Ricardo Jorge da Rocha Machado
Mestre em Educação

Trabalho colaborativo e matemática: Um estudo de caso sobre o instrumento de avaliação de capacidades e competências do projeto *Interacção e Conhecimento*

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em Ciências da Educação

Orientadores:

Professora Doutora Margarida César,
Professora Associada com Agregação do
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Professor Doutor José Manuel Matos,
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Professor Doutor António Manuel Bensabat Rendas, Reitor da Universidade Nova de Lisboa

Arguentes: Professora Doutora Carlinda Maria Ferreira Alves Faustino Leite, Professora Catedrática da Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade do Porto

Professor Doutor António Manuel Águas Borralho, Professor Auxiliar da Escola de Ciências Sociais da Universidade de Évora

Vogais: Professora Doutora Maria Margarida d'Orey Alves Martins, Professora Catedrática do ISPA – Instituto Universitário de Ciências Psicológicas, Sociais e da Vida

Professora Doutora Margarida Alexandra da Piedade Silva César, Professora Associada com Agregação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Professora Doutora Clarisse da Conceição Alves e Costa Afonso, Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências Sociais e Humanas da Universidade Nova de Lisboa

Professor Doutor José Manuel Leonardo Matos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Professor Doutor António Manuel Dias Domingo, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Volume I

fevereiro, 2014

Ricardo Jorge da Rocha Machado
Mestre em Educação

Trabalho colaborativo e matemática: Um estudo de caso sobre o instrumento de avaliação de capacidades e competências do projeto *Interacção e Conhecimento*

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor
em Ciências da Educação

Orientadores:

Professora Doutora Margarida César,
Professora Associada com Agregação do
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Professor Doutor José Manuel Matos,
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Professor Doutor António Manuel Bensabat Rendas, Reitor da Universidade Nova de Lisboa

Arguentes: Professora Doutora Carlinda Maria Ferreira Alves Faustino Leite, Professora Catedrática da Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade do Porto

Professor Doutor António Manuel Águas Borralho, Professor Auxiliar da Escola de Ciências Sociais da Universidade de Évora

Vogais: Professora Doutora Maria Margarida d'Orey Alves Martins, Professora Catedrática do ISPA – Instituto Universitário de Ciências Psicológicas, Sociais e da Vida

Professora Doutora Margarida Alexandra da Piedade Silva César, Professora Associada com Agregação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Professora Doutora Clarisse da Conceição Alves e Costa Afonso, Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências Sociais e Humanas da Universidade Nova de Lisboa

Professor Doutor José Manuel Leonardo Matos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Professor Doutor António Manuel Dias Domingo, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

fevereiro, 2014

RESUMO

A Matemática assume elevada importância nas trajetórias de participação ao longo da vida, sobretudo para alunos de 3.º ciclo do ensino básico e secundário (César, 2013a). As aprendizagens matemáticas devem ter em conta os conhecimentos apropriados, assim como as capacidades e competências que os alunos conseguem mobilizar. Para isso, o professor deve conhecer as capacidades e competências dos alunos, desde o início do ano letivo, adaptando as práticas às suas características, necessidades e interesses (César, 2009). Ao triangular as teorias piagetiana, vygotskiana, da aprendizagem situada e do *dialogical self* concebemos formas de atuação adequadas ao desenvolvimento de capacidades e competências.

Nesta investigação analisamos um instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), elaborado no âmbito do projeto *Interacção e Conhecimento* (IC) e utilizado durante os 12 anos de existência formal (1994/95-2005/06). Assumimos um paradigma interpretativo (Denzin, 2002), desenvolvendo um estudo de caso intrínseco (Stake, 1995/2009). Os principais participantes foram os alunos das turmas do IC (disciplina de Matemática ou afins; 5.º ao 12.º ano de escolaridade; cerca de 600 turmas), os respetivos professores/investigadores, investigadores e observadores externos. Os instrumentos dividem-se em dois grupos: (1) recolha documental – espólio do IC; e (2) conversas informais, registadas no diário de bordo do investigador, recolhidos nesta investigação. O tratamento e análise de dados baseou-se numa análise de conteúdo, de tipo narrativo (Clandinin & Connelly, 1998), sistemática e sucessiva, passando duma leitura flutuante ao reconhecimento de padrões, fazendo emergir categorias indutivas de análise (Hamido & César, 2009).

Os resultados iluminam o processo de elaboração do IACC, incluindo os princípios epistemológicos e teorias que o sustentam, as estratégias de resolução dos alunos e respetivos padrões de desempenho. Também ilustram os impactes dos procedimentos utilizados pela equipa do IC durante a primeira semana de aulas, nomeadamente o recurso ao IACC, nas práticas pedagógicas, bem como os contributos para a formação inicial e contínua de professores.

Palavras-chave: Matemática; capacidades e competências; IACC; trabalho colaborativo; aprendizagem; desenvolvimento.

ABSTRACT

Mathematics is quite important in students' life trajectories of participation (César, 2013a), particularly for those attending low and high secondary schooling (7th to 12th grades, that is, 12/13 to 17/18 year-olds). Mathematics learning should consider the appropriated knowledge and the abilities and competencies that students mobilize. Thus, teachers should know students' abilities and competencies since the beginning of the school year in order to adequate their practices to students' characteristics, needs, and interests (César, 2009). Triangulating theories such as Piagetian, Vygotskian, situated learning and dialogical self, allow us to conceive adequate ways of acting in order to promote the development of abilities and competencies.

In this research we analyse an instrument that evaluates students' abilities and competencies (IACC). It was conceived in the *Interaction and Knowledge* project (IK) and used during its 12 years of formal existence (1994/95-2005/06). We assumed an interpretative paradigm (Denzin, 2002) and developed an intrinsic case study (Stake, 1995/2009). The main participants were the students attending classes that participated in the IK project (in Mathematics or related subjects; 5th to 12th grades; around 600 classes), their teacher/researchers, researchers, and external observers. The data collecting instruments were divided into two groups: (1) documents – the empirical *corpus* of the IK; and (2) informal conversations registered in the researcher's diary. The data treatment and analysis was based on a narrative content analysis (Clandinin & Connelly, 1998). This was a systematic and successive analysis, beginning by a floating reading up to pattern recognition from which emerged inductive categories of analysis (Hamido & César, 2009).

The results illuminate the process of elaboration of the IACC, which includes its epistemological principles and the theories that support it, the students' solving strategies and their patterns of performance. The results also illustrate the impacts of the procedures used by IK team during the first week of the school year in the pedagogical practices, particularly the use of the IACC, as well as their contributions for pre- and-in-service teacher education.

Keywords: Mathematics; abilities and competencies; IACC; collaborative work; learning; development.

AGRADECIMENTOS

A minha trajetória de participação ao longo da vida é repleta de viagens. Viagens essas que podem ser mais ou menos longas, mais ou menos significativas, mais ou menos conflituosas, ou seja, para mim, encaro cada dia, cada experiência como uma viagem que realizo, na qual me desenvolvo e aprendo algo. Assim, a principal finalidade desta viagem, que durou quatro anos, não foi o seu destino, mas a própria viagem.

Não vivemos sozinhos, isolados do mundo que nos rodeia. As interações sociais e dialógicas que estabelecemos permitem-nos desenvolver competências e apropriar conhecimentos que, provavelmente, nos teriam ficado interditos num percurso construído a solo. Assim, desta rede complexa fazem parte pessoas que pertencem à nossa vida, outras que acabam por fazer parte dela e ainda existem outras que, por não quererem dela fazer parte, permitem-nos uma construção identitária mais dinâmica, menos conflituosa e mais adaptável aos diversos contextos, cenários ou situações, pelos quais transitamos. Nesta viagem que acabo de realizar, não poderia deixar de expressar o meu profundo sentimento de gratidão àqueles que dela fizeram parte.

À Margarida César, pela amizade, pelo estímulo, pela persistência e pela exigência que fizeram desta viagem uma experiência única. Por ter acreditado em mim, nas minhas capacidades e competências, enquanto professor e investigador, e por me ter acolhido na equipa do projeto IC, desde há sete anos, contribuindo, desta forma, para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Ao José Manuel Matos por me ter acolhido, de forma tão agradável, na instituição onde realizei o doutoramento. Por me ter proporcionado espaços/tempos de produtivas e aprofundadas discussões, bem como pela exigência na orientação desta tese.

À Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento da Universidade Nova de Lisboa, nomeadamente ao Professor Doutor Vítor Teodoro, à Professora Doutora Mariana Gaio Alves e à Professora Doutora Teresa Gonçalves por me terem proporcionado momentos de reflexão relativamente ao trabalho que estava a realizar, nos quais através de formas de atuação formativa e de inter-ajuda crítica, que caracteriza esta instituição, permitiram melhorar esta investigação. Por me terem facilitado a participação em eventos da especialidade, nacionais e internacionais, para os quais o

apoio financeiro concedido se revelou essencial. Por último, ao Sr. Rodrigo Figueiredo, pelas diversas ajudas fornecidas e pela orientação numa instituição que, para mim, ainda era desconhecida.

À Fundação para a Ciência e a Tecnologia, por me ter concedido uma bolsa de doutoramento que me permitiu a realização desta investigação, dedicando-me a ela a tempo inteiro. Por me ter possibilitado a realização de duas estadias em universidades internacionais, nas quais pude trabalhar com dois especialistas de renome e que me permitiram aprofundar o quadro de referência teórico desta tese, bem como melhorar a análise dos dados que foi feita, com base nessa sustentação teórica. Que me permitiram aprender muito, para além do trabalho de tese de doutoramento que estava a realizar, contactando com outras culturas de escola e outras formas de encarar a profissionalidade, que me enriqueceram, também enquanto pessoa.

Ao Paul Cobb e a sua equipa do projeto *Middle School Mathematics and the Institutional Setting of Teaching* (MIST) pela riqueza das aprendizagens que me proporcionaram ao longo de dois meses. Em especial: ao Paul Cobb por me ter acolhido na equipa, pelos momentos de reflexão, de partilha e de confrontação de formas de pensamento e pontos de vista diferentes, pela amizade, pelos momentos extra-trabalho que contribuíram para que atuasse como participante legítimo daquela comunidade de prática e por ter aceite o meu desafio de organizar, colaborativamente, um simpósio a apresentar na 15th EARLI, em Munique, em 2013; à Erin Henrick pela amizade, pelas inúmeras ajudas logísticas relativas à minha estadia e por todo o apoio que me deu durante a mesma; à Christine Larson, pela amizade, pelo imenso apoio que me deu, por me incluir nas mais variadas atividades da equipa e por puxar por mim quando julgava que não conseguia avançar mais; e ao Dan Berebitsky pela amizade, pelo apoio e ajudas relativas às atividades que desempenhava naquela equipa. A todos os elementos desta equipa, o meu muito obrigado pelo tempo que dedicaram à minha aprendizagem e por me fazerem sentir como um elemento da mesma.

À Anne-Nelly Perret-Clermont e sua equipa por me terem proporcionado oportunidades únicas de aprendizagem, no espaço de duas semanas. Em especial: à Anne-Nelly Perret-Clermont por me ter acolhido e ter despendido o seu precioso tempo, pela construção de espaços de pensamento que me permitiu organizar, clarificar e refletir acerca de algumas teorias e constructos relativos à aprendizagem e ao desenvolvimento; à Joanna Domingos pela amizade, pela ajuda nas questões logísticas relativas à minha estadia e pelo apoio que me deu; ao Romain Boissonnade pela amizade, por me ter acolhido, juntamente com a Nadège Foundon, em sua casa nestas duas semanas, por me ter orientado num espaço desconhecido, por me ter possibilitado vivenciar algumas experiências típicas suíças; à Stephanie Breux e Céline Miserez-Caperos, doutorandas desta instituição, pelos momentos de discussão e reflexão que me proporcionaram, bem como pela partilha de artigos científicos; à Tânia Zittoun por me ter proporcionado a transição entre os dois contextos; ao António Iannaccone, Francesco Arcidiacono e Marcelo Giglio pelos momentos de discussão e reflexão, mas também os de lazer que fizeram com que me sentisse "em casa".

À Gracinda Hamido, pela amizade e por me ter desafiado a editar, colaborativamente, um número especial da revista *Interacções*, com o tema *Desafios no ensino e na aprendizagem da Matemática*, o que configurou oportunidades de aprendizagem significativas e únicas.

Ao Instituto Piaget de Almada, pelo convite que me foi dirigido para proferir uma conferência no congresso *Aprendizagem/Desenvolvimento*, em 2009, e que me permitiu a partilha de experiências de aprendizagem, bem como o desenvolvimento de capacidades e competências, essenciais num professor e investigador. Aos organizadores do CIEAEM 62, em 2010, pela oportunidade que me proporcionaram, para a realização de uma comunicação oral, num evento exclusivo aos membros da comissão, no qual pude entrar em contacto com especialistas de renome no domínio da Educação Matemática e refletir, colaborativamente, sobre o trabalho que estava a desenvolver e sobre os desafios que se colocam, no futuro, nesse domínio.

Aos meus colegas do projeto *Interacção e Conhecimento*, pelo apoio e pelas discussões que me permitiram refletir sobre aspetos fundamentais, contribuindo para a construção e evolução deste trabalho. Em especial: à Cláudia Ventura e à Inês Borges pela amizade, pela partilha de momentos, por vezes agradáveis, outros de desânimo e frustração, pelo tempo despendido e dedicado, em especial na fase final de últimas verificações deste trabalho; à Conceição Courela pelo apoio e disponibilidade, que contribuíram para a realização desta viagem.

Aos amigos mais próximos, pela força e apoio que me deram, apesar da minha ausência. Pelas palavras de coragem e incentivo que sempre souberam dizer nas alturas em que mais precisava delas.

O mais fundamental e o mais seguro porto de abrigo ao longo desta viagem: a minha família. Onde dia a dia estavam as emoções, as ausências, as pequenas e grandes conquistas e perdas. Em especial à Gi, minha companheira de viagens, por ser mais que

o meu braço direito, pelo amor, pela amizade e pela paciência mostrada. Ao Martim, meu querido filho, que apesar de ter poucos dias de vida, contribuiu para que esta viagem tivesse outro sentido, outra cor. Por ter dado excelentes noites, o que permitiu conseguir chegar ao destino no tempo previsto. Aos meus pais, pelo amor incondicional, pelo apoio e por me terem educado tal como sou. À minha irmã, Sónia, pela amizade e apoio demonstrados na minha trajetória de participação ao longo da vida. À Mãe-Tó, pela amizade incondicional, pelo carinho e pelas palavras de apoio e de incentivo. Aos meus sogros, que apesar de estarem longe, sempre tiveram uma palavra de apoio, de incentivo e de amizade.

A todos o meu muito obrigado!

ÍNDICE GERAL

VOLUME I

VOLUME II

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

INTRODUÇÃO

A Matemática assume elevada importância nas trajetórias de participação ao longo da vida, sobretudo para alunos do 3.º ciclo do ensino básico e secundário (César, 2013a). É frequentemente associada a elevadas taxas de insucesso académico (Abrantes, 1994; Leite & Delgado, 2012) e à construção de representações sociais negativas (Gorgorió & Planas, 2005; Machado, 2008; Machado & César, 2012a, 2013a, in press b; Piscarreta, 2002). A conjugação destes dois elementos pode contribuir para a existência de fenómenos de exclusão escolar e social de alunos, em especial daqueles que participam em culturas socialmente pouco valorizadas (César, 2009, 2013b).

Numa sociedade do conhecimento, como a sociedade dita ocidental, onde se pretende que os indivíduos sejam capazes de colocar em ação, nos vários contextos, cenários ou situações, os conhecimentos que apropriaram na Escola, bem como de utilizar as ferramentas culturais que fazem parte dos seus fundos de conhecimento, torna-se pertinente que a aprendizagem, em especial a aprendizagem matemática, tenha em consideração essas dinâmicas (Kumpulainen et al., 2010; Ludvigsen, Lund, Rasmussen, & Säljö, 2011). Desta forma, a Matemática pode contribuir de forma significativa para a formação de cidadãos (mais) participativos, críticos e reflexivos. Ser capaz de a aprender, atribuindo-lhe sentidos (Bakhtin, 1929/1981), contribui para apropriar conhecimentos (matemáticos) e desenvolver capacidades e competências (matemáticas), conseguindo mobilizá-los em situações futuras. A relevância das interações sociais e da comunicação nos processos de ensino e de aprendizagem ilumina como a aprendizagem da matemática é um processo social (Cobb, 2006).

A Escola tem vindo a tornar-se um espaço/tempo que apresenta uma grande diversidade cultural, em termos de conhecimentos, capacidades e competências, interesses e características dos diversos agentes educativos (César, 2009, 2013a, 2013b; César & Oliveira, 2005). Se pretendemos que os alunos construam trajetórias de participação ao longo da vida onde vivenciem sucesso (César, 2013a), particularmente na escola, é necessário que o professor consiga adaptar as práticas pedagógicas, tendo em consideração essa diversidade. Mas, para que isso seja possível, torna-se fundamental conhecer as capacidades e competências que os alunos conseguem mobilizar, desde o início do ano letivo, bem como as que precisam de desenvolver.

Assim, é necessário mudar as formas de atuação, em aula, particularmente durante a primeira semana de aulas (César, 2009; Machado, 2008; Machado & César, 2012a).

Essa mudança pode ocorrer segundo dois níveis que se complementam: (1) na planificação e preparação das aulas; e (2) na operacionalização dessa planificação, isto é, na forma de trabalho desenvolvida, em aula. No primeiro nível estão incluídos os instrumentos e os procedimentos que o professor utiliza para conhecer as capacidades e competências que os alunos já mobilizam e as que precisam de desenvolver. Essa avaliação deve ocorrer na primeira semana de aulas do ano letivo. Também faz parte deste nível a elaboração, adaptação ou seleção de tarefas matemáticas que visam o desenvolvimento de outras capacidades e competências que os alunos necessitam de desenvolver, através da interação entre pares (Machado, 2008; Machado & César, 2012a; Ventura, 2012). O segundo nível está relacionado com o desenvolvimento de práticas pedagógicas baseadas no trabalho colaborativo, nomeadamente em díade ou em pequenos grupos, associado às interações sociais dialógicas que emergem dos jogos interativos. Desta forma, pretende-se promover o acesso ao sucesso escolar, bem como a equidade e a inclusão, nesta disciplina (César, 2003, 2007, 2009, 2013a, 2013b; César & Santos, 2006; Cobb & Hodge, 2007).

O problema em estudo nesta investigação é a inadequação de algumas práticas desenvolvidas nas aulas de Matemática, por falta de conhecimento das capacidades e competências (matemáticas) dos alunos, desde o início do ano letivo. Tratando-se de um problema real e abrangente, foi necessário focalizá-lo para que pudesse dar origem a esta investigação. Assim, optámos por realizar um estudo de caso (Stake, 1995/2009), referente a um instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas) – IACC – que permite encontrar formas de ultrapassar este problema.

O objetivo principal desta investigação consiste em estudar e compreender as potencialidades e os contributos desse instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas), construído no âmbito do projeto *Interacção e Conhecimento* (César, 2009; Hamido & César, 2009; Machado, 2008; Ventura, 2012). Para a consecução deste objetivo, pretendemos analisar o mencionado instrumento, os desempenhos que os alunos produziram quando com ele foram confrontados e um exemplo das práticas profissionais que, a partir da análise desses mesmos desempenhos, foram desenvolvidas. Esta investigação reporta-se aos 12 anos de vigência do projeto *Interacção e Conhecimento* (1994/95-2005/06). Esta longevidade permitiu recolher e analisar um *corpus* empírico e conceptual muito vasto e rico. A partir do problema em estudo e do objetivo principal explicitado emergiram as seguintes questões de investigação, que norteiam este estudo:

(1) Como foi o processo de construção do instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), usado na disciplina de Matemática e afins?

(2) Como são analisados os desempenhos dos alunos quando se utiliza este instrumento, de acordo com os princípios do projeto *Interacção e Conhecimento* (IC)?

(3) Assumindo uma perspetiva desenvolvimentista, que padrões de desempenho esta análise permite identificar? Como se caracteriza cada um deles?

(4) Como contribui o IACC para práticas, em aula, nomeadamente quanto à formação das primeiras díades, no início do ano letivo?

(5) Como é que os conhecimentos sobre a turma e cada aluno, obtidos com o IACC, configuram a elaboração, adaptação e seleção de tarefas matemáticas?

A tese subjacente a esta tese de doutoramento comporta três aspetos complementares: (1) é possível contribuir para uma educação matemática de elevada qualidade; (2) para isso, é necessário ter disponível um instrumento que permita avaliar as capacidades e competências (matemáticas) dos alunos desde a primeira semana de aulas; e (3) o IACC corresponde ao tipo de instrumento que os professores do ensino básico e secundário necessitam para conhecerem as capacidades e competências que os alunos já conseguem mobilizar e as que precisam de desenvolver, no início do ano letivo, facilitando o desenvolvimento de uma educação matemática de qualidade. Este trabalho, através dos resultados apresentados, pretende confirmar esta tese através de evidências empíricas.

Este documento encontra-se dividido em dois volumes. O primeiro volume inclui uma introdução, cinco capítulos, considerações finais e referências bibliográficas. O segundo volume é constituído pelos anexos. Na Introdução discutimos a pertinência do tema escolhido, identificamos o problema, as questões de investigação e a tese subjacente a esta tese de doutoramento, bem como descrevemos a estrutura deste trabalho. Os três primeiros capítulos constituem o Quadro de Referência Teórico. O Capítulo 1, *Equidade, Currículo e Matemática*, é dedicado a aspetos relacionados com o ensino e a aprendizagem da Matemática, nomeadamente o que se entende por equidade nesta disciplina, as várias interpretações do currículo e sua posterior operacionalização, a natureza das tarefas e os elementos relativos à avaliação.

No Capítulo 2, *Trabalho Colaborativo*, procuramos iluminar as características do ensino cooperativo, *scaffolding* e trabalho colaborativo, discutindo e evidenciando diferenças e semelhanças. Também explicitamos o que se entende por contrato didático, meta-contrato didático e normas sociomatemáticas, bem como a sua relação com as dinâmicas inerentes ao trabalho colaborativo. Iluminamos a importância da participação no acesso às ferramentas culturais da Matemática, realçando a pertinência da argumentação, da construção da identidade, da autonomia e da distribuição do poder nas trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a).

O Capítulo 3, *Desenvolvimento, Aprendizagem e Educação*, começa por uma análise do que se entende por desenvolvimento e aprendizagem, segundo três abordagens: *behaviourista*, *gestaltista* e sócio-construtivista. Discutimos os princípios epistemológicos subjacentes às teorias de Piaget e de Vygotsky e que também configuram esta investigação, nomeadamente o construtivismo e o interacionismo. Iluminamos os contributos da triangulação das teorias de Piaget, Vygotsky, da aprendizagem situada e do *dialogical self* nos processos de desenvolvimento e aprendizagem, salientando a importância do desenvolvimento de capacidades e competências. Clarificamos o que se entende por cada um desses conceitos e a sua relevância nos documentos de política educativa, nacionais e internacionais. Por último, apresentamos algumas características de instrumentos que avaliam capacidades e competências, segundo uma perspetiva psicométrica e desenvolvimentista.

No Capítulo 4, *Problematização e Metodologia*, começamos por uma breve descrição da trajetória de participação ao longo da vida do investigador, que configura o posicionamento e as lentes segundo as quais realizou esta investigação. Para além disso, enquadramos, no tempo e no espaço, a problemática que envolve o estudo e, em seguida, identificamos o problema, as questões e os objetivos que nortearam esta investigação, bem como a tese subjacente a esta tese de doutoramento. Explicitamos as opções metodológicas assumidas nesta investigação, nomeadamente quanto ao paradigma interpretativo (Denzin, 2002), ao *design* de estudo de caso intrínseco (Stake, 1995/2009), aos participantes, aos instrumentos de recolha de dados e aos procedimentos de recolha, tratamento e de análise de dados.

No Capítulo 5, *Resultados*, apresentamos, analisamos e discutimos os dados recolhidos, dividindo-os em cinco pontos. Começamos por descrever o processo de elaboração do instrumento de avaliação de capacidades e competências, dando voz(es) aos professores e investigadores que participaram no mesmo. Em seguida, abordamos as formas de atuação durante a primeira semana de aulas do ano letivo e que configuram as práticas pedagógicas desenvolvidas pela equipa do projeto IC, nomeadamente os instrumentos e procedimentos utilizados, o tratamento e análise dos mesmos e os critérios utilizados para a formação de díades. Em terceiro lugar, procedemos a uma análise aprofundada dos desempenhos no IACC evidenciados pelos alunos das turmas que participaram no projeto IC, identificando padrões de desempenho elaborados segundo uma lógica desenvolvimentista. De seguida, baseados nos princípios epistemológicos e pedagógicos do IC, iluminamos os impactes do IACC para a formação inicial e contínua de professores. Por fim, iluminamos os impactes do IACC nas práticas pedagógicas desenvolvidas no IC, no que se refere à natureza das tarefas propostas, ao trabalho em díade, às discussões gerais e à avaliação.

Nas *Considerações Finais*, procuramos sistematizar a trajetória percorrida neste estudo, sintetizando as respostas obtidas para cada questão de investigação e iluminando os contributos desta investigação para o desenvolvimento pessoal e profissional do investigador. Para além disso, procuramos desocultar possíveis trajetórias futuras relacionadas com investigações que alarguem e complementem a que agora apresentamos.

As *Referências Bibliográficas* possibilitam ter acesso ao suporte teórico utilizado, quer para a construção do quadro de referência teórico quer para as opções metodológicas assumidas e para a sustentação das interpretações efetuadas nos resultados. Os *Anexos* permitem ao leitor ter acesso aos instrumentos usados na primeira semana de aulas no projeto IC, assim como aos materiais utilizados na análise desses mesmos instrumentos. Incluem também os padrões de desempenho para cada tarefa do IACC, exemplos de tarefas matemáticas, entre outros elementos que permitem ter uma compreensão mais aprofundada do estudo realizado.

Por último, queremos salientar que, uma vez que esta tese foi escrita utilizando o novo acordo ortográfico, optou-se por manter a grafia original nas citações extraídas de publicações portuguesas, cuja data de publicação é anterior à implementação do novo acordo ortográfico, ou cujos autores optaram por não a utilizar. Assim, as diversas citações seguem integralmente a versão original.

CAPÍTULO 1

EQUIDADE, CURRÍCULO E MATEMÁTICA

A forma como o ensino e a aprendizagem são entendidos e desenvolvidos, particularmente em relação à Matemática, tem sofrido alterações ao longo das últimas décadas (Furinghetti, Matos, & Menghini, 2013; Matos, 2006, 2008, 2010). Elementos como a diversidade dos processos de aprendizagem e os contextos, cenários e/ou situações em que estes ocorrem começam a ser equacionados quando se pretendem promover aprendizagens significativas (Maasz & Schloeglmann, 2006). Para além desses elementos, as questões relativas à cultura, poder e equidade em Matemática também passaram a ser tidas em consideração, enquanto elementos que influenciam os processos de ensino e de aprendizagem (Apple, 1995; César, 2013a, 2013b, in press b; César & Kumpulainen, 2009; Cobb & Hodge, 2007; Gresalfi & Cobb, 2011; Schoenfeld, 2002; Secada, 1995).

As *Professional Standards for Teaching Mathematics* (NCTM, 1991) analisam seis normas para o ensino da Matemática: (1) tarefas matemáticas significativas; (2) o papel do professor no discurso; (3) o papel do aluno no discurso; (4) instrumentos para aperfeiçoar o discurso; (5) ambiente da aprendizagem; e (6) análise do ensino e da aprendizagem. Isso significa que, para além de concorrerem diversos elementos para que a aprendizagem da Matemática seja com sentido, para os alunos, é importante encontrar formas de atuação que tenham em consideração as características, interesses e necessidades dos mesmos, desenvolvendo uma literacia matemática adequada (ME/GAVE, 2004) que permita, no futuro, em situações da vida real, eles mobilizem os conhecimentos (matemáticos) apropriados, bem como as capacidades e competências (matemáticas) desenvolvidas. Assim, a ação educativa deve ser dialógica e respeitadora dos valores e culturas dos alunos (Freire, 2003).

1.1. EQUIDADE EM MATEMÁTICA

As questões relacionadas com a equidade na educação matemática são consideradas relativamente recentes, existindo alguma controvérsia no que respeita ao que se entende por este conceito e à forma de operacionalização do mesmo. A preocupação com a efetivação de uma educação que promova a equidade tem-se tornado (mais) clara nos documentos de política educativa, nacionais e internacionais, principalmente nos últimos anos, uma vez que a Escola deixou de ser um espaço/tempo destinado a uma elite, passando a ser frequentada por alunos que participam em diferentes culturas (Abreu, Bishop, & Pompeu, 1997; César, 2009, 2013a, 2013b, in press a, in press b; OCDE, 2008). Como referem Roth e Radford (2011), "a escola é um lugar onde os estudantes começam a estar sistematicamente envolvidos em práticas histórico-culturais e onde entram em contacto com formas de conhecimento e de estar *nessa* sociedade *naquela* altura num determinado momento histórico" (p. 121, itálico no original). Esta argumentação vai ao encontro do que é assumido por Abreu, Bishop e Presmeg (2002) quando mencionam que se deixou de encarar a apropriação de conhecimentos (matemáticos) e a mobilização e desenvolvimento de capacidades e competências (matemáticas) como independentes das culturas em que se participa, bem como do património cultural e social que cada indivíduo possui.

Furinghetti e seus colaboradores (2013) referem que as dimensões sociais, culturais e políticas têm vindo a ser consideradas como elementos importantes e intrínsecos nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, salientando como principais impulsionadores desta linha de investigação D'Ambrósio (1985) e Skovsmose (1994). Assim, é importante que a educação matemática valorize a diversidade cultural que existe na Escola, por exemplo, através da etnomatemática (D'Ambrósio, 1985, 2002, 2005). Segundo este autor, a etnomatemática procura conhecer e facilitar a atribuição de sentidos às diversas atividades desenvolvidas por diferentes culturas, iluminando de que modo a Matemática, enquanto ferramenta cultural (Vygotsky, 1934/1962), pode ser utilizada na resolução de problemas do dia a dia. Desta forma, os trabalhos desenvolvidos no âmbito da etnomatemática (como Civil, 2002, 2007; D'Ambrósio, 1985, 2002, 2005; Favilli, César, & Oliveras, 2004; Gerdes, 1999, 2007, 2013) constituíram-se como uma forma pioneira de desenvolver uma educação intercultural e, assim, contribuir para a promoção de equidade, no domínio da educação matemática.

Como salienta Bishop (2001), os seres humanos têm, ao longo dos tempos, utilizado a Matemática de diversas maneiras: contagem, medição, localização (*locating*), criação (*designing*), explicação e jogo. Estas diferentes formas de fazer Matemática, que este autor considera serem comportamentos (*behaviors*) universais, estão relacionadas com o contexto (cultural) onde decorre essa ação. Assim, ao assumirmos a Matemática como ferramenta cultural (Vygotsky, 1934/1962), os valores partilhados pelos professores e alunos, através das práticas, influenciam o modo como a equidade é operacionalizada, uma vez que diferentes culturas, não partilhando dos mesmos valores, influenciam esses valores e os desempenhos matemáticos de formas diferentes (Bishop, 2001).

Nos últimos anos, no domínio da educação matemática, considerava-se que quem se preocupava com as questões relacionadas com a equidade em Matemática pertencia a uma linha de investigação diferente daqueles que estudavam as questões relacionadas com o ensino e a aprendizagem dessa disciplina (Secada, 1995). Esta posição ilumina a existência de uma barreira, criada por alguns investigadores, que não queriam incluir o conceito de equidade como um dos elementos a ter em consideração quando se pretende promover o sucesso escolar em Matemática. Por outro lado, também realça a resistência destes mesmos investigadores em encararem a Escola como um espaço/tempo dialógico, no qual co-existem diversas culturas e que deixou de ser exclusiva daqueles que participam na cultura dominante. Se a capacidade de aprender é uma capacidade comum a todos (Maasz & Schloeglmann, 2006), então é preciso encontrar formas de atuação e dinâmicas de regulação (César, 2013b) para que isso não seja considerado uma utopia, mas sim uma prática que se desenvolve nas escolas e em cenários como a sala de aula. Por exemplo, recorrendo a atividades que valorizem as culturas nas quais os alunos participam, como os trabalhos desenvolvidos no âmbito da etnomatemática (Civil, 2002; D'Ambrósio, 1985, 2002; Favilli et al., 2004; Gerdes, 1999, 2013) e que recorrem a situações (problemáticas) do quotidiano, por forma a facilitar o acesso ao sucesso escolar na disciplina de Matemática. A título de exemplo, temos a elaboração de batiques (Favilli et al., 2004), em Portugal, em que a partir de uma atividade artesanal típica de Cabo Verde se exploram conteúdos matemáticos e se desenvolvem capacidades e competências (matemáticas), valorizando uma cultura pouco valorizada socialmente: a cultura cabo-verdiana.

A discussão sobre o que se entende por equidade não está terminada, dada a complexidade dos domínios que envolve. Vários autores propõem uma possível definição para este conceito com vista à sua utilização em contextos de educação formal. Por exemplo, Cobb e Jackson (2011) relacionam a equidade com ensino ambicioso (*ambitious teaching*), constructo cunhado por Lampert e Graziani (2009). Assim, a equidade tem subjacente que "todos os alunos devem poder participar substancialmente em todas as fases das atividades de sala de aula" (Cobb & Jackson, 2011, p. 8). Para estes autores, esta perspetiva de equidade reflete-se nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, em aula, tendo em consideração que existe interação e partilha de elementos de diversas comunidades que participam em várias culturas. Com isso, pretende-se que os alunos tenham oportunidades de desenvolver formas de pensamento matemático através da participação e do envolvimento no trabalho proposto (individual, pares e/ou em grupo), nos diversos momentos que constituem uma aula de Matemática de elevada qualidade (Cobb & Jackson, 2011; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008), evidenciando a disposição para utilizarem a matemática como ferramenta cultural (Vygotsky, 1934/1962).

Como sustenta o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007) a equidade "exige diferentes adaptações, de modo a ajudar todos os alunos na aprendizagem da matemática" (p. 13). É importante reconhecer que os alunos têm ritmos diferentes de aprendizagem (César, 2009; Ventura, 2012), pelo que as estratégias que se colocam em prática, em cenários de educação formal, relativamente ao ensino e à aprendizagem da Matemática, deverão ser diversificadas, de modo a poder responder a essa especificidade. Se considerarmos a equidade como um processo (Gutiérrez, 2007), as formas de atuação, em aula, nomeadamente as explícitas e, sobretudo, as implícitas, assumem especial importância. Ladson-Billings (1997) argumenta que os professores devem conhecer as trajetórias de participação ao longo da vida dos alunos, dentro e fora da escola, para que possam, a partir dessa informação, desenvolver cenários que os motivem e estimulem para a aprendizagem da Matemática, através de práticas pedagógicas culturalmente relevantes (*cultural relevant pedagogy*) (Ladson-Billings, 1997). Desta forma, esta autora realça a importância que as culturas em que os alunos participam assumem para a aprendizagem. Essa valorização constitui uma das formas possíveis para a promoção de equidade.

Assim, esta visão de equidade assenta numa perspetiva histórico-cultural (César, 2009, 2013a; Roth & Radford, 2011; Vygotsky, 1934/1962) e situada da aprendizagem (César, 2013a, 2013b; Lave & Wenger, 1991), onde estão envolvidas as relações dialógicas que se estabelecem entre os vários elementos de uma comunidade de aprendizagem (César, 2007; Lave & Wenger, 1991). Esta perspetiva interliga-se com o que César (2009, 2013a) e Cobb e Hodge (2007) afirmam, ainda, fazer parte da noção de equidade: a questão do poder. Como estes dois últimos autores sustentam, "a equidade, como a interpretamos, engloba o desenvolvimento dos alunos no que se refere ao sentido de eficácia (dar poder) em matemática, juntamente com o desejo e a capacidade de aprender mais sobre a matemática quando a oportunidade surge" (p. 160). Embora aqui a questão do poder surja associada ao sentido de eficácia que os alunos possam vir a sentir, essa situação só poderá ocorrer se estes vivenciarem experiências de aprendizagem nas quais haja uma distribuição do poder pelos vários elementos que constituem essa comunidade de aprendizagem (César, 2009, 2010, 2013a, 2013b, in press a).

Gutiérrez (2007) considera a equidade como um processo, ao qual está subjacente a construção de conhecimentos (matemáticos) a partir da identidade cultural de cada aluno, estabelecendo conexões entre estes e a sociedade. Assim, outra forma de promover a equidade é a valorização das identidades, pessoal, cultural ou escolar. Esta perspetiva sobre a promoção de equidade em Matemática vai ao encontro do que é assumido pelos investigadores que trabalham no domínio da educação matemática crítica (Alrø, Ravn, & Valero, 2010; Alrø, Skovsmose, & Valero, 2005; Skovsmose, 1994, 2006, 2007). Como sustenta Skovsmose (2006, 2007), a educação matemática crítica alberga algumas preocupações (desafios) sobre a educação matemática, educação, em geral, e sociedade. Estas estão relacionadas com a diversidade (cultural) existente na sociedade, a igualdade (ou a falta dela), a justiça social (ou falta dela) e a autonomia dos estudantes e dos professores (ou falta dela) (Alrø et al., 2010; Skovsmose, 2006, 2007).

Skovsmose (2007), em relação às finalidades da educação matemática crítica, afirma que:

> Eu estou interessado no possível papel da educação matemática como um porteiro, responsável pela entrada de pessoas, e como ela estratifica as pessoas. Estou preocupado com todo discurso que possa tentar eliminar os aspetos sociopolíticos da educação matemática e definir obstáculos de aprendizagem, politicamente determinados, como falhas pessoais. Estou preocupado a respeito de como o racismo, sexismo, elitismo poderiam operar na educação matemática. Eu estou preocupado com a relação entre a educação matemática e a democracia. (p. 176)

A posição deste autor sobre quais as finalidades da educação matemática é corroborada por Freire (2003), relativamente às conexões que se podem estabelecer entre, por um lado, o ensino e aprendizagem da matemática e a formação crítica e de cidadania e, por outro lado, a sociedade. A promoção de uma educação intercultural, mais crítica e com base nos contributos que cada um poderá trazer para a Escola, para a aula, permite dar resposta às duas dimensões que, segundo a OCDE (2008), fazem parte do conceito de equidade e que são consideradas como um desafio futuro, no domínio da educação: a justiça e a inclusão. A justiça está associada às características pessoais e sociais de cada indivíduo como, por exemplo, género, estatuto sócio-económico e etnia, que não devem ser considerados como uma barreira ao acesso ao sucesso escolar. A inclusão tem a ver com o assegurar os princípios básicos de educação para todos como, por exemplo, saber ler, escrever e utilizar a matemática no dia a dia (OCDE, 2008). Assim, desenvolver práticas, em aula, que tenham em consideração estes princípios orientadores de equidade podem permitir reduzir as taxas de insucesso escolar, em especial à disciplina de Matemática, bem como as taxas de abandono escolar precoce.

Por tudo o que foi dito anteriormente, a educação matemática crítica (Skovsmose, 2006, 2007), bem como o trabalho colaborativo, em aula (César, 2009, 2013a, in press a, in press b) e as dinâmicas regulatórias Escola/Família (César, 2013b) assumem-se como facilitadores da operacionalização do conceito de equidade em cenários de educação formal. As questões relacionadas com a promoção da equidade, em relação à disciplina de Matemática, não se esgotam considerando aspetos relacionados com a cultura, identidade e poder. Contudo, estes devem ser considerados como elementos orientadores quando se pretende operacionalizar este princípio em ambientes de educação formal, nomeadamente em cenários como a sala de aula.

1.2. CURRÍCULO

A noção polissémica de currículo tem sofrido alterações ao longo dos séculos, sendo configurada pelas sucessivas mudanças da sociedade e das expetativas que se estabelecem na educação, em geral, e na educação matemática, em particular. Vários investigadores têm estudado o currículo enquanto conceito teórico, bem como a sua utilização e desenvolvimento em contextos educativos (Gaspar & Roldão, 2007; Gimeno, 2000; Leite, 2002, 2003, 2006; Pacheco, 1996, 2005; Roldão, 1999a, 1999b, 2003, 2011). Apesar das diferentes definições existentes subsiste uma argumentação transversal acerca do que se entende pelo currículo, enquanto construção social. Como argumenta D'Ambrósio (2002),

> O currículo deve refletir o que está acontecendo na sociedade. A dinâmica curricular sempre pergunta "onde" e "quando" o currículo tem lugar, e o problema-chave na dinâmica curricular é relacionar o momento social, o tempo e o lugar, na forma de objetivos, conteúdos e métodos, de forma integrada. (p. 34, aspas no original)

Para além desta característica do currículo, acrescenta-se o estabelecer relações intrínsecas com as decisões políticas pois, como afirma Roldão (2003), "o currículo é a arena política e social onde se joga a inclusão e a exclusão real dos indivíduos" (p. 18), pelo que se devem ter determinados cuidados quando este se operacionaliza. A Escola está a tornar-se um espaço/tempo cada vez mais multicultural ou, como refere Cortesão (2009), um *"arco-íris sociocultural"*, em que os diversos agentes educativos (professores, alunos, pais, entre outros) participam em várias culturas, simultaneamente (César, 2009, 2013a, 2013b; César & Oliveira, 2005), o que também realça a necessidade de operacionalizar o currículo favorecendo uma educação intercultural.

Para Pacheco (2005), o currículo é "um projecto, cujo processo de construção e desenvolvimento é interactivo" (p. 39) e que "ocorre em diversos contextos a que correspondem diferentes fases e etapas de concretização" (p. 54). Como tal, é nessas transições entre as diferentes formas de concretização que aparecem as fases de desenvolvimento do currículo (ver Figura 1).

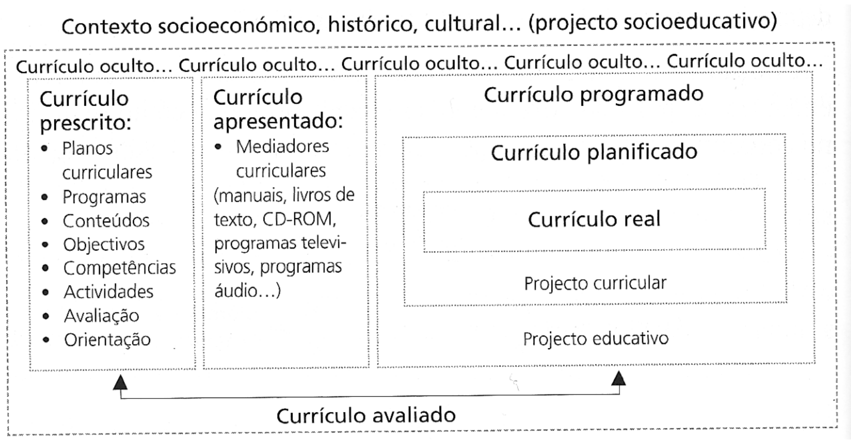


Figura 1 – Fases do desenvolvimento do currículo (Pacheco, 2005, p. 54)

Para Pacheco (2005), o currículo prescrito constitui a primeira forma visível do mesmo e corresponde ao conjunto dos documentos de política educativa que são adotados pelas organizações escolares. Este é, depois, interpretado e apresentado aos professores na forma de manuais e materiais de apoio, atingindo a fase de currículo apresentado. O currículo programado consiste na interpretação que o grupo de professores faz do currículo prescrito e do apresentado, tendo em consideração o projeto educativo da escola. Por sua vez, atinge-se a fase do currículo planificado quando, individualmente ou em grupo, os professores elaboram as planificações e materiais didáticos a utilizar em cada turma, aula e ano de escolaridade. Estas duas últimas fases do desenvolvimento do currículo correspondem ao que Gimeno (2000) denomina por currículo moldado. A fase do currículo real (Pacheco, 2005) ou em ação (Gimeno, 2000) é aquela em que o professor coloca em prática o que interpretou do currículo moldado. No entanto, ao colocá-lo em prática, existe uma interpretação, feita pelos alunos, sobre o que é e como é posto em prática, que Pacheco (2005) não menciona no esquema referido na Figura 1, e que Gimeno (2000) denomina por currículo realizado. O currículo avaliado (Pacheco, 2005) consiste na interpretação e avaliação do currículo prescrito através da apresentação de provas de avaliação externa como, por exemplo, os testes intermédios e os exames finais nacionais do ensino secundário.

Contudo, existe um currículo que não corresponde ao currículo prescrito – o currículo oculto – que, segundo Pacheco (2005), "abrange os processos e efeitos que, não estando previstos nos programas oficiais, fazem parte da experiência escolar" (p. 56). Assim, a fase correspondente ao currículo oculto emerge quando existe uma interpretação do currículo prescrito, feita pelos professores, alunos ou demais agentes educativos, que faz aparecer efeitos não previstos, inicialmente. Esta fase é transversal e situada no espaço e tempo, ocorrendo quando se operacionaliza o mesmo.

Ponte, Matos e Abrantes (1998) identificam três dimensões em forma de espiral crescente acerca do que entendem por currículo. Segundo estes autores, este pode ser entendido como: (1) documento normativo, isto é, um documento que integra um conjunto de disciplinas, de conteúdos a lecionar e as formas de trabalho a desenvolver em cada disciplina de um determinado curso; (2) documento normativo e flexível que engloba a dimensão anterior e acrescenta o conjunto "de acções educativas planeadas pela escola de forma deliberada, mesmo que sejam realizadas parcial ou totalmente fora das salas, incluindo portanto actividades tradicionalmente chamadas "extracurriculares"" (p. 17, aspas no original); e (3) documento normativo, flexível e contextualizado, que corresponde à dimensão mais elevada, na qual o currículo pode ser identificado como tudo o que os alunos aprendem, quer formal quer informalmente, o que constitui, para alguns autores, o currículo realizado (Gimeno, 2000) conjugado com o currículo real (Pacheco, 2005) ou em ação (Gimeno, 2000) e o currículo oculto (Gimeno, 2000; Pacheco, 2005).

A operacionalização do currículo, em educação, tem como espaço de atuação privilegiado a Escola. Esta instituição assume, nomeadamente na sociedade dita ocidental, um papel cada vez mais exigente e preponderante na formação dos futuros cidadãos. Contudo, segundo afirma Hamido (2007), face à modificação acelerada da sociedade, a Escola tem que saber "*gerir* e *gerar* mudanças. Gerir, pensando os seus propósitos e contextos, antes que se precipite na sua implementação. Gerar, posicionando-se como autora ou co-autora do significado, sentido (direcção) e ritmo da mudança" (Hamido, 2007, p. 142, itálico no original). Assim, pede-se à Escola que se assuma mais como um espaço/tempo dialógico (César, 2013a), gerador de aprendizagens com sentidos, de tal forma que os alunos consigam operacionalizar transições dos conhecimentos apropriados e das capacidades e competências desenvolvidas para outros contextos, cenários e/ou situações, fora do contexto escolar (Abreu et al., 2002; César, 2009, 2013a). Se estes conhecimentos, capacidades e competências não se tornam parte da experiência de vida dos alunos, ou seja, se eles não os conseguem mobilizar quando deles necessitam, então as experiências de aprendizagem com que foram confrontados não são verdadeiramente educativas (Dewey, 1897/2008).

Leite (2003) desenvolve o conceito de *escola curricularmente inteligente* que define como uma

> instituição que não depende exclusivamente de uma gestão que lhe é exterior, porque nela ocorrem processos de tomada de decisão participados pelo colectivo escolar e onde, simultaneamente, ocorrem processos de comunicação real que envolvem professores e alunos e, através deles, a comunidade na estruturação do ensino e na construção da aprendizagem. (p. 125)

Assim, pede-se à Escola que atue como um mediador entre as várias culturas em que participam os diversos agentes educativos e espera-se que configure espaços/tempos em que os futuros cidadãos não só apropriem os conhecimentos científicos previstos, como ainda desenvolvam capacidades e competências essenciais ao exercício de uma cidadania ativa e crítica (César, 2013a, 2013b; Courela, 2007). Este conceito de *escola curricularmente inteligente* relaciona-se com o de *escola aprendente,* desenvolvido por Hargreaves (1998). Este autor cunha este conceito tendo subjacente a existência de uma cultura colaborativa entre os professores, na qual cada um se sente parte desse grupo, dessa (pequena) comunidade. Deste modo, esta é uma Escola pouco voltada para o ensino dito tradicional, ou seja, essencialmente expositivo, e mais para o ensino por descoberta, em que o aluno constrói o seu próprio conhecimento, ou seja, valorizando a compreensão e preparando os alunos para um mundo em mudança. Um mundo onde a sociedade do conhecimento se torna, também, uma sociedade de aprendizagem. Esta argumentação é retomada num estudo realizado pela OCDE (2009), em que se considera que a existência de formas de colaboração entre os professores é um dos elementos que se deve ter em consideração, quando se pretende promover o acesso ao sucesso escolar dos alunos.

Acrescentaríamos a este conceito de Escola o de dialogicidade (Marková, 2005), que consiste na "capacidade para conceber, criar e comunicar acerca das realidades sociais em termos da sua diversidade" (p. 91). Desta forma, a Escola assume-se como um espaço/tempo no qual os vários agentes educativos interagem dialogicamente (César, 2009, 2013a), tornando-se participantes legítimos de uma comunidade de aprendizagem ou de prática (Lave & Wenger, 1991), em que o poder (Apple, 1995) se encontra distribuído, proporcionando o desenvolvimento de princípios e atitudes que favorecem a equidade e a inclusão (César, 2013b; Cobb & Hodge, 2007).

