



**Pedro Varanda Ferreira Teodoro**

Licenciado em Matemática

**Sistemas de *Bonus Malus*:  
Uma nova visão para Regras de Transição e  
Escalas de Prémios**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Matemática e Aplicações**  
**Ramo Atuariado, Estatística e Investigação Operacional**

Orientadora: Gracinda Rita Guerreiro, Professora Auxiliar,  
Faculdade de Ciências e Tecnologia

Júri

Presidente: Professor Manuel L. Esquível  
Arguente: Professor Pedro Corte Real  
Vogal: Professora Gracinda Rita Guerreiro



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro, 2017



**Sistemas de *Bonus Malus*:**

**Uma nova visão para Regras de Transição e Escalas de Prémios**

Copyright © Pedro Varanda Ferreira Teodoro, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



*À minha família*



## AGRADECIMENTOS

Começar por agradecer fundamentalmente aos meus pais por todo o apoio e ajuda, não só durante a realização da dissertação, mas também durante todo o meu período académico. Sem eles nada disto seria possível. Agradecer também à minha avó e ao meu padrinho por todo o apoio.

Um especial agradecimento também a todos aqueles que, de alguma forma me ajudaram, principalmente à minha amiga e colega Ana Luís, à Andreia Bártolo, à Madalena Almeida, ao meu amigo Pedro Medeiros, ao meu amigo Rui Pereira, à minha amiga Tânia Martins e à minha chefe Tânia Novo.

Um especial agradecimento à professora Gracinda Rita Guerreiro pela orientação e ajuda dada e ainda pela simpatia demonstrada ao longo da dissertação.



## RESUMO

---

Nesta dissertação, estudou-se uma nova visão para Regras de Transição e para Escalas de Prémios. Para tal seguiu-se o artigo “Optimal relativities and transition rules of a Bonus-Malus system” [Chong It Tan, Jackie Li, Johnny Siu-Hang Li, Uditha Balasooriya, Fevereiro 2015] que, para além de nos introduzir uma nova medida de eficiência para Regras de Transição, nos apresenta a Escala Ótima de Prémios de It Tana et al. (2015) e propõe a implementação de Regras de Transição variáveis.

Utilizando os dados reproduzidos em Pitrebois et al. (2004) estudaram-se diferentes Regras de Transição para determinar qual a que apresenta melhor medida de eficiência e, desta forma, indicar o conjunto de Regras de Transição que deve ser implementado. Além disso, apresentou-se a Escala de Prémios obtida para cada uma das Regras de Transição estudadas. As Regras de Transição usadas foram não só Regras de Transição do tipo  $-x/+y$ , isto é, regras em que se o segurado não declarar sinistros desce  $x$  classes mas por cada sinistro declarado sobe  $y$  classes, mas também Regras de Transição variáveis.

**Palavras-chave:** Sistemas *Bonus Malus*, Regras de Transição, Frequência de sinistralidade estimada *a priori*, Medida de eficiência, Escalas ótimas.

---



## ABSTRACT

---

This dissertation's goal is to study a new perspective for transition rules and optimal relativities. The article "Optimal relativities and transition rules of the Bonus-Malus system", was essential because it explains not only a new measure of efficiency and the optimal relativities proposed by It Tana et al. (2015) but also explains the Varying transition rules.

Using the data reproduced in Pitrebois et al. (2004) different sets of transition rules were studied to find out which one exhibit the best value and there for should be implemented. Not only the value of the measure of efficiency was presented but also the optimal relativities for each set of transition rules. The transition rules studied where not only the Varying transition rules but also the rules  $-x/+y$  where  $x$  is the bonus transition and  $y$  is the malus transition.

**Keywords:** Bonus Malus Systems, Transition Rules, A priori expected Claim Frequency, Effectiveness of transition rules, Optimal relativities.

---



# ÍNDICE

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Sistemas de <i>Bonus Malus</i></b>	<b>5</b>
2.1 Princípios gerais . . . . .	6
2.2 O número de sinistros . . . . .	6
2.2.1 O processo de Poisson Misto . . . . .	7
2.3 Distribuição limite . . . . .	8
2.3.1 Matrizes de Probabilidades de Transição . . . . .	8
2.3.2 Distribuição Estacionária . . . . .	9
2.4 Escalas Ótimas de Prémios . . . . .	10
2.4.1 Escala de Norberg- Um Modelo Assintótico . . . . .	10
2.4.2 Escala de Borgan-Modelo Não Assintótico . . . . .	11
2.4.3 Escala de Gilde e Sundt . . . . .	11
2.4.4 Escala Geométrica . . . . .	12
2.5 Medidas de avaliação dos Sistemas Bonus-Malus . . . . .	13
2.5.1 O Nível Médio Relativo de Estacionaridade . . . . .	13
2.5.2 O Coeficiente de Variação dos prémios . . . . .	13
2.5.3 A Elasticidade do Prémio Médio . . . . .	14
<b>3 Uma nova visão para Regras de Transição</b>	<b>15</b>
3.1 Tarifação no Ramo Automóvel . . . . .	17
3.1.1 Tarifação <i>a priori</i> . . . . .	18
3.1.2 Tarifação <i>a posteriori</i> . . . . .	18
3.2 Proposta de um Sistema de <i>Bonus Malus</i> ótimo . . . . .	20
3.2.1 Escala Ótima de Prémios de It Tana et al. (2015) . . . . .	20
3.2.2 Medida de Eficiência para Regras de Transição . . . . .	22
3.2.3 Regras de transição variáveis . . . . .	24
<b>4 Construção de um Sistema de <i>Bonus Malus</i></b>	<b>27</b>

## ÍNDICE

---

**5 Conclusão** 37

**Bibliografia** 39

## LISTA DE FIGURAS

4.1	$Pr[L = l]$ . . . . .	32
4.2	$E[\Lambda L = l]$ . . . . .	33
4.3	Escala de Prémios . . . . .	33



## LISTA DE TABELAS

4.1	Frequência de sinistralidade estimada <i>a priori</i> e peso . . . . .	28
4.2	$Pr[L = l]$ , $E[\Lambda L = l]$ e Escalas de prêmios . . . . .	31
4.3	$Pr[L = l]$ , $E[\Lambda L = l]$ e Escalas de prêmios . . . . .	31
4.4	$Pr[L = l]$ Classe 1 . . . . .	32
4.5	Prémio Médio . . . . .	34
4.6	Medida de eficiência . . . . .	34
4.7	RSAL e CV . . . . .	35



## INTRODUÇÃO

Não sei quanto a si, mas uma das coisas que mais gosto de fazer é conduzir. Ora, quando estou a conduzir, sei que existe a possibilidade de ter um acidente do qual seja responsável e, por isso, sei que inerente a conduzir está associado o risco de vir a ter um acidente do qual sou culpado, tendo então de compensar o condutor sinistrado pagando-lhe todas as despesas que ele venha a ter consequentes do sinistro, quer estas sejam materiais quer sejam corporais. No sentido de garantir que a pessoa com quem tive o sinistro é compensada por todas as perdas, surge o Seguro de Responsabilidade Civil Automóvel, que é obrigatório para que qualquer veículo possa circular.

Este seguro faz com que a seguradora assuma o risco que eu inicialmente tinha, responsabilizando-se pelas despesas que deste sinistro provenham. Ora, se a seguradora está a assumir o meu risco, naturalmente quer que a recompense pagando-lhe um determinado valor monetário, denominado prémio. Contudo, a seguradora não sabe o risco que eu represento e, por isso, a minha frequência de sinistralidade estimada *a priori*,  $\lambda_g$ , pode apenas ser determinada com base em características observáveis *a priori* como a idade, os anos de carta, a idade do carro, potência do carro, a zona de residência, entre outras. Desta forma a seguradora agrupa indivíduos com características semelhantes num mesmo escalão tarifário,  $g$ , ficando eu e os outros segurados, desse escalão, a pagar o mesmo prémio base. Este tipo de técnica de tarifação é denominado tarifação *a priori*, pois é feito com base em informação que a seguradora obtém antes de assumir o risco. Contudo, mesmo tendo características semelhantes, *a priori*, nem todos os condutores dessa classe são iguais em termos de risco, pois eu posso ter características semelhantes a outro indivíduo mas conduzir melhor ou pior que ele e por isso representar um risco menor ou maior, respetivamente, para a seguradora.

Para ajudar a determinar o risco realmente assumido pela seguradora, foram então criadas as técnicas de tarifação *a posteriori*. Estas técnicas têm em consideração o histórico

de sinistralidade do segurado e ajudam não só a melhor estimar o risco assumido pela seguradora, mas também a determinar um prémio que melhor se adequa ao risco que o condutor representa.

Um dos métodos de tarifação *a posteriori* mais usado é o Sistema de *Bonus Malus*, em que o prémio base é corrigido tendo em conta o número de sinistros declarados, isto é, se o segurado, num determinado período de tempo, não declarar sinistros recebe um desconto no prémio (*bonus*) mas se declarar sinistros sofre um agravamento (*malus*).

Dois elementos fundamentais na construção de um Sistema de *Bonus Malus* são a Matriz de Transição e a Escala de Prémios. De forma resumida, as regras de transição indicam se um segurado vai transitar para uma classe mais bonificadora, que aquela em que se encontrava, ou se vai transitar para uma classe mais penalizadora, do que aquela em que se encontrava, dependendo essa transição dos sinistros declarados na anuidade. Já a escala de prémios indica a percentagem de *bonus* ou *malus* que o segurado tem em função da classe em que se encontra.

Consideremos o caso de dois segurados, denominados por segurado A e segurado B. Consideremos também que

- Segurado A representa um risco, *a priori* elevado e tem de prémio base 1000€;
- Segurado B representa um risco, *a priori* baixo e tem de prémio base 500€;

Ora, se os dois segurados declararem o mesmo número de sinistros ser-lhes-á atribuído o mesmo agravamento e caso não declarem ser-lhes-á atribuído o mesmo desconto. Parece, no entanto pouco razoável que um segurado que já tem um prémio base mais elevado, por se esperar que vá declarar sinistros, seja penalizado na mesma proporção que um segurado que tem um prémio base mais baixo, por se ter inicialmente estimado que ele não iria declarar sinistros. No sentido contrário também não parece muito razoável que caso nenhum dos segurados declare sinistros que o segurado que já se esperava não declarar sinistros seja bonificado da mesma forma do que o segurado que inicialmente se tinha estimado ser um "mau"condutor e ir declarar sinistros e que não o fez.

It Tana et al. (2015) referem que quando um sistema com uma única escala de prémios e com um único conjunto de regras de transição é implementado dois tipos de injustiça surgem. Nesta dissertação, tendo por base o artigo de It Tana et al. (2015), ir-se-á apresentar uma nova função objetivo para a determinação da Escala Ótima de Prémios. Esta função objetivo incorpora a frequência de sinistralidade, estimada, *a priori* na determinação da Escala Ótima de Prémios e, por isso, ajuda a aliviar a injustiça de só se ter uma Escala de Prémios.

Falar-se-á também sobre regras de transição variáveis. Nestas regras o número de classes que um segurado transita depende, não só do número de sinistros que declarou, mas também da classe em que este se encontra. Mas como se pode saber se um conjunto de

---

regras de transição é melhor que outro? Como decidir que conjunto de regras de transição implementar?

