

SARA RITA DE OLIVEIRA GUERRA PEDRO DE MATOS
FREITAS DO AMARAL
Licenciada em matemática Aplicada

Relatório de Estágio RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM CONTEXTO REAL

UMA ABORDAGEM ÀS INEQUAÇÕES NO 9.º ANO

MESTRADO EM ENSINO DE matemática NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁ-
SICO E NO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa
Setembro, 2022

SARA RITA DE OLIVEIRA GUERRA PEDRO DE MATOS
FREITAS DO AMARAL
Licenciada em matemática Aplicada

Relatório de Estágio RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM CONTEXTO REAL

UMA ABORDAGEM ÀS INEQUAÇÕES NO 9.º ANO

MESTRADO EM ENSINO DE matemática NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁ-
SICO E NO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa
Setembro, 2022

RELATÓRIO DE ESTÁGIO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM CONTEXTO REAL UMA ABORDAGEM ÀS INEQUAÇÕES NO 9.º ANO

SARA RITA DE OLIVEIRA GUERRA PEDRO DE MATOS FREITAS DO AMARAL
Licenciada em matemática Aplicada

Orientadora: Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha,
Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade NOVA de Lisboa

Júri:

Presidente: Doutor António Manuel Dias Domingos,
Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade NOVA de Lisboa.

Arguente: Doutora Paula Cristina Antunes Teixeira,
Professora do Agrupamento de Escolas João de Barros.

Membros: Licenciada Ana Cristina Tavares Sá Cerqueira Afonso,
Professora do Agrupamento de Escolas de Benfica.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM CONTEXTO REAL

Copyright © Sara Rita de Oliveira Guerra Pedro de Matos Freitas do Amaral, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

À Carlota.

AGRADECIMENTOS

Um agradecimento especial e imensurável à minha filha Carlota, por toda a compreensão e paciência de não usufruir de tempo de qualidade, e bastante necessário, com a mãe. À minha mãe pelo apoio nestas minhas ausências.

Agradeço à professora orientadora e às professoras cooperantes pela dedicação, disponibilidade e pelas aprendizagens transmitidas.

À direção da escola e aos alunos onde decorreu o estágio por me acolherem e integrarem com satisfação.

Aos meus amigos, em especial à minha colega Joana pelo amparo, partilha e sincera amizade durante este percurso repleto de obstáculos e dificuldades ultrapassados.

“Não há nenhum ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa vir a ser aplicado, mais cedo ou mais tarde, aos fenómenos do mundo real” (Lobachevsky).

RESUMO

O presente relatório desenvolveu-se no âmbito do Mestrado em Ensino de matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário e tem como objetivo descrever e refletir sobre o trabalho realizado na prática de ensino supervisionada, no ano letivo 2021/2022, bem como o trabalho de investigação com alguns alunos da turma do 9.º ano que a professora estagiária acompanhou.

A prática de ensino supervisionada compreende uma descrição e análise do trabalho pedagógico desenvolvido durante o ano letivo. Por um lado, a prática letiva descreve a observação, planificação e lecionação de aulas e, por outro lado, contempla a dinamização de atividades não letivas, assim como a participação em reuniões e termina com uma reflexão sobre a prática de ensino.

O trabalho de investigação teve como objetivo compreender o raciocínio demonstrado pelos alunos do 9.º ano relativamente à diversidade na resolução de problemas em contexto da vida real. Neste sentido, foram analisadas as resoluções dos alunos a problemas do quotidiano com base na explicação dos próprios, em entrevistas. A intenção subjacente ao estabelecimento deste objetivo era responder às seguintes questões de investigação:

1. De que forma os alunos interpretam o enunciado de problemas da vida real e o traduzem algebricamente?
2. Quais as etapas por que os alunos passam durante a resolução de problemas?
3. De que modo os problemas da vida real contribuem para a compreensão das inequações?
4. Qual a análise que os alunos fazem entre a solução obtida e a resposta adequada ao problema?

A realização do estudo seguiu uma metodologia qualitativa com base em três estudos de caso. As técnicas de recolha de dados foram a observação participante, a observação não participante, a recolha documental e a entrevista semiestruturada.

As conclusões do estudo sugerem que os alunos apresentam capacidades na tradução dos enunciados dos problemas algebricamente. As etapas de resolução dos problemas seguidas coadunam-se com a heurística proposta por Pólya. Destaca-se o facto de os alunos terem analisado e refletido sobre a solução obtida, sendo que mesmo em casos de sucesso de resolução dos problemas seria pertinente, num estudo futuro, ponderar sobre a suscetibilidade de generalização. A proposta de problemas com contexto real, envolvendo inequações, parece contribuir positivamente para a aprendizagem dos alunos, ao promover um envolvimento mais profundo.

Palavas chave: Resolução de problemas, Inequações do 1.º grau, matemática.

ABSTRACT

The present report is a result of a Master's Degree in Mathematics Teaching in Secondary Education and it aims to describe and reflect on the work done in the supervised teaching practice, in the school year 2021/2022, as well as the research conducted with some students of a 9th grade class that the student teacher has accompanied.

The first part of the report focus on the supervised teaching practice and includes a description and analysis of the pedagogical work developed during the school year. On one hand, the teaching practice, including observation, planning and classes teaching and, on the other hand, the non-teaching practice, including the dynamization of a diversified set of activities promoted out of the classroom, and attending meetings. This part of the report finishes with a reflection on teaching practice.

The second part of the report presents a study aiming to understand how the students react to problem solving, in a real-life context, while studying *Inequalities*. The students' approach to the problems was analysed based in their written reports and in their own explanations provided during a set of interviews.

The purpose underlying the establishment of this aim was to answer the following research questions:

1. How do the students explain the problems in real life and translate it in algebra?
2. Which steps do the students surpass during the problems solving?
3. How do the problems of the real life contribute to the understanding of inequalities?
4. What is the analysis that the students do between the acquired solution and the adequate answer to the problem?

The study followed a qualitative methodology based in three case studies. Data collection was based in observation, the documentary data collection and semi-structured interviews.

The conclusions of the study suggest that the students have skills to translate the problems algebraically. The steps to solve the problems followed are in line with the heuristic proposed by Pólya. It must be highlighted that the students analyzed and reflected on the solution obtained, and even in cases of successful problem solving it would be pertinent, in a future study, to consider the susceptibility of generalization. The proposal of problems with real context, involving inequalities, seems to contribute positively to the students' learning, by promoting a deeper involvement.

Keywords: Problem solving, 1st degree inequalities, Mathematics.

ÍNDICE

PARTE I - PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA	1
1 INTRODUÇÃO	1
2 PRÁTICA LETIVA	3
2.1 A turma principal - 9.º ano	3
2.1.1 Caracterização da turma.....	3
2.1.2 Aulas supervisionadas.....	4
2.1.3 Momentos de aula	9
2.2 A turma secundária - 11.º ano.....	10
2.2.1 Caracterização da turma.....	10
2.2.2 Aulas supervisionadas.....	10
2.2.3 Momentos de aula	12
3 PRÁTICA NÃO LETIVA	15
3.1 Atividades não letivas	15
3.1.1 Visita de estudo – São Roque.....	15
3.1.2 Teatro.....	15
3.2 Direção de turma e participação em reuniões.....	16
3.2.1 Direção de turma e Conselho de turma.....	16
3.2.2 Participação em reuniões.....	17
4 REFLEXÃO SOBRE A PRÁTICA DE ENSINO.....	19
PARTE II- PROJETO DE INVESTIGAÇÃO	21
1 INTRODUÇÃO	23
1.1 Motivações pessoais e pertinência do Estudo	23
1.2 Objetivos e Questões de Investigação.....	24

1.3	Organização do estudo	25
2	REVISÃO DA LITERATURA.....	27
2.1	matemática no quotidiano.....	27
2.2	Raciocínio matemático	28
2.3	Problemas	29
2.4	Resolução Problemas	32
2.5	Álgebra.....	34
3	METODOLOGIA	37
3.1	Investigação qualitativa.....	37
3.2	Estudo de caso	38
3.3	Técnicas de recolha de dados.....	38
3.3.1	Observação	39
3.3.2	Recolha documental.....	39
3.3.3	Entrevista	40
3.3.4	Tarefas	41
3.4	Escolha e caracterização dos participantes	43
3.5	Recolha e análise de dados.....	44
4	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS.....	45
4.1	Estudo de caso - Par 1 (Betânia e Dinis)	45
4.1.1	Caracterização do Par	45
4.1.2	Análise da Tarefa n.º1	45
4.1.3	Análise da Tarefa n.º2	48
4.1.4	Análise da Tarefa n.º3	51
4.1.5	Análise da Tarefa complementar	53
4.1.6	Análise final.....	55
4.2	Estudo de caso - Par 2 (Mara e Susana).....	56
4.2.1	Caracterização do Par	56
4.2.2	Análise da Tarefa n.º1	56
4.2.3	Análise da Tarefa n.º2	59

4.2.4	Análise da Tarefa n.º3	61
4.2.5	Análise da Tarefa complementar	61
4.2.6	Análise final.....	63
4.3	Estudo de caso - Par 3 (Rafaela e Leonor)	64
4.3.1	Caracterização do Par	64
4.3.2	Análise da Tarefa n.º1	64
4.3.3	Análise da Tarefa n.º2	65
4.3.4	Análise da Tarefa n.º3	68
4.3.5	Análise da Tarefa complementar	69
4.3.6	Análise final.....	71
5	CONCLUSÕES.....	73
5.1	Interpretação e tradução do problema	73
5.2	Etapas de resolução.....	73
5.3	Contribuição dos problemas da vida real para a compreensão das inequações	74
5.4	Análise entre solução e resposta ao problema	75
5.5	Considerações finais.....	75
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	77
	ANEXOS	81
	Anexo 1 - Tarefa das balanças	82
	Anexo 2 - Guião da Primeira Entrevista.....	83
	Anexo 3 - Guião da Segunda Entrevista	84
	Anexo 4 - Tarefa n.º1 (T1)	86
	Anexo 5 - Tarefa n.º2 (T2)	87
	Anexo 6 - Tarefa n.º3 (T3)	88
	Anexo 7 - Tarefa Complementar (TC)	89
	Anexo 8 - Planos de Aula 9.º ano - Álgebra.....	90
	Aula n.º1 (Lição nº 81) – Data: 08/02/2022 – 45 minutos	90
	Aula n.º2 (Lições nº 82 e 83) – Data: 09/02/2022 – 90 minutos.....	95
	Aula n.º3 (Lições nº 84 e 85) – Data: 10/02/2022 – 90 minutos.....	99

Aula n.º4 (Lições nº 87 e 88) – Data: 16/02/2022 – 90 minutos.....	101
Anexo 9 - Plano de Aula 9.º ano - Organização e tratamento de dados	104
Anexo 10 - Planos de Aula 11.ºano - Geometria Analítica no Plano	106

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1 — Foto dos alunos na Igreja de S. Roque.....	15
Figura 3.2 — Foto da peça “Auto da barca do inferno”.....	16
Figura 4.1 — Resolução do problema 1 - T1 pelo Par 1.....	46
Figura 4.2 — Resolução do problema 2 - T1 pelo Par 1.....	47
Figura 4.3 — Resolução do problema 3 - T1 pelo Par 1.....	48
Figura 4.4 — Resolução do problema 1 – T2 pelo Par 1.....	49
Figura 4.5 — Resolução do problema 2 – T2 pelo Par 1.....	50
Figura 4.6 — Resolução do problema 1 – T3 pelo Par 1.....	51
Figura 4.7 — Resolução do problema 2 – T3 pelo Par 1.....	52
Figura 4.8 — Resolução TC pelo Par 1.....	54
Figura 4.9 — Resolução do problema 2 – T1 pelo Par 2.....	57
Figura 4.10 — Resolução do problema 3 – T1 pelo Par 2.....	58
Figura 4.11 — Resolução do problema 1 – T2 pelo Par 2.....	59
Figura 4.12 — Primeira tentativa de resolução do problema 2 – T2 pelo Par 2.....	60
Figura 4.13 — Continuação da resolução do problema 2 – T2 pelo Par 2.....	60
Figura 4.14 — Resolução TC pelo Par 2.....	62
Figura 4.15 — Resolução do problema 2 – T1 pelo Par 3.....	65
Figura 4.16 — Resolução do problema 3 – T1 pelo Par 3.....	65
Figura 4.17 — Resolução do problema 1 – T2 pelo Par 3.....	66
Figura 4.18 — Primeira tentativa da resolução do problema 2 – T2 pelo Par 3.....	67
Figura 4.19 — Continuação da resolução do problema 2 – T2 pelo Par 3.....	67
Figura 4.20 — Resolução do problema 1 – T3 pelo Par 3.....	69
Figura 4.21 — Resolução do problema 2 – T3 pelo Par 3.....	69
Figura 4.22 — Resolução TC pelo Par 3.....	70

PARTE I - PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo centra-se na prática de ensino supervisionada, realizada durante o estágio pedagógico efetuado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa (FCT NOVA).

O estágio efetuado envolveu dois níveis de ensino, um no 3.º ciclo do Ensino Básico – 9.º ano de escolaridade – e outro no Ensino Secundário – 11.º ano de escolaridade, na área de matemática, numa escola da Grande Lisboa. A Parte I, de que este capítulo faz parte, tem como principal objetivo descrever, analisar e avaliar criticamente a atividade realizada pela professora estagiária ao longo do estágio pedagógico, decorrido no ano letivo 2021/2022. Esta atividade foi desenvolvida sob a supervisão da professora titular da turma do 9.º ano, com a co-supervisão da professora titular da turma do 11.º ano, tendo contado ainda com a orientação da Prof. Helena Rocha da FCT NOVA.

Costa e Oliveira (2020) reforçam a importância do estágio curricular, enquanto campo formativo e espaço de produção de conhecimentos, valorizando a participação ativa e reflexiva e assumindo-o como algo que não se resume a uma mera atividade prática instrumental. De facto, no processo de formação inicial de professores, é valorizado o desenvolvimento de saberes e conhecimentos necessários à profissão docente, ligados tanto a aspetos de cunho pedagógico, como por exemplo as abordagens metodológicas aos conceitos a ensinar, como aos aspetos de carácter científico, como por exemplo a compreensão do conteúdo a ser ensinado pelos futuros professores (Proença et al., 2021).

A matemática e o seu ensino são assumidos como desafiantes, uma vez que esta ciência é muitas vezes vista pelos alunos como pouco interessante ou muito difícil. Assim, a professora estagiária gostaria de se apropriar de uma prática que promova o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e os leve a olhar para esta disciplina com mais entusiasmo e consciência da sua amplitude. Além disso, é sua convicção que, ao refletir acerca dos processos de raciocínio dos alunos poderá compreender melhor as suas dificuldades e a compreensão que fazem de uma determinada situação, contexto ou conceito (Rocha, 2020; Trevisan & Araman, 2021).

A parte I deste relatório é desenvolvida ao longo de vários capítulos, sendo o primeiro a presente introdução, onde se pretende apresentar a estrutura do mesmo. O capítulo dois faz uma explicação da intervenção referente à prática letiva nas turmas envolvidas, a respetiva caracterização, a descrição das aulas assistidas e lecionadas, assim como momentos de aulas ocorridos. O terceiro capítulo foi desenvolvido para uma contextualização da prática não letiva em que

fosse claramente explicado o trabalho colaborativo associado à docência. Por fim, o capítulo quatro, é dedicado à reflexão crítica da autora relativamente à prática pedagógica experienciada.

2 PRÁTICA LETIVA

Este capítulo apresenta as características das turmas acompanhadas pela professora estagiária, a descrição e aspetos relevantes para melhoramentos das aulas lecionadas, durante o ano letivo 2021/2022.

No início deste percurso, foram atribuídas duas turmas, com professoras cooperantes diferentes para cada ciclo. As turmas atribuídas à professora estagiária foram: uma, do ensino básico - 9.º ano - definida como turma principal e a outra, do ensino secundário - 11.º ano - definida como turma secundária. A professora estagiária desenvolveu a maior parte do trabalho de estágio na turma principal, assistiu praticamente a todas as aulas, colaborou com a Direção de Turma, participou nas reuniões de Conselho de Turma e de Encarregados de Educação. Sendo, também, a turma onde seria implementado o projeto de investigação (apresentado na Parte II). Na turma secundária assistiu a 50% das aulas - separadas por temas - e participou em atividades com a turma. Em ambas as turmas, a professora estagiária lecionou algumas aulas com a orientação e supervisão das professoras cooperantes e aulas esporádicas onde a orientação e supervisão foi exclusivamente da professora titular da turma. No final de cada aula da responsabilidade da professora estagiária foram realizadas reuniões com todos os presentes, – professoras cooperantes, colegas estagiárias pertencentes ao núcleo de estágio e professora orientadora da faculdade - onde cada uma analisava vários pontos relevantes para a prática docente – opções tomadas, postura, utilização de recursos, conteúdos lecionados, tempo utilizado, confiança, colocação de voz, etc. Estes comentários foram necessários para um melhor desempenho e aprendizagem de todos, tendo servido como suporte às reflexões apresentadas pela professora estagiária.

2.1 A turma principal - 9.º ano

2.1.1 Caracterização da turma

Inicialmente a turma era constituída por 27 alunos – 11 rapazes e 16 raparigas – tendo sido integrados três novos alunos relativamente ao ano anterior, provenientes de outros agrupamentos de escolas. A média de idades era de 14 anos e não apresentava repetentes. Existiam quatro alunos com ação social escolar - ASE - e uma aluna com necessidades educativas especiais – NEE. A constituição da turma sofreu alterações antes do início do 1.º período, uma aluna foi transferida, saindo da turma, e no início do 2.º período foi integrada uma nova aluna.

A professora titular era a diretora de turma, já desde o ano transato, e revelou, na primeira reunião de conselho de turma, que os alunos eram muito faladores e imaturos, vindo este facto a confirmar-se no decorrer das aulas do presente ano letivo e a ser partilhado pelos professores da turma nas reuniões de conselho de turma seguintes. Alguns alunos tinham por hábito não registar os conteúdos no seu caderno diário da disciplina, tendo tempo disponível para conversas entre eles, e destabilizando o normal decorrer das aulas. Ao longo do ano, em momentos pontuais surgiram algumas faltas de respeito para com os professores, em sala de aula, e em reuniões de Encarregados de Educação, por parte dos Pais.

2.1.2 Aulas supervisionadas

Nesta turma a professora estagiária lecionou oito tempos letivos, de quarenta e cinco minutos cada, sob a supervisão da professora cooperante do estágio - da turma principal – e ainda assistidas pelos restantes elementos já referidos. O subtema escolhido para estas aulas foi selecionado, no início do ano letivo, de acordo com as preferências da professora estagiária, e desenrolou-se ao longo do número de aulas e segundo a planificação elaborada pela coordenação do 9.º ano. Este subtema - Inequações - está inserido no tema "Álgebra". Os conteúdos lecionados seguiram as indicações das "Aprendizagens Essenciais" e ocorreram, maioritariamente, no espaço temporal de 08/02/2022 a 16/02/2022 - 2.º Período. Sendo que uma última aula ocorreu no dia 31/05/2022 – 3.º Período – em que foi lecionado o tópico “Dados agrupados em classes” – inserido no tema “Organização e Tratamento de Dados”- supervisionada e assistida como referido anteriormente.

A sala de aula atribuída à turma tinha péssimas condições, condicionando todas as opções metodológicas tomadas ao longo do ano. Apresentava-se rodeada de várias janelas, o que originava bastantes reflexos de luz no quadro e impossibilitava a correta visualização dos alunos, principalmente os sentados nos lugares mais distantes – ao fundo da sala. O quadro era pequeno, antigo, de ardósia, apresentava bastantes sinais de uso e degradação - lascas – dificultando uma escrita legível. Para além disso, quando era necessária a utilização da tela para projeção, esta cobria a maioria do quadro, deixando apenas disponíveis para a escrita pequenos espaços, nas laterais do ecrã.

2.1.2.1 Aula n.º 1

A primeira aula lecionada pela professora estagiária ocorreu no dia 8 de fevereiro e teve a duração de quarenta e cinco minutos - um tempo letivo. Iniciou-se com a projeção de uma tarefa bastante simples - designada "Tarefa das balanças" - onde se esperava que os alunos não apresentassem dificuldades na resolução e que, por indução, aplicassem os seus conhecimentos

de equações, e conseguissem verificar, por eles próprios, as diferenças entre equações e inequações.

A professora estagiária deu um tempo para os alunos resolverem a tarefa no caderno, após o que resolveu as alíneas, no quadro, com a participação dos alunos. Enquanto resolvia foi colocando questões sobre conteúdos já abordados, como as equações, os termos, as desigualdades, etc., direcionando-os para os objetivos de aprendizagem pretendidos. Com o decorrer da aula e do modo como foi executada, os alunos conseguiram compreender a ligação existente entre os vários conteúdos, assim como a noção de inequação, a solução de inequações e a sua representação, os membros e a tradução de um problema numa expressão matemática.

Reflexão sobre a aula

A aula correu como esperado e planificado, dentro do tempo previsto, e onde todos os alunos participaram ordeiramente, apresentando-se calmos e atentos, aspeto importante e difícil nesta turma, dado as suas características comportamentais.

Verifiquei que os alunos conseguiram compreender a ligação existente entre os vários conteúdos assim como a noção de inequação e a sua representação, os membros e a tradução de um problema numa expressão matemática.

A tarefa projetada tinha, no seu início, figuras ilustrativas, para auxiliarem na sua resolução, e posteriormente as alíneas. Dadas as condições da sala constatei a impossibilidade de projetar a tarefa integralmente de uma só vez, tendo sido necessários movimentos, de cima para baixo, para ir sucessivamente apresentando as diferentes partes da tarefa. Verifiquei que com o pouco espaço do quadro restante nas laterais da projeção não era possível a reprodução das figuras ilustrativas da tarefa. A minha intenção seria a de utilizar as tecnologias existentes coadunadas com o quadro para um ensino mais dinâmico e proativo, no entanto não foi possível fazê-lo.

Para futuras aulas a lecionar devo ter em atenção os seguintes aspetos:

- Imprimir a tarefa e distribuí-la pelos alunos em vez de a projetar – embora a decisão da projeção tenha sido de acordo com as diretrizes do agrupamento relativamente à sustentabilidade do meio ambiente.
- Considerar o tamanho do quadro que resta durante o uso da tela para a projeção.
- Ter em conta a qualidade do quadro.

2.1.2.2 Aula n.º 2

A segunda aula lecionada pela professora estagiária ocorreu no dia 9 de fevereiro e teve a duração de noventa minutos - um bloco. Iniciou-se com a correção dos trabalhos de casa enviados na aula anterior - exercícios do manual adotado. Nesta etapa, a professora estagiária,

com a ajuda dos alunos, recordou os passos para se resolver uma equação relacionando-os com os passos de resolução de uma inequação onde estão presentes as monotonias da adição e parcial da multiplicação inseridas na relação de ordem - já estudadas - assim como as representações do conjunto solução - presentes na representação de intervalos de números reais, também já trabalhados.

Nos últimos vinte e cinco minutos da aula foi implementada uma tarefa - T1-, impressa para colmatar as dificuldades apresentadas na tarefa da aula anterior, onde os alunos trabalharam a pares, com três problemas do quotidiano bastante simples e com um grau crescente de dificuldade. Esta tarefa teve como objetivo a recolha de dados para o projeto de investigação que a professora estagiária desenvolveu. Neste processo, os alunos registaram, em papel, a resolução dos problemas e gravaram áudios com as discussões sobre as suas resoluções. No final da aula os respetivos áudios foram enviados para a professora estagiária através da plataforma *classroom* e entregues as resoluções escritas.

Reflexão sobre a aula

A aula não correu como esperado e planificado visto que o processo de recolha de áudios e o envio dos mesmos foi um pretexto para a destabilização que se gerou no final da aula provocando a falta de tempo para a discussão da tarefa.

Apesar de se considerar as tecnologias como ferramentas que facilitam a aprendizagem, percebi que deverei ter em conta o caso individual de cada turma. Embora tenha evoluído face à primeira aula – optei por levar impressa a tarefa e ter a escrita no quadro facilitada - o registo da resolução dos problemas e a gravação de áudios com as discussões durante a resolução provocou uma desestabilização que não permitiu que se cumprisse tudo o que estava previsto. É certo que deverei manter-me preparada para situações destas, porque nem tudo corre como está planificado, mas urge que tenha em consideração, depois de conhecer melhor as turmas, métodos mais adequados para cada uma.

No final desta aula, comecei a aperceber-me que a implementação das tarefas, e especificamente a recolha de dados para o projeto de investigação durante a aula, possivelmente não seria a melhor opção, mas decidi continuar com o planificado na esperança que melhorasse no decorrer das aulas seguintes.

Devo alterar o processo em aulas futuras nos seguintes aspetos:

- Recordar, de modo mais exaustivo, a monotonia parcial da multiplicação relativamente ao coeficiente da incógnita ser negativo e quais as consequências no sinal de desigualdade nas inequações, não obstante a sua referência no decorrer da resolução dos exercícios nesta aula.
- Ter em consideração os trabalhos realizados em turmas com as mesmas características que esta, pois o tempo destinado a eles não deverá ser ultrapassado e porque poderá criar uma

agitação difícil de controlar por professores com pouca experiência, como a professora estagiária.

- Ter atenção ao subterfúgio de observação das planificações e resoluções em papel.

2.1.2.3 Aula n.º 3

A terceira aula lecionada pela professora estagiária ocorreu no dia 10 de fevereiro e teve a duração de noventa minutos - um bloco. Iniciou-se com a apresentação de exemplos relacionados com a monotonia parcial da multiplicação quando o coeficiente da incógnita é negativo e que implicação tem no sinal de desigualdade - sendo um ponto necessário de repetição para a consolidação das aprendizagens. Seguiu-se a discussão da tarefa realizada na aula anterior - Tarefa n.º 1 (T1) - onde se pretendia compreender se os alunos conseguiam resolver os problemas usando inequações com base nos conteúdos abordados na aula n.º 1.

A vinte e cinco minutos do final da aula foi implementada uma nova tarefa - T2 - onde se pretendia que os alunos resolvessem dois problemas com um grau de dificuldade mais elevado do que os problemas da T1. Os alunos trabalharam a pares, resolveram os problemas no enunciado da tarefa e registaram as suas discussões em gravação áudio. Estes registos foram entregues à professora estagiária no final da aula, em mão no caso das tarefas em papel e pela plataforma *classroom* relativamente aos áudios.

