	9
2.3.2 Tabelas de invalidez	10
2.4 Tabela líquida	10
2.4.1 Hipóteses e taxas de decrémento	11
2.4.2 Probabilidade de decrémento	11
2.4.3 Função de sobrevivência composta	12
2.5 Rendas certas e vitalícias	12
2.5.1 Taxas de capitalização e desconto	12
2.5.2 Rendas certas	13
2.5.3 Rendas vitalícias	16
2.6 Abordagem probabilística	19
2.6.1 Seguro de vida inteira	20

2.6.2	Formulação probabilística para renda vitalícia inteira	21
2.6.3	Formulação probabilística para renda vitalícia fracionada	22
2.7	Teorema Limite Central	23
2.7.1	Teorema Limite Central para variáveis independentes e identica- mente distribuídas (i.i.d.)	23
2.7.2	Teorema Limite Central de <i>Lyapounov</i>	23
3	Modelação das coberturas	25
3.1	Cobertura de reforma por velhice	25
3.2	Cobertura de reforma por invalidez	28
3.3	Cobertura de sobrevivência	31
3.4	Valor esperado e variância das três coberturas	33
3.5	Intervalos de confiança	33
3.5.1	Aplicação do teorema de <i>Lyapounov</i>	34
3.5.2	Intervalos de confiança para as responsabilidades	34
4	Caso prático	35
4.1	Considerações do Plano de Pensões	35
4.2	Análise dos dados	36
4.3	Pressupostos Atuariais	37
4.4	Valor esperado e variância das coberturas	38
4.5	Intervalos de confiança para as responsabilidades	39
5	Conclusão	41
	Bibliografia	43

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Total de sobreviventes por idade	8
2.2	Taxa de mortalidade por idade	9
2.3	Taxa de invalidez por idade da tábua EKV80	10
2.4	Diagrama cronológico - Renda inteira temporária com termos antecipados	14
2.5	Diagrama cronológico - Renda inteira temporária com termos postecipados	14
2.6	Diagrama cronológico - Renda fracionada temporária com termos antecipados	15
2.7	Diagrama cronológico - Renda fracionada temporária com termos postecipa- dos	15
2.8	Diagrama cronológico - Renda inteira temporária com termos em progressão geométrica	16
2.9	Diagrama cronológico dos termos de uma renda vitalícia inteira imediata an- tecipada	17
2.10	Diagrama cronológico dos termos de uma renda vitalícia inteira imediata pos- tecipada	18
2.11	Diagrama cronológico dos termos de uma renda vitalícia fracionada anteci- pada	18
2.12	Diagrama cronológico dos termos de uma renda vitalícia fracionada posteci- pada	19
2.13	Diagrama cronológico dos termos de uma renda vitalícia inteira postecipada de progressão geométrica	19
2.14	Diagrama do valor descontado num seguro de vida inteira	20
2.15	Diagrama do valor descontado num seguro de vida fracionado m vezes . .	21
4.1	Pirâmide etária dos membros ativos	37
4.2	Salário médio anual por classes de idade e sexo	37

ÍNDICE DE TABELAS

4.1	Estatísticas dos membros ativos	36
4.2	Total de ativos por sexo e suas percentagens	36
4.3	Pressupostos atuariais do Plano de Pensões	38
4.4	Valor esperado e variância dos valores atuais dos benefícios das diversas coberturas, em euros, com pagamentos anuais	38
4.5	Valor esperado e variância dos valores atuais dos benefícios das diversas coberturas, em euros, com pagamentos mensais	38

SIGLAS E ACRÓNIMOS

CN	Custo Normal
F	Valor do Fundo
i.i.d.	independentes e identicamente distribuídas
INR	idade normal de reforma
RSPNA	Responsabilidades com Serviços Passados Não Amortizadas
TLC	Teorema Limite Central
TSF	Tempo de Serviço Futuro
TSP	Tempo de Serviço Passado
u.m.	unidade monetária
v.a.	variável aleatória
VABT	Valor Atual dos Benefícios Totais
VAPP	Valor Atual das Pensões em Pagamento
VARSF	Valor Atual das Responsabilidades com Serviços Futuros
VARSP	Valor Atual das Responsabilidades com Serviços Passados

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos tem-se verificado um aumento da esperança de vida e do índice de longevidade, levando a que exista uma maior população idosa. Para além disto, também se observa uma diminuição da taxa bruta de natalidade, fazendo com que a população jovem e ativa seja cada vez menor. Consequentemente, o número de indivíduos em idade ativa por cada idoso tem vindo a diminuir.

Em Portugal, existe o Sistema de Previdência Social da Segurança Social que visa garantir que todos os cidadãos tenham direito, por exemplo, a uma reforma de velhice ou outro tipo de benefícios. No entanto, este Sistema poderá vir a enfrentar dificuldades em assegurar o financiamento das pensões a que todos os cidadãos têm direito por lei, dado que é a população ativa que financia as pensões dos atuais pensionistas.

Desta forma, cada vez mais tem existido uma procura por parte de entidades privadas em proporcionar aos seus empregados a segurança de que, no futuro, possam receber uma melhor pensão pelo trabalho que realizaram durante a sua idade ativa. Para isso, aderem a um Fundo de Pensões que tem como objetivo assegurar o pagamento de benefícios futuros previstos por um Plano de Pensões. Assim sendo, é necessário realizar avaliações atuariais que têm como principal propósito estimar as responsabilidades futuras e, assim, perceber se o fundo se encontra financiado a pelo menos 100%, de modo a fazer face a todas as responsabilidades futuras.

Habitualmente, para calcular as responsabilidades de um Plano de Pensões, estima-se o valor esperado descontado dos benefícios a pagar, cuja variância não é, por vezes, considerada. Esta permite a construção de intervalos de confiança que podem ser essenciais na previsão dos resultados, pois apresentam uma maior proximidade dessa estimativa ao verdadeiro valor.

Assim, o principal objetivo da presente dissertação será o cálculo da variância do valor descontado dos benefícios a pagar, não só tendo em conta a reforma de velhice, em que o benefício será pago se o indivíduo atingir a idade normal de reforma (INR), como também a reforma por invalidez, que pode levar a uma reforma antecipada. O benefício desta cobertura é pago caso um indivíduo se mantenha ativo na empresa e se invalide, recebendo a pensão até falecer. Para além destas, irá ainda ser considerado o

caso da cobertura por sobrevivência, ou seja, dos benefícios de reforma à morte de um dos elementos de um casal, considerando uma reversibilidade parcial ou total dos benefícios. Assim, se o indivíduo estiver ativo na empresa e falecer antes de atingir a INR, o cônjuge receberá uma pensão até este falecer. As três coberturas não são compatíveis, sendo que qualquer participante não pode receber mais do que uma pensão.

Para o cálculo da variâncias das coberturas, será apresentado, inicialmente, um enquadramento teórico no Capítulo 2, que contém uma revisão dos conceitos mais importantes, assim como a abordagem probabilística para efeito do cálculo da variância associada a cada cobertura e total. De seguida, com base na abordagem mencionada anteriormente, será realizada a modelação das coberturas, no Capítulo 3, no qual se irá calcular os valores esperados, os momentos de ordem dois e as variâncias das coberturas. Ainda neste capítulo, serão construídos os intervalos de confiança do valor atual dos benefícios totais. Posteriormente, no Capítulo 4, realizar-se-á uma aplicação prática tendo por base a modelação do problema elaborada no Capítulo 3. Os dados utilizados neste caso prático são reais e provenientes de uma empresa portuguesa. Por último, irá ser feita uma conclusão, onde serão discutidos os resultados obtidos e sugeridos possíveis trabalhos futuros, dentro do tema desta dissertação.

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Este capítulo consiste num enquadramento teórico que servirá de apoio para a modelação das coberturas, tratada no Capítulo 3, e para os cálculos necessários na aplicação prática, feitos no Capítulo 4. Inicialmente, serão apresentadas definições acerca de planos de pensões e os seus possíveis benefícios, fundos de pensões e os diferentes métodos de financiamento destes, necessárias para a avaliação das responsabilidades de um plano de pensões. De seguida, serão abordadas noções de mortalidade e invalidez, importantes para a compreensão dos benefícios de reforma por velhice, reforma por invalidez e pensão de sobrevivência, como também denotações relativas às probabilidades envolvendo as contingências de vida, morte e invalidez associadas a um grupo de indivíduos. Posteriormente, serão retratadas rendas certas e vitalícias, assim como também uma diferente abordagem probabilística. Por fim, apresentar-se-á o Teorema Limite Central de *Lyapounov*, fundamental para a construção dos intervalos de confiança.

Os conteúdos apresentados neste capítulo foram baseados nas sebtas Cardoso (2019), Afonso (2018) e no livros Bowers Jr., Gerber, Hickman, Jones e Nesbitt (1997), Dickson, Hardy e Waters (2009) e Garcia e Simões (2010).

2.1 Planos e Fundos de Pensões

Devido ao envelhecimento da população em Portugal e à falta de ativos que possam financiar os sistemas de previdência social públicos, como a Segurança Social, tem-se notado, cada vez mais, uma procura por parte de entidades empregadoras em proporcionar aos seus trabalhadores um benefício, de forma conjunta ou independente da Segurança Social. Assim, os membros ativos, ou os membros que trabalharam durante um determinado período de tempo na empresa, poderão receber um montante, dependendo do tipo de benefício acordado previamente, além da pensão paga pela Segurança Social. Isto é bastante benéfico financeiramente para os empregados pois as pensões auferidas pelo Estado por vezes não são justas nem adequadas ao trabalho que cada um desenvolveu ao longo dos anos enquanto ativo. Deste modo, torna-se imprescindível realizar avaliações atuariais, efetuadas por um atuário.

Para uma explicação mais detalhada consultar Afonso (2018) e “Associação Portuguesa de Fundos de Investimento, Pensões e Patrimónios - Fundos de Pensões” (s.d.).

2.1.1 Planos de Pensões

Um Plano de Pensão é um conjunto de regras e/ou condições em que se elege o direito de receber um benefício, que pode ser em caso de pré-reforma, reforma antecipada, reforma por velhice, reforma por invalidez ou ainda em caso de sobrevivência. No contexto desta dissertação irão ser abordados os seguintes benefícios:

- Reforma por velhice: pagamento de uma pensão aquando da reforma à idade definida pela Segurança Social (INR), que é paga até o indivíduo falecer;
- Reforma por invalidez: pagamento de uma pensão em caso de incapacidade para trabalhar, caso esta não tenha sido consequência de doença profissional ou acidente de trabalho;
- Sobrevivência: em caso de morte do participante é paga uma pensão de sobrevivência ao cônjuge.

Um Plano de Pensões pode ser caracterizado quanto ao seu benefício: Plano de Contribuição Definida, Plano de Benefício Definido e Plano Misto.

Quando se tem um Plano de Contribuição Definida, tal como o nome indica, são conhecidas previamente as contribuições da empresa e/ou dos seus empregados (provenientes do salário pensionável). Assim, o benefício que cada um irá auferir dependerá das contribuições totais. O maior risco neste tipo de Plano recai sobre o trabalhador pois as contribuições feitas podem não ser suficientes para um benefício razoável.

Num Plano de Benefício Definido, o valor do benefício que o empregado irá receber já é conhecido, ou seja, o montante é previamente descrito nas regras do plano, seja através de uma fórmula em forma de percentagem de salário, montante fixo ou outra possibilidade. Ao contrário do Plano de Contribuição Definida, é o empregador quem carrega o risco, pois este tem responsabilidades a cumprir.

Além destes, também existe o Plano Misto, que engloba as características dos Planos de Contribuição Definida e de Benefício Definido.

2.1.2 Fundos de Pensões

Os Fundos de Pensões são patrimónios autónomos destinados exclusivamente ao financiamento de um ou mais planos de pensões. Dessa forma, constituem um meio cujo único objectivo é proporcionar o pagamento futuro dos benefícios previstos no respectivo plano.

Um Fundo de Pensões pode ser classificado de acordo com o tipo de vinculação entre os participantes, associados e a entidade gestora, nomeadamente como um Fundo de Pensão Aberto ou um Fundo de Pensão Fechado.

Diz-se um Fundo Aberto quando não existe qualquer elo de ligação entre os aderentes ao Fundo, apenas existindo uma aceitação ou não de adesão por parte da entidade gestora do Fundo.

Um Fundo de Pensões diz-se Fechado quando diz respeito apenas a um associado ou, existindo mais do que um associado, quando se verifique um elo de natureza empresarial, associativo, profissional ou social entre eles, sendo necessário o consentimento destes para a adesão de novos associados ao Fundo.

2.1.3 Avaliação Atuarial

Uma Avaliação Atuarial tem como objetivo, no caso de um Plano de Contribuição Definida, estimar o valor dos benefícios futuros que dependem das contribuições feitas até à data da avaliação. Já num Plano de Benefício Definido, pretende-se estimar o valor das responsabilidades do plano, num dado período de tempo.

Além da estimação das responsabilidades ou das contribuições que deverão ser feitas, as avaliações atuariais também têm a finalidade de determinar o custo normal e o nível de financiamento do Fundo, ou seja, analisar se este se encontra sobrefinanciado ou subfinanciado, de modo a decidir se é necessário proceder a uma contribuição extraordinária para que o Fundo possa assegurar o pagamento dos benefícios consignados no Plano de Pensões.