It Tana et al. (2015) propõem uma medida de eficiência que, tal como o nome indica, permite medir a eficiência de cada conjunto de regras de transição em aliviar o problema da aglomeração das apólices, de acordo com o seu risco *a priori*. Segundo estes um Sistema de *Bonus Malus* deve permitir que, dentro de cada classe do Sistema de *Bonus Malus*, a frequência de sinistralidade estimada *a priori*, varie de segurado para segurado, ou seja, um Sistema de *Bonus Malus* deve ter flexibilidade suficiente para permitir que, por exemplo, um segurado com elevada frequência de sinistralidade estimada *a priori* e que por isso se espera que venha a ocupar as classes mais elevadas do Sistema de *Bonus Malus* possa ocupar, na estacionaridade, qualquer classe do Sistema de *Bonus Malus* e ao mesmo tempo permitir que um segurado com baixa frequência de sinistralidade estimada *a priori* e que, por isso, se espera que venha a ocupar as classes mais baixas do Sistema de *Bonus Malus* possa ocupar, na estacionaridade, a mesma classe do Sistema de *Bonus Malus* que o segurado anterior. Esta medida pode ser usada como factor de decisão para escolher que conjunto de regras de transição usar.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

- No segundo capítulo é feita uma introdução ao modelo clássico de Sistemas de *Bonus Malus*;
- No capítulo 3, apresentam-se os resultados presentes no artigo de It Tana et al. (2015) e aprofundam-se as ideias dos autores acerca da justiça que deveria prevalecer nos Sistemas de *Bonus Malus*, bem como a sua proposta para medida de eficiência para regras de transição;
- No capítulo 4, apresentam-se os resultados práticos da aplicação do capítulo 3;
- Por último, no capítulo 5 referem-se as conclusões tiradas.

Em suma, nesta dissertação, seguindo as ideias de It Tana et al. (2015), tenta responder-se às questões:

- Não será mais correto considerar a tarifação feita, *a priori*, na construção do Sistema de *Bonus Malus*?
- Será que as regras de transição variáveis ajudam a aliviar o problema da aglomeração das apólices, de acordo com o seu risco *a priori*?



## SISTEMAS DE *Bonus Malus*

Na construção de uma tarifa pretende-se medir os fatores que influenciam o risco, de modo a agrupar segurados com características comuns, isto é, com um risco semelhante, no mesmo escalão tarifário ficando todos os segurados de determinado escalão tarifário a pagar o mesmo prémio *a priori*. Como exemplo, o Seguro Automóvel onde as variáveis tarifárias mais usuais são a idade do condutor, os anos de carta, o tipo de veículo, entre outras. Contudo, mesmo tendo características semelhantes, *a priori*, nem todos os segurados de determinado escalão tarifário representam o mesmo risco para a seguradora. Assim, para ajudar a determinar o risco realmente assumido pela seguradora, foram instituídas técnicas de tarifação *a posteriori* que analisam a informação *a posteriori* de modo a garantir uma mais precisa avaliação do risco.

A introdução dos Sistemas de *Bonus Malus*, conforme referido em Centeno (2003), foi alvo de algumas críticas por parte da comunidade actuarial, uma vez que tarifar *a posteriori* põe em causa o princípio fundamental da atividade seguradora, que consiste no agrupamento de vários riscos que se supõem mais ou menos homogêneos de forma a que a seguradora, baseada na lei dos grandes números, assuma o conjunto das responsabilidades mediante o recebimento de um prémio. Ao introduzir-se a tarifação *a posteriori*, o prémio passou a ser calculado em função do histórico de cada segurado sendo, portanto, uma variável aleatória que depende de cada segurado e não da carteira, o que, de acordo com alguns autores, contraria o princípio fundamental da atividade seguradora.

Tomando como referência Centeno (2003), introduzir-se-ão resultados clássicos sobre Sistemas de *Bonus Malus*. Esta apresentação tem como objectivo evidenciar, no Capítulo 3, as alterações propostas por It Tana et al. (2015).

## 2.1 Princípios gerais

Um Sistema de *Bonus Malus* é um sistema de tarifação *a posteriori*, em que o prêmio de cada anuidade é calculado em função do número de sinistros declarados, isto é, se o segurado, num período de tempo, não declarar sinistros pode receber um desconto no prêmio (*bonus*) mas se declarar sinistros pode sofrer um agravamento (*malus*).

De uma forma geral, ver Centeno (2003), um Sistema de *Bonus Malus* é caracterizado por:

- O período de vigência das apólices é de idêntica duração, geralmente um ano;
- As apólices são distribuídas por um número finito de classes  $C_1, C_2, \dots, C_s$ , com  $s$  o número de classes do sistema. Cada apólice permanece na mesma classe durante um determinado período de tempo, normalmente um ano;
- A classe do sistema em que o segurado se encontra depende unicamente da classe a que pertenceu no período anterior e do número de sinistros que declarou nesse período.

Um Sistema de *Bonus Malus* fica definido quando conhecidos três elementos:

- A Escala de Prêmios  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_s)$ , onde  $b_i$  é um fator multiplicativo a aplicar ao prêmio determinado pelos fatores *a priori*;
- A Classe de Entrada no sistema,  $C_{i_0}$ , onde normalmente os novos segurados são colocados;
- As regras de transição entre as diferentes classes do sistema, podendo ser representadas por uma matriz  $\mathbf{T} = [T_{ij}]$ , com dimensão  $s \times s$ , onde  $T_{ij}$  é o conjunto dos inteiros  $n$  tal que uma apólice pertencente à classe  $C_i$  transita para a classe  $C_j$ , no fim do período, caso declare  $n$  sinistros no mesmo período. Para que, o conjunto das regras de transição seja completo,  $\mathbf{T}$  deve ser a partição dos naturais com zero.

O Sistema de *Bonus Malus* pode assim ser representado pelo trio  $\Delta = (C_{i_0}, T, b)$  que garante que, a classe onde o segurado se encontra e o número de sinistros participados no período anterior são suficientes para determinar a classe para onde o segurado transitará, pelo que o processo é chamado um processo sem memória, podendo então ser tratado como uma cadeia de Markov.

## 2.2 O número de sinistros

O modelo de tarifação *a posteriori* considerado neste trabalho, e na generalidade dos Sistemas de *Bonus Malus* das Seguradoras Europeias, tem em consideração apenas o número de sinistros não tendo em conta a gravidade dos mesmos. Considere-se  $N(t)$  o número de indemnizações ocorridas no intervalo de tempo  $(0, t]$ , com  $t \geq 0$ , e  $N(0) = 0$ . Neste capítulo ir-se-á apresentar o processo de Poisson Misto.

### 2.2.1 O processo de Poisson Misto

É usual considerar-se, no Ramo Automóvel, que o número de sinistros que um segurado origina, por ano, segue uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda$ , sendo  $\lambda$  o número esperado de sinistros por ano. No entanto, uma vez que cada segurado possui características diferentes, um condutor pode ter mais propensão para causar acidentes que outro. Faz, assim, sentido que o número de indemnizações pagas por uma seguradora possa ter distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda$ , em que  $\lambda$  varia de segurado para segurado e, como tal, resulta da observação de uma variável aleatória não negativa  $\Lambda$ .

Seja  $U(\lambda) = P[\Lambda \leq \lambda]$  a função distribuição de  $\Lambda$ , onde  $\Lambda$  é designada por variável de estrutura e  $U(\lambda)$  por distribuição de estrutura. A distribuição que representa o número de sinistros,

$$p_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \mu(\lambda) d\lambda \quad k \in \mathbb{N}_0$$

denomina-se distribuição de Poisson-Mista, ver, por exemplo, Lemaire (1995), com  $\mu(\lambda)$  a função densidade de  $\Lambda$ .

Nesta dissertação, ir-se-á apenas falar sobre o caso em que a distribuição de estrutura é a Gama pois esta é a que melhor se ajusta aos dados em análise.

#### 2.2.1.1 Modelo de Poisson-Gama

O modelo de Poisson-Gama, também conhecido por processo de Polya, é um caso particular do processo de Poisson Misto que se obtém quando  $\Lambda$  segue uma distribuição Gama( $\alpha, \beta$ ) e é dos mais utilizados para reflectir o comportamento dos segurados de uma carteira do Ramo Automóvel.

A função de probabilidade  $p_k(t)$ ,  $k, t \in \mathbb{N}_0$ , ver por exemplo Centeno (2003), é dada por:

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha e^{-\beta \lambda} \lambda^{\alpha-1} d\lambda = \\ &= \binom{\alpha + k - 1}{k} \left( \frac{\beta}{\beta + t} \right)^\alpha \left( \frac{t}{\beta + t} \right)^k, \quad k, t \in \mathbb{N}_0, \alpha, \beta > 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

o que equivale a dizer que  $p_k(t)$  segue uma distribuição Binomial Negativa  $BN(\alpha, p)$ , com  $p = \frac{\beta}{\beta + t}$ .

Considerando  $t=1$ , isto é, o período temporal de 1 ano, obtém-se as seguintes expressões para a média e variância, ver Lemaire (1995):

$$E[N] = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$V[N] = \frac{\alpha}{\beta} \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right).$$

O estimador de máxima verosimilhança para  $\beta$ ,  $\hat{\beta}$ , é dado por (ver Lemaire (1995))

$$\hat{\beta} = \frac{\alpha}{\bar{N}} \quad (2.2)$$

com  $\bar{N}$  a média da amostra referente ao número de sinistros participados numa dada anuidade. Já o estimador para  $\alpha$ ,  $\hat{\alpha}$ , será a solução da equação

$$\sum_{k=0}^m n_k \left( \frac{1}{\hat{\alpha}} + \dots + \frac{1}{\hat{\alpha} + k - 1} \right) = \sum_{k=0}^m n_k \ln \left( 1 + \frac{\bar{N}}{\hat{\alpha}} \right). \quad (2.3)$$

## 2.3 Distribuição limite

### 2.3.1 Matrizes de Probabilidades de Transição

Seja  $\lambda$  a frequência de sinistralidade de uma dada apólice e  $\mathbf{P}_{T,\lambda} = [p_{T,\lambda}(i,j)]$ ,  $i, j = 1, \dots, s$  a matriz de probabilidades de transição a um passo associada a  $\mathbf{T}$ . Esta matriz, que contém as probabilidades de um segurado que se encontra numa dada classe  $i$  transitar para qualquer classe  $j$ , no período de vigência seguinte, é estimada a partir da matriz de regras de transição do sistema,  $\mathbf{T}$ . De uma forma geral, a distribuição de Poisson-Mista é uma distribuição adequada para descrever o número de sinistros sendo, por isso, o pressuposto considerado neste capítulo.

#### Matrizes de Probabilidade de Transição a um passo

A probabilidade de uma apólice que se encontra na classe  $C_i$  transitar, num passo, para a classe  $C_j$  é dada por:

$$p_{T,\lambda}(i,j) = \sum_{k=0}^{\infty} P[N(t) = k] \cdot t_{i,j}(k) = P[Z_{\Delta,n+1} = j | Z_{\Delta,n} = i, \Lambda = \lambda] \quad , \quad i, j = 1, \dots, s \quad (2.4)$$

onde  $N(t)$  é o número de sinistros participados em  $(0,t]$  por um segurado retirado ao acaso da carteira,  $\Lambda$  a variável aleatória que representa a frequência de sinistralidade e  $Z_{\Delta,n}$  a variável aleatória que representa a classe de uma determinada apólice no período  $n$ . Relativamente a  $t_{i,j}(k)$  tem-se:

$$\begin{cases} t_{i,j}(k) = 1 \text{ se } k \text{ sinistros originam a transição de } C_i \text{ para } C_j; \\ t_{i,j}(k) = 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

#### Matrizes de Probabilidade de Transição em $n$ passos

A matriz de probabilidades de transição em  $n$  passos, que contém a probabilidade de uma apólice que se encontra na classe  $i$  se encontrar na classe  $j$ , daqui a  $n$  períodos de vigência, é dada por:

$$\mathbf{P}_{T,\lambda}^{(n)} = \mathbf{P}_{T,\lambda}^n \quad (2.5)$$

sendo que a probabilidade de uma apólice que está atualmente na classe  $C_i$  transitar para a classe  $C_j$ , daqui a  $n$  transições, pode ser obtida através de:

$$p_{\Delta,\lambda}^n(i,j) = P[Z_{\Delta,n} = j | \Lambda = \lambda], \quad j = 1, \dots, s. \quad (2.6)$$

### 2.3.2 Distribuição Estacionária

Uma vez que o Sistema de *Bonus Malus* é representado por uma cadeia de Markov, num sistema fechado, isto é, num sistema onde não há entradas nem saídas de apólices, pode afirmar-se que a distribuição limite

$$\pi_{T,\lambda}(j) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j), \quad j = 1, \dots, s \quad (2.7)$$

com  $p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) = \sum_{i=1}^s p_{\Delta,\lambda}^n(i, j)$ , coincide com a distribuição estacionária, desde que a cadeia de Markov implícita no sistema *Bonus Malus* seja irredutível, finita e aperiódica, sendo então também recorrente.