Para Roldão (1999b), o currículo escolar deverá ser um "conjunto de aprendizagens que, por se considerarem socialmente necessárias num dado tempo e contexto, cabe à escola garantir e organizar" (p. 24). Desta forma, o papel do professor é preponderante no desenvolvimento de um currículo que vá ao encontro do contexto socio-económico em que a escola se insere (Borralho & Neutel, 2011). Gimeno (2000) afirma que o currículo se deve assumir "como configurador da prática" (p. 47), estabelecendo a transição "entre a teoria e a acção" (Gimeno, 2000, p. 47). Portanto, o papel do professor não deverá ser de mero executor, mas sim de mediador entre os conhecimentos escolares a apropriar e os alunos, adaptando esses mesmos conhecimentos de acordo com as características, necessidades e interesses dos alunos. No entanto, este autor não deixa de referir que o papel do professor pode variar de acordo com os três níveis descritos no trabalho desenvolvido por Tanner e Tanner (1980): (1) imitação-manutenção; (2) mediador; e (3) criativo-gerador. No primeiro nível, os professores seguem escrupulosamente o que é estabelecido no currículo, em termos de orientações, recursos e avaliação, isto é, são "executores de algo que se planeja fora da esfera de suas decisões, ou se lhes pede que obtenham algo que eles não decidem conseguir" (Gimeno, 2000, p. 179). No segundo nível, o professor atua como mediador, adaptando as orientações curriculares, os recursos didáticos disponíveis e a avaliação às características, necessidades e interesses dos alunos. Por último, o professor que atua como criativo-inovador é aquele que "avalia, diagnostica, interpreta, adapta, cria, busca novos caminhos" (Gimeno, 2000, p. 179). Diríamos que, para que o professor crie oportunidades de os alunos desenvolverem o pensamento matemático, atribuindo sentidos às aprendizagens realizadas, este deve situar-se numa interface entre o professor como mediador e o professor como criativo-inovador.

A relação do professor com o currículo configura e é configurada pelos contextos (multiculturais) em que participa, não podendo estar limitada à especificidade de cada disciplina. Por isso, surge a necessidade de o professor saber construir e gerir o currículo:

> Assumindo o currículo como *uma unidade integradora do que se quer fazer aprender a todos os alunos de forma eficaz*, não pode mais entender-se o professor como o detentor de uma espécie de *propriedade solitária de uma disciplina* que se justifica por si mesma. Trata-se sim de equacionar os saberes específicos em função de finalidades curriculares e de articulá-las num projecto coerente que se corporize na eficácia das aprendizagens conseguidas. O papel de *decisor e gestor do processo curricular torna-se assim um definidor essencial da profissionalidade docente.* (Roldão, 1999a, p. 39, itálico no original)

Assim, para que se efetive a flexibilização do currículo, é necessário, segundo Cortesão (2009), que

> se esteja atento aos públicos com quem se trabalha, se esteja disponível e se seja capaz de identificar sinais de interesse/desinteresse, de problemas de comportamento [que designamos por formas de actuação], de contribuições, por vezes inesperadas, que possam indicar formas de conseguir uma maior implicação dos alunos no seu processo de aprendizagem. (p. 17)

As argumentações sustentadas por Roldão (1999a) e Cortesão (2009), aliadas à conceção de currículo proposta por Gimeno (2000), deixam transparecer um aspeto igualmente importante quando se aborda as questões do currículo e da gestão curricular: o currículo ser histórico-culturalmente situado (César, 2009, 2013a). Nesta abordagem, Leite (2002) propõe uma visão que se adequa à construção de um currículo que funcione como uma ferramenta mental (Vygotsky, 1934/1962) e que a autora descreve como correspondendo a um

> conjunto de processo de selecção, organização, construção e reconstrução culturais (no seu sentido amplo), ou seja, como tudo o que existe enquanto plano e prescrição e tudo o que ocorre num dado contexto e numa situação real de educação escolar. (...) Pensamos o currículo nas relações que se estabelecem entre os diferentes actores, experiências e saberes, nos valores e crenças dos protagonistas da acção, nos papéis atribuídos aos diferentes sujeitos e nos que por eles são assumidos (...) na sua dimensão de intervenção e reconstrução social. (pp. 89-90)

Assim, podemos, também, considerar o currículo como um objeto mediador para a distribuição de poder (César, 2009, 2013a, in press b; César & Oliveira, 2005; Rose, 2002), em que os jogos (inter)ativos que emergem da relação triádica professor, aluno e conhecimentos precisam de ser mais equitativos, no que respeita à participação, em cenários de educação formal. Porém, esta relação triádica tem que ser encarada de uma forma sistémica, relacionando cada um destes pólos com a comunidade social, a família, o sistema de ensino, os documentos de política educativa, as intenções dos decisores políticos, os jogos de poder que acontecem na sociedade, as culturas, entre muitos outros aspetos a considerar numa abordagem ecológica e holística (César, 2010, 2013b, in press a, in press b).

Desta forma, assumimos o currículo numa perspetiva flexível e abrangente, que configura uma aprendizagem dialógica, na qual as interações sociais entre os vários intervenientes jogam um papel essencial com vista a uma compreensão dos conhecimentos escolares, a que se atribuem sentidos (Bakhtin, 1929/1981), sendo essa compreensão partilhada por outros elementos daquela comunidade educativa. Assim, pretende-se ir ao encontro do que é sugerido pelo NCTM, em relação à conceção do como deve ser o currículo para a Matemática: um "currículo coerente, [em que] as ideias matemáticas estão associadas e construídas umas sobre as outras, de forma que os conhecimentos e a compreensão dos alunos sejam aprofundados e a sua capacidade de aplicação da matemática se amplie" (NCTM, 2007, p. 15). Concebe-se o currículo como praxis, no qual

> muitos tipos de acção intervêm em sua configuração, que o processo ocorre dentro de certas condições concretas, que se configura dentro de um mundo de interacções culturais e sociais, que é um universo construído não natural, que essa construção não é independente de quem tem o poder para construí-la. (Grundy, 1987, citado por Gimeno, 2000, p. 21)

Em síntese, consideramos o currículo enquanto produto de múltiplas influências dos vários agentes educativos que intervêm no processo contínuo, colaborativo e dialógico da elaboração e interpretação das intenções educativas, que se operacionalizam em diversos cenários de educação formal.

1.3. NATUREZA DAS TAREFAS

Como afirma Goldenberg (1998a), "A Matemática não é acerca de conteúdo, é acerca do raciocínio que descobre, reúne e dá sentido a esses conteúdos; a Matemática é (em parte) um modo de pensar" (p. 37). Este aspeto dinâmico da Matemática contrasta com o ser assumida como um saber estático e estruturado, conceção que perdurou durante muitos anos (Schoenfeld, 2002). Assim, os procedimentos e conceitos matemáticos envolvem o recurso a ferramentas matemáticas na exploração de situações problemáticas e na justificação dos processos de raciocínio utilizados (Schoenfeld, 1992). Desta forma, em relação à Matemática, pretende-se que o ensino e a aprendizagem promovam formas de pensamento diversificados e com elevados graus de complexidade. Alguns dos principais aspetos a considerar para que as atividades matemáticas contribuam para o desenvolvimento do pensamento (matemático) são a natureza das tarefas, as instruções de trabalho que lhes estão subjacentes e a forma como estas mesmas tarefas são exploradas, em aula (Arbaugh & Brown, 2005; César, 1994, 2009, 2013a, in press b; Schoenfeld, 1992; Smith, Bill, & Hughes, 2008; Stein, Grover, & Henningsen, 1996; Stein et al., 2008).

Ao longo das últimas décadas, várias investigações, nacionais e internacionais, se têm debruçado sobre o estudo da natureza das tarefas propostas e os impactes que as mesmas podem ter nas aprendizagens (matemáticas) dos alunos (Brocardo, 2001; Christiansen & Walther, 1986; Ponte, 2005; Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2003; Ponte, Oliveira, Cunha, & Segurado, 1998). No entanto, outros autores têm considerado, para além da natureza das tarefas, o papel fundamental desempenhado pelas instruções de trabalho e pelas práticas, em aula, quando se recorre a uma determinada tarefa, ou seja, debruçado sobre o carácter dinâmico e situado de cada tarefa e ação humana (Vygotsky, 1934/1962), que a faz ser diferente em cada contexto, cenário ou situação em que é resolvida, isto é, que dependa da forma como a sua utilização é operacionalizada (Abrantes, 1994; Arbaugh & Brown, 2005; Boston & Wolf, 2006; César, 1994, 2009, 2013a, in press a, in press b; Garrison, 2011; Henningsen & Stein, 1997; Jackson, Garrison, Wilson, Gibbons, & Shahan, 2011; Jackson, Shahan, Gibbons, & Cobb, 2012; Smith et al., 2008; Stein et al, 1996; Stein et al., 2008). Esta perspetiva, mais dialógica, permite compreender aspetos mais complexos dos processos de ensino e de aprendizagem, evitando abordagens mais simplistas, que encaram cada tarefa como absoluta, em vez de como geradora de atividades interrelacionais e situadas.

1.3.1. Diferentes tipos de tarefas matemáticas

Skemp (1978) evidencia a existência de dois tipos de tarefas matemáticas que o professor pode utilizar no ensino e na aprendizagem da Matemática: tarefas que promovem o conhecimento instrumental (*instrumental understanding)* e as que promovem o conhecimento relacional (*relational understanding)*. Estas últimas permitem aos alunos estabelecer conexões entre os diversos conhecimentos matemáticos, bem como entre estes e as várias situações do quotidiano ou, como Abreu e seus colaboradores (2002) designam, conseguir realizar transições entre vários contextos, cenários ou situações, recorrendo a conhecimentos (matemáticos). As tarefas que promovem o conhecimento instrumental apenas exigem a utilização de regras, fórmulas ou algoritmos, em situações rotineiras. Portanto, os alunos não necessitam de compreender o procedimento utilizado, apenas o reproduzem, quase que mecanicamente (Skemp, 1978). Desta forma, os conhecimentos apropriados por meio de tarefas matemáticas que promovem o conhecimento instrumental são diferentes dos apropriados através das que promovem o conhecimento relacional, uma vez que, neste último caso, os alunos conseguem atribuir-lhes sentidos (Bakhtin, 1929/1981), indo ao encontro do que é pretendido nos documentos de política educativa, em Portugal, em relação à Matemática (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; DEB, 2001; NCTM; 2007; Ponte et al., 2007; Silva, Fonseca, Martins, Fonseca, & Lopes, 2001a, 2001b, 2002a, 2002b, 2002c; Silva, Martins, Martins, & Loura, 2001). Também se pretende fomentar uma aprendizagem para a cidadania, revelando o que Ball, Goffney e Bass (2005) afirmam ser parte do papel da matemática na formação de cidadãos mais críticos, participativos e respeitadores da diversidade.

No trabalho desenvolvido por Christiansen e Walther (1986), no qual se discute a diferença entre atividade e tarefa, estes autores dedicam-se, aprofundadamente, à análise da natureza das tarefas matemáticas. Segundo estes autores, as tarefas matemáticas podem ser classificadas como sendo tarefas rotineiras (exercícios) e tarefas não rotineiras (problemas). As tarefas rotineiras são os exercícios de identificação, de algoritmos e de aplicação (problemas de palavras) e as tarefas não rotineiras são os problemas e situações problemáticas que envolvem um grau de complexidade superior às tarefas rotineiras. No entanto, quando se escolhe um determinado tipo de tarefa, para mediar as aprendizagens que o professor pretende que os alunos venham a realizar, há que ter em consideração cinco aspetos que, segundo Christiansen e Walther (1986), são o ponto de partida para a escolha da mesma: (1) contexto da tarefa; (2) complexidade da tarefa; (3) grau de abertura da tarefa; (4) modo de apresentar a tarefa; e (5) origem da tarefa.

Corroborando o que os autores supramencionados afirmam, Ponte (2005) sustenta que, quando se escolhe uma tarefa matemática, é preciso atender a duas dimensões fundamentais: a dificuldade – reduzida ou elevada – e a estrutura – aberta ou fechada. Refere, ainda, que são aspetos igualmente importantes a duração e o contexto da tarefa. Este autor centra a classificação das tarefas matemáticas de acordo com a natureza mais aberta ou fechada das mesmas, exemplificando a partir de quatro tipos: os problemas, os exercícios, as investigações e as explorações. Para Ponte (2005), um exercício é considerada uma tarefa fechada, de desafio reduzido e de curta duração, uma vez que é dito diretamente ao aluno o que se pretende e que poderá ser resolvido num curto espaço de tempo. Um problema também é uma tarefa fechada, mas com um maior grau de dificuldade e de duração média. Uma investigação é uma tarefa aberta com um grau de dificuldade elevado e de duração média, onde pouco é dito ao aluno, cabendo-lhe investigar e descobrir. Por seu turno, uma tarefa de exploração – diferente da tarefa de investigação pelo seu grau de desafio – é uma tarefa onde o aluno pode, desde início, ir definindo um percurso à medida que vai explorando diversas estratégias de resolução e/ou análise para aquela tarefa.

Contudo, para outros autores, esta classificação das tarefas é questionável. Matos (2002, 2008) considera que os problemas não são tarefas fechadas, mas sim tarefas que permitem que os alunos explorem diversas estratégias de resolução, sem terem uma trajetória definida à partida, o que, segundo Ponte (2005), seriam designadas por tarefas exploratórias. Já Abrantes (2005) refere que um problema pode assumir um carácter bastante aberto e lato, uma vez que

> um problema não é necessariamente uma pergunta muito bem formulada para a qual se pode encontrar uma resposta única, bem determinada e matematicamente demonstrável. De facto, a resolução de problemas consiste, acima de tudo, numa larga variedade de processos, actividades e experiências intelectuais. (p. 43)

Se nos recordarmos do trabalho desenvolvido por Martins e Neto (1990), no qual um grupo de crianças do 1.º ciclo do ensino básico era confrontado com um conjunto de problemas aritméticos de carácter absurdo, é realçada a natureza aberta, não dirigida e promotora de atribuição de sentidos diferentes, gerando uma multiplicidade de formas de pensamento e processos de raciocínio. Desta forma, vai-se ao encontro do que Polya

(1945/1973) afirmava ser a finalidade da resolução de problemas na educação matemática, ou seja, o desenvolvimento de capacidades e competências tais como a comunicação (matemática), argumentação, persistência, ou organização, entre outras. Esta forma de conceber a resolução de problemas, através do respeito e valorização da diversidade e pluralidade de estratégias de resolução, pode contribuir para a promoção de equidade em Matemática, tal como esta é mencionada nos documentos de política educativa (Abrantes et al., 1999; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007).

Nos trabalhos anteriormente mencionados, os autores centram-se em classificações dicotómicas, não assumindo um abordagem dialógica dos processos de ensino e de aprendizagem, uma vez que esta evita as dicotomias por considerar que retiram a complexidade e o carácter dinâmico destes fenómenos. Por outro lado, os autores a seguir mencionados abordam as tarefas (matemáticas) recorrendo ao nível de exigência cognitiva que lhes está subjacente.

De acordo com Stein e seus colaboradores (1996), as tarefas matemáticas podem ser analisadas segundo três fases, conforme se pode observar na Figura 2.

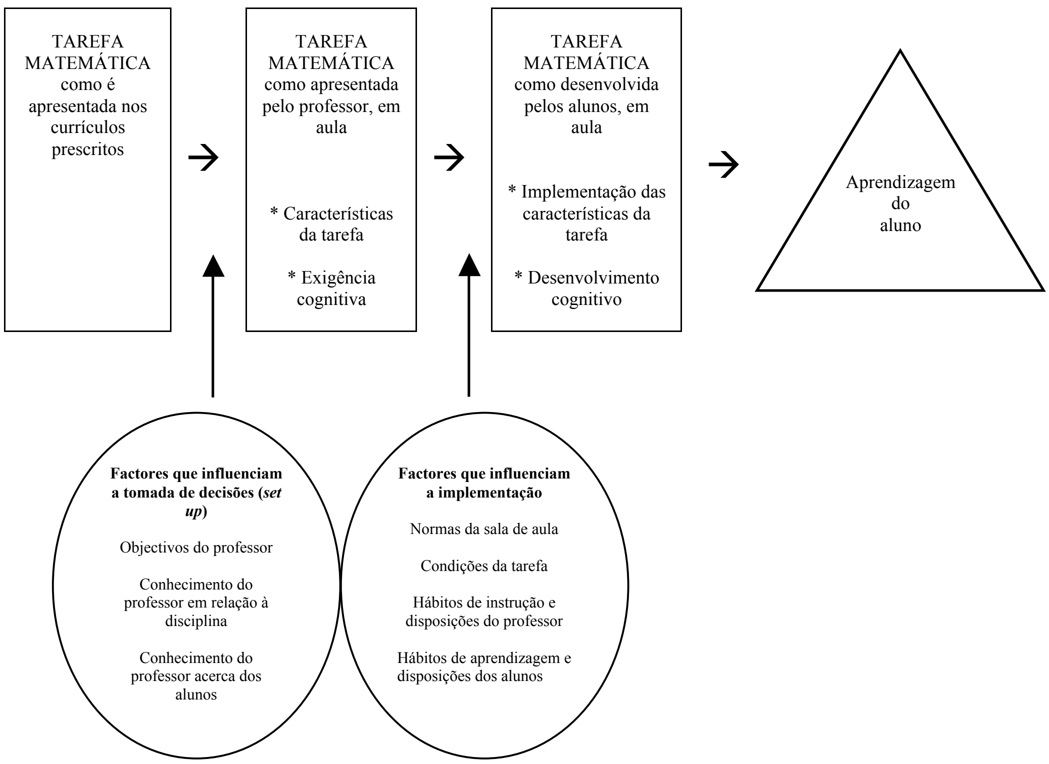


Figura 2 – Fases de implementação de uma tarefa matemática, em aula
(Adaptado de Stein et al., 1996)

A primeira fase, ou seja, a tarefa matemática como é apresentada nos currículos prescritos, é caracterizada como sendo um material didático que se encontra aos dispor do professor. A escolha de uma determinada tarefa é influenciada pelas finalidades que se pretendem atingir numa determinada aula, bem como pelos conhecimentos que o professor tem acerca da disciplina e dos próprios alunos. Estes aspetos irão influenciar, também, o modo como a tarefa é apresentada aos alunos. Assim, a natureza da tarefa matemática é avaliada, nesta fase, com base no que está escrito, isto é, o potencial da mesma. Numa segunda fase, a tarefa matemática como apresentada pelo professor, em aula, é caracterizada pela forma como o professor introduz essa tarefa aos alunos. A análise da natureza da tarefa matemática é efetuada segundo duas dimensões: as características da tarefa e o nível de exigência cognitiva.

Segundo Stein e seus colaboradores (1996), a primeira dimensão reporta-se à identificação de aspetos relacionados com o desenvolvimento do pensamento e do raciocínio dos alunos, isto é, "a existência de múltiplas estratégias de resolução, na medida em que a tarefa origina, em si mesma, múltiplas representações e a medida através da qual a tarefa pede explicações e/ou justificações por parte dos estudantes" (p. 461).

A segunda dimensão, o nível de exigência cognitiva, caracteriza-se pelos processos de raciocínio envolvidos na resolução da tarefa matemática, que são configurados também pela forma como esta foi apresentada pelo professor. Assim, estes podem variar entre a simples memorização e a utilização de fórmulas ou algoritmos até à utilização de raciocínios mais complexos, envolvendo estratégias de resolução também mais complexas, como levantamento de conjeturas, justificações, interpretações, entre outras. Desta forma, é analisado se o nível de exigência cognitiva diminui, aumenta ou se mantém, tendo em conta o potencial inicial da tarefa.

Por fim, a última fase, tarefa matemática como desenvolvida pelos alunos, em aula, é caracterizada pela forma como os alunos se envolvem na resolução da mesma. Esta fase é configurada por vários aspetos, nomeadamente, o contrato didático negociado, as instruções e as formas de trabalho desenvolvidas em aula, as formas de atuação do professor e alunos e as características, interesses e necessidades da turma. À semelhança do que ocorreu na fase anterior, esta também é desenvolvida em torno das dimensões descritas anteriormente: características da tarefa e o nível de exigência cognitiva. Contudo, é já centrada nos processos e nas formas de atuação dos alunos, face à atividade matemática.

Desta forma, estes autores encaram as tarefas matemáticas como um objeto dialógico e analisar a sua natureza, neste processo, que inclui as fases já mencionadas, assume contornos importantes quando se pretende perceber se o nível de exigência cognitiva decresce ou se mantém, no decurso da atividade matemática, ao longo de uma aula (Garrison, 2011; Smith et al., 2008). No trabalho desenvolvido por Garrison (2011) esta investigadora analisa as tarefas em dois momentos, que designa por potencial da tarefa e implementação, em aula. Relacionando este dois momentos com os apresentados por Stein e seus colaboradores (1996), podemos dizer que a primeira fase corresponde ao potencial da tarefa e as duas fases seguintes correspondem à implementação, em aula. Garrison (2011) foca-se na análise da natureza das tarefas nestas duas fases, uma vez que pretende estudar se o nível de exigência cognitiva decresce, se mantém ou aumenta entre os dois momentos descritos anteriormente, quais os aspetos que levam a essa variação, bem como os impactes na aprendizagem matemática dos alunos.

Na análise da natureza das tarefas matemáticas nesses dois momentos, Garrison (2011) utiliza um instrumento designado por IQA (*Instructional Quality Assessment*) (Boston & Wolf, 2006). Este instrumento foi construído tendo como base a existência de dois tipos de tarefas matemáticas: (1) de baixo nível de exigência cognitiva (*low level in cognitive demand*); e (2) de elevado nível de exigência cognitiva (*high level in cognitive demand*). Uma tarefa de baixo nível de exigência cognitiva envolve a memorização e/ou utilização de procedimentos sem atribuição de sentido, ou seja, compreensão. Assim, aproxima-se do que Skemp (1978) designava por conhecimento instrumental. Uma tarefa de elevado nível de exigência cognitiva é caracterizada por criar oportunidades de os alunos estabelecerem conexões entre os conceitos (matemáticos) e as várias representações, permitir abordagens diferentes para a mesma tarefa consoante o conhecimento (matemático) anterior apropriado por cada um, realizar procedimentos com compreensão e criar oportunidades para a comunicação (matemática) (Boston & Wolf, 2006). Assim, corresponde, segundo Skemp (1978), ao conhecimento relacional. Para Hiebert e Wearne (1993), este segundo tipo de tarefas são apropriadas quando se pretende criar oportunidades de reflexão e de comunicação sobre o que é importante matematicamente, pois esta forma de atuação permite a construção de novos conhecimentos (matemáticos) sob os anteriormente apropriados, estabelecendo, entre eles, conexões matemáticas com sentidos

O IQA é uma escala de 4 pontos, em que os dois primeiros (1 e 2) correspondem à classificação de tarefas matemáticas que promovem baixo nível de exigência cognitiva e os dois últimos (3 e 4) estão relacionados com as tarefas matemáticas que promovem elevado nível de exigência cognitiva (Boston & Wolf, 2006; Garrison, 2011). As características respeitantes a cada nível encontram-se descritas no Anexo 1.

Como é sustentado por diversos autores, selecionar uma tarefa cujo potencial seja de elevado nível de exigência cognitiva, isto é, situando-se nos Níveis 3 ou 4, não garante que os alunos se envolvam numa atividade matemática na qual atribuam sentidos às aprendizagens realizadas (Jackson et al., 2011; Garrison, 2011; Machado, 2008; Stein et al., 1996; Stein et al., 2008). Assim, é preciso criar condições favoráveis ao desenvolvimento dessa atividade. É preciso construir uma visão partilhada e dialógica entre os vários agentes educativos acerca do que é uma aprendizagem de elevada qualidade (Cobb & Jackson, 2011; Jackson et al., 2011), no que respeita à disciplina de Matemática. Por outro lado, assume-se também como elemento importante ter acesso aos conhecimentos anteriormente apropriados pelos alunos, bem como às capacidades e competências (matemáticas) desenvolvidas, para poder elaborar, adaptar e/ou selecionar as tarefas matemáticas aos interesses, características e necessidades desses mesmos alunos.

Nesta investigação iremos adotar a terminologia utilizada por Stein e seus colaboradores (1996) e que, mais recentemente, foi retomada pelas investigações realizadas pela equipa de Paul Cobb (Cobb & Jackson, 2011; Jackson et al., 2011; Jackson et al., 2012; Garrison, 2011) em relação à classificação das tarefas matemáticas, uma vez que são assumidas numa perspetiva dialógica da aprendizagem, relacionando-a com o nível de exigência cognitiva que se pretende desenvolver nos alunos. Analisando o currículo prescrito da disciplina de Matemática para o ensino básico (Ponte et al., 2007) e o ensino secundário (Silva, Fonseca et al., 2001a, 2001b, 2002a, 2002b, 2002c; Silva, Martins et al., 2001) constatamos que este apresenta uma grande diversidade de experiências de aprendizagens que os alunos devem vivenciar, por forma a apropriarem os conhecimentos previstos, bem como desenvolverem as capacidades e competências, consideradas nos documentos de política educativa. Contudo, isso só é passível de ser atingida se forem propostas aos alunos tarefas de natureza diversificada, escolhidas de forma a criar oportunidades de aprendizagem que tenham em consideração a diversidade dos alunos que participam nas atividades desenvolvidas em aula (Borralho & Neutel, 2011; César, 2009, 2013a, 2013b; Machado & César, 2012a; Ventura, 2012).

1.3.2. Pensamento e raciocínio em Matemática

Quando estudamos os processos de ensino e de aprendizagem relacionados com a disciplina de Matemática, particularmente em cenários de educação formal, é frequente que alguns autores se refiram aos conceitos de pensamento e raciocínio como sinónimos, ou que não definam claramente cada um deles, explicitando o que os diferencia. No entanto, parece-nos importante, em investigação, assumir uma posição quanto à definição que se adota para cada um desses conceitos.

Segundo Hamido (1996), o pensamento pode ser "encarado, quer como dependente dos domínios/áreas temáticas sobre que se pensa (e, portanto, necessariamente contextualizado), quer como uma actividade que possui regras gerais aplicáveis a diferentes domínios (e, portanto, descontextualizável)" (p. 16). Uma vez que assumimos uma perspetiva histórico-cultural (César, 2009; Roth & Radford, 2011; Vygotsky, 1934/1962) e situada (César, 2013a, 2013b; Kumpulainen et al., 2010; Lave & Wenger, 1991) do desenvolvimento e da aprendizagem, consideramos que o pensamento é configurado pelo espaço e pelo tempo em que ocorre, bem como pela língua e/ou linguagens que lhe servem de suporte e pelas vivências, conhecimentos, capacidades e competências do indivíduo que pensa. Assim, situamo-nos na primeira perspetiva mencionada por Hamido (1996). Como tal, o pensamento é encarado como um constructo dinâmico e dialógico (Marková, 2005), que pode mudar consoante as atividades em que estamos envolvidos. Como afirma Vygotsky (1934/1962), o pensamento é social e muda à medida que as crianças se desenvolvem, ocorrendo mudança, também, nas diversas formas segundo as quais funciona o pensamento.

Piaget (1923, 1924, 1936, 1947) estudou o desenvolvimento cognitivo das crianças e dos adolescentes, dando especial atenção ao pensamento lógico-dedutivo. Procurou criar um modelo de desenvolvimento baseado num sujeito epistémico e não num sujeito real. Considerava que existiam estruturas e esquemas cognitivos que serviam de base ao pensamento e descrevia-os de forma não contextualizada. No entanto, mesmo este autor, quando foca os fatores de desenvolvimento, considera a importância das experiências pessoais (físicas ou matemáticas), bem como das transmissões e interações sociais. Assim, uma leitura mais pormenorizada e atenta da sua obra permite compreender que, embora ele tenha descrito um modelo do desenvolvimento cognitivo, baseado num sujeito epistémico e, por isso mesmo, descontextualizado, ele não negava a influência de fatores sociais e culturais no desenvolvimento humano e no pensamento. Estas interpretações são discutidas por vários autores, como Bringuier (1977), César (2000b) ou Tryphon e Vonèche (1996), bem como pelo próprio Piaget (1977/1995), quando explicita, por exemplo, as condições necessárias para que exista comunicação e a importância desta nos desempenhos dos indivíduos.

Sfard (2008) assume o pensamento como comunicação individualizada (interpessoal), afirmando que "o pensamento é uma capacidade humana que permite comunicar acerca da própria comunicação. E, nesse sentido, considera-se o desenvolvimento humano como desenvolvimento do discurso" (p. 94). Assim, se pensar é comunicar (Sfard, 2008) e a comunicação configura e é configurada pela participação nas interações sociais e dialógicas que se estabelecem entre os vários intervenientes, então a construção do pensamento é socialmente partilhada e envolve a negociação de sentidos. Desta forma, torna-se importante a existência de uma concertação entre a ação e o pensamento, para que essa negociação seja possível, pois só assim os vários intervenientes conseguem colocar em ação o pensamento, permitindo-lhes interagir de forma abstrata e de modo a que o outro o perceba e que possa, também ele, comunicar.

Vygotsky (1934/1962) estabelece uma relação entre pensamento e língua. Segundo este autor, o pensamento é incorporado na palavra e esta no pensamento, isto é, existe um movimento contínuo do pensamento para a palavra e da palavra para o pensamento. Para Vygotsky (1934/1962), "cada pensamento tende a conectar algo com outro algo, a estabelecer uma relação entre as coisas. Cada pensamento move-se, cresce e desenvolve-se preenchendo uma função ou resolvendo um problema" (p. 327). Assim, a língua assume um papel de artefacto mediador entre o pensamento e a ação, ajudando-o a estruturar-se na interação (dialógica) com os outros. Como argumenta Dewey (1897/2008), a língua é "fundamentalmente um instrumento social. É o instrumento da comunicação; é a ferramenta através da qual o indivíduo passa a partilhar das ideias e sentimentos dos outros" (p. 6).

À semelhança de Sfard (2008), estes autores realçam, também, a dimensão dinâmica e situada do pensamento, acrescentando a noção de flexibilização do mesmo. Esta dimensão assume especial importância quando relacionada com a necessidade de promover uma elevada literacia matemática e, por conseguinte, um aumento no acesso ao sucesso escolar nesta disciplina. Assim, a criação de espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004), que são espaços/tempos securizantes (César, 2009), nos quais existe a efetivação de uma comunicação partilhada e dialógica entre os vários intervenientes é um meio privilegiado para o desenvolvimento da flexibilização do pensamento e, também, para a configuração de hábitos de pensamento (Goldenberg, 1998a, 1998b), que, segundo este autor, são

> modos de pensar que adquirimos [que designamos por apropriamos] tão bem, tornamos tão naturais e incorporamos tão completamente em nosso repertório que se transformam, por assim dizer, em hábitos mentais – não só somos capazes de os utilizar com facilidade, como é de esperar que o façamos. (Goldenberg, 1998a, p.31)

Assim, ao construirmos, com os alunos, espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004), em aula, possibilitamos-lhes que desenvolvam estratégias e modos de pensar que contribuem para desenvolver as capacidades de raciocinar (matematicamente), as competências matemáticas e transversais, tais como a comunicação, a argumentação, o sentido crítico, entre outras, desenvolvendo uma educação matemática crítica (Alrø et al., 2010).

Desta forma, a relação estrita entre pensamento e comunicação assume especial importância, quando nos centramos no estudo dos processos de ensino e de aprendizagem, em relação à Matemática. Se aprender é comunicar (Sfard, 2001), então criar mecanismos para a promoção da comunicação e do pensamento matemático torna-se fulcral. Segundo esta autora, que retoma a perspetiva de Vygotsky (1934/1962), nessa situação é importante ter especial atenção às ferramentas mediadoras (*mediating tools*) que são usadas para a atribuição de sentidos na comunicação e às regras meta-discursivas (*meta-discursive rules*) que têm como função a regulação da própria comunicação. São exemplos de ferramentas mediadoras a língua e as linguagens, sendo a língua considerada como a mais importante ferramenta mental. Porém, outros sistemas simbólicos são usados na Matemática. Como regras meta-discursivas temos, por exemplo, o contrato didático negociado e as culturas em que os agentes educativos (por exemplo, alunos, professores e pais) participam. Desta forma, concebemos a cultura como socialmente construída (Grossen, 2001), configurando o desenvolvimento dos sentimentos, valores, formas de atuação e reação, bem como o pensamento dos diversos agentes educativos, incluindo os jogos interativos que estabelecem entre si. Assim, existe uma relação entre cultura e formas de comunicação e, ao concebermos o pensamento também como comunicação (interpessoal) internalizada (Sfard, 2008), a cultura influencia a forma como pensamos, nomeadamente como pensamos matematicamente. Nesse sentido, "a cultura é, ela própria, um *instrumento do* *pensamento* que nunca é apenas individual, mas se constitui como uma *prática social* (Resnick, 1996)" (Hamido, 2005, p. 120, itálico no original).

No ensino e na aprendizagem da Matemática é mencionada a importância do desenvolvimento do pensamento matemático, nomeadamente, do pensamento algébrico (Abrantes et al., 1999; Barbosa & Borralho, 2006; Blanton & Kaput, 2005; Borralho & Barbosa, 2011; Kieran, 2004; NCTM, 2007; Ponte, 2006; Vale et al., 2009), do pensamento geométrico (Abrantes et al., 1999; Almeida, 2007; NCTM, 2007; Veloso, 2007), do pensamento aritmético (Abrantes et al., 1999; NCTM, 2007) e do pensamento estatístico e probabilístico (Abrantes et al., 1999; Garfield & Ben-Zvi, 2005; Martins & Ponte, 2011; NCTM, 2007). Como afirmam Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico pode ser entendido como "um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (p. 413). Ponte (2006), com base nas orientações curriculares internacionais, refere que o desenvolvimento do pensamento algébrico passa pelo estudo das estruturas (compreender padrões, relações, e funções), da simbolização (representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos), da modelação (usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas) e da variação (analisar mudança em diversas situações). Borralho e Barbosa (2009, 2011) salientam que o estudo de padrões com recurso a tarefas de exploração assume-se como sendo uma ferramenta facilitadora no desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos, uma vez que "permite o estabelecimento de conexões matemáticas, desenvolve a comunicação matemática através do uso de uma linguagem (escrita e oral) não ambígua e adequada à situação e melhora a imagem da Matemática" (Borralho & Barbosa, 2011, p. 9).

Quanto ao desenvolvimento do pensamento geométrico, está ligado ao desenvolvimento das capacidades de abstração e representação no e do espaço. Como sustentam Abrantes e suas colaboradoras (1999), fazem parte do desenvolvimento do pensamento geométrico os seguintes processos: "Estabelecer e comunicar relações espaciais entre os objectos, fazer estimativas relativamente à forma e medida, descobrir propriedades das figuras e aplicá-las em diversas situações" (p. 68). Desta forma, é importante, pelas próprias características do desenvolvimento do pensamento algébrico e geométrico, conjugar, em aula, através de tarefas matemáticas de elevado nível de exigência cognitiva, esses dois tipos de pensamento, estabelecendo conexões entre eles.

O desenvolvimento do pensamento aritmético está associado a "uma compreensão global do número e das operações a par da capacidade de usar essa compreensão de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações" (Abrantes et al., 1999, p. 45), isto é, este desenvolve-se a partir da construção do sentido do número (NCTM, 2007). Vergnaud (1990, 1997), nomeadamente através da teoria dos campos conceptuais e da exploração das relações entre pensamento e língua, tem contribuído para a reflexão sobre a passagem do pensamento aritmético para o pensamento algébrico, em particular no que se refere às dificuldades que os alunos sentem nas transições relacionadas com esses dois tipos de pensamento.

Segundo Garfield e Ben-Zvi (2005) recorrer a formas de pensamento estatístico é ser capaz de utilizar ideias estatísticas e atribuir um significado à informação estatística. Como referem Martins e Ponte (2011), o desenvolvimento do pensamento estatístico envolve

> • Reconhecimento da necessidade de *dados*, de modo a poder fazer julgamentos sobre situações reais;
> • Realização de certas *transformações numéricas* para facilitar a compreensão (representação em tabelas e gráficos, cálculo de medidas de localização e dispersão);
> • Procura de causas e explicações e previsão de acontecimentos a partir da exploração da *variabilidade*, usando *modelos estatísticos*;
> • Consideração do *contexto* como essencial não só para observar mas também interpretar as mensagens existentes nos dados. (p. 10, itálico no original)

Como argumenta Vergnaud (1990), "é através das situações e dos problemas que o sujeito tem de resolver que o conceito adquire significado" (p. 135). Contudo, este autor alerta para que "um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pelo menos se nos interessarmos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino" (p. 135). Desta forma, é importante que as tarefas matemáticas proporcionem experiências com sentidos para os alunos, desenvolvendo o pensamento, o raciocínio e a comunicação matemáticos.

Ao assumirmos que o pensar é comunicar (Sfard, 2008), relacionamos o pensamento com os raciocínios que, por sua vez, permitem estabelecer relações entre conceitos. Assim, concebemos o raciocínio como um processo mental que nos permite trabalhar teorias, conceitos ou constructos, interrelacionando-os. Desta forma, os raciocínios não são diretamente observáveis, sendo inferidos a partir das estratégias de resolução utilizadas ou das interações sociais que ocorrem.

O raciocínio matemático "envolve a construção de cadeias argumentativas que começam por simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos Números, Álgebra e da Geometria" (Ponte et al., 2007, p. 8, maiúsculas no original). Desta definição de raciocínio matemático emergem dois aspetos essenciais: (1) a forma que este pode assumir, isto é, o poder ser indutivo, dedutivo, abdutivo ou por analogia (Davis & Hersh, 1995); e (2) o conteúdo matemático que lhe está associado, nomeadamente, aritmético, algébrico, geométrico, estatístico, entre outros. Oliveira (2008) define raciocínio matemático como sendo "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3). Porém, quanto a nós, o raciocínio matemático também pode existir quando não se constrói conhecimento novo, mas subscrevemos que o raciocínio ocorre no interior de um discurso ou argumento, quer este seja verbal ou não verbal. No entanto, este autor salienta que o raciocínio matemático não se processa apenas recorrendo ao raciocínio dedutivo. Também, inclui outras formas mais intuitivas e relacionadas com a experimentação.

Das diversas formas de raciocínio, a mais utilizada, habitualmente, em aulas de matemática é a dedutiva, através do recuso à demonstração matemática (Davis & Hersh, 1995). Contudo, para além das formas de raciocínio anteriormente mencionadas, Kilpatrick (2005) refere a existência de outra forma de raciocínio que designa por raciocínio adaptativo (*adaptative reasoning*). Segundo Kilpatrick (2005), este caracteriza-se pela "capacidade para pensar logicamente sobre as relações entre conceitos e situações" (p. 112), pelo que afirma que, ao contrário das formas de raciocínio dedutivo, esta é "mais abrangente, incluindo não só explicações informais e justificações mas também raciocínio intuitivo e indutivo baseado em padrões, analogias e metáforas" (Kilpatrick, 2005, p. 112).

Como afirma o NCTM (2007), "O pensamento matemático e as capacidades de raciocínio, incluindo formular conjeturas e desenvolver argumentos dedutivos sólidos, são importantes porque servem de base ao desenvolvimento de ideias novas e à promoção da continuação dos estudos" (p. 16). Assim, o saber pensar e raciocinar matematicamente assumem particular importância, quando se pretende desenvolver práticas que promovam o acesso ao sucesso escolar à disciplina de Matemática. Por outro lado, esta forma de pensamento e raciocínio assume-se como forma de *empowerment* (Schoenfeld, 1992) dos alunos, uma vez que os torna capazes de participarem mais ativamente e criticamente, quando se deparam com situações problemáticas do dia a dia.

1.4. AVALIAÇÃO

Um dos elementos inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem é a avaliação. Mas, o que se entende por avaliar? É atribuir uma classificação, vulgo nota, num teste, no final do período escolar e no final do ano letivo? É atribuir uma classificação numa prova de avaliação externa, para que depois se elaborem *rankings* nacionais? Será a média aritmética de um conjunto de classificações provenientes de um dado número de instrumentos de avaliação? Ou será uma compreensão dos conhecimentos apropriados e das capacidades e competências desenvolvidas durante um determinado percurso de aprendizagem?

Com isto, queremos fazer notar que o processo de avaliar pressupõe conceções distintas consoante o entendimento que se tem sobre o que é avaliar. A avaliação pode ser encarada como o resultado apenas de um produto final (teste, prova de avaliação externa, exposição oral), associada, deste modo, à componente de classificação (Roldão, 2003). Por outro lado, podemos encarar a avaliação como um processo e, nesse caso, o que se tem em consideração é o percurso desenvolvido (crescente, decrescente ou de manutenção). Por fim, podemos encarar a avaliação como um misto das duas dimensões anteriores, isto é, como um processo que engloba não só o produto final, mas também o percurso desenvolvido e que colmata com uma classificação que traduz esse processo. Neste último caso, o que é importante estar claro é o peso relativo que é atribuído a cada componente da avaliação – processo e produto final. Com isso, importa referir que a avaliação deve ser concebida "quer ao longo do processo para o reorientar, quer no fim para fazer o balanço" (Roldão, 2003, p. 45), isto é, a avaliação deve ser (re)pensada e (re)negociada com os vários intervenientes para que esta seja, por um lado, transparente e coerente com as práticas desenvolvidas e, por outro lado, para que se realizem as aprendizagens pretendidas e que os alunos lhes atribuam sentidos. Como sustenta o NCTM (2007), a avaliação deve ser encarada como "mais de [que] um teste no final do período de ensino, com o intuito de verificar o desempenho dos alunos perante determinadas condições; ela deverá constituir uma parte integrante do ensino, que informa e orienta os professores nas suas decisões" (p. 23).

Concordamos com a argumentação de Roldão (2003) sobre o que é avaliar. Segundo esta autora, “Avaliar é um conjunto organizado de processos que visam (1) o acompanhamento regulador de qualquer aprendizagem pretendida, e que incorporam, por isso mesmo (2) a verificação [que designamos por constatação/reflexão/análise] da sua consecução” (Roldão, 2003, p. 41). Desta forma, é necessária a existência de mecanismos e/ou instrumentos reguladores desse processo, para que se consiga compreender se a trajetória de aprendizagem é aquela que se pretende.

O NCTM (1995) apresenta seis normas para o que consideram ser uma avaliação de qualidade em Matemática. Esta deve: (1) refletir a Matemática que os alunos devem saber e ser capazes de fazer; (2) melhorar a aprendizagem da Matemática; (3) promover a equidade; (4) ser um processo transparente; (5) promover inferências válidas; e (6) ser um processo coerente. Desta forma, a avaliação deve ser encarada como um elemento mediador das aprendizagens dos alunos e, portanto, deve ser considerada como “um processo aberto e negociado entre os vários actores, onde as regras do jogo são conhecidas” (Pinto & Santos, 2006, p. 41).

Os documentos de política educativa apontam para a existência de duas formas de avaliação: a formativa e a sumativa (Abrantes et al., 1999; NCTM; 2007; Ponte et al., 2007; Silva, Fonseca et al., 2001a, 2001b, 2002a, 2002b, 2002c; Silva, Martins et al., 2001). A avaliação formativa é aquela que “ajuda os professores a tomar decisões acerca do conteúdo e forma de ensino” (NCTM, 2007, p. 25), enquanto a avaliação sumativa é utilizada para “determinar as aquisições [que designamos por apropriações de conhecimentos] dos alunos” (NCTM, 2007, p. 25), o que ilumina que a avaliação sumativa, geralmente, apenas nos dá indicação dos desempenhos dos alunos num momento muito particular e específico, isto é, revela informação acerca dos conhecimentos (matemáticos) apropriados, sob condições muito especiais. Contudo, a avaliação sumativa pode incorporar a avaliação formativa, na medida em que a classificação final de um trabalho pode ser o resultado de *feedbacks* regulares que contribuíram para o melhoramento do produto final daquele trabalho.

Se assumirmos que qualquer aluno é capaz de aprender, embora com ritmos diferentes de aprendizagem (César, 2009, 2013a; L. Santos, 2008; Ventura, 2012), então a avaliação desenvolvida, em aula, deve espelhar esse princípio. Nessa situação é importante que a avaliação formativa seja valorizada, não nos centrando (apenas) na avaliação sumativa (Ponte et al., 2007; Silva, Fonseca et al., 2001a, 2001b, 2002a, 2002b, 2002c; Silva, Martins et al., 2001). Assim, esta deve incidir não só sobre os conhecimentos apropriados, como também sobre as capacidades e competências desenvolvidas.

A introdução do conceito de competência no sistema educativo português ocorreu, em 2001, com a publicação do *Currículo Nacional do Ensino Básico* (DEB, 2001). Os autores desse documento associam à noção de competência expressões tais como "activação de recursos", "saber, saber-fazer e saber-ser", o que ilumina que uma competência não é um resultado que se pode medir, que se pode quantificar, mas algo que está associado a um conhecimento em ação, que engloba/integra conhecimentos, capacidades e recursos, numa situação com um determinado grau de complexidade (Abrantes, 1994, 2003). Desta forma, o ensino por competências pressupõe a aprendizagem por "níveis de desenvolvimento [e] daí se poder ter um mesmo conjunto de competências ao longo de toda a escolaridade básica" (L. Santos et al., 2010, p. 18). Assim, o que difere entre esta modalidade de ensino e o ensino por objetivos é que estes últimos atingem-se e as competências desenvolvem-se, ao longo do tempo, e, posteriormente, podem ser mobilizadas noutros contextos, cenários e situações.

Uma das maneiras de promover o desenvolvimento das capacidades e competências é diversificar não só os processos de ensino e de aprendizagem, como também as formas de avaliação (Abrantes, 2002; Abrantes et al., 1999; Alonso, 2002; César, 2009; 2013b; NCTM, 2007). Como tal, nenhum instrumento isolado, por si só, pode fornecer as informações sobre o conjunto das aprendizagens e o desenvolvimento de capacidades e competências (Abrantes, 2002). São exemplos de instrumentos de avaliação: o relatório de tarefas de investigação, o trabalho de projeto, o *portfolio*, o teste em duas fases, entre outros (Abrantes, 2002; L. Santos, 2002; L. Santos et al., 2010), bem como mini-testes semanais, trabalhos de casa semanais, entre outros (César, 2009; 2013b; Machado, 2008; Ventura, 2012).

Ao tornarem-se *matematicamente competente* (Abrantes et al., 1999; DEB, 2001; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007), pretende-se que os alunos revelem

> "predisposição" (para procurar regularidades ou para fazer e testar conjecturas), "aptidão" (para comunicar ideias matemáticas ou para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas), ou a "tendência" (para procurar ver a estrutura abstracta subjacente a uma situação) são componentes nucleares de uma *cultura matemática básica* que todos devem desenvolver. (DEB, 2001, s.p., aspas e itálico no original)

Neste contexto, a autoavaliação regulada assume especial importância (César, 2009, 2013a, 2013b; Giménez, Santos, & Ponte, 2004; L. Santos, 2002; L. Santos et al., 2010). L. Santos (2002) sugere quatro estratégias para desenvolver a autoavaliação regulada dos alunos: (1) abordagem positiva do erro; (2) questionamento; (3) explicitação/negociação dos critérios de avaliação; e (4) recurso a instrumentos alternativos de avaliação. A primeira estratégia prende-se com a argumentação de que o erro nos pode dar acesso a uma informação importante: a estratégia de resolução da tarefa utilizada pelo aluno e os raciocínios que lhe estão subjacentes. Para que esse erro se torne positivo e benéfico para a aprendizagem do aluno, é preciso que este seja identificado e compreendido pelo mesmo para que, em situações futuras, não volte a repeti-lo. Com esta forma de atuação pretende-se assumir o erro como um elemento para a construção de uma aprendizagem com sentido para o aluno, desvalorizando a conotação negativa que este assume na aprendizagem da matemática (Borasi, 1990).

A segunda estratégia para o desenvolvimento de uma autoavaliação regulada tem a ver com o levar o aluno a refletir e a questionar aquilo que faz e como faz, ao longo do próprio percurso de aprendizagem (L. Santos, 2002). Com isto pretende-se que os alunos se tornem mais críticos e autónomos na realização das atividades, desenvolvendo, assim, uma autonomia e responsabilização crescentes, bem como uma autoestima (académica) mais positiva face à matemática (César, 2009, 2013a, 2013b, in press b; Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2001). Contudo, se queremos que os alunos se tornem mais autónomos e responsáveis pela própria aprendizagem, bem como pela dos outros, a avaliação deve ser transparente e negociada pelos vários intervenientes, valorizando os desempenhos colaborativos e explicitando os vários sentidos que advêm dos processos de avaliação. Assim, a explicitação e negociação de critérios de avaliação é de extrema importância quando se pretende desenvolver uma autoavaliação regulada.

A última estratégia apontada por L. Santos (2002) está relacionada com o recurso a instrumentos alternativos de avaliação. Estes devem evidenciar o que o aluno sabe, quer em termos de conhecimentos apropriados, quer em termos de capacidades e competências desenvolvidas. Desta forma, é importante que permitam compreender como é que os alunos pensam, valorizando o processo e não apenas o produto. Se a aprendizagem da Matemática "envolve a cumulação de ideias e a construção de conhecimentos cada vez mais aprofundados e complexos" (NCTM, 2007, p. 17), então a avaliação deve valorizar essa construção de conhecimentos encarando-a como um processo dialógico e (inter)ativo entre os vários intervenientes.

CAPÍTULO 2

TRABALHO COLABORATIVO

2.1. ENSINO COOPERATIVO, *SCAFFOLDING* E TRABALHO COLABORATIVO

Saber trabalhar em grupo, de forma interativa, envolve capacidades e competências que qualquer indivíduo deve desenvolver na trajetória de participação ao longo da vida (César, 2013a). Assim, aprender a interagir socialmente com os outros assume-se como uma mais valia numa sociedade em mudança e num mundo globalizado, onde pessoas de diversas equipas partilham conhecimentos e práticas para responderem aos desafios da pós-modernidade. No entanto, estar sentado numa mesa, em grupo, não significa que sabemos trabalhar interativamente com essas pessoas. Existem formas de atuação e de reação, bem como mensagens implícitas, às quais devemos estar atentos, para podermos escutar, respeitar, valorizar e partilhar, ou seja, sabermos incluir os contributos dos diversos participantes. Em cenários de educação formal, como uma sala de aula, podemos considerar que existem três formas de trabalho interativo, que têm sido amplamente divulgadas e organizam os alunos recorrendo a díades, tríades ou pequenos grupos: ensino cooperativo (D. Johnson & Johnson, 2010; R. Johnson & Johnson, 1994; Slavin, 1990, 1991, 1996, 1999), *scaffolding* (Anghileri, 2006; Baxter & Williams, 2010; Davis & Miyake, 2004; Hammond & Gibbons, 2001; Reiser, 2004; Renshaw, 2013; Stone, 1998; Wood, Bruner, & Ross, 1976) e trabalho colaborativo (César, 2009, 2013a; Courela, 2007; Dillenbourg, 1999; Machado, 2008; Machado & César, 2010, 2012a, 2012b; Panitz, 1999; Ventura, 2012).