Reflexão sobre a aula

A aula decorreu como esperado e planificado, embora as tarefas realizadas, que integravam o projeto de investigação, tenham ocupado demasiado tempo da aula e provocado agitação na generalidade da turma.

Apesar do que aconteceu com a gravação dos áudios na aula anterior, decidi manter a estratégia e pedir aos alunos que enviassem para a plataforma *classroom* os áudios com a resolução dos problemas.

Após os comentários das assistentes da aula anterior – professoras e colega de núcleo de estágio –, tentei, sem sucesso, não utilizar as minhas anotações em demasia. Esta minha atitude deveu-se ao facto de desejar que cada passo fosse de acordo com a planificação e necessitar de me certificar que estava tudo correto.

A professora estagiária devia ter em atenção, para melhorar em aulas futuras, os seguintes aspetos:

- Ter atenção ao subterfúgio de observação das planificações e resoluções em papel.

2.1.2.4 Aula n.º 4

A quarta aula lecionada pela professora estagiária ocorreu no dia 16 de fevereiro e teve a duração de noventa minutos - um bloco. No início desta aula, a professora estagiária retomou

a resolução do último problema da aula anterior e relacionou as diferentes representações de conjunção. Explicou a associação de *conjunção* na representação matemática com a oralidade de *e*, assim como a sua associação à *interseção* de conjuntos. De igual modo, associou a *disjunção* com *ou* e com a *reunião* de conjuntos.

No ponto seguinte da planificação, constavam a resolução de dois exercícios, de conteúdos já lecionados, que ocuparam todo o tempo de aula até à resolução de uma terceira tarefa para o projeto de investigação – T3. A T3 foi entregue a trinta minutos do final da aula e, entretanto, a professora estagiária recordou, com a participação dos alunos, os passos de resolução de problemas. A aula terminou com a entrega, pelos alunos, da resolução das tarefas em papel e com o envio dos áudio das discussões dos pares.

Reflexão sobre a aula

A aula não correu como consta na sua planificação. O tempo previsto para a resolução do primeiro exercício foi ultrapassado e não houve a capacidade de recuperação para se resolverem exercícios sobre os conteúdos lecionados no início da aula. Dois exercícios foram sugeridos, pela professora titular desta turma, para serem acrescentados na planificação. Não estabeleci convenientemente o número de alíneas, deste exercício, a serem resolvidas - onde me repeti, por sentir que os alunos não estavam a compreender a diferença entre conjunção, disjunção e a associação destas com a reunião e interseção de conjuntos. No segundo exercício proposto consegui resolver apenas duas alíneas, na tentativa de ter algum tempo para a resolução dos exercícios e problemas planificados, mas sem sucesso.

Assim, tirei vários ensinamentos desta aula: os percalços permitem aprender e refletir para a mudança. Apesar de nas aulas anteriores já ter acontecido não se cumprir a planificação, nesta aula percebi que tenho de definir de forma concreta o número de exercícios a resolver, bem como o tempo para cada um. Embora possam surgir dúvidas e não se siga de forma linear o planeado, ficou claro que ainda tenho de controlar melhor o tempo e desenvolver confiança para não ocorrerem erros. E ainda confirmei que as tarefas para o projeto de investigação desajavelmente não deviam ser implementadas durante as aulas, pois não consegui praticar com os alunos os conteúdos acabados de lecionar e presentes nessas tarefas.

Deste modo, tenho que melhorar os seguintes aspetos:

- Estabelecer convenientemente o número de exercícios e alíneas para o tempo de aula.
- Ter confiança para resolver os exercícios, no quadro, sem verificar as suas resoluções nas planificações.

2.1.2.5 Aula n.º 5

A quinta e última aula lecionada pela professora estagiária ocorreu no dia 31 de maio – última semana para o término do ano letivo - e teve a duração de quarenta e cinco minutos - um tempo letivo. A aula iniciou-se com a projeção de um *PowerPoint* com um exemplo sobre “dados agrupados em classes”. Pretendia-se que os alunos recordassem os intervalos de números reais e as frequências absolutas, e compreendessem os dados agrupados em classes, qual o método para os agrupar, o cálculo das amplitudes das classes e o número de classes considerado adequado.

Nesta fase da aula, os alunos apresentaram-se calmos, silenciosos e atentos. Posteriormente foram solicitadas a resolução de três tarefas do manual adotado e resolvidas no quadro pelos alunos. Durante a resolução das tarefas, os alunos apresentaram-se mais agitados e desinteressados, possivelmente por ser a última semana de aulas para o término do ano letivo.

Reflexão sobre a aula

A aula correu como planificada e dentro do tempo previsto. A tecnologia utilizada foi adequada embora ficando na dúvida se em outro momento do ano letivo, esta seria uma estratégia a implementar numa turma do 3.º ciclo. A matéria não foi apresentada exclusivamente no *PowerPoint* mas complementada verbalmente salientando exemplos e questões colocadas na aplicação desta matéria. Decidi utilizar esta estratégia para ultrapassar as dificuldades do quadro e para analisar, como experiência, o comportamento e aprendizagens dos alunos.

Verifiquei que ainda devo melhorar os seguintes aspetos:

- Esclarecer para toda a turma questões ou dúvidas apresentadas por um aluno.
- Ser mais assertiva na chamada de atenção para o barulho, para a agitação e para o trabalho solicitado aos alunos.

2.1.3 Momentos de aula

A professora estagiária participou na maioria das aulas de um modo colaborativo, não se limitando à observação das mesmas, mas participando ativamente nas questões apresentadas pelos alunos nos momentos práticos de aula. Nos momentos teóricos, a professora estagiária sentou-se num lugar estrategicamente estudado para um apoio individual a uma aluna com bastantes dificuldades de aprendizagem.

2.2 A turma secundária - 11.º ano

2.2.1 Caracterização da turma

A turma era constituída por 27 alunos, 10 rapazes e 17 raparigas. Os alunos eram educados e calmos, alguns apresentavam dificuldades. Era uma turma a que a professora titular estava a dar continuidade e por isso as características de cada aluno já eram do seu conhecimento.

No decorrer do ano, os alunos mantiveram uma postura calma, respeitadora e com bom comportamento. Observou-se que existiam dois tipos de alunos, os que tinham interesse na disciplina, que eram participativos e empenhados, e os que, embora esforçados, apresentavam grandes lacunas no acompanhamento dos conteúdos exigidos ao nível do ensino secundário devido à falta de estudo e de trabalho continuado.

2.2.2 Aulas supervisionadas

Nesta turma a professora estagiária lecionou duas aulas, sob a supervisão das professoras orientadoras de estágio - da turma principal e da turma secundária - assim como assistidas por uma das colegas do núcleo de estágio. O subtema escolhido para estas aulas foi selecionado, no início do ano letivo, de acordo com a planificação da professora titular da turma e com a preferência da professora estagiária. Este subtema - Declive e inclinação de uma reta, Produto escalar - está inserido no tema "Geometria Analítica no Plano". Os conteúdos lecionados seguiram os pontos das "Aprendizagens Essenciais" e ocorreram nos dias 11/11/2021 e 15/11/2021 - 1.º Período.

A sala atribuída a esta turma era bastante grande dificultando a concentração dos alunos e a projeção de voz da professora. Tinha um quadro pequeno de ardósia, onde se notavam reflexos de luz das janelas envolventes e quando necessária a utilização da tela de projeção este ficava sem qualquer espaço para a escrita.

2.2.2.1 Aulas n.º 1

A primeira aula lecionada pela professora estagiária ocorreu no dia 11 de novembro e teve a duração de noventa minutos - um bloco. Iniciou-se com a revisão do conceito de declive de uma reta - designado por m - e de formas como se pode reconhecê-lo: através da equação reduzida da reta; quando fornecido o vetor diretor de uma reta; quando indicados dois pontos pertencentes a uma reta. Posteriormente foi feita a revisão sobre o conceito de inclinação de uma reta - designada por α - e o conceito de ângulo convexo, assim como a inclinação de uma reta no eixo das abcissas e de retas paralelas. Verificou-se a ligação entre o declive e a inclinação de uma reta usando exemplos do manual, com base nos quais se concluiu que $m = \operatorname{tg} \alpha$.

Para uma demonstração visual apresentou-se o simulador “O declive de uma reta não vertical é a tangente da sua inclinação” e resolveram-se exercícios para recordar estes conceitos.

Após a resolução dos exercícios iniciou-se a revisão do conceito da soma de dois vetores, que tem como resultado um vetor, seguiu-se a explicação de que o produto escalar de dois vetores tem como resultado um número - um escalar - e indicou-se a sua representação. Fez-se a explicação de projeção ortogonal e concluiu-se a definição de produto escalar - com projeção ortogonal e norma.

Reflexão sobre a aula

A aula não correu como esperado e planificado, os alunos foram bastante participativos embora tenha existido um momento de agitação no corredor, no exterior da sala de aula, provocando perturbação do decorrer normal da aula. Após este incidente prossegui com a aula, tendo acelerado o ritmo com o objetivo de cumprir a planificação.

Senti algum desconforto e falta de confiança na utilização das tecnologias devido ao facto de que a sua preparação foi mais morosa do que a apresentação.

Para futuras aulas a lecionar, devo ter em atenção os seguintes aspetos:

- Falar pausadamente e lecionar detalhadamente os conteúdos conforme planificado.
- Planificar a utilização das tecnologias – projetor – para situações com maior durabilidade de exposição.
- Ter atenção à planificação e à duração da aula.
- Ter mais confiança nas resoluções que apresento durante a aula e não consultar com tanta frequência as resoluções no papel.

2.2.2.2 Aula n.º 2

A aula, decorreu no dia 15 de novembro e o seu início atrasou-se devido à permanência da Diretora de Turma na sala de aula para alteração da planta da sala, provocando agitação nos alunos. Após este contratempo, a professora estagiária fez uma revisão da definição de produto escalar - $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AC}\| \times \overline{AB'}$, sendo $\overline{AB'}$ o comprimento da projeção de $\vec{AB}$ - lecionada na aula anterior. Explicou a identificação do $\Delta[ABB']$ e que $\alpha = \widehat{BAB'}$ (onde $\alpha < 90^\circ$) e relacionou com a trigonometria

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB'} = \overline{AB} \times \cos \alpha \Leftrightarrow \overline{AB'} = \|\vec{AB}\| \times \cos \alpha$$

obtendo a expressão equivalente à já referida

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AC}\| \times \overline{AB'} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AC}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos \alpha.$$

De seguida, discutiu-se a equivalência de ambas as definições:

$\overline{AB'} = \overline{AB'}$	$\overline{AB'} = -\overline{B'A}$	$\overline{AB'} = 0$	
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \ \overrightarrow{AC}\ \times \overline{AB'}$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\ \overrightarrow{AC}\ \times \overline{B'A}$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$	
$\alpha < 90^\circ \text{ logo } \cos \alpha > 0 \text{ e}$ $\overline{AB'} = \ \overrightarrow{AB}\ \times \cos \alpha$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ \text{ logo } \cos \alpha < 0$	$\alpha = 90^\circ \text{ logo } \cos 90^\circ = 0$	
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \ \overrightarrow{AC}\ \times \ \overrightarrow{AB}\ \times \cos \alpha$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\ \overrightarrow{AC}\ \times \ \overrightarrow{AB}\ $	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$	

E por fim resolveu-se um exercício do manual, no quadro, onde dois alunos apresentaram resoluções distintas – definições equivalentes supra apresentadas.

Reflexão sobre a aula

A aula desenrolou-se como esperado e planificado. Houve uma tentativa de melhoria em aspetos mencionados na aula anterior - consulta da planificação, bem como na consulta das resoluções no papel, etc. No entanto, saliento que a confiança será o maior ponto a ser trabalhado futuramente, assim como resolver os exercícios antecipadamente por vários métodos.

As melhorias a desenvolver em aulas futuras são:

- Considerar as várias opções de resolução dos exercícios.

2.2.3 Momentos de aula

A professora estagiária lecionou alguns momentos, em aulas anteriores às aulas supervisionadas, no sentido de criar uma ligação aos alunos. Participou em cinquenta por cento das aulas de um modo colaborativo, não se resumindo à observação das mesmas, mas participando ativamente nas questões apresentadas pelos alunos nos momentos de trabalho autónomo dos alunos, assim como na recolha de informações de avaliação individual dos alunos. No final de cada aula, o núcleo de estágio, fazia uma breve reunião para a partilha de ideias e opiniões sobre o decorrer da aula assim como das informações de avaliação nesses momentos. Quando a lecionação estava a cargo da professora titular e o trabalho era em plenário com toda a turma, a professora estagiária permanecia no fundo da sala para um rápido suporte, caso necessário, à professora titular.

3 PRÁTICA NÃO LETIVA

Este capítulo descreve as atividades que foram realizadas e acompanhadas pela professora estagiária, durante o ano letivo 2021/2022, em turmas pertencentes à escola onde decorreu o estágio.

A professora estagiária colaborou com a Direção de Turma, participou em reuniões de Conselho de Turma, de Encarregados de Educação, de Núcleos de Estágio e ainda de Departamento, Grupo disciplinar, Coordenação de ciclo, Coordenação de ano - 9.º ano, reunião Geral de Professores, de Diretores de Turma e nas Jornadas de Reflexão Pedagógica.

3.1 Atividades não letivas

3.1.1 Visita de estudo – São Roque

A professora estagiária acompanhou a turma do 11.º ano numa visita de estudo à igreja e ao Museu de São Roque no âmbito da disciplina de português.

Figura 3.1 — Foto dos alunos na Igreja de S. Roque



3.1.2 Teatro

A escola recebeu um grupo de teatro, com a peça "Auto da Barca do Inferno", à qual a professora estagiária assistiu, como trabalho colaborativo para a docência, com a turma principal - 9.º ano. Esta atividade foi organizada pelo grupo de Português, para todas as turmas do 9.º ano de escolaridade, e foi acompanhada pelos respetivos Diretores de Turma.

Figura 3.2 — Foto da peça “Auto da barca do inferno”



3.2 Direção de turma e participação em reuniões

3.2.1 Direção de turma e Conselho de turma

No âmbito do estágio pedagógico está previsto que sejam realizadas tarefas próprias de Direção de Turma. A professora titular da turma, com um grande conhecimento deste cargo, permaneceu como Diretora desta turma do 9.º ano, desde o ano transato. Assim sendo, direcionou a professora estagiária para este trabalho. Esclareceu o funcionamento das plataformas utilizadas pela escola - *Inovar*, *Teams* - destinada a algumas reuniões e partilha de documentação entre professores - e *Classroom* - para a distribuição e recolha de tarefas entre professor e alunos da turma. Explicou o seu papel na relação entre a escola e os Encarregados de Educação e a documentação relativa aos alunos com necessidades educativas especiais - *NEE*.

A nível nacional, no horário do Diretor de Turma, está determinada a existência de uma hora semanal para o atendimento aos encarregados de educação. Na escola em questão, também está estipulada uma hora – igualmente semanal - para tratamento de documentação e assuntos relacionados com o trabalho de Diretor de Turma com os alunos em sala de aula - *DT.AL* (Diretor de Turma e Alunos em Sala de Aula) – serve para o desenvolvimento de projetos e sessões plenárias sobre assuntos propostos pelos alunos. Para terminar este ponto, referir que a professora estagiária para além de comparecer nos *DT.AL* esporadicamente, também compareceu e participou em todas as reuniões de Conselho de Turma e em reuniões com os Encarregados de Educação. Presenças importantes para se compreender como se devem conduzir reuniões de determinado tipo e quais as informações que devem ser partilhadas e discutidas.

3.2.2 Participação em reuniões

Ao longo do ano letivo, a professora estagiária teve a oportunidade de participar em: uma Jornada de Reflexão Pedagógica onde foi abordado o plano de ação para o desenvolvimento digital do agrupamento; uma Reunião Geral de Professores; uma Reunião de Diretores de Turma do 3.º ciclo; duas reuniões de Departamento e de Grupo disciplinar onde foram discutidos vários temas abordados em Conselho Pedagógico; e duas reuniões de Coordenação do 9.º ano, onde foram discutidas as planificações anuais. Deste modo, a professora estagiária, tomou conhecimento das vastas atividades inerentes à docência e teve contato com pontos de vista distintos através dos professores de todo o agrupamento.

Semanalmente participou nas reuniões do núcleo de estágio onde se desenvolveram as planificações das atividades de aprendizagem, as classificações de testes de acordo com os critérios de classificação e onde ainda ocorreu a partilha das reflexões individuais relativamente às aulas lecionadas e assistidas com as colegas do núcleo de estágio, visando a melhoria do desempenho e aprendizagem das professoras estagiárias.

4 REFLEXÃO SOBRE A PRÁTICA DE ENSINO

A experiência do estágio pedagógico confirmou o meu gosto particular pelo ensino. Tornou evidente a minha constante necessidade de aprendizagem de conteúdos e métodos de ensino, assim como as relações interpessoais.

Durante alguns anos, fui professora no 3.º ciclo do ensino básico, no ensino secundário e profissional e desempenhei as várias tarefas inerentes à prática profissional, exceto a de diretora de turma. Nesta escola, onde estagiei, encontrei professores com quem trabalhei diretamente, em outras escolas, e revelou-me que o relacionamento interpessoal é, também, um aspeto bastante importante nesta profissão. Mostrou-me que esta ligação, não exclusivamente entre colegas – professores-, mas com funcionários e essencialmente com os alunos é uma mais-valia. Esta consciencialização deveu-se ao trabalho realizado pelas professoras cooperantes, que me motivou para experienciar de forma mais próxima aquilo que entendia por boas práticas docentes.

Realizar esta intervenção e o desenvolvimento de todo o trabalho deu-me particular satisfação. Fez-me compreender as lacunas existentes na minha não profissionalização, na minha postura e nas estratégias adaptativas necessárias para a aplicação de estratégias e materiais diferenciados. Isto só foi possível devido à enorme disponibilidade das professoras cooperantes, às suas indicações e à possibilidade de me permitirem assistir a todas as aulas, reuniões e formações que eu achasse necessárias.

Inicialmente encontrava-me preocupada com o desenvolvimento do processo da intervenção, mas a organização de cada uma das suas fases foi fazendo crescer em mim segurança e motivação adicionais. Uma das vantagens que tive foi o modo como a planificação foi organizada. Tal permitiu-me avançar cuidadosamente e preparar a lecionação das aulas de forma a minimizar constrangimentos. Tive a oportunidade de conhecer os alunos, estabelecermos uma boa relação, o que se traduziu na criação de um ambiente de trabalho.

As duas turmas com que interagi eram bastante distintas, pelas idades, pelo nível de ensino e pelo que estes pontos refletem no comportamento. Os alunos do 9.º ano, com atitudes pouco corretas, quer no que respeita ao seu desempenho escolar quer ao comportamento em sala de aula, revelaram-se sobretudo jovens com muitas capacidades, mas com dificuldades em mostrá-las. A professora cooperante, demonstrou como implementar regras em alunos com comportamento incorreto, as quais adotarei no futuro, como professora. Os alunos do 11.º ano,

calmos e alguns interessados e participativos, fizeram com que houvesse um equilíbrio emocional durante o ano de estágio. Em ambas as turmas existiam alunos interessados e desinteressados, no entanto, as suas posturas eram distintas. Os mais novos destabilizavam as aulas e os mais velhos, muito discretamente, ficavam no “seu mundo” sem as perturbarem. As diferenças das turmas foram bastante importantes no decorrer do estágio, pelo facto de ter a possibilidade de presenciar e aprender as diferentes estratégias de ensino consoante as características de cada turma e método de ensino de cada professora cooperante. Estas características fizeram com que as planificações das aulas que lecionei fossem diferentes, com muito detalhe, das quais me devo apropriar. Apesar de ter alguma experiência na lecionação de aulas, a assistência e avaliação das professoras cooperantes às mesmas fez com que o decorrer das aulas não fosse como eu as tinha planeado. A ansiedade aumentou consideravelmente, provocando uma luta interior constante no decorrer das aulas supervisionadas - um trabalho moroso e não presente no dia-a-dia como professora. Também o facto de ser simultaneamente professora e investigadora traduziu-se num momento importante de aprendizagem, e num grande obstáculo ultrapassado para a minha realização pessoal.

Relativamente ao trabalho de direção de turma, tomei conhecimento da burocracia existente e desnecessária, assim como a capacidade de superação a nível de paciência e tolerância relativamente a todos os envolvidos, particularmente aos Encarregados de Educação. De acordo com este caso particular, a transparência do comportamento, postura e avaliação dos educandos e do que é compreendido pelos Educadores.

Embora a minha turma principal tivesse características especiais, fiquei surpresa e agradecida pela disponibilidade dos alunos e dos Encarregados de Educação na participação no projeto de investigação. Mostraram-se prestáveis e disponíveis para o estudo, mesmo nos momentos de pausa letiva. É de louvar que os Encarregados de Educação de 26 alunos, de uma turma de 27, tenham autorizado a participação dos seus educandos neste projeto.

Globalmente, este ano letivo como estagiária e as minhas características pessoais de constante aprendizagem fizeram com que crescesse a nível pessoal e profissional. Algo que pretendo implementar no meu futuro profissional, com sabedoria para ensinar, com humildade para continuar a aprender e com a transmissão de alegria.

PARTE II- PROJETO DE INVESTIGAÇÃO

1 INTRODUÇÃO

A presente investigação envolveu alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade pertencente a um agrupamento de escolas da Grande Lisboa.

1.1 Motivações pessoais e pertinência do estudo

Desde criança que me foi incutida a ideia de que a matemática estava presente em toda a parte: nas brincadeiras e jogos, no estudo das mudanças de disposição dos móveis na decoração de uma divisão da casa, na gestão das finanças, nas compras do supermercado, assim como nas horas extraordinárias que os meus pais trabalhavam. Esta abertura e explicação constante fizeram-me compreender e gostar da disciplina. Não percebia o descontentamento e desinteresse dos meus amigos e colegas pela matemática. Assim, surgiu a ideia de compreender o interesse e aprendizagem dos alunos relativamente a problemas em contexto real.

Vários estudos já realizados abordam a ligação da matemática com a realidade, assim como a ligação do quotidiano com a aprendizagem dos alunos da disciplina (Canavarro, 2017). Neste sentido, Kilpatrick (2010) refere que se houver uma aplicação de problemas divertidos e contemporâneos, os alunos motivam-se e aprendem a gostar de matemática. Pólya (2003) salienta que se o ensino continuar a ser baseado em regras - sem contexto - os alunos não compreendem a aplicabilidade da matemática, e tal provoca descontentamento e desinteresse pela disciplina.

Os dados em torno da matemática, em Portugal, evidenciam que esta é a disciplina que os alunos apontam como sendo a mais difícil: de acordo com o Despacho n.º 12530/2018 da Direção-Geral da Educação sobre o ensino da matemática, entre o conjunto de disciplinas do ensino secundário, esta é considerada a mais difícil de todas. No que diz respeito ao ano letivo 2017/2018, quando os alunos foram questionados sobre as disciplinas em que tiveram mais dificuldades, a matemática foi mencionada por 41,8% dos alunos dos cursos científico-humanísticos e por 31,4% daqueles que estavam em curso profissionais (Reis, 2019).

Este estudo foca-se na compreensão e aprendizagem das inequações, pelos alunos, em contexto de resolução de problemas do quotidiano. Acredita-se que tal assume pertinência face aos resultados baixos e aos números do insucesso que se vão verificando relativamente à aprendizagem sobre inequações, o que acaba por comprovar as dificuldades sentidas pelos alunos, tal como apontado por Reis (2019).

O ensino da matemática tem como principal objetivo promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, “o que justifica o importante papel da matemática em todos os sistemas

educativos” (Ponte et al., 2012, p. 2) e a importância das tarefas promotoras do raciocínio matemático.

O raciocínio, a par da comunicação e da resolução de problemas, é uma competência transversal comum a vários documentos curriculares, quer antigos quer em vigor. De acordo com o Programa e Metas Curriculares, a estruturação do pensamento e, consequentemente, o desenvolvimento do raciocínio matemático é uma das finalidades do ensino da matemática (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2013). O raciocínio é ainda considerado no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória como uma importante área de competência a ser desenvolvida e um dos objetivos essenciais de aprendizagem, de acordo com as Aprendizagens Essenciais (Martins et al., 2017).

É, assim, inegável que o raciocínio tem um papel fundamental na aprendizagem dos alunos, já que, partindo de conhecimentos prévios e através de um processo evolutivo, alcançam novo conhecimento (Ponte et al., 2012).

1.2 Objetivos e questões de investigação

O principal objetivo desta investigação consiste em procurar compreender o raciocínio dos alunos relativamente à resolução de problemas em contexto da vida real e a sua aprendizagem de inequações.

Para que seja possível esta compreensão, seguiu-se a heurística de Pólya na observação e análise de todos os procedimentos realizados pelos alunos: se compreenderam o problema, se o equacionaram, como o resolveram e discutiram a sua solução. A compreensão do problema prende-se com reconhecer os dados relevantes do enunciado e identificar a incógnita. De seguida, é necessário equacionar o problema, transformando a linguagem verbal em linguagem algébrica, para, posteriormente, o resolver. Por fim, há que discutir o resultado obtido, isto é, relacionar a solução com o enunciado. Estas etapas, descritas detalhadamente, permitem reconhecer a capacidade de comunicação e de exposição dos vários tipos de pensamento ou raciocínio.

Assim, de forma a alcançar o objetivo traçado, pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

1. De que forma os alunos interpretam o enunciado de problemas da vida real e o traduzem algebricamente?
2. Quais as etapas por que os alunos passam durante a resolução de problemas?
3. De que modo os problemas da vida real contribuem para a compreensão das inequações?