A distribuição estacionária  $\Pi_{T,\lambda}$  é a única solução não negativa do sistema de equações:

$$\begin{cases} \Pi_{T,\lambda} \mathbf{P}_{T,\lambda} = \Pi_{T,\lambda} \\ \sum_{j=1}^s \pi_{T,\lambda}(j) = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

ou seja, é obtida pelo vetor próprio esquerdo associado ao valor próprio unitário da matriz  $\mathbf{P}_{T,\lambda}$ . Obtém-se, assim, a distribuição limite para uma determinada frequência de sinistralidade  $\lambda$ .

No entanto, esta é a distribuição limite da cadeia de Markov para um determinado  $\lambda$ . Quando se pretende determinar a distribuição limite para uma qualquer apólice da carteira, é necessário ter em atenção que, frequentemente, como anteriormente referido, em carteiras de seguro automóvel,  $\lambda$  é o resultado de uma variável aleatória  $\Lambda$ .

A matriz de probabilidades de transição em  $n$  passos  $\mathbf{P}_T^{(n)}$ , com  $n > 1$ , pode ser obtida através de  $\mathbf{P}_{T,\lambda}^{(n)}$ , integrando em ordem à função distribuição de  $\Lambda$ , isto é:

$$p_T^{(n)}(i, j) = \int_0^\infty p_{T,\lambda}^{(n)}(i, j) dU(\lambda) \quad , \quad j = 1, \dots, s. \quad (2.9)$$

Desta forma, a distribuição incondicional de  $Z_{\Delta,n}$  é:

$$p_{\Delta}^{(n)}(j) = \int_0^\infty p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) \quad , \quad j = 1, \dots, s$$

e a distribuição limite será dada por:

$$\pi_T(j) = \int_0^\infty \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda) \quad , \quad j = 1, \dots, s. \quad (2.10)$$

Como, por vezes, o cálculo dos integrais das expressões anteriores não é computacionalmente exequível, surge como alternativa calcular a distribuição estacionária através da discretização da distribuição de estrutura tendo-se então:

$$\pi_T(j) = \sum_{\lambda} \pi_{T,\lambda}(j) u_{\lambda}^d \quad , \quad j = 1, \dots, s \quad (2.11)$$

onde  $u_{\lambda}^d$  representa o vetor das probabilidades da distribuição  $U(\lambda)$  discretizada.

## 2.4 Escalas Ótimas de Prémios

A determinação dos prémios a cobrar ao tomador de seguro é um fator de extrema importância para as seguradoras. Ao longo do tempo foram propostos vários métodos para determinar as escalas ótimas, ou seja, as escalas que melhor se adequam a cada Sistema de *Bonus Malus*. Neste capítulo ir-se-à apresentar algumas das escalas existentes.

### 2.4.1 Escala de Norberg- Um Modelo Assintótico

Norberg considera o problema da determinação do prémio que deve ser cobrado, em cada classe, quando se atinge a estacionaridade da carteira utilizando para o efeito uma abordagem próxima da teoria da credibilidade.

Norberg propõe que o prémio seja obtido através da minimização de, ver Centeno (2003):

$$\begin{aligned} Q_n(\Delta) &= E[E[S_n|\lambda] - b_n(Z_{\Delta,n})]^2 = \int_0^{+\infty} [E[S_n|\lambda] - b_n(Z_{\Delta,n})]^2 dU(\lambda) = \quad (2.12) \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^s [E[S_n|\lambda] - b_n(j)]^2 p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) \end{aligned}$$

com  $S_n$  as indemnizações agregadas relativas a um segurado no  $n$ -ésimo período de vigência e  $Z_{\Delta,n}$  a classe de bonus de uma apólice no  $n$ -ésimo período de vigência, quando vigora o sistema  $\Delta = (T, b, C_{i_0})$ .

Norberg propõe que se minimize o valor limite de  $Q_n(\Delta)$  quando a estacionaridade é atingida, ou seja, que se minimize

$$Q_0(\Delta) = E[(E[S^*|\lambda] - b(Z_T))^2] = \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^s (E[S^*|\lambda] - b_T(j))^2 \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda) \quad (2.13)$$

com  $S^*$ , o limite de  $S_n$ , uma variável aleatória identicamente distribuída a  $S_n$ . Assim, derivando a equação (2.13) e igualando a zero, obtém-se a escala ótima de prémios de Norberg:

$$\begin{aligned} b^N(j) &= \frac{1}{\pi_T(j)} \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^s E[\Delta^*|\lambda] \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda) \quad (2.14) \\ &= \frac{1}{\pi_T(j)} \int_0^{+\infty} \lambda \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda), \quad j = 1, \dots, s \end{aligned}$$

Note-se que, conforme referido em Centeno (2003), esta igualdade só se verifica por se estar a considerar que  $S_n$  depende de  $\lambda$  apenas através da distribuição do número de sinistros, ou seja, que se considera como unidade monetária o valor esperado de cada indemnização.

### 2.4.2 Escala de Borgan-Modelo Não Assintótico

A escala anterior, assenta apenas na distribuição estacionária o que, caso a convergência do Sistema de *Bonus Malus* para a estacionaridade seja lenta, pode não ser apropriado.

Neste sentido, Borgan, Hoem e Norberg (Centeno (2003)) generalizam a escala anterior por introdução de um sistema de ponderadores  $w_n$ ;  $n \in \mathbb{N}_0$  com  $w_n$  a representar o peso atribuído ao período de vigência  $n$  e  $w_0$  a representar o peso dado à distribuição estacionária. A escala ótima é então obtida minimizando

$$Q(\Delta) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n Q_n(\Delta) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^s [E[S_n|\lambda] - b(j)]^2 p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) \quad (2.15)$$

onde  $p_{\Delta,\lambda}^{(0)}(j) = \pi_{T,\lambda}(j)$ .

Podemos então obter a escala de prémios ótima, proposta por Borgan et al.(1981), derivando a expressão (2.15) em ordem a  $b(j)$ , obtendo-se:

$$b^B(j) = \frac{1}{p_{\Delta}(j)} \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \int_0^{+\infty} E[S_n|\lambda] p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda), \quad j = 1, \dots, s \quad (2.16)$$

com  $p_{\Delta}(j) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda)$ .

Contudo, tal como na Escala de Norberg, não se garante que a escala de prémios cresça com a transição de um segurado para uma classe superior o que faz com que possam existir segurados a pagar mais que outros que tem uma frequência de sinistralidade superior e que por isso representam um risco superior para a seguradora.

### 2.4.3 Escala de Gilde e Sundt

No sentido de garantir que, estando as classes de bonus ordenadas de acordo com a propensão à sinistralidade dos segurados, a ordenação dos prémios está coerente com essa ordenação, Gilde and Sundt propõem uma escala em que os prémios  $b(j)$ ,  $j = 1, \dots, s$  são lineares. A escala ótima é obtida minimizando a equação (2.15), mas introduzindo as restrições  $b(j) = k + mj$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , pelo que o objetivo será agora minimizar:

$$Q(\Delta) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \int_0^{+\infty} E^2[S_n|\lambda] dU(\lambda) + \sum_{j=1}^s (k + mj)^2 p_{\Delta}(j) - 2 \sum_{j=1}^s (k + mj) b^B(j) p_{\Delta}(j) \quad (2.17)$$

Derivando a expressão (2.17) em ordem a  $k$  e a  $m$  e igualando a zero, obtém-se a solução ótima,  $(k, m)$ , tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \sum_{j=1}^s b^B(j)p_{\Delta} - m \sum_{j=1}^s jp_{\Delta}(j) \\ m = \frac{\sum_{j=1}^s jb^B(j)p_{\Delta} - \sum_{j=1}^s jp_{\Delta}(j) \sum_{j=1}^s b^B(j)p_{\Delta}(j)}{\sum_{j=1}^s j^2 p_{\Delta}(j) - \left( \sum_{j=1}^s jp_{\Delta}(j) \right)^2} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Os prémios a cobrar em cada classe serão então dados por

$$b^G(j) = k + mj, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.19)$$

garantindo-se uma evolução de descontos e agravamentos de acordo com a propensão à sinistralidade de cada classe.

#### 2.4.4 Escala Geométrica

Uma alternativa à Escala Linear, e que também garante que sendo as classes numeradas por ordem crescente de propensão à frequência de sinistralidade, a sucessão dos prémios a cobrar também o é, é a Escala Geométrica. Conforme sugerido por Silva (1991), a escala ótima é obtida agora minimizando a equação (2.15) mas com as restrições  $b(j) = a_G b_G^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , pelo que o novo objetivo será minimizar:

$$Q(\Delta) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^s E^2[S_n | \lambda] dU(\lambda) + \sum_{j=1}^s (a_G b_G^j)^2 p_{\Delta, \lambda}(j) - 2 \sum_{j=1}^s (a_G b_G^j) b_G(j) \cdot p_{\Delta, \lambda}(j) \quad (2.20)$$

Derivando a expressão anterior em ordem a  $a_G$  e a  $b_G$  e igualando a zero, obtém-se a solução ótima,  $(a_G, b_G)$ , tal que:

$$a_G = \frac{\sum_{j=1}^s b_G^j b(j) \pi_T(j)}{\sum_{j=1}^s b_G^{2j} \pi_T(j)} \quad (2.21)$$

e

$$a_G \left[ a_G \sum_{j=1}^s j b_G^{2j-1} \pi_T(j) - \sum_{j=1}^s j b_G^{j-1} b(j) \pi_T(j) \right] = 0 \quad (2.22)$$

sendo que a última expressão se pode simplificar, obtendo-se:

$$\sum_{j=1}^s b_G^j b(j) \pi_T(j) \sum_{j=1}^s j b_G^{2j} \pi_T(j) = \sum_{j=1}^s j b_G^j b(j) \pi_T(j) \sum_{j=1}^s b_G^{2j} \pi_T(j). \quad (2.23)$$

Como é possível observar, as escalas apresentadas até aqui não têm em consideração o prémio *a priori*, ou seja, os descontos e agravamentos a aplicar são os mesmos para todos

os segurados, independentemente do seu prémio *a priori*. Como veremos adiante, isto é algo que It Tana et al. (2015) consideram inadequado. Neste sentido, no capítulo seguinte ir-se-á apresentar uma Escala Ótima de Prémios que tem em consideração o prémio *a priori* no seu cálculo.

## 2.5 Medidas de avaliação dos Sistemas Bonus-Malus

Nas secções anteriores, apresentaram-se alguns dos elementos necessários à construção de um Sistema de *Bonus Malus*. Contudo, aquando da implementação de um Sistema de *Bonus Malus* as seguradoras necessitam saber qual o melhor Sistema de *Bonus Malus* a implementar. Neste sentido, surgem medidas de avaliação para Sistema de *Bonus Malus* que permitem, dentro de certos parâmetros, avaliar qual o melhor Sistema de *Bonus Malus* a implementar. Deve salientar-se que estas medidas por si só não tem qualquer interpretação, servindo apenas para comparar Sistemas de *Bonus Malus* entre si. Ao longo desta secção serão descritas algumas medidas de avaliação de Sistemas de *Bonus Malus*, propostas por Lemaire (1995).

### 2.5.1 O Nível Médio Relativo de Estacionaridade

O Nível Médio Relativo de Estacionaridade, usualmente designado por RSAL (Relative Stationary Average Level), mede o nível de aglomeração das apólices nas classes mais baixas do sistema, ver Lemaire (1995), e é definido por:

$$RSAL = \frac{PM(Z_T) - \text{Prémio mínimo}}{\text{Prémio máximo} - \text{Prémio mínimo}} \quad (2.24)$$

onde  $PM(Z_T)$  representa o prémio médio em condições de estacionaridade, isto é,

$$PM(Z_T) = \sum_{j=1}^s b(j)\pi_T(j).$$

Um valor de RSAL baixo, indica uma grande aglomeração das apólices nas classes com maior desconto. Já um valor elevado sugere uma melhor distribuição das apólices pelas classes, ver Centeno (2003).