O ensino cooperativo baseia-se na "teoria da interdependência social, da teoria do desenvolvimento cognitivo e da teoria da aprendizagem behaviourista" (Panitz, 1999, p. 7). Segundo César (1994), a sua aceitação, como prática, em aula, esteve relacionada com a tentativa de ultrapassar o insucesso escolar, assumindo-se que os elementos culturais e sociais configuravam as aprendizagens dos alunos. Por outro lado, este tipo de ensino contribuía para a melhoria dos desempenhos dos alunos, tendo repercussões no seu aproveitamento, assim como nas relações interpessoais que se estabeleciam entre eles, ou seja, nas relações entre pares (Slavin, 1990, 1991, 1999).

D. Johnson e Johnson (2010) definem o ensino cooperativo como uma forma de "trabalho em conjunto para atingir objetivos partilhados" (s.p.). No entanto, essa cooperação está associada à competição (D. Johnson & Johnson, 2010; R. Johnson & Johnson, 1994; van der Linden, Erkens, Schmidt, & Renshaw, 2000; Slavin, 1991, 1996). Segundo R. Johnson e Johnson (1994) existem cinco condições para o desenvolvimento de um ensino cooperativo, em cenários de educação formal: (1) interdependência positiva, que consiste na tomada de conhecimento, pelos vários elementos de um determinado grupo, de que, para realizarem uma determinada tarefa, precisam que cada um efetue com sucesso o que lhes foi atribuído como tarefas a desempenhar, pelo que devem combinar os esforços para atingirem esse fim. Segundo estes autores, a existência de esquemas de reforço positivo associados à recompensa assume especial importância, na medida em que promovem a interdependência positiva. Como afirma Slavin (1991, 1996), esse reforço positivo, dado pelo professor, deve depender do desempenho de cada aluno, pelo que os elementos de cada grupo devem-se ajudar uns aos outros para alcançarem a recompensa; (2) promoção de interações entre os vários elementos, estimulando a comunicação entre eles, com o intuito de realizarem com sucesso uma determinada tarefa; (3) responsabilidade individual na consecução do objetivo comum do grupo, isto é, cada elemento do grupo deve ser responsável por uma parte específica da tarefa e, como tal, é responsável pelo produto final e, futuramente, "devem estar melhor preparados para realizar, por eles próprios, tarefas semelhantes" (R. Johnson & Johnson, 1994); (4) mobilização frequente de capacidades e competências, nomeadamente, conhecer e confiar uns nos outros, comunicar de forma precisa e inequívoca, aceitar as contribuições e apoiar os elementos do grupo resolvendo, construtivamente, os conflitos que possam emergir; e (5) frequentes e regulares debates e reflexões sobre os processos de funcionamento do grupo, por forma a melhorar a eficácia do mesmo, percebendo o que é preciso melhorar e/ou manter, futuramente.

Em termos de trabalho, em aula, o trabalho cooperativo realiza-se em pequenos grupos, para que "os alunos trabalhem em conjunto maximizando as suas próprias aprendizagens e as dos outros" (D. Johnson & Johnson, 2010, s.p.). Assim, está subjacente que a tarefa a ser realizada é dividida em várias etapas e que cada aluno fica responsável por uma das etapas. Para atingir o resultado final dessa tarefa, basta reunir as partes realizadas por cada aluno, isto é, o todo (resultado final) é o resultado da soma das partes (realizadas por cada aluno), de acordo com a abordagem *behaviourista* da aprendizagem. Esta posição é sustentada por Staples (2007) que afirma que "Os estudantes podem cooperar para resolver uma tarefa, partilhando respostas, ou criar, em conjunto, um *poster* ou outro produto, mas não se envolvem em colaboração, em relação à produção conjunta de ideias matemáticas" (p. 163, itálico acrescentado na tradução). Este é um dos aspetos que nos fazem distanciar do ensino cooperativo: a noção de que trabalhar em grupo é dividir tarefas, cada um fazer a sua parte e, sem discussão prévia e consensos sobre o que foi feito, juntar as várias partes e obter um produto final. Como assumimos uma perspetiva vygotskiana da aprendizagem, influenciada pela *gestalt*, o todo é mais do que a simples soma das partes. Mas, sobretudo, a riqueza do trabalho em grupo advém das interações dialógicas que se estabeleçam, o que não é considerado quando se dividem tarefas para cada um fazer, individualmente, a sua parte. Por isso, consideramos que, neste caso, o que obtemos é uma soma de trabalhos individuais, mas não é um trabalho de equipa, nem os alunos trabalham na sua zona de desenvolvimento proximal (ZDP), aspeto que Vygotsky (1934/1962) considera ser essencial para promover o desenvolvimento.

Um outro ponto de discórdia é o protagonismo dado aos processos de ensino em detrimento dos processos de aprendizagem, ou seja, o papel central atribuído ao professor – ou ao experimentador –, que é quem detém o poder e a capacidade de decisão sobre as tarefas e como estas devem ser divididas e executadas, enquanto o papel dos alunos – ou sujeitos – é minimizado, não existindo uma distribuição de poder, nem uma ênfase nos processos de tomada de decisão dos alunos e de *empowerment* (César, 1994, 2013a, 2013b, in press b; Courela, 2007; Panitz, 1999). Desta forma, a(s) voz(es) (Wertsch, 1991) dos alunos são (mais) silenciadas, contribuindo para a existência de formas subtis de exclusão social e escolar, bem como para a existência de uma participação periférica e não legítima dos alunos (César, 2007, 2013a; Lave & Wenger, 1991).

O conceito de *scaffolding* está associado à metáfora da existência de uma estrutura de apoio, que em português geralmente se designa por andaimes, e que se encontra na parte exterior dos edifícios quando estes estão em construção ou em manutenção, possibilitando aos trabalhadores acederem e trabalharem nesse edifício. Quando o trabalho está concluído, essa estrutura de apoio é removida, isto é, apesar desse apoio ser essencial para a execução desse trabalho, atingindo os objetivos propostos, este assume um carácter temporário, provisório (Hammond & Gibbons, 2001), estando por isso mesmo mais próximo do conceito de ZDP de Vygotsky

(1934/1962), na medida em que este autor também subscreve que o que os alunos conseguem fazer, inicialmente, com a ajuda de um par mais competente, virão posteriormente a conseguir realizar de forma autónoma. Assim, a necessidade de um par mais competente para realizar uma determinada tarefa também é temporária.

Em educação, o conceito de *scaffolding* tem sofrido algumas alterações ao longo das últimas décadas, nomeadamente em relação à forma de o operacionalizar em contextos de educação formal, como as salas de aula (Anghileri, 2006; Baxter & Williams, 2010; Davis & Miyake, 2004; Hammond & Gibbons, 2001; Reiser, 2004). Por exemplo, para Renshaw (2013) é necessário, quando se desenvolvem práticas de *scaffolding,* ter em consideração as dimensões sociais, culturais e emocionais como elementos inerentes aos processos de aprendizagem e desenvolvimento.

Contudo, a definição deste conceito está associada à metáfora referida anteriormente, isto é, à existência de uma estrutura e de um processo de apoio temporários. Wood e seus colaboradores (1976) foram pioneiros na utilização do termo *scaffolding* ao domínio da educação (Davis & Miyake, 2004; Hammond & Gibbons, 2001; Reiser, 2004). Estes autores utilizam este conceito para descrever a natureza do apoio que os pais dão, em regime de tutoria, no desenvolvimento da linguagem dos filhos, através da realização de uma tarefa que envolvia blocos de madeira de várias formas. Com base nesta situação, Wood e seus colaboradores (1976) definem *scaffolding* como sendo

> um processo que ajuda a criança ou jovem a resolver um problema, uma tarefa ou atingir um objetivo que estaria para lá das suas capacidades. O *scaffolding* consiste essencialmente no "controle" do adulto nos elementos da tarefa que estão inicialmente para além das capacidades do aprendente, permitindo-lhe concentrar e completar apenas os elementos que pertencem ao seu leque de competências. (p. 90, aspas no original)

Focalizando esta conceptualização nos processos de ensino e de aprendizagem, Bruner (1978) descreve *scaffolding* como um apoio cognitivo dado pelo professor aos alunos para que estes consigam resolver as tarefas que não conseguiriam resolver sem ajuda. Esta forma de atuação é descrita por este autor como uma consciência vicariante, isto é, um apoio intelectual temporário que permite ao aluno atingir níveis de compreensão superiores (Bruner, 1978). Rogoff (1990) define *scaffolding* como uma "situação de apoio em que a criança pode alargar as atuais capacidades e conhecimentos para mais elevados níveis de competência" (p. 93), o que vai ao encontro do que é argumentado, também, por Hammond e Gibbons (2001), uma vez que estes autores definem *scaffolding* como um “apoio que é realizado para dar a assistência necessária para ajudar os aprendentes a terminarem as tarefas e a desenvolverem compreensão sobre as mesmas, quando não eram capazes de realizar por si próprios” (p. 15). Assim, o *scaffolding* tem subjacente uma ajuda apropriada e ajustada ao aprendente na realização de uma determinada tarefa, atendendo aos conhecimentos já por ele apropriados e às capacidades e competências que este já consegue mobilizar e aquelas que ainda necessita de desenvolver. Desta forma, esta prática permite que se trabalhe na ZDP de cada aprendente (Vygotsky, 1934/1962) que, segundo este autor, é definida pela distância entre as capacidades e competências que alguém consegue mobilizar quando trabalha autonomamente, ou seja, individualmente (nível de desenvolvimento real) e as capacidades e competências que mobiliza quando trabalha com um par mais competente (nível de desenvolvimento potencial).

Inicialmente, este tipo de prática assentava numa relação de um para um, em que existia uma única pessoa que detinha mais conhecimento como, por exemplo, um adulto, um professor, que ajudava individualmente um aprendente, que poderia ser uma criança ou um aluno, fornecendo-lhe a ajuda necessária para que ele conseguisse progredir na resolução de uma determinada tarefa ou situação problemática, retirando esse auxílio quando este já conseguia realizá-la sozinho (Anghileri, 2006; Davis & Miyake, 2004; Reiser, 2004; Wood et al., 1976). Contudo, um dos aspetos que merece mais atenção neste tipo de prática é o papel do adulto, na medida em que este é conhecedor do conteúdo a ser aprendido, bem como das estratégias de resolução e outros processos a utilizar com vista a atingir determinados objetivos de aprendizagem relacionados com esse conteúdo. Para além disso, este deve conseguir motivar os aprendentes, dando-lhes a ajuda e o apoio necessários para atingirem os objetivos propostos relacionados com uma determinada tarefa. Isso pode ser conseguido através de questões orientadoras, breves sugestões e/ou complementos de informação, levando-os a refletir sobre aquela situação problemática (Wood et al., 1976). Nesta perspetiva, o papel do adulto reveste-se de uma componente cognitiva, social e afetiva (Stone, 1998).

Stone (1998) identifica quatro características principais quando se desenvolvem práticas baseadas no *scaffolding* durante a resolução de uma tarefa, isto é, quando existe interação adulto-criança(s). O primeiro aspeto refere-se à existência de um objetivo comum entre os intervenientes no processo interativo de aprendizagem, o que está relacionado com a construção de uma intersubjetividade (Rogoff, 1990; Wertsch, 1991) entre o adulto e o aprendente, isto é, da existência de um entendimento partilhado dos objetivos a atingir na realização daquela tarefa ou situação problemática, bem como dos significados que é preciso compreender para conseguirem realizar a tarefa. Este aspeto é considerado como fundamental quando se desenvolvem práticas baseadas no *scaffolding* (Rogoff, 1990; Stone, 1998). O segundo aspeto prende-se com o realizar uma avaliação inicial e contínua, ao longo deste processo de *scaffolding*, de forma a poder adaptar o apoio e as estratégias necessárias nessa ajuda. O terceiro aspeto está relacionado com o diálogo e interações estabelecidas entre os intervenientes, na medida em que o aprendente é considerado um participante ativo e, como tal, também ele tem poder de decisão nos processos interativos que se estabelecem. O quarto e último aspeto apontado por Stone (1998) está relacionado com o desaparecimento gradual desse apoio, dessa ajuda que é fornecida pelo adulto ao aprendente, para que este assuma o controlo e a responsabilidade da própria aprendizagem. De acordo com Rogoff (1990), o *scaffolding* atinge níveis de elevada qualidade quando o aprendente consegue internalizar os processos que utilizou, durante essa ajuda, para resolver uma determinada situação problemática.

A prática de *scaffolding* assemelha-se à do trabalho colaborativo, que assumimos nesta investigação, na medida em que ambas têm subjacentes a teoria de Vygotsky (1934/1962), nomeadamente à importância que as interações sociais assumem no desenvolvimento sócio-cognitivo e emocional da criança, isto é, assumem que a construção do conhecimento é configurada pela interação mediada por várias (inter)relações. Assim, o conhecimento não é visto como uma ação do sujeito sobre a realidade, mas sim pela mediação feita por outros sujeitos em relação a determinados objetos, que se pretendem conhecer. Contudo, a forma de como a prática de *scaffolding* é desenvolvida afasta-se, em certa medida, do conceito de trabalho colaborativo, em termos de avaliação *a priori* e durante os processos de aprendizagem, da forma como o apoio é retirado pelo adulto, da dependência que pode ser construída entre adulto e criança e do processo de transição da responsabilidade da aprendizagem para o aprendente. Por outro lado, o que diferencia, também, as práticas de *scaffolding* das práticas colaborativas é o papel que o professor assume na discussão geral e no trabalho, em díades, tríades ou pequenos grupos, isto é, se o professor tem um papel mais de autoridade ou se tem um papel de facilitador, mediador, mas distribuindo mais o poder (Apple, 1995) e dando mais voz(es) (Wertsch, 1991) aos alunos, promovendo uma autonomia crescente, preferindo que os processo de tutoria, a existirem, sejam decididos no seio dos grupos e desenvolvidos entre pares, ou seja, entre os próprios alunos.

Segundo Panitz (1999), ao desenvolver práticas de aprendizagem que se baseiam no trabalho colaborativo, pretende-se que os alunos assumam um papel mais ativo e crítico na própria aprendizagem, responsabilizando-se por ela, aprendendo de forma mais autónoma. Roldão (2007) refere que o trabalho colaborativo se estrutura "essencialmente como um processo de trabalho articulado e pensado em conjunto, que permite alcançar melhor os resultados visados, com base no enriquecimento trazido pela interacção dinâmica de vários saberes específicos e de vários processos cognitivos" (p. 27). Assim sendo, o trabalho colaborativo difere do trabalho cooperativo, na medida em que os alunos trabalham, em pares ou em pequenos grupos, numa mesma tarefa, partilhando os vários sentidos quanto aos procedimentos a adotar na resolução da mesma, enquanto que no trabalho cooperativo a tarefa é dividida em várias sub-tarefas e cada elemento do grupo fica responsável por uma parte.

Corroboramos a argumentação de César (2009) e Panitz (1999) ao considerarem que o trabalho colaborativo é mais do que uma prática utilizada em aula, é uma filosofia de vida. Ao trabalhar colaborativamente estamos a valorizar as contribuições dos outros, a respeitar a identidade que cada um assume numa comunidade de aprendizagem (Lave & Wenger, 1991), a partilhar sentidos (Bakhtin, 1929/1981) entre os vários participantes, a distribuir o poder pelos diversos intervenientes e a assumir o espaço e o tempo como duas dimensões essenciais a ter em consideração nas aprendizagens. Desta forma, trabalhar colaborativamente constitui-se como um processo dialógico e situado, no qual se constrói uma intersubjetividade (Wertsch, 1991), podendo mesmo constituir-se uma comunidade de aprendizagem ou de prática (César, 2007, 2013a; Lave & Wenger, 1991).

Como sustenta Dillenbourg (1999), a colaboração pressupõe a necessidade de se explicitarem as formas de atuação que se assumem aos pares com quem se trabalha. Assim, para este autor, uma situação é colaborativa quando a interação entre pares permite: (1) desenvolver as mesmas ações (simetria da ação); (2) ter os mesmos objetivos; e (3) trabalhar em conjunto, recorrendo à argumentação sustentada enquanto ferramenta de partilha de pontos de vistas e de tomada de decisão. Desta forma, tal como sustenta Dillenbourg (1999), as interações sociais facilitam o trabalho colaborativo através da partilha e negociação que permitem. De salientar, ainda, a importância que o conflito sócio-cognitivo (Doise & Mugny, 1981), isto é, um conflito que se processa a nível da cognição do aluno, quando em contacto com o contexto social em que participa, assume no seio dessas interações sociais e dialógicas.

McInnerney e Roberts (2004) também apontam quatro características que envolvem situações de colaboração, desenvolvidas em contextos de educação formal, nomeadamente em aula: (1) conhecimento partilhado entre professor e alunos, no qual os alunos, mediados pelo professor, partilham experiências e conhecimentos que apropriaram anteriormente, constituindo-se como suporte para a construção de outros conhecimentos; (2) distribuição da autoridade entre professor e alunos, que passa pela partilha de um conjunto de metas a atingir, num determinado conteúdo programático, permitindo aos alunos atingi-las; (3) o professor atua como mediador, incentivando os alunos a aprender a aprender, o que é considerado por estes autores como o aspeto-chave da aprendizagem colaborativa; e (4) existência de grupos de alunos heterogéneos de maneira a que haja respeito por todas as contribuições feitas pelos alunos.

Tendo em conta os trabalhos mencionados anteriormente, existem dois aspetos que emergem devido à sua extrema importância quando se desenvolvem práticas de aprendizagem colaborativa: o papel das interações sociais e dialógicas; e o papel do professor na promoção de cenários de educação formal colaborativos.

A importância que as interações sociais e dialógicas assumem nos processos de ensino e da aprendizagem, em diversos contextos educacionais formais e não-formais, continua a ser amplamente sustentada por diversos investigadores, nacionais e internacionais (Baucal, Arcidiacono, & Budevac, 2011; César, 2013b, in press a, in press b; César & Kumpulainen, 2009; Kumpulainen et al., 2010; Ligorio & César, 2013; Ludvigsen et al., 2011; Perret-Clermont, Pontecorvo, Resnick, Zittoun, & Burge, 2004; Renshaw, 2004). Como argumentam Baucal e seus colaboradores (2011), existem duas perspetivas quando se estudam as interações sociais: a explicativa (explorar os seus impactes na aprendizagem e no desenvolvimento) e a analítica (perceber as suas dinâmicas e as diferentes formas). Contudo, estas duas perspetivas interligam-se e complementam-se iluminando, desta forma, a importância que o seu estudo assume nos processos de ensino e da aprendizagem.

Quando se desenvolvem práticas colaborativas, o professor tem, também, um papel de relevo na construção de espaços e tempos dialógicos (César, 2009, 2013a, 2013b) ou, como designa Perret-Clermont (2004), espaços de pensamento. O professor assume-se como facilitador e mediador entre os conhecimentos (matemáticos) e os alunos (César, 2009). As suas formas de atuação e de reação configuram a adesão, ou não, dos alunos ao contrato didático, bem como a qualidade das interações sociais que se estabelecem. Este último aspeto reveste-se de extrema importância, na medida em que se pretende que ocorram conflitos sócio-cognitivos (Doise & Mugny, 1981). Segundo César (2000a), este conflito assume duas componentes: a inter-pessoal, que representa a resolução de problemas com os outros, tais como argumentação, cedência e consensos; e a componente intra-pessoal, que se refere aos (re)ajustamentos cognitivos do próprio aluno como resultado da interação com os outros, ou seja, segundo Piaget (1936, 1975) ao processo de equilibração que ocorre quando o aluno consegue acomodar o que assimilou.

Também Schubauer-Leoni (1986) sustenta a elevada importância de existirem conflitos sócio-cognitivos, considerando-os facilitadores das aprendizagens, nomeadamente no que respeita à apropriação de conhecimentos (matemáticos), bem como ao desenvolvimento e/ou mobilização de capacidades e competências (matemáticas). Assim, para que existam esses conflitos é necessário que o professor saiba elaborar, adaptar e/ou selecionar tarefas matemáticas adequadas às características, necessidades e interesses dos alunos, facilitando que cada aluno venha a

> ser confrontado com pontos de vista diferentes dos seus, ter de ser capaz de argumentar para defender o seu ponto de vista e saber gerir, do ponto de vista social, a interacção estabelecida (quem lidera, quando o faz, quando se chega a um consenso, quando não abdicamos da nossa opinião). (César, 2000b, p. 9, parêntesis no original)

Assim, assumimos nesta investigação que as interações sociais e dialógicas são uma componente indissociável da aprendizagem, na medida em que concebemos a aprendizagem como dialógica e situada, colocando as interações sociais no centro dos processos de aprendizagem, nomeadamente da Matemática.

2.2. CONTRATO DIDÁTICO, META-CONTRATO INSTITUCIONAL E NORMAS SOCIOMATEMÁTICAS

Ao comunicar está subjacente a existência de processos e formas de interação e de atuação aceites pelos diversos participantes como legítimas. Muitos dos processos interativos que se estabelecem e muitas das formas de atuação não precisam de ser explicitadas pelas pessoas, pois fazem parte do espólio cultural que apropriaram e que continuam a apropriar nas trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a). Desta forma, a Escola e a sala de aula são exemplos de espaços e tempos comunicacionais, onde se configuram formas de atuação e reação que têm subjacentes formas de comunicação que medeiam as interações (dialógicas) que se estabelecem nesses espaços e tempos. Como afirma Schubauer-Leoni (1986), “todo o saber se constrói nas e pelas relações interpessoais” (p. 140), pelo que a noção de contrato didático, adotado e ampliado por esta autora, reveste-se de uma especial importância quando queremos estudar os processos de ensino e de aprendizagem que ocorrem em cenários de educação formal, como a sala de aula, na construção e produção de sentidos (matemáticos).

De acordo com Brousseau (1988) e Schubauer-Leoni (1986), o contrato didático está relacionado com o conjunto de regras, na sua maioria implícitas, que regem a relação didática e legitimam as expetativas dos participantes envolvidos, relativamente ao papel que cada um assume. Como salienta Brousseau (1988), o contrato didático revela “os hábitos específicos do professor esperados pelo aluno e os comportamentos [que preferimos designar por formas de atuação e reação] do aluno esperados pelo professor” (p. 181). Assim, em cada cenário de educação formal, é negociado um contrato didático, construído de forma particular e única, sendo as formas de atuação do professor e dos alunos particulares e situadas, ou seja, relativas a um determinado tempo, espaço e participantes. Como César (2013b) sustenta “o contrato didático não é imutável e/ou pré-determinado. É (re)construído ao longo do ano letivo, especialmente através das interações sociais que ocorrem num determinado cenário educacional” (p. 41). Assim, assumimos que o contrato didático deve promover “as interacções horizontais (aluno/aluno), a co-construção dos saberes, o respeito pelo ritmo de cada um, a partilha de soluções, a capacidade de levantar conjecturas e de argumentar, entre muitas outras competências sociocognitivas” (César, 2003, p. 129).

Ao desenvolver um contrato didático que assenta na (re)negociação, através da colaboração e interação entre os vários elementos e, portanto, que se afasta do que é habitual acontecer em cenários de educação formal, há que ter em consideração as formas de adesão ao mesmo, particularmente em Matemática, uma vez que esta é uma disciplina em que os alunos revelam elevadas taxas de insucesso académico e baixas expetativas, que se traduzem num reduzido envolvimento e empenho nas atividades de matemática escolar (Abrantes, 1994; César, 2009, 2012; Machado, 2008; Machado & César, 2012a; Ventura, 2012). Uma das formas possíveis para fomentar a adesão a um contrato inovador passa pela descentralização do professor, na relação triádica professor/alunos/conhecimento, isto é, o aluno é colocado no centro dessa relação, envolvendo-o, progressivamente, nas tomadas de decisão inerentes aos processos de aprendizagem, tornando-o um participante legítimo de uma comunidade de aprendizagem (César, 2007; Lave & Wenger, 1991). Por outro lado, as interações sociais e dialógicas que se desenvolvem, neste tipo de contrato didático, devem privilegiar as interações horizontais (aluno/aluno), favorecendo a criação de espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004), em que ocorra a negociação e partilha de sentidos (matemáticos), isto é, que construam entre si uma intersubjetividade (Wertsch, 1991). Assim, através da discussão que emerge de diferentes formas de pensamento matemático, de diferentes pontos de vistas, de estratégias de resolução diversificadas para uma mesma tarefa matemática, produzem-se conhecimentos (matemáticos) ou, como designam Kumpulainen e seus colaboradores (2010), fundos de conhecimentos (*funds of knowledge*). Desta forma, o contrato didático configura espaços e tempos nos quais se colocam em ação os mecanismos de *inter-empowerment* que, posteriormente, serão internalizados e utilizados pelos alunos de forma autónoma, tornando-se mecanismos de *intra-empowerment* (César, 2013a).

Mas, se o contrato didático assume determinadas características e é algo dinâmico, podendo variar de turma para turma, também existem elementos institucionais que se mantêm, que fazem parte do meta-contrato institucional (Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1997). O meta-contrato institucional é configurado pelas regras definidas pelas instituições centrais, como o Ministério de Educação, ou locais, como os órgãos de gestão da escola. Cada participante tem de responder pelo cumprimento, ou incumprimento, das regras e normas estabelecidas. Desta forma, o meta-contrato institucional configura "os desempenhos dos diversos agentes da comunidade educativa, bem como as relações que esta estabelece com a comunidade social" (Courela, 2007, p. 188). Como refere Schubauer-Leoni (1986), "o próprio fato de nomear os parceiros da relação "professor" e "aluno" constitui um meta-contrato, i.e., um contrato sobre o contrato, representado por um conjunto de potencialidades a partir das quais se formam contratos específicos" (p. 140, aspas no original)

Como refere César (2003, 2009, 2013a, 2013b), para que as potencialidades do trabalho colaborativo se concretizem, há que associá-lo à negociação e adesão dos alunos a um contrato didático (Brousseau, 1998; Schubauer-Leoni, 1986), configurado por um meta-contrato institucional (Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1997), que precisa de ser coerente com os princípios que regem aquele contrato didático. Quando se pretende alterar os cenários de educação formal, ditos tradicionais, para espaços/tempos onde os alunos interagem dialogicamente, desempenhando um papel de co-construtores do conhecimento, tornando-os mais responsáveis pelos processos de aprendizagem, próprios e dos pares, também o papel do professor engloba novas responsabilidades, na medida em que:

> Os alunos tornam-se mais críticos em relação aos saberes apreendidos [deve ler-se apropriados], às tarefas que lhe são propostas e passam a discutir a avaliação que é efectuada. O professor passa de um expositor de saberes a um orientador de alunos que constroem o seu saber através das actividades que ele lhes propõe, das questões pertinentes que lhes coloca, dos desafios que lhes lança. (César et al., 2000, p. 55)

Assim, existe uma mudança ao nível das formas de atuação e reação que o professor assume neste tipo de prática, em aula. Este transita de formas de atuação mais magistrais – e, por vezes, autoritárias – nas quais o professor desempenha um papel central, enquanto detentor de todo o conhecimento, para alguém que assume um papel de mediador, de facilitador das aprendizagens dos alunos, legitimando a participação dos mesmos (César, 2003, 2009, 2013a).

Ao assumirmos uma perspetiva histórico-cultural (César, 2009, 2013a; Roth & Radford, 2011; Vygotsky, 1934/1962), complementada com alguns aspetos da teoria piagetiana (Tryphon & Vonèche, 1996), nomeadamente no que se refere à aprendizagem da Matemática, adotamos a terminologia de contrato didático quando nos referimos ao conjunto de regras, explícitas e implícitas, e das expetativas que medeiam as interações dialógicas, em cenários de educação formal, como a sala de aula. Contudo, existe uma relação de complementaridade entre este conceito e os conceitos de normas sociais e sócio-matemáticas (Cobb, 1995; Cobb & McClain, 2001; McClain & Cobb, 2001; Yackel & Cobb, 1996; Yackel, Cobb, & Wood, 1991), uma vez que estes dois tipos de normas são inferidos pela identificação de regularidades nos padrões das interações sociais que se desenvolvem, em aula (Yackel & Cobb, 1996). Como afirmam Yackel e seus colaboradores (1991), as normas "não são regras ou prescrições estáticas a serem seguidas, mas antes regularidades no processo de interação social que é frequentemente exterior ao conhecimento/tomada de consciência (*awareness*) dos participantes" (p. 397). Desta forma, as normas devem ser (re)negociadas ao longo do tempo entre os vários participantes, uma vez que são continuamente (re)construídas em situações concretas de aprendizagem. Como tal, não existem para além das interações (dialógicas) que se estabelecem e que se estabeleceram na configuração das mesmas.

As normas sociais não são específicas da Matemática. Também existem em relação a outras disciplinas (por exemplo, Biologia, Físico/Química, Português, Inglês), configurando o modo de funcionamento de cada aula, isto é, "são características da comunidade de sala de aula e documentam regularidades na atividade de sala de aula que são estabelecidas em conjunto, entre professores e alunos" (Cobb et al., 2001, p. 122). São exemplos de normas sociais os alunos terem de explicar e justificar as estratégias de resolução que utilizaram; colocar questões a quem está a explicar, para esclarecerem dúvidas; ou questionar as resoluções dos outros, argumentando porque as consideram pouco adequadas. Desta forma, o desenvolvimento das normas sociais sustenta a existência de micro-culturas, em aula, caracterizadas pela explicação, justificação e argumentação (Yackel & Cobb, 1996). No que se refere às normas sócio-matemáticas, específicas da disciplina de Matemática, estas refletem situações configuradas pelas interações, em aula, isto é, "regulam o discurso e influenciam as oportunidades de aprendizagem que emergem para os estudantes e professor" (Cobb & McClain, 2001, p. 219). As normas sócio-matemáticas incluem, por exemplo, o que é considerado como uma solução matematicamente diferente, sofisticada e eficiente, e o que é uma explicação matematicamente aceitável (Cobb & McClain, 2001; Cobb et al., 2001; Yackel & Cobb, 1996). Assim, ao desenvolver estas normas, em cenários de educação formal, estão subjacentes dois aspetos importantes que se relacionam com a configuração de práticas sustentadas nos processos de comunicação e de argumentação matemática, bem como na configuração de espaços/tempos dialógicos (César, 2009), nos quais ocorrem a construção e partilha de sentidos matemáticos. No entanto, quando se desenvolvem práticas matemáticas suportadas nas normas sócio-matemáticas, o professor "desempenha um papel central no estabelecimento de um ambiente de sala de aula com qualidade matemática e no estabelecimento de normas para aspetos matemáticos da atividade dos alunos" (Yackel & Cobb, 1996, p. 475).

Embora o conceito de norma sócio-matemática complemente, em alguns aspetos, o de contrato didático, é este aspeto – o papel do professor – que nos faz optar por esta última designação. Assumimos que o professor deve atuar como um facilitador, um mediador das aprendizagens, saindo do centro da relação triádica professor/alunos/conhecimento e colocando a ênfase da mesma nos alunos. É esse movimento de descentralização que nos permite desenvolver, nos alunos, formas de participação legítima numa comunidade de aprendizagem (César, 2007, 2013a; Lave & Wenger, 1991), tornando-os co-construtores do conhecimento (*co-learners*), em conjunto com o professor (Papert, 2001). Por outro lado, também nos permite configurar espaços/tempos onde haja (mais) distribuição de poder (Apple, 1995; César, 2009, 2013a, 2013b) pelos diversos participantes dessa comunidade.

2.3. A IMPORTÂNCIA DA PARTICIPAÇÃO

Voigt (1995) sustenta que os processos culturais e sociais são aspetos fundamentais para a participação na atividade matemática. Esta posição também é corroborada por Bauersfeld (1993), que assume que

> A compreensão do ensino e aprendizagem da Matemática (...) sustenta um modelo de participação numa cultura mais do que um modelo de transmissão de conhecimento. Participar nos processos de uma aula de Matemática é participar numa cultura de usar a Matemática, ou melhor: uma cultura de matematização como prática. (...) Assim como nas culturas, o núcleo do que é aprendido através da participação está no *quando* fazer o quê e *como* fazê-lo. O conhecimento (num sentido estreito) não servirá para nada se o utilizador não puder identificar a adequabilidade da situação. O conhecimento também não dará muita ajuda se o aprendiz for incapaz de relacionar flexivelmente e transformar os elementos necessários de conhecimento para a situação atual. Isto é, os principais resultados que emergem da participação na cultura da aula de Matemática aparecerão principalmente num meta-nível e são "aprendidos" indiretamente. (p. 4, maiúsculas, aspas e itálico no original)

Esta argumentação corrobora o que é assumido por Skovsmose (2000), que salienta a necessidade e a importância de os alunos desenvolverem uma elevada materacia, isto é, a capacidade de mobilizar os conhecimentos (matemáticos) apropriados e as capacidades e competências desenvolvidas, em diversos contextos, cenários e/ou situações do quotidiano. Desta forma, a participação dos alunos em comunidades de prática (Lave & Wenger, 1991), nas quais se valorizem as diversas culturas que co-habitam nessa comunidade e em que os alunos assumem um papel de participantes legítimos, é um aspeto em ter em consideração se queremos fomentar uma educação matemática crítica (Alrø et al., 2010), promovendo a equidade no acesso às ferramentas culturais (Vygotsky, 1934/1962), nomeadamente em Matemática.

Neste contexto, as interações sociais e dialógicas, associadas ao trabalho colaborativo, constituem-se como uma forma de promover a participação legítima dos alunos numa comunidade de aprendizagem. Ao concordarmos com a argumentação de Gerdes (2007), quando este refere que a construção do currículo deve incluir "os *backgrounds* diversos e as experiências variadas dos alunos, e em que se criam ao mesmo tempo, pontes para outros horizontes culturais" (p. 147, itálico no original), estamos a afirmar que é preciso valorizar a diversidade cultural que caracteriza atualmente muitas das escolas portuguesas, incluindo-a nas práticas, nomeadamente através das tarefas matemáticas propostas, das formas de atuação, explícitas e, sobretudo, implícitas, quer dos alunos quer do professor, bem como através da comunicação (matemática) que se estabelece entre os vários agentes educativos, incluindo nesta designação os alunos. Assim, pretendemos que a educação matemática seja um processo dialógico de interação (inter)cultural, de forma a que promova a aprendizagem escolar dos alunos e, para além disso, o desenvolvimento enquanto cidadãos participativos, críticos e reflexivos.

Deste modo, é importante desenvolver formas de aprendizagem colaborativa, em díade ou em pequenos grupos, em cenários de educação formal, para que os alunos consigam, através da negociação e partilha de sentidos matemáticos, apropriar os conhecimentos (matemáticos), bem como desenvolver e/ou mobilizar capacidades e competências (matemáticas) como, por exemplo, a argumentação e a autonomia. Por outro lado, ao desenvolver este tipo de práticas, em aula, ocorre uma distribuição de poder (Apple, 1995; César, 2013a), nomeadamente pelos diversos elementos dessa comunidade de aprendizagem. Assim, os alunos assumem um papel de participantes legítimos nos processos de aprendizagem, ganhando (mais) voz(es) (Wertsch, 1991), construindo trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a) que lhes permitem ter acesso às ferramentas culturais da Matemática, bem como à construção de uma identidade mais plástica e que se vai transformando, ao longo dessa trajetória de participação que é configurada pelas interações sociais e dialógicas que se estabelecem.

2.3.1. Trabalho em díade ou em pequenos grupos e discussões gerais

Assumindo a aprendizagem como histórico-cultural (Roth & Radford, 2011) e situada (Lave & Wenger, 1991), as práticas pedagógicas, especialmente as formas de ação e reação, em aula, assumem especial importância na aprendizagem da Matemática. Quando se desenvolvem práticas que têm como base a aprendizagem colaborativa, as formas de operacionalização e os jogos interativos que se estabelecem entre alunos, bem como entre alunos e professor(es), são singulares e diferentes das práticas, em aula, baseadas no ensino expositivo, onde o professor é o detentor do conhecimento e os alunos são encarados como recipientes vazios, que irão receber esse conhecimento, como moldáveis e a serem moldados pelo professor. Assim, ao colocar a ênfase da aprendizagem no aluno e na participação deste nas atividades matemáticas, pretende-se passar de situações, em aula, baseadas em exercícios (Skovsmose, 2000), para os quais só existe uma solução possível e onde se privilegia o conhecimento instrumental (Skemp, 1978), para situações mais dialógicas, que valorizam as interações sociais estabelecidas entre os diversos participantes, privilegiando a diversidade de estratégias de resolução possíveis e de diferentes formas de pensamento (matemáticos) para que os alunos consigam, através dessa partilha de sentidos (Bakhtin, 1929/1981), atingir o conhecimento relacional (Skemp, 1978), desenvolvendo uma elevada materacia (Skovsmose, 2000) ou literacia científica. Como sustentam César (2009, 2013a, in press a, in press b) e Staples (2007), a aprendizagem, nomeadamente em Matemática, deve ser considerada como participativa e como um processo social.

Desta forma, o trabalho desenvolvido, em cada aula, deve contemplar momentos de trabalho em díade e/ou em pequenos grupos, seguidos de uma discussão em grande grupo. Em termos gerais, deverá ser desenvolvido em três momentos distintos: (1) trabalho em díade ou em pequenos grupos; (2) discussão geral, em grande grupo (turma), que inclui a participação individual, por exemplo, quando um aluno, representando a díade ou grupo, expõe aos colegas as estratégias de resolução que usaram; e (3) sistematização dos conteúdos abordados que, quando a turma já aderiu ao trabalho colaborativo, é orquestrada pelos próprios alunos (César, 2009, 2013a, 2013b; Machado, 2008; Machado & César, 2010, 2012a, 2013a, 2013b, in press b; Ventura, 2012). Esta forma de trabalho e de gestão dos espaços e tempos de cada aula, utilizada pelos elementos que participaram na equipa central do projeto *Interacção e Conhecimento* (IC) e por outros professores que com eles fizeram ações de formação (César, 2009, 2013a; Ventura, 2012), é corroborada e fortemente apoiada por outras equipas de investigação internacionais, como a equipa de Stein e seus colaboradores (2008), nos Estados Unidos da América. Para esta equipa, a aula deve ser constituída por três momentos: (1) de motivação para a atividade matemática (*launch*); (2) de exploração, em que os alunos trabalham na tarefa e o professor circula pela sala; e (3) de discussão geral, em grupo (turma) e de sistematização. Assim, esta equipa considera que os dois últimos momentos referidos pela equipa do projeto IC dizem respeito a um único. Destaca, para além disso, um primeiro momento que, para os professores que subscrevem as formas de trabalho do IC, faz parte da própria tarefa proposta e se torna, posteriormente, um mecanismo de *intra-empowerment*, através da maneira como a motivação intrínseca e a autonomia são desenvolvidas no âmbito do projeto IC (César, 2009, 2013a).

As discussões gerais são um dos elementos fundamentais na promoção do acesso ao sucesso escolar, em Matemática ou em qualquer outra disciplina. Contribuem, tal como o trabalho em díade e ou pequenos grupos, para que os alunos consigam atribuir sentidos aos conhecimentos (matemáticos) apropriados e às capacidades e competências desenvolvidas (César, 2000a, 2000b, 2009, 2013a; Machado, 2008; Machado & César, 2010, 2012a, 2013a, 2013b, in press b; Nathan & Knuth, 2003; Staples, 2007; Stein et al., 2008; Ventura, 2012). Apresentam uma vantagem nítida: possibilitam que os alunos construam mais sentidos do que se apenas trabalhassem em díades ou em pequenos grupos, pois são confrontados com um leque mais vasto de estratégias de resolução, de pensamentos matemáticos, mas também de questões e dúvidas, uma vez que na discussão geral estão envolvidos todos os alunos e o professor, enquanto que as díades e grupos têm uma participação de um número mais restrito de elementos. Por isso mesmo, as discussões gerais, em grande grupo, permitem complementar e alargar o trabalho que foi inicialmente desenvolvido em díade ou em pequenos grupos. Mas, se este trabalho inicial não existir, a capacidade de interagir dialogicamente não é tão desenvolvida, não propiciando uma participação legítima, autónoma e crítica nas discussões gerais.

Como argumentam Stein e seus colaboradores (2008), as discussões gerais, em grande grupo, permitem o desenvolvimento do pensamento (matemático) dos alunos, bem como o aprofundamento de importantes conceitos matemáticos. No entanto, estes autores destacam a existência de dois tipos de discussões que é possível ocorrerem em contextos de educação formal, denominando-as de 1.ª e 2.ª gerações. A primeira geração está relacionada com o constructo cunhado por Ball (2001), em que as discussões gerais consistem na apresentação, por parte de alguns alunos que têm respostas corretas, das estratégias de resolução, sem haver qualquer discussão entre os pares, e em que a intervenção do professor e/ou outros alunos é reduzida (*show and tell discussions*). Como afirmam Stein e seus colaboradores (2008), este tipo de discussões não permite a possibilidade de os alunos interagirem entre si, partilhando as diferentes estratégias de resolução, estabelecendo conexões entre elas. Desta forma, "não existe nenhum argumento matemático ou de outra natureza para que os alunos necessariamente oiçam e tentem perceber as estratégias de resolução dos colegas" (Stein et al., 2008, p. 319). Por outro lado, este tipo de discussões não é coerente com práticas de trabalho colaborativo, que se baseiam numa aprendizagem com sentidos (Bakhtin, 1929/1981) e com uma avaliação (auto)reguladora (César, 2013a, 2013b; Dias, 2008; L. Santos et al., 2010), na qual se pretende que os alunos, através dos jogos interativos, vão construindo os conhecimentos (matemáticos) e desenvolvendo as capacidades e competências (matemáticas), previstas nos documentos de política educativa (Abrantes et al., 1999; DEB, 2001; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007; Santiago, Donaldson, Looney, & Nusche, 2012). Assim, para nós, estas discussões gerais deveriam ter outra designação: correção no quadro pois, pela sua definição, não existem interações sociais que se possam designar como discussões gerais. Aliás, apenas isso explica que só sejam designados para irem ao quadro os alunos que têm a resposta correta. Não há, neste caso, uma preocupação de utilizar a própria discussão geral como um momento de aprendizagem para a turma, em geral, e para alguns alunos, em particular. Nesta definição, o erro continua a ser dramatizado e visto como algo a evitar, a esconder, indesejável.

A segunda geração, em relação à natureza da discussão geral, está relacionada com o "utilizar o trabalho desenvolvido pelo estudante [em pequenos grupos] como ponto de partida para a discussão geral, em grande grupo, em que o professor ativamente configura as ideias que os estudantes produzem para os conduzir a pensamentos matemáticos mais rigorosos, poderosos e eficientes" (Stein et al., 2008, p. 320). Esta forma de atuação permite a atribuição de novos sentidos (Bakhtin, 1929/1981), alargando aqueles que a díade e/ou pequeno grupo já tinha atribuído aos conhecimentos (matemáticos) apropriados. Assim, permite que os alunos se tornem participantes legítimos da aprendizagem (César, 2013a; Lave & Wenger, 1991), desenvolve a sua autonomia, possibilita que algumas funções mentais passem do nível de desenvolvimento potencial para o nível de desenvolvimento real (Vygotsky, 1934/1962) e contribui para que alguns mecanismos de *inter-empowerment*, que o professor desenvolve em relação à turma e a alguns alunos, em particular, venham a ser internalizados, tornando-se mecanismos de *intra-empowerment*, que os alunos serão capazes de mobilizar autonomamente, em outros contextos, cenários e/ou situações (César, 2013a, 2013b, in press a, in press b; Machado & César, 2013b). Assim, aprender Matemática torna-se um processo socialmente negociado, entre os vários intervenientes, em vez de imposto por quem detém mais poder, o professor (Lau, Singh, & Hwa, 2009). Desta forma, também permite desenvolver capacidades e competências, específicas e transversais, bem como usar, enquanto recurso, uma avaliação (auto)reguladora das aprendizagens (César, 2009, 2013a, 2013b; L. Santos, 2008; L. Santos et al., 2010). Esta forma de atuação permite ir ao encontro do que é sustentado por Roldão (2003), que afirma que se deve "trabalhar e ensinar para que os alunos desenvolvam solidamente competências, construídas sobre os saberes e os saberes fazeres, sedimentando capacidade e disponibilidade para compreender e agir" (p. 48).

Quando se promovem discussões gerais deste tipo, está subjacente que a natureza das tarefas matemáticas e as instruções de trabalho fornecidas têm que ser coerentes com o trabalho colaborativo, a distribuição de poder entre os diversos participantes e o desenvolvimento do que se designa por *agency*, por parte dos alunos (César, 2009, 2013a; Machado & César, 2012a; Kumpulainen et al., 2010; Kumpulainen & Lipponon, 2010; Stein et al., 2008; Ventura, 2012). As tarefas matemáticas propostas, em aula, têm que ser desafiantes, estimulantes e envolver os estudantes nas atividades matemáticas como acontece, por exemplo, com as tarefas que promovem elevado nível de exigência cognitiva, que diversos autores clamam serem contributos essenciais para as práticas, em aula (Boston & Wolf, 2006; Garrison, 2011; Jackson et al., 2011; Jackson et al., 2012; Henningsen & Stein, 1997; Hiebert & Wearne, 1993; Stein et al., 1996).

Stein e seus colaboradores (2008) argumentam que não é fácil operacionalizar discussões gerais que se situem no que definem como a 2.ª geração. Contudo, no trabalho que estão a desenvolver, ainda pioneiro nos EUA, referem a existência de cinco tipos de formas de atuação, por parte dos professores, que facilitam o desenvolvimento deste tipo de discussões gerais: (1) antecipar as estratégias de resolução dos alunos, numa determinada tarefa matemática proposta; (2) monitorizar as respostas dos alunos, durante a fase de trabalho em pequenos grupos; (3) selecionar determinadas estratégias de resolução de alguns alunos; (4) sequenciar, com sentido, as estratégias de resolução dos alunos, selecionadas na etapa anterior, durante a discussão geral, em grande grupo; e (5) ajudar os alunos a realizarem conexões entre as diferentes estratégias de resolução e os conceitos matemáticos fundamentais.

Concordamos com a argumentação de Stein e seus colaboradores (2008) quando referem que desenvolver práticas, em aula, que promovam a partilha de conceitos matemáticos, pontos de vistas diversificados e modos de pensar diferentes permite aos alunos "poderem vivenciar a magia da aprendizagem através da interação e comunicação entre os pares, a alegria de co-construírem algo novo e a recompensa que vem do pensar e do escutar sustentado de uma maneira concentrada e focalizada" (p. 334). Desta forma, o modo como se ensina influencia o modo como os alunos aprendem e atribuem sentidos aos conhecimentos (matemáticos) apropriados.

2.3.2. Argumentação, identidade e autonomia

Freire (2010) assume que "Somente o diálogo, que implica um pensar crítico, é capaz, também de gerá-lo. Sem ele não há comunicação e sem esta não há verdadeira educação" (p. 96), posição que subscrevemos. As oportunidades de aprendizagem emergem nos diálogos caracterizados por um compromisso genuíno com a comunicação (Rommetveit, 1985). Desta forma, a comunicação, em especial a comunicação que ocorre em Matemática, assume especial importância quando se pretende promover o acesso ao sucesso escolar. No entanto, como sustenta Rommetveit (1985), nos processos inerentes à atividade de comunicar é necessária a existência de um conjunto de pressupostos implícitos, a que chama "meta-contrato de comunicação", e que está relacionado com um compromisso mútuo de quem inicia o discurso e de quem está a atribuir sentidos ao que ouve. Esta argumentação remete-nos para a (re)construção de uma intersubjetividade (Wertsch, 1991) entre os elementos que participam na comunicação.

Em Matemática existem duas atividades características e essenciais que fazem parte da comunicação matemática: argumentar e demonstrar. Segundo Rogotti e Greco (2005), argumentar

> é uma forma de movimento discursivo no qual não nos limitamos a expressar ou comunicar ideias, opiniões, propostas, desejos, projetos, etc, mas queremos justificá-los, prová-los pelo raciocínio. Por outras palavras, nos comprometemos a manter uma atitude crítica em relação a nós e aos outros. (s.p.)

Quando se trabalha colaborativamente, argumentar constitui uma co-elaboração, uma co-construção de posições que evoluem no decorrer do processo argumentativo, pelo que se centra na elaboração de conhecimentos pelos intervenientes desse processo. Desta forma, a argumentação envolve processos cognitivos, de interação e dialógicos, facilitando a produção de sentidos (Muller Mirza, Perret-Clermont, Tartas, & Iannaccone, 2009). Esta posição também é corroborada por Baker (2003) ao definir argumentação como "um tipo de jogo dialógico ou dialético que surge no "terreno" da resolução colaborativa de problemas e que está associada à construção colaborativa de sentidos" (p. 48, aspas no original). Contudo, em qualquer situação em que ocorra comunicação e, em especial argumentação, é importante considerar as ferramentas culturais disponíveis (Vygotsky, 1934/1962), nomeadamente aquelas a que recorrem os participantes, bem como os contextos (culturais e sociais) onde ocorre o processo argumentativo. Nos processos comunicacionais que envolvem a argumentação, existem quatro elementos a ter em consideração: o sujeito que propõe o diálogo; o(s) interlocutor(es); o objeto (assunto/tema a que se refere a discussão); e as ferramentas que medeiam essa interação (Muller Mirza et al., 2009).

A argumentação envolve, a nível psicológico, três processos: (1) capacidade de descentração, isto é, de perceber e entender os argumentos e pontos de vistas dos outros; (2) a capacidade de relacionar pontos de vistas; e (3) a capacidade de fornecer justificações e evidências que permitam, a ele e aos outros, perceber a sustentabilidade do que está a ser dito (Muller Mirza et al., 2009). Assim, é importante, em cenários de educação formal, como a sala de aula, desenvolver uma cultura de argumentação, por forma a que os alunos consigam mobilizar e/ou desenvolver capacidades e competências, tais como o sentido crítico, a reflexão, a capacidade de atenção concentrada, a capacidade de descentração em relação ao seu ponto de vista, entre outras, que são essenciais a uma sociedade cada vez mais globalizada e onde as interações sociais desempenham um papel fundamental (César & Kumpulainen, 2009; Ludvigsen et al., 2011).