4. Qual a análise que os alunos fazem entre a solução obtida e a resposta adequada ao problema?

1.3 Organização do estudo

O relatório desta investigação encontra-se estruturado em cinco capítulos. O presente capítulo apresenta uma introdução, que é dedicada à apresentação das motivações pessoais e pertinência do estudo, referindo ainda os objetivos e as questões de investigação. O segundo capítulo corresponde à revisão da literatura de autores e trabalhos relevantes para a temática em estudo. No terceiro capítulo, descreve-se a metodologia - quais as técnicas existentes e escolhidas para a recolha de dados, os critérios de seleção dos participantes e quais os recursos utilizados para alcançar as respostas que vão de encontro aos objetivos da investigação. No quarto capítulo, são apresentados os dados recolhidos no estudo e a sua análise. O capítulo final apresenta a conclusão do estudo.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo tem o propósito de sistematizar as bases de estudo desta investigação. É feita uma breve referência ao aparecimento e evolução da matemática. Seguidamente, são abordados pontos relativos ao "Raciocínio matemático" e, posteriormente, ao conceito de "Problema", assim como às estratégias de "Resolução de problemas". Por fim, aborda-se a "Álgebra".

2.1 Matemática no quotidiano

Estrada et al. (2000) referem que a matemática está, desde sempre, inserida no nosso quotidiano. De facto, segundo estes autores, os registos remontam a um passado longínquo - 2.400 a.c. -, em que os habitantes do Egito cultivavam junto às margens do rio Nilo, cujo caudal variava em função das intensas e inesperadas precipitações, o que, por sua vez, influenciava as terras cultivadas nas margens. Ora, quem detinha essas terras tinha de pagar uma taxa correspondente à área cultivada, que se alterava a cada chuvada. Com as constantes medições, nasceu, então, a *medição*. Foi também por esta altura que nasceu a *contagem* - para, por exemplo, realizar transações nos mercados, onde os egípcios contavam pelos nós dos dedos das mãos, pedras e ossos. Nesta época, não existiam os algarismos, sendo estes representados através de símbolos. A matemática foi evoluindo, acompanhando as necessidades da sociedade, tentando colmatar obstáculo a obstáculo, necessidade após necessidade, e ultrapassando ou encontrando solução para cada problema do quotidiano (Estrada et al., 2000).

A matemática está inserida no quotidiano, nas práticas de cada cultura: a todo o momento, as pessoas comparam, classificam, quantificam, medem, explicam, generalizam, deduzem e, de algum modo, avaliam e concluem, usando os instrumentos quer materiais quer intelectuais que são próprios da sua cultura e do Ser Humano (Cunha, 2017).

Canavarro (2017) menciona que, embora dificilmente relacionada por parte da população em geral, a matemática está inserida em todos os campos e em todas as tarefas executadas na vida, estando ligada a várias áreas, como a economia, as finanças, a saúde, a engenharia e outras tantas. Esta autora refere que, até 2000, “era mais vulgar ouvir-se referências às relações da Matemática com outras áreas, às suas aplicações ou até à modelação matemática.” (p.38). Desde então, começaram a ser exploradas as ligações dentro da matemática: entre os conteúdos e procedimentos; entre conteúdos de domínios específicos; e relativas aos diferentes estádios de desenvolvimento das ideias e conhecimentos matemáticos (Canavarro, 2017). A autora aponta,

ainda, para a necessidade de os alunos se consciencializarem de que a matemática é uma disciplina “coerente, articulada e poderosa” (p. 38), incentivando-os a compreender as ideias e os conceitos nela envolvidos.

Segundo Guimarães (2014), a investigação tem vindo a revelar que quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, conseguem aprofundar a sua compreensão sobre essas ideias. O autor refere que Pólya partilha da mesma opinião quando menciona que entendemos melhor a matemática quando visualizamos o seu nascimento, aplicamos o que já foi descoberto ao longo da história e quando nós próprios exploramos e descobrimos meios para a sua evolução. Em Kilpatrick (2010), é salientado que “só se consegue realmente compreender uma teoria, se se souber como ela foi descoberta” (p. 108).

2.2 Raciocínio matemático

Por vezes, assumimos que *raciocínio* e *pensamento* têm o mesmo significado, mas é possível associar o raciocínio matemático a formas de pensamento distintas, como, por exemplo: “prever resultados, essenciais para a formulação de conjecturas; questionar soluções, mesmo as corretas; procurar padrões; recorrer a representações alternativas; analisar e sintetizar” (Domingos et al., 2013, p. 8). Segundo Schoenfeld (1996), o objetivo do ensino da matemática é ajudar os alunos a aprender a pensar matematicamente, o que, na sua perspetiva, significa “ver o mundo de um ponto de vista matemático” (p. 8), isto é, em todas as situações da vida, aplicar ideias matemáticas, ter preferência por matematizar, simbolizar, modelar, abstrair e conhecer os conceitos que lhe permitam realizar isso com sucesso. Ora, importa que a matemática não seja simplesmente tida por uma disciplina que confere aos alunos um conjunto de regras que lhes vai permitir, única e exclusivamente, ter aprovação nos instrumentos de avaliação (Canavaro, 2017). De acordo com Pólya (2003), estas regras constituem uma das facetas da matemática - a ciência *dedutiva* ou *sistemática*, de origem euclidiana -, que leva os alunos a não compreenderem a disciplina nem a sua aplicação. A outra faceta é a ciência *indutiva* ou *experimental*, de que este autor é seguidor. Segundo esta perspetiva, e de acordo com Guimarães (2014), devem ser criadas dúvidas, questões ou sugestões para um desenvolvimento do raciocínio intrínseco dos alunos, guiando-os para a generalização, ocorrendo assim uma aprendizagem rica e significativa. Isto designa-se por *literacia matemática*, que “é a capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos e de usar e se envolver na resolução matemática das necessidades da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo” (Duarte, 2005, p. 43).

2.3 Problemas

O conceito de *problema* e a sua tipologia têm tido várias definições e não é consensual entre investigadores e professores.

Kantowski (1977), com base na definição de Pólya (1975), pondera que um indivíduo está diante de um problema quando se depara com uma *situação* a que não tem a possibilidade de dar resposta ou que não sabe resolver de imediato. Lester (1983) define problema como sendo uma *tarefa* em que o indivíduo tem necessidade de encontrar uma solução, mas não tem um procedimento definido que garanta a determinação dessa solução. Assim, com base na evolução da definição por vários autores (Pólya, 1975; Kantowsky, 1977; Lester, 1983; Kilpatrick, 1985; Blum & Niss, 1991), podemos considerar que um problema se define como sendo uma *questão* que traz com ela algumas situações que criam desafios intelectuais a quem não tem conhecimento imediato de técnicas diretas, algoritmos ou metodologias suficientes para a solucionar (Blum & Niss, 1991).

Entretanto, Parthey (1978) concorda com a definição e realça etapas intrínsecas aos problemas, distinguindo-as entre *situação-problema* e *consciência-problema*. Todo o problema é precedido de uma *situação-problema* - representa uma situação de natureza objetiva – e onde cada indivíduo forma uma ideia exata sobre o objetivo do problema resultante das percepções pessoais - *consciência-problema* – que inclui algumas “construções racionais” que podem ser representadas linguisticamente (Christiansen et al., 1986). Estes autores, seguindo esta perspetiva, sublinham que “um problema para um aluno pode não ser um problema para o seu par” (p. 263).

A identificação de problema como sendo um exercício também foi discutida ao longo dos tempos, embora tenha sido diferenciada com facilidade (Vale, 2000). Schoenfeld (1985), seguindo Pólya (1978), Kantowski (1980) e Lester (1983), esclarece esta diferença: num exercício, temos uma situação em que aplicamos um procedimento familiar e rotineiro, mesmo que seja difícil, e chegamos à solução; num problema, deparamo-nos com surpresas e não conhecemos o caminho a seguir para se chegar à solução. Ponte (2005) e Rocha (2020) são da mesma opinião. Pólya (1980) refere que “resolver um problema é encontrar uma saída da dificuldade, é encontrar um caminho à volta de um obstáculo, para obter um fim desejável, que não está disponível de imediato através de meios apropriados” (p.1). De acordo com Christiansen et al. (1986), o aspeto da dificuldade como sendo uma das características do problema não foi considerado por Leibniz, mas na tradição de Kant e Hartmann esta característica começou a ser salientada.

Segundo Vale (2000), outros termos sinónimos para *problema* foram surgindo, como *projeto*, *atividade*, *investigação*, *exploração*, *tarefa* ou *situação problemática*. Deste modo, Ponte

(1992) clarifica a distinção entre *problema* e *situação problemática* - ou *investigação* ou *exploração*: num problema é expressa mais ou menos uma formulação do que é dado e do que é pedido, enquanto numa situação problemática, devido ao grande grau de indefinição acerca de um e outro, supõe-se que compete ao próprio aluno um papel importante na sua precisão. Também Ernest (1996) explica a diferença entre os dois conceitos: o problema está formulado e obtém-se uma solução, já na investigação pressupõe-se a formulação e exploração do problema onde poderemos obter uma solução ou não quando explorados todos os caminhos possíveis.

Ainda Schoenfeld (1996) acrescenta que um problema para ser um problema necessita de ter uma determinada estrutura, verificando quatro propriedades:

1. Serem relativamente acessíveis - "problemas que sejam facilmente compreendidos" sem demasiado vocabulário.
2. Haver a possibilidade de "vários caminhos" de resolução.
3. Terem soluções que sirvam "como introdução a importantes ideias matemáticas".
4. Que possivelmente encaminhem o raciocínio para "explorações matemáticas" ou que "sejam extensíveis e generalizáveis".

Para além da definição do conceito, vários autores iniciaram a definição da sua tipologia de acordo com os objetivos, não sendo consensual entre estes. Pólya (1981) destaca as diferenças entre os problemas de acordo com o caminho da sua resolução:

1. Com um processo acabado de aprender.
2. Com o processo apreendido e onde o indivíduo toma alguma decisão.
3. Combinando duas ou mais regras - ou exemplos - das aulas.
4. Combinando duas ou mais regras que contenham ramificações.

Este autor considera que os problemas com maior interesse são os referidos nos dois últimos pontos, devido ao seu grau de dificuldade e valor educativo.

Ponte (1992) faz distinção entre problemas, classificando-os entre: *problemas puramente matemáticos* e *problemas da vida real*, visto que estes envolvem processos de raciocínio bastante diferentes. Os problemas matemáticos são "um tipo de tarefa que o professor deverá recorrer nas suas práticas didático-pedagógicas" (Piedade & Reis, 2019, p.183). Para Ponte (2005) esta tarefa é fechada e tem um grau de desafio elevado. Este autor considerou que, para se compreender melhor que tipo de tarefa se deve aplicar aos alunos, existem duas dimensões - o grau de desafio matemático e o grau de abertura. A primeira dimensão tem ligação à dificuldade do enunciado, tem um grau reduzido ou elevado. A segunda dimensão refere-se às informações fornecidas no enunciado. A tarefa é fechada quando as informações relativamente aos dados e ao objetivo são inteligíveis e aberta quando as informações do que é dado e/ou

pedido não o são (Piedade & Reis, 2019, p.183). Vale (2000) refina a proposta de classificação de Charles e Lester (1986) e apresenta quatro tipologias de problemas:

1. Problemas de processo – resolvem-se na utilização de uma estratégia e não por aplicação direta de um algoritmo.
2. Problemas de conteúdo – requerem a utilização de conteúdos programáticos e técnicas matemáticas.
3. Problemas de aplicação – utilizam dados da vida real e a sua resolução é feita através de uma ou mais estratégias.
4. Problemas de aparato experimental – requerem a utilização de um aparato experimental onde o solucionador exerce as suas ações.

Focando-se nos problemas da vida real, Ponte (1992) distingue-os em três grandes tipos:

1. Situações do mundo real em que são enunciadas as informações de uma forma relativamente curta e direta, e onde a solução é usualmente simples.
2. Situações do mundo real, que através de mais de uma maneira, podem ser exploradas.
3. “São investigações abertas cuja exploração pode (...) seguir um de muitos caminhos”. (Ponte, 1992, p. 100)

As classificações de Stancanelli (2001) e Boavida et al. (2008) coincidem com Pólya (1981), embora não se tenham centrado, na sua classificação, unicamente na resolução do problema, mas também no enunciado e no mecanismo para a sua resolução. Stancanelli (2001) classifica-os como problemas sem solução, problemas com várias soluções, problemas com demasiada informação desnecessária para a sua resolução, problemas de lógica e problemas que não se enquadram nas anteriores classificações. Enquanto Boavida et al. (2008), com base nas classificações apresentadas por Ponte (1992, 2005), propõe três tipologias distintas:

1. Problemas de cálculo – problemas com uma solução e a estratégia de resolução consiste exclusivamente na tomada de decisão da operação ou operações a serem implementadas na sua resolução e o número de passos varia de acordo com o número de operações usadas.
2. Problemas de processo – problemas mais complexos do que os problemas de cálculo, são problemas com uma única solução, embora existam mais estratégias de resolução e estratégias mais elaboradas.
3. Problemas abertos ou investigações – problemas com uma ou mais soluções e deste modo exigem a criação de várias estratégias exploratórias.

Ponte (1992) refere que, embora seja atribuído aos problemas “uma importância bem mais reduzida do que seria desejável” (p. 96), o ensino é enriquecido com a resolução dos mesmos.

2.4 Resolução de problemas

A resolução de problemas tem sido considerada, desde há muito tempo, como um aspeto importante da matemática, quer para o seu ensino quer para a sua aprendizagem (Liljedahl et al., 2016).

Seguindo o ponto de vista dos autores,

A resolução de problemas na educação matemática tem sido um campo de pesquisa, de destaque que visa compreender e relacionar os processos envolvidos na resolução de problemas com o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e competências de resolução de problemas dos alunos (Liljedahl et al., 2016, p. 1).

Bruder (2016) explica que, no século XX, houve um avanço significativo na promoção da temática da resolução de problemas com prioridades variadas. Principalmente nas décadas de 1960 e 1970, foram realizados vários estudos sobre processos de resolução de problemas, acentuando a importância das estratégias heurísticas na sua resolução. Segundo este autor, a origem da palavra heurística remonta ao tempo de Arquimedes, séc. III a.c., e prende-se com as abordagens eficientes para a solução de problemas (p.2). Correia (2005) explica: “as estratégias de resolução de problemas também chamadas heurísticas gerais, correspondem a «operações mentais» aplicáveis a uma gama alargada de problemas. É importante que os alunos se familiarizem com uma grande variedade de estratégias de resolução” (p. 55). Bruder (2016) esclarece que, com base no modelo de Pólya (1975), foi assumido que se poderia melhorar as capacidades de resolução de problemas dos alunos se fossem aplicadas as estratégias heurísticas de ensino e aprendizagem. Conforme exposto, Pólya (2003) refere que é necessário que os alunos desenvolvam o seu raciocínio lógico e que a partir das suas próprias conclusões consigam, portanto, solucionar problemas. Para que isso seja possível, Pólya (2003) aponta as seguintes fases para a resolução de problemas:

1. Compreender o problema: identificar o que se pretende. Embora possa parecer óbvio, muitas vezes é feita uma leitura superficial, sem realmente se entender o que está a ser solicitado.
2. Criar um plano: encontrar um caminho em problemas semelhantes. O objetivo é encontrar conexões entre os dados do problema e a incógnita; os conhecimentos prévios e a experiência em problemas semelhantes são muito importantes.
3. Executar o plano. Nesta fase podem aparecer dificuldades, mas é importante persistir. Se necessário, voltar à etapa anterior e encontrar um novo plano.
4. Verificar se a solução e método respondem ao pretendido e, se possível generalizar, isto é, verificar se são aplicáveis na resolução de problemas semelhantes.

Bruder (2016) menciona que, na década de 1980, alguns estudiosos - Kretschmer (1983); Schoenfeld (1985, 1987, 1992) e Kilpatrick (1985) - desenvolveram o modelo proposto por Pólya e refere que toda a resolução de problemas segue um *design* específico. Inicia-se com o objetivo claramente definido e a sua solução segue opções possíveis. Este autor esclarece que quer Pólya (1975) quer Schoenfeld (1985) são refinamentos do referido *design* embora tenham princípios diferentes: Pólya refinou a um nível teórico e Schoenfeld a um nível prático e empírico. Reconhece que ambos os autores incorporam o recurso a experiências passadas, contudo as estratégias de Pólya são muito sucintas no que toca ao ensino e aprendizagem e as estratégias de Schoenfeld são invocadas com mais naturalidade - e muitas vezes são ineficazes - pelos alunos, levando-os a usarem a sua criatividade e não seguirem padrões pré-estabelecidos (Bruder, 2016). Segundo Vale (2000), outros autores como Charles e Lester (1984), Guzmán (1986) e Fernandes et al. (1995) propuseram adaptações à heurística de Pólya, mas sem diferenças significativas. A adaptação de Guzmán acresce a questão da aprendizagem através da experiência da resolução de problemas. Para Guzmán, a aprendizagem adquirida através do insucesso é melhor do que a adquirida em cem sucessos. A proposta de Fernandes et al. recai na junção da segunda e terceira fases de Pólya, transformando-as numa só fase. Porém, para Vale (2000), a segunda fase – *elaborar um plano* – é a fase que tem recebido mais atenção dos estudiosos, como Schoenfeld (1985) e Fernandes (1988, 1995). Estes sugerem estratégias de resolução de problemas mais claras e adequadas para os alunos.

Segundo Guimarães (2014), os problemas complexos e não usuais não obrigam os alunos a ter muitas bases matemáticas para serem capazes de os resolver, pois, tal como adianta Lompscher (1975), o essencial para a sua resolução é a agilidade mental. Este último autor menciona que a agilidade mental se refere à *redução* intuitiva de um problema ao essencial, à *reversibilidade* das linhas de pensamento, à *atenção dos aspetos* reconhecendo a dependência dos dados, à *mudança de aspetos* visualizando o problema em perspetivas diferentes e à *transferência* de um procedimento para outro. Convém salientar que este autor refere que quem não tem a agilidade mental intrínseca pode adquiri-la através de heurísticas. Kilpatrick (1985) vê como sucesso as abordagens heurísticas serem esclarecidas por meio de exemplos e treinadas pelos alunos. Para Pólya (2003, p.26): "Resolver problemas é uma arte que tem de ser praticada, tal como nadar, esquiar, tocar piano: aprende-se imitando e praticando. (...) se queres aprender a nadar, tens de te meter dentro de água e praticar. Se queres aprender a resolver problemas, tens de resolver problemas".

De acordo com Pólya (2003), em todas as fases da sua heurística, é indispensável a constante interrogação e para tal é necessário que esta seja despertada através do conhecimento e das ferramentas do professor. Esta ajuda é fundamental para se alcançar algum progresso e proporcionar um trabalho autónomo (Pólya, 2003). Para Vale (2000), o aluno poderá seguir um

raciocínio próprio, diferente do seguido pelo professor, devendo o professor ter boas bases matemáticas e sensibilidade pedagógica. Para este autor, o professor tem como função a escolha de problemas e tarefas determinantes, assim como a criação de um ambiente fundamental para que “os alunos sejam encorajados a explorar, correr riscos, partilhar falhanços e sucessos e questionarem-se” (p. 53).

2.5 Álgebra

Segundo Ponte (2005), para entender Álgebra é necessária a capacidade de entender a sua linguagem abstrata e usar essa capacidade na resolução dos problemas e situações.

Segundo este autor, Fiorentini, Mirion, Miguel (1993), e Lins e Giménez (1997), têm a mesma perspetiva, embora também abordem outros aspetos da linguagem algébrica, que, no seu entender, permite a valorização das suas regras e serve, também, como meio de representar ideias. Todos os conceitos apresentados pelos referidos autores mencionam as atividades dos alunos, designadas tarefas, refletindo situações reais, sendo que, para Ponte (2005), partir de situações reais não é suficiente, sendo necessário que os alunos se debrucem sobre essas situações com afinco, “num processo de reinvenção guiada dos conceitos e ideias matemáticas” (p.40).

Ferreira (2011) explica as conceções a que Ponte (2005) se refere: conceções relativas à educação algébrica segundo Fiorentini et al. (2005) e as caracterizações da atividade algébrica segundo Lins e Gimenez (1997). As conceções de Fiorentini et al. (2005) consistem no *linguístico-pragmática*, na *fundamentalista-estrutural* e na *fundamentalista-analógica*. A conceção *linguístico-pragmática* refere-se à forma mecânica das transformações algébricas, isto é, no manuseamento de expressões algébricas, trabalhadas através de exercícios. A *fundamentalista-estrutural* tem como objetivo a resolução de exercícios e de problemas, mas a aprendizagem incide na compreensão das propriedades estruturais dos procedimentos em cada etapa das transformações algébricas. Por fim, a conceção *fundamentalista-analógica* é a junção das duas anteriores aplicando, nos exercícios, a álgebra no contexto real.

As caracterizações da atividade algébrica segundo Lins e Gimenez (1997) são: a *tendência letrista*, onde reflete a evolução histórica de algumas notações tendo a dificuldade de se aplicar exclusivamente ao ambiente escolar; a *tendência conteudista*, que, sendo simplista, leva a que estejam presentes alguns conteúdos da álgebra, mas rege-se pela intuição da pessoa que resolve o exercício ou problema, podendo considerar os objetos da matemática como sendo de álgebra ou não; a *tendência de ação* foca-se, diferentemente das anteriores, em distinguir efetivamente se as situações apresentadas são ou não de álgebra (Ferreira, 2011).

O uso do conhecimento algébrico fomenta o desenvolvimento de processos que para além de rigorosos são uma mais-valia para a resolução do problema, tanto do ponto de vista conceptual como do ponto de vista da linguagem simbólica (Nobre et al., 2009).

Segundo Nobre et al. (2009), a linguagem simbólica é o foco do pensamento algébrico - consiste no uso de símbolos para representar o problema de forma geral, aplicando procedimentos formais para se obter e interpretar um resultado. Portanto, sublinham que é inevitável que se entendam os símbolos, quando e como devem ser usados e manipulados, e que papéis desempenham em diferentes contextos. Os símbolos e a sua manipulação encaminham-nos à álgebra: a álgebra é uma unidade da matemática que inicia com a resolução de problemas, passando pelo estudo de equações e seguido do estudo de estruturas mais abstratas, que deve ser estimulada nos alunos como uma necessidade.

3 METODOLOGIA

Este capítulo aborda o modelo de investigação e os procedimentos metodológicos adotados no desenvolvimento da investigação realizada, caracterizando os intervenientes e os instrumentos de recolha de dados, e tem também como objetivo explicitar as várias fases da investigação em função dos objetivos pretendidos com o estudo.

3.1 Investigação qualitativa

Uma vez que esta investigação pretende compreender a conduta humana a partir dos próprios pontos de vista daquele que atua, optou-se por uma investigação de tipo qualitativo, visto que não se pretende "procurar as causas dos fenómenos sociais", mas sim "prestar atenção aos aspetos subjetivos dos indivíduos" (Cook & Reichardt, 1986, p. 29).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa fornece dados com significados ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e reúne diversas técnicas que partilham determinadas características. Estas características, referidas por Bogdan e Biklen (1994, pp. 16-17), consistem em:

1. Recolher os dados no “ambiente natural e sem controlo”: No âmbito desta investigação, a escola é o ambiente onde os alunos - objetos de estudo - estão confortáveis nas suas ações e opiniões.
2. Ser descritiva: O investigador qualitativo tenta analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma segundo a qual foram registados ou transcritos, na forma de palavras, e não os reduzindo a números.
3. Ter interesse pelo processo: O investigador qualitativo “interessa-se mais pelo processo de investigação do que unicamente pelos resultados ou produtos que dela decorrem”.
4. Ser indutiva: O investigador desenvolve conceitos e chega à compreensão dos fenómenos a partir de padrões provenientes da análise dos dados.
5. A importância do significado: O investigador procura compreender as perspetivas daqueles que está a estudar vivenciando a sua realidade.

3.2 Estudo de caso

O estudo de caso, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), é o método mais utilizado na investigação qualitativa e, segundo Yin (2009), quando se pretende responder a questões de "como" ou "porquê", constitui a melhor estratégia.

Os estudos qualitativos, em geral, recorrem a amostras mais pequenas que os estudos quantitativos, e dado os pormenores serem demasiado detalhados utiliza-se o estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994). De acordo com Amado e Ferreira (2014), o estudo de caso tem características especiais, como o foco em explicar e compreender os fenómenos a estudar dentro de um contexto. Realizar um estudo de caso consiste em familiarizar-se com a situação, em descrevê-la e analisá-la.

O principal objetivo desta investigação qualitativa consiste em compreender o raciocínio de alunos do 9.º ano relativamente à resolução de problemas em contexto da vida real, explorando diversos processos de resolução de problemas.

Concretamente pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

1. De que forma os alunos interpretam o enunciado de problemas da vida real e o traduzem algebricamente?
2. Quais as etapas por que os alunos passam durante a resolução de problemas?
3. De que modo os problemas da vida real contribuem para a compreensão das inequações?
4. Qual a análise que os alunos fazem entre a solução obtida e a resposta adequada ao problema?

3.3 Técnicas de recolha de dados

Todos os estudos qualitativos implicam combinações de técnicas de recolha de dados com a sua análise (Bogdan & Biklen, 1994). Bogdan e Biklen (1994) referem que é indispensável uma preparação prévia e minuciosamente estruturada da proposta sobre o modo como decorrerá a investigação qualitativa, para o investigador refletir quer sobre a problemática da observação quer sobre o trabalho que a envolve. Assim, Bogdan e Biklen (1994) sublinham as técnicas de recolha de dados mais comuns na investigação qualitativa: a observação, a entrevista e a análise documental.

Esta investigação irá ser do tipo qualitativo recorrendo a três estudos de caso com alunos do 9.º ano de escolaridade. Para tal, as técnicas de recolha de dados usadas nesta investigação serão a observação, a entrevista e análise documental. A recolha de dados decorrerá do seguinte modo: serão aplicadas tarefas nos momentos de aula onde haverá o

registo em áudio das suas resoluções e, enquanto isso, a observação será utilizada; de seguida, ocorrerão as entrevistas para melhor compreensão do raciocínio dos alunos.

3.3.1 Observação

A observação é um método trabalhoso, contínuo e analítico, e que incorpora várias componentes. Durante a investigação, o investigador deve ter a capacidade de identificar as suas vantagens, limites, assim como possíveis erros (Amado & Ferreira, 2014). Para Bogdan e Biklen (1994), existem dois tipos de observação: a observação participante e a observação não participante, sendo a observação participante uma das técnicas mais representativas da investigação qualitativa. A *observação participante* caracteriza-se pela participação do investigador nas atividades, enquanto na *observação não participante* o observador é passivo.