Para realizar uma avaliação atuarial dever-se-á ter em conta certos pressupostos, demográficos ou financeiros, como também características importantes dos participantes e beneficiários do Plano. Também é importante separar a população em estudo em ativos, diferidos (pessoas incluídas no Plano mas que já não se encontram a trabalhar na empresa) ou pensionistas, pois as avaliações das responsabilidades para cada grupo são distintas.

2.1.4 Métodos atuariais de financiamento

O financiamento de um Plano de Pensões de Benefício Definido é feito por forma a garantir que os benefícios sejam pagos no devido tempo, de maneira a não ser necessário haver contribuições extras.

Existem dois tipos de métodos de financiamento, os de custo individual e os de custo agregado. De seguida, serão apresentados conceitos que são utilizados em ambos os métodos, referindo apenas os conceitos relevantes para a dissertação.

Seja Custo Normal (CN) o custo anual associado a cada ano de serviço prestado pelos participantes activos. O Valor Atual dos Benefícios Totais (VABT) é o montante que deverá existir à data da avaliação de forma a ser possível assumir as responsabilidades do plano, ou seja, são as responsabilidades até à data de avaliação e as posteriores que se esperam pagar. Denote-se Valor Atual das Responsabilidades com Serviços Passados (VARSP) o valor atual das responsabilidades decorrentes do tempo de serviço prestado até à data da avaliação e denote-se Valor Atual das Responsabilidades com Serviços Futuros (VARSF)

no caso das responsabilidades esperadas desde a data da avaliação até à idade de reforma. Assim tem-se

$$VABT = VARSP + VARSF \quad (2.1)$$

No caso de haver pensões em pagamento, tem-se que o Valor Atual das Pensões em Pagamento (VAPP) é o montante que deverá existir à data de avaliação para fazer face às responsabilidades assumidas, em particular com os atuais pensionistas, seja por reforma por velhice, invalidez ou sobrevivência.

Seja Valor do Fundo (F) o valor do Fundo de Pensões. O nível de financiamento, denotado por R, é dado por

$$R = \frac{F - VAPP}{VARSP} \quad (2.2)$$

Assim, se $R > 1$ ou $R = 1$, o fundo encontra-se sobrefinanciado ou financiado a 100%, respetivamente. Já quando $R < 1$ então é necessário conhecer o montante em falta no fundo pois este encontra-se subfinanciado. Para o cálculo deste montante, denominado por Responsabilidades com Serviços Passados Não Amortizadas (RSPNA), tem-se

$$RSPNA = VARSP - (F - VAPP) \quad (2.3)$$

2.2 Mortalidade

Para calcular o valor esperado dos benefícios das várias coberturas é necessário primeiramente estudar a mortalidade, ou seja, o tempo de vida futura dos membros de uma população e, assim, calcular probabilidades envolvendo contingências de vida e morte.

2.2.1 Tempo de vida futura

Seja (x) um indivíduo de idade x . Considere-se T_x a variável aleatória do tempo de vida futura de (x) , com $x \geq 0$, sendo que a idade de morte pode ser qualquer idade superior a x . Assim, a variável aleatória da idade de morte é representada por $x + T_x$. Note-se que T_x é uma variável aleatória contínua.

Seja F_x a função de distribuição de probabilidade da variável aleatória T_x

$$F_x(t) = Pr[T_x \leq t] \quad (2.4)$$

Assim, $F_x(t)$ é a probabilidade de (x) falecer antes da idade $x + t$.

É útil denotar a probabilidade de (x) falecer ou sobreviver até certa data. Deste modo, tem-se

$$Pr[T_x \leq t] = {}_tq_x \quad (2.5)$$

$$Pr[T_x > t] = {}_t p_x \quad (2.6)$$

Habitualmente, quando $t = 1$ o índice t é omitido.

A probabilidade de (x) sobreviver aos próximos s anos e morrer nos t anos que se lhe seguem é dada por

$$Pr[s < T_x \leq s + t] = {}_{s|t} q_x = {}_{s+t} q_x - {}_s q_x \quad (2.7)$$

Note-se as seguintes decomposições

$${}_{s+t} p_x = {}_s p_x {}_t p_{x+s} \quad (2.8)$$

$${}_{s|t} q_x = {}_s p_x {}_t q_{x+s} \quad (2.9)$$

Refira-se $\lfloor x \rfloor$ como a função *floor*, que converte um número real x no maior número inteiro menor ou igual a x . Seja então $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ o tempo de vida futura de (x) em anos completos, sendo que K_x é uma variável aleatória discreta. A função de probabilidade de K_x é dada por

$$Pr[K_x = k] = Pr[k \leq T_x < k + 1] = F_x(k + 1) - F_x(k) = {}_k q_x = {}_k p_x q_{x+k} \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (2.10)$$

Denote-se $K_x^{(m)} = \frac{1}{m} \lfloor m T_x \rfloor$ como o tempo de vida futura de (x) em anos arredondados para o menor m -ésimo período do ano, em que m é inteiro e $m > 0$. $K_x^{(m)}$ é uma variável aleatória discreta cuja função de probabilidade é dada por

$$Pr\left[K_x^{(m)} = k\right] = Pr\left[k \leq T_x < k + \frac{1}{m}\right] = {}_{k|\frac{1}{m}} q_x \quad k = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots \quad (2.11)$$

Desta forma, $K_x^{(m)} = k$ significa que o indivíduo de idade x irá falecer entre k e $k + \frac{1}{m}$ anos.

2.2.2 Tábuas de mortalidade

As tábuas de mortalidade, ou tábuas de vida, são tábuas fundamentais para os cálculos atuariais, onde é possível determinar a probabilidades de morte e vida de uma população, em função da sua idade e, por vezes, do sexo dos indivíduos.

Cada população tem diversos costumes e uma qualidade de vida distinta, pelo que a esperança de vida difere e consequentemente as probabilidades de vida e morte serão diferentes. Assim, estas tábuas além de serem importantes para o financiamento dos seguros de vida e das pensões, permitem conhecer uma população, por sexo e idades, e medir a longevidade desta.

Antes de se poder construir uma tábua de mortalidade, é necessário definir a idade mínima, à qual se dá o nome de idade raiz. Visto que se sabe que a morte é um acontecimento certo e que um indivíduo tem uma idade limite de sobrevivência, estabelece-se uma idade máxima, habitualmente representada por ω . Assim, a primeira coluna da tábua representa a idade, x , do indivíduo.

Seja l_x o número esperado de indivíduos de idade x . A l_0 dá-se o nome de raiz da tábua que quantifica o total de recém-nascidos da população.

No gráfico da Figura 2.1 observa-se o número de sobreviventes por idade, num total de 100 000 indivíduos. Estes dados provêm de uma tábua de mortalidade denominada TV88/90.

Note-se que o número de sobreviventes vai diminuindo a uma taxa pequena até à idade de 70 anos aproximadamente, sendo que a partir dessa idade há um aumento bastante significativo de mortes, até atingir zero sobreviventes aos 111 anos.

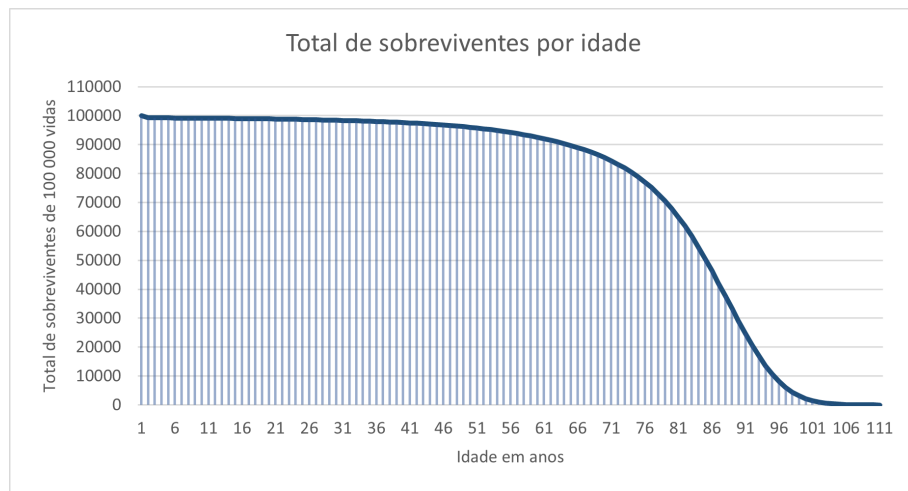


Figura 2.1: Total de sobreviventes por idade

Através de l_x pode-se determinar a probabilidade de o indivíduo de idade x sobreviver até à idade $x + t$, através da fórmula seguinte:

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad (2.12)$$

A probabilidade de (x) falecer nos próximos t anos é

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \quad (2.13)$$

No gráfico da Figura 2.2 apresentam-se os valores da taxa de mortalidade q_x para cada idade x , provenientes da tábua de mortalidade TV88/90.

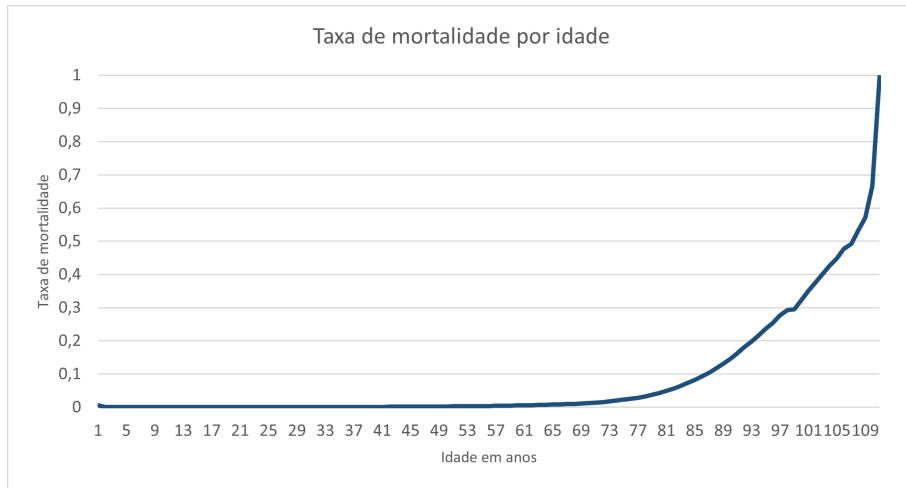


Figura 2.2: Taxa de mortalidade por idade

Tal como visto no gráfico da Figura 2.1, a partir dos 70 anos, aproximadamente, a taxa de mortalidade aumenta até atingir o valor máximo ($q_x = 1$), que ocorre na idade máxima ω (111 anos).

2.3 Invalidez

Além da reforma por velhice, existe a possibilidade de um indivíduo se invalidar, podendo dar origem a uma reforma por invalidez. Segundo “Segurança Social” (2021), "considera-se invalidez toda a situação incapacitante, de causa não profissional, que determine incapacidade permanente para o trabalho".

Para o cálculo dos benefícios de invalidez é útil conhecer a data na qual o indivíduo se irá invalidar. No entanto, esta data é desconhecida ou pode nunca ocorrer. Assim, à semelhança da mortalidade, é necessário calcular probabilidades de um indivíduo se invalidar.

2.3.1 Tempo até ocorrer invalidez

Seja D_x a variável aleatória contínua que representa o tempo futuro até um indivíduo de idade x se invalidar, sendo que $D_x \geq 0$. Seja G_x a função de distribuição de probabilidade de D_x

$$G_x(t) = Pr[D_x \leq t] \quad (2.14)$$

Denote-se $I_x = \lfloor D_x \rfloor$ como a variável aleatória discreta que representa o tempo futuro em anos completos que (x) tem até se reformar por invalidez, com $I_x \geq 0$. A função de distribuição de probabilidade de I_x é dada por

$$Pr[I_x = k] = Pr[k \leq D_x < k + 1] \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (2.15)$$

Denote-se $I_x^{(m)} = \frac{1}{m} \lfloor mD_x \rfloor$ como a variável aleatória discreta que simboliza o tempo futuro de (x) até se reformar por invalidez, em anos e m -ésimos períodos do ano completos. A função de distribuição de probabilidade de $I_x^{(m)}$ é dada por

$$Pr \left[I_x^{(m)} = k \right] = Pr \left[k \leq D_x < k + \frac{1}{m} \right] \quad k = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots \quad (2.16)$$

Desta forma, se o indivíduo de idade x se invalidar entre k e $k + \frac{1}{m}$ anos, tem-se que $I_x^{(m)} = k$.

2.3.2 Tabelas de invalidez

Como referido anteriormente, no cálculo de pensões de invalidez é necessário conhecer a data na qual o indivíduo se irá reformar por invalidez. No entanto, esta data é desconhecida e pode nunca vir a acontecer.

Assim, são utilizadas tábuas de invalidez de forma a poder estimar o valor dos benefícios em caso de invalidez. Note-se que ao considerar que um indivíduo só se pode invalidar até à INR, a última idade da população (ω) é a idade anterior à INR.

Seja i_x a probabilidade de um indivíduo de idade x se invalidar entre x e $x + 1$, então a probabilidade de (x) não se invalidar durante esse ano é dada por $1 - i_x$. No gráfico da Figura 2.3 encontram-se as taxas de entrada de invalidez de uma tábua geralmente usada, a EKV80.