Outra forma de comunicação essencial em Matemática é a demonstração. Este tipo de comunicação, de natureza habitualmente dedutiva, revela algumas semelhanças e diferenças, em relação ao conceito de argumentação. Rigotti e Greco (2009) salientam que tanto pela argumentação como pela demonstração se determina a veracidade de uma proposição desconhecida, a partir da veracidade de outra proposição que cuja validade já foi estabelecida anteriormente. Estas autoras aprofundam o estudo das semelhanças e diferenças que existem entre estes dois conceitos. De entre as semelhanças podemos destacar: o tipo de discurso que ambas podem assumir, isto é, tanto oral, como escrito; a natureza dedutiva, ou seja, partem de premissas verdadeiras para obter uma conclusão que também é verdadeira; e a necessidade de uma abordagem crítica, na medida em que é preciso encontrar razões adequadas para uma ação, decisão, convicção, teoria, entre outros aspetos. Quanto às diferenças, podemos mencionar: o nível de atuação em que operam, ou seja, enquanto que a demonstração atua sobre um nível mais abstrato, para atingir um objetivo cognitivo, a argumentação tem uma intervenção mais nítida no contexto social, influenciando as formas de atuação e de reação; a quem nos dirigimos, isto é, quando argumentamos fazemo-lo para alguém, que pode ser uma pessoa ou um conjunto de pessoas, enquanto que na demonstração existe, frequentemente, um ouvinte externo ao próprio discurso; o tipo de linguagem utilizada, uma vez que quando se demonstra a linguagem utilizada tem que ser mais cuidada, precisa e técnica, ao invés da argumentação, onde se pode utilizar uma linguagem mais familiar, mais simples; e os implícitos, pois na demonstração todos os procedimentos adotados têm que estar suficientemente explícitos para serem compreensíveis, enquanto que na argumentação o papel dos implícitos (movimento do corpo, as expressões faciais, entre outros) pode complementar o que se está a ser dito ou escrito (Rigotti & Greco, 2009).

Através do trabalho desenvolvido por Rigotti e Greco (2009), apercebemo-nos de que as dinâmicas de interação, individuais e coletivas, são parte integrante dos processos de argumentação. Por outro lado, é com base no confronto explícito e, por vezes, implícito, nomeadamente através de formas de pensamento divergentes, que podem ocorrer os conflitos sócio-cognitivos (Doise & Mugny, 1981), nos quais a negociação de sentidos ilumina o papel essencial que a argumentação assume, em especial nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Assim, é importante a construção de espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004), nos quais os vários intervenientes possam desenvolver dinâmicas de argumentação dialógica, que contribuam para a construção de conhecimento (matemático).

Às formas de atuação e reação que cada interveniente tem nos processos de argumentação estão subjacentes questões relacionadas com a construção identitária de cada um. Como reitera Horn (2008), "as identidades são construídas ao longo do tempo e através de numerosos contextos" (p. 230), pelo que o modo como cada um atua e reage está relacionado com a(s) posição(ões) identitária(s) que podem emergir nesse confronto de estratégias de resolução, raciocínios e pensamentos diversificados. O ter de pensar e refletir sob pontos de vista diferentes do seu faz com que o indivíduo tenha de gerir os conflitos que possam emergir da tomada de posições identitárias distintas. Por outro lado, a gestão deste processo de transição de uma posição identitária para outra permite tornar aquela pessoa mais autónoma, no sentido de ser capaz de tomar decisões e pensar por si própria, agindo de forma sustentada. Esta promoção de autonomia coaduna-se com o que é assumido por Piaget (1932/1965) na medida em que, para este autor, esta é encarada como a capacidade de coordenar diferentes perspetivas sociais com o pressuposto do respeito recíproco, pelo que ser autónomo está relacionado com o ser capaz de decidir a melhor forma de atuação, com bases nos diversos pontos de vista.

Desta forma, o trabalho colaborativo, associado a um contrato didático coerente, assume-se como um facilitador na promoção de culturas de sala de aula onde se configuram espaços/tempos comunicacionais nos quais os alunos, recorrendo às ferramentas culturais (matemáticas), partilham e negociam sentidos (matemáticos), atuando como co-construtores das trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a). Quando se participa em uma comunidade de prática ou de aprendizagem (Lave & Wenger, 1991; Wenger, 1998), envolvendo-se nos jogos interativos e dialógicos emergentes, não só se está a contribuir para o avanço de uma determinada tarefa, mas também se está a desenvolver a identidade de cada um, enquanto ser social. Desta forma, os processos de construção da identidade, quer enquanto indivíduo quer enquanto aluno de Matemática, ao longo das trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a), assumem especial importância, quando se pretende promover o acesso ao sucesso escolar nesta disciplina (Nasir, 2002). Assumindo que os processos de aprendizagem ocorrem em contextos sociais e culturais, num dado espaço e num dado tempo histórico, a identidade é construída à medida que se estabelecem interações com o meio envolvente, isto é, à medida que o indivíduo participa nas atividades culturais (Nasir, 2002). Como afirma César (2003), "a nossa identidade é um produto das representações simbólicas que temos de nós próprios e que construímos através das múltiplas interacções que estabelecemos com os outros" (p. 124).

Contudo, importa definir o que entendemos por identidade e quais os processos que levam à construção da mesma. O conceito de identidade pode ser abordado segundo diversas perspetivas teóricas. Nesta investigação assumiremos a teoria do *dialogical self* (Hermans, 1996, 2001, 2003; Hermans, Kempen, & van Loon, 1992) como perspetiva teórica na análise dos processos de construção da identidade. Esta teoria permite entender os processos dinâmicos que estão envolvidos na construção da mesma pois, como refere Hermans (2001),

> o *dialogical self* baseia-se na assunção de que existem muitas posições para o *I* que podem ser ocupadas por uma mesma pessoa. Para além disso, o *I* de uma determinada posição pode concordar, discordar, compreender, não compreender, opor-se, contradizer, questionar, desafiar e, até, ridicularizar o *I* de uma outra posição. (p. 249, itálicos acrescentados na tradução)

Assim, o *self* é encarado como uma entidade dinâmica que ocupa, através dos espaços e tempos em que se move, posições identitárias diversas (*I-positions*), e até mesmo contraditórias, em que cada uma delas assume uma, ou mais, voz(es) "de tal modo que se podem estabelecer relações dialógicas entre as posições" (Hermans, 2001, p. 248). Como refere César (2003, 2009, 2013a), se considerarmos que a identidade de cada aluno é configurada pelas várias *I-positions* que ele pode assumir em contextos de educação formal, então o *dialogical self* poderá dar voz a diferentes personagens, cujas *I-positions* podem gerar mais, ou menos, conflitos, entre si. Por exemplo, ao trabalhar colaborativamente, em díade e/ou em pequenos grupos, geralmente os alunos assumem diversas *I-positions*: *I* como aluno, *I* como par mais competente, *I* como adolescente, *I* como filho, *I* como alguém que participa numa determinada cultura em casa e/ou no bairro, entre outras. Essas diferentes posições identitárias podem levar a um conflito interno, que se pode traduzir em formas de atuação e de reação disruptivas, configurando barreiras no acesso ao sucesso escolar, nomeadamente em Matemática. É importante que o professor esteja atento e que saiba gerir – e ensinar a gerir – os possíveis conflitos que podem emergir da interação entre as diferentes *I-positions*. Uma vez que a construção do *self* é um processo dinâmico, que vai mudando ao longo do tempo e dos espaços (César, 2013a), é importante criar espaços/tempos dialógicos, nos quais os alunos se sintam capazes de assumirem voz(es) (Cornelius & Herrenkohl, 2004; Wertsch, 1991), partilhando e negociando sentidos (matemáticos). Também é essencial que nesses espaços/tempos, através de mecanismos de *inter*- e *intra-empowerment* (César, 2013a), os alunos se tornem participantes legítimos de uma comunidade de aprendizagem, aprendendo a gerir os conflitos que podem resultar entre as diversas *I-positions* (Hermans, 2001), construindo trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a) que sejam mais sustentadas nos princípios da educação inclusiva e da equidade no acesso ao sucesso escolar.

O desenvolvimento de um *self* mais dialógico e que consegue gerir os conflitos que podem emergir das diferentes posições assumidas, pode traduzir-se no desenvolvimento da autonomia. Como argumentam Cobb e seus colaboradores (2001), o desenvolvimento da autonomia nos alunos reveste-se de extrema importância quando se pretende promover práticas de elevada qualidade, em Matemática. Estes autores referem, ainda, que a existência das normas sócio-matemáticas, que preferimos designar como um dos elementos que configuram o contrato didático (Schubauer-Leoni, 1986), promovem e estimulam o desenvolvimento da autonomia nos alunos, pois é através delas que se configuram as formas de participação destes numa comunidade de aprendizagem. Assim, a autonomia vai sendo, gradualmente, desenvolvida quando os alunos se conseguem envolver nas atividades matemáticas, transitando de participantes periféricos para legítimos de uma comunidade de aprendizagem (César, 2007; Cobb et al., 2001; Lave & Wenger, 1991).

2.3.3. Poder, voz(es) e trajetórias de participação ao longo da vida

Em qualquer relação que se estabelece com o(s) outro(s) existem formas de poder, implícitas ou explícitas, que medeiam essa relação. Como argumenta Foucault (1982), uma sociedade sem relações de poder só poderá existir num plano abstrato. Mas não existe na realidade, no quotidiano. Desta forma, assumimos o poder como um processo situado, dinâmico e dialógico, na medida em que se está constantemente a (re)negociar as formas de poder inerentes às diversas *I-positions* que se assumem nos inúmeros jogos (inter)ativos em que participamos.

Quando se aborda esta temática no domínio da educação o que muitas vezes é realçada é a autoridade que o professor (ainda?) exerce sobre os alunos. Contudo, os conceitos de poder e autoridade não são sinónimos, uma vez que autoridade é uma forma de poder, menos democrática, mais individualista e autocrática. Tal como Cornelius e Herrenkohl (2004), consideramos que o poder não é algo exterior ao processo de aprendizagem, isto é, o poder "não existe dentro da pessoa mas dentro das relações humanas mediadas por ferramentas [culturais]" (Cornelius & Herrenkohl, 2004, p. 470). Estes autores identificaram três conceptualizações de poder relacionadas com a educação e as salas de aula, tendo em conta as dinâmicas que se estabelecem entre as pessoas e as ferramentas culturais utilizadas, nos contextos socioculturais: (1) propriedade de ideias (*ownership of ideas*), relacionadas com a relação de poder que existe entre o indivíduo e o conceito; (2) partidarismo (*partisanship*), que descreve relações de poder entre os alunos, e que se pode desenvolver através das suas interações com os conceitos e com os outros; e (3) discurso persuasivo (*persuasive discourse*) que está relacionado com a existência de algumas formas de comunicação que podem, por si só, afetar as relações de poder entre as pessoas. Estes três aspetos relativos ao poder iluminam diferentes relações de poder que podem existir nas aulas, nomeadamente entre os alunos, entre eles e o professor, bem como entre eles e o conhecimento.

Como sustenta Freire (2010),

> o educador já não é o que apenas educa, mas o que, enquanto educa, é educado, em diálogo com o educando que, ao ser educado, também educa. Ambos, assim, se tornam sujeitos do processo em que crescem juntos e em que os "argumentos de autoridade" já não valem. (p. 79, aspas no original)

Na citação anterior, destacamos a importância que os processos dinâmicos e dialógicos assumem nos processos de decisão e de distribuição do próprio poder, especialmente na aprendizagem da Matemática, aspeto que também é salientado por César (2010, 2013a, 2013b, in press a, in press b). Como esta disciplina é, recorrentemente, associada a representações sociais negativas que os alunos constroem acerca dela, fruto das experiências vivenciadas ao longo das trajetórias de participação ao longo da vida, na escola e fora dela (César, 2013a, 2013b), uma das formas de distribuir poder pelos alunos é torná-los mais capazes de obterem desempenhos que sejam apreciados em Matemática, contribuindo para que se sintam mais motivados e empenhados na realização das atividades matemáticas, particularmente nas que se referem à matemática escolar. Assim, a forma como se encara e apropria o conhecimento matemático é uma das formas de distribuir – ou não! – poder aos alunos, em cenários de educação formal. Quando o poder é mais distribuído, os alunos podem tornar-se, progressivamente, participantes legítimos de uma comunidade de aprendizagem (César, 2007, in press b; Lave & Wenger, 1991), internalizando mecanismos de *inter-empowerment* e transformando-os em mecanismos de *intra-empowerment*, que conseguirão, depois, utilizar de forma autónoma, em situações em que estejam a trabalhar individualmente ou em que trabalhem colaborativamente (César, 2013a, 2013b).

Consideramos que o contrato didático (Schubauer-Leoni, 1986; Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1997) ou as normas sócio-matemáticas (Cobb, 1995; McClain & Cobb, 2001; Cobb et al., 2001; Yackel & Cobb, 1996) devem ser negociados entre professor e alunos e que a discussão geral, em grande grupo (turma), pode ser concebida como uma das formas de distribuição de poder, na qual os alunos são mais interventivos e participativos, enquanto que o professor assume um papel de mediador, de alguém que procura que os alunos ganhem capacidade de atuação e de tomada de decisão (*agency)*, assumindo responsabilidades progressivamente maiores em relação às atividades desenvolvidas em aula (César, 2009; Kumpulainen et al., 2010; Kumpulainen & Lipponen, 2010; Machado & César, 2012a; Stein et al., 2008; Ventura, 2012). Assim, a configuração de cenários de educação formal, como a sala de aula, em que os alunos aprendem a ser mais participativos, a atuarem como participantes mais críticos e reflexivos acerca das aprendizagens realizadas, constitui uma forma de distribuição do poder e contribui para a internalização de mecanismos de *intra-empowerment* (César, 2013a, 2013b, in press a, in press b; Machado & César, 2012a).

Um dos conceitos associados à noção de poder e às formas de distribuição desse poder é a noção de voz(es) (Wertsch, 1991). Para este autor, a noção de voz realça que o funcionamento de cada indivíduo, nomeadamente as formas de atuação e reação, baseiam-se num processo comunicativo. Para Wertsch (1991), os indivíduos são sempre sociais, mesmo quando estão sozinhos. Até neste caso, a voz é incorporada nos contextos dialógicos que estabelecem com as diferentes *I-positions*, aspeto também realçado por Sfard (2008), quando afirma que pensar é também interagir, comunicar. Cada voz é, por isso, o resultado da mistura de múltiplas e anteriores vozes, que se podem constituir como mediadores da ação. Assim, ao assumir que a aprendizagem é um processo interativo e dialógico, e atendendo aos contributos da teoria do *dialogical self* (Hermans, 1996, 2001, 2003; Hermans et al., 1992), a noção de voz está intimamente relacionada com os processos de mudança e de desenvolvimento das novas e diferentes posições do *self* (*I-positions)* e, como tal, está relacionada com a construção do indivíduo, enquanto ser social (Bertau, 2007). Assim, a espacialização do *self* (Hermans, 1996) permite, simultaneamente, a existência de diferentes posições e compreender os vários movimentos entre essas posições, o que configura a existência de voz(es), de acordo com a situação que se está a vivenciar. Mas, como acrescenta César (2003, 2013a), esta espacialização não pode ser compreendida sem a outra dimensão essencial para compreendermos qualquer processo de aprendizagem e/ou de desenvolvimento: o tempo. Assim, o *self* só ganha sentido(s) quando o situamos no espaço mas, também, no tempo, quando o assumimos como um processo, como uma construção que se vai desenrolando através de uma trajetória de participação ao longo da vida (César, 2013a), ou seja, quando conectamos passado, presente e futuro.

Como sustenta Secada (1995) a noção de voz "refere-se ao discurso que é criado quando as pessoas definem os seus próprios assuntos, em suas próprias maneiras, a partir das suas próprias perspetivas, usando os seus próprios termos" (p. 156), sendo de salientar que ao reforçar os "próprios", este autor alerta-nos para a necessidade de se construir uma intersubjetividade (Wertsch, 1991), entre os vários participantes. Este conceito, cunhado pelo referido autor, relaciona-se com o de voz(es) e significa a partilha de sentidos (Bakhtin, 1929/1981), que permite que todos os participantes no discurso percebam o que se está a discutir. Também serve para realçar a noção de pertença, de participação, numa determinada comunidade (César, 2013a, 2013b, in press b).

Teitelbaum e Apple (2001) salientam que, das "diferentes formas de pedagogia que podem ser utilizadas, as que dominam, tendem a silenciar as vozes e as experiências dos estudantes" (p. 195), pelo que surge a necessidade de desenvolver práticas, em aula, que promovam a criação de espaços/tempos para a "co-construção de um espaço dialógico" (Hermans, 2003, p. 113). Como argumenta Hand (2012), a criação de espaços dialógicos, nos quais as formas de poder são mais distribuídas, potencia a possibilidade de os alunos se tornarem participantes mais ativos, desenvolvendo-se, assim, práticas, em aula, que coloquem em ação os princípios de equidade (Cobb & Hodge, 2007). Porém, como realça César (2003, 2009, 2013a, 2013b, in press a, in press b), a questão fundamental não se refere ao número – mais vozes – mas sim à capacidade de as tornar audíveis, de as expressar, tornando-se participante legítimo de uma determinada comunidade (César, 2013a, in press a). É neste caso, quando se desocultam as vozes dos diversos participantes que se contribui para a sua inclusão – e não para formas, ainda que subtis, de exclusão – bem como para uma educação (matemática) intercultural (César, 2009, 2013b, in press b; César & Santos, 2006; Favilli et al., 2004).

Como forma de desenvolver práticas, em aula, que contribuam para a distribuição de poder, a negociação de sentidos (matemáticos) e onde as voz(es) dos alunos sejam ouvidas e tidas em consideração nos processos de ensino e de aprendizagem, César (2013a) destaca a necessidade de se desenvolverem mecanismos de *inter* e *intra-empowerment.* Segundo esta autora, os processos de dar poder (*empowerment*) ocorrem, em primeira instância, ao nível social (inter) e só depois é que são internalizados pelos participantes (intra), à semelhança do que Vygotsky (1934/1962) afirmava acontecer relativamente às funções mentais e aos conhecimentos, que também começam por ser prévios e exteriores aos indivíduos. Os processos de *inter-empowerment* são configurados pelas interações dialógicas que se estabelecem nos contextos e/ou cenários em que os indivíduos participam (César, 2013a, 2013b), nomeadamente através das formas de distribuição de poder entre os participantes. Estas são configuradas pela natureza do contrato didático (César, 2009; Schubauer-Leoni, 1986; Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1997) ou pelas normas sócio-matemáticas (Cobb, 1995; McClain & Cobb, 2001; Cobb et al., 2001; Yackel & Cobb, 1996), aspetos que são negociados, e pelas práticas desenvolvidas, em aula, bem como pela natureza de tarefas propostas, que possibilita a existência de espaços/tempos de discussão e partilha de sentidos (matemáticos), valorizando as diferentes culturas em que cada elemento participa e recorrendo a processos de avaliação de natureza (auto)reguladora (César, 2009, 2013a, 2013b, in press b; L. Santos et al., 2010). Os mecanismos de *intra-empowerment* "estão intimamente relacionados com a reflexão, o pensamento, os sentimentos e a meta-análise das trajetórias de participação ao longo da vida" (César, 2013a, p. 163), pelo que não podem ser diretamente observáveis. Estes são inferidos através do desenvolvimento de uma autoestima académica positiva, mas também através da "persistência nas tarefas, na resistência à frustração e ao criticismo, ou resiliência" (César, 2013a, p. 163).

Assim, como César (2013a) sustenta, "é quando os mecanismos de *inter-empowerment* encontram expressões que são internalizadas em formas de *intra-empowerment* que os indivíduos são capazes de se tornarem participantes legítimos" (p. 163, itálicos da nossa autoria). Como tal, se queremos que ocorra mudança, em termos dos alunos se envolverem nas atividades matemáticas, nomeadamente na Escola, de se tornarem mais confiantes, de saberem gerir os conflitos entre as várias posições identitárias que emergem das interações dialógicas que se estabelecem, então é fundamental que as práticas, em aula, sejam facilitadoras dessa transição, entre os níveis *inter* e *intra-empowerment*, bem como na apropriação de conhecimentos, ou seja, que favoreçam os processos de internalização (Vygotsky, 1934/1962).

Outro constructo cunhado por César (2013a), que está intimamente relacionado com os mecanismos de *empowerment*, é o de trajetória de participação ao longo da vida. Para esta autora, este constructo é mais abrangente do que o de projeto de vida (César, 2003, 2009; César & Oliveira, 2005), uma vez que ilumina os movimentos que caracterizam a trajetória individual em diferentes contextos, cenários e situações, como a escola, o local de trabalho, a família, os amigos e a vizinhança (César, 2013a). Deste modo, as trajetórias de participação ao longo da vida combinam as noções de tempo e espaço, valorizando os vários tipos de participação dos indivíduos nos diversos contextos multiculturais, permitindo-lhes (re)construir essas trajetórias de participação ao longo da vida, tendo em conta os conhecimentos apropriados, as capacidades e competências desenvolvidas e as expetativas que foram (re)criando.

2.3.4. Acesso às ferramentas culturais da Matemática

Para Rogoff (1994), ao considerar que "a aprendizagem e o desenvolvimento ocorrem quando as pessoas participam nas atividades socioculturais das suas comunidades" (p. 209), está subjacente a importância da criação de comunidades de aprendizagem, em cenários de educação formal (César, 2007; Lave & Wenger, 1991). Ao assumirmos uma perspetiva histórico-cultural (Roth & Radford, 2011; Vygotsky, 1934/1962) e situada (Lave & Wenger, 1991), em relação à aprendizagem da Matemática, os conceitos de comunidade de aprendizagem e de participante legítimo, cunhados por Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998), e recriados por César (2007, 2013a) permitem-nos perceber os processos envolvidos no acesso às ferramentas culturais (Vygotsky, 1934/1962), em especial da Matemática.

Lave e Wenger (1991), ao centrarem o seu trabalho na aprendizagem e nas comunidades de prática, consideram que os conceitos de comunidade de prática e comunidade de aprendizagem são equivalentes. De acordo com estes autores, o conceito de comunidade de prática "implica a participação em sistemas de atividade sobre os quais os participantes partilham entendimentos relacionados com o que estão a fazer e o que isso significa nas próprias vidas e para a comunidade" (p. 98). Desta definição de comunidade de prática emerge a existência de saberes partilhados e (re)negociados entre os vários elementos e que cada elemento ocupa um espaço e um tempo próprios nessa comunidade. No entanto, posteriormente, Wenger (1998) considera que as comunidades de aprendizagem evoluem a partir das comunidades de prática. Como este autor refere,

> O conceito de prática refere-se a um fazer (...) mas um fazer num contexto histórico e social que dá estrutura e significado ao que se faz. (...) o conceito de prática salienta o carácter social e negociado tanto do explícito como do tácito das nossas vidas. (Wenger, 1998, p. 47)

Desta forma, este autor entende a prática como algo situado, no tempo e no espaço, dinâmico e dialógico, configurado e que configura as interações sociais que se estabelecem entre os vários elementos dessa comunidade.

Wenger (1998) sustenta que o conceito de comunidade de prática envolve três dimensões, que estão relacionadas entre si e que ele identifica como "fontes de coerência" (p. 73). A primeira dimensão, empenhamento mútuo *(mutual engagement*), está relacionada com o envolvimento dos participantes nas ações que ocorrem nessa comunidade. O nível de envolvimento dos mesmos tem a ver com o tipo de pertença que assumem ter com essa comunidade. Desta forma, o empenhamento mútuo é uma condição necessária para a existência de uma comunidade de prática ou de aprendizagem (Wenger, 1998). Assim, desenvolver formas de aprendizagem colaborativas, enquanto prática, em aula, facilita o empenhamento mútuo e a emergência de comunidades de aprendizagem, uma vez que facilita a existência de interações sociais e dialógicas, bem como a apropriação de conhecimentos (matemáticos) e o desenvolvimento e/ou mobilização de capacidades e competências, tais como a argumentação sustentada, o sentido crítico, a autonomia, entre outras

(César, 2009, 2013a, 2013b; Courela, 2007; Courela & César, 2012; Machado, 2008; Oliveira, 2006; Ventura, 2012).

A segunda dimensão, empreendimento conjunto (*joint enterprise*), refere-se a quando os participantes dessa comunidade realizam, em conjunto, de uma forma negociada, uma determinada tarefa que se desenvolve nessa comunidade. Como afirma Wenger (1998), "Um empreendimento é um recurso de coordenação, de dar sentido, de empenhamento mútuo" (p. 82). Mas, para que exista um empreendimento conjunto, é necessário que os diversos participantes tenham voz(es), que estas não sejam silenciadas, que eles se sintam suficientemente seguros para arriscarem soluções novas e para enfrentarem as barreiras inerentes a qualquer ato de aprendizagem. É preciso empenho e sentimento de pertença aquela comunidade pois, sem eles, dificilmente existe envolvimento genuíno. Assim, a distribuição de poder desempenha um papel fundamental na possibilidade de vir a existir um empreendimento conjunto.

Por fim, a terceira dimensão, repertório partilhado (*shared repertoire*), tem a ver com "rotinas, palavras, ferramentas, formas de fazer as coisas, histórias, gestos, símbolos, (…) ações ou conceitos que a comunidade tenha produzido ou adotado no curso da sua existência, e que se tornem parte da sua prática" (Wenger, 1998, p. 83), pelo que nessa participação, nessa interação, são construídos, o que Kumpulainen e seus colaboradores (2010) designam por fundos de conhecimento (*funds of knowledge*), que correspondem a ferramentas e conteúdos cognitivos e culturais, que formam redes localizadas de saber-fazer (*know-how*), que facilitam o desenvolvimento da comunidade e da aprendizagem do próprio indivíduo. Mas o repertório partilhado tem também subjacente a criação de uma intersubjetividade entre os participantes, que favorece o empenhamento conjunto e o desenvolvimento de um sentimento de pertença. Assim, estas três características inter-influenciam-se, relacionando-se de uma forma dialética e dinâmica.

Ao considerar as comunidade de prática ou de aprendizagem como sistemas de aprendizagem social (Wenger, 2000) e, acrescentaríamos nós, também cultural, a forma de participação que cada elemento tem no seio dessa comunidade varia, de acordo com três aspetos: (1) envolvimento (*engagement*); (2) imaginação (*imagination*); e (3) alinhamento (*alignment*) (Wenger, 2000). Segundo este autor, cada aspeto anterior contribui para a formação das comunidades de prática ou de aprendizagem e para a construção da identidade de cada indivíduo que nela participa, ou seja, segundo Hermans (2001), das diversas *I-positions* que assume. Como sustenta, também, Hamido

(2005), “As trajectórias dos indivíduos, através desses diversos campos de participação, são trajectórias de aprendizagem que os envolvem como um todo, pois são simultaneamente percursos de construção de conhecimento e de construção identitária” (p. 191).

Segundo Wenger (2000), o envolvimento passa por fazer as coisas em conjunto, por falar, por partilhar, por ajudar. Desta forma, aprendemos o que podemos fazer e como é que o mundo responde às formas de atuação e reação a que recorremos, ou seja, “a forma como nos envolvemos com o outro e com o mundo configura a nossa experiência de quem somos” (Wenger, 2000, p. 227). A imaginação está relacionada com a construção da imagem de nós próprios na comunidade, da comunidade em que participamos e do mundo, por forma a podermos refletir “sobre a nossa situação e explorar possibilidades (por exemplo, desenhar um mapa, contar uma história, construir um conjunto de possíveis cenários para perceber as opções do outro)” (Wenger, 2000, p. 228). Por último, o alinhamento está relacionado com o processo de coordenar perspetivas, interpretações e ações para que consigamos atingir elevados objetivos, ou seja, “ter a certeza de que as nossas atividades locais são suficientemente alinhadas com outros processos para que eles possam ser eficazes para além do nosso envolvimento (por exemplo, (...) negociar um plano de trabalho para um projeto)” (Wenger, 2000, p. 228). Assim, a participação periférica ou legítima de um elemento numa comunidade de prática ou de aprendizagem resulta do envolvimento, da imaginação e do alinhamento que esse indivíduo consegue e/ou deseja ter. Desta forma, como argumenta Hamido (2005), “A participação legítima pretende identificar a aprendizagem com uma dinâmica direccionada para uma intensificação da participação, do acesso a fontes de compreensão e, portanto com uma competencialização do indivíduo” (p. 191). Pelo que foi dito, como argumenta Wenger (1998), a aprendizagem deve recorrer a

> maneiras criativas de envolver os alunos em práticas significativas, de possibilitar o acesso a recursos que melhoram a sua participação, de abrir os seus horizontes para que possam colocar-se em trajetórias de aprendizagem que possam identificá-las, e de envolvê-los em ações, discussões e reflexões que fazem a diferença para a comunidade que eles valorizam. (p. 10)

Centrando-se no domínio da educação, Fox e Riconscente (2008) afirmam que “para Vygotsky, a educação pode sustentar o desenvolvimento cultural de cada indivíduo através do domínio das ferramentas culturais existentes e da abertura para o desenvolvimento e para o uso de novas formas de atividade da linguagem e de novas ferramentas culturais" (p. 388). Os contextos sociais e culturais assumem especial importância, nomeadamente no que se refere ao desenvolvimento de cada indivíduo e no acesso que este tem – ou não – bem como do uso que faz das ferramentas culturais disponíveis ou que ele pode vir a criar (Daniels, 2008; Daniels, Cole, & Wertsch, 2007; Vygotsky, 1934/1962).

Convém, ainda, clarificar alguns aspetos, nomeadamente a distinção entre ferramenta (*tool*) e signo (*sign*). As ferramentas (*tools*) são "orientadas para o exterior" e têm como função "servir como condutor da influência humana sobre a atividade do objeto" (Vygotsky, 1978, p. 55, citado por Edwards, 2007, p. 94), enquanto que os signos (*signs*) são "internamente orientados" para a auto-regulação das ações que tomamos sobre o objeto (Vygotsky, 1978, p. 55, citado por Edwards, 2007, p. 94). Contudo, estes dois conceitos adotam uma designação mais geral: artefacto cultural (Daniels et al., 2007). Segundo Daniels (2001, 2008) e Daniels e seus colaboradores (2007), Vygotsky refere que é o uso de ferramentas culturais (tanto materiais como psicológicas) que possibilita o desenvolvimento da compreensão que o indivíduo tem acerca da realidade, dos contextos sociais e culturais em que participa. Desta forma, é através dessas ferramentas culturais, que atuam como mediadoras, que o indivíduo aprende. Mas, para aprender, é preciso recorrer também a um sistema simbólico, ou seja, a um conjunto estruturado de signos, uma vez que qualquer língua e pensamento precisam de um sistema simbólico que lhe sirva de suporte, ou seja, de signos constituídos por um significado e um significante, organizados numa estrutura de conjunto que constitui o sistema simbólico (por exemplo, um sistema numérico; ou a língua portuguesa).

Ainda segundo estes autores, Vygotsky distingue ferramentas mentais (*mental tools*) de outras ferramentas, em que as ferramentas mentais são aquelas que podem ser utilizadas para orientar a mente e as formas de ação, enquanto que as ferramentas técnicas (*technical tools*) são utilizadas para produzir mudanças noutros objetos (Daniels, 2001, 2008). Wertsch (1991, 1998) define ferramenta cultural como um mediador histórico, cultural e institucional da ação humana. Este autor coloca as ferramentas culturais ou meios mediadores (*mediational means)* no centro da análise, descrevendo a ação individual em termos das ferramentas usadas para realizar essa ação. No entanto, esses *mediational means* (Wertsch, 1991, 1998) que são descritos como as ferramentas mentais, para Vygotsky (Daniels, 2001, Daniels et al., 2007), configuram o domínio e o controlo, por parte dos indivíduos, das suas funções mentais superiores (Vygotsky, 1934/1962). Como sustenta este autor, "cada função do desenvolvimento cultural da criança surge em dois níveis, em dois planos, primeiro, o social, depois o psicológico, primeiro entre as pessoas como uma categoria inter-mental, depois dentro da criança como uma categoria intra-mental" (Vygotsky, 1931b, p. 106, citado por Bakhurst, 2007, p. 53).

Assim, as ferramentas culturais são, através da socialização e da participação, internalizadas pelo indivíduo, ou seja, transformadas em algo intrínseco, pessoal e único. Configurar espaços/tempos dialógicos, em cenários de educação formal, como a sala de aula, em que os alunos consigam dominar o uso das ferramentas culturais da matemática é um aspeto de extrema importância quando se pretende promover o acesso ao sucesso escolar nesta disciplina. É precisamente através da participação em comunidades de aprendizagem que as interpretações e os sentidos (matemáticos), numa primeira fase, são propostos e trabalhados pelos diversos participantes, para que, posteriormente, se tornem acessíveis a serem internalizados por cada elemento dessa comunidade. Assim, como salienta Wertsch (1998), "a emergência de novas ferramentas culturais transforma o poder e a autoridade" (p. 65), pelo que o desenvolvimento de mecanismos de *inter*-e-*intra empowerment* (César, 2013a, 2013b), em aula, bem como a construção de espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004), nos quais as vozes dos alunos são ouvidas e não silenciadas, assume particular importância na distribuição do poder entre os diversos participantes de uma comunidade de aprendizagem (César, 2007, 2009, 2013a, 2013b; Cornelius & Herrenkohl, 2004; Courela & César, 2012). Em síntese, o trabalho colaborativo associado a um contrato didático coerente, permite promover o acesso às ferramentas culturais (da Matemática) (César, 2009, 2013a; Robbins, 2005), através do desenvolvimento de interações sociais e dialógicas, que facilitam o acesso ao sucesso escolar.

CAPÍTULO 3

DESENVOLVIMENTO, APRENDIZAGEM E EDUCAÇÃO

3.1. RELAÇÃO ENTRE DESENVOLVIMENTO E APRENDIZAGEM

A relação entre aprendizagem e desenvolvimento tem sido amplamente estudada ao longo das últimas décadas, especialmente no domínio da psicologia e da educação. De acordo com a abordagem em que nos situamos (por exemplo, *behaviourista*, *gestaltista* ou sócio-construtivista), a relação existente entre estes dois conceitos assume diferentes sentidos. Para além disso, a definição assumida para cada um deles também é diferente consoante a abordagem que se subscreve. Assim, o quadro de referência teórico escolhido configura o que se entende por desenvolvimento e por aprendizagem, ou seja, como afirma César (2010, 2013a), o modo como interpretamos os resultados obtidos é configurado pelo quadro de referência teórico que se assume, sendo esta uma das escolhas mais relevantes quando realizamos investigação. No entanto, poucos autores realçam a importância das teorias que sustentam as suas interpretações para os resultados obtidos (César, 2010), havendo mesmo quem acredite que os resultados – o que se observa, como se observa, os dados que se recolhem, como se analisam e interpretam – são objetivos e independentes das decisões teóricas e metodológicas que o investigador tomou. Este último posicionamento, próprio da abordagem *behaviourista* e do paradigma positivista (Bogdan & Biklen, 1994; Erickson, 1986), contraria aquele que assumimos nesta investigação, ou seja, um paradigma interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994, 1998) e uma abordagem sócio-construtivista, que subscreve que o desenvolvimento e a aprendizagem são histórico-culturalmente situados (Hamido & César, 2009; Vygotsky, 1934/1962; Wertsch, 1991, 1998).

Em educação, e especialmente em investigações que se realizam em contexto escolar, estudando professores, alunos e atividades desenvolvidas em aula, as conceções de desenvolvimento e de aprendizagem que estes professores subscrevem e que podem ser observadas, ainda que implicitamente, nas práticas docentes que operacionalizam, desempenham um papel fundamental nas opções pedagógicas assumidas. Assim, para que as práticas, em aula, sejam sustentadas e coerentes, é essencial que os professores clarifiquem as conceções de aprendizagem e de desenvolvimento que assumem. Nesse sentido, sendo esta uma investigação que se baseia em dados recolhidos em contexto escolar e em participantes que envolvem os diversos agentes educativos que participam na vida escolar, pareceu-nos de particular importância iluminar as conceções que assumimos de desenvolvimento e aprendizagem, bem como da relação que entre ambos se estabelece, os princípios epistemológicos que subscrevemos e a forma como triangulamos as teorias que servem de base ao quadro de referência teórico que configura as interpretações que fizemos, no capítulo dos resultados.

3.1.1. Abordagem *behaviourista*

A abordagem *behaviourista* centra-se no estudo do que é diretamente observável, ou seja, dos comportamentos, explicados em função das reações ou respostas de um indivíduo a estímulos exteriores (Skinner, 1974/1988). Não se pretende estudar o que é subjetivo, como as intenções, ou o que só pode ser interpretado e inferido a partir do que é observável, como os raciocínios. A investigação centra-se no estudo do que é objetivo e acredita-se que, se repetida a investigação sob as mesmas condições, ou com grupos de sujeitos semelhantes, os resultados obtidos irão ser os mesmos (Bogdan & Biklen, 1994). Daí o recurso à replicação como forma de validação da investigação, como é habitual no paradigma positivista (Hamido & César, 2009), que se sustenta em princípios epistemológicos que também estão subjacentes à abordagem *behaviourista*, tais como o inatismo e o determinismo.

Assumindo esta abordagem, a aprendizagem é concebida como um processo de associação entre um estímulo e uma resposta, pretendida pelo investigador ou pelo professor (Skinner, 1968). Quando o sujeito dá a resposta desejada, é usado um esquema de reforço dessa mesma resposta, que visa a associação entre estes dois elementos – resposta e reforço –, para que a mesma venha a ser repetida, quando em presença do estímulo que a desencadeou (Skinner, 1938/1991). Como afirma Skinner (1974/1988), a grande questão relativa ao comportamento é: “Como poderia alguém ser induzido a comportar-se de uma certa forma?” (p. 13), ou seja, como se consegue modelar o comportamento das pessoas. Sendo o objetivo principal modelar comportamentos, considera-se fundamental o produto final – obter a resposta desejada – sendo pouco relevante o processo – como se conseguiu chegar até àquela resposta.

A aprendizagem baseia-se na repetição, no treino, na imitação o mais fidedigna possível e nos esquemas de reforço, ou seja, num processo que facilite o condicionamento operante (Skinner, 1974/1988). Concebe-se quem aprende como recetor de informação, ou seja, um aprendente que hoje em dia descrevemos como passivo, pois não é quem decide sobre a sua própria aprendizagem, nem está subjacente à forma como é ensinado que este precise de compreender o que aprende. Apenas precisa de o conseguir reproduzir e utilizar em situações semelhantes, em tarefas similares. Daí que, nesta abordagem, seja dado um relevo especial aos exercícios, ou seja, às tarefas cuja natureza favorece o conhecimento instrumental e não o conhecimento relacional (Skemp, 1978).

Quem ensina é quem tem o papel central no processo de aprendizagem, devendo transmitir o conhecimento, do mais simples para o mais complexo, a quem aprende, evitando os erros e tudo o que possa confundir o aprendente (César, 2001). Esta conceção de aprendizagem está na base do ensino dito expositivo, no qual se acredita que o aluno aprende, essencialmente, por ouvir o que o professor transmite, bem como através da repetição, por exemplo, de algoritmos, fórmulas e outros procedimentos padronizados, ensinados pelo mesmo. Esta abordagem estava subjacente a muitos dos documentos de política educativa que vigoraram em Portugal, sobretudo até à lei de bases do sistema educativo (AR, 1986). Também é visível em práticas muito centradas no professor, que expõe os conteúdos, resolve, no quadro, exercícios e, depois, indica aos alunos os exercícios semelhantes que devem resolver, individualmente. Assim, assume-se que, se o professor explicar de forma clara, sem erros, resolvendo depois exercícios concebidos para adquirir os conhecimentos, do mais simples para o mais complexo, todos os alunos que tenham as capacidades mínimas necessárias e que se esforcem conseguirão aprender (César, 2001). Se não o fizerem, é porque não se esforçaram o suficiente, pelo que devem reprovar, para no ano seguinte se empenharem mais e conseguirem, então, ser bem-sucedidos. Ensina-se todos como se se tratasse de um só e, tendo em consideração apenas o diretamente observável, não se leva em linha de conta aspetos como o *background* cultural ou sócio-económico de cada aluno.

Para Bandura, o processo de aprendizagem começa com uma aprendizagem por imitação (Bandura, 1962), na qual se baseia o condicionamento vicariante, mas que posteriormente é internalizado através da identificação, passando em seguida a ser incorporada no *self*. Os modelos desempenham um papel fundamental, sendo possível aprender através do que vemos acontecer aos outros, do ponto de vista da aprovação ou desaprovação social (Bandura, 1977). Assim, a aprendizagem do sujeito é influenciada pelas formas de atuação e reação das outras pessoas, podendo os esquemas de reforço funcionar de forma indireta, ou seja, pelas consequências, positivas ou negativas, que vemos existirem para os modelos (Bandura, 1986).

Sendo Bandura um dos teóricos fundamentais do condicionamento vicariante, o papel das interações sociais é muito mais importante do que para outros autores que se relacionam com o *behaviourismo*, tais como os que cunharam teorias relacionadas com o condicionamento operante. As raízes *behaviouristas* de Bandura, que consideramos um *neo-behaviourista*, ainda o fazem dar um relevo especial aos esquemas de reforço. Mas já tem em consideração fatores como a personalidade e a situação em que os indivíduos estão, algo que era ignorado pelos *behaviouristas*, que advogavam as vantagens da aprendizagem por condicionamento operante. Assim, Bandura já salienta a importância das formas de atuação e das expetativas, aspetos particularmente relevantes para a aprendizagem e para o desenvolvimento em contextos escolares.

No que se refere à relação entre aprendizagem e desenvolvimento, para a abordagem *behaviourista* não é feita uma distinção entre estes dois conceitos, uma vez que concebem a aprendizagem como a formação de hábitos, por condicionamento, sendo também assim que os sujeitos se desenvolvem. A negação do interesse de estudar o que não era diretamente observável não os interessou por processos como o raciocínio, não os levando, por exemplo, a considerar a existência de um desenvolvimento estruturado, que pudesse ser explicado através de um modelo de estádios, sucessivos e progressivamente mais complexos. Como tal, para estes autores, o que lhes importava estudar eram técnicas de promoção do condicionamento, fosse este operante (Skinner, 1974/1988) ou vicariante (Bandura, 1977). Daí que, em contexto escolar, sobretudo no que se refere à educação formal, o que advoguem sejam práticas em que o treino é prioritário e a associação estímulo-resposta, seguida de reforço, promove as aprendizagens.

3.1.2. Abordagem *gestaltista*

Para a *gestalt*, o todo é mais do que a soma das partes. Esta é uma das afirmações que ilustra que esta abordagem critica e se opõe à abordagem *behaviourista*, segundo a qual uma tarefa podia ser decomposta em componentes cada vez mais simples e, depois, somando as diversas pequenas partes aprendidas, conseguiríamos reconstituir o todo. Também Morin (2001) corrobora esta posição, afirmando que "o todo tem um determinado número de qualidades e de propriedades que não aparecem nas partes quando estão separadas. Esta ideia contém a noção de emergência, a emergência de qualidades constitutivas da organização como um todo” (p. 494).

Koffka (1924/1999), aplicando a psicologia *gestaltista* à psicologia da criança, considera que esta começa por ter experiências relacionadas com todos organizados, que ela reconhece num mundo pouco diferenciado, como aquele que caracteriza os primeiros meses de vida de um bebé. Assim, sendo o indivíduo um todo, deveríamos estudar, de forma integrada, o desenvolvimento cognitivo, moral, social e emocional e é apenas por questões de facilidade de estudo que alguns autores se debruçaram apenas, ou mais aprofundadamente, sobre uma destas componentes. Mas não porque elas não interajam entre si e não se desenvolvam de forma interligada.

Segundo Koffka (1924/1999),

> Falamos de desenvolvimento sempre que um organismo ou qualquer órgão, em particular, se tornar maior, mais pesado, mais finamente estruturado ou mais capaz de funcionar. Devemos, no entanto, diferenciar dois tipos de desenvolvimento: desenvolvimento como crescimento ou maturação e desenvolvimento como aprendizagem. (p. 40)

Para este autor, o desenvolvimento, a que podemos também chamar crescimento e maturação, depende de características hereditárias, mas não é independente do meio ambiente pois, por exemplo, a subnutrição pode influenciar o crescimento e a maturação, levando a que os mesmos se processem de forma mais lenta. Deste modo, a *gestalt*, ao considerar o indivíduo como um todo, assumiu também uma perspetiva que, hoje em dia, poderíamos designar como holística e ecológica, ou seja, em que os diversos elementos interagem para explicar o desenvolvimento, mesmo quando se trata, sobretudo, de desenvolvimento físico, mais diretamente ligado ao crescimento e à maturação.

Quanto ao segundo tipo de desenvolvimento, visto como aprendizagem, Koffka (1924/1999), afirma que “como aprendizagem, contudo, designamos um tipo de mudança nas capacidades, resultantes de atividades individuais bastante definidas” (p. 41). Esta definição ilumina dois aspetos que nos parece importante realçar. Por um lado, que aprender muda as capacidades do indivíduo, ou seja, que transforma essas mesmas capacidades, tornando o mesmo mais funcional, como Koffka salientava na primeira citação que acima transcrevemos. Por outro lado, essas mudanças não são obra do acaso, nem são inatas e pré-determinadas. Elas resultam da atividade do indivíduo, o que realça o papel da ação, do sujeito ser ativo na sua própria aprendizagem, o que é coerente com outro aspeto que a *gestalt* assumia: a importância dos *insights* e da aprendizagem por descoberta (Köhler, 1947/1992). Ao realçarem o papel da atividade para a aprendizagem, estão também a considerar a importância da relação entre o indivíduo e o meio, pois essa atividade exerce-se num determinado espaço e tempo, num determinado meio físico e relacional.

Para a *gestalt*, a maturação prepara e torna possível a aprendizagem. Por outro lado, esta estimula e impulsiona o processo de maturação, o que ilustra o carácter dialético desta abordagem. Porém, como salienta Koffka (1924/1999), "O duplo aspeto do desenvolvimento torna difícil (...) a solução do problema que se relaciona com que parte de cada desempenho é herdada e que parte é adquirida" (p. 42). Assim, se ambos jogam um papel importante nos desempenhos – e, por consequência, na aprendizagem – como afirma este autor, "esta diferenciação [entre o que é hereditário e o que é adquirido] é extraordinariamente difícil" (Koffka, 1924/1999, p. 42). Assim, a *gestalt* identificou aspetos que seriam, depois, retomados por outros autores, como Vygotsky (1934/1962) ou Piaget (1936, 1950, 1971/2010) e que configuraram algumas das sustentações teóricas que utilizamos na interpretação dos resultados. Por exemplo, no que se refere à maturação de determinadas funções, Vygotsky (1934/1962), influenciado pelo *gestalt,* cunhou dois dos conceitos mais relevantes do ponto de vista da compreensão do desenvolvimento sócio-cognitivo, que designa por nível de desenvolvimento real e nível de desenvolvimento potencial, ou seja, as funções já amadurecidas e que conseguimos mobilizar quando resolvemos tarefas e situações de forma autónoma, por oposição às que ainda se encontram sem estar amadurecidas e que não conseguimos mobilizar quando trabalhamos individualmente. A distinção entre estes dois níveis de desenvolvimento permite que esta teoria tenha um carácter prospetivo, isto é, que se possa prever as funções que, daí por algum tempo, terão transitado do nível de desenvolvimento potencial para o nível de desenvolvimento real. Este aspeto é particularmente relevante do ponto de vista pedagógico para um professor que pretenda contribuir para o acesso dos alunos a uma educação de qualidade (César, 2009, 2013a, in press a, in press b; Machado & César, 2012a).

Esta distinção permitiu-lhe cunhar um outro conceito central nesta teoria: a zona de desenvolvimento proximal (ZDP). Para este autor, a ZDP é a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial, considerando que estes três conceitos são dinâmicos, ou seja, o que hoje é desenvolvimento potencial pode, mais tarde, por ação de pares mais competentes com os quais trabalhamos na ZDP, transformar-se em desenvolvimento real. Como Vygotsky (1932/1978) afirmou,

> Propomos que uma característica essencial da aprendizagem é a criação da zona de desenvolvimento proximal; isto é, a aprendizagem desperta uma variedade de processos de desenvolvimento que são capazes de operar somente quando a criança está interagindo com as pessoas no seu ambiente e em colaboração com os seus pares. (p. 90)

Neste contexto, as interações dialógicas (Renshaw, 2004) e as ferramentas culturais às quais cada indivíduo tem acesso possibilitam a própria aprendizagem e, assim, o desenvolvimento. A ZDP é criada no decorrer da colaboração que emerge entre pares, ou seja, entre indivíduos em inter-ação, grafia que realça, por um lado, a importância atribuída às interações sociais, mas também à emergência de uma ação conjunta, ou seja, ao aspeto da atuação do indivíduo, que já tinha sido salientado por Köhler e pelos *gestaltistas*, em geral. Como afirma Coll (1994),

> O traço essencial da aprendizagem é que engendra a zona de desenvolvimento potencial, ou seja, que faz nascer, estimula e ativa na criança um grupo de processos internos de desenvolvimento dentro do domínio das inter-relações com os outros, que a seguir são absorvidos pelo curso interno do desenvolvimento e se convertem em aquisições internas da criança (…). O processo de aprendizagem é uma fonte de desenvolvimento que ativa novos processos que não poderiam desenvolver-se por si mesmos sem a aprendizagem. (p. 93)

Desta forma, podemos entender o desenvolvimento como responsabilidade coletiva, uma vez que a aprendizagem ocorre, necessariamente, num contexto social (Vygotsky, 1934/1962, 1978/1997). Para este autor, a aprendizagem está presente desde o início da vida de qualquer indivíduo. Qualquer situação de aprendizagem tem um *background* histórico e cultural mas, ao mesmo tempo, produz algo inteiramente novo no desenvolvimento do indivíduo (Daniels et al., 2007). Porém, para que tal aconteça, existe um elemento essencial: a mediação (Daniels, 2008). Segundo Wertsch (2007), "em vez de atuarmos diretamente sobre o mundo social e físico, o nosso contato com o mundo é indireto ou mediado por signos" (p. 178), isto é, a construção do conhecimento resulta da interação mediada por vários elementos (sistemas simbólicos, ferramentas culturais, pessoas, entre outros). Como ainda acrescenta este autor, a noção de mediação configura a interligação entre os processos culturais e históricos e os processos mentais de cada indivíduo, tornando-os em algo histórico-culturalmente situado. Assim, podemos afirmar que a aprendizagem é concebida como uma forma de iluminar e fortificar o processo de desenvolvimento, colocando ao seu dispor as ferramentas culturais que permitem ao indivíduo ampliar as suas próprias potencialidades, bem como reestruturar as funções mentais complexas. Nesta perspetiva, a aprendizagem decorre do constante diálogo entre o exterior e o interior do indivíduo, ou seja, entre o nível social (inter-psicológico) e individual (intra-psicológico) (Daniels, 2001, 2008; Daniels et al., 2007; Tryphon & Vonèche, 1996; Vygotsky, 1932/1978, 1934/1962).