Bogdan e Biklen (1994) mencionam, ainda, que o papel do investigador é compreender tudo o que uma observação engloba: este necessita de estar envolvido no contexto social em estudo, ter contacto direto com as pessoas, as situações e os acontecimentos, e também deve entender os diferentes tipos de observação, as diversas formas de registo e posicionar-se perante o observado. Referem que “em educação, a investigação qualitativa é frequentemente designada naturalista porque o investigador frequenta os locais em que naturalmente se verificam os fenómenos nos quais está interessado, incidindo os dados recolhidos nos comportamentos naturais das pessoas: conversar, visitar, observar, comer, etc.” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 17). Os autores supra citados consideram que, para a aplicação da observação, é necessário: ser imparcial, não interferir com opiniões pessoais e julgamentos, aceitar os resultados obtidos e enquadrar-se ao observado, quer no modo de agir quer no caminho a seguir, e que a interpretação tem que ser justificada com os factos.

No entendimento de Amado e Ferreira (2014), o observador deve ser sagaz e objetivo na sua análise, podendo construir as suas próprias grelhas de observação ou notas de campo. Conforme exposto, existem várias formas de registo das informações observadas: numa grelha de observação pré-elaborada, num bloco de notas (diário de bordo) e gravações (Bogdan & Biklen, 1994).

Durante este estudo foram utilizadas as observações participante e não participante. A observação participante ocorreu no decorrer da prática letiva supervisionada. A observação não participante aplicou-se nos momentos das aulas assistidas, lecionadas pela professora titular, e na realização de tarefas para a investigação.

3.3.2 Recolha documental

Na recolha documental, os investigadores complementam a sua investigação através de recolha de informação fornecida em documentos oficiais e documentos pessoais (Aires,

2015). Aires (2015) refere que os documentos oficiais fornecem “informações sobre as organizações, a aplicação da autoridade, o poder das instituições educativas, estilos de liderança, forma de comunicação com os diferentes atores da comunidade educativa, etc.” (p. 42); já os documentos pessoais são as narrações produzidas pelos indivíduos que relatam as suas próprias ações, experiências ou crenças. Estes últimos, segundo Domingos (2003), numa investigação educacional, podem ser as produções de alunos, tais como resoluções de problemas, testes e relatórios.

Assim, na presente investigação, a recolha documental consistiu na recolha das resoluções de todas as tarefas propostas e em documentação fornecida pela diretora de turma de cariz pessoal dos alunos - idade, percurso escolar, zona de residência e habilitações académicas dos encarregados de educação.

3.3.3 Entrevista

Bogdan e Biklen (1994) definem a entrevista como a interrogação de um ou alguns informantes e consideram a existência de três tipos de entrevistas: as estruturadas, as semi-estruturadas e as não estruturadas. Nas *estruturadas*, o investigador segue um guião detalhado com questões pré-determinadas e de modo sequencial. Nestas entrevistas, o entrevistador segue rigorosamente o mesmo guião para cada um dos entrevistados, a fim de “recolher dados detalhados de forma sistemática facilitando a comparação entre todos os sujeitos” (Domingos, 2003, p. 108). Nas *semiestruturadas*, as questões no guião tanto podem ser abertas quanto fechadas, sendo que a própria entrevista pode sofrer alterações, ou seja, o investigador tem maior liberdade do que na estruturada. Nas *não estruturadas*, o investigador segue tópicos sem ordem específica. Amado e Ferreira (2014) concordam com esta tipologia, contudo acrescentam outro tipo de entrevista: a entrevista informal, que consiste numa conversação onde não existe guião - neste caso, o entrevistador necessita de ser bastante experiente e sensível, pois as informações a recolher advêm de uma interação.

Segundo Amado e Ferreira (2014), a entrevista semiestruturada é o tipo de entrevista mais usado em investigação qualitativa.

Nesta investigação foram realizadas duas entrevistas semiestruturadas aos alunos participantes e seguem os guiões apresentados nos Anexos 2 e 3. As entrevistas visaram compreender os raciocínios e os procedimentos desenvolvidos pelos alunos na resolução de tarefas e a sua opinião sobre as dificuldades e facilidades sentidas na realização das mesmas. Como referido, ambas tiveram o mesmo objetivo, embora cada uma tenha sido aplicada em contextos distintos. A primeira entrevista ocorreu no dia seguinte à implementação da primeira tarefa e a segunda entrevista realizou-se no dia seguinte à realização de todas as tarefas em sala de aula.

3.3.4 Tarefas

Para este estudo foram propostas três tarefas em sala de aula e uma fora do horário letivo. As tarefas foram criadas tendo em conta o objetivo do estudo, de modo a que permitissem responder às questões de investigação. Todos os alunos envolvidos na investigação realizaram as mesmas tarefas e gravaram, em áudio, os seus comentários e raciocínios.

Nas tarefas, foi proposta, exclusivamente, a resolução de problemas, com um grau de dificuldade crescente. Os problemas apresentados envolviam conteúdos do tópico curricular de Álgebra, mais especificamente inequações. Embora o foco se centrasse nas conjecturas realizadas pelos alunos na resolução de problemas, recorrendo à heurística de Pólya, pretendia-se proporcionar uma tentativa de aprendizagem do conceito de inequação e a sua aplicabilidade no quotidiano através de problemas.

3.3.4.1 Tarefa n.º 1 - T1 (Anexo 4)

Na primeira tarefa, pretendia-se que os alunos resolvessem três problemas, bastante simples, que envolviam inequações. Salienta-se que naquele momento temporal ainda não tinha sido lecionado qualquer conteúdo sobre esta temática. A T1, de cariz introdutório, foi proposta na aula onde se introduziu a definição de inequação, a sua relação com equação e intervalos de números reais. As equações e os intervalos de números reais foram os temas anteriormente abordados. Fez-se exclusivamente a relação da condição onde estava presente a igualdade – equações – e a sua “transformação” em sinal de desigualdade – inequação. Foram, também, recordadas as fases de resolução de problemas de acordo com Pólya (2003) - *compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e verificação*.

O expectável seria a utilização das fases de resolução de problemas de acordo com Pólya, onde estariam presentes a identificação da incógnita, a recolha de dados, a tradução algébrica, a simplificação da expressão algébrica obtida e a resposta ao problema.

3.3.4.2 Tarefa n.º 2 - T2 (Anexo 5)

A T2 foi realizada durante a aula e continha dois problemas, onde se pretendia que os alunos descrevessem os seus raciocínios detalhadamente. Neste momento, poderiam relacionar a resolução de equações com a de inequações, visto que se recordou a monotonia parcial da multiplicação e a influência que esta tem no sinal de desigualdade na resolução de uma inequação. Foram, tal como nos momentos anteriores à T1, recordadas as fases de resolução de problemas de acordo com Pólya (2003) - *compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e verificação*.

Realça-se que esta tarefa foi retirada de um manual escolar - Manual PI 9 – e, por conveniência de cálculos, foi decidido que as medidas do campo de futebol presentes no

problema ficariam inalteradas. Estas medidas diferem das medidas efetivas de um campo de futebol que estão compreendidas entre $16\text{m} \times 34\text{m}$ e $18\text{m} \times 36\text{m}$, para o futebol de salão ou futebol de cinco, e entre $45\text{m} \times 90\text{m}$ e $90\text{m} \times 120\text{m}$ para o futebol de onze.

3.3.4.3 Tarefa n.º 3 - T3 (Anexo 6)

A T3, com dois problemas, foi proposta no final da aula em que foram recordadas a interseção e reunião de intervalos de números reais, a sua representação em compreensão e onde se fez a associação à conjunção e disjunção de inequações, respetivamente. Foi salientado que os conteúdos até ao momento aprendidos – representação algébrica, simplificação da expressão algébrica – no subtema *inequações* deveriam ser aplicados.

O objetivo era a obrigatoriedade da utilização de cálculos usuais para alunos do 9.º ano - como o cálculo de médias, onde estão presentes as frações e percentagens - e a sua aplicabilidade aos conteúdos aprendidos. Obviamente, poderia haver outros métodos de resolução, mas forçou-se a utilização da conjunção ou disjunção de inequações.

3.3.4.4 Tarefa Complementar - TC (Anexo 7)

No momento de propor a TC, os alunos já se encontravam familiarizados com os conteúdos sobre inequações. Nesta, pretendia-se a resolução de um único problema com um grau de dificuldade superior aos apresentados anteriormente. O objetivo desta tarefa era identificar o raciocínio dos alunos, etapa por etapa, nas fases de resolução de problemas propostas por Pólya (2003) – *compreender o problema, estabelecer um ou vários planos, executar o plano escolhido e verificar a solução*.

3.4 Escolha e caracterização dos participantes

Tendo em atenção o objetivo da investigação, a seleção dos participantes decorreu de acordo com determinados critérios e desenvolveu-se em duas fases. Na primeira fase, embora todos os alunos da turma tenham sido convidados a participar no estudo e tenham realizado todas as tarefas implementadas em sala de aula, só alguns demonstraram disponibilidade e autorização dos encarregados de educação para o fazer. Na segunda fase, foram definidos os critérios de seleção que tiveram por base o ponto de vista de Amado e Ferreira (2014), onde os participantes devem ser, na maioria dos casos, testemunhas privilegiadas do que se pretende investigar, com talento para colocar boas questões e que descubram alguma coisa por eles próprios. Deste modo, os critérios de seleção definidos neste estudo foram: as avaliações obtidas pelos alunos durante o ano letivo corrente (até ao momento da recolha dos dados), as diferentes posturas em sala de aula (interesse na participação na aula, desempenho demonstrado no desenvolvimento das atividades em sala de aula e colaboração com a professora), a capacidade de comunicação, as diferentes capacidades de compreensão dos conteúdos e a diversidade de raciocínios demonstrados.

De acordo com os critérios referidos, nas duas fases de seleção, foram selecionados seis alunos. De modo a garantir o seu anonimato, os nomes atribuídos aqui são fictícios. A Mara é a aluna da turma que tem o nível 5 a todas as disciplinas. A Betânia e a Rafaela foram as alunas que mantiveram o nível 4 nos dois períodos de avaliação até ao momento do estudo. O Dinis, a Susana e a Leonor atingiram a mesma classificação - nível 3 -, tendo o Dinis obtido a percentagem de classificação maior e a Leonor a menor. A Mara e a Betânia mostraram-se bastante interessadas e motivadas pela disciplina e pelas atividades de matemática. São alunas muito participativas em todas as aulas e demonstraram compreender os conteúdos com facilidade. Tanto a aluna Rafaela como o aluno Dinis são alunos com bastantes capacidades na compreensão dos conteúdos e na comunicação das suas dúvidas, embora participem na aula exclusivamente quando a sua participação é solicitada. A Susana é uma aluna com indicação de necessidade de um acompanhamento mais individualizado, mas mostra determinação e vontade de aprender. A Leonor e a Susana são alunas pouco participativas, demonstraram raciocínios diversificados nas resoluções das atividades realizadas nas aulas e mostraram uma elevada capacidade de comunicação para expor os seus raciocínios. Deste modo, foi realizado um quadro resumo onde são representadas as características de cada aluno em cada critério de seleção:

Alunos	Avaliação	Comunicação	Desempenho	Participação	Raciocínio	Conteúdos
Mara	5	Introvertida	+	+	+	+
Betânia	4	Extrovertida	+	+	+	+
Rafaela	4	Dúvidas	+	-	+	+
Dinis	3	Dúvidas	+	-	+	+
Susana	3	Raciocínios	+	-	+	-
Leonor	3	Raciocínios	-	-	+	-

Estes seis alunos foram organizados em pares: o Par 1 - Betânia (B) e Dinis (D) -, o Par 2 - Mara (M) e Susana (S) - e o Par 3 - Rafaela (R) e Leonor (L). A formação destes pares de trabalho teve como base a dinâmica de trabalho observada entre os alunos, assim como a tentativa de homogeneidade entre os pares de acordo com as características heterogêneas de cada aluno em cada critério de seleção.

3.5 Recolha e análise de dados

A recolha de dados realizou-se em vários momentos da investigação. As produções escritas pelos alunos das primeiras tarefas - T1, T2 e T3 – e respetivos áudios foram realizados e recolhidos nas aulas que ocorreram nos dias nove, dez e dezasseis de fevereiro, respetivamente. Cada uma destas aulas teve uma duração de noventa minutos. A realização e recolha das produções e áudios dos alunos da tarefa TC ocorreram no dia dezassete de fevereiro, com a duração de quarenta e cinco minutos – fora do horário letivo. Após a primeira tarefa – T1 – e a última tarefa – TC - foram realizadas as duas entrevistas, nos dias dez e dezassete de fevereiro, respetivamente, com a duração de quarenta e cinco minutos cada.

A análise dos dados incidiu sobre as produções dos alunos, sobre os áudios e sobre as entrevistas. Os áudios consistiram no registo das interações entre os dois elementos de cada par durante a realização de cada tarefa. Tiveram como objetivo o complemento da resolução de cada tarefa e permitiram obter informações sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático e o modo como os alunos adquiriram conhecimento dos conteúdos. Através das entrevistas, foi possível conhecer aquilo que levou os alunos a realizar determinados procedimentos e a fazer determinadas opções relativamente às resoluções dos problemas das tarefas.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, são apresentados e analisados os dados recolhidos tendo em consideração as questões, o objetivo da investigação e a diversidade nas respostas. Esta análise recorre às produções escritas e aos áudios gravados no decorrer da implementação das tarefas e entrevistas realizadas. Recorde-se que foram escolhidos seis participantes, organizados em pares, resultando em três estudos de caso. Estes pertenciam à turma acompanhada pela investigadora durante o ano letivo - 9.º ano de escolaridade. Como já referido anteriormente, os nomes utilizados são fictícios de modo a preservar a identidade dos alunos e a investigadora é representada pela letra I.

4.1 Estudo de caso - Par 1 (Betânia e Dinis)

4.1.1 Caracterização do Par

Betânia é uma das melhores alunas da turma, é dedicada, com gosto pela matemática, bastante trabalhadora e participativa nas aulas, tem um raciocínio rápido e demonstra facilidade na compreensão de novos conteúdos. A sua participação é regular, apresentando questões pertinentes, sabedoria e agilidade na resolução de qualquer tarefa nas aulas. Manteve o nível 4 nos dois primeiros períodos, no presente ano letivo.

Dinis apresentou uma descida de nível 4 para 3 no segundo período. É um aluno que realiza com sucesso todos os trabalhos para casa, é dedicado, organizado e preocupado com o bom ambiente no seio da turma. Embora tenha facilidade em interiorizar os conteúdos lecionados, distrai-se com facilidade devido à conversa com os colegas. Tem espírito crítico, é intuitivo e consegue generalizar resultados, mas não participa espontaneamente na aula.

4.1.2 Análise da Tarefa n.º 1

Nesta tarefa, os problemas apresentados pretendiam que os alunos se identificassem com os problemas da vida real e analisar a forma como os resolviam, com conhecimentos anteriormente adquiridos ou com os conceitos acabados de aprender.

O Par resolveu todos os problemas corretamente e demonstra uma evolução na aplicação das fases de resolução de problemas segundo Pólya.

No Problema n.º 1 - “CD’s de música” -, assim que foi proposto, o Par estabeleceu e executou um plano – efetuou uma divisão – e registou a resposta correta conforme apresenta a Figura 4.1.

Figura 4.1 — Resolução do problema 1 - T1 pelo Par 1

$74,81€$
 $1 \text{ CD} - 12,35€$
 $74,81 : 12,35 \approx 6$
 R.: O número máximo de CD que pode comprar é 6.
 (Adaptado de Henriq)

Mediante a resposta do Par, a investigadora inquiriu-o, na tentativa de obter uma resposta à questão de investigação n.º 1 – “De que forma os alunos interpretam o enunciado de problemas da vida real e o traduzem algebricamente?” – mas sem sucesso.

I: Como traduzíamos o enunciado? Estivemos a falar de inequações, não se lembraram de as utilizar?

D: Xiii! Assim era mais difícil. Fazer esta divisão é muito mais fácil.

Tal como ilustrado no diálogo acima, o Par escolheu o processo que demora menos tempo a ser concretizado. Verifica-se que compreenderam o problema, estabeleceram um plano e executaram-no obtendo a solução correta. No entanto, compreende-se que a *verificação* – quarta etapa de Pólya - não tenha sido implementada devido ao nível de simplicidade do problema.

No problema n.º 2 – “Skate” -, o Par discutiu o enunciado, qual a estratégia de resolução que iria aplicar e analisou a solução para dar resposta ao problema. Relativamente à estratégia, pensou em duas, que incidiam na divisão e na adição, após a compreensão inicial e simplificação do enunciado. Ou seja, a primeira estratégia de resolução foi verificar qual o valor que multiplicado por dezasseis estaria mais próximo de 120€ (180-60), e a segunda estratégia foi somar de 16 em 16 até chegarem aos 120€. De seguida, apresenta-se o excerto da conversa entre os alunos do Par.

D: Temos que ver quantos 16 por semana ele tem que fazer para chegar aos 180€.

B: Ya, imagina, se ele recebeu 60€, eu acho que tenho que subtrair estes 60 aos 180 que ele precisa.

D: Sim, assim vemos qual o valor que dá e vemos na tabuada do 16 o valor mais próximo de 120, que seja acima.

B: Então, $180 - 60 = 120$. Podemos fazer 120 a dividir por 16 ou fazemos $16 + 16 + 16 \dots$

D: Sim, mas isso vai levar mais tempo.

Após esta discussão e a sua execução, o Par verificou que a solução não era imediata, visto que o valor obtido não era inteiro - 7,5 semanas - e decidiu conversar sobre a resposta apropriada, conforme relato abaixo.

B: O Valentim fez anos há sete semanas e meia.

D: Calma, como são semanas não podemos pôr sete e meia. Como estão a perguntar semanas temos que pôr número inteiro, por isso são oito semanas.

B: Tens razão, tens razão, ele às sete semanas ainda não tinha o dinheiro suficiente para o skate.

Assim, apresentou a resolução que consta na Figura 4.2.

Figura 4.2 — Resolução do problema 2 - T1 pelo Par 1

60€
16€/semana
180€

$180 - 60 = 120$
 $120 : 16 = 7,5$
R.: O seu aniversário foi à 8 semanas.

(Adaptado de Henriques, ...)

Como ilustram os diálogos, constata-se que o Par explorou várias alternativas na resolução, ou seja, a segunda fase de resolução de problemas apresentada por Pólya – *desenvolver um ou vários planos* – foi mais trabalhada com este problema. A estratégia utilizada foi o cálculo do valor que multiplicado por dezasseis estaria mais próximo de 120. Para este cálculo, os alunos associaram a multiplicação com a divisão, realizando a divisão do valor 120 por 16. Posteriormente, discutiram a solução, contextualizando-a com o que era pedido no enunciado – número de semanas. Deste modo, constatou-se que os alunos resolveram o problema sem dificuldades. Compreenderam o problema, estabeleceram um plano, executaram-no e contextualizaram a solução com o enunciado.

No problema n.º 3 – “Dimensões de uma mala” -, o Par considerou, de imediato, tratar-se de um problema mais elaborado do que os anteriores. Após a sua leitura em voz alta, demonstrou compreensão do problema ao registar os dados no desenho ilustrativo apresentado na folha de resposta – procedimento inserido no primeiro ponto da heurística de Pólya -, conforme a Figura 4.3.

Betânia propôs uma equação que traduzisse o enunciado ($158 = L + \frac{2}{3}L + 30$), ao que Dinis disse que era mais fácil fazer-se logo $158 - 30 = 128$. Betânia assentiu e registou na folha, formulando e simplificando de seguida a equação, como consta na Figura 4.3.

Figura 4.3 — Resolução do problema 3 - T1 pelo Par 1

$$\begin{array}{l}
 158 - 30 = 128 \\
 \frac{L}{1 \times 3} + \frac{2}{3} L = \frac{128}{1 \times 3} \\
 3L + 2L = 384 \\
 5L = 384 \\
 L = \frac{384}{5} \\
 L = 76,8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 30 + 51,2 = 81,2 \\
 \frac{2}{3} \text{ de } 76,8 = 51,2 \\
 158 - 81,2 = 76,8
 \end{array}$$

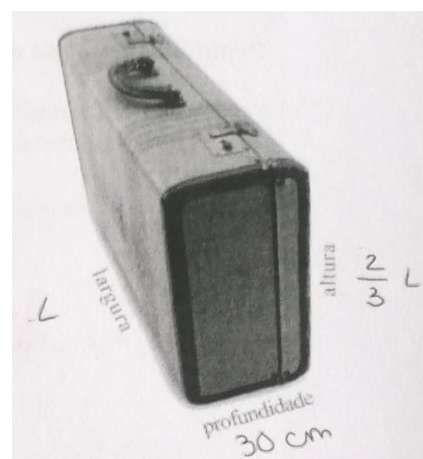


Figura 4.3 – como ilustra o seguinte diálogo:

- B: Então fica $30 + \frac{2}{3} L$... Calma, como se faz isto?
D: Fazes duas vezes isto (referindo-se a 76,8) e depois divides por três.
B: É assim que se faz?
D: Acho que sim. Pelo menos eu faço assim... E tenho tido certo.
B: Ah pronto! Assim descobrimos a altura.
(...)
B: Deu a mesma coisa, qual a resposta?
D: Então só pode ter, no máximo, 76,8.

Neste problema, o Par demonstrou várias hesitações. Escreveu uma equação em vez de uma inequação, no entanto, traduziram algebricamente o enunciado (Questão n.º 1 da investigação). Recorda-se que os problemas propostos nas tarefas envolviam inequações, não sendo obrigatória a sua formulação aquando da sua resolução.

É possível verificar que passaram por todas as fases de resolução de um problema segundo Pólya (Questão n.º 2 da investigação). Compreende-se o seu raciocínio até chegar à resposta correta. Salienta-se que, nesta tarefa, a turma tinha aprendido exclusivamente a possível interligação entre as equações e os intervalos de números com inequações.

4.1.3 Análise da Tarefa n.º 2

Nesta tarefa, os problemas apresentados mantinham a ideia de que os alunos se identificassem com os problemas da vida real e como os resolviam, visto o grau de dificuldade ser superior ao apresentado na tarefa anterior, e se essa identificação com os problemas da vida real contribuía para uma maior compreensão dos conteúdos lecionados, as inequações – Questão n.º 3 da investigação: “De que modo os problemas da vida real contribuem para a compreensão das inequações?”.

O Problema n.º 1 – “Viagem de finalistas” - estava relacionado com dinheiro, assim, o Par associou-o a um problema já trabalhado por eles na tarefa anterior - problema n.º 2 da T1: *Skate* – deste modo apresentou a sua representação algébrica. Registou os dados na folha de resposta, conforme foi lendo o enunciado, identificou a incógnita - x é o n.º de dias – e associou o valor que se gastava por dia à incógnita. Constatou-se ainda, que o Par mencionou a inequação utilizada – Figura 4.4 - e evidenciou compreensão relativamente ao sinal de desigualdade, como citado no diálogo seguinte:

- B: Isto como é dinheiro é igual ao problema do Valentim (T1 Problema n.º 2).
- D: Sim, é isso, mas primeiro temos que escrever os dados todos.
- (...)
- B: Temos que juntar os 30€ com o x e os 75€ com o x porque x é o n.º de dias.
- D: Então podemos juntar os 30 com os 75 porque são os dois com o x .
- B: Isso, isso. E sabemos que se somarmos isto tudo com os 375 tem que ser menor que 1250.
- D: Tem que ser menor ou igual porque ele pode gastar exatamente os 1250.

Figura 4.4 — Resolução do problema 1 – T2 pelo Par 1

Handwritten work showing the resolution of a problem. On the left, a list of expenses: 1250 € -> TOTAL, - 375 €, - 30€ / x (ret.), - 75€ / x , $x = n.º \text{ dias}$, $30 + 75 = 105$. On the right, an inequality is derived: $375 + 105x \leq 1250$, then $105x \leq 875$, then $x \leq 8, (3)$. Below this, a conclusion is written: "∴ Ele pode ficar 8 dias no máximo".

Os alunos não convencidos com a solução, por dar uma dízima infinita periódica, foram verificar a solução:

- B: Há aqui qualquer coisa mal, isto não dá número certo, dá 8,3333...
- D: Isso é 8 mas vamos substituir na expressão o x por 8 e ver se está bem.
- B: Então $375 + 105 \times 8$ dá 1215... Está bem!

Nesta resolução, o Par escreveu a inequação que traduzia o problema, conjecturaram relativamente ao seu sinal de desigualdade e seguiram as fases de resolução de problemas segundo Pólya. Um dos objetivos de Pólya era que conseguissem generalizar o modo de resolução. Convém salientar que os alunos se consciencializaram de que os problemas da vida real existem, identificando-se com este problema. Esta identificação proporcionou uma melhor compreensão da aplicabilidade dos conteúdos – inequações – nos problemas do quotidiano, pelo simples facto de o enunciado e os dados do problema serem similares ao sucedido na visita de estudo aos Açores experienciada pelos alunos.

Com o problema n.º 2 – “Campo de futebol” – os alunos começaram a compreender que a utilização de inequações na resolução destes problemas seria uma mais-valia. Assim, o Par refletiu uns instantes e escreveu uma expressão algébrica, onde associou o enunciado do problema à expressão a usar – o dobro da diferença entre a rede disponível e a rede necessária –, conseguiu elaborar um plano recordando-se que é necessário saber o perímetro, executou-o tendo em atenção o referido durante a aula de acordo com a alteração do sentido do sinal de desigualdade quando o coeficiente da variável é negativo e confirmou a solução com o cálculo do perímetro do campo. No entanto, quando relacionou a solução obtida com o enunciado constatou que a resposta não se encontrava correta, mas manteve-a devido à falta de tempo para a alterar.

B: Isto são medidas, é como o da mala (T1 Problema n.º3).

D: Não nos podemos esquecer que temos que fazer o perímetro.

(...)

B: Bem, o dobro da diferença entre a rede disponível e a rede necessária é superior a 20 metros. É $2(50 - r) > 20$, não é?!

D: Sim.

De seguida, na Figura 4.5, apresenta-se a resolução entregue pelos alunos, assim como o diálogo relativo à alteração do sinal de desigualdade e a solução.