### 2.5.2 O Coeficiente de Variação dos prémios

O coeficiente de variação dos prémios, usualmente designado por CV, é uma medida de variabilidade dos prémios anuais do conjunto dos segurados da carteira e é definido por:

$$CV = \frac{\left( \sum_{j=1}^s b^2(j)\pi_T(j) - PM^2(Z_T) \right)^{1/2}}{PM(Z_T)}. \quad (2.25)$$

Pretende-se que o CV, na presença de um SBM, seja o mais elevado possível, o que indica que os prémios dos segurados estão dispersos, ou seja, o SBM consegue penalizar os segurados com elevada frequência de sinistralidade, ver Pitrebois et al. (2003).

### 2.5.3 A Elasticidade do Prémio Médio

A elasticidade do prémio médio mede a resposta do Sistema de *Bonus Malus* a uma alteração da frequência de sinistralidade e é definida por:

$$\eta = \int_0^{\infty} \eta(\lambda) dU(\lambda) \quad (2.26)$$

com a elasticidade de um Sistema de *Bonus Malus*, para uma dada frequência de sinistralidade  $\lambda$ ,  $\eta(\lambda)$ , a ser definida como a derivada do prémio médio em ordem a  $\lambda$  a dividir pelo prémio médio, ou seja,

$$\eta(\lambda) = \frac{\frac{d PM_{\lambda}(Z_T)}{PM_{\lambda}(Z_T)}}{\frac{d\lambda}{\lambda}}$$

onde  $PM_{\lambda}(Z_T) = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\pi}_{T,\lambda}$ .

De um ponto de vista teórico, a situação ótima é atingida quando  $\eta(\lambda) = 1$ , já que significa que um aumento na frequência de sinistralidade se traduz num aumento de prémio na mesma proporção, sendo que, nesse caso, o Sistema de *Bonus Malus* se diz perfeitamente elástico. A situação mais frequente ocorre quando  $0 < \eta(\lambda) < 1$ , o que corresponde a um Sistema de *Bonus Malus* em que os acréscimos nos prémios são inferiores aos aumentos na frequência de sinistralidade. Já quando  $\eta(\lambda) \geq 1$ , o aumento dos prémios é superior ao acréscimo da frequência de sinistralidade, o que não é adequado.

Até meados de 2015, ver It Tana et al. (2015), não existia qualquer estudo relativo a uma medida de eficiência para regras de transição. No capítulo seguinte ir-se-á apresentar uma medida proposta por It Tana et al. (2015) que compara a eficiência de diferentes regras de transição.

Neste capítulo foram apresentados os resultados clássicos para que seja mais acessível compreender as críticas e alterações propostas por It Tana et al. (2015) que, segundo estes, tornariam os Sistemas de *Bonus Malus* mais justos.

## UMA NOVA VISÃO PARA REGRAS DE TRANSIÇÃO

O Sistema de *Bonus Malus* é um mecanismo de tarifação *a posteriori* usado, na tarifação automóvel, para complementar a tarifação *a priori* a partir da qual, com base nas características observáveis do segurado, se estabelece o escalão tarifário a que este pertence e o prémio a pagar.

Com vista a um melhor entendimento do tema abordado neste capítulo vejamos a diferença entre escalão tarifário e classe do Sistema de *Bonus Malus*:

- Escalão tarifário- Escalão de risco em que o segurado é colocado na tarifação *a priori*.
- Classes do Sistemas de *Bonus Malus*- Classes em que o segurado se pode encontrar na tarifação *a posteriori*.

Tal como anteriormente referido, nos Sistemas de *Bonus Malus* aqui considerados, a classe em que o segurado se encontra depende apenas da frequência de sinistralidade do mesmo. Assim um segurado que, *a priori*, se estime representar um risco baixo tendo, portanto, um prémio base inferior, ver Taylor (1997), e que se espera que venha a ter uma baixa frequência de sinistralidade tenderá a ocupar as classes bonificadoras do Sistema de *Bonus Malus* enquanto, no caso contrário, um segurado que se estime representar um risco elevado e por consequência se espera que venha a ter uma frequência de sinistralidade elevada tenderá a ocupar as classes penalizadoras do Sistema de *Bonus Malus*.

Devido à aglomeração das apólices em determinadas classes do Sistema de *Bonus Malus*, de acordo com o seu risco *a priori*, Taylor (1997) sugere que, a Escala de Prémios do Sistema de *Bonus Malus* deveria refletir o histórico de sinistralidade, mas apenas restrito à parte da informação que não foi tida em consideração na tarifação *a priori*.

Na perspetiva de It Tana et al. (2015) o que foi referido acima traz as seguintes implicações:

- Implicação 1: O principal objetivo de um Sistema de *Bonus Malus* é lidar com a heterogeneidade dentro de cada escalão tarifário, mas não com a heterogeneidade entre os diferentes escalões tarifários.
- Implicação 2: A informação sobre a frequência de sinistralidade estimada *a priori* deve ser incorporada na determinação da Escala de Prémios do Sistema de *Bonus Malus*.
- Implicação 3: Por último, a integração da tarificação *a priori* e *a posteriori* deve produzir um Sistema de *Bonus Malus* no qual, em condições de estacionaridade, a média das frequências de sinistralidade estimada *a priori*, para o conjunto dos segurados em cada classe do Sistema de *Bonus Malus*, seja idêntica entre as diferentes classes do Sistema de *Bonus Malus*. Isto significa que o Sistema de *Bonus Malus* não reforça a classificação que lhe foi feita *a priori*.

Existem duas explicações para o fenómeno de aglomeração das apólices em determinadas classes do Sistema de *Bonus Malus*, de acordo com o seu risco *a priori*, ver It Tana et al. (2015):

- É expectável que os segurados com elevada frequência de sinistralidade, estimada *a priori*, ocupem as classes mais elevadas do Sistema de *Bonus Malus*, enquanto se espera que os segurados com baixa frequência de sinistralidade, estimada *a priori*, devam ocupar as classes mais baixas. É, por isso, necessário, na opinião dos autores, que os descontos e agravamentos a aplicar sejam reflexo, não só da sinistralidade observada, mas também da incorporação da frequência de sinistralidade estimada *a priori*.
- Os autores defendem ainda que a aglomeração das apólices em determinadas classes do Sistema de *Bonus Malus*, de acordo com o seu risco *a priori* pode também ser atribuído ao facto de que não existem diferentes regras de transição para segurados com diferentes características *a priori* e que estejam em diferentes escalões.

Segundo It Tana et al. (2015), na implementação de um Sistema de *Bonus Malus* com Regras de Transição do tipo  $-x/ + y$ , isto é, um Sistema de *Bonus Malus* em que se o segurado não declarar sinistros desce  $x$  classes e por cada sinistro declarado sobe  $y$  classes, e em que se tem apenas uma Escala de Prémios surgem dois tipos de injustiças:

- Injustiça Tipo 1: A injustiça de se aplicar a mesma Escala de Prémios a todos os segurados, independentemente da frequência de sinistralidade estimada *a priori*. Este facto havia já sido referido por Pitrebois et al. (2003). Quando a frequência de sinistralidade estimada *a priori* é elevada, o prémio definido *a priori* para esse segurado é monetariamente elevado para fazer face ao elevado risco de sinistralidade que se espera vir a observar. Assim sendo, parece pouco razoável que, após a participação de sinistros, se efectuem agravamentos *a posteriori*

visto que, o prémio definido *a priori* já tem em consideração que é expectável o segurado declarar sinistros e por isso ao agravar o prémio, que já era elevado por se esperar que o segurado declarasse sinistros, está-se a penalizar duplamente o segurado.

Além disso, um segurado com frequência de sinistralidade estimada *a priori* elevada é penalizado na mesma proporção que um segurado com baixa frequência de sinistralidade estimada *a priori*. Ora não parece razoável estar a penalizar na mesma proporção um segurado que declarou os sinistros que se esperava e um segurado que declarou mais sinistros do que o que tinha sido estimado.

- Injustiça Tipo 2: As regras de transição serem iguais para todos os segurados, independentemente da classe em que se encontram. Como os segurados nas classes mais elevadas do Sistema tendem a representar um maior risco *a priori*, e por isso têm um maior prémio base, ao estarem sujeitos às mesmas regras de transição, faz com que sejam mais penalizados.

Numa tentativa de atenuar os efeitos negativos da Injustiça Tipo 1, It Tana et al. (2015) propõem uma nova função objetivo na determinação da Escala de Prémios. Os autores propõem, em alternativa a (2.12), a minimização de

$$E[(\Lambda\Theta - \Lambda r_L)^2] \quad (3.1)$$

na determinação da Escala de Prémios, com  $\Lambda$  a frequência de sinistralidade estimada *a priori*,  $\Theta$  a heterogeneidade residual que ainda existe após a tarificação *a priori* e  $r_L$  a escala de prémios para cada classe  $L$ . Esta nova função objetivo atenua os efeitos negativos da Injustiça Tipo 1 visto ter em consideração a tarificação feita *a priori*. Além disso, consideram que a Implicação 3 deve ser tida em maior consideração no desenho de um Sistema de *Bonus Malus* e abordam este assunto introduzindo uma nova medida denominada Eficiência das Regras de Transição.

Por fim, apresentar-se-á o conceito de Regras de Transição Variáveis que podem ajudar a aliviar a Injustiça Tipo 2 e melhorar a eficiência das regras de transição.

### 3.1 Tarificação no Ramo Automóvel

Como já foi referido, a tarificação no Seguro Automóvel consiste, usualmente, em dois passos denominados tarificação *a priori* e tarificação *a posteriori*. A tarificação *a priori* classifica os segurados em diferentes classes de risco, designados por escalões tarifários, fazendo com que segurados com características semelhantes ocupem a mesma classe tarifária e paguem o mesmo prémio base. A heterogeneidade, que ainda existe, é corrigida através da tarificação *a posteriori* que considera o histórico de sinistralidade para efectuar correcções ao prémio base nas anuidades seguintes.

### 3.1.1 Tarifação *a priori*

Consideremos uma carteira com  $n$  apólices. Seja  $d_i$  a exposição ao risco do segurado  $i$ , com

*a priori* para cada apólice  $i = 1, 2, \dots, n$ .

A regressão de Poisson é usualmente usada na modelação do número de sinistros que um segurado irá participar durante a próxima anuidade. Matematicamente, esta regressão, pode ser escrita como, ver por exemplo It Tana et al. (2015):

$$Y_i \sim \text{Poisson} \left( d_i \exp \left( \beta_0 + \sum_{m=1}^q \beta_m X_{im} \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

onde  $\beta_m$  são os coeficientes da regressão. Sendo  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_q$  as estimativas dos coeficientes da regressão, a frequência de sinistralidade esperada, *a priori*, para o segurado  $i$ , é dada por

$$\hat{\lambda}_i = d_i \exp \left( \hat{\beta}_0 + \sum_{m=1}^q \hat{\beta}_m X_{im} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Após a estimativa da frequência de sinistralidade para cada segurado e, considerando como valor esperado da severidade a unidade monetária, segurados com a mesma frequência de sinistralidade são agrupados nos mesmos escalões tarifários, pagando prémios iguais.

Na prática, as seguradoras utilizam uma extensa lista de variáveis *a priori* para obter  $\hat{\lambda}_i$  o mais precisos possível. Contudo, alguma heterogeneidade ainda se mantém porque existem variáveis não observáveis que não foram tidas em consideração. A heterogeneidade que ainda existe é modelada através da tarifação *a posteriori*. Este tema tem sido alvo de estudos, ver, por exemplo, Lemaire (1995).