Embora a teoria de Vygotsky tenha diversos pontos de contato com a de Piaget e estas possam, em muitos aspetos, ser vistas como complementares e não como antagónicas (Tryphon & Vonèche, 1996), no que se refere à relação entre desenvolvimento e aprendizagem estes dois autores assumem posições opostas. Para Piaget, em sentido lato, a aprendizagem pode confundir-se com o desenvolvimento. Porém, para este autor, a aprendizagem é função do desenvolvimento, ou seja, é preciso um nível mínimo de desenvolvimento para que determinadas aprendizagens possam ocorrer (Lourenço, 1994; Piaget, 1947, 1964/1997, 1971/2010) A relação entre aprendizagem e desenvolvimento, numa abordagem vygotskiana, tem como ponto de partida a argumentação de que o indivíduo se desenvolve na constante interação dialética com os vários contextos culturais em que participa. Para Vygotsky (1934/1962), o desenvolvimento é função da aprendizagem. Como realça Coll (1994), referindo-se à teoria deste autor, "O processo de desenvolvimento não coincide com o de aprendizagem, o processo de desenvolvimento segue o de aprendizagem" (p. 93). Isso leva César (2013a, 2013b) a considerar que, nesta abordagem, o desenvolvimento é configurado pelas oportunidades de aprendizagem a que temos acesso nas trajetórias de participação ao longo da vida e que as questões relacionadas com a voz e o poder jogam um papel essencial nessas mesmas oportunidades.

3.1.3. Abordagem sócio-construtivista

A abordagem sócio-construtivista, como o nome indica, dá especial relevo aos aspetos sociais e à construção do conhecimento. Assim, assume que não nos desenvolvemos, nem aprendemos no vazio social (Perret-Clermont, Carugati, & Oates, 2004) e que as diversas capacidades e competências se desenvolvem ao longo do tempo, num processo dinâmico. Isto significa que esta abordagem salienta o carácter social do desenvolvimento e da aprendizagem mas, também, que a inteligência se constrói, ou seja, como afirmava Piaget (Bringuier, 1977) em relação ao que pretendia estudar: como se passava de um estado de menor conhecimento para um de maior conhecimento.

Alguns dos autores que subscrevem esta abordagem estudaram aspetos específicos do desenvolvimento, como Piaget, que estudou sobretudo o desenvolvimento cognitivo (Piaget, 1924, 1926, 1936, 1971/2010), embora também abordasse brevemente o desenvolvimento moral (Piaget, 1923), ou Kohlberg (1976), que se dedicou sobretudo à investigação sobre raciocínio moral. No entanto, nenhum destes autores nega que as diversas componentes do desenvolvimento se inter-influenciam e que, por isso mesmo, o desenvolvimento é um processo complexo e multifacetado, configurado por diversos elementos, entre eles a maturação e as interações sociais.

Nesta investigação, quando nos referimos ao desenvolvimento de um indivíduo estamos a considerar os diversos tipos, que ocorrem simultaneamente e se inter-influenciam como, por exemplo, o cognitivo, o social, o moral, ou o emocional. Um indivíduo não desenvolve separadamente as suas capacidades e competências cognitivas, sociais ou emocionais. Podem existir ritmos diferentes, para cada uma destas componentes, em determinados momentos do desenvolvimento. Mas, como afirma J. Santos (2007),

> o desenvolvimento é um processo dinâmico que se inicia com o nascimento da criança, que envolve o bebé e a mãe, o bebé e a família, num conjunto de acções contínuas e harmónicas e que como tal de ser compreendido e aplicado. Quer dizer, que deve ser integrado pelos movimentos espontâneos que envolvem crianças e adultos dum certo tipo de cultura, isto é, num sistema de relações entre pessoas. (p. 19)

Esta é a abordagem que assumimos e que, apesar de ser explicitada por um psicanalista, tem subjacente a alargada formação humanista deste autor, que incluía uma licenciatura em educação física e o exercício da profissão de professor e, por isso mesmo, lhe permitiu conceber o desenvolvimento numa perspetiva global. Esta globalidade inerente ao desenvolvimento é, também, referida por Wallon (1979a, 1979b), com quem João dos Santos chegou a trabalhar e que influenciou uma parte da teoria que veio a conceber, nomeadamente na importância de que se reveste o brincar, para os mais novos, enquanto forma de promoção do desenvolvimento da criança. Tal como João do Santos, Wallon (1979a, 1979b) não é assumido como um dos autores que cunharam esta abordagem, visto que ambos têm formações iniciais em medicina e não em psicologia. No entanto, Wallon (1979a, 1979b) é um autor relevante na conceção de desenvolvimento que assumimos e que, atualmente, designaríamos por ecológica ou holística. É este tipo de abordagem que justifica a triangulação de teorias que efetuámos quando construímos o quadro de referência teórico desta investigação.

Quando nos focamos na teoria de Piaget (1923, 1924, 1936, 1950, 1964/1997, 1967, 1971/2010), apercebemo-nos de que este autor se propôs estudar o processo de desenvolvimento, cognitivo ou moral, e não a aprendizagem. Aliás, este autor salientou, por diversas vezes, que não tinha desenvolvido nenhuma teoria da aprendizagem (Bringuier, 1977), apenas tinha escrito sobre as consequências da sua teoria do desenvolvimento para a aprendizagem. Mas, o que ele pretendia era criar um modelo que explicasse o processo de desenvolvimento, sobretudo desde o nascimento até ao final da adolescência. Daí que, para este autor, o sujeito não seja um indivíduo real, mas um sujeito epistémico, isto é, um sujeito "que funciona como um referencial teórico, que evidencia o que há de comum, o que é universal" (César, 2000b, p. 15). Isso também o levou a conceber provas piagetianas e um método de estudo do desenvolvimento infantil – o método clínico piagetiano – que lhe permitiam identificar diversos estádios de desenvolvimento, bem como desfasamentos verticais (entre estádios, com diferenças qualitativas, entre eles) e horizontais (dentro de cada estádio, em que as diferenças entre eles são quantitativas). Em síntese, o seu trabalho empírico procura evidências sobre o processo de desenvolvimento e não sobre a aprendizagem.

Piaget retoma a questão da maturação e da sua influência no desenvolvimento, algo que já tinha sido abordado pelos *gestaltistas*. Para este autor, há quatro fatores que influenciam o desenvolvimento: (1) maturação biológica; (2) experiência pessoal; (3) interações e transmissão social; e (4) equilibração (Piaget, 1971/2010). A importância da maturação biológica está relacionada com o sistema orgânico, apresentando um carácter hereditário, permitindo "a possibilidade a novas condutas as quais não se atualizariam se não houvesse interação com os fatores externos" (Pereira, Jesuíno, & Joyce-Moniz, 1979, p. 187). A experiência pessoal possibilita o contato com o mundo, com os objetos, ou seja, "a experiência depende mais da própria atividade do sujeito (assimilação) do que das propriedades do objeto (acomodação)" (Pereira et al., 1979, p. 189). Esta pode ser de dois tipos: experiência física ou lógico-matemática. A primeira permite ao sujeito aperceber-se das características dos objetos, isto é, "a experiência física consiste em agir sobre os objetos de maneira a descobrir as propriedades que ainda são abstratas nesses objectos" (Piaget, 1964/1997, p. 22). A experiência lógico-matemática gera um conhecimento independente das propriedades dos objetos (Pereira et al., 1979), sendo um fator essencial na consolidação dos esquemas operatórios intelectuais. A influência do meio social permite a assimilação ou a construção de novas regras, valores e conhecimentos, através das interações sociais que se estabelecem. Para Piaget, a influência do meio social deveria ser mediada por processos cognitivos internos de interpretação, seleção, ou julgamento, entre outros, realçando, desta forma, a centralidade funcional dos mecanismos de assimilação e de acomodação, ou seja, a capacidade de adaptação do sujeito. Mas qualquer um destes três primeiros fatores é uma condição necessária mas não suficiente para explicar o desenvolvimento.

Assim, o fator fundamental, segundo Piaget, para compreender o desenvolvimento, é a equilibração. Este é, também, um dos conceitos mais originais da teoria piagetiana. Na elaboração deste conceito nota-se a influência da Biologia, que constitui a sua formação inicial. A equilibração é concebida como um mecanismo interno, de retroação, semelhante ao que um ser humano utiliza para manter a temperatura do corpo constante, independentemente de estar num meio físico exterior mais frio ou mais quente. O que Piaget considera é que, do ponto de vista psicológico, mental, existem mecanismos de retroação – ou seja, de procura de um novo equilíbrio, semelhantes aos mecanismos biológicos que nos permitem reequilibrar a temperatura corporal quando a do meio externo se altera. Assim, a equilibração está relacionada com a manutenção de uma inter-relação entre os fatores endógenos (maturação) e os exógenos (experiência pessoal e aprendizagem social), que dão sentido ao próprio desenvolvimento (Piaget, 1967). Como salienta, o desenvolvimento é "em certo sentido, uma equilibração progressiva, uma passagem perpétua de um estado de menor equilíbrio a um estado de equilíbrio superior" (Piaget, 1971/2010, p. 13). Para este autor, a equilibração assume-se como um

> Processo conduzindo de certos estados de equilíbrio aproximado a outros qualitativamente diferentes, passando por múltiplos desequilíbrios e reequilíbrios. Estas reequilibrações só em certos casos constituem regressos ao equilíbrio anterior: as mais fundamentais para o desenvolvimento consistem pelo contrário em formações não só dum novo equilíbrio mas ainda em geral de um melhor equilíbrio, que se designará por "equilibração majorante". (Piaget, 1975, p. 9, aspas no original)

Desta forma, este conceito pode ser encarado como explicativo do dinamismo do desenvolvimento, uma vez que está relacionado com o permanente (re)equilíbrio entre os pólos funcionais da adaptação, os pólos funcionais da organização (estruturação interna do sujeito, que diz respeito à interação entre os diversos esquemas ou formas de atuação do sujeito) e entre a adaptação e a organização. Esta conceptualização vai para além das questões que tinham sido abordadas pela *gestalt*, quando discutia as relações entre a maturação e o que era adquirido. Porém, nota-se que Piaget foi influenciado, como ele próprio afirmava, pela abordagem *gestaltista* e que, à semelhança destes autores, se afastava e criticava a *behaviourista*. No entanto, ao considerar outros fatores de desenvolvimento, como a experiência pessoal e, sobretudo, a equilibração, construiu um modelo teórico do desenvolvimento muito mais complexo e que iluminava a importância dos processos comunicacionais no próprio desenvolvimento. Isso explica, também, a opção pelo método clínico piagetiano, nos trabalhos empíricos que realizou, pois este procura conjugar o rigor do método experimental – patente nos materiais, questionamento e procedimentos – com a importância dada à comunicação nas entrevistas clínicas, que ele procurou utilizar no modo como questionava e ouvia as crianças.

Para Piaget (1936, 1972), a aprendizagem refere-se às transformações do sujeito que não são explicáveis por fatores hereditários e que decorrem ao longo do tempo. Por isso mesmo, quando se refere aos *insights*, este autor não os considera como fazendo parte da aprendizagem, uma vez que estes são imediatos, ou seja, não são mediados pela dimensão temporal, que caracteriza qualquer processo de aprendizagem. A relevância dada por este autor à dimensão tempo salienta um aspeto essencial para ele: os processos são tão importantes como os produtos finais e, para se compreender quer a aprendizagem quer o desenvolvimento, é preciso analisar o modo como se desenrolam. Também é esta valorização que o leva, no modelo de desenvolvimento, a considerá-lo universal, quanto à ordem de sucessão dos estádios, embora os ritmos de desenvolvimento possam variar, de sujeito para sujeito, ou seja, efetuamos o percurso pela mesma ordem, mas os *timings* em que construímos os diversos esquemas de ação e as estruturas são variáveis.

Este autor considera existirem dois tipos de aprendizagem: (1) a aprendizagem em sentido restrito; e (2) a aprendizagem em sentido lato (Piaget & Gréco, 1959). A aprendizagem em sentido restrito é uma aquisição que não é imediata, baseada na experiência (que pode ser física ou lógico-matemática) e é feita através de um controle não sistemático. A aprendizagem em sentido lato "É um processo adaptativo desenrolando-se no tempo, em função das respostas dadas pelo sujeito a um conjunto de estímulos anteriores e atuais" (Piaget & Gréco, 1959, p. 27). Nesta conceção, a aprendizagem em sentido lato corresponde ao próprio desenvolvimento, tanto mais que este tipo de aprendizagem está relacionado com o aprender a estruturar os diversos objetos existentes em sistemas hierárquicos de classificação (Perret-Clermont, 1993). Assim, para Piaget, a aprendizagem em sentido lato corresponde à conjugação da aprendizagem em sentido restrito com a equilibração, sendo esta última conceptualizada como uma aquisição mediada pela dimensão tempo, que não é função da experiência e em que existe um controle não sistemático. Para este autor, quando as aquisições de conhecimentos são mediadas pela dimensão tempo, mas sujeitas a um controle sistemático, designam-se por indução (quando advêm da experiência) ou por dedução (quando não advêm da experiência). É nelas que se baseia o conhecimento científico, que se caracteriza, precisamente, por um controle sistemático.

Como realça Piaget (1964/1997), "o desenvolvimento é um processo essencial e cada elemento da aprendizagem ocorre como função do desenvolvimento total, em vez de ser um elemento que explica o desenvolvimento" (p. 20). Desta forma, entende-se a aprendizagem como função do desenvolvimento, ou seja, o sujeito aprende porque já se desenvolveu o suficiente para que uma determinada aprendizagem seja possível. Daí a máxima de Piaget (1972), inspirada em Rousseau (1762/1961), seja que "ganhar tempo em educação é, muitas vezes, perder tempo" (p. 58) pois, para este autor, quando se pretende ensinar a uma criança ou jovem algo que a sua estrutura cognitiva ainda não consegue assimilar e, depois, acomodar, isso pode bloquear o desenvolvimento em vez de o promover.

3.2. PRINCÍPIOS EPISTEMOLÓGICOS PARA PIAGET E VYGOTSKY

Os princípios epistemológicos são a base de qualquer teoria, pelo que se torna particularmente importante conhecê-los para podermos compreender os fundamentos filosóficos que presidiram à elaboração das mesmas. Mas, para além disso, os princípios epistemológicos que subscrevemos, enquanto professores e investigadores, configuram as práticas e, sobretudo, os implícitos e os jogos de poder, alguns deles ocultos, que são fundamentais na definição das trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a, 2013b). Referindo-se à formação de professores e à sua atuação enquanto docente, na formação inicial, César (2008) realça que:

> tentamos estabelecer um contrato didáctico em que o aluno se assuma como co-elaborador do seu próprio saber, cabendo ao professor dinamizar espaços/tempos de debate, reflexão e desenvolvimento de uma consciência epistemológica que nos parece essencial para que os futuros professores se venham a assumir como participantes

> activos e críticos de uma comunidade educativa. Deste modo, pretendemos proporcionar um espaço/tempo de formação em que os alunos possam vivenciar experiências de aprendizagem diversificadas, que constituam pontos de partida para uma reflexão crítica, mas que também os preparem para uma futura actuação, assumida como interventiva. (p. 41)

Analisando este excerto, o primeiro princípio epistemológico subjacente à própria maneira de escrever é o interacionismo, bem patente no "tentamos", quando o texto não é em co-autoria. Porém, se o texto é escrito apenas pela autora supramencionada, esta considera, como afirma repetidas vezes, nomeadamente nos agradecimentos, que o conhecimento e as trajetórias de participação ao longo da vida são co-construídos na interação social. Daí a opção por usar a primeira pessoa do plural, para iluminar esse carácter partilhado, dialógico, da construção do conhecimento. Este aspeto volta a estar patente no tipo de contrato didático estabelecido, em que o aluno co-elabora o seu próprio saber, como afirma esta autora. Porém, o que nos fez escolher este excerto foi, principalmente, a forma como expressa a necessidade dos professores e futuros professores se posicionarem como participantes críticos, baseando-se numa reflexão aprofundada e no desenvolvimento duma consciência epistemológica para sustentarem as formas de atuação e reação a que recorrem, nas práticas pedagógicas. Por subscrevermos esta necessidade, pareceu-nos fundamental clarificar os princípios epistemológicos que estão subjacentes às teorias de Piaget e Vygotsky e que, também por serem as que mais sustentam o instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), que iremos analisar no capítulo dos resultados. Isto significa que as decisões tomadas quanto à elaboração deste instrumento foram configuradas pelas opções epistemológicas que tinham presidido aos princípios assumidos pela equipa do projeto *Interacção e Conhecimento* e que estão explicitados, de forma detalhada, em Ventura (2012).

Desocultar os princípios epistemológicos subjacentes a estas teorias permite-nos, também, compreender que elas podem ser vistas como complementares e não como meramente opostas, tal como realça César (2008). Isso leva-nos a triangular teorias e a estabelecer conexões que, habitualmente, não são efetuadas, contribuindo para a construção do conhecimento. Para além disso, permite-nos, à semelhança de César (2008), conceber o desenvolvimento

> em termos de construção de instrumentos epistemológicos (Piaget & Garcia, 1983, 1987) e não enquanto uma mera aquisição cumulativa de conhecimentos ou

> comportamentos. É precisamente esta abordagem do desenvolvimento que permite fazer a ponte entre este e a aprendizagem, pois o que conta, nesta perspetiva desenvolvimentista, não é *quanto* se sabe, mas *como* se sabe. (p. 43)

É precisamente quando se valoriza mais o *como* se aprende do que apenas o *quanto* se aprende, quando se pretende que os alunos atribuam sentidos aos conhecimentos escolares, alargando os significados sociais que já lhes estão associados, que se torna particularmente importante clarificar os princípios epistemológicos subjacentes à investigação que realizámos e que se situam numa interface dialética entre os que são assumidos nas teorias desenvolvidas por Piaget (Piaget, 1950; Piaget & Garcia, 1983, 1987) e Vygotsky (1932/1978, 1934/1962). Ambas foram cunhadas baseando-se em três princípios epistemológicos que subscrevemos: o construtivismo, o estruturalismo e o interacionismo (César, 1994, 2000b; Daniels, 2008; Daniels et al., 2007; Lourenço, 2010; Vygotsky, 1934/1962). No entanto, para Vygotsky, o interacionismo assume características diferentes das consideradas por Piaget. Em qualquer dos casos, estes princípios epistemológicos indicam também, implicitamente, uma trajetória de participação ao longo da vida (César, 2013a), nomeadamente intelectual, como se pode observar em algumas das obras que analisam os fundamentos filosóficos destas teorias (Barrelet & Perret-Clermont, 1996; Daniels, 1998; Daniels et al., 2007; van der Veer & Valsiner, 1998).

3.2.1. Construtivismo

Na teoria desenvolvida por Piaget (1950, 1975), o construtivismo está associado à argumentação de que a inteligência se constrói, ou seja, de que passamos de estados de menor conhecimento para estados de maior conhecimento, bem como de que a equilibração é majorante, permitindo formas cada vez mais complexas de adaptação. Para este autor, o sujeito epistémico é um sujeito ativo, que constrói o seu próprio conhecimento. Daí que, quando se pronuncia sobre o que deve ser a Escola, baseando-se na sua teoria de desenvolvimento, afirme que esta deveria permitir aos alunos investigar, aprender por descoberta, manter a curiosidade e a criatividade, que são características que se observam frequentemente nas crianças mais jovens, mas também nos cientistas e inventores (Bringuier, 1977; Piaget, 1972). Assim, no processo de conhecimento do mundo que os rodeia, os indivíduos devem poder agir sobre os objetos e é esta ação que lhes dá a conhecer esses mesmos objetos (Lourenço, 2010; Müller, Carpendale, & Smith, 2009).

Para Inhelder e Caprona (1985), referindo-se à teoria de desenvolvimento de Piaget, "O construtivismo aparece como a posição epistemológica geral, para a qual convergem os métodos, fatos [que designaríamos por evidências empíricas] e análises da epistemologia genética, em que todos fazem apelo à ideia de construção" (p. 7). Este excerto ilustra um aspeto essencial: a coerência entre as opções teóricas e metodológicas, incluindo os procedimentos e o tratamento e análise de dados, aspeto fundamental para a sua descrição densa e interpretação. Mas, o próprio Piaget (1970) clarifica o sentido que atribui ao construtivismo quando elabora uma epistemologia genética que "é naturalista sem ser positivista, que põe em evidência a atividade do sujeito sem ser idealista, que se apoia no objeto mas considerando-o, também, como um limite (...) e que, sobretudo, vê o conhecimento como uma construção contínua" (p. 10). Aquilo que este autor designa por naturalista, é atualmente descrito como contextualizado, algo que ele procurou conseguir com o recurso ao método clínico piagetiano e às provas piagetianas, que se debruçavam sobre algumas atividades com recurso a materiais conhecidos das crianças, como a plasticina. A oposição ao positivismo e ao idealismo aproximam os princípios epistemológicos de Piaget aos de Vygotsky que, por influência da *gestalt*, bem como das teorias filosóficas de Engels e de Marx, também se afasta destes dois paradigmas. Para além disso, esta citação e o assumir o conhecimento, bem como o desenvolvimento, como uma construção contínua, baseada nos invariantes funcionais, permite-nos compreender que Piaget negava o inatismo e o empirismo.

Para Piaget, o desenvolvimento cognitivo envolve dois processos fundamentais: assimilação e acomodação, considerados como invariantes funcionais, ou seja, "funções que não variam ao longo do desenvolvimento e que o explicam" (Pereira et al., 1979, p. 90), que em conjunto são designados por adaptação (Lourenço, 2010; Piaget, 1936, 1971/2010). Desta forma, a adaptação está relacionada com as relações existentes entre o sujeito e o exterior, mas também com o construtivismo, princípio epistemológico subjacente a esta teoria do desenvolvimento. Como Piaget (1936) afirma,

> A concordância do pensamento com as coisas e a concordância do pensamento consigo mesmo exprimem essa dupla invariante funcional da adaptação e da organização. Ora, esses dois aspetos do pensamento são indissociáveis: é adaptando-se às coisas que o pensamento se organiza e é organizando-se que estrutura as coisas. (p. 1)

A assimilação envolve a incorporação de novos elementos ou situações numa estrutura cognitiva que já existe, ou seja, "incorporação de um elemento exterior (objeto, conhecimento, etc) num "esquema" sensório-motor ou conceptual do sujeito" (Piaget, 1975, p. 12, aspas no original). A acomodação tem subjacente que estruturas existentes se alterem para inter-relacionarem as novas informações com as já existentes na estrutura cognitiva, havendo uma tendência para que essas estruturas cognitivas se adaptem, o que corresponde a uma alteração de esquemas já construídos, ou a criação de outros totalmente novos. Assim, quando uma criança interage com um determinado objeto que para ela é desconhecido, ocorre um desequilíbrio da estrutura cognitiva, devido à assimilação, que origina um conflito cognitivo, até que haja condições de a criança acomodar os novos conhecimentos, atingindo-se um (re)equilíbrio.

Para Vygostky (1934/1962), o essencial não é o conflito cognitivo, mas sim as interações sociais e a atribuição de sentidos (Bakhtin, 1929/1981), mediada pelos artefactos culturais e pelo trabalho realizado na ZDP. Daí que, para este autor, o processo de adaptação seja designado por internalização, isto é, uma apropriação de conhecimentos aos quais atribuímos sentidos (Bakhtin, 1929/1981), que são individuais, próprios, e, por isso mesmo, distintos dos significados, que são sociais e partilhados. Mas, para que exista adaptação, o processo de internalização tem de ser complementado com a capacidade de mobilização, ou seja, ser capaz de utilizar aqueles conhecimentos, capacidades e/ou competências em situações futuras, realizando as transições que se afigurem pertinentes para que a pessoa possa atuar naquela nova situação, cenário ou contexto (César, 2013a).

3.2.2. Estruturalismo

O estruturalismo relaciona-se com a forma como se processa a construção de conhecimento: de forma estruturada e não ao acaso. Contudo, o carácter estruturado do desenvolvimento não significa que os fenómenos ocorram para todo e qualquer indivíduo de igual forma, pois se a ordem de sucessão dos estádios é constante, o ritmo de desenvolvimento é variável. Daí que, tanto Piaget (1970) como Vygotsky (1934/1962), subscrevam o estruturalismo mas não o determinismo.

Como sustenta Piaget (1967), "Um estádio é um nível particular, definido por três critérios – o nível é preparado pelo nível anterior e integrado no nível sucessor; ocorre numa ordem invariante independente da idade; todas as ações nesse nível têm a mesma organização" (p. 17). Assim, os estádios são caracterizados por uma estrutura de conjunto com características próprias, com uma ordem de sucessão constante e uma evolução integrativa, isto é, os conhecimentos adquiridos são integrados na estrutura seguinte, organizando-se, dando origem a uma nova estrutura hierarquicamente superior, ou seja, mais complexa e adaptada. Desta forma, para este autor, o desenvolvimento assume-se como algo contínuo – continuidade funcional –, mas comportando também uma descontinuidade estrutural devida à existência de quatro estádios de desenvolvimento, cada um com uma estrutura de conjunto qualitativamente diferente da do estádio anterior (Piaget, 1936, 1950). Assim, cada um deles começa pela existência de um desfasamento vertical, ou seja, da passagem de um tipo de inteligência para outro, qualitativamente diferente do anterior.

Segundo Piaget (1936, 1967) existem quatro estádios de desenvolvimento: (1) sensório-motor (que se desenrola, aproximadamente, dos 0 aos 2 anos); (2) pré-operatório concreto (2 aos 6/7 anos); (3) operatório concreto (6/7 aos 14/15 anos); e (4) operatório formal (a partir dos 14/15). O primeiro estádio é caracterizado por uma inteligência prática que se aplica à resolução de problemas da vida quotidiana e que coloca em jogo as perceções e o movimento. É uma inteligência baseada na ação e que é mesmo anterior à linguagem e ao pensamento. Como sustenta Piaget (1971/2010), esta inteligência

> aparece, com efeito, muito antes da linguagem, isto é, muito antes do pensamento interior que pressupõe o emprego dos sinais verbais (da linguagem interiorizada). É uma inteligência totalmente prática que incide na manipulação dos objetos e que não utiliza, na vez das palavras e conceitos, senão perceções e movimentos organizados em "esquemas de ação". (p. 22, aspas no original)

Desta forma, neste estádio assiste-se à construção dos primeiros esquemas de ação. Segundo Piaget (1967), os esquemas de ação são "aquilo que, numa ação, é transponível, generalizável ou diferenciável de uma situação para a seguinte (...) o papel do esquema é essencialmente o de assegurar a incorporação ou a assimilação de novos objetos à própria ação" (p. 16).

A passagem para o segundo estádio acontece quando surge a função semiótica, isto é, quando a criança é capaz de gerar imagens mentais de objetos ou ações e, através delas, chegar à representação, quer do objeto quer da ação. No segundo estádio, o pré-operatório concreto, a inteligência prática evolui para uma inteligência representativa, na qual o pensamento corresponde a uma ação interiorizada, assente na capacidade de simbolização (Lourenço, 2010; Pereira et al., 1979; Piaget, 1971/2010). Neste estádio, algumas das principais características do pensamento da criança são o egocentrismo e o animismo. Revela, também, uma utilização frequente da imaginação, intuição e de um discurso – e desenhos – com recurso à fantasia.

No terceiro estádio, o operatório concreto, a criança tem acesso a um pensamento lógico, com a capacidade de realizar operações mentais. Como afirmam Pereira e seus colaboradores (1979), "Para Piaget, as operações são definidas como acções interiorizadas de carácter reversível, ou seja, como transformações efectuadas pelo sujeito, de que resulta a modificação de certas variáveis e a conservação de outras – as invariantes" (p. 114). A reversibilidade é o elemento-chave para a existência da capacidade de operar. Assim, o conceito de operação é entendido como o "coordenar as transformações directas e inversas o que conduz a constatar quais as conservações daí resultantes" (Pereira et al., 1979, p. 114). Por exemplo, é neste estádio que a criança tem acesso à noção de número, embora possa já saber contar no estádio anterior, ou que entende que a adição e a subtração são operações inversas (ou seja, que 3+2 = 5 e que 5-2 = 3).

No quarto e último estádio, o operatório formal, surgem o pensamento abstrato e os raciocínios hipotético-dedutivos. Como argumenta Piaget (1971/2010),

> as operações lógicas começam a ser transportadas do plano da manipulação concreta para o plano dos simples ideais, expressas numa linguagem qualquer (a linguagem das palavras ou a dos símbolos matemáticos, etc), mas sem o apoio da perceção, da experiência. (p. 81)

Desta forma, neste estádio as estruturas cognitivas do adolescente alcançam o nível mais elevado de desenvolvimento. O adolescente torna-se capaz de utilizar o raciocínio lógico à resolução de problemas. Assim, os esquemas de ação são caracterizados pelas operações interiorizadas realizadas, mas já não apenas no plano concreto, podendo também recorrer ao abstrato. Por isso mesmo, ao ser capaz de levantar hipóteses, o real torna-se apenas mais um dos possíveis, alargando-se a sua capacidade de argumentação e intervenção no mundo, físico e relacional.

3.2.3. Interacionismo

O último princípio epistemológico – interacionismo – reveste-se de algumas diferenças quando confrontamos as teorias desenvolvidas por Piaget e por Vygotsky. Enquanto que, para Piaget, estamos perante uma interação entre um sujeito cognoscente (aquele que conhece) e um objeto cognoscível (o que é conhecido), para Vygotsky a interação acontece entre o sujeito e o mundo exterior, ou seja, entre o sujeito e a sociedade, representada pelos outros com quem ele pode interagir. Daí que se focalize nas interações sociais e considere que estas estão na base da aprendizagem e do desenvolvimento.

A teoria de Piaget considera que o conhecimento é construído na interação entre o sujeito e o objeto. Na medida em que este autor assume que o processo de construção do conhecimento é desencadeado pela ação do sujeito através dos mecanismos de adaptação e organização (Lourenço, 2010), essa interação pode ser representada por dois tipos de experiência que são indissociáveis: a experiência física e a experiência lógico-matemática. Como refere Piaget (1967),

> não existe experiência física, por mais elementar que seja, sem se estabelecer a relação ou correspondência, sem classificação, seriação ou medida, etc, logo num quadro dependente da experiência lógico-matemática. Reciprocamente, uma experiência de segundo tipo incide em objetos ao mesmo tempo que extrai da ação o essencial das suas abstrações. (p. 387)

Desta forma, o processo de construção do conhecimento é algo dinâmico, ocorrendo uma constante dialética entre sujeito e objeto. Assim, o objeto só é conhecido se o sujeito atuar sobre ele. Mas como qualquer objeto resiste a ser conhecido, o sujeito precisa de fazer aproximações sucessivas a um mesmo objeto para o conhecer melhor, sem que consiga, alguma vez, vir a conhecê-lo na totalidade (César, 1994, 2008; Piaget, 1970).

Esta argumentação não é visível na teoria desenvolvida por Vygotsky (1932/1978, 1934/1962, 1978/1997), na medida em que, para este autor, o conhecimento é exterior e pré-existente ao próprio sujeito, isto é, o conhecimento é social antes de ser apropriado e internalizado, ou seja, antes de se tornar pessoal. Daí que este autor comece por focar a existência de um plano inter-pessoal que, depois, se transforma em intra-pessoal e que saliente o papel fundamental das interações sociais na aprendizagem e no desenvolvimento.

Assim, para Vygotsky (1932/1978, 1934/1962, 1978/1997), a cultura é apropriada através dos jogos interativos que a criança estabelece com os seus pares ou, com maior frequência, com os adultos, sendo essas interações sociais mediadas por ferramentas culturais (Daniels, 2008; Daniels et al., 2007; Wertsch, 1991, 1998). Estas são também sociais, sendo utilizadas para comunicar com os outros, através do recurso a sistemas simbólicos partilhados pelos diferentes sujeitos de uma mesma sociedade ou grupo social. Estes sistemas simbólicos, bem como os artefactos culturais medeiam o contacto com a sociedade, ou seja, com os outros, permitindo-nos ter acesso ao conhecimento. Neste processo, as interações sociais desempenham um papel fundamental, podendo atuar como facilitador da apropriação dos conhecimentos. Contudo, há que ter em consideração que também podem bloquear esse mesmo acesso, pelo que se torna particularmente relevante estudar os processos interativos em jogo, assim como as relações de poder que lhes estão subjacentes.

Lourenço (2010) elabora uma síntese relativa a elementos que se afiguram semelhantes quando se confrontam as teorias desenvolvidas por Piaget e Vygotsky:

> Partilham uma perspectiva genética na compreensão dos fenómenos mentais
> Partilham uma abordagem dialéctica em termos de processos de desenvolvimento
> Partilham uma visão não reducionista na compreensão da consciência humana
> Partilham uma visão relacional entre a pessoa e outros sujeitos
> Defendem a primazia dos processos sobre os resultados externos
> Advogam a prioridade da acção na génese da inteligência e da consciência
> Partilham a ênfase nas mudanças qualitativas. (p. 111)

Em síntese: estas duas teorias partilham três princípios epistemológicos – construtivismo, estruturalismo e interacionismo – e iluminam inúmeros aspetos que se relacionam e que se complementam, contribuindo, desta forma, para compreender em profundidade os processos de desenvolvimento e de aprendizagem, nomeadamente em contexto escolar. Apesar das inúmeras críticas que Vygotsky (1934/1962) tece ao livro de Piaget que leu, não deixa de recorrer ao método clínico piagetiano em muitos dos estudos que realizou. Por isso, atualmente, diversos autores encaram-nas como teorias complementares, de cuja conjugação podem advir progressos, em termos de construção do conhecimento (Tryphon & Vonèche, 1996) e das práticas profissionais, nomeadamente em educação (César, 2009, 2013a; Perret-Clermont, 2004; Renshaw, 2004; Roth & Radford, 2011).

3.3. TRIANGULAÇÃO DE TEORIAS: PIAGET, VYGOTSKY, APRENDIZAGEM SITUADA E *DIALOGICAL SELF*

Para iluminar as relações entre aprendizagem e desenvolvimento construímos um quadro de referência teórico que articula diversas teorias, incluindo algumas que só recentemente têm vindo a ser conectadas: piagetiana, vygotskiana, aprendizagem situada e *dialogical self* (César, 2009, 2013a, 2013b). O recurso a estas teorias não só se afigura apropriado para podermos compreender os dados que iremos analisar no capítulo dos resultados, mas também permite iluminar aspetos desses mesmos dados que, caso optássemos apenas por uma destas abordagens teóricas, não conseguiríamos interpretar. Assim, a triangulação de teorias, que constitui um dos tipos de triangulação referidos por Guba e Lincoln (1997), enquanto critério de qualidade da investigação interpretativa, permite construir um quadro de referência teórico inovador, articulado e consistente, adequado ao tipo de contexto e de dados com que trabalhamos. Para além disso, a conjugação destas teorias permite iluminar contributos essenciais para o desenvolvimento de práticas, em aula, que promovam o acesso dos alunos às ferramentas culturais da Matemática (César, 2009, 2013a; N. Santos, 2008; Vygotsky, 1934/1962), tornando-os capazes de recorrerem a essas mesmas ferramentas, quando confrontados com outros contextos, cenários e/ou situações, como as que vivenciam no quotidiano.

3.3.1. Educação enquanto processo social

Dewey (1897/2008) salienta que "a educação é um processo social" (s.p.), tornando clara a importância que as interações sociais assumem nos processos de desenvolvimento e de aprendizagem, pólos essenciais da educação. Também Hamido (2005) realça "o papel fundamental do meio social e cultural na construção da identidade e do conhecimento" (p. 166), ou seja, a influência do(s) outro(s) e das (inter)ações que com eles partilhamos e que contribuem para o desenvolvimento e aprendizagem. Muitos outros autores salientam que não nos desenvolvemos nem aprendemos no vazio social e que, por isso mesmo, as interações sociais são essenciais nestes dois processos, podendo funcionar como facilitadores da apropriação de conhecimentos ou do desenvolvimento de capacidades e competências (César, 1994, 2000b; Grossen & Py, 1997; Mugny, 1985; Perret-Clermont, 1992; Perret-Clermont & Nicolet, 1988; Resnick, 1991).

Para Piaget (1936, 1964/1997, 1967, 1975), o progresso do conhecimento traduz-se numa adaptação crescente ao meio. O processo de desenvolvimento, do ponto de vista ontológico, começa pelos sentidos e pela motricidade, dando origem a esquemas de ação e a conhecimentos característicos de uma inteligência prática, de ação, própria do primeiro estádio de desenvolvimento cognitivo: o sensório-motor. Depois, no estádio seguinte, o pré-operatório concreto, a criança começa a construir um conhecimento subjetivo e intuitivo, característico de uma inteligência que ainda se rege por alguma fantasia, quando as crianças ainda não são capazes de operar, nem têm acesso à reversibilidade. A entrada no estádio operatório concreto, como o nome indica, dá-lhes a possibilidade de operar, o que lhes permite atingir um conhecimento mais objetivo da realidade, embora ainda limitado à possibilidade de manipulação do real. No último estádio, o operatório formal, o mundo e o pensamento passam a ser representáveis em termos abstratos, havendo uma expansão da capacidade de argumentação.

Para este autor, o desenvolvimento processa-se através de dois invariantes funcionais: a assimilação e a acomodação. Também a aprendizagem precisa de colocar em ação estes dois mecanismos. Para Piaget (1972), o essencial seria permitir à criança descobrir por si própria, deixando-lhe uma margem considerável de autonomia, de decisão. Porém, a Escola, enquanto contexto formal de aprendizagem e instituição onde a educação se processa de forma massificada, tem dificuldade em conceber graus de autonomia e descoberta muito elevados. Daí que a utilização dos princípios piagetianos à educação tenha, tantas vezes, consistido numa negação do que este autor considerava basilar: o papel ativo dos sujeitos na construção do seu próprio conhecimento; o respeito pelos ritmos de desenvolvimento de cada criança; e a capacidade de dialogar com ela e de a escutar, para nos apercebermos de como pensa e do que já compreende do mundo.

Considerando a educação um processo social e não esquecendo que Piaget deu especial relevo, em algumas obras, ao papel desempenhado pela comunicação (Piaget, 1977/1995), os professores devem conceber a educação pensando cuidadosamente a comunicação, como também realça César (2000b). Para além disso, as tarefas escolares, em especial as tarefas matemáticas, devem ser elaboradas, adaptadas ou selecionadas por forma a facilitarem a assimilação e a acomodação. A assimilação permite aos alunos introduzirem novos conhecimentos na estrutura cognitiva. Porém, para serem capazes de os utilizar posteriormente, é necessário que eles realizem a acomodação, relacionando-os com outros conhecimentos que, anteriormente, já fizessem parte dessa mesma estrutura cognitiva. Para facilitar o processo de acomodação, os alunos necessitam de explorar, manipular, experimentar, questionar e procurar soluções para as mais variadas situações problemáticas. Desta forma, o papel ativo que os alunos devem assumir nos processos de aprendizagem e na construção do conhecimento é essencial. Como Piaget (1972) afirmou, "compreender é reinventar, ou reconstruir por reinvenção" (p. 24). Por outro lado, o papel que as interações sociais desempenham neste processo de construção de conhecimento é realçado por este autor, como afirmam Perret-Clermont, Carugati e seus colaboradores (2004): “Piaget encara as interações sociais como facilitadores fundamentais no desenvolvimento cognitivo” (p. 308).

Para sermos coerentes com a importância atribuída às interações sociais nos processos de ensino e de aprendizagem, devemos interessar-nos particularmente pelos processos de construção do conhecimento, ou seja, pelas estratégias de resolução e raciocínios subjacentes aos desempenhos matemáticos dos alunos. Isto não significa negar a importância dos produtos. Mas não nos devemos focar exclusivamente neles, omitindo a importância dos processos. Daí que Piaget realçasse o papel da investigação na aprendizagem (Bringuier, 1977) e que, atualmente, se dê especial atenção a tarefas como a resolução de problemas (Matos, 2008), os trabalhos de projeto (Abrantes, 1994), ou os micro-projetos interculturais (Favilli et al., 2004) para a aprendizagem da matemática escolar. Esta valorização dos processos contribuiu para a desdramatização do erro, visto como uma parte da própria aprendizagem e, sobretudo, da descoberta e investigação. Quando se estuda o novo, o ainda desconhecido, explorar caminhos, hipóteses ou estratégias de resolução que, depois, não se revelam as mais adequadas, faz parte do processo de aprendizagem. O que é necessário é desenvolver nos alunos mecanismos de verificação das estratégias de resolução selecionadas, capacidade de resistência à frustração e de persistência nas tarefas, pois quanto mais desafiantes estas se revelam, mais podem ser longas e faseadas, antes de se chegar a um produto final. Porém, como afirmam Boston e Wolf (2006) e Garrison (2011), a aprendizagem, em particular da Matemática, deve ser efetuada com base em tarefas de elevada exigência cognitiva. Mas, acrescentaríamos nós, de acordo com Piaget, as práticas docentes, em aula, devem facilitar a acomodação e, por isso mesmo, promover interações sociais entre os alunos e o professor, bem como entre pares, aspeto que alguns autores neo-piagetianos também realçaram (Doise, Mugny, & Perret-Clermont, 1975, 1976) em relação às provas piagetianas e ao desenvolvimento cognitivo, e que outros utilizaram na educação, como César (1994) ou Carvalho (2001).

A relevância das interações na educação, em geral, e na educação escolar, em particular, ganha especial importância quando se conjuga a teoria elaborada por Piaget com a de Vygotsky (1932/1978, 1934/1962). Ao considerarem ambos que a inteligência se constrói, o papel desempenhado pelo meio, nomeadamente o meio relacional, assume particular relevo. Porém, Vygotsky (1934/1962) cunhou um conceito fundamental para a educação: a zona de desenvolvimento proximal (ZDP), que permite aos professores promover a apropriação de conhecimentos através da interação entre pares e, assim, contribuírem para que algumas funções mentais ainda não amadurecidas, que fazem parte do nível de desenvolvimento potencial dos alunos, passem, depois, a estar amadurecidas e a fazer parte do nível de desenvolvimento real. Assim, conjugando estas duas teorias, podemos expandir o conceito de acomodação, considerando-a não só uma inter-relação entre os conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva e os novos conhecimentos, mas também uma possibilidade de acomodar novas estratégias de resolução, utilizadas pelos pares com quem interagimos, e sobre as quais não teríamos pensado, caso nos encontrássemos a trabalhar individualmente.

Para Vygotsky (1934/1962), o desenvolvimento das crianças não deve ser entendido como um processo isolado e individual, mas antes como um processo de aculturação através do mundo social e cultural externo, no qual o ser humano se desenvolve. Assumindo uma perspetiva histórico-cultural (Vygotsky, 1932/1978, 1934/1962, 1978/1997), as aprendizagens desejáveis são as que precedem o desenvolvimento, ou seja, as que contribuem para que o que hoje se encontra no nível de desenvolvimento potencial venha, no futuro, a fazer parte do nível de desenvolvimento real. Esta conceptualização faz aumentar os benefícios da aprendizagem, passando a educação, inclusive a educação formal, em contexto escolar, a ter uma responsabilidade acrescida, pois além de promover a apropriação de conhecimentos, deve também contribuir para o desenvolvimento sócio-cognitivo e emocional dos alunos.

3.3.2. Transições entre contextos, cenários e situações

Quando se conceptualiza o desenvolvimento, a aprendizagem e a educação como processos sociais, nos quais as interações sociais desempenham um papel fundamental, é importante realçar a importância da mediação na apropriação de conhecimentos e, para além disso, a necessidade de os alunos atribuírem sentidos aos conhecimentos escolares que apropriam. Para Vygotsky (1934/1962), para apropriar conhecimento, é preciso que eles deixem de ser meramente exteriores ao sujeito, ou seja, que ele os internalize. Mas o processo de internalização tem subjacente a necessidade de lhes atribuir um sentido – aquilo que Piaget designaria por acomodação. Mas, como explicitou César (2000b), expandindo este conceito, a acomodação comporta dois momentos: um primeiro momento, em que relacionamos o novo conhecimento com os que já faziam parte da estrutura cognitiva; e um segundo momento, em que este novo conhecimento, perante uma nova situação problemática, consegue ser usado para a resolver. Esta expansão feita à noção de acomodação tem uma nítida influência de Vygotsky (1934/1962): o primeiro momento corresponde ao que este autor designa por internalização; e o segundo momento ao que atualmente designamos por mobilização de capacidades e competências. Assim, para que este duplo processo de acomodação, ou para que a mobilização seja possível, é necessário que os sujeitos sejam capazes de realizar transições, isto é, que perante as características da nova situação problemática consigam utilizar os conhecimentos que apropriaram noutras situações, com características diferentes daquela em que então se encontram. Este processo – transição – realça o carácter situado e cultural das aprendizagens e do desenvolvimento.

Também para Nuthall (1999), a aprendizagem envolve a construção de ligações ou transições, como designam Abreu e seus colaboradores (2002) ou Zittoun (2006), entre os conhecimentos apropriados em contextos de educação formal, nos seus diversos cenários, como a sala de aula, e os conhecimentos que cada um apropriou em espaços extra-escolares (*background knowledge*). Mas, como César (2009, 2013a, 2013b) salienta, as aprendizagens, escolares ou não, são configuradas pelas experiências vivenciadas nas diversas culturas em que cada indivíduo participa. Ao considerar que tanto a acomodação, nos seus dois momentos, como as transições são situadas, ou seja, influenciadas pelas diversas culturas e contextos, César (2013a) conceptualiza a transição como um processo que pressupõe uma reinterpretação da situação e do próprio conhecimento, bem como um reposicionamento. Assim, distingue-se do *transfert*, que corresponde a (re)utilizar aquele conhecimento exatamente como era, sem que uma nova atribuição de sentido seja necessária. É precisamente esta necessidade de reinterpretação que ilumina o carácter social da aprendizagem e do desenvolvimento, pois não seria possível reinterpretar e reposicionarmo-nos sem a existência do outro, com quem interagimos.

Zittoun e Perret-Clermont (2009) realizaram um estudo que pretendia, precisamente, construir uma síntese conceptual relativamente à relevância das interações sociais do desenvolvimento e aprendizagem, iluminando a necessidade de transições quando pretendemos reutilizar conhecimentos que apropriámos e capacidades que desenvolvemos noutros contextos. Estas autoras realçam a importância das dinâmicas existentes nos processos de desenvolvimento, e por conseguinte, nos de aprendizagem, e propõem-se analisar o desenvolvimento segundo quatro lentes do conhecimento que se complementam. A primeira está relacionada com o triângulo psicossocial que ilumina as interações sociais que poderão ocorrer durante os processos de desenvolvimento. Este triângulo é formado pela pessoa (*person*), objecto (*object*) e o outro (*other*). Esta perspetiva encara a aprendizagem como "requerendo dois participantes (*pessoa* e o *outro*) e um *objeto* do discurso em comum e as relações dinâmicas através das quais o objeto pode ser construído e os papéis e posições negociadas" (Zittoun & Perret-Clermont, 2009, p. 388, itálico no original). Assim, este olhar sobre a aprendizagem parte de uma conceção construtivista, na qual esta é assumida como um processo de assimilação e acomodação em que os sujeitos modificam as estruturas cognitivas internas com base nas experiências pessoais que vão vivenciando e estende-a, na medida em que assume que, em certas circunstâncias, as interações sociais podem promover situações de desequilíbrio e reequilíbrio, isto é, situações de conflito sócio-cognitivo (Doise & Mugny, 1981).

A segunda perspetiva, designada por moldura (*frame),* está relacionada com as regras, explícitas e implícitas que existem em qualquer situação onde se desenvolvem as interações sociais ou dialógicas. Zittoun e Perret-Clermont (2009) afirmam que esta moldura é "feita de regras implícitas e explícitas e cria obrigações e expetativas mútuas" (p. 390), pelo que está relacionada com os contextos, cenários e/ou situações onde ocorre. Desta forma, poder-se-á dizer que as interações emergem numa moldura de uma moldura (*frame of the frame*), isto é, ocorrem em contextos que dão sentido e legitimam as formas de ação e de reação. Por exemplo, a Escola é a moldura da moldura de uma interação que se estabelece na sala de aula. Esta forma de olhar para os processos de desenvolvimento e de aprendizagem legitima um dos aspetos abordados na teoria vygotskiana (Vygotsky, 1934/1962) que refere que a ação humana, quer no plano individual quer no social, é mediada por ferramentas e signos (Wertsch, 1991, 1998).

A terceira perspetiva está relacionada com a noção de transição (Zittoun & Perret-Clermont, 2009). Estas autoras referem que, "habitualmente uma dada pessoa move-se de uma moldura para outra e que o desenvolvimento requer a capacidade de mobilizar ou reinventar conhecimentos numa nova situação" (Zittoun & Perret-Clermont, 2009, p. 388), o que significa que a relação existente entre pessoa e objeto tem que ser definida de novo. Desta forma, os processos de aprendizagem devem permitir a redefinição dessa relação, promovendo a mobilização de conhecimentos numa nova situação e, ao mesmo tempo, a apropriação de novos conhecimentos.