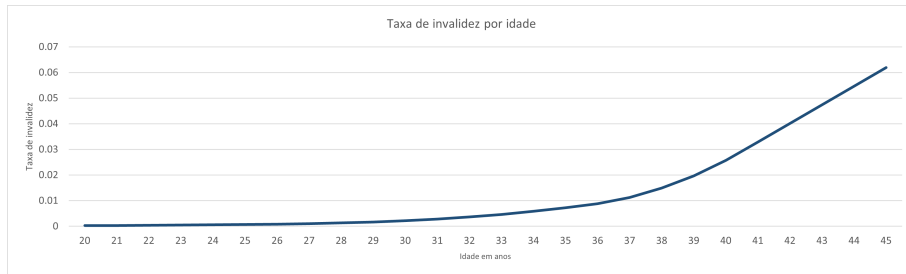


Figura 2.3: Taxa de invalidez por idade da tábua EKV80

Como visto em 2.2.2, nas tábuas de mortalidade analisam-se os dados para calcular as probabilidades de morte ou vida de uma população. Quando se fala em invalidez, é necessário utilizar uma tabela de mortalidade para inválidos, onde são aplicadas taxas de mortalidades superiores às taxas de mortalidade comuns.

2.4 Tabela líquida

Como visto anteriormente, em 2.2.2 e 2.3.2, existem tábuas que têm em consideração a mortalidade da população ou tabelas referentes às probabilidades de um indivíduo se invalidar até à idade de reforma. Quando se tem um Plano de Pensões com direito a benefícios em caso de morte do participante, reforma por velhice ou reforma por invalidez, é necessário ter em conta as probabilidades deste se manter ao serviço da empresa, isto é,

qual a probabilidade do participante não morrer ou não se reformar por invalidez, antes da INR. Deste modo, numa Tabela Multidecremento, também denominada por Tabela Líquida, as probabilidades de permanência no serviço refletem a exposição ao risco de saída por vários decrementos, como a reforma, saída antecipada, morte ou invalidez.

Para mais informações detalhadas consultar Winklevoss (1993).

2.4.1 Hipóteses e taxas de decremento

Os participantes ativos de um Plano de Pensões estão sujeitos a vários acontecimentos que podem fazer com que já não sejam elegíveis ao plano, tal como uma saída antecipada com um período inferior ao acordado no Plano. Também estes estão expostos a circunstâncias de morte, reforma por invalidez e reforma por velhice.

Se o participante ativo morrer antes de atingir a INR, o benefício de reforma já não será pago. No entanto, as responsabilidades em caso de morte, nomeadamente o benefício por sobrevivência são ativadas e o cônjuge começa a receber o pagamento acordado no Plano.

No caso deste se invalidar, não é pago o benefício por reforma de velhice, havendo apenas o direito a receber o benefício de reforma por invalidez.

Quando o indivíduo se reforma por velhice, inicia-se o pagamento da pensão por reforma por velhice, que acabará apenas quando este morrer.

Os participantes não ativos do Plano, nomeadamente os pensionistas, apenas estão sujeitos à hipótese de morte. Assim, a consequência destes falecerem é o término do pagamento da reforma por velhice ou invalidez.

Uma taxa de decremento consiste na proporção de participantes que deixam um determinado estado devido a uma determinada causa, considerando que não estão em causa quaisquer outros decrementos. Assim, tem-se

- $q^{(m)}$ - taxa de decremento por Morte
- $q^{(d)}$ - taxa de decremento por Invalidez

2.4.2 Probabilidade de decremento

Uma vez que se tem mais do que uma taxa de decremento, as taxas de decremento por morte e invalidez não serão iguais às probabilidades de morte e invalidez respetivamente, pois os participantes ativos não estão apenas expostos a uma só contingência durante o período em que exercem a sua atividade profissional. Assim, é necessário converter as taxas independentes em probabilidades. As notações a seguir apresentadas foram baseadas no livro Winklevoss (1993).

Suponha-se que os decrementos ocorrem de um modo uniforme ao longo do ano, isto é, ${}_uq_x^{(m)} = uq_x^{'(m)}$ e ${}_uq_x^{(d)} = uq_x^{'(d)}$, com $0 \leq u < 1$. As probabilidades dependentes de decremento são dadas por

$$q^{(m)} = q^{'(m)}(1 - 0.5 \times q^{'(d)}) \quad (2.17)$$

$$q^{(d)} = q^{'(d)}(1 - 0.5 \times q^{'(m)}) \quad (2.18)$$

Deste modo, atentando que se tem um indivíduo ativo que se poderá invalidar ou falecer durante o seu período ativo na empresa, $q^{(m)}$ e $q^{(d)}$ representam as probabilidades deste morrer e invalidar respetivamente, tendo sempre em conta o outro decremento.

2.4.3 Função de sobrevivência composta

A função de sobrevivência composta baseia-se no cálculo da probabilidade de um participante activo do Plano permanecer ao serviço activo durante um determinado período, considerando todas as contingências às quais está sujeito. Desta maneira, a probabilidade de um indivíduo com uma idade x não permanecer no serviço é dada por

$$q_x^{(T)} = q_x^{(m)} + q_x^{(d)} \quad (2.19)$$

A probabilidade de (x) permanecer no serviço é

$$p_x^{(T)} = 1 - q_x^{(T)} \quad (2.20)$$

No caso do participante (x) se invalidar, a probabilidade deste falecer entre as idades x e $x + 1$ é denotado por ${}_xq_x^{'(m)}$, considerando a tabela de mortalidade para inválidos.

2.5 Rendas certas e vitalícias

Uma renda é um conjunto de capitais vencíveis em momentos equidistantes no tempo. Quando se trata de rendas sobre uma vida, os benefícios a pagar, qualquer que seja o seu tipo, constituem uma renda incerta, pois o tempo de pagamentos destes depende da sobrevivência de cada indivíduo. Nesta secção serão apresentados conceitos que ajudarão a perceber os vários tipos de renda necessários para a abordagem probabilística do caso em estudo.

2.5.1 Taxas de capitalização e desconto

Seja o prazo o espaço de tempo da aplicação de um capital que se expressa por múltiplos do período, ou seja, da unidade de tempo. Seja o juro a remuneração recebida pelo empréstimo do capital.

O processo de vencimentos de juros ao longo do tempo é chamado de capitalização que, consequentemente, leva a um aumento de capital. O processo inverso denomina-se por desconto.

O acréscimo de valor que uma unidade de capital sofre ao longo de um período é denominado por taxa de capitalização ou taxa de juro e representa-se por i . Inversamente, a taxa de desconto, denominada por d , é o valor de redução sofrida por uma unidade de capital, descontada por período.

Considere-se o regime de juro composto.

Seja o fator de atualização $v = \frac{1}{1+i}$.

Denote-se $i^{(m)}$ a taxa de juro nominal convertível m vezes. De modo idêntico, $d^{(m)}$ é a taxa de desconto convertível m vezes.

Assim,

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \Leftrightarrow (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{i^{(m)}}{m} \Leftrightarrow i^{(m)} = m \left[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] \quad (2.21)$$

e

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \Leftrightarrow 1 - (1 - d)^{\frac{1}{m}} = \frac{d^{(m)}}{m} \Leftrightarrow d^{(m)} = m \left[1 - (1 - d)^{\frac{1}{m}} \right] \quad (2.22)$$

2.5.2 Rendas certas

Uma renda certa é uma renda onde os termos desta não dependem de um factor aleatório, como a idade de morte ou a idade de entrada de invalidez do segurado, ou seja, é conhecido o número de termos da renda, e a probabilidade de cada pagamento se realizar é 1.

Deste modo, no contexto desta dissertação, irão ser apresentados os seguintes tipos de renda:

- Rendas inteiras temporárias com termos constantes;
- Rendas fracionadas temporárias com termos constantes;
- Rendas inteiras temporárias com termos em progressão geométrica.

2.5.2.1 Rendas inteiras temporárias com termos constantes

Designa-se renda inteira temporária com termos constantes quando os períodos da taxa de capitalização e da renda se igualam, com número de termos finitos que não variam ao longo do tempo. Para além disto, uma renda pode ser antecipada ou postecipada.

Uma renda antecipada é uma renda em que os termos se vencem no princípio de cada período. Seja n o número de períodos da taxa. O valor atual da renda tem a seguinte expressão

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d} \quad (2.23)$$

em que $d = \frac{i}{1+i}$.

Diz-se renda postecipada quando os vencimentos dos termos da renda ocorrem no final do período desta.

Analogamente a 2.23, tem-se

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n = \frac{1 - v^n}{i} \quad (2.24)$$

Denote-se $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ como o valor atual da renda em que a taxa de juro é i , cujo índice pode ser omitido caso se trate sempre da mesma taxa de juro.

Nas Figuras 2.4 e 2.5 encontram-se representadas rendas temporárias, antecipada e postecipada respetivamente, com n termos de 1 unidade monetária (u.m.) cada.

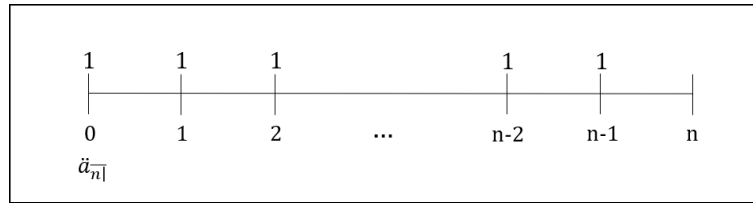


Figura 2.4: Diagrama cronológico - Renda inteira temporária com termos antecipados

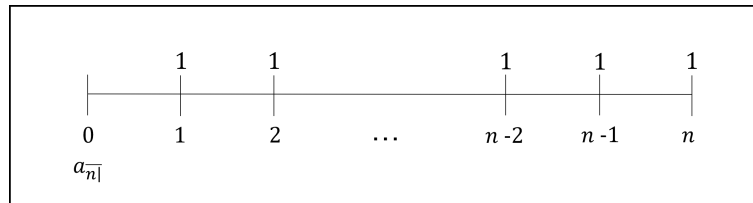


Figura 2.5: Diagrama cronológico - Renda inteira temporária com termos postecipados

Note-se que se tem

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + 1 - v^n \quad (2.25)$$

2.5.2.2 Rendas fracionadas temporárias com termos constantes

Diz-se renda fracionada m vezes quando o período da renda cabe m vezes no período da taxa. Consequentemente, o número de termos da renda é $m \times n$.

Suponhamos que se tem uma renda antecipada com m termos de valor $\frac{1}{m}$ em cada período anual, o seu valor atual é dado por

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} v^{\frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{m} v^{n-\frac{1}{m}} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}} \quad (2.26)$$

Com os mesmos pressupostos, para uma renda postecipada tem-se

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} v^{\frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{m} v^n = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}} \quad (2.27)$$

Note-se que

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m}v^n \quad (2.28)$$

Nas Figuras 2.6 e 2.7 estão representadas rendas fracionadas, antecipada e postecipada respetivamente, com termos iguais a $\frac{1}{m}$.

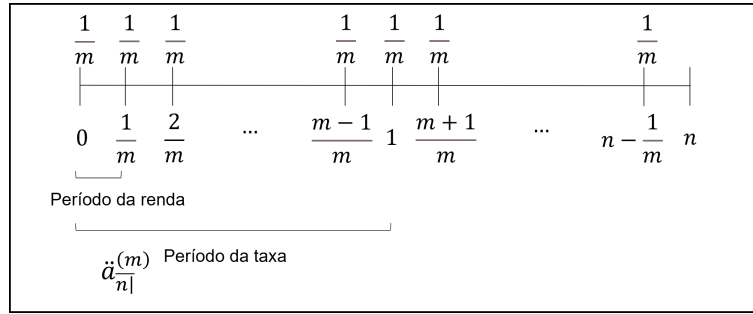


Figura 2.6: Diagrama cronológico - Renda fracionada temporária com termos antecipados

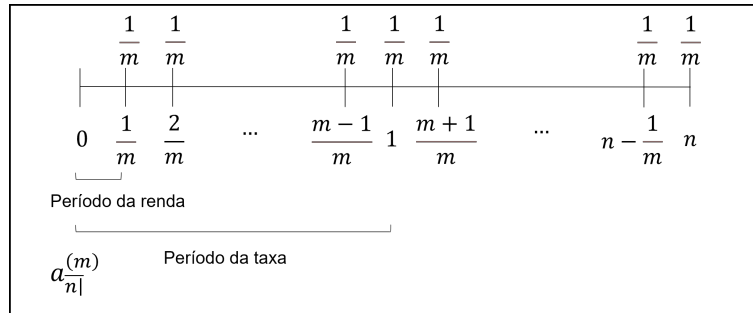


Figura 2.7: Diagrama cronológico - Renda fracionada temporária com termos postecipados

2.5.2.3 Rendas inteiras temporárias com termos em progressão geométrica

Ao contrário das rendas apresentadas anteriormente, de termos constantes, as rendas de progressão geométrica, tal como o nome indica, são rendas em que os termos variam de acordo com uma progressão geométrica.

Considere-se C como o termo inicial da renda de razão $r = 1 + \theta$, sendo θ a taxa de crescimento. Se $r > 1$ ou $0 < r < 1$ os termos são crescentes e decrescentes respetivamente. Se $r = 1$ então a renda tem termos constantes.