### 3.1.2 Tarifação *a posteriori*

Como referido anteriormente, a estrutura de um Sistema de *Bonus Malus* consiste no conjunto de Classes de *Bonus Malus*, nas Regras de Transição e na Escala de Prémios, da seguinte forma:

- Existem  $s$  classes, numeradas de 1 a  $s$ ;
- Cada novo segurado entra num nível pré-definido  $C_{i_0}$ ;
- Por cada ano sem declarar sinistros, o segurado é bonificado através de uma transição para uma classe inferior (*bonus*), enquanto por cada sinistro é penalizado através de uma transição para uma classe superior (*malus*);
- Visto o número de sinistros declarados e a classe em que o segurado se encontra, nesta anuidade, ser suficiente para determinar a classe em que este se encontrará

na próxima anuidade, o Sistema de *Bonus Malus* pode ser representado como uma cadeia de Markov.

Consideremos  $\Theta_i$  a variável aleatória que reflecte a heterogeneidade residual do segurado  $i$  que ainda existe após a tarificação *a priori*. Para um dado  $\Theta_i = \theta$ , as variáveis aleatórias  $Y_i$  assumem-se independentes e com distribuição de Poisson com média  $\lambda_i\theta$ . Tem-se então:

$$Pr[Y_i = k | \Theta_i = \theta] = \exp(-\lambda_i\theta) \frac{(\lambda_i\theta)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.4)$$

Assumindo que as variáveis aleatórias  $\Theta_i$  são independentes e seguem uma distribuição Gama com a seguinte função densidade:

$$f(\theta) = \frac{1}{\Gamma(a)} a^a \theta^{a-1} \exp(-a\theta), \quad \theta, a \in R^+ \quad (3.5)$$

obtém-se que  $E[\Theta_i] = 1$  e  $E[Y_i] = E[E[Y_i|\Theta_i]] = \lambda_i$ .

Considere-se agora um segurado escolhido ao acaso da carteira. Incorporando a variável aleatória  $\Theta$  pode-se expressar a frequência de sinistralidade para este segurado como  $\Lambda\Theta$ , onde  $\Lambda$  é definido como a variável aleatória que representa a frequência de sinistralidade *a priori* de um segurado retirado ao acaso da carteira. Como a variável aleatória  $\Theta$  reflecte a heterogeneidade residual, de um segurado retirado ao acaso, as variáveis aleatórias  $\Lambda$  e  $\Theta$  assumem-se independentes.

Considerando que a carteira é dividida em  $h$  Escalões Tarifários, onde  $w_g$ ,  $g = 1, \dots, h$  representa a proporção de segurados que pertence ao Escalão  $g$  e cuja frequência de sinistralidade, estimada *a priori*, é  $\lambda_g$ , conclui-se que  $Pr[\Lambda = \lambda_g] = w_g$ ,  $g = 1, \dots, h$ .

Vejam-se algumas das notações consideradas:

- $p_{l_i l_j}(\lambda\theta)$  representa a probabilidade de um segurado com frequência de sinistralidade  $\lambda\theta$  transitar, numa anuidade, da classe  $l_i$  para a classe  $l_j$ , para  $i, j = 1, \dots, s$ ;
- $\mathbf{P}(\lambda\theta) = [p_{l_i l_j}(\lambda\theta)]_{s \times s}$  representa a matriz de transição a um passo com  $i, j = 1, \dots, s$
- $\boldsymbol{\pi}(\lambda\theta) = (\pi_1(\lambda\theta), \pi_2(\lambda\theta), \dots, \pi_s(\lambda\theta))^T$  representa a distribuição estacionária onde,  $\pi_l(\lambda\theta)$  corresponde à probabilidade de um segurado com frequência de sinistralidade  $\lambda\theta$  se encontrar na classe  $l$  quando a estacionaridade é atingida,  $l = 1, \dots, s$

A distribuição estacionária,  $\boldsymbol{\Pi}(\lambda\theta)$ , à semelhança do que já tinha sido apresentado no capítulo 2, equação (2.8), pode ser obtida resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Pi}(\lambda\theta)^T = \boldsymbol{\Pi}(\lambda\theta)^T \mathbf{P}(\lambda\theta) \\ \boldsymbol{\Pi}(\lambda\theta)^T \mathbf{1} = 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{1}$  é um vetor coluna com todos os elementos iguais a 1.

Observando as diferenças entre os resultados apresentados no Capítulo 2 e os apresentados por It Tana et al. (2015) pode-se verificar que os autores apresentam uma ideia inovadora que permitiria tornar o Sistema de Bonus Malus mais justo. Recorde-se que os autores propõem que na tarifação *a posteriori* não se tenha apenas em conta a frequência de sinistralidade *a posteriori* mas também a que foi estimada *a priori*.

## 3.2 Proposta de um Sistema de *Bonus Malus* ótimo

Como já referido anteriormente, a Escala de Prémios e o conjunto de Regras de Transição são dois aspetos fulcrais num Sistema de *Bonus Malus*. Nesta secção ir-se-á apresentar a proposta de It Tana et al. (2015) para a determinação destes dois elementos, evidenciando as alterações relativamente ao modelo clássico apresentado no capítulo 2.

### 3.2.1 Escala Ótima de Prémios de It Tana et al. (2015)

Pitrebois et al. (2003) consideraram uma fórmula analítica para a determinação da escala ótima. Esta tem em consideração a frequência de sinistralidade *a priori* na parte do cálculo, mas a função objetivo,  $E[(\Theta - r_L)^2]$ , não considera o prémio base estimado *a priori*. Esta fórmula, pode ser escrita como

$$\min E[(\Theta - r_L)^2]. \quad (3.7)$$

It Tana et al. (2015) considera que, ao não se incorporar o prémio base na função objetivo, a escala de prémios pode não minimizar a fórmula apresentada por Pitrebois et al. (2003). Na prática, a seguradora está preocupada com o prémio em termos absolutos e não em termos relativos, o que sugere que o prémio base devia ser incorporado na função objetivo. De facto, como é possível observar na subsecção 2.4.1, Norberg (1976) considerou o valor esperado do quadrado da diferença entre o verdadeiro prémio, normalmente desconhecido,  $\bar{\lambda}\Theta$ , e o prémio realmente pago pelo segurado,  $\bar{\lambda}r_L$ . A equação (3.7) pode ser simplificada como:

$$\min E[\bar{\lambda}\Theta - \bar{\lambda}r_L]^2 \equiv \min E[(\Theta - r_L)^2] \quad (3.8)$$

onde  $\bar{\lambda}$  é a frequência de sinistralidade média da carteira. Consequentemente, considerando que é efectuada uma classificação do risco *a priori*, It Tana et al. (2015) propõem a minimização da seguinte função objetivo na determinação da escala de prémios:

$$\begin{aligned}
 E[(\Lambda\Theta - \Lambda r_L)^2] &= \sum_{\ell=1}^s E[(\Lambda\Theta - \Lambda r_L)^2 | L = \ell] P[L = \ell] = \\
 &= \sum_{\ell=1}^s E[E[(\Lambda\Theta - \Lambda r_L)^2 | L = \ell, \Lambda] | L = \ell] P[L = \ell] = \\
 &= \sum_{\ell=1}^s \sum_{g=1}^h E[(\Lambda\Theta - \Lambda r_L)^2 | L = \ell, \Lambda = \lambda_g] P[\Lambda = \lambda_g | L = \ell] P[L = \ell] = \\
 &= \sum_{\ell=1}^s \sum_{g=1}^h \int_0^{+\infty} (\lambda_g \theta - \lambda_g r_\ell)^2 \pi_\ell(\lambda_g \theta) w_g f(\theta) d\theta = \\
 &= \sum_{g=1}^h w_g \int_0^{+\infty} \sum_{\ell=1}^s (\lambda_g \theta - \lambda_g r_\ell)^2 \pi_\ell(\lambda_g \theta) f(\theta) d\theta.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

A função objetivo proposta, pretende minimizar a diferença entre o verdadeiro prêmio e o prêmio pago pelo segurado e, por isso, a sua solução já tem em consideração as diferenças entre os vários prêmios *a priori*, correspondentes aos diferentes escalões tarifários. Apesar de o problema de uma maior penalização para os segurados com risco *a priori* superior ainda existir (Injustiça Tipo 1) a solução obtida aborda parcialmente essa injustiça visto que os prêmios *a priori* estão incorporados diretamente na função objetivo, ver equação (3.8).

A proposta acima não garante, contudo, a existência de equilíbrio financeiro, isto é, não garante que o prêmio médio da carteira seja 100%. Assim, os autores de It Tana et al. (2015) propõem a introdução de uma restrição na minimização de (3.8), para garantir que existe um equilíbrio financeiro, tendo-se então:

$$\min E[(\Lambda\Theta - \Lambda r_L)^2] \quad \text{sujeita a} \quad E[r_L] = 1 \tag{3.10}$$

Utilizando o método lagrangiano para resolver o problema de otimização da equação (3.9), definindo o lagrangiano como:

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{r}, \alpha) &= E[(\Lambda\Theta - \Lambda r_L)^2] + \alpha(E[r_L] - 1) = \\
 &= \sum_{\ell=1}^s E[(\Lambda\Theta - \Lambda r_L)^2 | L = \ell] P[L = \ell] + \alpha \left( \sum_{\ell=1}^s r_\ell P[L = \ell] - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

com  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_\ell)^T$ .

As soluções para  $\alpha$  e  $r_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, s$ , ver It Tana et al. (2015), são dadas por:

$$\alpha = \frac{\left( \sum_{\ell=1}^s \frac{E[\Lambda^2 \Theta | L = \ell] P[L = \ell]}{E[\Lambda^2 | L = \ell]} \right) - 1}{\sum_{\ell=1}^s \frac{P[L = \ell]}{2E[\Lambda^2 | L = \ell]}} \tag{3.12}$$

$$r_\ell = \frac{E[\Lambda^2\Theta|L=\ell]}{E[\Lambda^2|L=\ell]} - \frac{\alpha}{2E[\Lambda^2|L=\ell]}, \quad (3.13)$$

com:

$$P[L=\ell] = \sum_{g=1}^h w_g \int_0^\infty \pi_\ell(\lambda_g\theta) f(\theta) d\theta \quad (3.14)$$

$$E[\Lambda^2\Theta|L=\ell] = \frac{\sum_{g=1}^h w_g \int_0^\infty \lambda_g^2 \theta \pi_\ell(\lambda_g\theta) f(\theta) d\theta}{\sum_{g=1}^h w_g \int_0^\infty \pi_\ell(\lambda_g\theta) f(\theta) d\theta} \quad (3.15)$$

$$E[\Lambda^2|L=\ell] = \frac{\sum_{g=1}^h w_g \int_0^\infty \lambda_g^2 \pi_\ell(\lambda_g\theta) f(\theta) d\theta}{\sum_{g=1}^h w_g \int_0^\infty \pi_\ell(\lambda_g\theta) f(\theta) d\theta}. \quad (3.16)$$

No caso de se relaxar a condição de equilíbrio financeiro as soluções para  $\alpha$  e  $r_\ell$  são dadas por:

$$\alpha^{relaxado} = 0 \quad (3.17)$$

$$r_l^{relaxado} = \frac{E[\Lambda^2\Theta|L=\ell]}{E[\Lambda^2|L=\ell]} \quad (3.18)$$

Contudo, a escala ótima, para o caso em que se relaxa o equilíbrio financeiro, pode ter uma média inferior a 100%, algo que não é desejado pelas seguradoras pois pode ter impacto na probabilidade de ruína.

É ainda importante notar que, supondo que a seguradora cobraria, *a priori*, o mesmo prêmio a todos os segurados, ou seja, se considerar que todos os  $\lambda_g$  são iguais a  $\bar{\lambda}$ , as equações (3.12) e (3.13) reduzem-se, respectivamente, a:

$$\alpha^{sempriori} = \frac{\left( \sum_{\ell=1}^s \frac{\bar{\lambda} E[\Theta|L=\ell] Pr[L=\ell]}{\bar{\lambda} E[1|L=\ell]} \right) - 1}{\sum_{\ell=1}^s \frac{Pr[L=\ell]}{2\bar{\lambda} E[1|L=\ell]}} = \frac{E[\Theta - 1]}{\frac{1}{2\bar{\lambda}^2}} = 0 \quad (3.19)$$

e a

$$r_l^{sempriori} = \frac{\bar{\lambda}^2 E[\Theta|L=\ell]}{\bar{\lambda}^2 E[1|L=\ell]} = E[\Theta|L=\ell] = \frac{\int_0^\infty \theta \pi_\ell(\bar{\lambda}\theta) f(\theta) d\theta}{\int_0^\infty \pi_\ell(\bar{\lambda}\theta) f(\theta) d\theta} \quad (3.20)$$

que coincidem com o resultado já obtido por Norberg (1976), ver subsecção 2.4.1, e Pitrebois et al. (2003).