A última perspetiva, designada por prisma (*prism)*, acrescenta um novo vértice à primeira, que estas autoras designam por ferramenta cultural (Zittoun & Perret-

Clermont, 2009). Qualquer interação que estabelecemos com o meio envolvente é mediada por ferramentas culturais (Vygotsky, 1934/1962), pelo que, segundo estas autoras, devem ser consideradas nas dinâmicas estabelecidas entre a pessoa e o objeto, isto é, quando se estudam os processos de desenvolvimento e de aprendizagem.

A argumentação decorrente do trabalho desenvolvido por Zittoun e Perret-Clermont (2009) leva-nos a considerar a relevância dos contributos da conjugação das teorias piagetiana, vygotskiana e da aprendizagem situada nos processos de aprendizagem. Ao considerar a sala de aula de Matemática como um microcosmo da sociedade (Roth & Radford, 2011), estamos a realçar o papel das práticas, em aula, como facilitador (ou bloqueador) da apropriação de conhecimentos (matemáticos) e do desenvolvimento de capacidades e competências (matemáticas) que permitam aos alunos, no futuro, participar ativamente na sociedade. Desta forma, cabe aos professores "serem capaz, antes de ensinar o que sabem, procurar saber o que a criança previamente já sabe" (J. Santos, 2007, p. 51). Esse saber tem que necessariamente passar, não só pelos conhecimentos apropriados, como também, pelas capacidades e competências que os alunos já conseguem mobilizar. Assim, são tomados como ponto de partida esses conhecimentos que os alunos apropriaram anteriormente, ou seja, o *background knowledge* de cada um (Nuthall, 1999). Isso permite ao professor elaborar, adaptar ou selecionar tarefas matemáticas que permitam aos alunos trabalharem na ZDP de cada um deles (Vygotsky, 1934/1962).

3.3.3. Expandindo a conceção de contexto e participação

A aprendizagem situada considera que o conhecimento é apropriado num determinado contexto, assumindo sentidos próprios para cada participante (Lave & Wenger, 1991). Porém, a maior inovação desta teoria é considerar que o contexto não é algo exterior ao participante, que o envolve, mas algo constitutivo do próprio indivíduo, que por ele é configurado, quando atua, mas que também o configura. Assim, nesta teoria, o contexto é dinâmico, estando em mudança, sendo criados novos contextos em função dos processos interativos e de participação que neles se desenvolvem, a partir das práticas partilhadas que os participantes realizam em conjunto. Neste sentido, os contextos mudam quando mudam os participantes, tal como os participantes mudam quando atuam em diferentes contextos. Desta forma, o conhecimento (matemático) deve ser apropriado de forma contextualizada e não tendo como ponto de partida situações abstratas, que dificultam a atribuição de sentidos por parte dos alunos, sobretudo dos mais novos e dos que participam em culturas muito afastadas das culturas da escola (César, 2009, 2013a, 2013b, in press a, in press b; Lave & Wenger, 1991). Assim, a aprendizagem, particularmente a aprendizagem matemática, é concebida como uma atividade histórico-culturalmente situada (Roth & Radford, 2011) e na qual se investe de forma diferente consoante nos assumimos como participantes legítimos ou como participantes periféricos (César, 2009, 2013a, 2013b; Machado & César, 2012a).

Os aprendentes devem recorrer às ferramentas culturais que se encontram ao seu dispor (Vygotsky, 1934/1962), com o intuito de se tornarem participantes legítimos de uma comunidade de aprendizagem (César, 2007; Lave & Wenger, 1991). Ao referir-se à teoria elaborada por Vygotsky (1934/1962, 1932/1978) e aos contributos que deu no domínio da educação, Davydov e Kerr (1995) afirmam que, para este autor, "o processo educativo é ativo de três maneiras. Os estudantes são ativos, os professores são ativos e o meio social que têm construído também é ativo" (p. 17). Esta conceção ilumina o carácter dinâmico e dialógico que os processos de aprendizagem devem ter e que está relacionado com o que é assumido por Lave e Wenger (1991), que enfatizam que "o aprender, pensar e saber são relações entre pessoas em atividade no mundo, com o mundo e originadas no mundo social e culturalmente estruturado" (p. 51). Para Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998, 2000), a aprendizagem não é apenas a internalização dos conhecimentos individuais, mas um processo a partir do qual os alunos se tornam membros de uma comunidade de prática partilhada.

A questão da internalização, retomada por Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998, 2000), é considerada nos trabalhos de Piaget (1936, 1947) e Vygotsky (1934/1962) como o mecanismo essencial para o desenvolvimento das funções mentais superiores como, por exemplo, a língua. De acordo com Vygotsky (1932/1978), a internalização não reside na cópia da realidade observada nem numa operação mecânica. A criança transforma a interação internalizada de acordo com as suas próprias características, experiências e conhecimentos anteriores (Hogan & Tudge, 1999). Neste contexto, o discurso assume particular importância. Para Vygotsky (1934/1962) co-existem três tipos de discurso: social, privado e interno. O discurso social está relacionado com o que é dito, falado por alguém (por exemplo, por um adulto ou por um professor) e ocorre num plano exterior à própria pessoa, sendo inter-pessoal. O discurso privado consiste no processamento dessa informação, internalizando-a, para que, posteriormente, se possa mobilizá-la noutras situações semelhantes. Por fim, o discurso interno está relacionado com o diálogo que se tem consigo próprio. Quer o discurso privado quer o interno ocorrem num plano interno da pessoa, ou seja, são intra-pessoais. Desta forma, o pensamento resulta do processo de internalização do discurso social, isto é, do discurso social que se tornou em privado. Como tal, é "através dos outros, que nos tornamos nós próprios" (Vygotsky, 1931, p. 105, citado por Bakhurst, 2007, p. 56).

Mas, como afirmam Lave e Wenger (1991), estes outros não existem independentemente do espaço e do tempo em que desenvolvem as práticas, nem das ações que realizam. Por isso, os diversos processos interativos são situados e, como afirma César (2009, 2013a, 2013b), são configurados pelas comunidades, de aprendizagem ou de prática, em que ocorrem (Lave & Wenger, 1991; Wenger, 1998, 2000). É através da existência de fundos de conhecimentos partilhados (Kumpulainen et al., 2010) e da intersubjetividade (Wertsch, 1991), que permite também construir e partilhar novos sentidos (Bakhtin, 1929/1981), que se desenvolvem comunidades de aprendizagem nas quais cada elemento é considerado como um participante legítimo da própria aprendizagem (César, 2007, 2013a; Lave & Wenger, 1991; Wenger, 1998, 2000). Assim, as trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a) são configuradas pelos contextos, cenários e situações em que cada indivíduo participa, bem como pelas oportunidades a que cada um tem – ou não – acesso, e que são influenciadas por questões de poder, nomeadamente pelos mecanismos de *inter-* e *intra-empowerment* que são – ou não – postos em ação (César, 2013a, 2013b). A expansão das noções de contexto e participação alerta, precisamente, para a importância de se considerar o poder como uma das dimensões presentes nos diversos jogos interativos, mesmo quando as interações sociais são estabelecidas entre pares (César, 2009, 2013a, 2013b, in press a, in press b). Como afirma Apple (1995, 1999), darmos a importância devida às questões de poder é algo essencial quando se analisa o acesso ao sucesso escolar, sobretudo dos indivíduos que participam em culturas vulneráveis, pouco valorizadas socialmente. Deste modo, não é possível falarmos de participação sem termos em conta as relações de poder estabelecidas, a forma como este é distribuído e o papel que os implícitos desempenham em qualquer jogo interativo (César, 2009, 2013a, 2013b, in press a, in press b).

3.3.4. *Dialogical self* e educação

A teoria do *dialogical self* (Hermans, 1996, 2001, 2003; Hermans et al., 1992) começou por ser uma teoria clínica e só mais recentemente foi utilizada no domínio da educação. César (2003, 2009, 2013a) expandiu esta teoria relacionando-a com Piaget (1964/1997, 1975, 1977/1995), Vygotsky (1932/1978, 1934/1962), a aprendizagem situada (Lave & Wenger, 1991; Wenger, 1998, 2000) e as questões do poder (Apple, 1995, 1999). A expansão desta teoria permitiu interpretar fenómenos educativos de forma mais aprofundada, iluminando aspetos essenciais para a compreensão da construção do acesso ao sucesso escolar e das trajetórias de participação ao longo da vida, nomeadamente na Escola (César, 2009, 2013a, 2013b, in press b).

O recurso à teoria do *dialogical self*, em educação, permite-nos perceber outros fenómenos igualmente importantes como, por exemplo, a relação entre os processos de construção de identidade e a aprendizagem, ou destes com o desenvolvimento (Ligorio & César, 2013), assim como o papel que o *dialogical self* joga no acesso a formas de equidade, em educação (César, 2003, 2009, 2013a, 2013b). Nesta perspetiva, a aprendizagem é concebida como "um encontro com muitos "outros" (estudantes, professores), onde se conjugam e partilham diferentes perspetivas, onde existe uma constante negociação de significados, conhecimentos e produção de sentidos acerca do mundo e do *self"*(Ligorio, 2013, p. xv, aspas no original). Mas, para que estes contributos sejam frutuosos, é necessário clarificar o carácter dinâmico e multifacetado do *dialogical self*, como propõe César (2013a),

> É esta noção de *self* que assumimos: um *self* cultural e historicamente situado (César, 2003, 2009), no qual muitas vozes podem manifestar-se, por vezes simultaneamente e, outras vezes, em diferentes momentos (tempos) e contextos, cenários e situações (espaços). Como tal, é um *dialogical self*, mas também um *self* que está situado no tempo e espaço, com uma dimensão passada, presente e futura, bem como com a possibilidade de fazer transições entre os diferentes espaços. É um *self* em progresso, em construção. (p. 156, itálicos acrescentados na tradução)

Como sustenta Marková (2013), "a realidade social é dinâmica e a sua natureza dinâmica deve ser capturada em e através da interação com o *dialogical self* " (p. 23, itálicos acrescentados na tradução), pelo que os alunos devem ser incentivados a desenvolver formas de pensamento autónomas, a serem participantes críticos e reflexivos nos próprios processos de aprendizagem, bem como no dos outros elementos. Esta forma de atuação coaduna-se com o que Piaget (Bringuier, 1977) entendia que deveria ser o ensino ativo, pois como ele afirmava:

> Estou convencido que podemos recorrer a um ensino ativo formidável, fornecendo a criação de dispositivos sobre os quais possa experimentar e descobrir sozinho imensas

> coisas. Orientado, certamente, mas enfim, tudo isto é preciso que sejam os profissionais a ver como se operacionaliza na prática. (p. 195)

Assim, o papel do professor assume especial importância, bem como a forma como este coloca em ação esses princípios. Por outro lado, actuando desta forma, irá permitir aos alunos gerirem as diferentes *I-positions* (Hermans, 2001, 2003) que vão assumindo nas trajetórias de participação ao longo da vida, fora e dentro da escola (César, 2013a, 2013b), tornando essas transições, gradualmente, menos conflituosas, evitando formas (subtis) de rejeição e exclusão. Segundo Vygotsky (1934/1962), os professores devem desenvolver o espírito crítico dos alunos, uma vez que "o propósito da educação não é a assimilação de conhecimentos recebidos, mas a sua interrogação crítica por cada nova geração" (Bakhurst, 2007, p. 72), algo que corrobora o que Piaget (Bringuier, 1977) já afirmara, muitos anos antes:

> para mim a educação consiste em fazer criadores mesmo se não existem muitos, mesmo se as criações de um são limitadas em relação à de outro. Mas é preciso fazer inventores, inovadores, não conformistas. (p. 195)

É importante entender os processos de desenvolvimento e de aprendizagem como processos sociais, culturais e mediados por ferramentas culturais (Vygotsky, 1934/1962). A aprendizagem pode (e deve) assumir-se como um veículo fundamental na produção de mudanças, não só ao nível da apropriação de conhecimentos ou no desenvolvimento de capacidades e competências, mas também "na melhoria e enriquecimento da organização das *I-positions* que pertencem à identidade" (Ligorio, 2012, p. 442). Assim, é fulcral o desenvolvimento de práticas, em aula, nas quais os alunos se tornem participantes legítimos de uma comunidade de aprendizagem (César, 2007; Lave & Wenger, 1991), por exemplo, recorrendo a formas de trabalho colaborativo, nas quais se privilegiem as interações sociais e dialógicas, como facilitadoras na apropriação de conhecimentos e no desenvolvimento de capacidades e competências (Baucal et al., 2007; César, 2003, 2013a, 2013b; César & Kumpulainen, 2009; Renshaw, 2004; Ventura, 2012).

Esta perspetiva é, também, assumida por Kumpulainen e seus colaboradores (2010) e Kumpulainen e Lipponen (2013), quando realçam a importância de construir dialogicamente espaços e tempos, onde a *agency* possa ocorrer. Segundo estes autores, *agency* está relacionada com a identidade que um indivíduo (ou comunidade) construiu através da participação em comunidades de aprendizagem, quando estes internalizam como atuar com responsabilidade, autonomia, liberdade e escolha. Promover esta forma de trabalho valoriza as interações dialógicas (Renshaw, 2004), que contribuem para a construção do conhecimento, uma vez que a *agency* "é construída, contestada, negociada e renegociada" (Kumpulainen & Lipponen, 2013, p. 196), pelo que envolve transformações, ao nível da própria comunidade e da identidade que cada um constrói no seio da mesma. Ao existir partilha e confronto de formas de pensamento e atuação diversificadas, as relações de poder existentes (Apple, 1995; César, 2010) assumem especial relevância, na medida em que podem facilitar ou criar barreiras à construção dessa *agency*. Desta forma, as escolas, em geral, e as salas de aula, em particular, são contextos e cenários onde emergem um elevado número de interações sociais e dialógicas, e onde se pode facilitar – ou dificultar – o acesso a inúmeras ferramentas culturais e sistemas simbólicos (Vygotsky, 1934/1962). Por isso mesmo, são necessárias práticas que promovam a internalização de mecanismos de *inter-empowerment* em *intra-empowerment* (César, 2013a, 2013b), quer em aula quer nas relações Escola/Família.

3.3.5. Capacidades e competências

As diversas perspetivas teóricas abordadas, neste capítulo e nos anteriores, realçam a necessidade e a importância de promover o desenvolvimento de capacidades e competências nos alunos, quer específicas de um determinado domínio (por exemplo, da Matemática), quer de natureza transversal (por exemplo, argumentar ou ter sentido crítico). No entanto, face ao carácter polissémico destas duas designações, importa clarificar o sentido que atribuímos a estes conceitos, tanto mais que existem autores lhes atribuem diferentes significados, existindo mesmo alguma controvérsia quanto à própria terminologia. Contudo, sendo estas duas designações frequentemente utilizadas em diversos documentos de política educativa, nacionais e internacionais, gerais e específicos da Matemática (Abrantes et al., 1999; AR, 1986; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007), pareceu-nos essencial abordar estes dois conceitos.

3.3.5.1. Clarificação de conceitos

Numa primeira análise, o conceito de competência aparece associado à designação *skill*, cuja utilização é recorrente na literatura anglo-saxónica da especialidade. Está geralmente relacionado com as aptidões e a destreza que cada pessoa revela na realização de uma determinada tarefa. Como referem Guenther e

Rondini (2012), este conceito descreve um elevado número de competências treinadas, ou que podem ser melhoradas pelo treino. Assim, uma *skill* é algo que é aprendido e treinado por forma a atingir um determinado desempenho, ou seja, é através da prática repetitiva, instrumental, do treino, que um indivíduo consegue melhorar as *skills*. Para além disso, têm uma forte componente sensorial e motora, que justifica a necessidade de treino e de manutenção da prática para que a *skill* não deixe de ser mobilizável, uma vez que as competências físicas e motoras se deterioram rapidamente quando cessa o treino.

Devido à utilização frequente desta designação na abordagem *behaviourista*, nomeadamente no que se refere à aprendizagem, o conceito de *skill* era entendido como competência, isto é, "pensava-se a formação e a aprendizagem como uma sequência de *skills* a dominar – e saber aplicar – que se desenvolviam por treino específico e em grande parte segmentar, consoante os níveis pretendidos" (Roldão, 2009, p. 590, itálico no original). No entanto, para distinguirmos *skill* de *competencies* – uma vez que ambas são traduzidas por competências, em português – iremos referir-nos às primeiras como competências mecânicas ou instrumentais, enquanto traduziremos as segundas apenas por competências. Evitaremos a designação habilidades, que por vezes se encontra, tanto na tradução de *skills*, como de *abilities*, por considerarmos que, na língua portuguesa, estão associadas a um certo sentido pejorativo e, sobretudo, a um tipo de desempenhos que não corresponde ao que *skill* designa. Para nós, habilidades, é saber manter uma laranja empoleirada na ponta do nariz, ou algo semelhante. As habilidades também são treináveis e mecânicas, com uma forte componente motora. Porém, destinam-se a impressionar o(s) outro(s), a fazer algo que é raro, difícil de atingir, enquanto as *skills* se relacionam mais com a vida quotidiana, com competências mecânicas que uma grande parte da população, de uma determinada sociedade, precisa de desenvolver.

Perrenoud (1999, 2000) pretendia contribuir para a conceptualização do que designava por competência, nomeadamente através: (1) da clarificação do conceito de competência, afastando-o de designações como *skill*, capacidade, ou mesmo esquema; e (2) da enumeração de elementos que caracterizam as competências, bem como a sua utilização em contextos de educação formal e em cenários como a sala de aula. Para este autor, uma competência está associada à "capacidade de mobilizar diversos recursos cognitivos para enfrentar um tipo de situações" (Perrenoud, 2000, p. 15), pelo que desenvolver uma competência está relacionado com o aprender a identificar e a encontrar os conhecimentos apropriados, que precisam de ser mobilizados em cada situação (Perrenoud, 1999). Evocando este autor, uma competência só existe quando "a mobilização dos conhecimentos supera o tatear reflexivo ao alcance de cada um e aciona esquemas constituídos" (Perrenoud, 1999, p. 24). Aqui, o conceito de esquema é retomado dos trabalhos desenvolvidos por Piaget (1936, 1967, 1971/2010), sendo entendido como um esquema de ação, que permite mobilizar "conhecimentos, métodos, informações e regras para enfrentar uma situação, pois tal mobilização exige uma série de operações mentais de alto nível" (Perrenoud, 1999, p. 25). Para este autor, uma competência organiza e coloca em ação um conjunto de esquemas, pelo que estes conceitos não são sinónimos. Desta forma, o conceito de competência engloba o conceito de *skill*, de capacidade e de esquema.

Perrenoud (2000) indica três aspetos que emergem da definição que propõe:

> 1. As competências não são elas mesmas saberes, *savoir-faire* ou atitudes, mas mobilizam, integram e orquestram tais *recursos*.
> 2. Essa mobilização só é pertinente em *situação*, sendo cada situação singular, mesmo que se possa tratá-la em analogia com outras, já encontradas.
> 3. O exercício da competência passa por operações mentais complexas, subentendidas por *esquemas de pensamento* (...) que permitem determinar (de modo mais ou menos eficaz) uma ação relativamente adaptada à situação. (p. 15, itálico no original)

Esta clarificação realça a importância de poder conectar os conhecimentos apropriados, efetuando transições, que permitem a mobilização em situações problemáticas, uma vez que se torna cada vez mais urgente e necessário o desenvolvimento de competências essenciais a uma sociedade do conhecimento, que se caracteriza também pela incerteza e por mudanças rápidas, nomeadamente tecnológicas. Como tal, a Escola e os professores têm um papel importante na construção de espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004), nos quais os alunos possam desenvolver competências relacionadas com o pensamento e a argumentação. Como sustenta Peixoto (2010),

> as competências pressupõem o agir em situação, mobilizando nessa ação, de forma equilibrada e integrada, conhecimentos, capacidades, procedimentos e atitudes; os ditos conhecimentos, capacidades, procedimentos e atitudes, incorporando-se uns nos outros, conduzem às capacidades de fazer, pensar ou apreciar alguma coisa. (p. 1)

Roldão (2003) afirma que existe competência ou competências "quando perante uma situação, se é capaz de mobilizar adequadamente diversos conhecimentos prévios, seleccioná-los e integrá-los adequadamente perante aquela situação (ou problema ou questão, ou objecto cognitivo ou estético, etc.)" (p. 20). Uma pessoa pode ter apropriado determinados conhecimentos e ter desenvolvido determinadas capacidades, mas isso não significa, necessariamente, que seja competente, uma vez que, perante uma situação, pode não conseguir colocar em ação o manancial de recursos que tem a seu dispor. Assim, para que se possa colocar o conhecimento em ação, é necessário que este seja apropriado atribuindo-lhe sentidos, como salientavam Bakhtin (1929/1981), ou Vygotsky (1934/1962). Mas, como refere César (2009, 2013a, 2013b), também é necessário que a tarefa, as instruções de trabalho, o contrato didático e os jogos interativos presentes em cada situação de aula facilitem a mobilização das capacidades e competências, nomeadamente através da construção de um clima securizante, onde os alunos se sintam capazes de arriscar, expressar as suas argumentações, dúvidas e questões.

Como sustenta Le Boterf (1994), "A competência não é um estado ou conhecimento possuído. (...) Ter conhecimentos ou capacidades não significa ser competente. Podemos conhecer técnicas ou regras de contabilidade e não saber aplicá-las no momento oportuno" (p. 16). Nesta situação, os contributos das teorias elaboradas por Piaget (1936, 1967, 1971/2010) e Vygotsky (1934/1962) sobre a construção de conhecimento permitem-nos perceber a importância de desenvolver práticas, em aula, que possibilitem a cada pessoa atribuir sentidos aos conhecimentos apropriados, para que, posteriormente, possam mais facilmente mobilizá-los, ou seja, realizar transições noutros contextos, cenários e situações que permitem colocá-los em ação.

Para Le Boterf (1994, 1998), a competência está relacionada com o processo de mobilizar algo, isto é, com a capacidade de convocar conhecimentos anteriormente apropriados e a sua utilização, numa determinada situação. Como este autor menciona,

> A competência não se reduz nem a um saber nem a um saber-fazer. (...) Todos os dias a experiência mostra que pessoas em posse de conhecimentos ou capacidades não as sabem mobilizar de forma pertinente e no momento oportuno. (...) A competência não reside nos recursos a mobilizar (conhecimentos, capacidades, ...) mas na própria mobilização desses recursos. (Le Boterf, 1994, pp. 16-18)

Assim, para Le Boterf (1994), o elemento-chave de uma competência reside no saber mobilizar conhecimentos, capacidades, recursos, entre outros elementos. Desta forma, esta argumentação vai ao encontro do que é afirmado por Jonnaert (2012), relativamente às características de uma competência, que deve ser: "(1) construída, (2) situada, (3) reflexiva e (4) temporariamente viável" (p. 118).

Nesta investigação, definimos competências como conhecimentos em ação, que se mobilizam em diferentes situações, cenários ou contextos, na resolução de um determinado problema. Ao considerarmos que as competências mobilizam conhecimentos, implicitamente estamos a assumir que, para que as competências se manifestem, é necessário existirem transições, ou seja, que os indivíduos sejam capazes de usar o que aprenderam noutros contextos, cenários e/ou situações. Esta posição teórica é também assumida por outros autores (Abrantes, 1994, 2003; Le Boterf, 1994, 1998; Perrenoud, 1999; Roldão, 2003, 2011). Assim, o que pretendemos avaliar no IACC não são *skills*, são *competencies*, que traduzimos por competências.

Contudo, nesta investigação, ao contrário de Perrenoud (2000), fazemos uma distinção entre capacidades e competências. Definimos como capacidade a atualização de uma potencialidade com a qual nascemos. Por exemplo, usamos designações como capacidade de memória ou de atenção, ou capacidade de articularmos sons, ou de nos deslocarmos em marcha bípede. Assim, distinguimos este conceito do de competência. No entanto, isso não significa que as competências não tenham subjacente a utilização de capacidades, pois só se conseguem mobilizar competências linguísticas quando já se desenvolveu a capacidade de emitir sons e reconhecer letras ou outros símbolos, entre outras, ou só se consegue desenvolver uma competência mecânica (*skill*), como aparafusar um parafuso, quando já se desenvolveu a capacidade de fazer uma pinça fina com os dedos da mão.

Acrescentaríamos, ainda, que existem competências que colocam em ação conhecimentos instrumentais (Skemp, 1978) como, por exemplo, o cálculo de uma área de um polígono, no qual se recorre à fórmula da área desse polígono, utilizando-a de forma instrumental, ou seja, diretamente, sem necessidade de interpretação do enunciado. Neste caso, estão envolvidas, por exemplo, as capacidades de concentração e de memorização e conhecimentos instrumentais relativos à fórmula da área desse polígono. Por outro lado, existem competências que colocam em ação conhecimentos relacionais (Skemp, 1978) como, por exemplo, na resolução de problemas que apelam a conhecimentos da vida quotidiana, para os quais não existe uma estratégia de resolução única e definida previamente.

O que pretendíamos, com a construção do IACC, era permitir que os professores tivessem acesso às capacidades e competências que os alunos conseguiam mobilizar, no início do ano letivo, podendo também identificar aquelas que eles precisavam de desenvolver. Concordamos com Dewey (1897/2008) quando salienta que "a educação deve começar com um *insight* psicológico sobre as capacidades, interesses e hábitos da criança" (s.p.). Apesar da terminologia ser diferente, de acordo com a que se utilizava naquela época, o que esta frase ilumina, principalmente, é a necessidade de não começarmos processos educativos sem saber as características dos aprendentes, algo que nos parece fundamental e atual.

3.3.5.2. Nos documentos de política educativa

Muitos dos documentos de política educativa, sobretudo desde as últimas décadas do século passado, fazem referência a capacidades e competências. Como refere Roldão (2011),

> As razões pelas quais a competência se afirmou no quadro teórico curricular nas últimas décadas do século XX prendem-se com a descaracterização ou esterilização da escola, e do saber por ela produzido, face a uma sociedade altamente tecnológica, assente em pressupostos de conhecimento e eficácia, e sustentada por dispositivos que criam, usam e comunicam a informação, potencialmente geradora de conhecimento. (p. 31)

Um dos documentos de política educativa, em Portugal, impulsionadores do estabelecimento das competências como eixo orientador do currículo e dos processos de ensino e de aprendizagem, foi o *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais* (DEB, 2001). Como salientam Leite e Delgado (2012), com este documento de política educativa "passou-se a valorizar a competência matemática e, neste sentido, a privilegiar-se a forma de apresentação dos temas matemáticos à abordar" (p. 89).

Partindo da conceção de competência como conhecimento em ação (Abrantes, 1994), neste documento eram descritas competências transversais a todas as disciplinas que integravam o currículo prescrito português (Pacheco, 2005) e específicas para cada uma delas, para que os professores as pudessem ter em consideração quando desenvolviam o currículo em ação (Gimeno, 2000). Recentemente, quando ocorreu a reorganização do ensino básico e foi elaborado um novo currículo para a disciplina de Matemática (Ponte et al., 2007), estes autores tiveram em consideração as orientações propostas nesse anterior documento (DEB, 2001), na medida em que incluíram e ampliaram o conceito de um currículo centrado não só na apropriação de conhecimentos (matemáticos), como também no desenvolvimento de capacidades e competências.

No entanto, devido a mudanças políticas e, como tal, mudanças ao nível da conceção de como devem ser os processos de ensino e de aprendizagem, considera-se suspenso o *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais* (MEC, 2011), por

> não [ser] suficientemente claro nas recomendações que insere (...) tornaram-no num documento curricular pouco útil. (...) Em primeiro lugar, erigindo a categoria de "competências" como orientadora de todo o ensino, menorizou o papel do conhecimento e da transmissão de conhecimentos, que é essencial a todo o ensino. (MEC, 2011, p. 50080, aspas no original)

Esta tomada de decisão, reiterada, também, pelo Decreto-lei n.º 129/2012 (AR, 2012) reveste-se de uma profunda incoerência em relação ao que é sugerido e sustentado nos documentos de política educativa internacionais (NCTM, 2007; Santiago et al., 2012), bem como em relação ao atual *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2007). Para além deste ter sido elaborado com base no documento supramencionado (DEB, 2001), também remete, em algumas situações, os professores ou outros agentes educativos, para um documento que, a partir de 23 de Dezembro de 2011, deixa de ser considerado como documento de política educativa português.

Um currículo centrado no desenvolvimento de competências não significa negar a necessidade de se apropriarem conhecimentos (Roldão, 2003, 2009, 2011), como é afirmado pelo despacho anterior (MEC, 2011), uma vez que, quando se afirma que as competências são conhecimentos em ação, a própria noção de competência apela para a mobilização de conhecimentos que se apropriaram anteriormente (Abrantes, 1994). Como sustenta Pacheco (2011), não existe competência sem conhecimento, pelo que "Privilegiar as competências não significa relegar o saber para segundo plano, mas modifica o estatuto e conduz a encarar diferentemente a relação do indivíduo com os saberes, bem como a relação da escola com os saberes" (Legendre, 2007, p. 50).

Contudo, este despacho (MEC, 2011) substitui o *Currículo Nacional do Ensino Básico* pelo documento *Metas Curriculares* (MEC, 2012b), que apresenta os conhecimentos e as capacidades que os alunos devem adquirir, em cada ano de escolaridade. Assim, neste documento é dada ênfase à mecanização de procedimentos e rotinas, bem como a aspetos mais formais da Matemática, pelo que poderá significar um retrocesso a práticas, em aula, que privilegiam o ensino expositivo, os exercícios em detrimento de tarefas de uma natureza mais aberta e desafiadora, que trabalhem não só a apropriação de conhecimentos, mas também a atribuição de sentidos, a autonomia, o elaborar e testar conjeturas, ou a exploração de estratégias de resolução diferentes relativas a uma mesma tarefa. Este documento de política educativa parece subscrever, novamente, formas de ensino e de aprendizagem próprias da abordagem *behaviourista*, perdendo-se o que os processos de ensino e de aprendizagem tinham ganho com a adoção do ensino por descoberta e de aprendizagem colaborativa, mais relacionadas com a abordagem sócio-construtivista e com teorias como a piagetiana, vygotskiana, a aprendizagem situada ou o *dialogical self*. Assim, esta forma de atuação das atuais instâncias políticas poderá significar um retrocesso no que se conquistou até à atualidade, no que respeita à conceção de como devem ser os processos de ensino e de aprendizagem, incluindo a avaliação, que é uma parte fundamental destes processos.

3.4. INSTRUMENTOS DE AVALIAÇÃO DE CAPACIDADES E COMPETÊNCIAS

Em investigação, nomeadamente em educação, as opções teóricas e metodológicas assumidas pelo investigador têm subjacentes princípios epistemológicos, que configuram a forma como se concebem e interpretam os fenómenos educativos, bem como o quadro de referência teórico pelo qual optam e as alternativas de atuação e intervenção (César, 2008, 2010). Assim, a conceptualização do que é a inteligência e a forma como esta é avaliada difere de acordo com as perspetivas teóricas subjacentes ao quadro de referência teórico que construímos. Algo semelhante acontece em relação às conceções de capacidades e competências.

Do ponto de vista dos instrumentos disponíveis para medir ou avaliar a inteligência, ou as capacidades e competências, estes dividem-se fundamentalmente em dois grandes grupos, que têm subjacente uma perspetiva diferente: (1) psicométrica (Freeman, 1976); e (2) desenvolvimentista (Kumpulainen, Hmelo-Silver, & César, 2009). Cada uma destas perspetivas tem objetivos diferentes e pressupostos de como se deve atuar também distintos. Na perspetiva psicométrica, como a etimologia da própria designação indica, pretende-se medir determinadas funções psicológicas, que se acredita manterem-se constantes ao longo da vida, ou seja, estáveis, em termos de medição (Freeman, 1976). Na perspetiva desenvolvimentista, como a etimologia da designação ilumina, acredita-se que a inteligência, ou outras capacidades e competências, se desenvolvem (Lourenço, 2010), pelo que não se pretende medi-las, mas sim avaliá-las, de forma situada, ou seja, num determinado espaço (situação em que o indivíduo se encontra) e tempo (momento do desenvolvimento).

Estes pressupostos diferentes deram origem a instrumentos também muito diferenciados, quanto aos seus objetivos e modos de elaboração, bem como a instruções de utilização distintas. Assim, importa analisar estas duas perspetivas e as suas consequências, em termos de escolhas dos instrumentos a utilizar, para se compreenderem melhor os princípios epistemológicos e teóricos subjacentes à elaboração deste instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), iluminando-se este percurso (César, 2009, 2013a; Hamido & César, 2009; Ventura, 2012). Tratando-se o IACC de um instrumento de avaliação de capacidades e competências destinado a ser usado pelos professores, num determinado projeto de investigação, num *design* de investigação-ação, era essencial que o mesmo fosse coerente com os princípios epistemológicos, com o quadro de referência teórico e com as práticas do projeto *Interacção e Conhecimento*.

3.4.1. Perspetiva psicométrica

Numa perspetiva psicométrica, a inteligência é concebida como inata e estática, no sentido em que se mantém a mesma ao longo da vida, podendo ser medida de forma objetiva e permitindo, por exemplo, como se pretendia com a escala de Binet-Simon (Binet & Simon, 1904), decidir as crianças que iriam para o ensino regular e as que frequentariam o ensino especial, quando estas tinham apenas cinco anos de idade. Os testes psicológicos estandardizados são considerados como a maneira mais eficaz de medir a inteligência. Como afirmam Murphy e Davidshofer (1991), esses testes são "a melhor, mais justa e mais exata das tecnologias disponíveis para tomar muitas decisões importantes acerca das pessoas" (p. 2). Daí que o governo francês, no início do século passado, quando decidiu que a escolaridade passaria a ser obrigatória a partir dos seis anos de idade, tenha encomendado, a Binet, uma escala que permitisse medir a inteligência das crianças, antes de estas começarem a frequentar a Escola (Freeman, 1976). Anastasi e Urbina (2000) definem testes psicológicos como uma "medida objectiva e padronizada de uma amostra de comportamento" (p. 18), pelo que essa medição objetiva pressupõe que, com base nessa informação, se podem tomar decisões sobre o mesmo (Anastasi, 2003; Anastasi & Urbina, 2000). A forma como a inteligência é avaliada está relacionada com a classificação obtida nesse teste psicológico, baseando-se no número de respostas certas e erradas que obteve e na comparação deste resultado com os resultados da população em que aquele sujeito se insere (Anastasi, 2003; Freeman, 1976). Assim, nesta perspetiva, a inteligência é concebida como algo que se pode medir e que se traduz por um resultado numérico que, posteriormente, pode ser comparado com o de uma determinada população. Como afirma Lourenço (2010), essa avaliação está associada ao “maior ou menor *brilhantismo* (i.e. capacidade mental) que uma certa pessoa tem e possui” (p. 42, itálico no original).

Ao longo das últimas décadas têm sido construídos muitos testes psicológicos, de acordo com a conceptualização de inteligência que cada autor assume, bem como com o que pretendia medir (Anastasi, 2003; Freeman, 1976). Por exemplo, a *Escala de Inteligência de Binet-Simon* (Binet & Simon, 1904) pretendia medir os “processos mentais superiores e complexos e, não as atividades sensoriais e motoras relativamente simples” (Freeman, 1976, p. 211), ou seja, esta escala tinha como objetivo obter uma medida global que traduzisse o quociente de inteligência (QI) (Anastasi & Urbina, 2000). Este QI obtém-se através de uma fórmula que relaciona a idade mental (IM) com a idade cronológica (IC), dividindo a primeira pela segunda – daí a designação quociente - e que, depois, por uma questão de facilidade, para evitar que se obtenham números decimais, multiplica o resultado obtido por 100, ou seja, QI = IM / IC x 100. Deste modo, uma criança mais inteligente teria uma idade mental superior à idade cronológica (Anastasi, 2003).

Esta escala sofreu algumas modificações, sendo atualmente designada por *Escala Stanford-Binet*, que representa uma versão mais sofisticada, do ponto de vista psicométrico, quando comparada com a original *Escala Binet-Simon* (Anastasi, 2003). Por sua vez, a *Escala Stanford-Binet* também tem sido objeto de sucessivas revisões, que visam torná-la mais adaptada às características das populações atuais (J. Johnson & D’Amato, 2005; Kush, 2005). A *Escala Stanford-Binet* abrange quatro domínios: raciocínio verbal, abstrato/visual, quantitativo e memória a curto prazo (Matthews, Zeidner, & Roberts, 2002). A *Escala Binet-Simon* era composta por 30 itens, organizados segundo uma lógica crescente quanto ao grau de dificuldade, que abrangiam componentes da inteligência considerados para Binet como essenciais, nomeadamente, julgamento, compreensão e raciocínio (Anastasi & Urbina, 2000). Mas, baseando-se numa perspetiva psicométrica, para Binet (Binet & Simon, 1904), a inteligência, ou seja, o QI, seria constante. Variava o que as crianças saberiam responder, em função da idade cronológica, mas essa variação corresponderia ao mesmo grau de inteligência.

Esta forma de conceptualizar e medir a inteligência deu também origem às escalas de Wechsler, nomeadamente a WISC – *Wechsler Intelligence Scale for Children* (Wechsler, 1997b) e a WAIS – *Wescheler Adult Intelligence Scale* (Wechsler, 1939, 1958, 1997a). Estas escalas pretendiam medir a inteligência verbal e a não-verbal dos sujeitos, pelo que se dividem em duas partes: provas verbais e provas de realização, sendo calculado um QI para cada uma delas e um QI geral (Anastasi, 2003; Freeman, 1976; Zhu, Weiss, Prifitera, & Coalson, 2003). Um dos aspetos a que os psicólogos devem dar especial atenção é à diferença entre estes dois níveis de QI, uma vez que um QI de realização muito mais elevado do que o verbal pode indicar que existem problemas emocionais que não permitiram avaliar corretamente o QI verbal e geral (Flanagan & Kaufman, 2004). Atualmente, também se considera que as diferenças culturais podem configurar uma diferença significativa entre o QI verbal e de realização, tendo alguns estudos mostrado que estas escalas, nos Estados Unidos da América, favoreciam a população branca, que tendia a obter melhores resultados do que os latinos e estes melhores resultados do que os afro-americanos (Dickens & Flynn, 2006; Rushton & Jensen, 2005, 2006).

O QI verbal é avaliado através de seis subtestes: informação, compreensão geral, raciocínio aritmético, semelhanças, memória de dígitos na ordem direta e inversa e vocabulário (Wechsler, 1997a, 1997b). Quando se pretende avaliar o QI de realização recorre-se a objetos concretos, tais como cubos, puzzles e tabuleiros, em que as respostas dos sujeitos "dependem da manipulação, perceção visual e interpretações implicadas naquilo que se *faz* em vez de naquilo que se *diz*" (Freeman, 1976, p. 259, itálico no original). O QI de realização é composto por cinco subtestes: dígito-símbolo, completamento de gravuras, cubos, disposição de gravuras e composição de objetos (Wechsler, 1997a, 1997b). Assim, nota-se, nesta escala, já existir uma preocupação quanto ao questionamento do QI geral, dando relevo ao QI de realização e não apenas ao QI verbal.

Outras das contribuições para a conceção da inteligência, segundo uma perspetiva psicométrica, foi a de Spearman (1904), que desenvolveu a teoria dos dois fatores, ou seja, a teoria bifactorial da inteligência. Este autor considerava que "o elemento essencial e comum da inteligência coincide com o elemento essencial e comum das funções sensoriais" (Spearman, 1904, p. 202). Define inteligência como uma aptidão geral ou global que incide no sucesso dos testes, qualquer que seja o tipo desses testes (Anastasi, 2003; Spearman, 1904). Este é o que ele designa por fator *g* (fator geral da inteligência). Para além deste, existe um segundo fator (Spearman, 1904), o fator *s* (fator específico da inteligência, que em inglês é designado pela letra *s,* de *specific*). A inteligência geral, medida pelo fator *g*, está relacionada com a aptidão geral. Este fator *g* expressa o que há de "comum a toda a atividade mental" (Freeman, 1976, p. 176), pelo que todos os indivíduos deveriam apresentá-lo, embora em quantidades diferentes (Anastasi, 2003). O fator *s* mede a inteligência específica, isto é, as aptidões relacionadas com uma determinada tarefa, por exemplo, a aritmética. Como afirma Freeman (1976), "A aptidão para a aritmética é uma função da inteligência geral" (p. 547). Desta forma, este autor sugere a utilização de testes que não se baseiem em conhecimentos escolares ou que envolvam funções cognitivas muito específicas (por exemplo, a memória), mas sim a testes cujos itens envolvam relações abstratas e de raciocínio dedutivo e indutivo, como é o caso das *Matrizes Progressivas de Raven* ou do *D70* (Anastasi, 2003; Anastasi & Urbina, 2000).

Qualquer uma das escalas de Binet (Binet & Simon, 1904) ou de Wechsler (1997a, 1997b), anteriormente mencionadas, são instrumentos de medição da inteligência que devem ser utilizados individualmente e cujo tempo de resposta é longo. Porém, uma das preocupações dos psicólogos tem sido criar instrumentos de medição das diversas capacidades e competências que possam ser utilizados coletivamente e que impliquem tempos mais curtos de utilização. Um exemplo de teste não-verbal e de utilização coletiva são as *Matrizes Progressivas de Raven* (Anastasi & Urbina, 2000; Freeman, 1976; Raven, Court, & Raven, 1984). Este teste tem como objetivo medir a aptidão do sujeito em apreender relações entre figuras, pelo que todos os itens foram elaborados de modo que a solução passe pelo ponto de vista percetivo, espacial ou lógico, sem fazer apelo à leitura e escrita, ou seja, supostamente *culture free* e adaptados mesmo a populações analfabetas ou cuja escolarização foi muito reduzida (Raven et al., 1984). À semelhança do que acontece com as *Escalas de Stanford-Binet*, os itens das *Matrizes Progressivas de Raven* também têm um nível crescente de dificuldade (Anastasi, 2003).

Uma das finalidades da utilização de símbolos ou figuras geométricas (por exemplo, triângulos, quadrados, círculos) no teste das *Matrizes Progressivas de Raven* prende-se com que este fosse *cultural free*, isto é, que os itens fossem o mais possível isentos de qualquer elemento cultural que pudesse criar obstáculos nos desempenhos dos sujeitos (Freeman, 1976). No entanto, é questionável se essa finalidade é conseguida, na medida em que, por exemplo, sujeitos mais letrados têm mais facilidade em resolver esses itens, uma vez que estes símbolos ou figuras geométricas lhes são familiares, fazendo parte do *background knowledge* que apropriaram. Esta situação pode não ocorrer em sujeitos que nunca foram escolarizados e, como tal, a utilização e manipulação desses símbolos ou figuras geométricas funcionaria como elemento bloqueador nos desempenhos dos mesmos nesse teste.

Outro exemplo de teste de inteligência geral, não-verbal, que se baseia no fator *g* de Spearman, é o *D70* (Anastasi, 2003; Anastasi & Urbina, 2000; Murphy & Davidshofer, 1991). Este teste foi elaborado em França, em 1970, com a finalidade de ser uma forma equivalente ao *D48*. Este último, devido à sua grande utilização, já era bastante conhecido, tornando-o desadaptado (Alves, 2006; Anastasi, 2003). Quer o *D48* quer o *D70* são constituídos por quatro exemplos e 44 itens "que apresentam um conjunto de figuras de pedras de dominós, em que o examinando deve descobrir qual o número de pontos de que deve ter cada metade do dominó, que completa uma sequência" (Alves, 2006, p. 251).

Esses itens estão dispostos por séries. Cada série está organizada segundo uma ordem crescente de dificuldade. Os itens iniciais de cada série introduzem um novo tipo de raciocínio, pelo que o grau de dificuldade é inferior aos últimos da série anterior (Alves, 2006; Anastasi, 2003; Anastasi & Urbina, 2000). Os tipos de raciocínio utilizados são: identidade, simetria, alternância, progressão simples, progressão complexa ou intercalada, combinação de princípios prévios, adição, subtração e permutação das posições dos dominós (Anastasi, 2003).

Os testes de aptidão ou de capacidades permitem medir o uso e nível de desenvolvimento das aptidões ou capacidades numa determinada tarefa (Anastasi, 2003), isto é, estes testes permitem medir o que Spearman (1904) designou por fator específico da inteligência (fator *s*). Como afirma Freeman (1976), um teste de aptidão "visa medir *a capacidade potencial de um indivíduo numa atividade especializada, dentro do âmbito restrito*" (p. 463, itálico no original), pelo que estes testes não apelam a conhecimentos que tenham sido apropriados ou a competências mecânicas que tenham sido treinadas anteriormente. São exemplos de testes de aptidão os que se referem à aptidão visual, verbal, numérica, mecânica, burocrática, entre outros. Estes testes de aptidão são, recorrentemente, utilizados quando se pretendem realizar escolhas vocacionais, para que se possa saber qual ou quais os domínios para os quais temos mais aptidão ou capacidade (Anastasi, 2003), orientando desta forma a trajetória profissional. Neste trabalho não recorremos à designação aptidão tendo optado por usar apenas a designação capacidade.

Em qualquer um dos testes psicológicos referidos anteriormente, existem características subjacentes aos mesmos, nomeadamente, a padronização ou objetividade, a norma, a precisão e a validade (Anastasi, 2003; Anastasi & Urbina, 2000; Freeman, 1976). A padronização ou a objetividade está relacionada com o "conseguir um instrumento que na medida do possível seja isento de juízos subjetivos (pessoais) no que respeita a capacidades, desempenhos, dimensões ou potencial a medir ou a avaliar" (Freeman, 1976, p. 52), isto é, os resultados desse testes serão idênticos se mudarmos a pessoa que os aplica. Esta afirmação ilumina uma forte influência do paradigma positivista ou *behaviourista*, de que nos pretendemos afastar nesta investigação. Considerando a realidade como múltipla e dialógica (Marková, 2013), esta reveste-se de um carácter subjetivo que se deve ter em consideração, uma vez que as formas de atuação e de reação subjacentes intervêm nos processos interativos, pelo que compreendê-las também assume especial importância.

A norma está relacionada com os resultados de uma população padrão, da qual foi selecionada uma amostra representativa, para a elaboração, aferição e validação do teste (Anastasi, 2003). Como esta autora sustenta, "Uma norma, qualquer que seja a sua expressão, restringe-se à população determinada da qual foi derivada. O aplicador de teste nunca deve esquecer a maneira pela qual se estabelecem as normas" (Anastasi, 2003, p. 118). Esta afirmação clarifica um aspeto subjacente à conceção, ao tratamento e análise de dados de qualquer teste psicológico: o recurso a elementos do domínio da estatística, nomeadamente, à estatística descritiva (população, amostra, curva normal de distribuição, medidas de tendência central, medidas de dispersão e correlações), tal como referido por Freeman (1976). Contudo, queremos salientar que os valores estandardizados para uma determinada população (média e respetivo desvio-padrão) são estáticos e não têm em consideração as mudanças que ocorreram nos últimos anos, em termos populacionais (por exemplo, os fenómenos de imigração), pelo que se torna mais difícil a interpretação dos resultados, o que se prende com questões de validade desse teste.

Segundo Anastasi e Urbina (2000), só é possível verificar a qualidade e eficiência de um teste através de meios empíricos. Esse procedimento garante "a avaliação objetiva dos testes" (Anastasi, 2003, p. 34), determinando a precisão e validade dos mesmos. Segundo esta autora, a precisão "significa estabilidade e consistência (...) é a consistência de resultados obtidos pelo mesmo indivíduo, quando testado novamente com o mesmo teste, ou com a sua forma equivalente" (Anastasi, 2003, p. 34). Isto significa que um teste é consistente se este, utilizado segundo formas diferentes, aos mesmos indivíduos, em momentos diferentes, mantém o mesmo resultado, ou seja, um dos critérios de validade é a possibilidade de replicação dos resultados. Assim, está subjacente a argumentação de que a inteligência é inata, estável, mensurável e que não é influenciada pelo meio. Por último, a validade de um teste é um elemento crucial do mesmo, uma vez que indica "o grau em que o teste mede o que visa medir, comparando com critérios externos reconhecidos" (Freeman, 1976, p. 98), pelo que permite a verificação matemática da mensurabilidade do teste (Anastasi, 2003), por exemplo, através do cálculo de medidas como o Alpha de Cronbach (Cronbach, 1970).

Utilizar instrumentos baseados numa perspetiva psicométrica, é considerar que: (1) a inteligência é inata e estática; (2) a inteligência pode medir-se e que se traduz por um resultado numérico válido e consistente; (3) os fenómenos que ocorrem nos processos mentais são objetivos e, como tal, também mensuráveis; (4) os desempenhos não são situados, isto é, que não são influenciados pelo experimentador, situação, ou outros fenómenos exteriores ao sujeito; e (5) a velocidade é uma componente inerente à inteligência e a capacidades e competências mais elevadas, uma vez que, na maioria dos testes, o tempo de realização é limitado e a um menor tempo corresponde uma classificação mais elevada (Ribeiro & Almeida, 2005). Esta conceção de inteligência, bem como a forma de avaliá-la, afasta-nos do que se pretende nesta investigação, na qual se conceptualiza a inteligência como algo em construção e influenciada por processos dialógicos que ocorrem em contextos, cenários e/ou situações que os configuram e que também por eles são configurados. Assim, optámos por assumir uma abordagem dialógica na construção do conhecimento, afastando-nos de posições dicotómicas – como, por exemplo, correto e incorreto – que não nos permitem compreender em profundidade os processos inerentes à construção da inteligência e, por conseguinte, avaliar capacidades e competências numa perspetiva desenvolvimentista, com um carácter prospetivo, como se pretende que aconteça em contexto escolar (César, 2009, 2013a).

3.4.2. Perspetiva desenvolvimentista

Numa abordagem sócio-construtivista, a inteligência é algo que se vai construindo ao longo do processo de desenvolvimento, ou seja, desde que se nasce até que se morre, embora com um processo mais acelerado de desenvolvimento na infância e adolescência. É configurada pelas trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a), iluminando a natureza dinâmica e dialética da mesma. Esta abordagem deu origem a formas de avaliação da inteligência que assumem características diferentes das utilizadas pela perspetiva psicométrica, uma vez que se pretende compreender os processos que levam um indivíduo a mobilizar determinadas formas de pensamento, estratégias de resolução, argumentações e compreensões do mundo e das situações problemáticas próprias dos desempenhos que caracterizam um determinado estádio de desenvolvimento. O produto final não é tão valorizado, como acontece na perspetiva psicométrica, dando-se primazia aos processos (Cunha, 2008; Lourenço, 2010). Esta forma de conceber e avaliar a inteligência coaduna-se com uma perspetiva desenvolvimentista, na qual se iluminam os mecanismos de adaptação a uma nova situação problemática.