Figura 4.5 — Resolução do problema 2 – T2 pelo Par 1

50 m rede
 $r =$ rede necessária
 $2(50 - r) > 20$
 $100 - 2r > 20$
 $-2r > -80$
 $r < 40$
 $P = 2x + 2(3x) =$
 $= 2 \times 5 + 6 \times 5 =$
 $= 10 + 30 =$
 $= 40 \text{ m.}$
 R.: Sim tem razão, a largura é 5m.

B: Aqui dá menor que 40 e o perímetro dá igual a 40. Então a direção tem razão.

D: Não! Menor que 40 não é igual a 40.

B: Pois... No enunciado diz superior a 20. Então, isto está tudo mal!

(...)

D: Põe igual no maior, temos feito sempre com o igual.

B: Ok, assim ficam iguais e também não temos tempo para voltar a fazer.

Conclui-se que o Par, de acordo com a heurística de Pólya, compreendeu o problema, estabeleceu um plano considerando um problema já trabalhado, visto tratar-se de medidas - problema n.º 3 da T1: *Dimensão de uma mala* –, executou-o, embora não tenha examinado a solução obtida adequadamente. Analisando os dados como resposta às questões de investigação, o Par apresentou uma expressão algébrica que traduzia o enunciado, mas ficam

dúvidas quanto a saber se o Par compreendeu efetivamente o enunciado, devido à solução obtida e à sua discussão. De facto, não se discutiu convenientemente a solução, tendo o Par dado a primeira resposta que lhe surgiu, que é uma resposta incorreta ao problema.

4.1.4 Análise da Tarefa n.º 3

O propósito dos problemas da tarefa n.º 3 consistia em os alunos identificarem as inequações em problemas do seu quotidiano. Para além de resolverem os problemas, era pretendido que associassem cálculos usuais, como o cálculo de médias, aos conteúdos lecionados, assim como que desenvolvessem várias estratégias de resolução – fase dois da heurística de Pólya. Porém, com o problema n.º 2, acrescia a obrigatoriedade do uso da conjunção ou disjunção – neste caso, conjunção - e, consequentemente, a discussão da solução.

A abordagem do Par ao problema n.º 1 – “Notas de matemática” - evidenciou a sua familiaridade com a situação abordada. O Par respondeu rapidamente, mostrando conhecer a forma de determinar a média das fichas. Confirmou com a investigadora se podia usar inequações, obtendo uma resposta positiva e apresentou a sua resolução conforme é apresentado na figura – Figura 4.6.

Figura 4.6 — Resolução do problema 1 – T3 pelo Par 1

1 ano - 6 fichas

1ª f. - 50%

2ª f. - 90%

3ª f. - 78%

4ª f. - 72%

5ª f. - x

$$\frac{50 + 90 + 78 + 72 + x}{5} \geq 70$$

$$\frac{290}{5} + \frac{x}{5} \geq 70$$

$$58 + \frac{x}{5} \geq 70$$

$$\frac{x}{5} \geq 12$$

$$x \geq 60$$

R.: A nota mínima que a Catarina poderá ter na ficha é 60%.

Foi alcançado sucesso na resolução do problema. O Par mostrou-se confiante com a solução, não sentindo a necessidade de a verificar, de um modo exaustivo, devido ao facto de estarem familiarizados com o cálculo de médias dos testes para a sua autoavaliação e por identificar este problema com os problemas do seu quotidiano. Observa-se que, neste problema, o Par percorreu todos os passos da heurística de Pólya – *Como resolver um problema*.

O Par demonstrou alguma hesitação na resolução do problema n.º 2 – “Andar de táxi” - devido ao facto de não terem sido praticados exercícios semelhantes na sala de aula, tal

como ilustrado no diálogo seguinte. Consta-se que associou este problema à matéria lecionada anteriormente – conjunção e disjunção.

B: A bandeirada é 3,44€.

D: Temos que multiplicar por x , que é a distância, os 90 cêntimos, e somar à bandeirada.

B: Também acho que temos que usar aquela cena do “e”.

D: É o suposto! E temos que fazer com inequações.

(...)

(escreveram $20 < 3,44 + 0,9x < 30$)

B: Agora não sei como fazemos. Não sei como calculamos isto com três coisas, temos que cortar uma, qual queres?

D: Ficamos com a do 20.

Deste modo, decidiu esclarecer com a investigadora qual o caminho a seguir:

B: Stora, como calculamos com três coisas? Não sabemos.

I: Então o que estivemos a falar agora na aula? Quando temos $20 < 3,44 + 0,9x < 30$ é equivalente a termos o quê? Como se lê esta expressão?

B: Isto entre 20 e 30. Duas inequações com o sinal “e”. O sinal “e” é para cima ou para baixo?

D: “E” é para baixo ($\wedge$).

I: Exatamente, depois conseguem calcular separadamente ou não?

B: Ahh! Já percebi, já percebi. Calculamos esta e depois a outra.

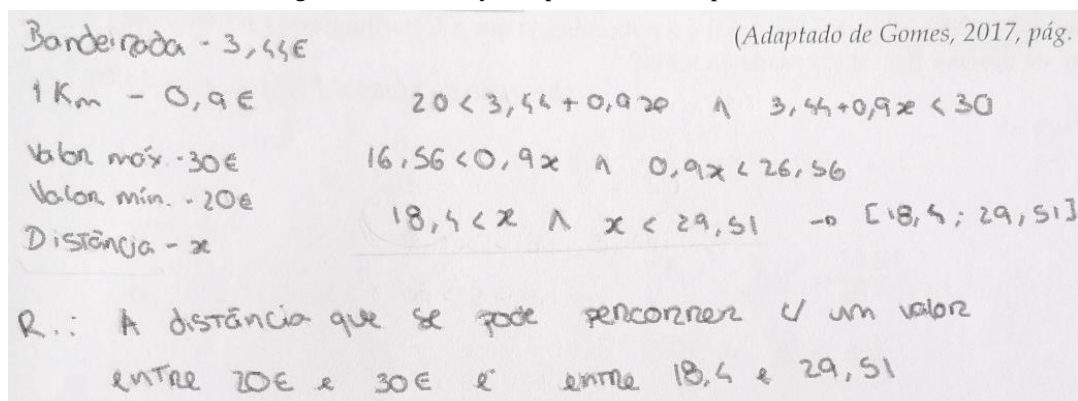
I: Pois!

B: E ficamos com valores entre tanto e tanto.

I: Boa, isso mesmo.

Após o diálogo anterior, o Par resolveu as inequações separadamente, apresentando os cálculos na folha de resposta como apresentado na Figura 4.7. Apesar de o sinal de desigualdade nas inequações não estar correto, estando em falta a igualdade, o Par apresentou o conjunto solução corretamente. De acordo com o conjunto solução, o Par deu a resposta ao problema, solicitando o apoio da investigadora.

Figura 4.7 — Resolução do problema 2 – T3 pelo Par 1



Estando com dúvidas na resposta a dar, solicitou, novamente, o apoio da investigadora, para interpretar o conjunto solução:

B: E agora temos este conjunto solução $([18,4;29,51])$ subtraímos um pelo outro?

I: O que está a ser perguntado no enunciado?

D: Determine a distância que se pode percorrer com um valor entre 20 e 30€.

I: Qual é a vossa incógnita?

B: É o x .

I: Que representa o quê?

B: A distância. Então a distância que pode percorrer é 18,4 e 29,51.

D: A distância que pode percorrer é entre 18,4 e 29,51km.

Tal como tem acontecido nos problemas anteriores, os alunos têm conseguido expor todas as ideias e resolver os problemas com inequações com facilidade. Neste problema, existiu a dificuldade de discutirem a solução para responderem ao que era pedido no enunciado – resposta ao problema. Assim, foi necessária uma interpelação ou sugestão da investigadora para conseguirem prosseguir e dar a resposta ao problema. Segundo Pólya (2003), a interpelação e sugestão “é procurar realmente ajudar o aluno, com discrição e naturalidade”, é “fazer sempre a mesma pergunta: Qual a incógnita? Do que é que se precisa? O que se quer procurar?”, visando “sempre o mesmo efeito: provocar a mesma operação mental” (p.24). Como suprarreferido nos diálogos, o objetivo foi atingido.

4.1.5 Análise da Tarefa Complementar

Nesta tarefa, como já mencionado, foi apresentado um problema considerado com um grau de dificuldade elevado, para esta faixa etária. Recorda-se que, nesta fase da investigação, a turma já tinha aprendido todos os conteúdos inseridos no tema das inequações. Deste modo, os alunos tinham adquirido mais conhecimentos para a resolução do problema, não obstante a utilização de outras estratégias de resolução.

Para este problema, a estratégia implementada foi a separação do problema por etapas para, posteriormente, se dar a reunião das soluções de cada etapa, chegando-se a uma expressão simplificada, na forma de inequação, para uma resolução direta e simples. Ao longo da leitura do enunciado, o Par descreveu os passos a tomar para a resolução de cada etapa. Deste modo, observando a Figura 4.8 e com o excerto da entrevista, descreve-se o plano de execução do Par: separou cada etapa para obter a solução pretendida através da resolução de expressões algébricas; calculou a expressão para o salário com as horas extra e calculou os 5% simplificando a expressão. Partindo desta, calculou o valor quando retirado o desconto de 8,5%, para o Estado, e por fim obteve a expressão final com a diferença

entre as expressões do salário bruto e os descontos. Assim, com a expressão simplificada, elaborou a inequação e calculou-a.

Figura 4.8 — Resolução TC pelo Par 1

(Retirado de Gomes, 2017, pág. 225)

$$\begin{aligned}
 &500\text{€ / mês} \\
 &10\text{€ / hora extra} \\
 &5\% \text{ de } 500 + 10x \\
 &- 8,5\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (500 + 10x) \times 0,05 &= 25 + 0,5x \\
 500 + 10x + 25 + 0,5x &= 525 + 10,5x \\
 (525 + 10,5x) \times 0,085 &= 44,625 + 0,8925x \\
 (525 + 10,5x) - (44,625 + 0,8925x) &= 480,375 + 9,6075x \\
 480,375 + 9,6075x &> 1000 \\
 9,6075x > 1000 - 480,375 \\
 9,6075x &> 519,625 \\
 x &> \frac{519,625}{9,6075} \\
 x &> 54
 \end{aligned}$$

R.: Ele deverá trabalhar no mínimo 54 horas extra.

I: Identificaram a incógnita?

D: Sim, então a incógnita foi o x e é as horas extra. É quantas horas ele tem que fazer para ganhar um salário superior a 1000€.

I: Souberam de imediato o que iam fazer para escrever a inequação?

B: Não, primeiro analisámos um bocado mais os dados... Pronto, o que era suposto fazer ou não. Depois escrevemos a inequação, mas antes fizemos por partes...

D: Conforme líamos, íamos escrevendo.

I: Qual o significado de cada parte ou expressão que escreveram?

B: Temos os 500€ que é o salário base e somámos $10x$, onde os $10x$ eram as horas extras. E fomos descobrir quanto eram 5% do salário mais $10x$. Depois somámos ao salário para saber quanto recebia.

D: Como tínhamos que saber quanto eram os descontos fomos descobrir quanto eram os 8,5% e subtraímos ao salário.

B: Simplificámos e escrevemos a inequação do problema.

I: Verificaram a solução?

D: Não, não tivemos tempo.

Segundo o que foi apresentado acima, os alunos revelaram conhecimentos nos conceitos e agilidade no raciocínio e nos cálculos da inequação, assim como na solução relacionada com a resposta ao enunciado. Demonstraram saber as fases de resolução de problemas – segundo Pólya – e expressaram a sua opinião relativamente aos problemas do quotidiano:

I: Quais são os passos para resolver um problema?

B: Primeiro: Ler com atenção.

Segundo: Escrever os dados ou não, mas normalmente ajuda.

Terceiro: Escrever uma expressão que traduza o problema.

Quarto: Resolver essa expressão

Quinto: Dar a resposta no final... Discutir os resultados... Sim, é assim.

(...)

I: O que pensaram da tarefa?

B: Era difícil porque era diferente do que tínhamos feito e ninguém gosta de percentagens (risos).

D: Mas este e os outros problemas serem sobre coisas mais comuns do nosso dia-a-dia ajuda-nos a perceber melhor.

B: Sim, porque se fosse só expressões matemáticas e linguagem matemática acho que não saberíamos onde se aplicavam e seriam mais difíceis.

D: Também este foi muito útil para juntarmos mais coisas às inequações, era diferente por causa das percentagens.

O objetivo pretendido era a descrição de cada expressão ou etapa, de modo a que se compreendesse o raciocínio dos alunos relativamente à resolução de problemas – heurística de Pólya – e foi alcançado com sucesso.

4.1.6 Análise final

Nos primeiros problemas, os alunos escolheram o processo mais simples, com que estavam mais familiarizados, a divisão, no entanto, com o grau de dificuldade crescente dos problemas e o aumento da compreensão dos conteúdos – inequações – passaram a considerar implementar as inequações nas suas resoluções. Na primeira tarefa, recorreram à divisão e, posteriormente, às equações, demonstrando mais agilidade na tradução do enunciado de linguagem verbal para linguagem algébrica. Nos restantes problemas, as traduções para linguagem algébrica passaram para o tema envolvido nos problemas – inequações.

Durante o processo de resolução, os alunos implementaram as fases de resolução de problemas segundo Pólya. Compreenderam com facilidade os problemas propostos, implementaram uma estratégia de resolução de acordo com a sua sensibilidade e, por vezes, optaram pela estratégia mais fácil ou problemas semelhantes. Apresentaram a resposta correta a todos os problemas propostos exceto a um, talvez pela falta de tempo para a discussão da solução.

De uma forma geral, durante e após a resolução das tarefas, o Par 1 demonstrou de forma proveitosa a aquisição e compreensão dos conteúdos. Os alunos mostraram uma evolução na aplicação das aprendizagens, sendo que os problemas da vida real parecem ter facilitado a compreensão dos problemas e a aplicabilidade das inequações.

4.2 Estudo de caso - Par 2 (Mara e Susana)

4.2.1 Caracterização do Par

Mara é a melhor aluna da turma em termos de classificações, é dedicada, muito trabalhadora, com gosto pela matemática e participativa nas aulas, estando constantemente com resposta pronta e assertiva. É uma pessoa bastante reservada e tímida, revelando-o nas suas intervenções com um tom de voz muito baixo, sendo necessário a solicitação da sua repetição mais do que uma vez. Apresenta facilidade na compreensão de novos conteúdos, sabedoria e agilidade na resolução de qualquer tarefa nas aulas. No presente ano letivo, obteve o nível 5 nos dois primeiros períodos a matemática assim como nas restantes disciplinas.

Susana manteve o nível 3 nos dois primeiros períodos do corrente ano letivo. É uma aluna com indicação de problemas leves de aprendizagem. É bastante trabalhadora, realiza com sucesso todos os trabalhos para casa, é organizada e preocupada em esclarecer as suas dúvidas com a colega de carteira.

4.2.2 Análise da Tarefa n.º 1

No problema n.º 1, tal como o primeiro Par, a estratégia de resolução foi a divisão. O Par executou o primeiro processo de que se lembrou, que era o mais rápido. Deu a resposta correta rapidamente e nem considerou necessário verificar a solução.

No segundo problema, o Par começou a questionar-se sobre como o poderia resolver com inequações, abandonando de imediato essa ideia. A Mara ficou a pensar em como o poderia fazer, mas ficou com dúvidas no preço do *skate*. Prosseguiram com o plano de resolução da Susana: fazer a soma do valor que o aniversariante tinha recebido - 60€ - e somar 16 euros por cada semana. Deste modo, contou o número de vezes que introduzia o número “16” e chegou ao número de semanas correto. Para estes cálculos, usou a máquina de calcular, não os tendo registado na folha de resposta. Antes de chegar à resposta correta, o Par confrontou a solução obtida com o texto do enunciado “ele poupou mais do que o necessário” e apercebeu-se de que a resposta inicial não coincidia com o texto.

S: Acho que temos que fazer $60+16+16+16\dots$ até ver quantos “16” são.

Assim sabemos as semanas.

M: Pois não sei.

S: Uma semana deu 76.

M: Como sabemos isto se não sabemos quanto é o skate?

S: Porque ele poupou mais do que os 180.

M: Como sabemos que dá para comprar o skate?

S: O *skate* é 180.

M: “Ele poupou mais do que os 180”... Ahhh! 180, tens razão. Eu pensava que ele tinha poupado mais 180 do que era necessário, mas não.

(...)

M: Eu acho que é suposto fazermos com uma inequação.

(...)

S: Então $16 \times 7 + 60$ dá?

M: Sim, são sete semanas. Sei que isto é por tentativas, mas pronto, já está feito... Vamos passar à frente porque não temos tempo. Escreve aqui “por tentativas”.

S: Mas isto não dá 180. Queres que ponha mais uma semana?

M: Sim, exato “ele poupou mais do que o necessário” como diz o enunciado. Põe, põe 8 semanas.

Na 2.^a entrevista, posterior à entrega da sua folha de resposta – Figura 4.9 - a investigadora perguntou porque não traduziram o enunciado, a resposta foi que tinham traduzido.

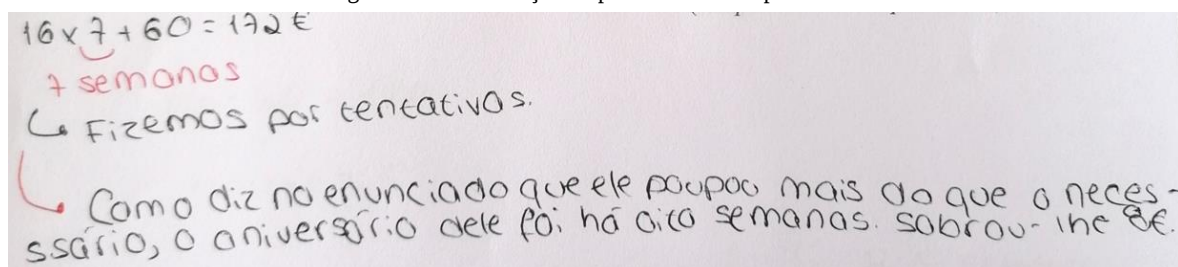
I: Então neste problema não conseguiram traduzi-lo para uma expressão algébrica?

M: Pusemos $16x + 60$ para nos dar o número de semanas.

S: Ya, foi isso literalmente.

M: E o x era o número de semanas mínimo. Esse era o valor mínimo. Podia até ser mais, mas o Valentim bastava ter os 180€ para comprar o seu skate. Acho que é isso que traduz.

Figura 4.9 — Resolução do problema 2 – T1 pelo Par 2



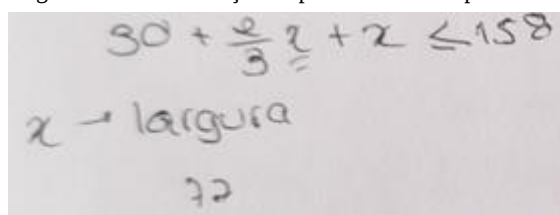
A investigadora e o Par observaram a folha de resolução, apresentada na Figura 4.9, na qual se constata que a resolução foi feita por tentativas e sem expressão algébrica.

I: O que é uma expressão algébrica?
 S: Acho que é uma expressão com letras e números.
 M: Exato, como uma equação.
 I: O que aqui têm é uma expressão numérica.
 M: Pois até podíamos ter escrito a expressão algébrica mas não conseguíamos resolver porque ainda não tínhamos dado isso.
 S: É como resolver uma equação.

Após o sucedido, concluiu-se que o Par, se tivesse mais tempo para resolver, teria escrito uma expressão algébrica que traduzisse o enunciado, explorando outra estratégia de resolução. Com a entrevista, o objetivo foi alcançado, dado que as fases de resolução de problemas segundo Pólya foram aplicadas na resolução deste problema. Existiu uma pequena discussão sobre os dados, a elaboração e execução de um plano e a contextualização da resposta a dar.

A leitura do problema n.º 3 fez com que o Par iniciasse uma conversa fora do intuito da investigação e esta distração fez com que não tivesse tempo para completar a resolução do problema. Perante este facto, apresentou a expressão algébrica em forma de inequação que traduzia o enunciado mas não a sua resolução – Figura 4.10.

Figura 4.10 — Resolução do problema 3 – T1 pelo Par 2



The image shows a piece of paper with handwritten text and a mathematical expression. The expression is $30 + \frac{2}{3}x + x \leq 158$. Below it, the text "x - largura" is written, and at the bottom, the number "72" is written.

Posteriormente, na entrevista, houve um breve diálogo sobre a sua resolução.

I: Aqui traduziram o problema numa expressão algébrica mas não apresentam a resolução. O que se passou?
 M: Ficámos sem tempo, mas fizemos $30 + \frac{2}{3}x + x \leq 158$ que nos deu $x \leq 76,8$, que é a altura máxima.
 S: Esta expressão representa a largura máxima que se pode utilizar. Não podemos usar maior que isto.

Apresentaram com agilidade e rapidez a tradução do enunciado numa inequação e, embora não a tenham resolvido no momento, resolveram-na posteriormente. Na resolução no momento de aula, os primeiros passos da heurística de Pólya – *compreensão do problema e estabelecimento de um plano* - foram abordados, onde apresentam uma expressão algébrica, mas a solução estava incorreta, ficando em falta os passos de execução do plano e a verificação da solução, embora estes passos tenham sido concretizados posteriormente e referidos na entrevista.

4.2.3 Análise da Tarefa n.º 2

Assim como o Par 1, o Par 2, no problema n.º 1, fez o cálculo da diferença entre o valor que o Joaquim tinha e o dinheiro com as passagens. No decorrer da leitura do problema, registou os dados na folha de resposta. Discutiu sobre dois processos de resolução: inicialmente, com base no cálculo em separado do valor que o Joaquim iria gastar por dia – tal como o Par 1 ($30 + 75 = 105$) - e o segundo plano, que posteriormente seguiu, foi o de apresentar a inequação com estes valores em separado, ou seja, traduziu literalmente o enunciado do problema algebricamente, como apresentado na Figura 4.11.

Figura 4.11 — Resolução do problema 1 – T2 pelo Par 2

1250 - 375 = 875 €
30€ por dia
75€ estadia diária
 $x \rightarrow n.º \text{ de dias}$
 $30x + 75x \leq 875 \Rightarrow$
 $\Leftrightarrow 105x \leq 875 \Rightarrow$
 $\Leftrightarrow x \leq \frac{875}{105} \Rightarrow$
 $\Leftrightarrow x \leq 8,3$
R.: O Joaquim pode ficar hospedado 8 dias, no máximo.

M: Bem, escrevemos já $1250 - 375 = 875$.

S: Também podemos fazer já o dinheiro que ele gasta por dia que é $30 + 75$.

(...)

M: O que queres fazer? Vamos fazer uma inequação, o que achas?

S: Eles estão a perguntar quantos dias ele pode ficar.

M: Então podemos pôr x e... Pomos, por exemplo, x é o número de dias.

Agora, vamos ver como isto vai ficar: $30x + 75x \leq 875$.

S: Faz sentido.

M: Sim, agora faz muito mais sentido.

(...)

S: Dá 8,3. A resposta é que ele pode ficar 8 dias.

M: Isto é giro. Já estou entusiasmada com as inequações.

Como exposto acima, o Par 2 mostrou entusiasmo na resolução de problemas aplicando inequações. O objetivo foi alcançado com sucesso, visto que escreveu a expressão algébrica que traduzia o problema – *compreensão do problema* -, discutiu entre duas estratégias qual ia utilizar – *estabelecer um plano* -, executou-a e interligou a solução com o que era pretendido – *execução e verificação*.

Com o problema n.º 2 e o receio de não ter tempo para terminar, o Par iniciou automaticamente a tradução do enunciado numa expressão algébrica em forma de inequação, identificou a incógnita e resolveu rapidamente a inequação.

S: A variável é a rede necessária.

M: Então, x é a rede necessária. Temos, o dobro da diferença entre a rede disponível e a rede necessária é superior a 20 metros logo é $2(50 - x) > 20$.

Depois de resolver a inequação, e devido ao facto de o enunciado questionar se a largura do campo é igual a cinco metros ou não e a solução da inequação dar um valor bastante diferente, surgiram dúvidas – Figura 4.12.

Figura 4.12 — Primeira tentativa de resolução do problema 2 – T2 pelo Par 2

$$\begin{aligned} 2(50 - x) &> 20 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 100 - 2x &> 20 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2x &> 20 - 100 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2x &> -80 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &< 40 \end{aligned}$$

O Par verificou que da figura que acompanhava o enunciado constavam dados que não foram considerados. Posto isto, concluiu que o problema ainda não estava resolvido. Com estes dados e com a solução da inequação resolvida na primeira tentativa de resolução, decidiu fazer uma nova inequação para resolver a questão do problema – Figura 4.13 - obtendo um valor igual ao questionado, mas com um sinal de desigualdade e não com o de igualdade.

Figura 4.13 — Continuação da resolução do problema 2 – T2 pelo Par 2

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \text{rede necessária} \\ 6x + 2x &< 40 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8x &< 40 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &< \frac{40}{8} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &< 5 \\ \text{R.: A largura não pode ser igual} \\ \text{a 5 metros, e menor do que 5} \\ \text{metros. A Direção da escola} \\ \text{não tem razão.} \end{aligned}$$

Para terminar e esclarecer todas as dúvidas existentes, o Par foi verificar a solução obtida substituindo a variável, na segunda inequação, pelo valor.

M: Aqui temos que ter menor que 5 ou igual?

S: Temos bem é menor. A Direção pode não ter razão.

M: Opah! Deixa-me confirmar, vamos pôr aqui o 5 e verificamos se está bem. $3 \times 5 + 3 \times 5 + 5 + 5$

S: Deu quanto?

M: 40 mas x tem que ser menor que 40. Acho que estamos certas.

Resumindo, o Par atingiu com sucesso o objetivo não só desta tarefa, mas de todas as tarefas propostas. Nas suas discussões e registo de resolução, compreenderam o problema e traduziram-no algebricamente, planearam e executaram uma estratégia, verificaram que não era suficiente para a resposta adequada, planearam uma nova estratégia como complemento à anterior. Não satisfeitas com o resultado, verificaram a solução, dando a resposta correta ao problema. Por fim, questionaram a investigadora, na suspeita de terem a sua análise e resolução do problema incorretas.