### 3.2.2 Medida de Eficiência para Regras de Transição

Nesta secção, ir-se-á apresentar uma nova visão, apresentada por It Tana et al. (2015) relativamente às Regras de Transição. Esta passa por garantir que a integração da tarifação *a priori* e da tarifação *a posteriori* produz um Sistema de *Bonus Malus* em que o valor esperado da frequência de sinistralidade parece ser tão indistinguível quanto possível entre os diferentes níveis do Sistema de *Bonus Malus*, quando a estacionaridade é alcançada.

Introduzir-se-á ainda uma nova medida de eficiência, apresentada pelos mesmos autores, denominada Medida de Eficiência para Regras de Transição. Esta medida quantifica a Implicação 3 e pode ser usada para comparar diferentes regras de transição na implementação de um Sistema de *Bonus Malus*. Esta nova medida pode ser usada como fator de escolha entre diferentes conjuntos de regras de transição.

Tal como anteriormente, assume-se que os segurados estão divididos em  $h$  classes de risco, onde  $w_g = P[\Lambda = \lambda_g]$ ,  $g = 1, \dots, h$  representa a percentagem de segurados no escalão tarifário  $g$ . Neste caso, tem-se:

$$E[\Lambda] = \sum_{g=1}^h \lambda_g w_g \quad (3.21)$$

$$V[\Lambda] = \sum_{g=1}^h (\lambda_g - E[\Lambda])^2 w_g. \quad (3.22)$$

Pitrebois et al. (2003) propuseram a seguinte expressão para quantificar a relação entre a tarifação *a priori* e a *a posteriori*:

$$E[\Lambda|L = \ell] = \frac{\sum_{g=1}^h w_g \int_0^{\infty} \lambda_g \pi_{\ell}(\lambda_g \theta) f(\theta) d\theta}{\sum_{g=1}^h w_g \int_0^{\infty} \pi_{\ell}(\lambda_g \theta) f(\theta) d\theta} \quad (3.23)$$

Esta pode ser interpretada como o valor esperado da frequência de sinistralidade *a priori* na classe  $L = l$  do Sistema de *Bonus Malus*. A Implicação 3 permite entender que, segundo os autores, um Sistema de *Bonus Malus* deve apresentar pequenas variações do  $E[\Lambda|L = l]$  nas diferentes classes. Desta forma, ver It Tana et al. (2015), a equação (3.22) pode ser decomposta como a soma de duas componentes:

$$\begin{aligned} V[\Lambda] &= E[V[\Lambda|L]] + V[E[\Lambda|L]] \\ &= \sum_{\ell=1}^s \left( \sum_{g=1}^h (\lambda_g - E[\Lambda|L = \ell])^2 w_g \int_0^{\infty} \pi_{\ell}(\lambda_g \theta) f(\theta) d\theta \right) \\ &+ \sum_{\ell=1}^s (E[\Lambda|L = \ell] - E[\Lambda])^2 P[L = \ell] \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde  $E[V[\Lambda|L]]$  é o valor esperado da variância condicional e  $V[E[\Lambda|L]]$  é a variância do valor esperado condicional.

Dado o valor de  $V[\Lambda]$  (equação (3.24)) a Implicação 3 permite observar que o valor de  $V[\Lambda]$  é influenciado principalmente por  $E[V[\Lambda|L]]$ , isto é, dentro de cada classe do Sistema de *Bonus Malus* a frequência de sinistralidade estimada *a priori*, deve variar bastante

de segurado para segurado, ou seja, um Sistema de *Bonus Malus* deve ter flexibilidade suficiente para permitir que, por exemplo, um segurado com elevada frequência de sinistralidade estimada *a priori*, denominemo-lo por Segurado A, e que por isso se espera que venha a ocupar as classes mais altas do Sistema de *Bonus Malus* possa ocupar, na estacionaridade, qualquer classe do Sistema de *Bonus Malus* e ao mesmo tempo permitir que um segurado com baixa frequência de sinistralidade estimada *a priori* e que, por isso, se espera que venha a ocupar as classes mais baixas do Sistema de *Bonus Malus* possa ocupar, na estacionaridade, a mesma classe do Sistema de *Bonus Malus* que o segurado A. Os autores referem também que, um valor elevado da primeira componente implica um valor pequeno da segunda, o que indica que o Sistema de *Bonus Malus* não reforça a classificação *a priori*.

O valor  $E[V[\Lambda|L]]$  depende do número de classes de risco,  $h$ , da frequência de sinistralidade esperada *a priori*,  $\lambda_g$ , do número de classes do Sistema,  $s$ , e das regras de transição,  $T$ , enquanto que o valor de  $V[\Lambda]$  depende apenas dos primeiros dois fatores. Visto que o número de classes do Sistema é normalmente fixo, It Tana et al. (2015), propõem

$$\tau_{rule} = \frac{E[V[\Lambda|L]]}{V[\Lambda]} \quad (3.25)$$

como Medida de Eficiência para Regras de Transição. A seguradora pode considerar esta medida para comparar os diferentes candidatos a regras de transição. Alternativamente, a seguradora pode especificar um limite mínimo para  $\tau_{rule}$  tal que o conjunto de regras de transição que satisfaça esse critério seja adoptado para o Sistema *Bonus Malus*.

### 3.2.3 Regras de transição variáveis

Nos Sistemas de *Bonus Malus* com Regras de Transição do tipo  $-x/ + y$ , as regras de transição são iguais para todos os segurados, independentemente da classe em que estes se encontrem. Este facto faz com que os segurados que se encontram nas classes mais elevadas e que tendem a ter um valor de  $\lambda_g$  elevado, tenham tendência a manter-se nas classes mais elevadas do Sistema de *Bonus Malus*. Segundo It Tana et al. (2015), uma solução para este problema passa pela introdução de regras de transição variáveis. Estas regras impõem transições bonificadoras superiores e transições penalizadoras inferiores para os segurados que se encontram nas classes mais altas do Sistema comparativamente aos segurados que se encontram nas classes mais baixas. No sentido contrário, impõem transições penalizadoras superiores e transições bonificadoras inferiores para os segurados que se encontram nas classes mais baixas do sistema.

Considere-se  $t_{l,k}$  como o número de classes que um segurado, que se encontra na classe  $l$  e declara  $k$  acidentes durante um período de vigência, transita. As regras de transição variáveis devem satisfazer as seguintes condições:

- Nas penalizações,

$$\begin{cases} t_{\ell,k} \geq 0, & k \geq 1 \\ t_{\ell_2,k} \leq t_{\ell_1,k} & k \geq 1 \text{ para } \ell_2 > \ell_1 \end{cases} \quad (3.26)$$

- Nas bonificações,

$$\begin{cases} t_{\ell,0} \leq 0, \\ |t_{\ell_2,0}| \geq |t_{\ell_1,0}|, \text{ para } \ell_2 > \ell_1 \end{cases} \quad (3.27)$$

De notar que o número de classes a transitar tem de ser um número inteiro, os segurados na classe 1 não podem receber mais bonificações e os segurados na classe  $s$  não podem sofrer mais penalizações.

It Tana et al. (2015) afirmam que, sendo o objetivo destas regras de transição suavizar e equilibrar o SBM, é importante ter cuidado para que as regras de transição não sejam demasiado suaves sendo também importante assegurar que o SBM não reforça a classificação de risco *a priori* considerando, por exemplo, o valor de  $\tau_{rule}$  para determinar qual o melhor conjunto de regras de transição a aplicar.

De salientar que no mercado segurador Português existem, em vigor, Sistemas de *Bonus Malus* que não usam Regras de Transição do tipo  $-x/+y$  e, portanto, algumas seguradoras já têm implementado este tipo de Regras de Transição.



## CONSTRUÇÃO DE UM SISTEMA DE *Bonus Malus*

Concluída a apresentação dos resultados teóricos ir-se-ão apresentar os resultados práticos do conteúdo exposto anteriormente. Primeiramente, apresentar-se-ão os dados e as regras de transição usados para o estudo da aplicabilidade do proposto no capítulo anterior. Depois de apresentados os dados e as regras de transição consideradas ir-se-ão apresentar os resultados do método proposto por It Tana et al. (2015).

Visto não fazer parte dos objetivos desta dissertação o cálculo da tarificação *a priori*, foram utilizados os dados reproduzidos em Pitrebois et al. (2004) com 24 classes de risco *a priori*. A frequência de sinistralidade  $\lambda_g$ ,  $g = 1, \dots, h$  e os respetivos pesos  $w_g$  encontram-se na tabela (4.1).

Assumiu-se que, o número de sinistros segue uma distribuição de Poisson Mista, ou seja,

$$Pr[Y_i = k | \Theta_i = \theta] = \exp(-\lambda_i \theta) \frac{(\lambda_i \theta)^k}{k!}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

e como parâmetro da Poisson considerou-se a *Gama*( $\alpha, \beta$ ) com f.d.p

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{e^{-\frac{x}{\beta}} x^{-1+\alpha}}{\Gamma(\alpha) \beta^{-\alpha}} \quad \alpha, \beta > 0, \quad x > 0$$

Tendo em conta a expressão da f.d.p apresentada considera-se como parâmetro da distribuição de Poisson a distribuição Poisson-Gama  $G(\alpha, \frac{1}{\alpha})$ . Considerando, que foi feito um estudo relativamente à frequência de sinistralidade estimada, *a priori*, para a carteira e que por isso diferentes segurados podem pertencer a diferentes escalões tarifários tem-se  $\hat{\alpha} = 1.2401$ . Caso este estudo não tenha sido feito e por isso todos os segurados sejam colocados no mesmo escalão tarifário tem-se  $\hat{\alpha} = 0.8888$ .

Relativamente à frequência de sinistralidade  $\Lambda$ , tem-se  $E(\Lambda) = 0.1462$  e  $V(\Lambda) = 0.002625$

Classe tarifária	$\lambda_g$	$w_g$
C1	0.1173	0.1049
C2	0.1405	0.1396
C3	0.1872	0.0398
C4	0.2243	0.0705
C5	0.1454	0.0076
C6	0.1742	0.0122
C7	0.2321	0.0013
C8	0.2781	0.0014
C9	0.1729	0.0293
C10	0.2072	0.0299
C11	0.2760	0.0152
C12	0.3308	0.0242
C13	0.2144	0.0007
C14	0.2569	0.0009
C15	0.3422	0.0002
C16	0.4101	0.0000
C17	0.0927	0.1338
C18	0.1111	0.1973
C19	0.1480	0.0294
C20	0.1773	0.0661
C21	0.1149	0.0372
C22	0.1377	0.0517
C23	0.1835	0.0025
C24	0.2198	0.0044

Tabela 4.1: Frequência de sinistralidade estimada *a priori* e peso

Para estudar a aplicabilidade do que foi apresentado anteriormente consideraram-se 4 regras de transição, 2 regras de transição do tipo  $-x/+y$  e 2 regras de transição variáveis, encontrando-se estas e as respectivas matrizes de transição em baixo.



$$\mathbf{T} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} \{0\} & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{5\} & - & \{6\} & - & \{7\} & - & \{8\} & \{9, 10, \dots\} \\ \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{5\} & - & \{6\} & - & \{7\} & - & \{8, 9, \dots\} \\ - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{5\} & - & \{6\} & - & \{7\} & \{8, 9, \dots\} \\ - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{5\} & - & \{6\} & - & \{7, 8, \dots\} \\ - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{5\} & - & \{6\} & \{7, 8, \dots\} \\ - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{5\} & - & \{6, 7, \dots\} \\ - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{5\} & \{6, 7, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{5, 6, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} & \{5\} & \{6\} & \{7\} & \{8, 9, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} & \{5\} & \{6\} & \{7, 8, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} & \{5\} & \{6, 7, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} & \{5, 6, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & \{2\} & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & - & \{1, 2, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1, 2, \dots\} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.3)$$