Os instrumentos que avaliam a inteligência em termos de "a maior ou menor maturidade intelectual já atingida por certa pessoa" (Lourenço, 2010, p. 42) têm a designação de provas de desenvolvimento [que designamos por provas desenvolvimentistas] e não de testes de desenvolvimento, uma vez que têm subjacentes os princípios epistemológicos da teoria elaborada por Piaget (1923, 1924, 1936, 1967). Lourenço (2010) afirma que "a teoria de Piaget é uma teoria mais interessada em saber como é que certas competências aparecem, emergem e atingem a sua maturidade do que em comparar sujeitos de diferentes idades relativamente a ela" (p. 165), pelo que se afasta do que é, habitualmente, feito quando se utilizam testes psicológicos. Por outro lado, se o interesse é perceber como é que determinadas capacidades ou competências são colocadas em ação, um das formas possíveis de o fazer é recorrendo ao método clínico piagetiano (Piaget, 1926). São exemplos de provas desenvolvimentistas as provas piagetianas, como a prova de conservação de substâncias líquidas ou sólidas, do peso ou do volume, ou a prova coletiva de desenvolvimento lógico *Epreuve Collective de Developpement Logique* (E.C.D.L.), elaborada por Hornemann (1975) e inspirada numa prova individual neo-piagetiana, a *Échelle de Développement de la Pensée Logique* (EPL), concebida por Longeot (1966, 1969, 1979).

Apesar deste método clínico não ser habitualmente abordado em livros de metodologia de investigação, diversos autores iluminam a extrema importância que assume quando se trata de investigar os processos de desenvolvimento e da aprendizagem (Bond & Tryphon, 2009; Müller et al., 2009; Tryphon & Vonèche, 1996).

Vygotsky (1934/1962), um autor extremamente crítico em relação à teoria piagetiana, em relação ao método clínico piagetiano salientava que, "é um instrumento imprescindível para o estudo das formações complexas do pensamento infantil em transformação e desenvolvimento" (p. 53). Mas não só escreveu sobre este método: inspirou-se nele para os estudos que veio a realizar no domínio da psicologia. Assim, embora o método clínico piagetiano tenha sido, frequentemente, ofuscado pelos estádios de desenvolvimento cognitivo, quando se fala deste autor, não deixa de ser um dos contributos mais originais e heurísticos que nos deixou.

A partir do método clínico piagetiano pretendia-se conhecer e compreender as formas de pensamento das crianças, aprendendo com elas, nomeadamente através das justificações que estas davam nas respostas e estratégias de resolução às quais recorriam face às questões colocadas. Desta forma, a elaboração do instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), utilizado pelos professores de Matemática e de disciplinas afins, inspirou-se nas provas desenvolvimentistas, uma vez que o que se pretende saber é como é que os alunos interpretam um determinado enunciado, bem como a que estratégias de resolução e raciocínios recorrem perante uma determinada tarefa ou instrução de trabalho. Não se pretende avaliar conhecimentos apropriados em anos anteriores, como nos testes de diagnóstico (Cortesão, 2002; Fernandes, 2005). O que importa mais não é determinar se a resposta está correta, ou não. Aliás, se ocorrer algum erro, esse erro leva-nos a compreender processos de raciocínio que lhe estão subjacentes e, caso algumas capacidades ou competências não consigam ser mobilizadas, isso é uma informação importante para a elaboração de tarefas escolares futuras, destinadas à apropriação de conhecimentos de matemática escolar. Como argumenta Piaget (1936), "a finalidade [deste método] era descobrir alguma coisa sobre o processo de pensamento subjacente, mas especialmente as suas respostas erradas" (p. 244), pois este autor acreditava que se podia aprender bastante através da análise dos erros. Em síntese, as provas piagetianas permitem ter acesso à "maturidade de um dado sujeito através de variáveis do tipo discreto (i.e., que tipo de inteligência, não quanta inteligência, é que esse sujeito usa para resolver certos problemas)" (Lourenço, 2010, p. 42).

Outro exemplo de prova desenvolvimentista é a *Epreuve Collective de Developpement Logique* (E.C.D.L.). Esta foi elaborada por Hornemann, em 1975, que se baseou na *Échelle de Développement de la Pensée Logique* (E.P.L.), concebida por Longeot, nos finais dos anos 60, do século passado (Carvalho, 2001; César, Camacho,

& Marcelino, 1991; César & Esgalhado, 1991). Segundo César e Esgalhado (1991), esta é uma prova "inspirada na teoria piagetiana (...) [e os] resultados exprimem-se em termos de estádios de desenvolvimento (pré-operatório, operações concretas, intermédio, operações formais A e operações formais B)" (p. 57).

A E.C.D.L. é composta por quatro subtestes, cada um referente a um esquema preciso: os cruzamentos, as lâmpadas, os desenhos e os jogos de letras (César et al., 1991; César & Esgalhado, 1991). O primeiro subteste, os cruzamentos, permite avaliar a interseção de classes, isto é, a capacidade do indivíduo classificar elementos. O segundo subteste, as lâmpadas, avalia a capacidade de raciocinar recorrendo ao pensamento combinatório. O terceiro subteste, os desenhos, avalia a capacidade de coordenação de um duplo sistema de referência. O último subteste, os jogos de letras, está relacionado com a capacidade do sujeito combinar letras para formar palavras, ou seja, com a análise combinatória (César et al., 1991; César & Esgalhado, 1991).

Também no IACC cada tarefa pretende avaliar um conjunto de capacidades e competências específicas, que foram identificadas pelos professores de Matemática como essenciais para serem capazes de ensinar os alunos de forma mais adequada (César, 2009; Ventura, 2012). Assim, o instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), em análise no capítulo dos resultados, assume-se como sendo uma prova desenvolvimentista e não psicométrica, em relação à forma como concebe e avalia as capacidades e competências de um determinado indivíduo, permitindo ter acesso aos processos – estratégias de resolução e raciocínios que lhe estão subjacentes. Mas, sobretudo, subscreve uma posição epistemológica sócio-construtivista e interacionista, assumindo que a inteligência se constrói na interação social e que, por isso mesmo, se os professores conhecerem, desde o início do ano letivo, as capacidades e competências que os alunos já mobilizam e as que precisam de ainda desenvolver, podem adaptar as práticas, em aula – e os processos interativos em jogo – às características, interesses e necessidades de cada aluno, recorrendo ao trabalho em díades e/ou pequenos grupos, bem como a tarefas adequadas a cada turma.

Os pedidos de justificação das respostas fornecidas em cada tarefa do IACC, através de palavras, contas, esquemas e/ou desenhos, pretendem que os alunos fundamentem as estratégias de resolução utilizadas e os raciocínios que lhes estão subjacentes, uma vez que nos interessa perceber quais as capacidades e competências que os alunos conseguem mobilizar e quais as que precisam de desenvolver. É também essa análise que permite identificar, de forma indutiva, tal como aconteceu com Piaget

(1936) e Inhelder e Piaget (1955), padrões de desempenho. Assim, o trabalho empírico não serve para comprovar um modelo previamente definido. O modelo é construído através da análise das respostas encontradas e, por isso mesmo, um assunto considera-se estudado e validado pelo método da exaustão: não interessa estudá-lo mais se, ao fim de muitos sujeitos examinados, já não se encontram respostas novas. Assim, não é a replicação, a fidedignidade, ou a validade, nem critérios estatísticos que estão associados à validade do método clínico piagetiano. É este ter conseguido encontrar as diversas respostas possíveis para uma determinada prova ou assunto, possibilitando, por isso mesmo, que um modelo seja construído no que se refere a esse fenómeno em estudo. Neste sentido, as provas desenvolvimentistas estão particularmente adaptadas a contextos escolares e a cenários de sala de aula, onde o método de exaustão permite aos professores saberem atuar em relação aos diversos casos possíveis e aprender não só com a sua experiência, mas também com a dos outros colegas que recorrem a este mesmo instrumento de avaliação de capacidades e competências.

CAPÍTULO 4

PROBLEMATIZAÇÃO E METODOLOGIA

4.1. TRAJETÓRIA DE PARTICIPAÇÃO AO LONGO DA VIDA: INVESTIGADOR

Como alguns colegas de profissão, o gosto pelo ensino e pela Matemática começou bem cedo. Para muitos, a escolha profissional era completamente descabida, pois ninguém podia gostar de Matemática, quanto mais passar o resto da vida a ensiná-la aos outros! Outros, apoiavam essa decisão, argumentando que seria um constante desafio ao longo da vida e que de monótona esta profissão não revelava nada. Foi com essa argumentação que nos identificámos. Por um lado, a Matemática é um conhecimento que, para além de se revelar bastante útil, assume uma magia especial quando trabalhamos com ela. Por outro lado, ensinar Matemática é uma oportunidade única de ajudarmos a configurar algumas trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a), nomeadamente àqueles que habitualmente rejeitam a Matemática, fazendo-os aperceber-se de que afinal não é um "bicho de sete cabeças" (Loureiro, Rijo, & César, 2003; Piscarreta, 2002; Piscarreta & César, 2004). Para nós, ser professor é ter a oportunidade de escrever um livro, com diversas narrativas, histórias de vida construídas colaborativamente, por todos e com todos!

A fim de cumprir o objetivo de sermos professor de Matemática, ingressámos na licenciatura de Ensino da Matemática, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, que naquela altura era composta por cinco anos (quatro anos curriculares e um ano de estágio pedagógico, que atualmente tem a designação de prática pedagógica supervisionada). Chegados ao 4.º ano da licenciatura, no qual tivemos disciplinas do domínio das Ciências da Educação, tivemos a oportunidade de entrar em contacto com práticas profissionais que, até então, só vivenciávamos enquanto alunos. Esse momento permitiu reafirmar o gosto que tínhamos quanto ao ensino da Matemática. Nesse ano, tivemos a oportunidade (única) de frequentar a disciplina de Psicologia da Educação, lecionada pela Professora Margarida César. Concluída esta disciplina, e após termos participado em diversas ações de formação, destinadas a professores e futuros professores que pretendessem trabalhar no projeto *Interacção e Conhecimento* (IC), bem como termos observado, enquanto observadores externos, aulas do mencionado projeto, passámos a fazer parte da equipa central do IC.

Estávamos no ano letivo 2005/06. Seguiu-se a prática pedagógica supervisionada (2006/07), onde desenvolvemos práticas segundo os princípios epistemológicos e pedagógicos deste projeto. Nesse ano, participámos na formação de jovens investigadores, que caracteriza o IC (Hamido & César, 2009; Ventura, 2012): discussões temáticas (teóricas e relativas às práticas) com a equipa central do projeto; elaboração de materiais a utilizar, em aula, bem como nas ações de formação para professores; tratamento e análise de dados; e escrita colaborativa de artigos para eventos científicos, nacionais e internacionais. Posteriormente, fomos selecionados como assistente de investigação deste projeto (2007/08 e 2008/09), o que nos permitiu ter acesso ao *corpus* empírico, participando no tratamento e análise de dados recolhidos nas várias turmas. Apercebemo-nos, ao longo desses anos, das solicitações de professores e outros agentes educativos relativamente à necessidade de terem acesso a dados mais detalhados sobre o instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), incluindo a sua forma de elaboração e utilização, no âmbito do IC.

Começámos por realizar um trabalho de investigação (Mestrado) no qual estudámos os contributos do trabalho colaborativo, nomeadamente em díade, em cenários de educação formal, observando a mudança, ou manutenção, das representações sociais que os alunos constroem sobre a Matemática (Machado, 2008). Esta investigação foi realizada assumindo um paradigma interpretativo e através do desenvolvimento de um projeto de investigação-ação. Os resultados iluminaram a relevância do trabalho colaborativo, da natureza das tarefas propostas e do contrato didático negociado nos desempenhos matemáticos dos alunos. Revelaram, também, que ter acesso a um conhecimento mais aprofundado e sustentado dos alunos, desde o início do ano letivo, é essencial para adaptar as tarefas e instruções de trabalho às características, necessidades e interesses dos mesmos, proporcionando-lhes uma educação de qualidade, que promove a equidade no acesso ao sucesso escolar. Assim, por tudo o que foi construído, colaborativamente, nesta trajetória de participação ao longo da vida (César, 2013a), bem como pela vontade de continuar a enriquecê-la no domínio da educação e, em especial, da educação matemática, nasceu esta investigação.

4.2. PROBLEMATIZAÇÃO E QUESTÕES DE ESTUDO

Estamos perante um mundo em constante mudança, em que as novas tecnologias ganham relevo. Como tal, são cada vez mais exigidas, aos cidadãos, capacidades e competências que lhes permitam aceder a esse conhecimento, bem como o serem capazes de gerir os vários conflitos configurados por essa mudança. A Matemática assume-se, no mundo atual, como uma ferramenta cultural (Vygotsky, 1932/1978, 1934/1962) mediadora entre os vários conhecimentos. A importância que a Matemática assume é sustentada pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), que salienta que "A necessidade de compreender e de ser capaz de usar a matemática na vida quotidiana, e no local de trabalho, nunca foi tão premente e continuará a crescer" (NCTM, 2007, p. 4). Desta afirmação emerge a argumentação de que os cidadãos devem revelar uma maior facilidade na resolução de problemas, o que requer um maior domínio de conhecimentos matemáticos, isto é, que desenvolvam uma elevada literacia matemática (Santiago et al., 2012).

De acordo com Abrantes (1996), a literacia matemática é entendida como "um conjunto das competências matemáticas necessárias para a vida contemporânea, valorizando-se a capacidade de identificar os dados ou as operações necessárias, em estimar a razoabilidade de resultados, em interpretar gráficos e tabelas, ou em decidir os passos necessários à resolução de um problema" (p. 95). Este entendimento acerca do conceito de literacia coaduna-se com a do estudo internacional PISA, realizado em 2003, uma vez que a define como

> a capacidade de um indivíduo identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de usar e se envolver na resolução matemática das necessidades da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo. (ME/GAVE, 2004, p. 7)

Estas definições anteriores acentuam a pluralidade dos vários contextos, cenários e/ou situações onde pode ocorrer a utilização da Matemática, encarada como ferramenta para a resolução de problemas. Assim, emerge a noção de que a literacia não se adquire mas que se apropria, desenvolvendo-se ao longo da vida. Para que isso suceda, é necessário que a Escola, enquanto espaço/tempo dialógico, configure espaços de pensamento (Perret-Clermont, 2004), nos quais os alunos se possam tornar mais interventivos e participantes, mais críticos e reflexivos quanto aos processos de ensino e de aprendizagem. Desta forma, as práticas, em aula, deverão promover, por um lado, a apropriação de conhecimentos (matemáticos) com sentido (Bakhtin, 1929/1981) para quem os aprende e, por outro lado, o desenvolvimento de capacidades e competências (matemáticas) essenciais para formar cidadãos críticos e interventivos, capazes de atuar numa sociedade cada vez mais exigente.

Nos documentos de política educativa, portugueses e internacionais (Abrantes et al., 1999; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007; Santiago et al., 2012), a Matemática assume especial importância, por ser uma disciplina com características próprias, que permite que os alunos desenvolvam capacidades, competências e formas de pensamento essenciais. No entanto, se analisarmos a forma como o sistema educativo português está organizado, especialmente no que respeita à escolaridade básica (até ao 9.º ano de escolaridade), apercebemo-nos de que os alunos conseguem transitar de ano mesmo com nível inferior a 3 à disciplina de Matemática, o que ilustra uma situação paradoxal. Por um lado, a Matemática é importante no futuro dos alunos, o que justifica que seja obrigatória; mas, por outro lado, transmite-se uma mensagem implícita de que não é necessário obter sucesso a esta disciplina, se queremos completar a escolaridade básica no ensino educativo português. Esta situação é menos flagrante no ensino secundário, por mudar a escala em que se efetuam as classificações, assim como as regras de avaliação e transição de ano. No entanto, esta situação não deixa de realçar o papel seletivo que a Matemática assume nas trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a), nomeadamente na Escola, no sentido em que existem muitos cursos superiores que utilizam como critério de ingresso a classificação obtida nas provas de avaliação externa de Matemática mas, simultaneamente, antes de ingressarem no ensino secundário muitos alunos já construíram uma representação social negativa da Matemática, deixando de acreditar que são capazes de a aprender (Machado, 2008; Piscarreta, 2002). Desta forma, torna-se urgente o combate ao insucesso académico nessa disciplina, que passa pela mudança das práticas profissionais dos docentes, facilitando que os alunos possam ter acesso ao sucesso académico.

A contextualização de qualquer trabalho de investigação assume-se como uma peça fundamental (Kincheloe & Tobin, 2006). Permite ao leitor situá-lo no tempo e no espaço, duas dimensões essenciais para a compreensão de qualquer fenómeno, nomeadamente educativo. Também permite compreender o percurso traçado e as escolhas tomadas. Estando cientes de que ocorreram muitas situações e reformas educativas importantes, ao nível das políticas educativas em Portugal, optámos por centrar esta breve análise no pós 25 de abril de 1974 e, mais especificamente, a partir da Lei de Bases do Sistema Educativo, em 1986 (AR, 1986).

Com a promulgação da Lei de Bases do Sistema Educativo (AR, 1986) surge, em 1991, o programa de Matemática para o ensino básico (ME/DGEBS, 1991). Entre algumas recomendações, em relação à forma de operacionalização do currículo prescrito (Pacheco, 2005), está a recomendação de que "As actividades a promover, individualmente ou em grupo, serão diversificadas e motivadoras, visando o espírito de pesquisa, a criatividade, o gosto de aprender, a autonomia e o sentido de cooperação" (ME/DGEBS, 1991, p. 194). No entanto, apesar do que era recomendado nos documentos de política educativa, o que era operacionalizado, em cenários de educação formal, como a sala de aula, nem sempre correspondia ao que era sugerido. O trabalho em grupo assumia-se como uma prática, em aula, que privilegiava o desenvolvimento de atividades matemáticas centradas em tarefas de natureza diversificada (Abrantes, 1994). Porém, de acordo com um relatório produzido pela Associação de Professores de Matemática, o ensino expositivo era o que predominava nas escolas públicas portuguesas (Precatado et al., 1998).

Assim, nesse contexto no qual se apelava ao desenvolvimento de práticas, em aula, com uma forte componente de trabalho em grupo, iniciou-se o projeto *Interacção e Conhecimento* (IC), em 1994/95, que operacionalizava o objetivo último expresso em César (1994): "Implementar projectos de investigação-acção, que tenham um maior número de sessões com interacções, desde que eles sejam elaborados em conjunto com professores, dispostos a explorar o trabalho em díade ao longo das aulas que destinam a esta unidade temática" (p. 499). Trata-se, por isso mesmo, de um projeto que partiu de questões, pedidos e comentários de professores e alunos que frequentavam escolas públicas portuguesas, no ensino regular diurno.

O projeto IC apresentava como principais objetivos estudar e promover o trabalho colaborativo em cenários de educação formal, como forma de melhorar o desempenho académico dos alunos e desenvolver capacidades e competências sócio-cognitivas e emocionais. Outro objetivo deste projeto era contribuir para uma educação mais inclusiva e intercultural (César, 2003, 2007, 2009, 2013a, 2013b; César & Santos, 2006; Ventura, 2012).

Este projeto teve a duração formal de 12 anos (1994/95 a 2005/06) e assumiu, sobretudo nos primeiros anos, um paradigma interpretativo e, posteriormente, também o paradigma sócio-crítico (Hamido & César, 2009), espelho do desenvolvimento pessoal e profissional dos professores/investigadores e investigadores (César, 2009; Hamido & César, 2009). Este projeto desenvolveu-se recorrendo a três *designs* diferentes, permitindo estabelecer conexões entre o que se aprendia através de cada um deles: (1) estudos *quasi-experimentais*; (2) projetos de investigação-ação; e (3) estudos de caso. O *Design* 1 pretendia estudar detalhadamente as características dos processos interativos e da formação de díades, bem como a influência da natureza das tarefas e instruções de trabalho nos desempenhos dos alunos. É um nível que complementa e alarga o trabalho iniciado anteriormente (César, 1994) e que permite estudar, detalhadamente, com condições empíricas específicas, os diversos elementos que configuram os jogos interativos, nomeadamente em cenários de educação formal (Carvalho, 2001; Monteiro, 2003). O *Design* 2 caracterizou-se pelo desenvolvimento de trabalho colaborativo, entre alunos, bem como destes com o professor/investigador, em aula, pelo menos durante um ano letivo, fazendo apelo a conhecimentos apropriados nos estudos realizados no âmbito do *Design* 1. Este *design* tinha como principais objetivos estudar o papel das interações sociais, nomeadamente entre pares, na apropriação de conhecimentos, bem como na mobilização e desenvolvimento de capacidades e competências, identificando os diferentes tipos de interação estabelecidas entre cada par e compreendendo o papel mediador das interações sociais nos desempenhos dos alunos (César, 2000a, 2003, 2009, 2013a, 2013b; Dias, 2008; Machado, 2008; Ventura, 2012). O *Design* 3, que surgiu nos últimos anos do projeto, referia-se ao estudo de caso de alunos que necessitavam de apoios educativos especializados (Borges, 2009; N. Santos, 2008; M. Silva, 2008), de alunos em risco de abandono escolar (Oliveira, 2006) e à educação de adultos pouco literados, que tinham já experiências de insucesso escolar acumulado e/ou abandono precoce (Badalo, 2006, 2012; Courela, 2007).

Na passagem do *Design* 1 para o *Design* 2 tornou-se claro, para a coordenadora do projeto IC e para os professores que com ela trabalhavam, ser necessário construir um instrumento que avaliasse as capacidades e competências dos alunos, pois nenhum instrumento desenvolvimentista e baseado nos princípios teóricos e epistemológicos que assumíamos estava disponível, em Portugal. A equipa central do IC considerava que estas informações eram essenciais para conseguir desenvolver práticas bem adaptadas aos alunos de cada turma, ou seja, para conseguir ter em consideração as características, necessidades e interesses dos alunos quando os professores elaboravam, adaptavam ou selecionavam as tarefas que seriam propostas a uma determinada turma.

De acordo com os princípios epistemológicos e pedagógicos do projeto IC (César, 2009; Hamido & César, 2009; Ventura, 2012) pretendia-se construir um instrumento desenvolvimentista, que pudesse ser respondido por alunos do 5.º ao 12.º ano de escolaridade e que iluminasse a trajetória de desenvolvimento que se observava quando se confrontavam dados de muitas turmas, dos diversos anos de escolaridade considerados. Assim, deveria avaliar capacidades e competências e não conhecimentos matemáticos referentes aos anos de escolaridade anteriores. Pretendia-se, também, que pudesse ser usado, de forma autónoma, pelos professores, depois de participarem em ações de formação, onde aprendessem e discutissem a sua utilização. Esta característica possibilitava que os dados recolhidos com este instrumento pudessem contribuir para a melhoria da qualidade da educação, através das práticas docentes, adaptando-as, de forma sustentada, às características, necessidades e interesses dos alunos de cada turma.

Integrando o currículo dos ensinos básico e secundário, a Matemática constitui uma oportunidade para desenvolver capacidades e competências, trabalhadas através dos conhecimentos que se apropriam (Perrenoud, 2001; Roldão, 2003) e das experiências de aprendizagem vivenciadas (Abrantes, 1994; Cobb & Hodge, 2007; Ponte et al., 1998). Deste modo, é preciso saber quais as capacidades e competências que os alunos conseguem mobilizar, desde o início do ano letivo, bem como as que precisam de desenvolver. No entanto, para que tal possa ser possível, deverá ocorrer uma rutura com as crenças no que se refere às práticas profissionais dos professores de Matemática (César, 2003, 2009, 2013a, 2013b).

Pelo que foi exposto, o problema em estudo nesta investigação é a inadequação de algumas práticas desenvolvidas nas aulas de Matemática, por falta de conhecimento das capacidades e competências (matemáticas) dos alunos, desde o início do ano letivo. Tratando-se de um problema real e abrangente, foi necessário focalizá-lo para que pudesse dar origem a esta investigação. Assim, optámos por realizar um estudo de caso, focalizado num instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas) (IACC), que permite, ainda que parcialmente, como sucede habitualmente em educação, encontrar formas de ultrapassar este problema. Assim, emergiram as seguintes questões de investigação que norteiam o estudo:

(1) Como foi o processo de construção do instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), usado na disciplina de Matemática e afins?

(2) Como são analisados os desempenhos dos alunos quando se utiliza este instrumento, de acordo com os princípios do projeto *Interacção e Conhecimento* (IC)?

(3) Assumindo uma perspetiva desenvolvimentista, que padrões de desempenho esta análise permite identificar? Como se caracteriza cada um deles?

(4) Como contribui o IACC para práticas, em aula, nomeadamente quanto à formação das primeiras díades, no início do ano letivo?

(5) Como é que os conhecimentos sobre a turma e cada aluno, obtidos com o IACC, configuram a elaboração, adaptação e seleção de tarefas matemáticas?

O objetivo principal desta investigação consiste em estudar e compreender as potencialidades e os contributos de um instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas), construído no âmbito do projeto IC (César, 2009; Hamido & César, 2009; Machado, 2008). Para a consecução deste objetivo, pretendemos analisar este instrumento, as respostas dos alunos e as práticas profissionais que, a partir delas, foram desenvolvidas, nos 12 anos de vigência deste projeto (1994/95-2005/06), que reuniu um *corpus* empírico e conceptual muito vasto e rico. Como objetivos específicos considerámos:

(1) Analisar o processo de construção do instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), utilizado na disciplina de Matemática e afins, incluindo a explicitação das suas características;

(2) Caracterizar o processo de análise dos desempenhos dos alunos, quando se utiliza este instrumento, de acordo com os princípios do projeto *Interacção e Conhecimento* (IC);

(3) Analisar os desempenhos obtidos, para cada uma das cinco tarefas do IACC, identificando padrões de desempenho que emergiram de uma análise indutiva;

(4) Exemplificar os contributos de um instrumento deste tipo quando se pretende desenvolver práticas, em aula, nomeadamente quanto à formação das primeiras díades, quando se inicia o ano letivo;

(5) Discutir os impactes dos conhecimentos obtidos com este instrumento para a elaboração, adaptação ou seleção de tarefas matemáticas.

A tese subjacente a esta tese de doutoramento comporta três aspetos complementares: (1) é possível contribuir para uma educação matemática de elevada qualidade; (2) para isso, é necessário ter disponível um instrumento que permita avaliar as capacidades e competências (matemáticas) dos alunos desde a primeira semana de aulas; e (3) o IACC corresponde ao tipo de instrumento que os professores do ensino básico e secundário necessitam para conhecerem as capacidades e competências que os alunos já conseguem mobilizar e as que precisam de desenvolver, no início do ano letivo, facilitando o desenvolvimento de uma educação matemática de qualidade. Este trabalho, através dos resultados apresentados, pretende confirmar esta tese através de evidências empíricas.

4.3. PARADIGMA INTERPRETATIVO

No domínio das ciências da educação, podemo-nos posicionar entre três paradigmas metodológicos: o paradigma positivista; o paradigma interpretativo; ou o paradigma sócio-crítico (Cohen, Manion, & Morrison, 2001). O posicionamento do investigador quanto a esta opção deve estar de acordo com os objetivos e/ou questões que norteiam a investigação. Porém, como sustenta van der Maren (1996), a forma como o investigador interpreta o mundo tende a traduzir-se nas escolhas que realiza, ou seja, a própria identificação do problema, a seleção das questões de investigação e/ou dos objetivos, já traduz vivências, conhecimentos, crenças, valores, princípios epistemológicos que são assumidos pelo próprio investigador (Gonçalves, 2010; Hamido & César, 2009).

Nesta investigação posicionamo-nos no paradigma interpretativo, uma vez que pretendemos estudar um instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas), produzindo conhecimento, através da análise das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos nas suas respostas ao IACC e através do relato de histórias dos participantes nesta investigação, ou seja, dando voz aos diversos participantes e desocultando as interpretações que eles elaboraram sobre o instrumento e os fenómenos em estudo. Concordamos com a argumentação de Erickson (1986), que assume que "a principal relevância da abordagem interpretativa [que designamos por paradigma interpretativo], na investigação no ensino, diz respeito a aspetos de conteúdo mais do que aspetos de procedimento" (p. 120). Assim, como referem Denzin e Lincoln (1998), a investigação que se desenvolve num paradigma interpretativo envolve uma interpretação do objeto em estudo, na procura da sua compreensão através dos sentidos que os participantes lhe atribuem.

A investigação que tem subjacente o paradigma interpretativo tem como preocupação estudar a ação dos participantes e não tanto os comportamentos (Erickson, 1986). Segundo este autor, a análise realizada numa investigação interpretativa baseia-se nos processos em curso e nos diferentes aspetos que lhe servem de mediadores, abrangendo "o comportamento físico e ainda os significados (*meaning interpretations*) que lhe atribuem o ator e aqueles que interagem com ele. O objeto da investigação social interpretativa é a ação" (Erickson, 1986, p. 127), uma vez que, para o autor, *ação* é o "comportamento físico acrescido de significados que o ator e aqueles com os quais interage atribuem" (p. 127). Também Denzin e Lincoln (1994) realçam a importância que o significado assume no paradigma interpretativo, uma vez que são os próprios significados dos participantes, que nesta investigação designamos por sentidos (Bakhtin, 1929/1981), que norteiam a procura da compreensão do fenómeno em estudo. Isto é, o objeto geral da investigação, no âmbito do paradigma interpretativo, "é o "mundo humano" enquanto criador de sentido (…) a investigação qualitativa interpretativa tem como objetivo a compreensão do significado ou da interpretação dada pelos próprios sujeitos inquiridos, com frequência implicitamente, aos acontecimentos que lhes dizem respeito e aos "comportamentos" que manifestam (que são definidos em termos de "ações")" (Lessard-Hébert, Goyette, & Boutin, 2005, p. 175, aspas no original). Também Gonçalves (2010) salienta esse aspeto, pois considera que este tipo de investigação se baseia numa

> perspectiva compreensiva, ou seja, na necessidade de compreender e interpretar o significado dos fenómenos sociais; nesta medida, permite a descrição, interpretação e análise crítica ou reflexiva sobre os fenómenos estudados e aumenta o carácter reflexivo das práticas e propostas educativas do campo em estudo. (p. 48)

Assim, cabe ao investigador posicionar-se nesse mundo, estando atento às várias relações entre as formas de atuação e reação e aos sentidos que os agentes lhes atribuem através das interações sociais, descobrindo "esquemas específicos, da identidade social de um dado grupo" (Erickson, 1986, p.132). Quando se escolhe realizar uma investigação baseada no paradigma interpretativo, também se está interessado na dimensão social da construção desses sentidos, o que significa ter em consideração "a relação entre as perspetivas de significado (*meaning perspectives*) dos atores e as circunstâncias ecológicas da ação na qual se encontram envolvidos" (Erickson, 1986, p. 127). Desta forma, posicionando-nos no domínio da educação, a investigação interpretativa procura "compreender os modos pelos quais professores e alunos, nas suas ações conjuntas, constituem [configuram] ambientes [que preferimos designar por cenários] uns para os outros" (Erickson, 1986, p. 128). Como Schwandt (1994) sustenta, subscrever o paradigma interpretativo possibilita um profundo *insight* sobre o "complexo mundo das experiências vivenciadas, do ponto de vista de quem as vivencia" (p. 118).

A investigação interpretativa configura a possibilidade do investigador apresentar as suas construções acerca do que se está a ser estudado, bem como as de todos os participantes da investigação (Guba & Lincoln, 1994). Assim sendo, e como afirma Stake (1995/2009), os investigadores que se situam neste tipo de paradigma "privilegiam a compreensão das complexas inter-relações entre tudo o que existe" (p. 53), construindo descrições densas sobre a realidade que observam. Para este autor, descrições densas "não são complexidades objetivamente descritas; são as perceções particulares dos actores" (p. 57), isto é, construir descrições densas não significa elaborar descrições exaustivas e pormenorizadas sobre o fenómeno que se está a investigar, podendo levar o leitor a perder-se na leitura que realiza, mas sim elaborar descrições dando voz aos participantes, iluminando as suas próprias construções acerca da realidade, relacionando-as com as do próprio investigador. Esta argumentação também é visível em Merriam (1988), quando esta autora refere que uma investigação é interpretativa quando assumimos

> a existência de múltiplas realidades - que o mundo não é qualquer coisa de objetivo que 'está fora', mas que é função das perceções e interações pessoais. É um fenómeno altamente subjetivo que necessita de interpretação e não tanto de medida. Mais do que os factos, as crenças estão na base da perceção. (p. 17, aspas no original)

Denzin (2002) considera que o processo interpretativo passa por seis etapas sucessivas:

> 1. delimitação (*framing*) da questão de investigação
> 2. desconstrução e análise crítica das conceções prévias do fenómeno
> 3. captura do fenómeno
> 4. fragmentação do fenómeno, ou sua redução aos elementos essenciais e corte da sua ligação ao mundo natural, de forma que as suas estruturas essenciais e características possam ser desocultadas

5. construção do fenómeno ou sua recolocação em termos das partes essenciais, peças e estruturas
6. contextualização do fenómeno ou sua recolocação de volta no mundo social natural. (pp. 349-350)

Para este autor, quando formulamos as questões de investigação, e atendendo a que nos situamos no paradigma interpretativo, devemos estar interessados na compreensão do fenómeno em estudo e não na obtenção de relações de causa e efeito, isto é, as questões de investigação devem ser formuladas em termos de um *como* e não de um *porquê*. Este tipo de formulação das questões de investigação ajusta-se a esta investigação no sentido em que pretendemos compreender um fenómeno complexo e multifacetado – as potencialidades e os contributos de um instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas). Uma vez que participámos no projeto IC e desenvolvemos práticas segundo os princípios epistemológicos e pedagógicos desse projeto, o instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas) é algo bastante próximo e familiar. Assim, como Denzin (2002) refere na segunda etapa, tivemos que desconstruir as conceções prévias sobre esse instrumento e sobre as práticas profissionais, procurando compreender, de uma forma mais alargada (respostas de todas as turmas), crítica e reflexiva, as origens do referido instrumento bem como a sua implicação nas práticas profissionais.

Enquanto que a desconstrução do fenómeno é encarada como uma ação que foi realizada no passado, a captura do fenómeno ocorre no presente, isto é, capturar um fenómeno significa situá-lo, em termos do espaço e do tempo, no contexto ou cenário no qual ocorre (Denzin, 2002). Este autor afirma que "Pela captura do fenómeno em estudo, o investigador torna-o disponível para o leitor. O investigador apresenta as experiências como ocorrem ou como têm sido reconstruídas" (p. 355). Desta forma, a existência de múltiplos relatos que o investigador vai recolhendo de vários participantes, irá enriquecer a compreensão do fenómeno em estudo, pois a existência de "Múltiplas histórias permitem ao investigador identificar as experiências convergentes, embora ele ou ela possa usar qualquer história, se esta contribui para a compreensão geral do fenómeno" (Denzin, 2002, p. 355). Foi o que procurámos fazer ao recorrer a diversas respostas ao instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas), às entrevistas posteriores que foram feitas, bem como a relatórios e questionários, instrumentos produzidos por uma enorme variedade de participantes, o que permitiu triangular as fontes e os instrumentos de recolha de dados.

Na quarta etapa, em que ocorre a identificação dos vários constituintes do fenómeno em estudo, o investigador confronta-os, de forma crítica, revelando o que é essencial, "não interpreta[ando] o fenómeno em termos dos significados padronizados que lhes são atribuídos pela literatura"(Denzin, 2002, pp. 355-356). Quando se realiza uma investigação interpretativa, está-se interessado nos vários sentidos que os participantes atribuem ao fenómeno em estudo e, como afirmam Guba e Lincoln (1997), a teoria torna-se mais forte e coesa quando emerge dos dados, neste caso, das várias interpretações que cada participante constrói acerca do fenómeno.

Segue-se a reconstrução do fenómeno, na qual o objeto de estudo é encarado de novo como um todo sendo, no entanto, mais abrangente que a soma das partes. Finalmente, após a reconstrução do fenómeno, procede-se à sua contextualização no respetivo cenário, para que o processo interpretativo esteja concluído (Denzin, 2002). No entanto, este autor realça que as interpretações acerca do mesmo fenómeno não se esgotam, uma vez que podem recomeçar quando o investigador retoma o estudo do mesmo. Daí o seu carácter forçosamente particular e situado, no tempo e no espaço.

4.3.1. Critérios de qualidade na investigação interpretativa

A preocupação com a qualidade da investigação que pretendemos realizar fez-nos procurar critérios que potencializassem essa mesma qualidade. Cohen e seus colaboradores (2001) argumentam que, numa investigação que possa contribuir para o desenvolvimento de um domínio específico do saber, como é o caso desta investigação, é essencial garantir a validade. Os mesmos autores definem validade como sendo "a pedra de toque de todos os tipos de investigação em educação" (Cohen et al., 2001, p. 106).

Já Erickson (1986), embora não use o conceito de validade numa investigação interpretativa, argumenta que deverá haver uma pertinência dos dados e uma consistência entre os objetivos da investigação e a recolha de dados. Como o próprio autor afirma, "Do ponto de vista de uma conceção mais deliberativa do trabalho de campo, a principal questão de um método de investigação é o estabelecimento de uma relação consistente entre os objetivos da investigação e a recolha de dados, envolvendo-os" (Erickson, 1986, p. 140).

Na investigação interpretativa, a validade dos dados pode ser apreciada através da honestidade, profundidade, riqueza e extensão dos dados, da aproximação aos participantes e da extensão da triangulação (Courela, 2007). Yin (2003) identifica três dimensões associadas à validade de uma investigação: (1) validade de construção, que é relativa ao "estabelecimento de medidas de operacionalização adequadas aos conceitos em estudo" (p. 34); (2) validade interna, que se aplica a estudos de caso em que "o investigador está a tentar determinar se um acontecimento *x* conduz ao acontecimento *y*" (p. 36, itálico no original); e (3) validade externa, que está relacionada com a possibilidade de generalização dos resultados do estudo.

Hamido e César (2009) sustentam que a validade numa investigação pode ser analisada segundo dois pontos de vista: externo e interno. De acordo com Cohen e seus colaboradores (2001), a validade externa de um estudo interpretativo prende-se "com o detalhe e a profundidade da descrição para que o leitor possa decidir quais e em que extensão determinados resultados de uma investigação são transferíveis para outra situação" (p. 109). Já Hamido (2005) acentua a importância da validade externa ao referir que esta "reporta-se à possibilidade de estender as inferências que se façam sobre os dados recolhidos numa investigação a outros agentes e terrenos, no espaço e no tempo" (p. 244), argumentando que os sentidos que os participantes atribuem aos dados e às inferências sobre os mesmos são importantes. Desta forma, e atendendo ao papel do investigador numa investigação interpretativa, o envolvimento pessoal e intenso do mesmo no terreno, bem como as respostas em profundidade dos participantes, permitem atingir os níveis de qualidade desejáveis (Cohen et al., 2001).

Para Merriam (1988), a validade externa refere-se à possibilidade de generalizar os resultados do estudo a outras situações. No que respeita à validade interna, esta autora entende-a como sendo a congruência dos resultados com a(s) realidade(s). Assim, a validade interna é tratada através do

> uso da triangulação, partilha (*checking*) das interpretações com os sujeitos entrevistados ou observados, permanência no local durante um certo tempo, solicitar aos pares que comentem os resultados emergentes, envolvimento dos participantes em todas as fases da investigação, e clarificação dos enviesamentos e suposições (*assumptions*). (p. 183)

Esta argumentação também é sustentada por Yin (2003), pois afirma que é através da triangulação que se consegue aumentar a validade de construção de um estudo. Cohen e seus colaboradores (2001) definem triangulação como o "recurso a dois ou mais métodos de recolha de dados no estudo de aspetos do comportamento humano" (p. 112), pelo que nesta investigação recorremos ao uso de diversos instrumentos de recolha de dados por forma a aumentar a validade dos resultados da investigação. Ainda para os mesmos autores, o recurso ao uso da triangulação possibilita uma visão mais holística dos resultados acerca dos fenómenos educacionais. Como argumentam Denzin e Lincoln (1994), Hamido e César (2009) e Patton (1990), a diversidade de fontes (informadores) e instrumentos de recolha de dados permite a triangulação, que é um dos critérios para atingir qualidade na investigação interpretativa.

Para Stake (1995/2009), a triangulação é sinónimo da existência de protocolos que o investigador estabelece e que "não dependam apenas da simples intuição e das boas intenções de "fazer as coisas bem feitas" " (p. 121, aspas no original). Segundo o mesmo autor, existem quatro tipos de triangulação: triangulação das fontes de dados, triangulação de investigadores, triangulação da teoria e triangulação metodológica. Por triangulação das fontes de dados, este autor entende a observação do fenómeno em estudo em diversos momentos e espaços, por diversas pessoas, com a finalidade de observarem se este se mantém inalterado, ou seja, este tipo de triangulação "é um esforço para ver se o que estamos a observar e a relatar transmite o mesmo significado quando descoberto em circunstâncias diferentes" (Stake, 1995/2009, p. 126). Para a atingirmos, procurámos as vozes de diversos participantes: investigadores, professores/investigadores, alunos, observadores externos, avaliadores externos, familiares e outros significativos.

A triangulação de investigadores consiste na observação do mesmo fenómeno por vários investigadores. Assim, os dados foram, em alguns casos, analisados por outros investigadores (por exemplo, em dissertações de mestrado, teses de doutoramento, artigos, capítulos de livros e/ou comunicações em eventos da especialidade). Para além disso, alguns dados foram objeto de discussão durante as reuniões da equipa central do projeto IC, nas quais participámos, bem como de outras em que não participámos diretamente, mas cujos registos e atas consultámos. Por último, como membros da equipa central do referido projeto, habituámo-nos a trabalhar colaborativamente. Assim, apesar da equipa já não existir formalmente, continuamos a manter este tipo de práticas, em pequenos grupos, quer em relação às práticas docentes quer em relação à investigação, nomeadamente no que se refere à análise de dados. Desta forma, à medida que os vários investigadores descrevem o fenómeno, a interpretação é triangulada (Stake, 1995/2009). A triangulação teórica está relacionada com o recurso a diversas perspetivas teóricas, quando se procede à análise de dados (Stake, 1995/2009). Nesta investigação, optámos por estabelecer uma interface dialética entre os domínios da educação matemática e o da psicologia da aprendizagem, do desenvolvimento e da educação. Por último, a triangulação metodológica está relacionada com o recurso a vários instrumentos de recolha de dados como, por exemplo, questionários, entrevistas, conversas informais, observação, tarefas de inspiração projetiva, recolha documental, entre outros. Este autor considera que podemos ganhar, através da triangulação, uma melhor compreensão das várias dimensões da problemática em estudo e, por considerar que "nenhumas observações ou interpretações são perfeitamente repetíveis, a triangulação serve também para clarificar o sentido ao identificar diferentes modos do fenómeno ser encarado" (Stake, 1994, p. 241).

Numa investigação interpretativa, o investigador deverá ter acesso a dados sobre as conceções, os significados, os sentidos (Bakhtin, 1929/1981) ou os valores expressos, mais ou menos explicitamente, pelos participantes. A validade vai também depender, segundo Erickson (1986), da colaboração e da relação de confiança estabelecida entre investigador e participantes. Segundo o mesmo autor, existem diversas formas de estabelecer e manter uma relação de confiança e de colaboração com os participantes, durante a investigação. Erickson (1986) propõe quatro: (1) neutralidade de juízos face aos participantes; (2) confidencialidade (o investigador nunca deverá formular comentários junto dos participantes sobre o que observou relativamente a um deles); (3) envolvimento (o investigador deve tentar envolver diretamente os informadores na investigação como se fossem colaboradores); e (4) clareza (o investigador deve clarificar quais as questões principais que orientam a investigação, bem como os procedimentos a utilizar para a recolha de dados).

Estes são princípios éticos que seguimos e que complementámos com outros, na prática habitual no projeto IC: (1) a autorização informal, incluindo as dos próprios alunos; (2) a autorização explícita para utilizar citações, fotos, digitalizações, entre outros materiais após serem lidos e/ou visionados pelos próprios; (3) a devolução das interpretações produzidas aos participantes, sempre que isso se afigurava possível; (4) a confrontação das interpretações dos investigadores e professores/investigadores com as dos participantes; e (5) um profundo respeito pela diversidade e pela pluralidade de opiniões, argumentações e culturas.

4.4. ESTUDO DE CASO

O recurso aos estudos de caso, em especial em educação, tem vindo a ser mais frequente em investigações que assumem o paradigma interpretativo (Stake, 1995/2009), relacionando-se com a compreensão de situações específicas das práticas profissionais (Merriam, 1988; Stake, 1995/2009). Trata-se, portanto, de um *design* de investigação que possibilita um conhecimento mais rico e aprofundado acerca do assunto que está a ser estudado (Rarick, 2003). Nesta investigação, o caso em estudo é o instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas), construído no âmbito do projeto *Interacção e Conhecimento.* Pretendemos realizar uma análise rica e densa desse instrumento, no que respeita à sua conceção e aos desempenhos evidenciados pelos alunos, durante os 12 anos de vigência do referido projeto, percebendo as potencialidades do mesmo para o desenvolvimento de práticas baseadas no trabalho colaborativo e para a seleção, adaptação ou elaboração de tarefas matemáticas que sustentam essas mesmas práticas, em aula. Uma vez que as análises desse instrumento vão ser produzidas pela primeira vez, não podemos considerar esta investigação como uma meta-análise. Por outro lado, uma meta-análise deve ser realizada por investigadores seniores, com uma perspetiva epistemológica-conceptual sólida, ou seja, trata-se de uma análise aprofundada sobre o que é conhecer o próprio conhecimento, o que remete para investigadores já com muitos anos de experiência.

De acordo com Stake (1995/2009), "O estudo de caso é o estudo da particularidade e complexidade de um único caso, conseguindo compreender a sua actividade no âmbito de circunstâncias importantes" (p. 11). Assim, um estudo de caso é uma descrição analítica pormenorizada de um objeto, situação ou fenómeno, que ilumina o que nele há de único, característico e essencial. Mas, há que ter em conta o cenário em que este ocorre, uma vez que é conduzido num ambiente dito natural, com a intenção de compreender a natureza dos processos envolventes (Andrade, 2009), permitindo ao investigador captar o entendimento holístico do fenómeno em estudo (Eisenhardt, 1989), relacionando-o com as diversas partes que o compõem (Sturman, 1997).

O estudo de caso deverá assumir-se, como sendo "não interventivo e empático. Por outras palavras, tentamos não perturbar as atividades habituais do caso (...). Tentamos empenhadamente entender como os atores, as pessoas que estão a ser estudadas, vêem as coisas" (Stake, 1995/2009, p. 28). Assim, assegurámos que o caso não é observado através de uma única lente, mas sim de uma variedade de lentes, que iluminam as múltiplas facetas do fenómeno em estudo.

Yin (2003) reitera a importância que o estudo de caso assume na investigação de acontecimentos contemporâneos, ainda pouco estudados, que ocorrem em cenários quotidianos, preservando as características relevantes e holísticas, assumindo uma abordagem ecológica. Assim, este autor define estudo de caso como "uma investigação empírica que: investiga um fenómeno contemporâneo, num contexto de vida real; quando as fronteiras entre o fenómeno e o contexto não são claramente evidentes; e no qual são usadas fontes múltiplas de evidências" (p. 23).

Para Yin (2003) devemos recorrer ao *design* de estudo de caso quando: (1) a finalidade do estudo é responder a questões do tipo *como* e *porquê*.; (2) não conseguimos intervir nas formas de atuação dos intervenientes do estudo; (3) queremos ter acesso às condições (naturais) em que ocorre o fenómeno em estudo; e (4) as fronteiras entre o fenómeno e o contexto não são evidentes. No entanto, como é sustentado por Stake (1995/2009), não é possível conhecer tudo acerca de um caso. Assim, cabe ao investigador traçar, mapear, um caminho que possibilite decidir qual o nível de profundidade do conhecimento que pretende atingir, por forma a conseguir, com esse conhecimento, responder às questões de investigação. Segundo Patton (1990), "os estudos de caso são particularmente úteis quando se pretende compreender determinados indivíduos, determinado problema ou uma situação particular, em grande profundidade" (p. 54), perspetiva, também, sustentada por Burns (2000), uma vez que:

> qualquer que seja o assunto, para o qualificar como um estudo de caso terá de ser um sistema delimitado – uma entidade em si mesma. Um estudo de caso deve focar-se num assunto/unidade delimitado que seja representativo ou extremamente atípico. (p. 460)

Desta forma, o estudo de caso, pela sua especificidade e particularidade, deverá centrar-se no processo de descoberta e não no processo de confirmação ou validação. De acordo com Miles e Huberman (1994), o estudo de caso é "um fenómeno de algum tipo que ocorre num contexto limitado (*bounded context*). (...) Há um foco, ou 'coração' do estudo, e uma fronteira de certo modo indeterminada define o limite do caso: o que não será estudado" (p. 25, aspas no original).

Lüdke e André (2005) salientam que um estudo de caso é uma investigação de cunho empírico, muito sustentada no trabalho de campo, que comporta, de entre outras, algumas características fundamentais. A primeira está relacionada com a descoberta, isto é, apesar do investigador partir de alguns pressupostos teóricos, irão sempre emergir novos elementos no decorrer do estudo, pois "o conhecimento não é algo acabado, mas uma construção que se faz e refaz constantemente" (Lüdke & André, 2005, p. 18). Para além disso, o estudo de caso possibilita a interpretação em contexto, uma vez que configura a construção de um conhecimento mais completo e situado do objeto em estudo, realizando uma descrição mais aprofundada e densa, revelando "a multiplicidade de dimensões presentes numa determinada situação ou problema, focalizando-o como um todo" (Lüdke & André, 2005, p. 19), isto é, o investigador está atento à complexidade natural das várias situações emergentes, evidenciando as interações sociais que se estabelecem. Quando se recorre ao estudo de caso, o investigador deverá fazer uso de vários instrumentos de recolha de dados, com vista à validação e sustentação dos resultados obtidos. Por outro lado, o estudo de caso permite generalizações naturalísticas, ou seja, o investigador "procura relatar as suas experiências durante o estudo de modo que o leitor possa fazer as suas "generalizações naturalísticas" " (Lüdke & André, 2005, p. 19, aspas no original). Outra característica realçada por estes autores acerca dos estudos de caso, é que estes procuram dar voz(es) (Wertsch, 1991) a todos os participantes da investigação pois, "a realidade pode ser vista sob diversas perspetivas, não havendo uma única que seja a mais verdadeira" (Lüdke & André, 2005, p. 20).