O valor atual da renda postecipada é dado por

$${}_C(Ga)_{\overline{n}|}^{\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} C(1+\theta)^k = C v \frac{1 - ((1+\theta)v)^n}{1 - (1+\theta)v} = \frac{C}{1+\theta} a_{\overline{n}|i^*} \quad (2.29)$$

onde

$$i^* = \frac{1+i}{1+\theta} - 1$$

Assim, alterando a taxa de juro, é possível escrever uma renda de progressão geométrica como uma renda de termos constantes.

Para uma renda antecipada, de modo análogo, tem-se

$${}_C(G\ddot{a})_{\overline{n}|}^{\theta} = C \ddot{a}_{\overline{n}|}^{\theta} \quad (2.30)$$

Veja-se este tipo de rendas na Figura 2.8.

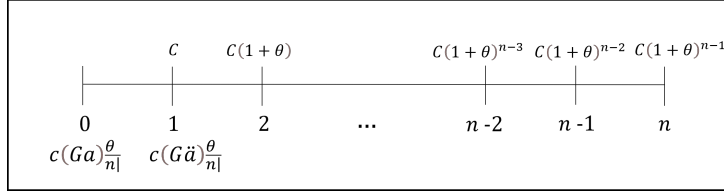


Figura 2.8: Diagrama cronológico - Renda inteira temporária com termos em progressão geométrica

Note-se que para uma renda fracionada com termos em progressão geométrica tem-se

$$\begin{aligned} (Ga)_{\overline{n}|}^{\theta(m)} &= \frac{1}{m} (v^{\frac{1}{m}} + r v^{\frac{2}{m}} + \dots + r^{m \times n - 1} v^n) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m \times n} r^{k-1} v^{\frac{k}{m}} \\ &= \frac{1}{m \times r} \sum_{k=1}^{m \times n} (r v^{\frac{1}{m}})^k \\ &= \frac{1}{m \times r_1^{\frac{1}{m}}} \sum_{k=1}^{m \times n} (r_1 v)^{\frac{k}{m}} \\ &= \frac{1}{r_1^{\frac{1}{m}}} a_{\overline{n}|}^{(m)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

em que $r = r_1^{\frac{1}{m}}$ e $r_1 v = \frac{1}{1+i^*}$.

Deste modo, para uma renda fracionada tem-se

$${}_C(Ga)_{\overline{n}|}^{\theta(m)} = \frac{C}{(1+\theta)^{\frac{1}{m}}} a_{\overline{n}|}^{(m)} \quad (2.32)$$

2.5.3 Rendas vitalícias

Uma renda (anuidade) vitalícia é uma série de pagamentos equidistantes entre si, que é paga enquanto o beneficiário for vivo. A renda pode ser anual, semestral, mensal ou ter outro período entre pagamentos, dependendo do tipo de contrato ou pensão.

As rendas podem ser de termos constantes, os pagamentos não se alteram, ou variáveis, seguindo uma progressão aritmética ou geométrica. Além disso, as rendas vitalícias podem ser classificadas de diversas formas, contudo, no contexto da dissertação, apenas se irão considerar as apresentadas em seguida:

- Rendas inteiras imediatas com termos constantes;
- Rendas fracionadas com termos constantes;
- Rendas com termos a variar em progressão geométrica.

Há, portanto, interesse em calcular o valor esperado das variáveis aleatórias correspondentes ao valor atual dos pagamentos futuros, habitualmente designado por Valor Atuarial.

2.5.3.1 Rendas vitalícias inteiras imediatas com termos constantes

Como já foi referido, uma renda inteira é uma renda cujo período e o período da taxa de juro se igualam. No caso de uma renda inteira imediata com termos constantes, há uma série de pagamentos ao beneficiário até à data da sua morte.

Recorde-se a definição de renda postecipada e antecipada, abordadas em 2.5.2.1. Assim, denote-se o valor atuarial duma renda vitalícia imediata antecipada por $\ddot{a}_x$, em que x é a idade do indivíduo. O valor atuarial desta renda corresponde à soma dos valores atuariais de cada um dos termos. Deste modo tem-se

$$\ddot{a}_x = 1 + v p_x + v^2 {}_2p_x + \dots v^{\omega-x} {}_{\omega-x}p_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k {}_kp_x \quad (2.33)$$

Na Figura 2.9 está representado o diagrama referente a uma renda imediata antecipada, de termos iguais a 1 u.m..

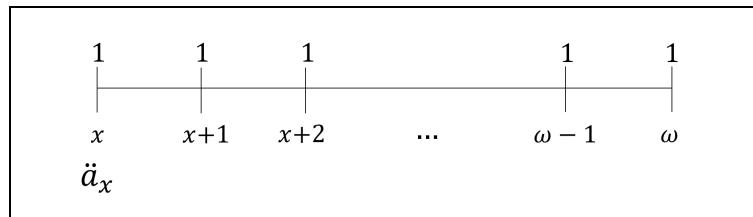


Figura 2.9: Diagrama cronológico dos termos de uma renda vitalícia inteira imediata antecipada

Denote-se por a_x o valor atuarial de uma renda vitalícia inteira imediata postecipada. O valor atuarial desta renda é dado por

$$a_x = v p_x + v^2 {}_2p_x + \dots v^{\omega-x} {}_{\omega-x}p_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k {}_kp_x \quad (2.34)$$

O diagrama dos termos desta renda encontra-se representado na Figura 2.10.

Repare-se que se tem

$$\ddot{a}_x = a_x + 1 \quad (2.35)$$

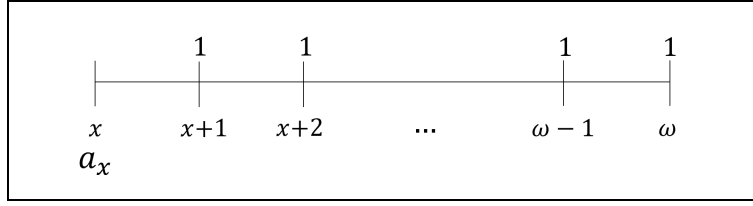


Figura 2.10: Diagrama cronológico dos termos de uma renda vitalícia inteira imediata postecipada

2.5.3.2 Rendas vitalícias fracionadas com termos constantes

Recorde-se que numa renda fracionada m vezes o período da renda cabe m vezes no período da taxa e com termos iguais a $\frac{1}{m}$. Designado por $\ddot{a}_x^{(m)}$ o valor atuarial de uma renda vitalícia fracionada antecipada, tem-se que

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} \frac{1}{m} p_x + \cdots + \frac{1}{m} v p_x + \cdots + \frac{1}{m} v^{\omega-x-\frac{1}{m}} \frac{1}{m} p_x + \frac{1}{m} v^{\omega-x} \frac{1}{m} p_x = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m(\omega-x)} v^{\frac{k}{m}} \frac{1}{m} p_x \quad (2.36)$$

Para o cálculo de $\frac{1}{m} p_x$, considera-se a hipótese da distribuição uniforme das mortes, ou seja, ${}_u q_x = u q_x$, com $0 \leq u \leq 1$.

Analogamente, para uma renda vitalícia fracionada postecipada tem-se

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} \frac{1}{m} p_x + \cdots + \frac{1}{m} v p_x + \cdots + \frac{1}{m} v^{\omega-x-\frac{1}{m}} \frac{1}{m} p_x + \frac{1}{m} v^{\omega-x} \frac{1}{m} p_x = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m(\omega-x)} v^{\frac{k}{m}} \frac{1}{m} p_x \quad (2.37)$$

Os diagramas relativos à renda fracionada antecipada e postecipada encontram-se nas Figuras 2.11 e 2.12, respetivamente.

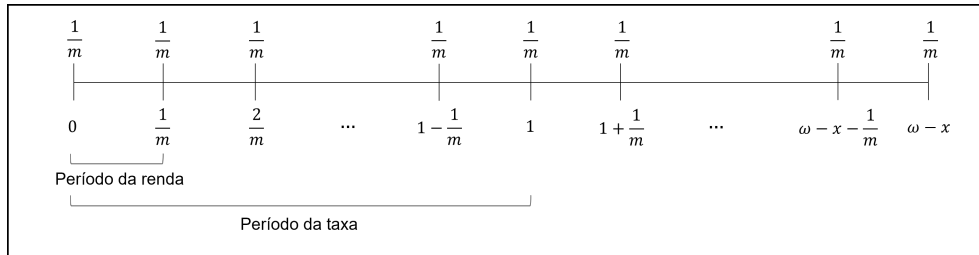


Figura 2.11: Diagrama cronológico dos termos de uma renda vitalícia fracionada antecipada

2.5.3.3 Rendas vitalícias com termos em progressão geométrica

Considere-se uma renda de termos a variar de acordo com uma progressão geométrica, onde o primeiro termo é igual a 1, e a taxa de crescimento é de θ , ou seja, a razão é de $1 + \theta$. Veja-se a Figura 2.13 onde está representada esta renda, de forma postecipada.

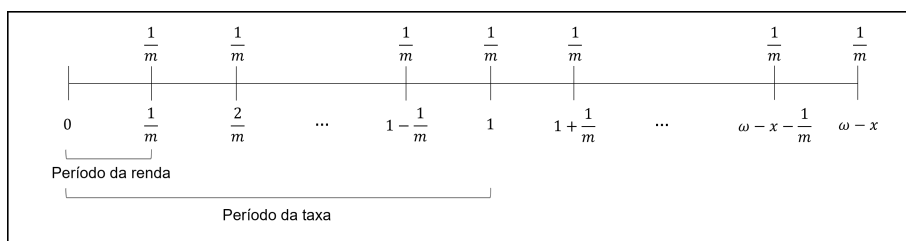


Figura 2.12: Diagrama cronológico dos termos de uma renda vitalícia fracionada postecipada

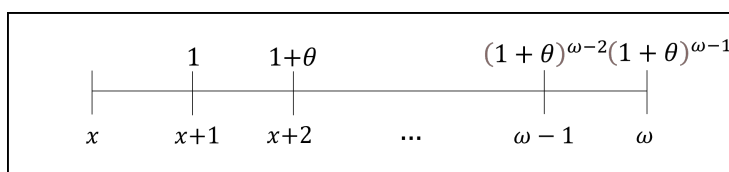


Figura 2.13: Diagrama cronológico dos termos de uma renda vitalícia inteira postecipada de progressão geométrica

Pode-se escrever o valor atuarial desta renda como o de uma renda com termos constantes, alterando apenas a taxa de juro,

$$(Ga)_x^\theta = \frac{1}{1+\theta} \sum_{k=1}^{\omega-x} (1+\theta)^k v^k {}_k p_x = \frac{a_x^*}{1+\theta} \quad (2.38)$$

onde a_x^* é uma renda vitalícia postecipada com uma taxa de juro

$$i^* = \frac{1+i}{1+\theta} - 1$$

Denote-se a_x^* por $a_{x|i^*}$.

Para uma renda antecipada, de modo análogo, tem-se

$$(G\ddot{a})_x^\theta = \ddot{a}_x^* = \ddot{a}_{x|i^*} \quad (2.39)$$

2.6 Abordagem probabilística

Para além da abordagem anterior, pode-se ainda considerar uma outra abordagem probabilística, que consiste em considerar uma variável aleatória (v.a.) que corresponde ao valor descontado dos benefícios a pagar.

Esta abordagem tem como vantagem calcular os momentos de ordem superior a 1 para o valor atual das rendas, além do valor esperado, que já é calculado na abordagem tradicional. Assim, de forma a estimar os intervalos de confiança do valor atual dos benefícios a pagar é necessário, primeiramente, modelar probabilisticamente cada uma das rendas em estudo, através do valor esperado e do momento de segunda ordem, com o objetivo de calcular a variância das rendas no seu conjunto.

Para exemplificar esta abordagem probabilística, considerar-se-á primeiro o seguro de vida inteira, cujo estudo será bastante útil para posteriormente serem abordadas as rendas vitalícias.

Para o cálculo atuarial das responsabilidades das diferentes pensões é necessário relacionar as rendas vitalícias, abordadas em 2.5.3, com as variáveis aleatórias K_x e $K_x^{(m)}$ apresentadas em 2.2.1.

2.6.1 Seguro de vida inteira

Um seguro de vida inteira proporciona ao segurado o pagamento de um capital, cujo valor é estipulado no momento do contrato, em caso de morte deste. Suponha-se então que o capital seguro pago ao beneficiário com idade x , no final do ano em que a morte ocorre, é de 1 u.m.. Visto que a data de morte do indivíduo é desconhecida pelo segurador, o momento em que ocorre o pagamento é uma variável aleatória. Assim, o valor descontado do capital seguro a pagar é também uma variável aleatória. Seja Z o valor atual da indemnização e K_x a variável aleatória definida em 2.2.1. Deste modo tem-se

$$Z = v^{K_x+1} \quad (2.40)$$

Na Figura 2.14 está representado o valor descontado do capital seguro de (x) .