- Regra 4: Considerando  $l$ , a classe em que o segurado se encontra,  $k$  o número de sinistros que declara naquela anuidade e  $t_{l,k}$  o número de classes que o segurado, que se encontra na classe  $l$ , transita caso declare  $k$  sinistros, tem-se:

$$t_{l,k} = \begin{cases} 0, & l = 18 \\ k, & 13 \leq l \leq 17 \\ 2k, & 6 \leq l \leq 12 \\ 3k, & l \leq 5 \end{cases} \quad t_{l,0} = \begin{cases} 0, & l = 1 \\ -1, & 2 \leq l \leq 6 \\ -2, & 7 \leq l \leq 12 \\ -3, & l \geq 13 \end{cases}$$

$$\mathbf{T} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & \{2\} & - & - & \{3\} & - & - & \{4\} & - & - & \{5\} & - & \{6, 7, \dots\} \\ \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & - & \{2\} & - & - & \{3\} & - & - & \{4\} & - & - & \{5\} & \{6, 7, \dots\} \\ - & \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & - & \{2\} & - & - & \{3\} & - & - & \{4\} & - & - & \{5, 6, \dots\} \\ - & - & \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & - & \{2\} & - & - & \{3\} & - & - & \{4\} & - & \{5, 6, \dots\} \\ - & - & - & \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & - & \{2\} & - & - & \{3\} & - & - & \{4\} & \{5, 6, \dots\} \\ - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & - & \{2\} & - & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{6, 7, \dots\} \\ - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{5\} & \{6, 7, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4\} & - & \{5, 6, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & - & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} & \{5, 6, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & - & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & - & \{1\} & \{2\} & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & - & - & \{1, 2, \dots\} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \{0\} & - & - & - & \{1, 2, \dots\} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.4)$$

Nas tabelas em baixo encontram-se os resultados do método proposto por It Tana et al. (2015). Os valores apresentados são:

- Distribuição estacionária;
- O valor esperado da frequência de sinistralidade, média, esperada a priori;

- Escala de Prémios;
- Escala de Prémios relaxando a condição de equilíbrio financeiro.

Na Tabela 4.2, encontram-se os resultados obtidos para a Regra 4 e para a Regra 2, respectivamente, enquanto na Tabela 4.3 encontram-se os resultados obtidos para a Regra 3 e para a Regra 1, respectivamente.

Classe	$Pr[L = l]$	$E[\Lambda L = l]$	$r_l$	$r_l^{relaxado}$	$Pr[L = l]$	$E[\Lambda L = l]$	$r_l$	$r_l^{relaxado}$
C1	62.35%	13.91%	70.38%	58.94%	57.37%	13.77%	64.69%	50.38%
C2	5.83%	14.69%	110.35%	100.17%	4.52%	14.29%	92.61%	79.39%
C3	6.85%	14.81%	116.23%	106.24%	5.12%	14.34%	95.30%	82.19%
C4	8.14%	14.96%	122.79%	113.00%	5.83%	14.40%	98.12%	85.12%
C5	4.42%	15.73%	153.84%	145.02%	2.42%	14.81%	116.94%	104.68%
C6	2.61%	16.18%	169.82%	161.50%	2.32%	14.91%	121.62%	109.54%
C7	2.16%	15.91%	160.60%	151.99%	2.13%	15.05%	127.54%	115.69%
C8	2.34%	16.87%	191.72%	184.06%	1.56%	15.35%	139.61%	128.23%
C9	0.95%	17.08%	197.75%	190.29%	1.48%	15.51%	146.05%	134.91%
C10	1.39%	17.85%	217.73%	210.88%	1.41%	15.71%	153.72%	142.88%
C11	0.67%	18.21%	225.91%	219.32%	1.32%	15.97%	163.13%	152.64%
C12	0.64%	19.02%	243.04%	236.98%	1.35%	16.20%	171.33%	161.14%
C13	0.35%	19.35%	249.14%	243.27%	1.42%	16.48%	180.57%	170.73%
C14	0.45%	19.88%	258.39%	252.81%	1.55%	16.81%	190.86%	181.41%
C15	0.31%	21.44%	283.12%	278.28%	1.77%	17.19%	201.92%	192.88%
C16	0.20%	21.55%	284.00%	279.19%	2.13%	17.66%	214.62%	206.06%
C17	0.11%	22.37%	294.69%	290.20%	2.69%	18.27%	229.35%	221.34%
C18	0.23%	24.57%	320.29%	316.51%	3.61%	19.07%	246.54%	239.19%

Tabela 4.2:  $Pr[L = l]$ ,  $E[\Lambda|L = l]$  e Escalas de prémios

Classe	$Pr[L = l]$	$E[\Lambda L = l]$	$r_l$	$r_l^{relaxado}$	$Pr[L = l]$	$E[\Lambda L = l]$	$r_l$	$r_l^{relaxado}$
C1	68.46%	13.96%	74.01%	61.77%	67.42%	13.92%	72.85%	59.19%
C2	6.75%	14.72%	112.43%	101.50%	6.35%	14.57%	106.24%	93.86%
C3	7.96%	14.83%	117.68%	106.93%	7.38%	14.65%	109.95%	97.72%
C4	3.24%	15.52%	146.42%	136.64%	2.75%	15.17%	132.37%	120.99%
C5	3.02%	15.79%	156.51%	147.06%	2.43%	15.33%	138.66%	127.52%
C6	2.08%	16.41%	177.83%	169.09%	1.46%	15.72%	153.55%	142.96%
C7	1.97%	16.84%	190.95%	182.64%	1.23%	15.92%	161.08%	150.77%
C8	1.82%	17.45%	207.86%	200.11%	0.95%	16.22%	171.69%	161.76%
C9	1.08%	17.80%	216.62%	209.17%	0.85%	16.45%	179.49%	169.84%
C10	0.87%	18.32%	228.50%	221.45%	0.76%	16.72%	188.27%	178.93%
C11	0.84%	18.76%	237.61%	230.87%	0.72%	16.99%	196.23%	187.17%
C12	0.55%	19.55%	252.46%	246.23%	0.72%	17.28%	204.67%	195.92%
C13	0.40%	20.15%	262.39%	256.50%	0.75%	17.61%	213.24%	204.80%
C14	0.29%	21.27%	279.42%	274.09%	0.81%	17.99%	222.51%	214.42%
C15	0.19%	21.85%	286.86%	281.78%	0.93%	18.45%	232.66%	224.95%
C16	0.19%	23.49%	307.37%	302.93%	1.12%	19.02%	244.19%	236.92%
C17	0.09%	23.65%	308.60%	304.20%	1.43%	19.74%	257.56%	250.79%
C18	0.20%	25.77%	330.98%	327.23%	1.94%	20.68%	273.24%	267.04%

Tabela 4.3:  $Pr[L = l]$ ,  $E[\Lambda|L = l]$  e Escalas de prémios

Para comparar regras de transição variáveis com regras de transição do tipo  $-x/+y$  serão comparados os resultados obtidos para a Regra 1 com os obtidos para a Regra 3 e os resultados obtidos para a Regra 2 com os obtidos para a Regra 4.

Observando a Tabela 4.2, a Tabela 4.3, a Tabela 4.4 e a Figura 4.1 facilmente se verifica que, considerando regras de transição variáveis, existe uma maior percentagem de segurados nas classes mais baixas comparativamente com quando se consideram regras do tipo  $x/+y$ . Além disso, também se verifica que, a Regra 2 e a Regra 4 são mais rígidas que a Regra 1 e a Regra 3.

$Pr[L = l]$	Regra 1	Regra 2	Regra 3	Regra 4
Classe 1	67,42%	57,37%	68,46%	62,35%

Tabela 4.4:  $Pr[L = l]$  Classe 1

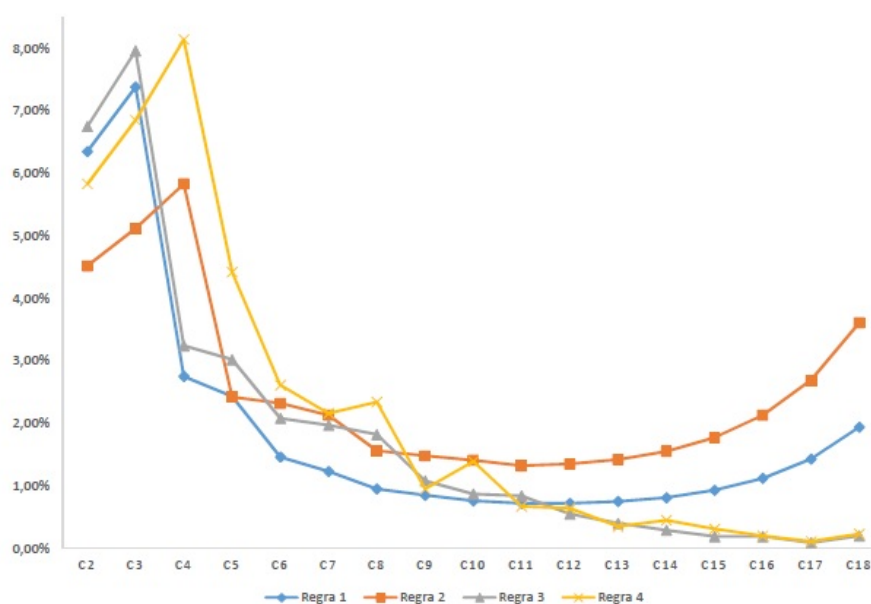


Figura 4.1:  $Pr[L = l]$

Tal como seria esperado tendo em conta as observações feitas por Taylor (1997), o valor de  $E[\Lambda|L = l]$  aumenta de acordo com a classe do Sistema de *Bonus Malus* para as matrizes de transição consideradas, ver Figura 4.2. Em particular, os valores obtidos para  $E[\Lambda|L = l]$  considerando a Regra 2 são os que apresentam o menor valor para  $l = 1, \dots, 18$ . Isto acontece principalmente devido a severidade desta Regra. Se os valores de  $E[\Lambda|L = l]$  não fossem baixos uma maior percentagem de segurados estaria nas classes penalizadoras, além de que se teria um número inferior de segurados nas classes bonificadoras.

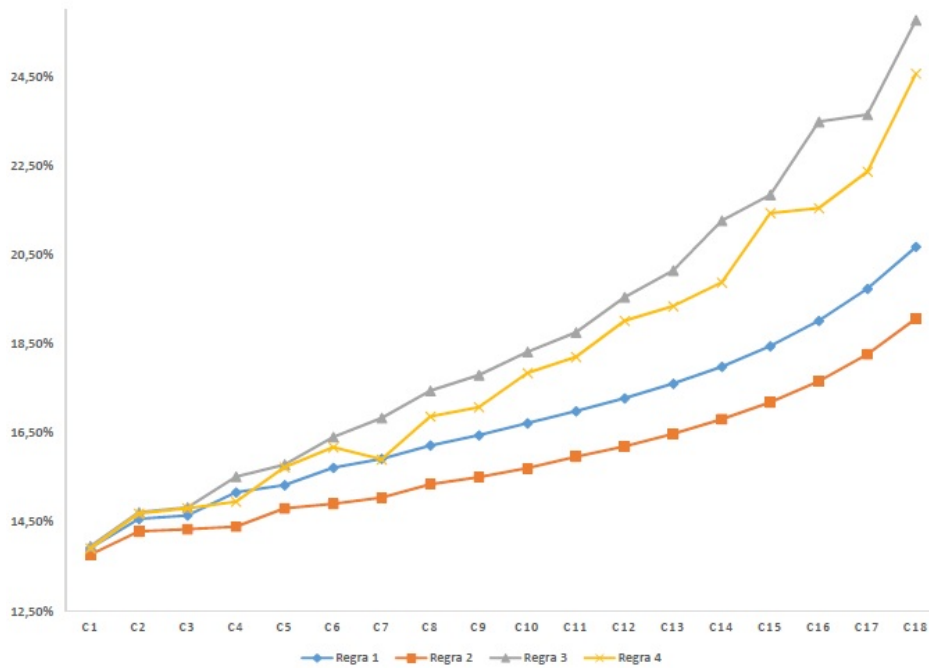


Figura 4.2:  $E[\Lambda|L=l]$

Observe-se agora a escala de prémios.