4.2.4 Análise da Tarefa n.º 3

O Par 2, no primeiro problema, sentiu reservas em relação à aplicação de inequações, comentando que sem a utilização destas seria bem mais fácil. Após um momento de discussão sobre o cálculo da média, traduziu o enunciado com facilidade, resolveu rapidamente e concluiu com agilidade a resposta – a sua resolução foi similar à apresentada pelo Par 1. Assim, o objetivo foi alcançado com sucesso. O Par demonstrou-se confiante com a solução.

No problema n.º 2, o Par não associou este problema à matéria lecionada anteriormente na aula – conjunção e disjunção –, logo, ficaram por considerar alguns dados fornecidos no enunciado, conforme diálogo:

S: A corrida é 3,44€.

M: Eu acho que é $3,44 \times x \times 0,9$... Calma, é $3,44 + x \times 0,9$.

S: Então, $3,44 + 0,9x \leq 30$.

M: E o 20?

S: Depois pensamos nisso.

Deste modo, a resolução do problema apresentada foi semelhante à resolução do Par 1 - decidiu traduzir uma parte do enunciado numa inequação -, embora este Par tenha ignorado a conjunção associada ao problema. Tal como relatado, as alunas optaram por ignorar parte dos dados fornecidos, obtendo uma solução incompleta. O Par demonstrou desinteresse em resolver os problemas desta tarefa e não apresentou discussões relevantes para a investigação. Constatou-se, assim, que o Par não aplicou todos os conhecimentos adquiridos até ao momento.

4.2.5 Análise da Tarefa Complementar

Mediante a resolução do Par 2 – Figura 4.14 – podemos perceber que o mesmo começou por concentrar as suas ideias nos dados, complexos, que se apresentavam. Após ter implementado a estratégia de traduzir o enunciado no momento em que o lia, resolveu através de uma inequação.

Figura 4.14 — Resolução TC pelo Par 2

• 10 € por hora
 • 500 € salário
 • $\frac{5}{100} \times 500 + x$
 25

$x \rightarrow x \text{ horas extras}$
 horas extras

$$500 + 10x + \frac{5}{100} \times (500 + 10x) - 0,085 \left[500 + 10x + \frac{5}{100} (500 + 10x) \right] > 1000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 500 + 10x + 25 + 0,5x - 0,085(500 + 10x + 25 + 0,5x) > 1000 \Leftrightarrow 10,5x + 500 + 25 - 42,5 - 0,85x - 2,125 - 0,0425x > 1000$$

$$\Leftrightarrow 9,65x - 0,0425x > 1000 - 500 - 25 + 42,5 + 2,125 \Leftrightarrow 9,6075x > 519,625 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{519,625}{9,6075} \Leftrightarrow x > 54,0853499, \dots$$

R: deveria trabalhar 54 horas extras num mês para receber um salário superior a 1000 € de salário.

A investigadora inquiriu o Par com o intuito de perceber o seu raciocínio:

I: Expliquem o significado de cada termo das expressões que escreveram.

S: 10 era o valor por hora extra e 500 era o salário. Ah... o x era as horas extra. Somámos os 10x aos 500.

M: Depois adicionámos os 5% do salário com as horas extra. E tirámos os 8,5% de tudo o que recebia. Este problema é muito engraçado.

S: É interessante.

I: Depois verificaram o resultado?

M: Sim, não foi uma coisa muito rigorosa, mas fomos substituir o x por 50 horas para ser mais fácil e deu um número mais baixo do que 1000€... Por isso está bem.

(...)

I: O facto de o problema estar presente no teu quotidiano, ajudou-vos na sua compreensão? De que forma?

S: Sim, acho que sim, são coisas que estão sempre a acontecer.

M: Acho que são sempre mais fáceis de compreender porque são uma realidade.

I: O que pensam sobre a tarefa que realizaram nesta entrevista?

S: Achei que pensei demais (risos). Achei um pouco complicado, mas ainda bem que fiz com a Mara senão não sabia se conseguia resolver.

M: (risos) A sério, tu também ajudaste imenso é por isso que isto é tão giro. Gosto de trabalhar a pares por causa da entreaajuda.

I: Que dificuldades sentiram e em que partes da resolução se sentiram mais à vontade?

S: A conta do fim que fizemos logo na calculadora (risos).

M: Não, não, na parte de escrever a inequação foi a que me senti mais à vontade e a mais difícil foi a parte dos 8,5%.

As alunas foram da opinião que este problema era muito interessante e engraçado por ser um problema corrente na sua vida. Resolveram-no diretamente sentindo alguma dificuldade no cálculo das percentagens, não sentindo necessidade de identificarem um problema semelhante, embora o tenham feito inconscientemente. O objetivo foi alcançado, visto que as etapas e os raciocínios aplicados nas resoluções foram descritos pormenorizadamente e as fases de resolução de problemas, segundo Pólya, foram cumpridas. Compreenderam o problema, identificaram os dados e a incógnita com exatidão. Como já referido, houve associação a um problema similar – cálculo de percentagens e inequações – criando a estratégia de registarem as traduções de linguagem verbal, presentes no enunciado, em linguagem algébrica. Executaram a sua estratégia, verificaram a solução substituindo a variável por um valor e discutiram a solução com o problema.

4.2.6 Análise final

Nos primeiros problemas, verificou-se que as alunas apresentaram-se receosas em ajustar os conteúdos acabados de aprender aos problemas propostos, implementando as estratégias que acharam mais adequadas. No entanto, quando questionadas, pela investigadora, sobre as suas resoluções, verificou-se que o par encontrou disponibilidade e interesse em resolver os problemas com inequações. No decorrer das aulas e na resolução das tarefas propostas para a investigação, o Par mostrou algumas fragilidades na implementação e resolução de conjunções de inequações. Convém referir que, no decorrer das aulas e das aprendizagens, o Par, com agilidade, executou a tradução dos problemas em expressões algébricas.

Este Par destacou-se na verificação da solução durante os processos de resolução dos problemas. Compreendeu os problemas propostos com facilidade e implementou uma estratégia de resolução. Demonstrou desinteresse na procura de novos planos de resolução, embora tenha apresentado a resposta correta a todos os problemas propostos exceto a um, talvez por esquecimento ou falta de tempo.

De uma forma geral, durante e após a resolução das tarefas, o Par demonstrou uma evolução na aplicação das aprendizagens, sendo que se acredita que os problemas do quotidiano tenham facilitado a compreensão dos problemas.

4.3 Estudo de caso - Par 3 (Rafaela e Leonor)

4.3.1 Caracterização do Par

Rafaela é uma aluna perspicaz, com facilidade em adquirir os conhecimentos no momento da sua leção, mostra interesse e um bom desempenho no desenvolvimento das atividades e executa as tarefas com agilidade.

Leonor é uma aluna que conversa bastante com a colega de carteira e mostra-se pouco empenhada no desenvolvimento de tarefas em sala de aula. Apresenta diversidade de raciocínios na realização de tarefas e tem capacidade de os explicar e comunicar aos colegas.

Ambas só intervêm na aula quando solicitado pela professora e mantiveram os níveis de classificação nos dois primeiros períodos: a Rafaela manteve o nível 4 e a Leonor o nível 3.

4.3.2 Análise da Tarefa n.º 1

Não evidenciando estratégias diferentes às dos Pares 1 e 2, no problema n.º 1, o Par 3 implementou a estratégia da divisão por ser um processo que utiliza no dia-a-dia, sendo o mais fácil e rápido de implementar.

Este Par resolveu o problema n.º 2 utilizando a mesma estratégia que o Par 1, no entanto, a resposta apresentada não foi a correta. Embora a solução – sete semanas e meia - tenha suscitado dúvidas num dos elementos do Par, onde comentou que “semanas” não podem ser metades, este abandonou de imediato a ideia depois de a sua companheira de grupo explicar a confirmação da solução, não a contextualizando com o enunciado do problema, e escrever a resposta na folha de resposta. De seguida, apresenta-se o diálogo entre as alunas.

R: Pegas nos 180€ tiras os 60 e depois divides por 16 que é o que ganha por semana.

L: Dá 120... Agora divido por 16... Isto dá 7... 7,5.

R: Então fez anos há 7 semanas e meia.

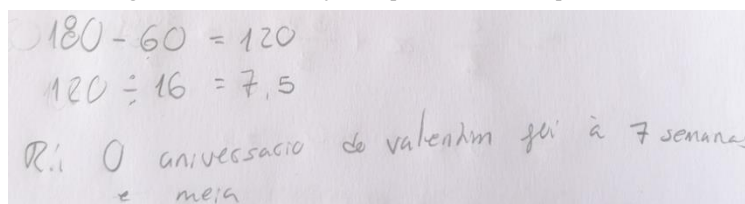
L: Achas! Não há meias semanas.

R: Há, olha $16 \times 6 \dots 16 \times 7 \dots 16 \times 7,5$ dá 120. Sete vírgula cinco semanas não há, mas sete semanas e meia há.

L: Pois há.

Após esta conversa apresentaram a resposta incorreta como consta na figura 4.15.

Figura 4.15 — Resolução do problema 2 – T1 pelo Par 3



$$180 - 60 = 120$$

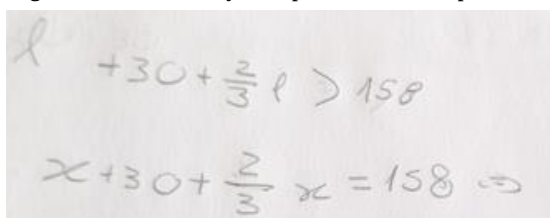
$$120 \div 16 = 7,5$$

R.: O aniversário de valentim foi à 7 semanas e meia

Exposto isto, o Par cumpriu com as fases de resolução de problemas segundo Pólya, embora a verificação e a contextualização da solução com o problema não tenha sido a correta.

Seguindo a leitura do problema n.º 3, o Par escreveu uma inequação que o traduzisse. Decidiu que o sinal de desigualdade seria o “menor” embora tenha registado o “maior” e ainda comentou se seria incluso ou não. De seguida resolveu o problema com uma equação – Figura 4.16.

Figura 4.16 — Resolução do problema 3 – T1 pelo Par 3



$$l + 30 + \frac{2}{3}l > 158$$

$$x + 30 + \frac{2}{3}x = 158 \Rightarrow$$

O Par 3, posteriormente, resolveu a equação ilustrada na figura anterior, tendo feito uma pausa para refletir sobre o cálculo de números fracionários, e apresentou a solução errada de 72 cm quando deveria ser 76,8 cm, no máximo. Esta resposta rápida deveu-se ao facto de o tempo para a realização da tarefa se ter esgotado.

Neste problema, estando sobre pressão do tempo, registaram uma inequação, mas, para resolverem o problema mais velozmente, decidiram-se por uma equação. Recordo que, no momento de realização desta tarefa, os alunos aprenderam exclusivamente a possível interligação das equações e os intervalos de números reais com as inequações. A heurística de Pólya não foi cumprida totalmente, visto que, se a *verificação* fosse concretizada, constatavam que a solução não estava correta.

4.3.3 Análise da Tarefa n.º 2

Ao ler o enunciado do problema n.º 1, o Par concluiu que seria mais adequado resolvê-lo por etapas. Iniciou pelo registo das informações fornecidas – dados – passando para a etapa do dinheiro com que o Joaquim ficava quando descontasse os gastos das viagens ao valor total que tinha. Seguiu-se o cálculo das despesas diárias – 30€ para refeições e 75€ para estadia – obtendo a soma de 105€ diários. A estratégia da divisão manteve-se,

fácil do que a tradução do enunciado e a sua resolução por meio de inequações. Deste modo, de acordo com a resolução apresentada na figura 4.17, as alunas obtiveram a solução correta, sem quaisquer dúvidas e questões.

Figura 4.17 — Resolução do problema 1 – T2 pelo Par 3

$T = 1250 \text{ €}$
 $G = 375 \text{ €}$
 $R = 875 \text{ €}$
 $1250 - 375 = 875$
 $30 \text{ €} / \text{dia} - \text{re}$
 $75 \text{ €} / \text{dia} - \text{estadia}$
 $1 \text{ dia} = 30 + 75 = 105 \text{ €} / \text{dia}$
 $875 : 105 \approx 8 \text{ noites}$
 R: Ele pode ficar 8 noites no hotel.

A investigadora, tentando direcioná-las, sem sucesso, para a resolução através de inequações, interpelou:

- I: Olhando agora para o problema, sabem qual é a incógnita?
 L: Sim, é o número de noites.
 I: E o que é uma inequação?
 R: É a desigualdade entre dois membros.
 I: Sabem quais os passos para se resolver uma inequação?
 L: Isolar o x .
 R: Não, primeiro temos de desembaraçar de parêntesis, depois de denominadores, depois temos de isolar o x e resolver.
 I: Como têm aqui um problema, quais os passos para resolver um problema?
 L: Ver os dados, verificar os dados e resolver a inequação.
 I: Conseguiram tirar os dados, sabem a incógnita, sabem resolver inequações, porque não resolveram por inequações?
 L: Lá está a stora... Como fizemos é muito mais simples, agora escrever a inequação é um stress.
 R: Ya, stora, assim foi muito melhor. Isso mata-nos a cabeça.

Verificando o desinteresse por outra estratégia de resolução, a investigadora não insistiu. A tradução do enunciado numa expressão algébrica não foi alcançada, como nos outros pares, mas a estratégia utilizada foi a fragmentação do problema original em problemas básicos e de fácil resolução para o Par. As fases de resolução de problemas segundo Pólya foram implementadas, ficando a faltar a verificação da solução, embora o Par seja da opinião de que a fragmentação em “mini problemas” fosse uma verificação imediata, por se tratar de cálculos do 1.º ciclo do ensino básico.

No segundo problema, o Par sentiu alguma hesitação em traduzir o significado de “o dobro da diferença”. Após uns momentos de pausa, elaborou a expressão algébrica correspondente, conforme a figura 4.18, e conseguiu, deste modo, traduzir todo o enunciado numa inequação e resolvê-la.

Figura 4.18 — Primeira tentativa da resolução do problema 2 – T2 pelo Par 3

$$\begin{aligned}
 2(50 - x) &> 20 \quad (\Rightarrow) 100 - 2x > 20 \quad (\Rightarrow) \\
 &(\Rightarrow) -2x > 20 - 100 \quad (\Rightarrow) -2x > -80 \quad (\Rightarrow) \\
 &(\Rightarrow) -x > -\frac{80}{2} \quad (\Rightarrow) x < \frac{80}{2} \quad (\Rightarrow) x < 40
 \end{aligned}$$

Houve uma pequena discussão relativa ao sinal de desigualdade e em que momento dos cálculos este mudava de sentido, visto que o coeficiente da variável é negativo. Entretanto, na resposta ao problema, depararam-se com uma incoerência, criando uma nova discussão – dados interessantes para a questão n.º 4 da investigação: “Qual a análise que os alunos fazem entre a solução obtida e a resposta ao problema?”.

L: Escreve: “não tem razão”, pois a largura tem que ser menor que 40. Não, escreve “a afirmação está incorreta tendo em conta que a resposta é 40”

R: Espera, “a direção afirma que o campo tem 5 metros de largura”.

L: O quê mais uma?

R: Isto está aqui a dar isto (figura ilustrativa do campo com x m de largura e $3x$ de comprimento) e nós não vimos. O que é a largura?

(risos)

R: Nós decidimos que a largura é o x . Portanto se $x = 5$ logo $5 < 40$... Vamos achar o perímetro.

L: Perímetro do retângulo é lado mais lado mais lado mais lado.

R: Isso está “erradíssimo”, como é um retângulo é lado mais lado mais comprimento mais comprimento.

Como presente no diálogo, as alunas confirmaram que a resposta estava incorreta, verificando todos os dados existentes na folha do enunciado. Elaboraram um plano suplementar e calcularam o perímetro substituindo a variável por cinco, obtendo, assim, a resposta – Figura 4.19.

Figura 4.19 — Continuação da resolução do problema 2 – T2 pelo Par 3

$$\begin{aligned}
 P_{\text{retângulo}} &= L + L + C + C \quad (\Rightarrow) 5 + 5 + 3 \times 5 + 3 \times 5 \quad (\Rightarrow) \\
 &= 5 + 5 + 15 + 15 = 10 + 30 = 40
 \end{aligned}$$

Confrontando as soluções obtidas – Figuras 4.18 e 4.19 –, concluíram que a resposta inicialmente pensada estava correta, ou seja, a direção da escola não tinha razão quando disse que a largura era de cinco metros, devido ao facto de quarenta ser diferente do que menor que quarenta.

Resumindo, o Par apresentou uma expressão algébrica – inequação –, não espelhando os dados na totalidade, levando a concluir que as alunas implementaram uma estratégia de resolução por etapas e verificaram a solução obtida. Exposto isto, o objetivo com a resolução deste problema foi alcançado, aplicando-se ainda todas as fases de resolução segundo Pólya.

4.3.4 Análise da Tarefa n.º 3

No problema n.º 1 – “Notas de matemática” –, o Par, estando familiarizado com o cálculo das médias, realizou a média da Catarina com as notas que foram fornecidas. No entanto, verificou que não obtinha a resposta ao que era solicitado. Releu o problema e concluiu que teria de incluir a variável. Não apresentou o seu raciocínio na folha de resposta, mas ficou registado no áudio uma expressão algébrica que traduzia o enunciado. Também discutiu que o sinal de desigualdade seria o “ $\geq$ ” e não o sinal de menor, conforme relatado no diálogo abaixo.

R: A média dos testes dela dá 72,5.

L: Então se pusermos 70 no outro teste ela já tem 70.

R: Mas temos que saber qual a nota mínima. Ah, fizemos mal, esta média tem que ser mais x que é o quinto teste e dividir por cinco.

L: E ser menor... “não inferior que 70” então maior que 70.

R: Calma, pode ter 70 então está incluído logo é “ $\geq$ ”. Então sabemos que $290 + x \geq 70$.

L: Assim dá um número negativo quando passamos os 290 para o outro lado e não conseguimos ter testes negativos.

(...)

R: Qual é a nota mínima?

L: Deixa cá ver... $\frac{290+50}{5} = 68$. Calma, $\frac{290+60}{5} = 70$. Pronto a nota mínima é 60.

R: Ah?

L: Eu fui substituindo o x .

Como exposto no diálogo, devido ao facto de a sua solução dar um número negativo, o Par aplicou a estratégia do cálculo por tentativas chegando à resposta correta. Assim, chegou à solução e verificou-a automaticamente - Figura 4.20.

Figura 4.20 — Resolução do problema 1 – T3 pelo Par 3

Se $x = 60$,
 $\frac{290+60}{5} = \frac{350}{5} = 70$
 R: A nota mínima que ela pode ter é 60%.

O Par, no áudio, apresentou um plano de execução, mas não o conseguiu implementar. Deste modo, decidiu-se por outra estratégia, chegando à solução correta, e demonstrou-se confiante com esta, por ter sido automaticamente verificada.

No problema n.º 2 – “Andar de táxi” -, o Par sentiu muitas dificuldades em traduzir algebricamente o enunciado do problema. Deste modo, decidiu tentar a resolução por tentativas, fazendo a soma do valor que gastaria por volta – igualando “volta” a quilómetro - subtraindo ao valor mais elevado que tinham – 30€. A sua resolução é apresentada na figura 4.21 e há o registo de o Par não ter tido mais tempo disponível para pensar numa nova estratégia para a obtenção da resposta correta.

Figura 4.21 — Resolução do problema 2 – T3 pelo Par 3

$b = 3,44€$
 $1\text{qui} = 0,90€$
 $20€ - 30€$
 $3,44 + 0,90 = 4,34€$
 Cada volta + 0,90
 $30 - 4,34 = 25,66$
 $25,66 - 5,24 = 10,42$
 $10,42 - 6,14 = 20,42$
 $20,42 - 7,04 = 0,20$
 R: Pode andar no máx. 4 quilómetros

Tal como aconteceu nos problemas anteriores, o Par não conseguiu traduzir o enunciado numa expressão algébrica e, consequentemente, resolver inequações.

4.3.5 Análise da Tarefa Complementar

As alunas, neste problema, traduziram-no numa inequação. Esta inequação tem uma interpretação peculiar e o Par chegou à solução correta. As alunas identificaram o valor por hora extra – 10€ -, associaram-no à incógnita – x - e, segundo a sua interpretação, o bónus de 5% só seria incluído no salário a receber se houvesse horas extra realizadas – $0,05x$ -, ficando com a expressão algébrica $500 + 10x + 0,05x$. Deste valor seriam descontados os 8,5%, ou seja, a diferença entre a expressão apresentada e os 8,5%, chegando à expressão

$(500 + 10x) + 0,05x$. Resolveram a inequação – Figura 4.22 – e obtiveram a solução correta, pois o facto de se calcular $500 + 8,5\%$ na máquina de calcular com o símbolo de percentagem concretiza de imediato a soma da percentagem ao valor inicial.

Figura 4.22 — Resolução TC pelo Par 3

$$\begin{aligned}
 &([500 + 10x] + 0,05x) - 8,5\% > 1000 \\
 &10x + 0,05x > 1000 - 500 + 8,5\% \\
 &10,05x > 500 + 8,5\% \\
 &x > \frac{542,5}{10,05} \\
 &x > 54 \\
 &\text{R: Ele tem de trabalhar 54 horas extras para receber mais de 1000€}
 \end{aligned}$$

A inequação apresentada é a tradução efetiva do enunciado e está correta, no entanto, se os cálculos fossem efetuados manualmente, e não numa calculadora elementar, as alunas não teriam chegado à mesma resposta. Por exemplo, se pretendermos calcular, com uma calculadora elementar, $500 + 5\%$, esta fornece automaticamente o valor 525, mas se calcularmos manualmente ou com uma calculadora gráfica, é necessário calcularmos $500 \times 1,05$ ou $500 + 500 \times 0,05$, obtendo, assim, os 525. A investigadora, dada esta resolução, tentou compreender o raciocínio das alunas:

I: Conseguiram traduzir o enunciado deste problema numa inequação?

L: Sim, temos a incógnita que são as horas extra.

I: Souberam de imediato o que iam fazer para escrever a inequação?

R: Não, primeiro fizemos mal porque não pusemos incógnita.

L: E não sabíamos calcular o 0,05.

I: Conseguiram resolver o problema?

L: Sim e confirmámos.

R: Sim, fomos substituir os 54 no x da inequação.

I: Descrevam como pensaram.

R: Então temos que juntar o valor das horas extra ao salário base dele. Temos de adicionar os 5% que é do salário.

L: Vezes x que é também as horas que ele trabalhava extra. Depois somámos ao salário para saber quanto recebia.

R: E pronto é isso.

L: E tirámos o 8,5% que vai para o governo.

O objetivo da tarefa implicava a resolução de um problema, com o grau de dificuldade elevado. Pretendia-se a tradução do enunciado, a sua resolução e a implementação das fases de resolução segundo Pólya, mas o principal seria compreender o raciocínio do Par. Os objetivos foram alcançados, embora a compreensão das alunas sobre o problema tenha ficado por esclarecer.

4.3.6 Análise final

Pelas resoluções deste Par, supra analisadas, verifica-se que as alunas evoluíram na resolução de inequações, mas a sua tradução de linguagem verbal para linguagem algébrica apresentou um défice - sustentado com comentários das alunas na 2.^a entrevista. Quando solicitada a opinião sobre a ligação dos problemas em contexto real e a aprendizagem dos conteúdos, as alunas consideraram mais complicada a tradução dos enunciados dos problemas do que a resolução de exercícios propostos em sede de aula – onde a formulação das inequações é apresentada *a priori*.

Em todos os problemas propostos, constatou-se que as alunas apresentaram bastantes dúvidas em aplicar os conteúdos aprendidos, escolhendo estratégias alternativas. No entanto, houve uma alteração no comportamento, postura e dedicação no último problema, tendo o Par procedido à sua tradução.

Este Par optou por estratégias alternativas de resolução e verificou, quase na totalidade, as soluções obtidas. Declararam bastantes dificuldades na tradução dos problemas e, deste modo, não resolveram inequações.

Globalmente, durante e após a resolução das tarefas, o Par demonstrou incapacidade de evolução na tradução dos problemas, mas, por estes serem de assuntos relacionados com o dia-a-dia, encontraram estratégias alternativas no decorrer da aplicação da heurística de Pólya, principalmente no ponto de verificação das soluções.

5 CONCLUSÕES

Este estudo decorreu durante o ano letivo 2021/2022 e resultou da investigação junto de alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade. A recolha dos dados incluiu a resolução de três tarefas, em sala de aula, após a lecionação dos conteúdos integrados no tema da *Álgebra*, mais especificamente, *Inequações do 1.º grau com uma incógnita*. Incluiu ainda a resolução de uma tarefa proposta numa entrevista semiestruturada, após a conclusão do tema.

O estudo teve como principal objetivo analisar os procedimentos relativamente à resolução de problemas em contexto da vida real e à aplicação da heurística de Pólya. Para atingir este objetivo, foram formuladas as seguintes questões de investigação:

1. De que forma os alunos interpretam o enunciado de problemas da vida real e o traduzem algebricamente?
2. Quais as etapas por que os alunos passam durante a resolução de problemas?
3. De que modo os problemas da vida real contribuem para a compreensão das inequações?
4. Qual a análise que os alunos fazem entre a solução obtida e a resposta adequada ao problema?

5.1 Interpretação e tradução do problema

Relativamente à interpretação dos problemas e à sua tradução algébrica, os alunos apresentaram facilidade na compreensão e tradução de linguagem verbal em linguagem algébrica. Desde cedo que os dois primeiros Pares mostraram interesse na tradução algébrica como estratégia de resolução mais célere e assertiva. No caso do Par 3, a não concretização da tradução em inequação ou em outra expressão algébrica limitou a resolução dos problemas, apesar de terem enveredado por outros caminhos com sucesso.

5.2 Etapas de resolução

Pólya (1981) destaca as diferenças entre problemas de acordo com o caminho da sua resolução: com um processo acabado de aprender; com o procedimento aprendido e onde o indivíduo toma alguma decisão; combinando duas ou mais regras e combinando duas ou mais regras que contenham ramificações, achando os dois últimos mais interessantes. Seguindo a heurística do mesmo autor, foram analisadas as fases de resolução de problemas, o que consiste na compreensão do problema, no estabelecer um plano e executá-lo, e na verificação da solução.