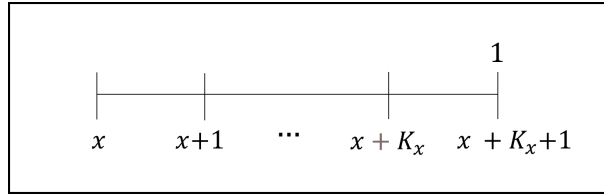


Figura 2.14: Diagrama do valor descontado num seguro de vida inteira

A função massa de probabilidade de Z é dada pela função de probabilidade da v.a. K_x expressa em 2.10. Logo tem-se

$$Pr[Z = v^{k+1}] = Pr[K_x = k] = {}_k|q_x, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (2.41)$$

O valor esperado de Z é o valor descontado do montante esperado que o segurador irá pagar ao beneficiário no fim da sua morte. Assim,

$$A_x = E[Z] = E[v^{K_x+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k|q_x \quad (2.42)$$

Denote-se 2A_x o segundo momento de Z em que a taxa de juro, comparando com a taxa de juro i em A_x , é $(1+j) = (1+i)^2$. Assim,

$${}^2A_x = E[Z^2] = E[v^{2(K_x+1)}] = E[(v^2)^{K_x+1}] \quad (2.43)$$

Logo, a variância de Z é

$$V[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2 = {}^2A_x - A_x^2 \quad (2.44)$$

Considere-se agora um seguro de vida em que o capital seguro é pago ao beneficiário no final do m -ésimo período do ano em que a morte deste ocorre. Note-se que para um seguro de vida inteira basta considerar m igual a 1.

Seja $Z^{(m)}$ o valor descontado do capital seguro e $K_x^{(m)}$ a v.a. indicada em 2.2.1. Assim,

$$Z^{(m)} = v^{K_x^{(m)} + \frac{1}{m}} \quad (2.45)$$

Na Figura 2.15 está representado o valor descontado do capital seguro de (x) .

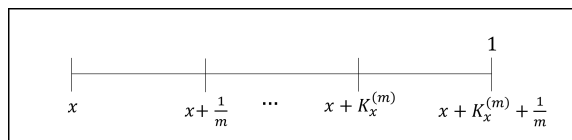


Figura 2.15: Diagrama do valor descontado num seguro de vida fracionado m vezes

A função massa de probabilidade de $Z_x^{(m)}$ é dada pela função de probabilidade da v.a. $K^{(m)}$ expressa em 2.2.1. Desta forma tem-se

$$Pr[Z^{(m)} = v^{k + \frac{1}{m}}] = Pr[K_x^{(m)} = k] = {}_{k|\frac{1}{m}}q_x, \quad k = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots \quad (2.46)$$

O valor esperado e o momento de segunda ordem de $Z^{(m)}$ são dados por

$$A_x^{(m)} = E[Z^{(m)}] = E[v^{K_x^{(m)} + \frac{1}{m}}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m} + \frac{1}{m}} {}_{\frac{k}{m}|\frac{1}{m}}q_x \quad (2.47)$$

$${}^2A_x^{(m)} = E[Z^{(m)2}] = E[v^{2(K_x^{(m)} + \frac{1}{m})}] \quad (2.48)$$

Logo a variância de $Z^{(m)}$ é

$$V[Z^{(m)}] = E[Z^{(m)2}] - E[Z^{(m)}]^2 = {}^2A_x^{(m)} - A_x^{(m)2} \quad (2.49)$$

2.6.2 Formulação probabilística para renda vitalícia inteira

Defina-se a v.a. W por

$$W = v^0 + v^1 + v^2 + \dots + v^{K_x} = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} \quad (2.50)$$

Por (2.23) e (2.40) tem-se

$$\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = \frac{1 - v^{K_x+1}}{d} = \frac{1 - Z}{d} \quad (2.51)$$

Utilizando (2.42), o valor esperado $\ddot{a}_x$, cuja expressão foi apresentada na equação (2.33), é expresso da seguinte forma

$$\ddot{a}_x = E[W] = E\left[\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}\right] = \frac{1 - E[Z]}{d} = \frac{1 - A_x}{d} \quad (2.52)$$

Pela definição de valor esperado tem-se que

$$\ddot{a}_x = E\left[\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_kq_x \quad (2.53)$$

Repare-se que, atendendo a Dickson et al. (2009),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_kq_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kp_x \quad (2.54)$$

Para a variância, utilizando (2.44) tem-se

$$V[W] = V\left[\frac{1-Z}{d}\right] = \frac{V[Z]}{d^2} = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{d^2} \quad (2.55)$$

2.6.3 Formulação probabilística para renda vitalícia fracionada

Defina-se a v.a. $W^{(m)}$ por

$$W^{(m)} = \frac{1}{m} v^0 + \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} v^{\frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{m} v^{K_x^{(m)}} = \ddot{a}_{\overline{K_x^{(m)} + \frac{1}{m}}|}^{(m)} \quad (2.56)$$

Por (2.26) e (2.45) tem-se

$$\ddot{a}_{\overline{K_x^{(m)} + \frac{1}{m}}|}^{(m)} = \frac{1 - v^{K_x^{(m)} + \frac{1}{m}}}{d^{(m)}} = \frac{1 - Z^{(m)}}{d^{(m)}} \quad (2.57)$$

De forma análoga a (2.54), para uma renda fracionada, atendendo a que

$$\sum_{k=t}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{\frac{k}{m} + \frac{1}{m}}|} q_x = \frac{1}{m} p_x \quad (2.58)$$

tem-se,

$$\ddot{a}_x^{(m)} = E\left[\ddot{a}_{\overline{K_x^{(m)} + \frac{1}{m}}|}^{(m)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{\frac{k}{m} + \frac{1}{m}}|}^{(m)} {}_{\frac{k}{m}}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x \quad (2.59)$$

Para o cálculo de ${}_{\frac{k}{m}}q_x$ considere-se a hipótese da distribuição uniforme das mortes.

Por (2.47), o valor esperado $\ddot{a}_x^{(m)}$, cuja expressão foi apresentada na equação (2.36), e a variância são dados por

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{\frac{k}{m} + \frac{1}{m}}|}^{(m)} {}_{\frac{k}{m}}q_x = E[W^{(m)}] = \frac{1 - E[Z^{(m)}]}{d^{(m)}} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}} \quad (2.60)$$

$$V[W^{(m)}] = V\left[\frac{1 - Z^{(m)}}{d^{(m)}}\right] = \frac{V[Z^{(m)}]}{d^{(m)2}} = \frac{{}^2A_x^{(m)} - A_x^{(m)2}}{d^{(m)2}} \quad (2.61)$$

2.7 Teorema Limite Central

O Teorema Limite Central (TLC) é um resultado importante para obter intervalos de confiança, neste caso, das responsabilidades com as pensões a pagar futuramente. Desta forma, será enunciada uma versão deste para variáveis i.i.d. e uma extensão desta, para variáveis somente independentes.

2.7.1 Teorema Limite Central para variáveis i.i.d.

Seja $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição (identicamente distribuídas), com média μ e variância σ^2 , com $0 < \sigma^2 < \infty$. Se $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ então

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \underset{d}{\sim} N(0, 1)$$

ou seja, a v.a. Z_n tem uma distribuição que converge para a Normal reduzida quando $n \rightarrow \infty$.

Note-se que num Plano de Pensões os participantes apresentam características diferentes, tal como a sua idade, tempo de serviço passado e futuro ou outros aspetos. Também a cobertura que irão receber no futuro, ou a que estão a receber no presente, difere. Desta forma, as variáveis aleatórias dos valores descontados que os participantes poderão vir a receber irão ser independentes, visto que a cobertura que cada indivíduo detém ou deterá não depende de nenhuma informação ou característica de outro, mas não serão identicamente distribuídas. Posto isto, não é possível aplicar o TLC para variáveis i.i.d. na construção dos intervalos de confiança.

2.7.2 Teorema Limite Central de *Lyapounov*

Seja $\{X_n\}$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes, com

$$\mu_n = E[X_n], \quad \sigma_n^2 = V[X_n] < \infty, \quad s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (2.62)$$

Suponha-se que $|X_n - \mu_n|^{2+\delta}$ é integrável para algum δ positivo. Seja a condição de *Lyapounov* dada por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{s_n^{2+\delta}} E[|X_k - \mu_k|^{2+\delta}] = 0 \quad (2.63)$$

Se (2.63) se verificar então

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \underset{d}{\sim} N(0, 1)$$

Este teorema é apresentado como corolário do teorema de *Lindeberg*, que pode ser consultado em Billingsley (2012).

Visto que este teorema garante que a distribuição da soma de variáveis independentes converge assintoticamente para a Normal reduzida, se se garantir a condição de *Lyapounov*, deve-se utilizar este teorema para a construção dos intervalos de confiança, pois não é necessário considerar que as variáveis sejam identicamente distribuídas.

MODELAÇÃO DAS COBERTURAS

Neste capítulo será apresentado a modelação do problema, de acordo com o enquadramento teórico exposto anteriormente, que servirá para aplicar no caso prático. Inicialmente, com base nas abordagens probabilísticas tratadas no Capítulo 2, será feita uma modelação das várias coberturas em estudo, em que se obterá o valor esperado, o momento de ordem dois e a variância das coberturas. Por último, determinar-se-ão intervalos de confiança para o cálculo das responsabilidades.

3.1 Cobertura de reforma por velhice

Considere-se TSF como o tempo de serviço futuro, ou seja, é o tempo até um indivíduo se reformar por velhice, com $TSF > 0$.

Denote-se Y_1 como a variável aleatória que representa o valor atual do pagamento a fazer ao participante em caso de reforma por velhice, pago uma vez ao ano. Assim, Y_1 é dado por

$$Y_1 = v^{TSF} C(x, TSF) (G\ddot{a})_{\overline{K_x+1-TSF}|}^{\theta} \times I_{\{K_x \geq TSF\}} \times I_{\{I_x \geq TSF\}} \quad (3.1)$$

onde

- $C(x, TSF)$ representa o benefício da pensão anual do participante à idade da reforma;
- $I_{\{K_x \geq TSF\}}$ representa a função indicatriz, considerando que (x) falece depois da INR;
- $I_{\{I_x \geq TSF\}}$ representa a função indicatriz, considerando que (x) não se invalida até à INR.

Note-se que se tem uma renda antecipada de termos em progressão geométrica pois o valor da pensão do participante vai aumentando, devido à taxa de crescimento de pensões θ . Recorde-se que, por (2.30),

$$C(x, TSF)(G\ddot{a})_{\overline{K_x+1-TSF}|i^*}^\theta = C\ddot{a}_{\overline{K_x+1-TSF}|i^*} \quad (3.2)$$

com $i^* = \frac{1+i}{1+\theta} - 1$.

Deste modo, Y_1 é

$$Y_1 = C(x, TSF)v^{TSF}\ddot{a}_{\overline{K_x+1-TSF}|i^*} \times I_{\{K_x \geq TSF\}} \times I_{\{I_x \geq TSF\}} \quad (3.3)$$

Visto que a pensão só é paga caso o indivíduo se mantenha ativo na empresa até à INR, é necessário ter em conta a probabilidade do indivíduo não se invalidar nem falecer, utilizando uma tábua líquida.

Assim, há um pagamento de uma renda até ao indivíduo morrer, que é paga a partir do momento em que atinge a INR.

Deste modo, o valor que é esperado pagar é

$$\begin{aligned} E[Y_1] &= \sum_{j=0}^{\infty} C(x, TSF)v^{TSF}\ddot{a}_{\overline{j+1}|i^*} TSFp_x^{(T)} {}_j|q_{INR}^{(m)} \\ &= C(x, TSF)v^{TSF} TSFp_x^{(T)} \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1}|i^*} {}_j|q_{INR}^{(m)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

A probabilidade do benefício ser pago é dado por $TSFp_x^{(T)}$, ou seja, utilizando a tábua líquida, é a probabilidade de (x) se manter ativo na empresa até à INR.

Note-se que se tem

$${}_j|q_{INR}^{(m)} = {}_j|q_{INR}'^{(m)} \quad (3.5)$$

uma vez que a partir da INR já não é considerado a invalidez, ou seja, só se considera o decremento por morte.

Assim,

$$\begin{aligned} E[Y_1] &= C(x, TSF)v^{TSF} TSFp_x^{(T)} \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{j+1}|i^*} {}_j|q_{INR}'^{(m)} \\ &= C(x, TSF)v^{TSF} TSFp_x^{(T)} \ddot{a}_{INR|i^*} \end{aligned} \quad (3.6)$$

O momento de segunda ordem é dado por

$$\begin{aligned} E[Y_1^2] &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(C(x, TSF)v^{TSF}\ddot{a}_{\overline{j+1}|i^*} \right)^2 TSFp_x^{(T)} {}_j|q_{INR}^{(m)} \\ &= \left(C(x, TSF)v^{TSF} \right)^2 TSFp_x^{(T)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\ddot{a}_{\overline{j+1}|i^*} \right)^2 {}_j|q_{INR}'^{(m)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Repare-se que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\ddot{a}_{\overline{j+1}|i^*} \right)^2 {}_j|q_{INR}'^{(m)} &= E \left[\ddot{a}_{\overline{K_{INR}+1}|i^*}^2 \right] \\ &= V \left[\ddot{a}_{\overline{K_{INR}+1}|i^*} \right] + E^2 \left[\ddot{a}_{\overline{K_{INR}+1}|i^*} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por (2.52) e (2.55),

$$E \left[\ddot{a}_{\overline{K_{INR}+1}|i^*} \right] = \ddot{a}_{INR|i^*} \quad (3.9)$$

$$V \left[\ddot{a}_{\overline{K_{INR}+1}|i^*} \right] = \frac{{}^2A_{INR} - A_{INR}^2}{d^2} \Big|_{i^*} \quad (3.10)$$

em que $\frac{{}^2A_{INR} - A_{INR}^2}{d^2} \Big|_{i^*}$ é uma notação considerando a taxa de juro i^* em toda a expressão, ou seja, no cálculo de ${}^2A_{INR}$, A_{INR}^2 e d^2 considera-se i^* .