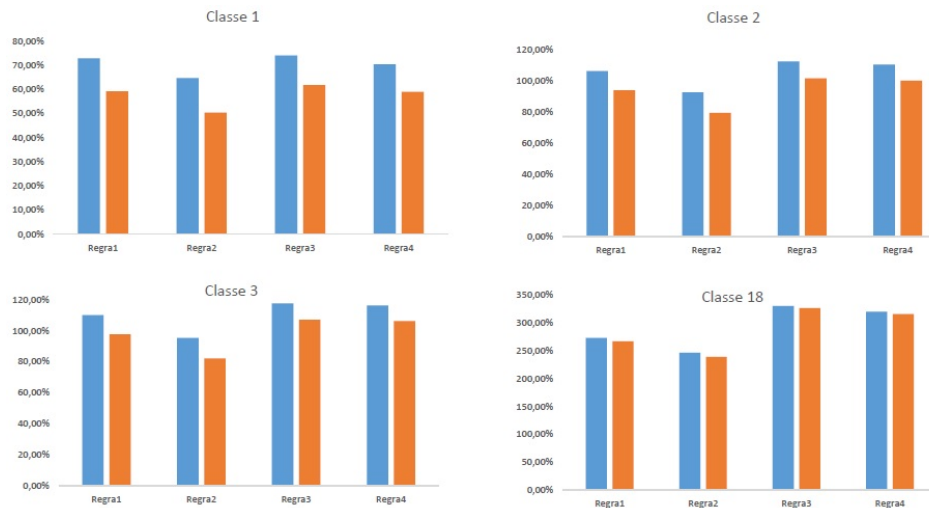


Figura 4.3: Escala de Prémios

Se não relaxarmos o equilíbrio financeiro com exceção da Regra 2 que tem como classes bonificadoras as primeiras quatro classes do Sistema de *Bonus Malus* as outras regras tem como classe bonificadora apenas a 1<sup>a</sup>. Observe-se também que, relaxando o equilíbrio financeiro as classes 2 e 3 da Regra 1 deixam de ser penalizadoras e passam a ser bonificadoras. Tirando isso em todas as outras classes, à semelhança da classe 18, os valores relaxando o equilíbrio financeiro são inferiores mas não são significativamente inferiores. Além disso, a Regra 2 é a que apresenta valores de  $r_l$  inferiores. Isto acontece pois, como

a Regra 2 é a mais severa então os segurados estão mais dispersos pelas várias classes e existe uma percentagem mais elevada de segurados nas classes penalizadoras. Desta forma, para garantir a condição de equilíbrio financeiro, visto existir uma maior percentagem de segurados nas classes penalizadoras, os prémios tem de ser inferiores. Contrariamente à Regra 2, está a Regra 3. Esta última é a que apresenta valores superiores de  $r_l$ . Isto acontece pois, como a Regra 3 é a menos severa então uma maior percentagem de segurados encontra-se nas classes bonificadoras. Desta forma, para garantir a condição de equilíbrio financeiro, visto existir uma maior percentagem de segurados nas classes bonificadoras os prémios tem de ser superiores.

Como seria expectável os valores de  $r_l$  relaxando o equilíbrio financeiro são inferiores aos valores obtidos ao valores de  $r_l$  quando não se relaxa o equilíbrio financeiro. Na Tabela 4.5, encontram-se os valores do prémio médio para cada Regra relaxando o equilíbrio financeiro sendo que ao não se relaxar o equilíbrio financeiro o prémio médio é 100%.

Regra de Transição	Regra 1	Regra 2	Regra 3	Regra 4
<i>Prémio Médio</i>	87.37%	87.05%	88.63%	89.49%

Tabela 4.5: Prémio Médio

Um dos problemas referidos, no capítulo 3, é o problema da aglomeração das apólices, de acordo com o seu risco *a priori*. Para medir a eficiência de cada uma das regras de transição em aliviar o problema referido observe-se o valor da medida de eficiência,  $\tau_{rule}$ , obtida para cada uma das regras de transição, encontrando-se este na Tabela 4.6.

Medida de eficiência	Regra 1	Regra 2	Regra 3	Regra 4
$\tau_{rule}$	0.91709	0.922402	0.923449	0.933344

Tabela 4.6: Medida de eficiência

Observando os valores obtidos pudesse verificar que embora a Regra 4 seja a regra de transição que melhor eficiência apresenta não existe uma diferença significativa entre os diferentes  $\tau_{rule}$ . Além disso, facilmente se observa que as regras de transição variáveis são mais eficientes que as regras de transição do tipo  $-x/+y$ , ou seja, as regras de transição variáveis são as que menos salientam o risco *a priori*. Isto ocorre, porque as regras de transição variáveis trazem uma maior variação de  $\lambda_g$  pelo que os valores de  $E[V[\Lambda|L]]$  são superiores obtendo-se, por isso, valores de  $\tau_{rule}$  superiores.

Embora a Regra 4 seja a regra de transição mais eficiente, visto não existir uma diferença significativa entre os  $\tau_{rule}$  optou-se por fazer uma avaliação do Sistema de *Bonus Malus* estudados seguindo as medidas de avaliação propostas no subcapítulo 2.5.

---

Regra	RSAL	CV
Regra 1	0,1355	0,5024
Regra 2	0,1942	0,5367
Regra 3	0,1011	0,4728
Regra 4	0,1185	0,4673

Tabela 4.7: RSAL e CV

Observando a tabela acima pode-se verificar que as regras de transição do tipo  $-x/+y$  são as que apresentam melhor valor de RSAL e de CV.

Considerando os resultados anteriores pode-se observar que a matriz de transição que melhor eficiência apresenta não é a matriz de transição pertencente ao Sistema de *Bonus Malus* que melhor valor de RSAL e CV apresenta.



## CONCLUSÃO

Esta dissertação teve como objetivo o estudo de uma nova visão para regras de transição. Esta nova visão passa por considerar o que foi tarifado *a priori* e incorporá-lo na tarifação *a posteriori* de forma a produzir um Sistema de *Bonus Malus* que não saliente ainda mais a tarifação feita *a priori*.

Para analisar se determinada regra de transição suaviza a aglomeração das apólices de acordo com o seu risco *a priori* considerou-se uma medida de eficiência, proposta por It Tana et al. (2015). No sentido de tentar suavizar a penalização excessiva dos segurados que se encontram nas classes mais elevadas do sistema, introduziram-se regras de transição variáveis. Este conjunto de regras de transição depende da classe em que o segurado se encontra sendo que se impõem menos *Malus* e mais *Bonus* para os segurados que ocupam as classes mais elevadas do Sistema de *Bonus Malus* e se impõem mais *Malus* e menos *Bonus* para os segurados que ocupam as classes mais baixas do Sistema de *Bonus Malus*.

Relativamente ao estudo da medida de eficiência, verificou-se as regras de transição variáveis são mais eficientes que as regras de transição do tipo  $-x/+y$ , ou seja, as regras de transição variáveis consideradas salientam menos o risco *a priori* quando comparadas com as regras do tipo  $-x/+y$ . Isto ocorre porque as regras de transição variáveis trazem uma maior variação de  $\lambda_g$  pelo que os valores de  $E[V[\Lambda|L]]$  são superiores obtendo-se, por isso, valores de  $\tau_{rule}$  superiores nas regras variáveis.

Pode-se observar também que quanto mais severas forem as regras de transição mais eficientes estas são. Isto acontece, porque a maioria dos condutores tem uma frequência de sinistralidade estimada *a priori* relativamente baixa e por isso impondo regras de transição mais severas a variação de  $\lambda_g$  em cada classe será maior.

É facilmente verificável que, considerando regras de transição variáveis existe uma maior

percentagem de segurados nas classes mais baixas comparativamente com quando se consideram regras do tipo  $-x/+y$ .

Tal como seria esperado tendo em conta as observações feitas por Taylor (1997), o valor de  $E[\Lambda|L = l]$  aumenta de acordo com a classe do Sistema de *Bonus Malus* para as matrizes de transição consideradas. Em particular, os valores obtidos para  $E[\Lambda|L = l]$  considerando a Regra 2 são os que apresentam o menor valor possível para  $l = 1, \dots, 18$ . Isto acontece principalmente devido a severidade desta Regra. Se os valores de  $E[\Lambda|L = l]$  não fossem baixos uma maior percentagem de segurados estaria nas classes penalizadoras, além de que se teria um número inferior se segurados nas classes bonificadoras.

Em suma, salientar a inclusão da tarifação feita *a priori* na tarifação *a posteriori* no sentido de tentar que o Sistema de *Bonus Malus* não saliente ainda mais o risco *a priori* e tentando aliviar a aglomeração de apólices no Sistema de *Bonus Malus* de acordo com o seu risco *a priori*. Salientar também a importância que a medida de eficiência pode vir a ter na escolha do melhor conjunto de regras de transição a aplicar a uma carteira e a importância que as regras de transição variáveis podem ter no sentido de tentar suavizar a penalização excessiva dos segurados que se encontram nas classes mais elevadas do sistema e aliviar o problema da aglomeração das apólices de acordo com o seu risco *a priori*.

Por fim apesar de a alteração para um Sistema de *Bonus Malus*, que tenha em consideração a tarifação *a priori*, implicar um grande esforço humano e económico por parte das companhias de seguros penso que seria uma melhoria pois, as seguradoras estariam a aplicar um Sistema de *Bonus Malus* mais justo que, afinal de contas, é uma das maiores preocupações de todas as companhias.

## BIBLIOGRAFIA

- Centeno, M. d. L. (2003). *Teoria do Risco na Actividade Seguradora*. Vol. 1. 211 pp.
- Coene G., D. L. G. (1996). “A financially balanced bonus-malus system”. Em: *AUSTIN Bulll 2*, pp. 107–116.
- It Tana, C., J. Li, J. Siu-Hang Li e U. Balasooriya (2015). “Optimal relativities and transition rules of a bonus–malus system”. Em: *Elsevier B.V*, pp. 255–263.
- Lemaire, J. (1995). *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Vol. 2. 283 pp.
- McCullagh P., N. J. (1989). “Generalized Linear Models”. Em: *Chapman and Hall 2*.
- Norberg, R. (1976). “A credibility theory for automobile bonus system”. Em: *Scand. Actuar Journal 2*, pp. 92–107.
- Pitrebois, S., M. Denuit e J.-F. Walhin (2003). “Setting a Bonus-Malus Scale in the Presence of Other Rating Factors - Taylor’s Work Revisited”. Em: *ASTIN Bulletin 33* (02), pp. 419–436. ISSN: 1783-1350. DOI: [10.1017/S0515036100013544](https://doi.org/10.1017/S0515036100013544). URL: [http://journals.cambridge.org/article\\_S0515036100013544](http://journals.cambridge.org/article_S0515036100013544).
- Pitrebois, S., M. Denuit e J.-F. Walhin (2004). “Bonus-Malus scales in segmented tariffs - Gilde & Sundt’s work revisited”. Em: *10* (1), pp. 107–125.
- Silva, J. Andrade e (1991). “Estruturas tarifárias nos ramos reais da indústria seguradora”. Em:
- Taylor, G. (1997). “Setting a Bonus-Malus Scale in the Presence of other Rating Factors”. Em: *ASTIN Bulletin 27* (02), pp. 319–327. ISSN: 1783-1350. DOI: [10.2143/AST.27.2.542055](https://doi.org/10.2143/AST.27.2.542055). URL: [http://journals.cambridge.org/article\\_S0515036100012113](http://journals.cambridge.org/article_S0515036100012113).



+