Sobre quais as etapas por que os alunos passam durante a resolução de problemas, verificou-se que os alunos identificaram a incógnita, os dados, escolheram a notação adequada e, quando necessário, separaram as várias partes da condição para determinar a incógnita. Salienta-se que todos os alunos, quando fornecidos dados distribuídos pelo enunciado e por figuras ilustrativas, ignoraram as informações das figuras mostrando maior capacidade de interpretação de texto corrido – linguagem verbal e figurativa – do que interpretação visual. Devido a estes pontos analisados, conclui-se que os alunos compreenderam os problemas, não sentindo necessidade de procurar apoio adicional, nomeadamente nas figuras.

Em linha com a segunda etapa de Pólya, os alunos estabeleceram um ou vários planos de execução, por vezes relacionando com problemas já conhecidos. Na primeira tarefa, com problemas simples e com um mecanismo acabado de aprender, os pares recorreram à primeira ideia que lhes ocorreu: utilizaram cálculos básicos, como a divisão – mecanismo aprendido em anos anteriores - para uma resposta rápida e elementar. Nas restantes tarefas, onde os problemas eram de dificuldade superior, os alunos apresentaram as resoluções com estratégias distintas entre eles.

Como já referido, as estratégias adotadas foram distintas. De facto, o Par 1 destacou-se pela associação a problemas anteriormente resolvidos e adaptaram-nos aos problemas propostos no momento, assim como pela aplicação dos conteúdos aprendidos na aula em que foi proposta a tarefa. Por sua vez, o Par 2 também aplicou, por vezes, a matéria aprendida na mesma aula. Por fim, o Par 3 decidiu-se pelas estratégias relativas à tentativa-erro ou a cálculos simples, separando em ramificações a resolução. Em geral, todos os Pares demonstraram fragilidades nos cálculos com números fracionários e decimais, embora estes desafios tenham sido ultrapassados com sucesso.

A execução do plano, terceira etapa da heurística de Pólya, demonstrou que quando estabelecido o plano mais adequado às suas sensibilidades, os alunos incorrem numa resolução espontânea e simples. Globalmente, os alunos traduziram os enunciados literalmente em inequações e resolveram-nas sem dificuldades, à exceção do Par 3, que sentiu dificuldade na tradução algébrica, mas não na sua resolução.

Relativamente à quarta etapa, verificação ou discussão da solução, os alunos examinaram as soluções obtidas e utilizaram o resultado ou o método noutros problemas.

5.3 Contribuição dos problemas da vida real para a compreensão das inequações

Em resposta à terceira questão - de que modo os problemas da vida real contribuem para a compreensão das inequações -, os estudos de caso demonstraram que há uma relação

entre a facilidade de compreensão da matéria lecionada e a sua aplicabilidade no contexto real. Segundo Freudenthal (1991), o uso de problemas contextualizados são uma fonte de iniciação ao desenvolvimento de conceitos matemáticos, ou seja, são uma base fundamental à aprendizagem da matemática (Doorman, 2007). Conforme exposto, e no âmbito dos problemas em contexto da vida real, os alunos identificam-se com as situações, reconhecem os conteúdos e a sua aplicabilidade com mais facilidade e a resolução torna-se mais perceptível, rápida e eficaz. De facto, as tarefas propostas continham, segundo Ponte (1992), problemas da vida real do tipo 2, ou seja, situações do mundo real, normalmente suscetíveis de ser exploradas de mais de uma maneira. Para isso, um trabalho continuado com este tipo de problemas proporciona aos alunos a capacidade de desenvolver ferramentas matemáticas de compreensão (Godino, 2014). Assim, os Pares estudados mostraram facilidade na compreensão de todos os problemas propostos, apresentando várias estratégias de resolução, embora tenham sido maioritariamente através de inequações. Quando inquiridos sobre esta questão, os alunos confirmaram esta evidência - compreenderam melhor as inequações quando contextualizadas nos problemas em contexto real. Conclui-se, assim, que os problemas da vida real contribuem para a compreensão das inequações.

5.4 Análise entre solução e resposta ao problema

Por último, em resposta à quarta questão - qual a análise que os alunos fazem entre a solução obtida e a resposta adequada ao problema -, importa relembrar que uma das fases da resolução de problemas, segundo Pólya, é a verificação da solução obtida. Isto ocorreu gradualmente com o decorrer das aprendizagens lecionadas e as tarefas propostas. Os Pares iniciaram a verificação da solução e, deste modo, confirmavam se as respostas estavam corretas, porém, com estas situações, averiguavam que, em certos casos, os problemas não estavam terminados. Assim, as resoluções passariam a ser por ramificações, alterando a estratégia inicialmente delineada. Quando a verificação estava concluída, os alunos fizeram a análise da solução com a resposta ao problema com facilidade. O Par 1, no problema n.º 2 da tarefa 2, confirmou que a resposta não estava correta, não a alterando na folha de resposta pelo facto de o tempo de resolução ter terminado.

5.5 Considerações finais

Este estudo pretendeu demonstrar que os problemas em contexto real contribuem para uma aprendizagem bem-sucedida dos alunos. Promove uma contextualização destes com o quotidiano real, levando a uma aprendizagem e reflexão efetiva sobre a temática de ensino - inequações. Com este tipo de problemas, os alunos sentem-se livres e enquadrados nos conteúdos matemáticos que sejam abordados.

O obstáculo mais proeminente neste estudo foi a tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica, levando à diversidade de resoluções. No entanto, no término desta investigação, os alunos apresentaram uma evolução significativa no conhecimento da temática – inequações – e demonstraram compreender melhor a existência da matemática no seu dia-a-dia, devido à contextualização com o tipo de problemas propostos – problemas em contexto real.

Com todo o processo envolvido nesta investigação, compreendeu-se que cada aluno tem o seu raciocínio matemático, a sua própria maneira de pensar, e é essencial valorizar os raciocínios de cada um, não ignorando a diversidade das resoluções. Não obstante, as produções de cada aluno podem fornecer informações importantes sobre as lacunas, os raciocínios, as dificuldades e como este poderia ser ajudado para as ultrapassar.

Por fim, o presente estudo pretende contribuir para uma melhor compreensão do contributo dos problemas em contexto da vida real para a aprendizagem e, para sustentar esta afirmação, é necessário expor os alunos a problemas do mesmo tipo implementados noutras temáticas do ensino da matemática.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amado, J., & Ferreira, S. (2014). *Manual de investigação qualitativa em Educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.
- Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Universidade Aberta.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.
- Boavida, A.; Paiva, A.; Cebola, A.; Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência matemática no Ensino Básico*. Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação - Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Bruder, R. (2016). Role of heuristics for problem solving. In P. Liljedahl, M. Santos-Trigo, U. Malaspina, & R. Bruder (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 2-6). Springer.
- Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões — ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Educação e matemática*, 144-145, 38-42.
- Christiansen, B., Howson, A. G., & Otte, M. (1986). Perspectives on Mathematics Education. In B. Christiansen, & G. Walther (Eds.), *Task and Activity*. (vol.2, pp. 243-307). Mathematics Education Library.
- Cook, T. D., & Reichardt, C. S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Morata.
- Correia, E. (2005). *Aprender matemática – hoje ensino básico*. Universidade de Aveiro.
- Costa, A. & Oliveira, A. (2020). Processos de ensino e aprendizagem em matemática na Educação Básica: a perspectiva das aulas como experiência formativa no estágio supervisionado. *Boletim online de Educação matemática*, 8(16), 13-31.
- Cunha, C. P. (Julho de 2017). A importância da matemática no Cotidiano. *Revista científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, 1, 641-650.
- Domingos, A., Saraiva, M. J., & Ferreira, R. A. (2013). Raciocínio matemático. *Atas do EIEM - Raciocinio matemática* (pp. 8-13). SPIEM.

- Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados - A matemática no início do superior* [Dissertação de doutoramento]. Universidade Nova de Lisboa
- Doorman, M.; Drijvers, P.; Dekker, T.; Heuvel-Panhuizen, M.; Lange, J.; Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. *ZDM Mathematics Education*, 39, 405-418
- Duarte, J. M. (2005). A Álgebra e o estudo PISA. In *Educação e matemática - Números e Álgebra*, 85,43-45. APM.
- Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender matemática*, 25-48. APM.
- Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. d., & Costa, M. J. (2000). *História da matemática*. Universidade Aberta.
- Fernandes, D. (1995). Investigação de conhecimentos e pensamentos de futuros professores de matemática a partir das suas biografias: discussão preliminar de quatro casos. In A. P. Mourão, I. Rocha, J. A. Fernandes, J. Fernandes e L. S. Almeida (Orgs.), 181-194. APM.
- Fernandes, D., Vale, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (1995). *Tales 7 – Livro de texto de matemática para o 7.º ano*. Areal.
- Fernandes, E. (2013). *Representações em situações problemáticas que envolvem inequações do 1.º grau a uma incógnita: Um estudo com alunos do 9.º ano de escolaridade*. [Dissertação de mestrado]. Universidade de Lisboa
- Ferreira, M. L. (2011). A álgebra e suas diferentes manifestações. *XIII Conferência Interamericana de Educação matemática*. CIEM.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers
- Godino, J. (2014). *Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics*. CERME 9, TWG 17.
- Gomes, F. M. (2017). matemática básica, 1, 175-225. IMECC-UNICAMP.
- Guimarães, H. M. (2014). Como vamos de resolução de problemas? - Uma conversa escrita com Jeremy Kilpatrick. *Educação e matemática*, 130, 3-9. APM.
- Guzmán, M. (1986). *Aventuras matemáticas*. Labor.
- Henriques, M. A. (2011, Março). Tarefa n.º $(2\sqrt{2})^2$ - Problemas e inequações. <https://re-dematematica.wordpress.com/tarefa-8-problemas-e-inequac3a7c3b5es.pdf>
- Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8 (3), 163-180.
- Kilpatrick, J. (2010). Pólya e as capacidades matemáticas. *Quadrante*, XIX (2), 106-119.

- Lester, F. (1983). Trends and issues in mathematical problem solving research. In R. Lesh e M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 105-131). Academic Press.
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education*. Springer.
- Lompscher, J. (1975). *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten*. Volk und Wissen.
- Magro, F. C., Fidalgo, F. & Louçano, P. (2015). *Pi – 9.º ano*. Vol.2. ASA.
- Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R. & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Ministério da Educação / Direção-geral da Educação.
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares matemática. Ensino Básico*. MEC.
- Nobre, S., Amado, N., & Carreira, S. (2009). Manifestações do pensamento algébrico na resolução de problemas. *Atas do EIEM - Resolução de Problemas, Investigações e Aprendizagem da matemática*. SPIEM.
- Piedade, B., Reis, S. (2019). O que é um problema matemático? - Conceções de alunos do 4.º ano de escolaridade. *Interações*, 15(50), 180-196.
- Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Interciência.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching. Combined Edition. Vol. II*. John Wiley & Sons.
- Pólya, G. (2003). *Como Resolver Problemas*. Gradiva.
- Ponte, J. P. (1992). Problemas de matemática e situações da vida real. *Revista de Educação*, II (2), 95-108.
- Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação matemática*, 85, 36-42. APM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J. & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Práxis Educativa*, 7 (2), 355-377.
- Ponte, J. P. Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Ministério da Educação / Direção-geral da Inovação e Desenvolvimento.
- Proença, M., Mendes, L. & Oliveira, A. (2021). Estágio curricular supervisionado no contexto do ensino remoto: análise da visão de futuros professores de matemática. *Revista Baiana de Educação Matemática*, 2(1), 1-21.

- Reis, C. (2019). *Para os alunos, a matemática é a mais difícil das disciplinas. Porquê?* Diário de Notícias. <https://www.dn.pt/vida-e-futuro/para-os-alunos-a-matematica-e-a-mais-dificil-das-disciplinas-porque-11589762.html>
- Rocha, H. (2020). Using tasks to develop pre-service teachers' knowledge for teaching mathematics with digital technology. *ZDM*, 52(7), 1381-1396.
- Rocha, H. (2022). Moving from one representation to another: different ways of doing it, different mathematical learning. *Mathematics in School*, 51(4), 2-5.
- Schoenfeld, A. (1985). *Resolução de problemas matemáticos*. Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). APM e Projecto MPT.
- Souza, E. (2014). *Metodologias e analíticas qualitativas em pesquisa organizacional: uma abordagem teórico-conceitual*. EDUFES.
- Souza, M. A., & Guimarães, H. M. (2015). A formulação de problemas verbais de matemática. *Quadrante*, XXIV (2), 135-162.
- Stancanelli, R. (2001). Conhecendo diferentes tipos de problemas. In K. S. Smole & I. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 103-120). Artmed Editora.
- Trevisan, A. & Araman, E. (2021). Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. *Bolema*, 35(69), 158-178.
- Vale, I. (2000). *Didática da matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e materiais manipuláveis*. Universidade de Aveiro.
- Yin, R. K. (2009). *Case Study Research: Design and Methods*. Sage.

ANEXOS

Anexo 1 - Tarefa das balanças

A Rita e o Rui foram comprar gomas. Na loja existe uma balança com pesos e cada um dos dois amigos pesou o seu saco de gomas.

A balança ficou em equilíbrio quando a Rita colocou o seu saco de gomas juntamente com um peso de 20g num dos pratos da balança, e um peso de 100g no outro prato, como podes ver na Figura 1.

O Rui procedeu como a Rita, mas a balança não ficou em equilíbrio como mostra a Figura 2.

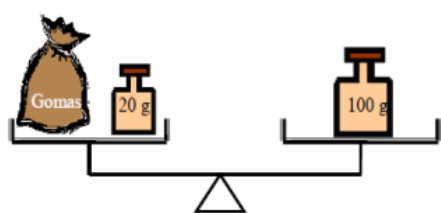


Figura 1: Pesagem do saco de gomas da Rita.

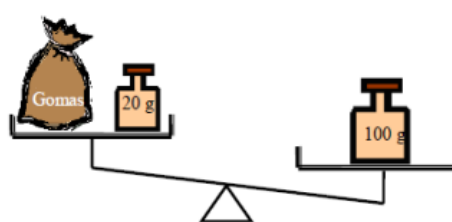


Figura 2: Pesagem do saco de gomas do Rui.

(Adaptado de Fernandes, 2013)

- Explica porque razão a balança da Figura 2 está em desequilíbrio ao contrário da balança da Figura 1.
- Quanto pesa o saco de gomas da Rita?
- Traduz a situação da balança da Figura 1 por meio de uma equação.
- Indica um valor possível para o peso do saco de gomas do Rui. Existirá apenas uma possibilidade para esse valor?
- Utiliza a letra x para representar o peso do saco de gomas do Rui. Escreve uma expressão que traduza a situação representada na balança da Figura 2.

Anexo 2 - Guião da Primeira Entrevista

Questões:

1. Sabes o que é uma expressão algébrica?
2. Utilizaste inequações para traduzir os enunciados dos problemas da tarefa?
 - Se sim: Descreve o que representa cada expressão.
 - Se não: achas que conseguiste resolver, facilmente, os problemas sem os traduzires algebricamente? Descreve como pensaste para os resolver.
3. Quando leste o enunciado de cada problema soubeste logo o que ias fazer e como o ias resolver? Descreve todos os teus raciocínios, passo a passo.
4. Conseguiu chegar à resposta para a pergunta do enunciado, ou seja, escreveste, no final a resposta à pergunta que te faziam no problema?
5. Achas que compreendeste, melhor ou pior, o que te pediam ao teres problemas de assuntos relacionados com o teu quotidiano?

Anexo 3 - Guião da Segunda Entrevista

1. A expressão $-4(b - 4)$ é uma inequação?
2. O que é uma inequação?
3. Quais os passos, para resolver uma inequação?
4. Quais os passos, para resolver um problema?
5. Quais os dados que tiraste do problema?
6. O que é a incógnita? Identifica-a no problema da tarefa.
7. Conseguiu traduzir o enunciado deste problema numa inequação? Explica como fizeste.
8. Quando leste o enunciado do problema soubeste, de imediato, o que ias fazer e como o ias resolver? Descreve todos os teus raciocínios, passo a passo.
9. Conseguiu resolver o problema da tarefa?
 - Se sim: Descreve como pensaste.
 - Se não: Porquê? Resolveste uma parte do problema? Descreve como pensaste.
10. Tentaste recordar-te de um problema semelhante que já tivesses resolvido? Se sim, quais?
11. Tentaste resolver o problema por partes? Se sim, descreve.
12. Explica o significado de cada termo das expressões que escreveste.
13. Conseguiu resolver a inequação, que escreveste, com facilidade? Havia algum princípio de equivalência ou monotonia da relação de ordem em $\mathbb{R}$, que te lembras?
14. Qual é o conjunto solução da inequação?
15. Qual a solução do problema? Escreveste-a como resposta?
16. Achas que um número negativo poderia ser solução deste problema? Justifica.
17. Verificaste o resultado? Como?
18. Verificaste se era possível chegar ao resultado por outro caminho diferente? Qual?
19. O facto dos problemas enunciados estarem presentes no teu quotidiano, ajudaram-te na sua compreensão? De que forma?

20. O que pensas sobre a tarefa que realizaste nesta entrevista?
21. Que dificuldades sentiste?
22. Em que partes da resolução te sentiste mais à vontade?

Anexo 4 - Tarefa n.º1 (T1)

Nome: _____ n.º _____ 9.º _____

E

Nome: _____ n.º _____ 9.º _____

Problema 1: Cd de música

O Vicente adora CDs de música rock. Sabendo que tem disponível 74,81€ e que cada CD custa em média 12,35€, qual o número máximo de CDs que ele pode comprar?

(Adaptado de Henriques, 2011)

Problema 2: Skate

O Valentim recebeu 60€ dos avós no seu aniversário. Ele ganha 16€ por semana a distribuir folhetos publicitários. Desde o seu aniversário ele já poupou mais do que os 180€ necessários para comprar o skate que deseja. Há quantas semanas, no mínimo, foi o seu aniversário?

(Adaptado de Ponte et al., 2009)

Problema 3: Dimensões de uma mala

As companhias aéreas costumam impor restrições ao número, peso e dimensões das malas que cada passageiro pode transportar. Uma tradicional companhia portuguesa não permite que, em voos de pequeno curso, a soma das dimensões de cada mala (altura, largura e profundidade) ultrapasse 158 cm.

Suponha que uma mala grande tenha 30 cm de profundidade, e que sua altura corresponda a $\frac{2}{3}$ da largura. Nesse caso, qual é a largura máxima que a mala pode ter, segundo a companhia aérea?

(Adaptado de Gomes, 2017, pág. 175)



Anexo 5 - Tarefa n.º 2 (T2)

Nome: _____ n.º _____ 9.º _____

E

Nome: _____ n.º _____ 9.º _____

Problema 1: Viagem de finalistas

O Joaquim poupou 1.250,00€ para a viagem de finalistas. Desse montante, 375,00€ serão gastos com as passagens. O resto será usado no pagamento das refeições e com a estadia no hotel.

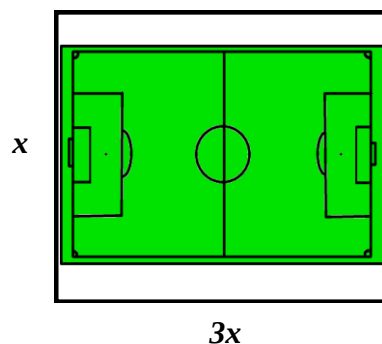
Supondo que o Joaquim pretenda gastar 30,00€ por dia com refeições, por quantos dias ele pode ficar hospedado no hotel onde a diária é de 75,00€?

(Adaptado de Gomes, 2017, pág. 175)

Problema 2: Campo de Futebol

O retângulo da figura representa o campo de futebol da escola. O campo vai ser vedado e, para o efeito, existem 50 metros de rede. Sabe-se que o dobro da diferença entre a rede disponível e a rede necessária é superior a 20 metros. A Direção da escola afirma que o campo tem 5 metros de largura. Terá razão?

Nota: As medidas apresentadas são meramente ilustrativas.



(Adaptado de Magro et al., 2015, pág. 154)

Anexo 6 - Tarefa n.º3 (T3)

Nome: _____ n.º _____ 9.º _____

E

Nome: _____ n.º _____ 9.º _____

Problema 1: Notas de matemática

O professor de matemática combinou com os seus alunos que durante o ano letivo seriam realizadas seis fichas de avaliação. Contudo, ficou definido que os alunos que tivessem uma média não inferior a 70% nas cinco primeiras fichas ficariam dispensados da sexta ficha. As classificações da Catarina nas quatro primeiras fichas foram 50%, 90%, 78% e 72%. Qual é a nota mínima que a Catarina deverá ter na quinta ficha de modo a ficar dispensada da sexta?

(Retirado de Magro et al., 2015, pág. 169)

Problema 2: Andar de táxi

O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa 3,44€ e cada quilómetro rodado custa 0,90€, determine a distância que se pode percorrer com um valor entre 20,00€ e 30,00€, inclusive.

(Adaptado de Gomes, 2017, pág. 175)

Anexo 7 - Tarefa Complementar (TC)

Problema: Salário

O funcionário de uma firma recebe um salário de 500€ sobre o qual é adicionado um valor referente às horas extras trabalhadas por mês. Ele recebe 10€ por hora extra, recebe ainda um adicional de 5% sobre a soma do salário base com o valor referente às horas extras trabalhadas. O desconto para o governo é de 8,5% sobre o salário total.

Quantas horas extras ele deverá trabalhar num mês para receber um salário (líquido) superior a 1000€ de salário.

(Retirado de Gomes, 2017, pág. 225)

Anexo 8 - Planos de Aula 9.º ano - Álgebra

Aspetos gerais

Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer diferenças e semelhanças entre equação e inequação de 1.º grau a uma incógnita.
- Compreender a noção de inequação.
- Desenvolver a capacidade de aplicar a tradução de um enunciado em linguagem verbal para linguagem matemática.
- Reconhecer a solução de uma inequação e a sua aplicação no contexto de um problema.

Desenvolvimento das aulas

Aula n.º1 (Lição n.º 81) – Data: 08/02/2022 – 45 minutos

Recursos a usar:

Ficha “balanças” para projetar.

Projetor e computador.

Manual adotado (Pereira, P.P., Pimenta, P., *Xis 9 – 9.º ano matemática*, volume1).

Quadro e giz,

Sumário: Definição, solução e conjunto-solução de uma inequação. Resolução de exercícios.

1. Ditar o sumário e projetar Ficha “balanças”.
2. Solicitar aos alunos que resolvam no caderno diário a Ficha “balanças” (projetada) e que têm aproximadamente **10 minutos** para o fazer.

Nota 1: O trabalho deverá ser interrompido se se verificarem muitas dificuldades na realização das questões, e os possíveis esclarecimentos serão feitos coletivamente em turma.

Nota 2: O professor circula pela sala e recolhe os dados para a avaliação, tais como a participação e o envolvimento do aluno no trabalho, para posteriormente discuti-los com a turma.

3. Exposição e Discussão da Ficha “balanças” (**20 minutos**) - O professor expõe no quadro a resolução da tarefa proposta com participação dos alunos.

- a) *Questão:* Porque a balança 1 está em equilíbrio e a balança 2 está em desequilíbrio?

Resolução da alínea a):

Para que a balança da Figura 2 estivesse em equilíbrio os pratos da balança teriam que se encontrar à mesma distância do chão, como acontece com a balança da Figura 1.

Objetivo: Compreender a noção de inequação. Diferenciar o conceito de equilíbrio na balança/equação da noção de desequilíbrio na balança/inequação.

b) *Questão:* Quanto pesa o saco de gomas da Rita?

Resolução da alínea b):

O saco de gomas da Rita pesa 80 gramas.

Objetivo: Rever e determinar o conjunto-solução de uma equação.

Nota: Verificar se algum aluno escreveu a expressão algébrica, e não calculou de cabeça, para ter a possibilidade de explicar o raciocínio utilizado.

c) *Questão:* Traduz a situação da balança da Figura 1 por meio de uma equação.

Questão: O que é uma equação?

Definição: Uma equação é uma igualdade entre duas expressões (membros da equação) onde existe, em uma das expressões ou nas duas, pelo menos uma letra (x).

Questão: O que é uma expressão algébrica?

Definição: Uma expressão matemática onde, além de números e operações, aparecem letras, designa-se por expressão algébrica.

Questão: $x + 1$ é uma expressão?

Resposta: Sim

Questão: $x + 1$ é uma equação?

Resposta: Não

Solicitar exemplos de equações e escrevê-las no quadro.

Exemplo de equações: $x = 2$; $x + 5 = 8$

Exemplo de não equações: $1 + 1 = 2$ (não tem incógnita); $x + 5 < 8$ (não é uma igualdade); $x + 1$ (é uma expressão algébrica)

Questão: Traduz a situação da balança da Figura 1 por meio de uma equação.

Resolução da alínea c):

A equação é : $x + 20 = 100$

Objetivo: Relembrar e traduzir por uma equação um problema com uma balança.

Questão: O que representa o x ?

Resposta: A letra x designa-se de incógnita ou variável, e representa um valor que não sabemos, é desconhecido. Esta letra pode ter vários valores e significados.

Questão: O que representa o x na equação $x + 20 = 100$?

Resposta: x representa o peso do saco de gomas da Rita.

Questão: Se resolvêssemos a equação $x + 20 = 100$, qual seria o valor de x ?

Resposta: $x = 80$.

Nota: O valor da incógnita que transforma a equação numa igualdade verdadeira diz-se solução ou raiz da equação.

d) *Questão:* Indica um valor possível para o peso do saco de gomas do Rui.

Existirá apenas uma possibilidade para esse valor?

Resolução da alínea d):

Por exemplo, 79g; 60g; ...

Não, o peso do saco de gomas do Rui pode ser igual a qualquer valor inferior a 80g.

Linguagem matemática: $x < 80$

$\{x \in \mathbb{R} : x < 80\}$ em compreensão

Em forma de intervalo: $]-\infty; 80[$ mas não se pode ter gomas negativas então $]0; 80[$

Geometricamente

Nota: O peso do saco de gomas da Rita tem 80 gramas, mas o peso do saco de gomas do Rui pode ser igual a qualquer número inferior a 80 gramas.

Espera-se que os alunos determinem vários valores possíveis para o peso do saco de gomas do Rui observando a balança da Figura 2, e verifiquem que existe mais do que uma solução.