Logo

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\ddot{a}_{\overline{j+1}|i^*} \right)^2 {}_j|q_{INR}'^{(m)} = \frac{{}^2A_{INR} - A_{INR}^2}{d^2} \Big|_{i^*} + \ddot{a}_{INR|i^*}^2 \quad (3.11)$$

Por fim,

$$E \left[Y_1^2 \right] = \left(C(x, TSF) v^{TSF} \right)^2 {}_{TSF}p_x^{(T)} \left(\frac{{}^2A_{INR} - A_{INR}^2}{d^2} \Big|_{i^*} + \ddot{a}_{INR|i^*}^2 \right) \quad (3.12)$$

Assim, a variância desta cobertura é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} V[Y_1] &= E[Y_1^2] - E^2[Y_1] \\ &= \left(C(x, TSF) v^{TSF} \right)^2 {}_{TSF}p_x^{(T)} \left(\frac{{}^2A_{INR} - A_{INR}^2}{d^2} \Big|_{i^*} + \left(1 - {}_{TSF}p_x^{(T)} \right) \ddot{a}_{INR|i^*}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Seja $Y_1^{(m)}$ a mesma variável para m pagamentos de pensões por ano. Note-se que, neste caso, como se está a considerar uma taxa anual de crescimento de pensões θ , é necessário reformular a renda, para que haja apenas crescimento de pensões de ano a ano.

Considerando o ajuste descrito anteriormente, e denotando $\ddot{a}_{\overline{K_x^{(m)} + \frac{1}{m}}|i^*}^{(m)*1}$ a renda fracionada com crescimento de pensões de ano a ano, tem-se o correspondente valor atual

$$\ddot{a}_{\overline{K_x^{(m)} + \frac{1}{m}}|i^*}^{(m)*1} = \sum_{k=0}^{K_x^{(m)} \times m} (1 + \theta)^{\lfloor \frac{k}{m} \rfloor} v_m^{\frac{k}{m}} \quad (3.14)$$

Então,

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)*1} &= E \left[\ddot{a}_{K_x^{(m)} + \frac{1}{m}}^{(m)*1} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{a}_{\frac{j}{m} + \frac{1}{m}}^{(m)*1} i^* \frac{j}{m} \frac{1}{m} q_x^{(m)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^j (1 + \theta)^{\lfloor \frac{k}{m} \rfloor} v^{\frac{k}{m}} \frac{j}{m} \frac{1}{m} q_x^{(m)}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Assim,

$$Y_1^{(m)} = C(x, TSF) v^{TSF} \ddot{a}_{K_x^{(m)} + \frac{1}{m} - TSF}^{(m)*1} \times I_{\{K_x^{(m)} \geq TSF\}} \times I_{\{I_x^{(m)} \geq TSF\}} \quad (3.16)$$

De forma análoga a Y_1 e considerando a reformulação, o valor esperado e o momento de segunda ordem são dados por

$$\begin{aligned}E \left[Y_1^{(m)} \right] &= \sum_{j=0}^{\infty} C(x, TSF) v^{TSF} \ddot{a}_{\frac{j}{m} + \frac{1}{m}}^{(m)*1} TSF p_x^{(T)} \frac{j}{m} \frac{1}{m} q_{INR}^{(m)} \\ &= C(x, TSF) v^{TSF} TSF p_x^{(T)} \ddot{a}_{INR}^{(m)*1}\end{aligned}\quad (3.17)$$

$$E \left[Y_1^{(m)2} \right] = \left(C(x, TSF) v^{TSF} \right)^2 TSF p_x^{(T)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\ddot{a}_{\frac{j}{m} + \frac{1}{m}}^{(m)*1} \right)^2 \frac{j}{m} \frac{1}{m} q_{INR}^{(m)} \quad (3.18)$$

A variância de $Y_1^{(m)}$ é então dada por

$$V \left[Y_1^{(m)} \right] = E \left[Y_1^{(m)2} \right] - E^2 \left[Y_1^{(m)} \right] \quad (3.19)$$

3.2 Cobertura de reforma por invalidez

Seja I_x a variável definida em 2.3.1. Denote-se Y_2 como a variável aleatória que representa o valor atual do benefício da reforma por invalidez.

$$Y_2 = v^{I_x} C(x, I_x) (Ga)_{K_x - I_x}^{\theta} \times I_{\{K_x \geq I_x\}} \times I_{\{I_x < TSF\}} \quad (3.20)$$

onde

- $C(x, I_x)$ representa o benefício da pensão anual do participante à idade da reforma por invalidez;
- $I_{\{K_x \geq I_x\}}$ representa a função indicatriz considerando que (x) falece depois da idade em que se invalida;
- $I_{\{I_x < TSF\}}$ representa a função indicatriz considerando que (x) se invalida antes da INR.

Note-se que, de forma semelhante à cobertura de reforma por velhice, aqui também se irá considerar uma renda, neste caso postecipada pois está-se a considerar um pagamento, em caso de reforma por invalidez, feito no final do ano, com termos em progressão geométrica devido à taxa de crescimento de pensões θ . Por (2.29),

$$c(Ga)_{\bar{j}|}^{\theta} = \frac{C}{1+\theta} a_{\bar{j}|i^*} \quad (3.21)$$

Deste modo tem-se

$$Y_2 = \frac{C(x, I_x)}{1+\theta} v^{I_x} a_{\overline{K_x - I_x}|i^*} \times I_{\{K_x \geq I_x\}} \times I_{\{I_x < TSF\}} \quad (3.22)$$

Tal como na cobertura de reforma por velhice, o valor esperado é expresso da mesma forma, no entanto é necessário considerar que o indivíduo só receberá a sua pensão caso se invalide antes da INR. Assim, o valor esperado de Y_2 é expresso por

$$\begin{aligned} E[Y_2] &= \sum_{j=0}^{TSF_x-1} \sum_{k=0}^{\infty} C(x, j) v^j {}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(d)} \frac{a_{\bar{k}|i^*}}{1+\theta} {}_d q_{x+j}'^{(m)} \\ &= \sum_{j=0}^{TSF_x-1} \frac{C(x, j)}{1+\theta} v^j {}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(d)} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\bar{k}|i^*} {}_d q_{x+j}'^{(m)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

A probabilidade do benefício ser pago é dado por ${}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(d)}$, ou seja, utilizando a tábua líquida, tem-se o produto da probabilidade de (x) manter-se ativo na empresa até ao momento da invalidez, com a probabilidade de ele se invalidar no momento j , considerando aqui o decremento de morte.

Visto que há pouca informação acerca das tábuas de mortalidade para inválidos e geralmente não se considera uma diferença entre estas probabilidades e as probabilidades comuns, ir-se-á considerar a tabela de mortalidade para inválidos a tabela de mortalidade comum, isto é

$${}_d q_{x+j}'^{(m)} = {}_d q_{x+j}'^{(m)} \quad (3.24)$$

Assim, pode-se expressar o valor esperado de Y_2 como

$$E[Y_2] = \sum_{j=0}^{TSF_x-1} \frac{C(x, j)}{1+\theta} v^j {}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(d)} a_{x+j|i^*} \quad (3.25)$$

Para o momento de segunda ordem tem-se

$$\begin{aligned} E[Y_2^2] &= \sum_{j=0}^{TSF_x-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(C(x, j) v^j \frac{a_{\bar{k}|i^*}}{1+\theta} \right)^2 {}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(d)} {}_d q_{x+j}'^{(m)} \\ &= \sum_{j=0}^{TSF_x-1} \left(\frac{C(x, j)}{1+\theta} v^j \right)^2 {}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(d)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{\bar{k}|i^*} \right)^2 {}_d q_{x+j}'^{(m)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

À semelhança de (3.8), para uma renda postecipada,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{\overline{k|i^*}} \right)^2 {}_k q_{x+j}^{(m)} = V \left[a_{\overline{K_{x+j}|i^*}} \right] + E^2 \left[a_{\overline{K_{x+j}|i^*}} \right] \quad (3.27)$$

Repare-se que, por (2.25), (2.52) tem-se

$$\begin{aligned} E \left[\left(a_{\overline{K_{x+j}|i^*}} \right)^2 \right] &= V \left[\ddot{a}_{\overline{K_{x+j}+1|i^*}} - 1 \right] + E^2 \left[\ddot{a}_{\overline{K_{x+j}+1|i^*}} - 1 \right] \\ &= V \left[\ddot{a}_{\overline{K_{x+j}+1|i^*}} \right] + E^2 \left[\ddot{a}_{\overline{K_{x+j}+1|i^*}} \right] - 2E \left[\ddot{a}_{\overline{K_{x+j}+1|i^*}} \right] + 1 \\ &= \frac{{}^2A_{x+j} - A_{x+j}^2}{d^2} \Big|_{i^*} + \ddot{a}_{x+j|i^*}^2 - 2\ddot{a}_{x+j|i^*} + 1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Daqui resulta

$$E \left[Y_2^2 \right] = \sum_{j=0}^{TSF_x-1} \left(\frac{C(x, j)}{1 + \theta} v^j \right)^2 {}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(d)} \left(\frac{{}^2A_{x+j} - A_{x+j}^2}{d^2} \Big|_{i^*} + \ddot{a}_{x+j|i^*}^2 - 2\ddot{a}_{x+j|i^*} + 1 \right) \quad (3.29)$$

Com os resultados obtidos, a variância é dada por

$$V[Y_2] = E[Y_2^2] - E^2[Y_2] \quad (3.30)$$

Seja $Y_2^{(m)}$ a mesma variável aleatória para m pagamentos ao ano. De forma análoga a (3.14), para uma renda postecipada tem-se

$$a_{\overline{K_x^{(m)}|i^*}}^{(m)*1} = \sum_{k=1}^{K_x^{(m)} \times m} (1 + \theta)^{\lfloor \frac{k-1}{m} \rfloor} \frac{v^{\frac{k}{m}}}{m} \quad (3.31)$$

Assim,

$$Y_2^{(m)} = C(x, I_x) v^{I_x^{(m)}} a_{\overline{K_x^{(m)} - I_x^{(m)}|i^*}}^{(m)*1} \times I_{\{K_x^{(m)} \geq I_x^{(m)}\}} \times I_{\{I_x^{(m)} < TSF\}} \quad (3.32)$$

Analogamente, o valor esperado e o momento de segunda ordem são dados por

$$\begin{aligned} E \left[Y_2^{(m)} \right] &= \sum_{j=0}^{TSF_x \times m - 1} \sum_{k=0}^{\infty} C \left(x, \left\lfloor \frac{j}{m} \right\rfloor \right) v^{\frac{j}{m}} {}_j p_x^{(T)} q_{x+\frac{j}{m}}^{(d)} a_{\overline{\frac{k}{m}|i^*}}^{(m)*1} \frac{d}{m} q_{x+\frac{j}{m}}^{(m)*1} \\ &= \sum_{j=0}^{TSF_x \times m - 1} C \left(x, \left\lfloor \frac{j}{m} \right\rfloor \right) v^{\frac{j}{m}} {}_j p_x^{(T)} q_{x+\frac{j}{m}}^{(d)} a_{\overline{\frac{k}{m}|i^*}}^{(m)*1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$E \left[Y_2^{(m)2} \right] = \sum_{j=0}^{TSF_x \times m - 1} \left(C \left(x, \left\lfloor \frac{j}{m} \right\rfloor \right) v^{\frac{j}{m}} \right)^2 {}_j p_x^{(T)} q_{x+\frac{j}{m}}^{(d)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{\overline{\frac{k}{m}|i^*}}^{(m)*1} \right)^2 \frac{d}{m} q_{x+\frac{j}{m}}^{(m)*1} \quad (3.34)$$

3.3 Cobertura de sobrevivência

Considere-se K_x a v.a. definida em 2.2.1 e K_y a mesma v.a. para um indivíduo de idade y . Seja (x) o participante do Plano de Pensões e (y) o cônjuge deste. Se (x) falecer antes de atingir a INR, (y) receberá uma pensão no término do ano em que ocorre a morte de (x) . Novamente, ter-se-á uma renda postecipada de termos em progressão geométrica, considerando a taxa de crescimento de pensões θ .

Para o cônjuge (y) ter direito a receber a pensão de sobrevivência, (x) terá de falecer antes da INR e de (y) . Também será necessário considerar a probabilidade β de (x) estar casado.

Denote-se Y_3 como a variável aleatória que representa o valor atual do benefício em caso de morte do participante.

$$\begin{aligned} Y_3 &= v^{K_x} C^*(x, K_x) (Ga)_{\overline{K_y - K_x}|}^{\theta} \times I_{\{K_x \leq K_y\}} \times I_{\{K_x < TSF\}} \times I_{\{(x) \text{ casado}\}} \\ &= \frac{C^*(x, K_x)}{1 + \theta} v^{K_x} a_{\overline{K_y - K_x}|}^{\theta} \times I_{\{K_x \leq K_y\}} \times I_{\{K_x < TSF\}} \times I_{\{(x) \text{ casado}\}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde

- $C^*(x, K_x)$ representa o benefício da pensão anual a pagar a (y) à idade de morte de (x) ;
- $I_{\{K_x \leq K_y\}}$ representa a função indicatriz considerando que (x) falece antes de (y) ;
- $I_{\{K_x < TSF\}}$ representa a função indicatriz considerando que (x) falece antes da INR;
- $I_{\{(x) \text{ casado}\}}$ representa a função indicatriz considerando que (x) é casado.