Objetivo: Investigar se um dado número é solução de uma inequação sem utilizar as regras de resolução. Constatar que uma inequação pode ter várias soluções.

e) *Questão:* Utiliza a letra x para representar o peso do saco de gomas do Rui. Escreve uma expressão que traduza a situação representada na balança da Figura 2.

Questão: O que é uma desigualdade?

Resposta: Uma desigualdade é uma condição em que aparece um dos símbolos: $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$, sendo estes denominados de símbolos ou sinais de desigualdade.

Nota: Escrever no quadro os símbolos de desigualdade e o seu significado

$<$ (menor); $>$ (Maior); $\leq$ (menor ou igual); $\geq$ (Maior ou igual);

Resolução da alínea e):

A expressão é $x + 20 < 100$. Esta desigualdade é uma inequação.

Objetivo: Traduzir por meio de uma inequação um problema com uma balança.

4. *Questão:* Qual a diferença entre uma equação e uma inequação?

Resposta: Como já sabem, uma equação é uma igualdade entre dois membros e por isso usa-se o sinal de igualdade entre eles. Para termos uma inequação, basta trocarmos o sinal de igual, por um dos sinais de desigualdade.

Definição: Uma inequação é uma desigualdade entre duas expressões (membros de inequação) onde existe, em uma das expressões ou nas duas, pelo menos uma letra (x).

Solicitar exemplos de inequações e escrevê-las no quadro.

Exemplo de inequações: $x < 2$; $-8 - 4 > -x + 5$; $\sqrt{3} - x \leq 5$

Exemplo de não inequações: $1 + 1 > 2$ (não tem incógnita); $x + 5 = 8$ (não é uma desigualdade); $x + 1$ (é uma expressão algébrica)

5. *Salientar:* Que a expressão que traduz a situação representada na balança equilibrada (“balança da Rita”) é uma equação: $x + 20 = 100$.

Recordar a terminologia: Uma equação tem sempre duas expressões separadas pelo sinal de igual (=).

Onde cada uma dessas expressões é um membro da equação: a que fica à esquerda do sinal é o 1.º membro e a que fica à direita é o 2.º membro.

No exemplo temos $x + 20 = 100$

1.º Membro: $x + 20$

2.º Membro: 100

Incógnita: x

Termos: x ; 20; 100.

Termos do 1.º membro: x ; 20

Termos do 2.º membro: 100

Termos com incógnita: x

Termos independentes: 100; 20

Questão: Qual é a expressão que traduz a situação representada na balança desequilibrada (“balança da Rui”)? Verifica que ambas as balanças têm os pesos de 20g e 100g.

Resposta: $x + 20 < 100$

Salientar:

A terminologia usada nas equações mantém-se para as inequações, nomeadamente as noções de membro, termo e incógnita.

Assim,

No exemplo temos $x + 20 < 100$

1.º Membro: $x + 20$

2.º Membro: 100

Incógnita: x

Termos: x ; 20; 100.

Termos do 1.º membro: x ; 20
Termos do 2.º membro: 100
Termos com incógnita: x
Termos independentes: 100; 20

Salientar: Uma equação linear (com uma incógnita e do 1.º grau) pode ser (ver manual pág.26):

- Uma equação possível (só tem uma solução); C.S.={ a }
- Uma equação impossível (não tem solução); C.S.={ }= $\emptyset$
- Uma equação indeterminada (tem infinitas soluções). Como no exercício das balanças

Mas numa inequação não existe indeterminada porque esta pode ter infinitas soluções.

6. Solicitar aos alunos que resolvam os exercícios do manual da página 27 (do 39-42).
15 minutos (se não houver tempo acabar em casa).
-

Aula n.º2 (Lições n.º 82 e 83) – Data: 09/02/2022 – 90 minutos

Recursos a usar:

Tarefa n.º 1 (T1).

Projektor e computador.

Manual adotado (Pereira, P.P., Pimenta, P., *Xis 9 – 9.º ano matemática*, volume1).

Quadro e giz.

Sumário: Resolução de inequações e de uma tarefa.

1. Correção dos exercícios 39, 40 e 41 oralmente e do exercício 42 no quadro pelo professor. **10 minutos**
2. *Relembrar:* os passos de resolução de uma equação/inequação.
 1. Desembaraçar de parenteses.
 2. Desembaraçar de denominadores.
 3. Isolar os termos semelhantes (Separar os termos com incógnita para um membro e os termos sem incógnita para o outro membro).
 4. Reduzir os termos semelhantes.
 5. Isolar a incógnita.

E

Relembrar: Monotonia da adição e monotonia parcial da multiplicação (Relação de ordem em IR)

Enquanto se resolve, no quadro, a alínea j) do exercício 44 da página 29 do manual, isto é,

$$-\frac{2}{3}(-x + 1) < -\frac{x+1}{2} + 1$$

Resposta:

$$-\frac{2}{3}(-x + 1) < -\frac{x+1}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} < 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x + \frac{x}{2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

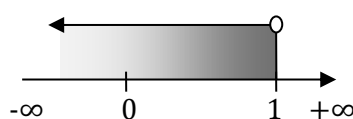
$$\Leftrightarrow \frac{4x+3x}{6} < \frac{6-3+4}{6} \Leftrightarrow \frac{7x}{6} < \frac{7}{6} \Leftrightarrow x < 1$$

3. *Recordar:* Representações de intervalos de números reais

O conjunto-solução da inequação $-\frac{2}{3}(-x + 1) < -\frac{x+1}{2} + 1$ pode ser representado de três formas como acontece com qualquer conjunto de números reais:

- Representação em compreensão: C.S. = $\{x \in \mathbb{R}: x < 1\}$.
- Representação em forma de intervalo: C.S. = $] -\infty ; 1[$.

➤ Representação geométrica:



4. Solicitar aos alunos que resolvam os exercícios do manual da página 29 (44, alíneas a, c, e, g e i).

Chamar à atenção quando surgir uma inequação do tipo $-2x > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

Objetivos:

- Relembrar as relações de ordem em IR (monotonias da adição e da multiplicação).
- Reconhecer as regras práticas usadas na resolução de inequações.
- Compreender a diferença entre a resolução de equações e de inequações exclusivamente, na aplicação da monotonia parcial da multiplicação, ou seja, quando se multiplica por um número negativo.
- Resolver inequações do 1.º grau.

#####CORREÇÃO#####

44. Resolva as inequações seguintes e apresenta os conjuntos-soluções na forma de intervalo de números reais.

a) *Questão:* Como resolver a inequação $x + 3 > 12$?

Resposta: $x + 3 > 12 \Leftrightarrow x + 3 - 3 > 12 - 3 \Leftrightarrow x > 9$

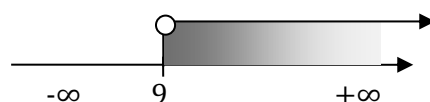
Questão: Qual o conjunto-solução?

Resposta:

Representação na forma de intervalo: C.S. = $]9; +\infty[$

Representação em compreensão: $\{x \in \mathbb{R} : x > 9\}$

Representação geométrica:



Chamar à atenção que a que era obrigatório escrever, é a que se pede no enunciado do exercício, na forma de intervalo.

c) *Questão:* Como resolver a inequação $-x - 3 < 4$?

Resposta: $-x - 3 < 4 \Leftrightarrow -x - 3 + 3 < 4 + 3 \Leftrightarrow -x < 7$

Questão: Qual o coeficiente de x ?

Resposta: -1 *Nota:* $-x = (-1) \times x$

Referir: Como o coeficiente é negativo temos que dividir ou multiplicar por (-1) ambos os membros e invertamos o sinal de desigualdade.

$$-x < 7 \Leftrightarrow -x \times (-1) > 7 \times (-1) \Leftrightarrow x > -7$$

Ou

$$-x < 7 \Leftrightarrow \frac{-x}{-1} > \frac{7}{-1} \Leftrightarrow x > -7$$

Referir: Se o coeficiente for -7 (por exemplo), dividimos por (-7) ambos os membros e invertemos o sinal de desigualdade.

$$-7x < 7 \Leftrightarrow \frac{-7x}{-7} > \frac{7}{-7} \Leftrightarrow x > -1$$

Nota: Na prática quando o coeficiente da variável estiver:

- A multiplicar, passamo-lo para o outro membro a dividir.
- A dividir, passamo-lo para o outro membro a multiplicar.

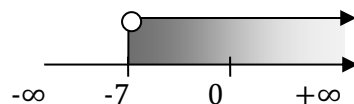
Questão: Qual o conjunto-solução da inequação $-x - 3 < 4 \Leftrightarrow x > -7$?

Resposta:

Representação na forma de intervalo: C.S.=] -7; +∞[

Representação em compreensão: $\{x \in \mathbb{R} : x > -7\}$

Representação geométrica:



e) *Questão:* Como resolver a inequação $5x - 3 < 8x + 9$?

$$\begin{aligned} \text{Resposta: } 5x - 3 < 8x + 9 &\Leftrightarrow 5x - 8x < 9 + 3 \Leftrightarrow -3x < 12 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} > \frac{12}{-3} \\ &\Leftrightarrow x > -4 \quad \text{C.S.}=] -4; +\infty[\end{aligned}$$

g) *Questão:* Como resolver a inequação $2(x - 3) < 3(x - 2)$?

$$\begin{aligned} \text{Resposta: } 2(x - 3) < 3(x - 2) &\Leftrightarrow 2x - 6 < 3x - 6 \Leftrightarrow 2x - 3x < -6 + 6 \\ &\Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

C.S.=] 0; +∞[

i) *Questão:* Como resolver a inequação $\frac{1}{3}x - \frac{3}{4} < x + \frac{3}{6}$?

Resposta:

$$\frac{1}{3}x - \frac{3}{4} < x + \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x - x < \frac{3}{6} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x + 3 \times \frac{(-x)}{3} < \frac{3 \times 4}{24} + \frac{3 \times 6}{24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3x)}{3} < \frac{12+18}{24} \Leftrightarrow -2x < 3 \times \frac{30}{24} \Leftrightarrow x > \frac{3}{-2} \times \frac{30}{24} \Leftrightarrow x > \frac{90}{-48} \Leftrightarrow x > -\frac{15}{8}$$

C.S.=] $-\frac{15}{8}$; +∞[

#####

5. (Quando faltar **25 minutos para o final da aula**) Entregar e explicar a metodologia de trabalho para a Tarefa n.º1 (com gravação):

Resolução da tarefa, a pares, na folha de enunciado e gravação de áudios para quem tem autorização dos Encarregados de Educação. As folhas dos enunciados são recolhidas para análise no âmbito de um estudo investigativo.

1. Indicar aos alunos para resolverem a Tarefa n.º 1 e que têm **10 minutos**.
2. Recolha das resoluções das tarefas.
3. Discussão da Tarefa n.º 1. **10 minutos**

T.P.C.

Exercício 44 da página 29, do manual, alíneas: b, d, f e h;

Ex. 45-47

Aula n.º3 (Lições n.º 84 e 85) – Data: 10/02/2022 – 90 minutos

Recursos a usar:

Tarefa n.º 2 (T2).

Projektor e computador.

Manual adotado (Pereira, P.P., Pimenta, P., *Xis 9 – 9.º ano matemática*, volume1).

Quadro e giz.

Sumário: Correção do T.P.C.. Resolução de problemas com inequações.

1. Correção do exercício 44, da página 29 do manual, alíneas b, d, f e h, do exercício 45, oralmente e dos exercícios, 44 alíneas a, c, e, g e i, 46 e 47, no quadro pelos alunos.

#####CORREÇÃO#####

Correção do T.P.C.: (Manual adotado XIS 9 vol.1, pág. 29, ex.44 alíneas b, d, f, h)
Ex. 44

b) *Questão:* Como resolver a equação $x - 1 = -11$?

Resposta: $x - 1 = -11 \Leftrightarrow x - 1 + 1 = -11 + 1 \Leftrightarrow x = -10$ C.S.={ -10 }

Questão: Como resolver a inequação $x - 1 > -11$?

Resposta: $x - 1 > -11 \Leftrightarrow x - 1 + 1 > -11 + 1 \Leftrightarrow x > -10$

(1.º Princípio de equivalência), neste caso é a Monotonia da Adição

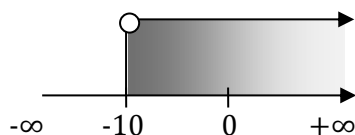
Questão: Qual o conjunto-solução?

Resposta:

Representação na forma de intervalo: C.S.=] -10; +∞[

Representação em compreensão: $\{x \in \mathbb{R} : x > -10\}$

Representação geométrica:



d) *Questão:* Como resolver a inequação $4x - 1 < 3x + 9$?

Resposta: $4x - 1 < 3x + 9 \Leftrightarrow 4x - 3x < 9 + 1 \Leftrightarrow x < 10$ C.S.=] -∞;10[

f) *Questão:* Como resolver a equação $-x + 1 > x + 1$?

Resposta: $-x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} < \frac{0}{-2} \Leftrightarrow x < 0$ C.S.=] -∞;0[

h) *Questão:* Como resolver a inequação $\frac{3x-1}{5} > \frac{x+1}{2}$?

Nota: Quais os primeiros passos a tomar?

Resposta: 1.º: Desembaraçar de parenteses

2.º: Desfazer de denominadores

$$\text{Resposta: } \frac{3x-1}{5} > \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow 2 \times \frac{3x-1}{5} > \frac{x+1}{2} \times 5 \Leftrightarrow 2(3x-1) > 5(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 6x - 2 > 5x + 5 \Leftrightarrow 6x - 5x > 5 + 2 \Leftrightarrow x > 7$$

$$\text{C.S.} =]7; +\infty[$$

45. Quais os três erros cometidos?

- Sinal do -10 (devia de ser +10)
- Sinal do -2x (devia de ser +2x)
- Sinal de desigualdade de $5x > 7$ (devia de ser $5x < 7$)

46. Ler o exercício do manual (página 29)

Resolução: S=56,4Kg; P= 61,8Kg; T=?

$$S + T \leq P \Leftrightarrow 56,4 + T \leq 61,8 \Leftrightarrow T \leq 61,8 - 56,4 \Leftrightarrow T \leq 5,4$$

Resposta: O gato Tibério só pode ter no máximo 5,4Kg.

47. Ler o exercício do manual (página 29)

$$\text{Resolução: } P(\text{retângulo}) > P(\text{triângulo}) \Leftrightarrow$$

$$P(\text{retângulo}) = 5 + 5 + (x + 1) + (x + 1) = 2x + 12$$

$$P(\text{triângulo}) = 3(x + 1) = 3x + 3$$

$$P(\text{retângulo}) > P(\text{triângulo}) \Leftrightarrow 2x + 12 > 3x + 3 \Leftrightarrow -x > -9$$

$$\Leftrightarrow x < 9$$

Nota: Estamos a falar de medidas, logo sabemos que os lados do triângulo não podem ser negativos assim: $(x + 1) > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Resposta: Os valores estão entre -1 e 9 ($-1 < x < 9$).

#####

2. **(25 minutos do fim da aula)** Entregar e explicar a metodologia de trabalho para a Tarefa nº 2 (entregar T1 recolhida na aula anterior):

Resolução da tarefa, a pares, na folha de enunciado e gravação de áudios para quem tem autorização dos Encarregados de Educação. As folhas dos enunciados são recolhidas para análise no âmbito de um estudo investigativo.

3. Indicar aos alunos para resolverem a Tarefa nº 2 e que têm **15 minutos**.

4. Recolha das resoluções das tarefas.

5. Discussão da Tarefa nº 2. **10 minutos**

Aula n.º4 (Lições n.º 87 e 88) – Data: 16/02/2022 – 90 minutos

Recursos a usar:

Tarefa nº 3 (T3).

Projektor e computador.

Manual adotado (Pereira, P.P., Pimenta, P., *Xis 9 – 9.º ano matemática*, volume1).

Quadro e giz.

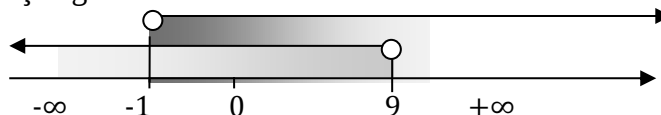
Sumário: Disjunção de uma inequação com uma equação. Disjunção e conjunção de inequações. (dizer: p.30 do manual) Resolução de exercícios.

1. *Relembrar:* a solução do exercício 47 da pág.29 - (Os valores estão entre -1 e 9 ($-1 < x < 9$).)

Ao dizermos/falarmos esta solução dizemos que “x é maior que -1 e menor que 9” e em linguagem matemática “e” representa-se por “ $\wedge$ ”. Esta condição (“ $\wedge$ ”) chama-se conjunção e está associada à interseção de conjuntos/intervalos (“ $\cap$ ”).

Se representarmos esta solução em forma de intervalo obtemos:

- Representação na forma de intervalo: C.S.=] -1; 9[=] -1; $+\infty$ [$\cap$] $-\infty$; 9[
- Representação geométrica:



- Representação em compreensão: $\{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge x < 9\}$

Referir: Ver exemplo da página 30 do manual

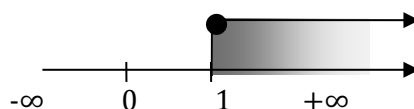
“Consideremos a expressão $2x + 1$ e determinemos para que valores de x, representa um valor maior ou igual a 3.

Queremos portanto, encontrar os valores de x para os quais $2x + 1 = 3$ ou $2x + 1 \geq 3$.

Simbolicamente, escrevemos: $2x + 1 = 3 \vee 2x + 1 > 3 \Leftrightarrow x = 1 \vee x > 1$

Se representarmos esta solução em forma de intervalo obtemos:

- Representação na forma de intervalo: C.S.= $\{1\} \cup]1; +\infty[= [1; +\infty[$
- Representação geométrica:



Recordar: Em linguagem matemática:

- “e” representa-se por “ $\wedge$ ”. Esta condição (“ $\wedge$ ”) chama-se conjunção e está associada à interseção de conjuntos/intervalos (“ $\cap$ ”);

- “ou” representa-se por “v”. Esta condição (“v”) chama-se disjunção e está associada à reunião de conjuntos/intervalos (“U”).

1. Solicitar aos alunos que resolvam o exercício 15 na página 40 do manual.
10 minutos
2. Resolução do exercício 15 na página 40 do manual. **5 minutos**
3. Solicitar aos alunos que resolvam o exercício 37, da página 25 do manual. **(15 minutos)**
4. Solicitar aos alunos que resolvam o exercício 48 do manual da página 31.
Nota: Na alínea c), alterar conjunção para disjunção. (15 minutos)

#####CORREÇÃO#####

Correção dos exercícios:

48. Determina, em IR, os conjuntos-soluções de cada uma das seguintes condições.
Apresenta-os na forma de intervalo de números reais.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2x+3}{5} < 2 \wedge 3x-1 \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2x+3 < 10 \wedge 3x \geq \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow 2x < 7 \wedge 3x \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < \frac{7}{2} \wedge x \geq \frac{3}{6} \Leftrightarrow x < \frac{7}{2} \wedge x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} =] -\infty; \frac{7}{2} [\cap [\frac{1}{2}; +\infty[= [\frac{1}{2}; \frac{7}{2} [$$

$$\text{b) } x \geq 1 \wedge -2x + 3 < 3 \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge -2x < 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x > 0$$

$$\text{C.S.} = [0; +\infty[\cap [-1; +\infty[= [0; +\infty[$$

$$\text{c) } 3x \geq -\frac{1}{5} \vee -2(x-3) < 3(x+1) \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{15} \vee -2x+6 < 3x+3$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{15} \vee -5x < -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{15} \vee x > \frac{3}{5}$$

$$\text{C.S.} = [-\frac{1}{15}; +\infty[\cup]\frac{3}{5}; +\infty[= [-\frac{1}{15}; +\infty[$$

#####

5. Solicitar aos alunos que resolvam os exercícios 49,50 e 52, da página 31 do manual.

Relembrar: os passos de resolução de um problema:

1. Ler e compreender o enunciado. Tirar dados e escolher incógnita.
(Compreender o problema)
2. Equacionar o problema. Descobrir ligação entre os dados e a incógnita.
(Plano de resolução)

3. Resolver o problema.
(Executar o plano)
 4. Discutir o problema.
(Examinar a solução obtida) Dar resposta à pergunta.
6. **(30 minutos do fim da aula)** Entregar e explicar a metodologia de trabalho para a Tarefa n.º 3 (entregar T2 recolhida na aula anterior):
- Resolução da tarefa, a pares, na folha de enunciado e gravação de áudios para quem tem autorização dos Encarregados de Educação. As folhas dos enunciados são recolhidas para análise no âmbito de um estudo investigativo.
7. Indicar aos alunos para resolverem a Tarefa n.º 3 e que têm **20 minutos**.
 8. Recolha das resoluções das tarefas.
 9. Discussão da Tarefa n.º 3. **10 minutos**

Anexo 9 - Plano de Aula 9.º ano - Organização e tratamento de dados

Aspetos gerais

Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer frequência absoluta.
- Compreender dados agrupados em classes.

Desenvolvimento da aula

Recursos a usar:

Projektor e computador.

Apresentação powerpoint (em anexo).

Manual adotado (Pereira, P.P., Pimenta, P., *Xis 9 – 9.º ano matemática*, volume1).

Quadro e giz.

Sumário: Dados agrupados em classes. Resolução de exercícios.

1. Ditar o sumário.
2. Projetar os slides da matéria.
3. Slide 2 - Apresentar o exemplo com os dados.
Explicar que se estes dados fossem organizados numa tabela teríamos uma linha para cada observação.
4. Slide 3 - Mostrar tabela com dados por linha e relembrar frequências absolutas.
5. Slide 4 – “Como podem organizar os dados?”
Aguardar sugestões dos alunos.
6. Slide 5 – Agrupar os dados em classes. Comentários, muito breve, sobre intervalos/classes e amplitude de uma classe.
7. Slide 6 – “Como determinar uma amplitude adequada para as classes?”
8. Slide 7 - Relembrar o cálculo da amplitude da amostra, salientar que podemos calcular o número de classes em função da amplitude escolhida para as classes, dar por exemplo, a amplitude de cada classe 7. Frisar que, por conveniência, se pode calcular o número de classes antes de organizarmos a tabela para sabermos se temos muitas classes ou poucas.
9. Slide 8 – Exemplos de várias amplitudes de classes (4 e 10).
Se a amplitude das classes fosse menor, o número de classes aumentaria e vice-versa.

10. Slide 9 – Calcular o número de classes com igual amplitude e construí-las.
Realçar que as interseções entre as classes é conjunto vazio e a reunião de todas as classes é o intervalo que tem todos os dados.
11. Slide 10 – Apresentar as frequências absolutas.
12. Slide 11 - Solicitar aos alunos a resolução dos exercícios 2, 3 e 4 da página 55 do manual (em anexo).

Anexo 10 - Planos de Aula 11.º ano - Geometria Analítica no Plano

Aspetos gerais

Objetivo de aprendizagem:

- Reconhecer a relação entre o declive e a inclinação de uma reta no plano.
- Compreender a noção de produto escalar.

Estratégia geral:

Proposta de resolução de exercícios do manual adotado.

Estrutura da aula:

A estrutura da aula comporta segmentos com introdução, revisões, definições, resolução de exercícios de aplicação do manual em cada conteúdo introduzido, com interrupções para esclarecimento de dúvidas.

Recursos a usar:

- Simulador do Geogebra (editora Leya):
 - ✓ Declive de uma reta não vertical é a tangente da sua inclinação
 - ✓ Ângulo de vetores no plano
- Calculadora
- Projetor e computador: simuladores do Geogebra
- Quadro e giz, caderno da disciplina, lápis e borracha
- Manual adotado: Mat11- matemática A – 11.ºano de Cristina Viegas e Sérgio Valente; Edição: Texto Editores, 2016
- e-Manual

Desenvolvimento da aula

Declive e inclinação da reta

1. Revisão do conceito de declive

Como se reconhece o declive através da:

- ✓ Equação reduzida da reta;
- ✓ Quando é dado o vetor diretor de uma reta;
- ✓ Quando dados dois pontos pertencentes a uma reta;

2. Revisão do conceito de inclinação de uma reta

Definição: Dado um referencial ortonormado xOy e dada uma reta r que passa na origem do referencial e é distinta do eixo Ox , a inclinação da reta r é a amplitude do ângulo convexo (rever o ângulo convexo – página 134 do manual) formado pelo semieixo positivo das abcissas e a semirreta OP , onde P é um ponto qualquer de r de ordenada positiva. (dar exemplo/desenho no quadro).

A inclinação do eixo das abcissas é nula.

3. Sugerir a inclinação de uma reta s paralela à reta r e afirmar que r e s sendo paralelas têm a mesma inclinação, visto que a reta s , não passa na origem, mas fazendo a translação de s a passar na origem, esta “torna-se a reta r ”.

4. Ver exemplos do manual da página 129:

- $m > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$
- $m < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$
- $m = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0^\circ$

Ou seja, $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$

5. Rever que $m = \operatorname{tg} \alpha$

Seja $P(x; y) \in r$ e α a inclinação de r , r com a equação reduzida da reta $y = mx + b$ onde $b = 0$ se calcularmos m através das coordenadas de dois pontos, $P(x_o; y_o)$ e $(0; 0)$ e se calcularmos $\operatorname{tg} \alpha$ concluímos que $m = \operatorname{tg} \alpha$

6. Mostrar simulador “O declive de uma reta não vertical é a tangente da sua inclinação”
7. Exercício de aplicação:

Manual página 131 – exercício 8

“Escreve uma equação vetorial da reta que passa no ponto de coordenadas $(1, 5)$ e tem inclinação de 30° .”

Produto escalar

1. Rever o conceito da soma de dois vetores e que este tem como resultado um vetor.
2. Explicar que o produto de dois vetores tem como resultado um número (escalar).
3. Indicar a sua representação.
4. Explicação de projeção ortogonal.
5. Concluir definição de produto escalar (com projeção ortogonal e norma).
6. Demonstrar que $\text{projeção} = \cos \rho$.

7. Mostrar simulador “Ângulo de vetores no plano”.
8. Concluir definição de produto escalar (com cosseno e normas).
9. Exercícios de aplicação:

Manual página 133 – exercícios 10 (alíneas a, b, f, g) e 11

Manual página 173 – exercícios propostos 39, 41, 43 e 48