Semelhantemente às outras coberturas, o valor esperado de Y_3 é expresso da mesma forma, considerando-se aqui que o beneficiário do indivíduo só poderá adquirir a sua pensão caso o participante faleça antes da INR. Assim, o valor esperado de Y_3 é dado por

$$E[Y_3] = \sum_{j=0}^{TSF_x-1} \sum_{k=0}^{\infty} C^*(x, j) v^j {}_j|q_x^{(m)} \beta \frac{a_{\overline{k}|}^{\theta}}{1+\theta} {}_{k+j}|q_y'^{(m)} \quad (3.36)$$

em que β é a probabilidade do indivíduo estar casado.

Note-se que se tem (3.37), pois a probabilidade do indivíduo falecer aos $x + j$ anos, tendo em conta o decremento de invalidez, é o produto da probabilidade deste se manter ativo até $x + j$ anos e nesse ano falecer considerando o decremento de invalidez.

$${}_j|q_x^{(m)} = {}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(m)} \quad (3.37)$$

Então,

$$\begin{aligned}
 E[Y_3] &= \sum_{j=0}^{TSF_x-1} \frac{C^*(x, j)}{1+\theta} v^j {}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(m)} \beta {}_j p_y'^{(m)} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\overline{k}|i^*} {}_k q_{y+j}'^{(m)} \\
 &= \sum_{j=0}^{TSF_x-1} \frac{C^*(x, j)}{1+\theta} v^j {}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(m)} \beta {}_j p_y'^{(m)} a_{y+j|i^*}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

A probabilidade do benefício ser pago é dada por ${}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(m)} \beta {}_j p_y'^{(m)}$, ou seja, utilizando a tábua líquida, tem-se o produto da probabilidade de (x) se manter ativo na empresa até à data de morte, a probabilidade de ele falecer no momento j , considerando aqui o decréscimo de morte, a probabilidade do cônjuge estar vivo e também a probabilidade do participante ser casado.

O momento de segunda ordem é dado por

$$E[Y_3^2] = \sum_{j=0}^{TSF_x-1} \left(\frac{C^*(x, j)}{1+\theta} v^j \right)^2 {}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(m)} \beta {}_j p_y'^{(m)} \sum_{k=0}^{\infty} (a_{\overline{k}|i^*})^2 {}_k q_{y+j}'^{(m)} \tag{3.39}$$

De modo análogo a (3.28)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} (a_{\overline{k}|i^*})^2 {}_k q_{y+j}'^{(m)} &= V \left[\ddot{a}_{\overline{K_{y+j}+1}|i^*} - 1 \right] + E^2 \left[\ddot{a}_{\overline{K_{y+j}+1}|i^*} - 1 \right] \\
 &= \frac{{}^2 A_{y+j} - A_{y+j}^2}{d^2} \Big|_{i^*} + \ddot{a}_{y+j|i^*}^2 - 2 \ddot{a}_{y+j|i^*} + 1
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Logo o momento de segunda ordem é

$$\begin{aligned}
 E[Y_3^2] &= \sum_{j=0}^{TSF_x-1} \left(\frac{C^*(x, j)}{1+\theta} v^j \right)^2 {}_j p_x^{(T)} q_{x+j}^{(m)} \beta {}_j p_y'^{(m)} \times \\
 &\quad \left(\frac{{}^2 A_{y+j} - A_{y+j}^2}{d^2} \Big|_{i^*} + \ddot{a}_{y+j|i^*}^2 - 2 \ddot{a}_{y+j|i^*} + 1 \right)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Seja $Y_3^{(m)}$ a mesma variável para m pagamentos ao ano.

$$Y_3^{(m)} = C^*(x, K_x) v^{K_x^{(m)}} a_{\overline{K_y^{(m)} - K_x^{(m)}}}^{(m)*1} \times I_{\{K_x^{(m)} \leq K_y^{(m)}\}} \times I_{\{K_x^{(m)} < n\}} \times I_{\{(x) \text{ casado}\}} \tag{3.42}$$

Analogamente, o valor esperado e o momento de segunda ordem são dados por

$$\begin{aligned}
 E[Y_3^{(m)}] &= \sum_{j=0}^{TSF_x \times m - 1} C^*\left(x, \left\lfloor \frac{j}{m} \right\rfloor\right) v^{\frac{j}{m}} {}_{\frac{j}{m}} p_x^{(T)} q_{x+\frac{j}{m}}^{(m)} \beta {}_{\frac{j}{m}} p_y'^{(m)} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\overline{\frac{k}{m}}|i^*}^{\frac{(m)*1}{\frac{k}{m} + \frac{j}{m} + \frac{1}{m}}} q_y'^{(m)} \\
 &= \sum_{j=0}^{TSF_x \times m - 1} C^*\left(x, \left\lfloor \frac{j}{m} \right\rfloor\right) v^{\frac{j}{m}} {}_{\frac{j}{m}} p_x^{(T)} q_{x+\frac{j}{m}}^{(m)} \beta {}_{\frac{j}{m}} p_y'^{(m)} a_{y+\frac{j}{m}}^{(m)*1}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$E\left[Y_3^{(m)2}\right] = \sum_{j=0}^{TSF_x \times m - 1} \left(C^*\left(x, \left\lfloor \frac{j}{m} \right\rfloor\right) v_{\frac{j}{m}}\right)^2 p_{\frac{j}{m}}^{(T)} q_{x+\frac{j}{m}}^{(m)} \beta_{\frac{j}{m}} p_y'^{(m)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{\frac{k}{m}}^{(m)*1}\right)^2 q_{y+\frac{j}{m}}'^{(m)} \quad (3.44)$$

3.4 Valor esperado e variância das três coberturas

Seja $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ a notação para o conjunto das coberturas. Isto significa que, ao assumir Y como o valor atual dos benefícios a pagar, considera-se que os participantes poderão receber uma pensão caso se reformem por velhice ou por invalidez, ou então, caso faleçam antes da INR, os cônjuges receberão uma pensão até ao momento da sua morte. No entanto, as coberturas não são compatíveis, sendo que qualquer participante não pode receber mais do que uma pensão.

O valor esperado do conjunto das coberturas é dado por

$$E[Y] = E[Y_1 + Y_2 + Y_3] = E[Y_1] + E[Y_2] + E[Y_3] \quad (3.45)$$

A variância do conjunto das coberturas em estudo pode ser obtida pela seguinte fórmula

$$\begin{aligned} V[Y] &= V[Y_1 + Y_2 + Y_3] = V[Y_1] + V[Y_2] + V[Y_3] + \\ &2cov(Y_1, Y_2) + 2cov(Y_1, Y_3) + 2cov(Y_2, Y_3) \end{aligned} \quad (3.46)$$

na qual a covariância, para quaisquer variáveis Y_i e Y_j , com $i \neq j$, é dada pela seguinte expressão

$$cov(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - E(Y_i) E(Y_j) \quad (3.47)$$

Observe-se que, para qualquer par das coberturas por reforma de velhice, invalidez ou sobrevivência, $E(Y_i Y_j)$ é igual a 0, devido ao facto das coberturas serem incompatíveis.

Assim, a variância do conjunto das coberturas é dada por

$$\begin{aligned} V[Y] &= V[Y_1 + Y_2 + Y_3] = V[Y_1] + V[Y_2] + V[Y_3] - \\ &2E(Y_1)E(Y_2) - 2E(Y_1)E(Y_3) - 2E(Y_2)E(Y_3) \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.5 Intervalos de confiança

No que se segue, inicialmente será analisada a aplicação do teorema de *Lyapounov*, enunciado em 2.7.2, ao caso em estudo. De seguida, ir-se-ão determinar intervalos de confiança, aplicando o teorema de *Lyapounov*, para as responsabilidades dos benefícios a pagar, para cada participante de um Plano de Pensões.

3.5.1 Aplicação do teorema de *Lyapounov*

Antes de se poder determinar os intervalos de confiança, é necessário confirmar que se está na condição de aplicar o teorema ao caso em estudo. Em Tomás (2015), no subcapítulo 5.2 encontra-se a demonstração para $Z = v^{K_x+1}$, que vai de encontro com as coberturas em estudo. Desta forma, para o caso fraccionado, a demonstração será análoga. Assim, poder-se-á aplicar o Teorema de *Lyapounov* ao caso em estudo.

3.5.2 Intervalos de confiança para as responsabilidades

Considere-se n o número de pessoas do Plano.

Denote-se a variável aleatória T como o total dos valores atuais dos benefícios dos participantes na carteira, expresso por

$$T = \sum_{k=1}^n Y_k = \sum_{k=1}^n (Y_{1_k} + Y_{2_k} + Y_{3_k}) \quad (3.49)$$

em que Y_j , com $j = 1, 2, 3$, refere-se às variáveis aleatórias que representam o valor atual dos benefícios de cada uma das coberturas.

Visto que as variáveis Y_k são independentes, não identicamente distribuídas e se verifica a condição de *Lyapounov*, então

$$\frac{T - E(T)}{\sqrt{V(T)}} \underset{d}{\sim} N(0, 1) \quad (3.50)$$

Note-se que

$$E(T) = E\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right) = \sum_{k=1}^n E(Y_k) = \sum_{k=1}^n (E(Y_{1_k}) + E(Y_{2_k}) + E(Y_{3_k})) \quad (3.51)$$

$$V(T) = V\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right) = \sum_{k=1}^n V(Y_k) = \sum_{k=1}^n V(Y_{1_k} + Y_{2_k} + Y_{3_k}) \quad (3.52)$$

Seja α o nível de significância e $z_{\frac{\alpha}{2}}$ o valor crítico. Para a construção de um intervalo de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$, para os membros do Plano tem-se

$$\begin{aligned} -z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{T - E(T)}{\sqrt{V(T)}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} &\Leftrightarrow \\ E(T) - \sqrt{V(T)} \times z_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq E(T) + \sqrt{V(T)} \times z_{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Se se pretender estimar o intervalo de confiança das responsabilidades para cada cobertura, basta considerar

$$T_i = \sum_{k=1}^n Y_{i_k} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.54)$$

CASO PRÁTICO

Neste capítulo serão aplicados os cálculos anteriormente feitos no Capítulo 3, com o apoio dos conceitos e métodos descritos em 2. Os dados que se irão trabalhar são reais e provêm de uma entidade portuguesa. Deste modo é necessário, inicialmente, ter em conta considerações e pressupostos para poder obter os cálculos desejados. De seguida, será feita uma análise aos dados, retratando as variáveis mais importantes numa avaliação atuarial. Por último, serão calculados os valores esperados e variâncias das coberturas em estudo, de modo a se poder estimar os intervalos de confiança para as responsabilidades.

Para os cálculos e gráficos apresentados neste capítulo foram utilizados os softwares *Excel* e o *RStudio*.

4.1 Considerações do Plano de Pensões

Os dados para o plano de pensões analisados contêm informações relativamente a cada membro activo da empresa, como o sexo, data de nascimento, data de admissão na empresa, salário anual e a idade atuarial de cada membro ativo e do seu cônjuge. De acordo com “REAL VIDA SEGUROS” (s.d.), entenda-se por idade atuarial "a idade, em anos inteiros, mais próxima do aniversário (passado ou futuro) da pessoa segura".

Todos os membros ativos na empresa são elegíveis para este plano, de benefício definido. Assim, todos os trabalhadores estão sujeitos ao recebimento de um benefício de reforma por velhice ou invalidez, ou ao benefício pago ao cônjuge, em caso de morte deste.

Denote-se por S_x o salário anual à idade x . O benefício em caso de reforma por velhice, denotado por $C(x, TSF)$ é dado pela seguinte expressão

$$C(x, TSF) = 0,8 \times S_{INR-1} \quad (4.1)$$

Seja j o momento em que o indivíduo se invalida. O benefício a receber na idade em que o indivíduo se reforma é

$$C(x, j) = 0,8 \times S_j \quad (4.2)$$

Seja i o momento em que o indivíduo falece. O benefício a pagar ao cônjuge em caso de morte do participante antes de atingir a INR, à idade de morte, é expresso por

$$C^*(x, i) = R \times 0,8 \times S_i \quad (4.3)$$

em que R representa a percentagem de reversibilidade da pensão para o cônjuge.

4.2 Análise dos dados

É importante, numa avaliação atuarial, ter em atenção determinadas características da população em estudo. Na tabela 4.1 observam-se vários aspetos da população.

Tabela 4.1: Estatísticas dos membros ativos

Total de ativos	141
Idade média (anos)	49.142
Idade média do cônjuge (anos)	47.035
Salário anual médio (€)	15 795.01
Tempo de Serviço Passado (TSP) médio (anos)	20.113
Tempo de Serviço Futuro (TSF) médio (anos)	16.858

De modo a aferir a necessidade de usar tábuas de mortalidade diferentes, dependendo do sexo, é essencial analisar a percentagem de membros do sexo masculino e feminino. Na tabela 4.2 é possível ver o número dos ativos pelo sexo, assim como as suas percentagens.

Tabela 4.2: Total de ativos por sexo e suas percentagens

Sexo	Total	Percentagem
Masculino	120	85.11%
Feminino	21	14.89%

No gráfico da Figura 4.1 é possível observar a distribuição das idades por sexo. No caso dos ativos do sexo feminino, a maior incidência é entre os 36 e os 50 anos. Já nos ativos do sexo masculino a maior percentagem encontra-se nas idades compreendidas entre os 56 e 60 anos. De um modo geral, a maioria dos membros estão numa idade compreendida dos 41 aos 45 anos. Até aos 30 anos, apenas existem membros do sexo masculino a trabalhar na empresa.

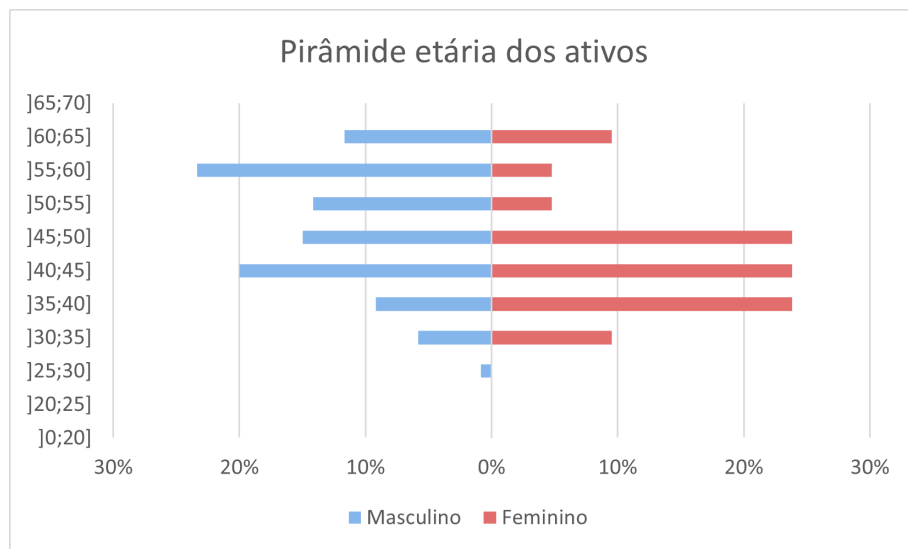


Figura 4.1: Pirâmide etária dos membros ativos

No gráfico da Figura 4.2 encontram-se os salários médios anuais por classes de idade e por sexo. É de notar que, até à idade de 55 anos, os ativos de sexo feminino auferem de um salário mais alto. Numa vista geral, a classe de idades dos 56 aos 60 anos é a classe que tem um maior salário, comparativamente ao resto das classes.

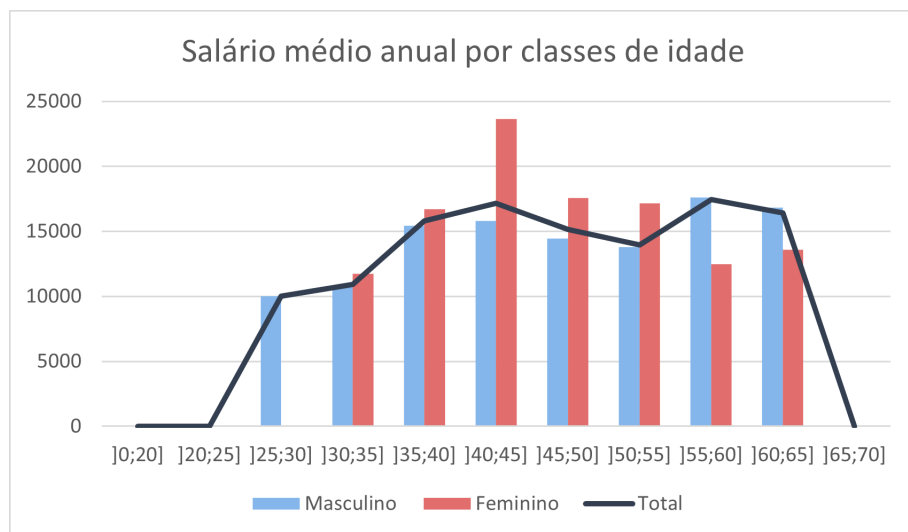


Figura 4.2: Salário médio anual por classes de idade e sexo

4.3 Pressupostos Atuariais

Na tabela 4.3 encontram-se os pressupostos assumidos para o plano de pensões em estudo.

Tabela 4.3: Pressupostos atuariais do Plano de Pensões

Data de avaliação	31/12/2020
Tabela de mortalidade	100 % TV88/90
Tabela de invalidez	100 % EKV80
Taxa de juro	1%
Taxa de crescimento salarial	0.7%
Número de pagamentos	12
Reversibilidade	60%
% de casados	90%
INR	66 anos

Note-se que a INR é de 66 anos, contudo, a última idade da tabela de invalidez *EKV80* é de 64 anos. Posto isto, foi necessário estimar a probabilidade de invalidez aos 65 anos, através de uma regressão linear.

Através do Excel e utilizando os últimos oito valores das probabilidades de invalidez, foi obtido o valor de 0.0681 aproximadamente.

4.4 Valor esperado e variância das coberturas

Para o cálculo dos intervalos de confiança dos valores atuais dos benefícios, para todos os participantes do Plano, é necessário conhecer previamente os valores esperados e a variância de cada cobertura. Para isto, com o auxílio do *RStudio*, utilizando o package *lifecontingencies*, obteve-se os resultados das tabelas 4.4 e 4.5, para o caso dos pagamentos serem anuais e mensais, respetivamente. Apesar de se considerar rendas mensais ($m = 12$), o salário anual é repartido por 14 vezes ao ano. Note-se que, para o cálculo do valor esperado e da variância das três coberturas, aplica-se (3.45) e (3.48).

Tabela 4.4: Valor esperado e variância dos valores atuais dos benefícios das diversas coberturas, em euros, com pagamentos anuais

Cobertura	$E(T)$	$V(T)$
Reforma por velhice	19 895 068	2 762 124 000 000
Reforma por invalidez	10 880 860	2 859 117 000 000
Sobrevivência	1 280 284	550 632 724 058
Três coberturas	32 056 212	1 837 478 000 000

Tabela 4.5: Valor esperado e variância dos valores atuais dos benefícios das diversas coberturas, em euros, com pagamentos mensais

Cobertura	$E(T)$	$V(T)$
Reforma por velhice	19 355 448	2 656 451 000 000
Reforma por invalidez	10 137 372	2 592 951 000 000
Sobrevivência	1 209 176	507 049 443 024
Três coberturas	30 701 996	1 749 460 000 000

4.5 Intervalos de confiança para as responsabilidades

Tendo apenas em consideração o caso de pagamentos anuais, construíram-se intervalos de confiança para as diversas coberturas.

Para a construção de um intervalo de confiança a 95% para a responsabilidade dos benefícios a pagar, é necessário considerar o quantil de ordem $1 - \frac{0.05}{2}$ da distribuição Normal (0,1), ou seja, $z_{0.025} = 1.96$.

Assim, utilizando a expressão 3.53, para a cobertura de reforma por velhice tem-se

$$\begin{aligned} 19\,895\,068 - \sqrt{2\,762\,124\,000\,000} \times 1.96 \leq T_1 \leq 19\,895\,068 + \sqrt{2\,762\,124\,000\,000} \times 1.96 \\ 16\,637\,619 \leq T_1 \leq 23\,152\,517 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Deste modo, o total dos benefícios a pagar com os participantes ativos será entre 16 637 619€ e 23 152 517€, para um nível de confiança de 95%.

De modo análogo, para a cobertura de reforma por invalidez tem-se

$$\begin{aligned} 10\,880\,860 - \sqrt{2\,859\,117\,000\,000} \times 1.96 \leq T_2 \leq 10\,880\,860 + \sqrt{2\,859\,117\,000\,000} \times 1.96 \\ 7\,566\,711 \leq T_2 \leq 14\,195\,009 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Assim, dever-se-á contar com pelo menos 7 566 711€, com um nível de confiança a 95%, para as responsabilidades em caso de invalidez do participante.

No caso da cobertura por sobrevivência, o intervalo de confiança dos valores atuais dos benefícios é dado por

$$\begin{aligned} 1\,280\,284 - \sqrt{550\,632\,724\,058} \times 1.96 \leq T_3 \leq 1\,280\,284 + \sqrt{550\,632\,724\,058} \times 1.96 \\ -174\,126.8 \leq T_3 \leq 2\,734\,695 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Visto que as responsabilidades não podem ter um valor negativo, o total a pagar deverá ser, a um nível de confiança de 95%, inferior a 2 734 695€.

Para as três coberturas, o intervalo de confiança, a uma confiança de 95% é

$$\begin{aligned} 32\,056\,212 - \sqrt{1\,837\,478\,000\,000} \times 1.96 \leq T \leq 32\,056\,212 + \sqrt{1\,837\,478\,000\,000} \times 1.96 \\ 29\,399\,361 \leq T \leq 34\,713\,063 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Considerando então todas as coberturas, o valor atual dos benefícios totais está no intervalo entre os valores de 29 399 361€ e 34 713 063€, para um nível de confiança de 95%.

Caso se queira calcular intervalos de confiança para outro conjunto de pessoas, como por exemplo apenas para pessoas do sexo masculino, basta considerar, em (3.49), $n = 120$.

CONCLUSÃO

Nos últimos anos tem-se verificado um aumento da esperança de vida e uma diminuição da taxa bruta de natalidade, levando a que a população esteja cada vez mais envelhecida. O sistema de previdência social público de Portugal poderá vir a enfrentar dificuldades no financiamento das pensões, pois são os correntes ativos que financiam as pensões atuais dos pensionistas. Deste modo, são cada vez mais procurados os sistemas de pensões privados. O papel de um atuário é de elevada importância pois é necessário garantir uma estabilidade financeira e supervisionar o financiamento do Fundo.

Esta dissertação tinha como objetivo calcular a variância para coberturas de sobrevivência, considerando uma reversibilidade dos benefícios, reforma por velhice e invalidez. Para além disso, procurou-se também, através do valor esperado e da variância, construir intervalos de confiança de forma a obter uma precisão maior das estimativas dos benefícios futuros.

Recorrendo a uma abordagem probabilística, onde o valor atuarial de uma renda vitalícia pode ser visto como o valor esperado de uma variável aleatória que depende do tempo de vida futura de um indivíduo, foi elaborada uma modelação das coberturas de forma a calcular os momentos e, assim, a variância. Para pôr em prática estas metodologias, consideraram-se dados reais de um Fundo de Pensões, ao qual se aplicou um Plano de Pensões fictício com as coberturas em estudo. Os resultados obtidos não poderão ser extrapolados para qualquer população ou Plano considerado, no entanto, a abordagem probabilística e a modelação do problema pode servir como base para outro tipo de coberturas ou população. Com este trabalho é então possível obter intervalos de confiança para qualquer cobertura, sendo um resultado bastante importante no campo dos Fundos de Pensões, pois permite ter uma melhor estimativa dos valores atuariais dos benefícios, garantindo um melhor financiamento das responsabilidades.

Para além do que foi feito, existem ainda vários caminhos e considerações que podem ser realizados e abordados, contribuindo assim para uma análise mais detalhada de uma avaliação atuarial. Note-se os seguintes:

1. Estimar a variância e obter intervalos de confiança para as mesmas coberturas em estudo, considerando uma população de pensionistas e diferidos;

2. Estimar a variância e obter intervalos de confiança para uma cobertura de pré-reforma;
3. Estudar a situação em que os benefícios em caso de morte do participante seriam pagos imediatamente após a morte deste, sendo portanto necessário considerar uma variável aleatória contínua do tempo de vida futura.

Para além destes, poderão ser desenvolvidos outros trabalhos, contudo os acima referidos foram os que suscitaram maior interesse ao longo do desenvolvimento da dissertação.

BIBLIOGRAFIA

- Afonso, L. B. (2018). *Segurança Social e Fundos de Pensões Apoio Teórico*. Associação Portuguesa de Fundos de Investimento, Pensões e Patrimónios - Fundos de Pensões. (s.d.). Obtido de <https://www.apfipp.pt/index2.aspx?MenuCode=FP>. (Consultado em: 31.07.2021)
- Billingsley, P. (2012). *Probability and Measure* (Anniversary ed). John Wiley & Sons.
- Bowers Jr., N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries.
- Cardoso, R. M. R. (2019). *Apontamentos da disciplina Atuariado Vida*.
- Dickson, D. C. M., Hardy, M. R. & Waters, H. R. (2009). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*.
- Garcia, J. A. & Simões, O. A. (2010). *Matemática Actuarial - Vida e Pensões*. Almedina.
- Lourenço, J. M. (2021). *The NOVAthesis L^AT_EX Template User's Manual*. NOVA University Lisbon. Obtido de <https://github.com/joaomlourenco/novathesis/raw/master/template.pdf>
- REAL VIDA SEGUROS. (s.d.). Obtido de <https://www.realvidaseguros.pt/glossario>. (Consultado em: 24.07.2021)
- Segurança Social. (2021). Obtido de <https://www.seg-social.pt/pensao-de-invaliddez>. (Consultado em: 18.05.2021)
- Tomás, C. M. M. (2015). *Intervalos de confiança para rendas vitalícias: aplicação a fundos de pensões* (tese de mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa).
- Winklevoss, H. E. (1993). *Pension mathematics with numerical illustrations* (2nd). Pension Research Council of the Wharton School of the University of Pennsylvania.