Merriam (1988) identifica quatro tipologias de estudos de caso: (1) particular, quando se pretende atender à particularidade do caso e, portanto, o que é importante é a informação que é revelada acerca do fenómeno em estudo; (2) descritivo, no qual é construída uma exposição rica e densa do caso, em que são apresentados acontecimentos e opiniões dos participantes deste estudo; (3) heurístico, que leva à compreensão do fenómeno em estudo; e (4) indutivo, em que a análise de dados é feita de forma indutiva. Na perspetiva assumida por Merriam (1988), esta investigação pode ser considerada um estudo de caso particular e heurístico.

Stenhouse (1985) apresenta quatro tipos de estudos de caso: (1) etnográfico; (2) de investigação-ação; (3) avaliativo; e (4) educacional. Nos estudos de caso etnográficos, existe uma imersão profunda do investigador no cenário onde ocorre a investigação. Para este autor, este tipo de caso situa-se mais no domínio das ciências sociais, enquanto que os restantes tipos se situam no domínio das ciências da educação. Realiza-se um estudo de caso de investigação-ação, quando a finalidade da investigação é o desenvolvimento do caso para a obtenção de informação com o intuito de mudar a ação. O estudo de caso avaliativo tem a ver com a obtenção de informação com vista a facilitar uma tomada de decisão por parte dos agentes educativos acerca de políticas educativas ou currículos. Por fim, o estudo de caso educacional tem como propósito a compreensão de uma ação educativa. Atendendo à tipologia proposta por Stenhouse (1985), o estudo de caso desta investigação pode ser considerado educacional.

Yin (2003) categoriza os estudos de caso como sendo exploratórios, explanatórios ou descritivos. O estudo de caso exploratório, no qual existe a formulação de questões e hipóteses de estudo, é considerado como um prelúdio a uma outra investigação. O estudo de caso explanatório é utilizado quando os dados recolhidos servem para explicar relações de causa e efeito. Por fim, recorremos a um estudo de caso descritivo quando queremos efetuar uma descrição completa de um determinado fenómeno que ocorre num cenário de vida real. Na perspetiva deste autor, o estudo de caso desta investigação pode classificar-se como sendo descritivo.

Stake (1995/2009) classifica os estudos de caso como intrínsecos, instrumentais e coletivos. Segundo este autor, recorremos a um estudo de caso intrínseco quando pretendemos compreender melhor, alcançar um conhecimento mais profundo de um determinado caso, atendendo à sua particularidade. Como afirma Stake (1995/2009), "Estamos interessados nele [o caso], não apenas porque ao estudá-lo aprendemos sobre outros casos ou sobre um problema em geral, mas também porque precisamos de aprender sobre este caso em particular. Temos um interesse intrínseco no caso" (p. 19). Como tal, posicionando-se neste tipo de estudos de caso, o investigador não está interessado em construir uma determinada teoria nem generalizar um determinado fenómeno. O estudo de caso instrumental é utilizado quando se pretende completar, aprofundar um determinado assunto, mais do que compreender uma situação em particular. Assim, este tipo de estudo de caso possibilita a obtenção de *insights* com vista a um refinamento de uma determinada teoria, pelo que o caso assume uma posição secundária na investigação (Stake, 1995/2009). Quanto ao estudo de caso coletivo, o autor menciona que envolve múltiplos casos a estudar coletivamente. Contrariamente ao que acontece com os estudos de caso intrínsecos, nos quais pretendemos estudar em pormenor um caso particular, nos estudos de caso instrumentais e coletivos, podemos realizar generalizações acerca do fenómeno em estudo.

Atendendo à classificação apresentada por Stake (1995/2009), esta investigação é um estudo de caso intrínseco, uma vez que pretendemos obter um conhecimento mais aprofundado sobre um caso particular – instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas) – sem nos preocuparmos em produzir generalizações ou construir uma determinada teoria. Como afirma Stake (1995/2009), "O verdadeiro objetivo do estudo de caso é a particularização, não a generalização" (p. 24). Como se trata de uma situação única – analisar o instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas) e seus contributos nas práticas, em aula – na qual revelamos um interesse intrínseco, de acordo com Stake (1995/2009), o estudo de caso intrínseco é o *design* que melhor se adequa.

Quando se realiza um estudo de caso, uma das questões que surge, talvez pelo peso que teve, durante décadas, o paradigma positivista, é a da generalização. Stake (1995/2009) argumenta que: "O estudo de caso parece ser uma base pouco sólida para a generalização. Apenas um caso ou alguns casos serão estudados, mas serão estudados em pormenor" (p. 23), pelo que o investigador deverá decidir quais os aspetos e o grau de complexidade a ser empreendido no caso que vai estudar. Isto porque, se o objetivo é o de construir uma teoria, o investigador poderá dar menos atenção a alguns aspetos importantes para a compreensão do caso (Stake, 1994).

Nesta investigação não pretendemos realizar generalizações, no sentido mais tradicional e estrito do termo, mas sim generalizações naturalistas (Stake, 1995/2009). De acordo com este autor, essas generalizações "são conclusões tiradas através do envolvimento pessoal nos assuntos do quotidiano ou através de uma experiência vicária tão bem construída que a pessoa sente como se lhe tivesse acontecido a si própria" (p. 101). Esta argumentação sustenta a importância que as descrições densas e narrativas assumem quando se pretende compreender em pormenor e em detalhe um determinado fenómeno ou situação. Por outro lado, uma vez que assumimos que o conhecimento é sócio-culturamente construído através das várias interações sociais e dialógicas (Renshaw, 2004) que estabelecemos com os demais elementos de uma comunidade, seja ela escolar, ou não, concordamos com Stake (1995/2009) quando afirmar que "o investigador [deverá] fornecer aos leitores bom material em bruto para que eles criem as suas próprias generalizações" (p. 118).

4.5. PARTICIPANTES

Os participantes deste estudo são todos os que estiveram envolvidos, direta ou indiretamente, no projeto IC durante os 12 anos de existência formal: alunos que frequentaram turmas nas quais o projeto era desenvolvido, os professores/investigadores que lecionavam essas turmas na disciplina de Matemática ou afins, os investigadores que colaboraram na recolha de dados (observação e entrevistas), outros professores não investigadores que atuaram como observadores externos, ou avaliadores externos, familiares dos alunos e outros significativos.

Embora o projeto IC tivesse na equipa central professores/investigadores de diversos domínios, como Psicologia, Matemática, Ciências, Filosofia, 1.º ciclo do ensino básico, História e Educação Física, considerámos como participantes desta investigação apenas os psicólogos e os professores/investigadores que lecionavam a disciplina de Matemática ou afins, uma vez que se coaduna com o foco desta investigação: estudar e compreender as potencialidades e contributos do instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas) na configuração de práticas profissionais que promovam uma aprendizagem com sentidos para os alunos. Esta opção também está relacionada com a formação inicial e contínua do próprio investigador, que concluiu uma licenciatura em Ensino da Matemática e um Mestrado em Educação cuja especialização é em Didática da Matemática.

Os professores/investigadores que participaram no projeto IC, alguns apenas durante um ano, mas outros durante mais tempo, incluindo os 12 anos deste projeto, tinham concluído diversas habilitações literárias: alunos que frequentavam o último ano da licenciatura em Ensino da Matemática, licenciados, mestrandos, mestres, doutorandos e doutorados, sem e com agregação. Esta diversidade da equipa configura a existência de cenários que promovem o desenvolvimento pessoal e profissional dos professores/investigadores, como é sustentado por César (2009) e Hamido e César (2009).

As turmas que fizeram parte do projeto e que responderam ao instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas) abrangem alunos desde o 5.º ao 12.º ano de escolaridade, de norte a sul de Portugal Continental (cerca de 600 turmas), dos Açores (3 turmas), de Cabo Verde (6 turmas) e da Escola Europeia de Bruxelas (4 turmas).

Todos os nomes dos participantes desta investigação (alunos, professores/investigadores, investigadores e professores não investigadores) são indicados apenas por duas iniciais, ou pelo seu número, quando o nome era omisso, de modo a garantir o anonimato dos mesmos, cumprindo um dos critérios de qualidade que uma investigação de índole interpretativa deve assumir (Tobin & Kincheloe, 2006).

4.6. INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

Numa investigação que se baseia no paradigma interpretativo, o investigador não é neutro relativamente ao cenário onde está inserido e que pretende estudar. É por meio do investigador que os vários acontecimentos ocorridos nos cenários de investigação ganham interpretações e sentidos. Desta forma, o investigador é encarado como um instrumento de recolha de dados, considerado, em algumas ocasiões, como o principal instrumento de recolha e análise de dados (Merriam, 1988; Stake, 1995/2009).

Tratando-se de uma investigação interpretativa, os dados recolhidos são "(…) descrições detalhadas de situações, fenómenos, pessoas, interações e comportamentos observados" (Patton, 1980, p. 22). Como tal, escolhemos instrumentos que não só permitissem aceder a experiências passadas, que fossem pertinentes para o problema em estudo, mas também que iluminassem o modo como os participantes pensavam e sentiam. Assim, e de acordo com a argumentação de Hamido (2005), procurámos "mobilizar instrumentos sensíveis à estrutura, mas não estruturadores, antes abertos, flexíveis, manejáveis, articuláveis entre si" (p. 261).

Atendendo ao objetivo principal desta investigação (estudar e compreender os contributos do instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas) e perceber os seus impactes nas práticas profissionais de professores) e a que o projeto IC teve a duração formal de 12 anos, os instrumentos de recolha de dados nesta investigação pertencem a dois grandes grupos: (1) instrumentos que foram recolhidos ao longo dos 12 anos do projeto e que fazem parte do *corpus empírico* que a equipa central construiu ao longo do tempo de vigência do mesmo e que considerámos como sendo, nesta investigação, recolha documental; e (2) instrumentos que foram recolhidos especificamente para esta investigação, que complementam os recolhidos anteriormente, no IC. Do primeiro grupo fazem parte o instrumento de avaliação de capacidade e competências (matemáticas) (IACC), tarefas de inspiração projetiva (TIP), questionários (Q), entrevistas (E), conversas informais (CI), protocolos de alunos (P) e outros documentos (D). O instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas), as tarefas de inspiração projetiva e os questionários foram elaborados no âmbito do projeto IC (César, 2003, 2009; Hamido & César, 2009; Machado, 2008; Ventura, 2012). Do segundo grupo, fazem parte o diário de bordo (DB) e as conversas informais, registadas no DB.

Ao utilizar diversos instrumentos de recolha de dados, pretendemos triangulá-los, relacionando e/ou completando as diversas evidências empíricas, de modo a sustentar a presente investigação, uma vez que a triangulação é um dos critérios que permite atingir uma maior qualidade na investigação interpretativa (Denzin & Lincoln, 1994; Hamido & César, 2009; Patton, 1990; Tobin & Kincheloe, 2006).

4.6.1. Recolha documental

4.6.1.1. Instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC)

O instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas) (IACC) foi construído no âmbito do projeto IC (ver Anexo 2). Os elementos da equipa central do referido projeto pretendiam construir um instrumento composto por um conjunto de tarefas que possibilitassem ao professor, desde o início do ano letivo, ter um conhecimento mais sustentado sobre as capacidades e competências que os alunos conseguiam mobilizar e/ou que precisavam de desenvolver, na disciplina de Matemática ou afins, durante aquele ano letivo.

O IACC é constituído por cinco tarefas que visam identificar quais as capacidades e competências já mobilizáveis e as por desenvolver, de cada aluno. Cada tarefa permite analisar uma ou mais capacidades e competências: (1) Tarefa A – o sentido crítico e a interpretação de textos escritos, nomeadamente no que se refere a informação matemática; (2) Tarefa B – a intuição matemática aliada à criatividade e persistência na tarefa; (3) Tarefa C – raciocínio lógico (raciocínio concreto ou raciocínio abstrato); (4) Tarefa D – o tipo de raciocínio matemático preferencial (analítico ou geométrico); e (5) Tarefa E – o tipo de abordagem aos problemas (global ou passo-a-passo), bem como a conexão de conhecimentos matemáticos a situações da vida quotidiana – compra e venda de objetos, noção de lucro (Machado, 2008).

Como afirma Machado (2008),

> Neste tipo de instrumento, é necessário que o aluno perceba que é importante que explique o seu raciocínio, seja através de palavras, esquemas e/ou desenhos. Assim, é salientado que eles devem justificar as suas respostas, mas que podem recorrer à modalidade que preferirem para explicar como raciocinaram. (p. 48)

Este é um aspeto essencial, pois não é a resposta, mas sim a estratégia de resolução utilizada, bem como a justificação apresentada, que permitem ter acesso às capacidades e competências que um determinado aluno mobilizou – ou não – num dado desempenho. Assim, as diversas formas de sustentação das estratégias de resolução e respostas apresentadas revelam-se muito importantes na análise do IACC.

4.6.1.2. Tarefas de inspiração projetiva

As técnicas projetivas são utilizadas, em Psicologia, quando pretendemos que alguém projete algo (Freeman, 1976). Como é afirmado por Courela (2007), estas "constituem meios indirectos (...) que procuram iluminar os sentimentos do sujeito, ou seja, os seus estados psicológicos, inferidos a partir dos seus desempenhos nessas mesmas tarefas" (p. 389). Desta forma, o sujeito revela de forma (in)consciente e (mais) espontânea os sentimentos, expetativas, crenças ou representações sociais acerca do mundo exterior.

De acordo com Carvalho e César (1996), Machado (2008), Machado e César (2008, 2009, 2012a, 2013a, 2013b, in press a) e Piscarreta (2002), as tarefas de inspiração projetiva (TIPs) são uma maneira adequada de estudar as representações sociais sobre a Matemática, uma vez que nos permitem compreender dimensões sociocognitivas e emocionais. Desta forma, as tarefas de inspiração projetiva deverão ser muito pouco estruturadas e sem carácter avaliativo, uma vez que se procura aceder aos sentidos que os alunos não revelariam com o recurso a outros tipos de instrumentos de recolha de dados mais estruturados como, por exemplo, os questionários ou entrevistas.

Para este estudo considerámos duas tarefas de inspiração projetiva que foram respondidas pelos alunos (TIP1, ver Anexo 3) e pelos professores/investigadores e investigadores (TIPP, ver Anexo 4). A TIP1 foi realizada no início do ano letivo, durante a primeira aula, com o intuito de conseguirmos ter acesso às representações sociais que os alunos construíram sobre a Matemática. Para tal, cada aluno recebe uma folha branca A4, que poderá colocar na vertical, na horizontal ou na diagonal, e é escrito no quadro *Desenha ou escreve o que é para ti a matemática*, frase que também é dita oralmente. Os alunos podem responder sem qualquer restrição, desenhando, escrevendo, ou usando ambas modalidades de resposta, não lhe sendo facultadas quaisquer outras instruções de trabalho. As respostas dos alunos podem ser as mais diversas, o que se coaduna com a natureza aberta da referida tarefa, para a qual não existe limite de tempo.

A TIPP pretendia ter acesso aos impactes do projeto *Interacção e Conhecimento* no desenvolvimento pessoal e profissional dos professores/ investigadores e investigadores que participaram nesse projeto. Na TIPP, pedia-se-lhes que continuassem a frase: *Quando penso no projecto Interacção e Conhecimento sinto que... .* Desta forma, pretendia-se ter acesso à representação social que cada professor/investigador e investigador construíram acerca deste projeto. Algumas das respostas a estas TIPs (TIP1 e TIPP) contêm elementos interessantes para a análise do IACC, pelo que também as considerámos nos resultados desta tese de doutoramento.

4.6.1.3. Questionários

Fink (1995) apresenta o questionário como um instrumento de "recolha de informação para descrever, comparar, ou explicar conhecimentos, atitudes e práticas ou comportamentos" (p. 1). Quando se pretende recorrer ao questionário como fonte de recolha de dados, temos que ter presentes dois aspetos essenciais: a sua formulação em termos de questões colocadas; e o seu grau de clareza e correção. Em termos de formulação de questões, estas podem ser de resposta aberta ou de resposta fechada, consoante a finalidade do próprio questionário. Estes dois tipos de formulação de questões apresentam vantagens e desvantagens em relação à informação recolhida e, como tal, cabe ao investigador decidir a natureza das mesmas face ao que pretende aceder em termos de evidências empíricas.

A equipa central do projeto IC elaborou três questionários destinados aos alunos, a serem utilizados em três momentos distintos. O primeiro questionário (Q1, ver Anexo 5) é realizado no início do ano letivo, durante a primeira aula, fazendo parte de um conjunto de instrumentos respondidos pelos alunos na primeira semana de aulas. Pretendemos ter acesso a um conhecimento mais aprofundado dos alunos, em termos académicos e em termos dos hábitos, interesses, motivações e expetativas, isto é, a aspetos da trajetória de participação ao longo da vida (César, 2013a), nomeadamente na escola. No início do 2.º período é realizado um segundo questionário (Q2, ver Anexo 6), no qual se pretende conhecer a decisão dos alunos quanto à continuação do trabalho colaborativo, nomeadamente em díade. De acordo com os princípios epistemológicos e pedagógicos do projeto IC, os alunos poderiam escolher, no início do 2.º período, se queriam, ou não, continuar a trabalhar colaborativamente. Caso os alunos não desejassem continuar com essa forma de trabalho, esta seria substituída por outro tipo de práticas, em aula. Esta evidência ilumina que o poder de decisão também pertence aos alunos, tornando-os mais interventivos nos processos de ensino e de aprendizagem. No final do ano letivo – geralmente, na última aula do 3.º período – é utilizado um terceiro questionário (Q3, ver Anexo 7), no qual pretendemos que os alunos realizem uma avaliação do ano letivo, em termos das práticas desenvolvidas, em aula, e do trabalho realizado ao longo do ano letivo.

Nesta investigação, também foram realizados questionários a professores não investigadores que participaram no processo de construção do IACC, aos alunos e aos professores/investigadores e investigadores. O questionário realizado aos professores não investigadores foi utilizado ainda antes do início formal do IC, quando estávamos a recolher informação para depois construirmos o IACC. Daí que o designemos por (QP0, ver Anexo 8), para indicar que ele ocorreu antes de o IC ter começado, consistindo num trabalho prévio. Tinha como finalidade última a construção do IACC, pelo que pretendíamos que referissem três aspetos que desejariam saber sobre os alunos, no início do ano letivo, de modo a conseguirem que os processos de ensino e de aprendizagem fossem mais eficientes.

Para termos acesso aos impactes do IC nas trajetórias de participação ao longo da vida dos professores/investigadores e investigadores, estes também responderam a dois questionários (QP1 e QP2, ver Anexos 9 e 10, respetivamente). No QP1 respondiam a três questões, muito abertas e pouco estruturadas: (1) *Se tivesse de falar deste projeto a um amigo seu, o que lhe diria?...*; (2) *Se tivesse de falar deste projeto a um colega seu, o que lhe diria?...*; e (3) *Se tivesse de falar deste projeto a um responsável pela política educativa, o que lhe diria?...* . No QP2 indicavam os motivos que os levaram a querer participar no IC, vantagens e desvantagens que essa participação tinha a nível pessoal e profissional, bem como os contributos que tinha e gostaria de ter dado no âmbito deste projeto. Estes questionários faziam parte de uma avaliação do projeto IC, realizada durante os últimos três anos da sua vigência, e que contêm alguns elementos que contribuem para a análise do IACC.

4.6.1.4. Entrevistas

As entrevistas surgem como um instrumento de recolha de dados que permite ao investigador ter acesso à forma como os participantes interpretam aspetos do fenómeno em estudo. Assim, as entrevistas realizam-se quando queremos captar formas de atuação não diretamente observáveis como, por exemplo, sentimentos e modos de interpretar o mundo (Merriam, 1988), o que se coaduna com dois objetivos do estudo de caso identificados por Stake (1995/2009): “obter as descrições e interpretações de outros” (p. 81).

O nível de estruturação de uma entrevista é um dos elementos que permite caracterizá-la. Segundo Patton (1990), existem três tipos de entrevista: (1) as entrevistas através de uma conversa informal [que preferimos designar por conversas informais – CI]; (2) as entrevistas semi-estruturadas; e (3) as entrevistas estruturadas. Já Merriam (1988) refere que o nível de estruturação de uma entrevista pode variar num contínuo entre a entrevista estruturada e a entrevista não estruturada. Segundo esta autora, na entrevista estruturada "as perguntas e a ordem pela qual se responde às perguntas são determinadas antecipadamente" (p. 73), pelo que não é dada muita flexibilidade ao entrevistador na condução da entrevista nem ao entrevistado na forma como responde às questões. Por seu turno, o recurso a entrevistas pouco estruturadas permite uma maior flexibilidade, quer ao entrevistador quer ao entrevistado (Merriam, 1988).

Estando cientes das limitações que possam surgir num e noutro extremo desse contínuo, optámos por recorrer, nesta investigação, às entrevistas de índole narrativa (Borges, 2009; Gall, Borg, & Gall, 1996; Oliveira, 2004; N. Santos, 2008), pois o que pretendíamos era ter acesso ao que os alunos tinham sentido e pensado, quando respondiam ao IACC. Como afirmam Cohen e seus colaboradores (2001),

> As entrevistas levam os participantes – sejam eles entrevistadores ou entrevistados – a discutir as suas interpretações do mundo em que vivem e a expressar como é que encaram as situações do seu ponto de vista. Neste sentido, a entrevista não é vista simplesmente como uma recolha de dados sobre a vida: é parte da própria vida, a sua dimensão humana é inegável. (p. 267)

De acordo com Merriam (1988) e Yin (2003), a entrevista assume-se como um dos instrumentos de recolha de dados mais adequado quando se realizam estudos de caso, como acontece nesta investigação. Salientam, ainda, que nesta modalidade, as entrevistas mais utilizadas são as pouco estruturadas.

Nesta investigação foram utilizadas entrevistas realizadas a alguns alunos, selecionados como informadores privilegiados, em relação ao IACC.

4.6.1.5. Conversas informais

De acordo com Patton (1990), as conversas informais podem ser consideradas como uma entrevista não estruturada, na medida em que facilitam o acesso aos relatos dos participantes, mas de uma forma informal, sem constrangimentos ou pressões. Desta forma, as conversas informais surgem, entre os professores/investigadores ou investigadores e os participantes do estudo, sendo configuradas pela convivência e pela relação existente entre eles. Este instrumento de recolha de dados pode complementar as evidências que emergiram de outros instrumentos de recolha de dados, como as entrevistas, os questionários ou a observação. Foram registadas em diários de bordo de diversos participantes, pois não estando previstas, não são áudio gravadas, sendo fundamental o seu registo atempado.

4.6.1.6. Protocolos dos alunos

Nesta investigação considerámos como protocolos dos alunos todo o material produzido por eles, nas aulas de Matemática ou disciplinas afins. Estes incluem as tarefas matemáticas elaboradas em díade e/ou em pequenos grupos, os mini-testes elaborados em díade, os trabalhos de grupos realizados em aula (como, por exemplo, o trabalho projeto), relatórios elaborados pelos alunos referentes a visitas de estudo e/ou atividades realizadas fora da sala de aula.

4.6.1.7. Outros documentos

Como é sustentado por Oliveira (2006), "Os documentos proporcionam um leque de informações relevantes para as questões de investigação e, como tal, para a compreensão do caso" (p. 248). Deste modo, consideramos importante este instrumento na medida em que, interligado aos outros instrumentos de recolha de dados, permite um cruzamento dos mesmos e, segundo Hamido (2005), estes dados podem transportar pistas importantes se olharmos não só para o conteúdo, como para os contextos em que tais documentos foram produzidos.

Considerámos como documentos recolhidos, os produzidos pelas várias escolas, nomeadamente, os projetos curriculares de escola, as pautas de avaliação de cada período, bem como os documentos produzidos pelos próprios professores/investigadores, nomeadamente, as plantas de sala de aula e documentos relativos ao processo de avaliação de cada aluno/díade. Também considerámos os documentos produzidos pelo IC, como as atas das reuniões da equipa central ou os que foram preparados para os cursos e ações de formação sobre o trabalho em díade.

4.6.2. Recolhidos nesta investigação

4.6.2.1. Diário de bordo

O diário de bordo (DB) é um instrumento que complementa a investigação, na medida em que foi necessário escrevermos sobre o que nos inquietava em relação às opções que íamos tomando ao longo desta investigação. Concordamos com Oliveira (2006) quando refere que "o diário regista uma versão, por nós interpretada, de acontecimentos datados e que foram marcantes do ponto de vista pessoal e profissional" (p. 250). Como o DB é algo muito pessoal e próprio e, como tal, diferente de pessoa para pessoa, não deverá ser padronizado, como acontece com outros instrumentos de recolha de dados (entrevistas, questionários). Aliás, segundo Wellington (2000), "talvez a única regra geral [de um diário] é que requer um relato cronológico dos acontecimentos, cuja interpretação e versão, bem como as reflexões são do próprio investigador" (p. 119).

Nesse DB registámos, de forma organizada, episódios, situações significativas para o investigador, bem como comentários reflexivos sobre as mesmas. Como salienta Hamido (2005), a inclusão de aspetos reflexivos "ao darem conta das impressões subjetivas do observador, contribuem precisamente para controlar o efeito dessa subjetividade" (p. 262). Esta forma de escrita e posterior leitura possibilitou-nos um (re)olhar para a investigação, proporcionando um esclarecimento das opções tomadas o que configurou uma maior compreensão acerca da trajetória de participação ao longo da vida do próprio investigador.

4.6.2.2. Conversas informais

À medida que o investigador vai analisando os vários dados recolhidos, as conversas informais assumem um papel de complementaridade da informação proveniente dos vários instrumentos de recolha de dados. Por vezes casuais, outras mais provocadas pela curiosidade do investigador, as conversas informais foram surgindo ao longo deste trabalho. Foram registadas em DB e abrangeram o investigador e professores/investigadores ou professores, bem como a coordenadora do projeto e alunos que ainda estavam a terminar os 10 anos de *follow up*, e que mencionavam aspetos que se prendiam com o IACC, ou que eram, de alguma forma, relevantes para esta investigação.

4.7. PROCEDIMENTOS

Concordamos com Hamido (2005) quando afirma que os "procedimentos constituem as intervenções do investigador, a maneira como ele pontua o curso dos acontecimentos com a sua presença, observação, interrogação" (p. 270). Assim, os procedimentos assumem-se como um processo fundamental a ter em consideração numa investigação interpretativa, como é o caso deste estudo. Permitem dar conta ao leitor das opções tomadas, envolvendo-o na investigação efetuada, para que ele se sinta parte dela, interpretando-a.

4.7.1. Procedimentos de recolha de dados

4.7.1.1. Durante a vigência do projeto Interacção e Conhecimento

Quando se desenvolvem, em aula, práticas colaborativas sustentadas nos princípios epistemológicos e pedagógicos do projeto IC (César, 2009; Ventura, 2012), a primeira semana de aulas assume particular importância. Nessa semana, o professor não leciona quaisquer conteúdos programáticos. Utiliza um conjunto de tarefas que possibilita ter acesso a um conhecimento mais aprofundado e sustentado dos alunos. Desse conjunto de tarefas fazem parte um instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas) (IACC), uma tarefa de inspiração projetiva (TIP1) e um questionário (Q1), que estão descritos no Ponto 4.6.

A discussão geral do IACC, realizada no quadro, durante a segunda aula da primeira semana, constitui um momento marcante para os alunos. Nessa aula, cada um dos alunos, escolhidos pelo professor, vai ao quadro resolver uma parte ou tarefa do IACC. Os restantes alunos vão registando, por escrito, numa nova folha de resposta, em branco, as estratégias de resolução de cada aluno. Desta forma, pretende-se promover uma auto-estima positiva dos alunos, em relação à disciplina de Matemática, pois todos os alunos da turma vão ao quadro resolver uma parte de um todo – que é o IACC. Assim, é importante que durante a discussão geral não sejam apontadas incorreções nas estratégias de resolução dos alunos, deixando essa forma de atuação para aulas futuras, quando a auto-estima dos alunos já for mais positiva.

4.7.1.2. Específicos desta investigação

O diário de bordo, por ser um instrumento que complementa a investigação, foi escrito no decorrer da mesma, registando o que nos inquietava em relação às opções que íamos tomando. Por ser algo pessoal, registámos, também, anseios e expetativas sobre os vários acontecimentos que ocorreram. Desses registos fazem parte as conversas informais que tivemos com os participantes desta investigação, quando queríamos esclarecer algum aspeto que emergiu durante a análise dos dados recolhidos.

Nesta investigação, organizamos os instrumentos de recolha de dados através de um sistema de codificação, como se ilustra no Quadro 1.

Quadro 1 – Codificação dos instrumentos de recolha de dados

Designação	Código	Especificação
Instrumento de Avaliação de Capacidades e Competências (matemáticas)	IACC	
Tarefas de Inspiração Projetiva	TIP	TIP1 – Tarefa de inspiração projetiva, respondida pelos alunos TIPP – Tarefa de inspiração projetiva, respondida pelos professores/investigadores e investigadores
Questionário	Q	QP0 – Questionário respondido pelos professores não investigadores Q1 – Questionário da 1.ª semana de aulas Q2 – Questionário início 2.º período Q3 – Questionário final ano QP1 – 1.º questionário respondido pelos professores/investigadores e investigadores QP2 – 2.º questionário respondido pelos professores/investigadores e investigadores
Entrevistas	E	
Protocolos de alunos	P	
Outros documentos	D	
Diário de Bordo	DB	Datado
Conversas informais	CI	Datadas

4.7.2. Procedimentos de tratamento e análise de dados

Após organizar os dados recolhidos, Merriam (1988) propõe três níveis de análise. No primeiro nível, "os dados recolhidos são organizados cronologicamente ou por vezes por tópicos e apresentados através de uma narrativa" (Merriam, 1988, p. 140). No segundo nível, ocorre a "classificação sistemática dos dados de acordo com um esquema que consiste em categorias, temas ou tipos" (Merriam, 1988, p. 140). Neste nível, a autora argumenta que a identificação de categorias implica o desenvolvimento de uma análise de conteúdo, na qual se procura relacionar parte dos dados que se podem agrupar sob uma categoria, ou seja, dados que revelam algo de semelhante, constituindo, assim, uma nova categoria. No terceiro nível, a análise "envolve a realização de inferências e desenvolvimento de uma teoria" (Merriam, 1988, p.140).

Segundo Tesch (1990), a análise de dados de um estudo de caso pode ser de três tipos, nomeadamente, interpretativa (que visa analisar ao pormenor os dados recolhidos com o propósito de organizá-los e categorizá-los, por forma a explicar o fenómeno em estudo), estrutural (cuja finalidade é encontrar padrões que possam clarificar e/ou explicar a situação em estudo) e reflexiva (que visa interpretar ou avaliar o fenómeno em estudo, por julgamento ou intuição do investigador). Nesta investigação elaborámos padrões de desempenho, em relação ao IACC.

Miles e Huberman (1994) sugerem um processo interativo e iterativo de análise dos dados, que percorre três etapas: (1) redução dos dados (*data reduction*); (2) apresentação dos dados (*data display*); e (3) esboço das conclusões/verificações (*conclusion drawing/verification*) [que, pelo teor desta investigação, preferíamos designar por interpretação dos dados]. A redução de dados é um "processo de selecionar, focar, simplificar, abstrair e transformar os dados" (Miles & Huberman, 1994, p. 10). Assim, na primeira etapa existe um processo de descrição dos dados provenientes dos diversos instrumentos de recolha de dados (entrevistas, observação, diário de bordo...), levando à identificação de temas ou padrões nas evidências empíricas. Seguidamente, proceder-se-á à organização dos dados por meio de esquemas ou figuras, com o intuito de descrever e interpretar. Na última etapa proposta por Miles e Huberman (1994), ocorre a análise dos dados a partir do que já foi realizado nas etapas anteriores, da qual emergem as conclusões do estudo [que preferimos designar por considerações finais].

Nesta investigação, o tratamento e análise de dados baseou-se numa análise de conteúdo, de tipo narrativo (Clandinin & Connelly, 1998), sistemática e sucessiva, passando duma leitura flutuante ao reconhecimento de padrões, fazendo emergir categorias indutivas de análise (Hamido & César, 2009). Optámos por realizar uma análise de conteúdo porque, de acordo com o paradigma interpretativo, se deve dar voz(es) aos participantes, iluminado os seus relatos e interpretações. Assim, uma análise de conteúdo de inspiração narrativa, ou seja, pouco estruturalista e mais interacionista, que valorize as intenções, os silêncios, as palavras contextualizadas, o jogo interativo entre os participantes, permite-nos ter acesso às vozes de cada um deles. Como afirma Krippendorff (1980), a análise de conteúdo é "uma técnica de investigação para fazer inferências válidas e replicáveis dos dados para o seu contexto" (p. 21).

Segundo César (2013b), a análise de conteúdo deverá começar por uma leitura flutuante, que não seja exaustiva, com a finalidade de obtermos uma visão geral do que são os dados. Essa leitura flutuante permite ao investigador mergulhar no estilo de cada participante, procurando sentidos (*meanings*). Seguidamente, deverá realizar-se, mais do que uma leitura exaustiva e sucessiva, ou seja, mais profunda, de todos os dados obtidos através dos vários instrumentos de recolha de dados. Nesta etapa, começam-se a definir algumas codificações, em termos de cores, para os vários assuntos relacionados. Assim, após essas várias leituras e decidida a codificação, começam a emergir as categorias de análise, que irão ser diferenciadas através de cores distintas, para poder ser mais fácil a consulta, em cada um dos instrumentos de recolha de dados.

Também Lüdke e André (2005), afirmam que, após termos organizado os vários dados provenientes dos vários instrumentos de recolha de dados, iremos efetuar um percurso no qual realizamos um "processo de inúmeras leituras e releituras, [no qual] o pesquisador pode voltar a examiná-los para tentar detetar temas e temáticas mais frequentes. Esse procedimento, essencialmente indutivo, vai culminar na construção de categorias" (Lüdke & André, 2005, p. 42). Relativamente às categorias que emergem da análise de dados, Guba e Lincoln (1997) sustentam que devem espelhar os objetivos e as finalidades da investigação realizada.

Desta forma, os dados recolhidos transformam-se em evidências empíricas, uma vez que nelas existe uma interpretação do investigador. Como afirma Hamido (2005), "A mesma construção interpretativa que liga os dados da investigação à realidade, transforma-os em *evidências*, permitindo a realização de inferências acerca das características que se pretendem estudar" (p. 242, itálico no original).

Segundo Lincoln (2002),

> Evidências são dados com uma finalidade (…) [elas] representam dados aos quais foram acrescentados um ou vários níveis de interpretação e estratégia retórica. (...) nenhuma evidência é evidência enquanto a não encararmos a partir de algum quadro de referência teórico, paradigmático ou metafísico. (pp. 4-5)

Após a configuração das categorias de análise, organizámo-las, em documentos distintos, com as evidências empíricas de cada categoria. Posteriormente, rearranjámos as evidências, dentro de cada categoria, por forma a que estas tenham um sentido narrativo (César, 2013b). Seguidamente, selecionámos as evidências empíricas mais significativas de cada categoria, com a finalidade de as utilizar na escrita desta investigação. Como afirmam Clandinin e Connelly (1998), cabe ao investigador selecionar as evidências por forma a tornar a narrativa mais rica e significativa. Depois, reorganizámos as evidências selecionadas de acordo com o sentido narrativo que pretendemos conseguir atingir na escrita desta investigação. Por fim, voltámos a olhar para uma determinada categoria, com o intuito de perceber se existe, ou não, alguma evidência, ainda não selecionada, cujo contributo é importante para tornar o processo narrativo daquela categoria mais sólido (César, 2013b).

Os procedimentos nesta investigação incluem a análise de: (1) o processo de elaboração do IACC; (2) o processo de registo e análise das respostas dos alunos; (3) as respostas produzidas pelos alunos, ao longo dos 12 anos de existência formal do projeto IC, que permitem compreender como as capacidades e competências são avaliadas; (4) a tradução destas informações em termos de utilização destes dados na planificação, operacionalização e avaliação das práticas docentes; e (5) exemplos de tarefas que foram elaboradas, adaptadas ou selecionadas em função dos conhecimentos apropriados através da análise deste instrumento.

Como é desejável num investigação interpretativa, o anonimato dos participantes deve ser preservado. Assim, para que mesmo percebendo-se a turma à qual nos referimos – algo inevitável, por exemplo, quando existem outros artigos já publicados sobre essa turma – se possa continuar a garantir o anonimato de cada aluno, decidimos atribuir letras do alfabeto aos elementos de género feminino (de A a H continuando a atribuir letras, de I a Z, aos masculinos). Para que as letras não permitam saber, pela sua ordenação, quem é aquele elemento, não seguimos a ordem alfabética que atribui a numeração de cada aluno, em cada turma. Assim, esta parte aleatória, permite manter o anonimato, identificando apenas o género, algo relevante na constituição das primeiras díades. Esta codificação apenas foi utilizada nos Pontos 5.2. e 5.5. dos Resultados, ou seja, quando a turma pode ser mais facilmente identificada.

Para além dos alunos, foi também necessário garantir o anonimato das escolas. Assim, por ser possível identificar algumas das escolas que participaram neste projeto através da zona ou região do país, optou-se por utilizar, para Portugal Continental, o distrito onde estas estão inseridas, ou seja, Viseu, Leiria, Lisboa e Faro. Para as restantes zonas optou-se por utilizar as designações de Açores e Cabo Verde, por não permitirem a identificação da escola.

Por tudo o que foi dito anteriormente, a análise de dados revela-se uma tarefa demorada, complexa e multifacetada, que é configurada por uma redução da informação recolhida através dos vários instrumentos de recolha de dados, selecionando a informação que se apresente como sendo significativa, identificando padrões relevantes. Em síntese: a análise de dados procura encontrar o sentido dos mesmos, configurando a construção de uma história que conte o que os dados revelam de acordo com a finalidade da investigação.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

5.1. PROCESSO DE ELABORAÇÃO DO IACC

5.1.1. A(s) voz(es) dos professores e dos alunos

A constatação da necessidade de elaborar um instrumento que permitisse conhecer as capacidades e competências dos alunos, desde a primeira semana de aulas, tornou-se uma evidência devido a diversos acontecimentos: (1) as conversas informais com professores do ensino básico e secundário que afirmavam que, em relação a alguns alunos, o tempo que demoravam a conhecê-los – muitas vezes, todo o 1.º período, ou mais – inviabilizava ou dificultava significativamente a melhoria dos seus desempenhos matemáticos, comprometendo mesmo a sua transição para o ano de escolaridade seguinte; (2) a experiência profissional da coordenadora do projeto IC como orientadora da prática pedagógica supervisionada de alunos da Licenciatura em Ensino da Matemática, incluindo as conversas informais com outros orientadores; (3) conversas informais, entrevistas e observações de alunos que a fizeram compreender que muitas capacidades e competências, que eles já mobilizavam, eram subaproveitadas, em aula, exigindo-se-lhes outras, que eles ainda não tinham desenvolvido; (4) a necessidade de envolver os alunos nas atividades de matemática escolar, partindo de um trabalho, que promovesse a sua autoestima académica positiva, nomeadamente enquanto aprendentes de Matemática; (5) a necessidade de distinguir entre conteúdos programáticos e capacidades e competências que os alunos já conseguiam mobilizar; (6) a possibilidade de adequar a natureza das tarefas e as instruções de trabalho às capacidades e competências que os alunos já mobilizavam, facilitando o desenvolvimento de outras, bem como a apropriação de conhecimentos; e (7) as questões formuladas por diversos professores do ensino básico e secundário quanto a critérios para a formação de grupos que possibilitassem um maior envolvimento dos alunos nas atividades matemáticas realizadas em aula, evitando que alguns fossem rejeitados e promovendo a apropriação de conhecimentos matemáticos, bem como o desenvolvimento de capacidades e competências. Assim, a decisão de elaborar o IACC partiu da vontade da coordenadora do projeto IC para trabalhar colaborativamente com professores e, sobretudo, do desejo de conceber e pôr em prática um projeto de investigação que respondesse às questões que os professores frequentemente lhe colocavam e às necessidades que estes identificavam existirem, para que se conseguisse atingir uma educação de elevada qualidade, inclusiva e intercultural.

Diversos professores e investigadores, entre eles a coordenadora do projeto IC, argumentavam, com base nas respetivas experiências profissionais, que os testes de diagnóstico, que eram frequentemente respondidos na primeira semana de aulas, tinham vários inconvenientes, como ela escreveu num documento no DB que mantém desde a criação do IC:

> reforçavam a auto-estima académica negativa dos alunos que habitualmente vivenciavam insucesso escolar em Matemática, reforçando a sua representação social negativa enquanto aprendentes de Matemática e convencendo-os, mais uma vez, de que nem valia a pena tentarem, pois iam falhar novamente; (2) motivavam quem já estava motivado, mas não quem estava desmotivado, ou seja, não tinham impactes nítidos ao nível do envolvimento dos alunos nas actividades matemáticas que lhes eram propostas posteriormente; (3) não davam informações relevantes para as práticas, em aula, que não se conseguissem obter analisando as pautas, e demais registos qualitativos, sobre os alunos, documentos estes que existiam e estavam disponíveis nas escolas; (4) não permitiam saber informações relevantes para decidir sobre as tarefas a propor nas aulas seguintes, sobretudo no que se refere à sua natureza; e, principalmente, (5) não davam indicações sobre as capacidades e competências, não permitindo distinguir quatro grupos de alunos que apresentam características muito diferentes quanto à forma como devem ser ensinados e como conseguem aprender: (a) alunos com elevado sucesso escolar e muitas capacidades e competências que já conseguiam mobilizar; (b) alunos com elevado sucesso escolar e poucas capacidades e competências que já mobilizassem; (c) alunos com elevado insucesso escolar e muitas capacidades e competências que já conseguissem mobilizar; e (d) alunos com elevado insucesso escolar e poucas capacidades e competências que já mobilizassem. Confundir estes 4 grupos não permite aproveitar o 1.º período, sobretudo nas turmas onde existem mais alunos com insucesso acumulado, pois é a distinção entre (c) e (d) – invisível num teste de diagnóstico, onde ambos tendem a falhar – que permite saber os alunos que conseguirão aprender mais depressa, ou mais devagar. Esta informação é essencial para formar díades e grupos que funcionem. (coordenadora do IC, DB, 5 de setembro de 1994, pp. 5-7)

Com estas preocupações e evidências empíricas, que vinham do trabalho de observação e escuta que caracterizava a sua trajetória de participação ao longo da vida, nomeadamente enquanto docente e investigadora, decidiu ainda antes de ter concluído a tese de doutoramento (César, 1994), mas já depois de ter recolhido os respetivos dados, começar a construir um instrumento que permitisse avaliar capacidades e competências que fossem relevantes para ensinar e aprender Matemática. Pretendia elaborar colaborativamente, com outros investigadores e professores do ensino básico e secundário, um instrumento que esses professores viessem a conseguir usar de forma autónoma, aspeto que lhe parecia essencial para que o mesmo pudesse ser utilizado em larga escala, podendo contribuir para a inovação das práticas, em aula, assim como para uma educação de qualidade.

Sendo psicóloga de formação de base, conhecia os instrumentos de avaliação de capacidades disponíveis no mercado e que estavam, na sua maioria, conotados com uma perspetiva psicométrica da inteligência, como a WISC (Freeman, 1976; Wechsler, 1997b), o D70 (Alves, 2006; Murphy & Davidshofer, 1991), ou as Matrizes Progressivas de Raven (Anastasi & Urbina, 2000; Raven et al., 1984), bem como os diversos testes de capacidades específicas a que se recorria, por exemplo, nas avaliações vocacionais. No entanto, estes instrumentos destinavam-se a ser utilizados por psicólogos e não tinham sido elaborados para permitirem práticas docentes mais adaptadas às características, necessidades e interesses dos alunos. Existiam também outro tipo de instrumentos, como a ECDL ou as provas Piagetianas, que assumiam uma perspetiva desenvolvimentista (César & Esgalhado, 1991). Porém, mais uma vez, destinavam-se a serem utilizadas por psicólogos, muitas delas avaliando cada criança numa sessão de trabalho individual, e não estavam conotadas diretamente com a educação formal, em cenários de sala de aula. Assim, a necessidade de elaborar o IACC tornou-se premente, para que se pudesse vir a operacionalizar o objetivo último expresso em César (1994) e que consistia em desenvolver um projeto de investigação, de forma colaborativa, com os professores, que estudasse e promovesse as interações entre pares, contribuindo para uma educação mais inclusiva e intercultural.

Como o que se pretendia era dar voz(es) aos alunos e professores, e não apenas aos académicos, as vozes dos professores e dos alunos começaram a ser escutadas desde o início. Primeiro, através das conversas informais, entrevistas, observações e das questões que levaram à decisão de elaborar o IACC, decisão que foi tomada em 1991, ainda durante a fase de recolha de dados da tese de doutoramento da coordenadora do projeto IC (César, 1994). Depois, com a pergunta que serviu de ponto de partida para a posterior elaboração de cada tarefa e à qual responderam, nesse ano e por escrito, 1011 professores do ensino básico e secundário, com diferentes anos de experiência profissional, distribuídos pelas diversas regiões de Portugal. À partida, a decisão era inquirir 1000 professores. Porém, vicissitudes várias levaram à recolha das respostas de mais 11 professores do que o inicialmente previsto.

Esta questão de partida, que constitui o QP0 (ver Anexo 8), e que se pretendia que fosse muito aberta e pouco estruturada, era a seguinte: “Se pudesse conhecer, no início do ano lectivo, três características dos alunos, essenciais para promover o seu sucesso escolar e uma educação matemática de qualidade, quais as três características que quereria conhecer?". No final da pergunta, havia um esclarecimento adicional: "Nota: A pergunta é sobre características. Não é sobre conhecimentos matemáticos". A opção por uma questão muito aberta evitava que o enunciado sugerisse determinadas respostas e possibilitava aos professores expressarem as suas convicções de uma forma mais livre, algo que pareceu essencial através das diversas conversas informais que antecederam a elaboração desta questão.

Apenas 17 dos professores contactados não quiseram responder. Os restantes, não só se mostraram disponíveis para responder, como interessados em saber o que pretendíamos fazer com as respostas obtidas e, em muitos casos, após a resposta, existiram conversas informais que se revelaram importantes contributos para a elaboração do IACC. Foi também através das respostas a esta questão que se formou um primeiro núcleo de professores, cujo número variou entre sete e quinze, consoante os anos letivos, que elaboraram as primeiras versões das tarefas que viriam a constituir o IACC. Os 1011 professores que responderam a esta questão foram também essenciais para se conseguir o acesso a turmas que respondessem às tarefas durante o estudo piloto, que decorreu entre 1991/92 e 1993/94. No início, as tarefas começaram por ser respondidas isoladamente, ao longo do ano letivo, ou seja, diversas turmas responderam apenas à Tarefa A, por exemplo, havendo pequenos e sucessivos melhoramentos que foram sendo introduzidos a partir da análise das respostas obtidas e das entrevistas posteriores, que foram realizadas aos alunos, bem como de diversas conversas informais, que foram surgindo e que eram registadas no DB da coordenadora do IC.

Logo após a recolha das respostas, como se pretendia elaborar um instrumento de acordo com a perspetiva desenvolvimentista, começou-se por identificar as capacidades e competências que apareciam listadas por mais de 85% dos professores inquiridos, o que significaria um grau de concordância muito elevado quanto à necessidade de as conhecer logo no início do ano letivo. Apesar da pergunta ser muito aberta e pouco estruturada, houve diversas capacidades e competências indicadas: ter acesso ao raciocínio abstrato (97%); ser capaz de conectar a Matemática com a vida quotidiana (92%); revelar intuição matemática (87%); ter raciocínio analítico (87%); ter raciocínio geométrico (85%); ser persistente nas tarefas (85%); ser criativo (85%); e ter sentido crítico em relação às informações matemáticas que lê (85%). Convém salientar que, apesar de se ter pedido três características, alguns professores indicaram mais. Por exemplo, alguns escreveram: "ter raciocínio analítico e geométrico", considerando isso como uma característica. Mas, para a análise dos desempenhos dos alunos no IACC, preferiu-se considerá-las duas capacidades separadas.

Por último, convém salientar que apenas 74% dos professores mencionaram características relacionadas com a resolução de problemas e as abordagens, global ou passo-a-passo, que poderiam ser efetuadas. Porém, quando se elaborou a Tarefa E também se teve esta característica em consideração.

5.1.2. Elaboração das tarefas

Optou-se por um instrumento desenvolvimentista, que iluminasse a evolução destas capacidades e competências ao longo do processo de desenvolvimento dos alunos. Assim, uma primeira decisão foi elaborar as mesmas cinco tarefas para serem respondidas por alunos do 5.º ao 12.º ano de escolaridade. Isso permitiria obter padrões de desenvolvimento e, além disso, tinha uma vantagem adicional: os professores ficariam familiarizados com o instrumento, pois em cada ano letivo faziam a análise para várias turmas, o que permitia que o conhecessem mais aprofundadamente, ao fim de poucos anos de a ele recorrerem.

A partir das características identificadas pelos professores, decidiu-se elaborar cinco tarefas que as permitissem avaliar. A primeira decisão foi tomada em relação à Tarefa C (ver Figura 3), que permite avaliar uma capacidade: se os alunos mobilizam o raciocínio concreto ou o abstrato (ver Anexo 11). Permite ainda detetar casos em que é necessário dar particular atenção ao desenvolvimento cognitivo, como aqueles em que os alunos não conseguem identificar o quadrado enquanto elemento central que se repete em todas as figuras apresentadas no modelo.

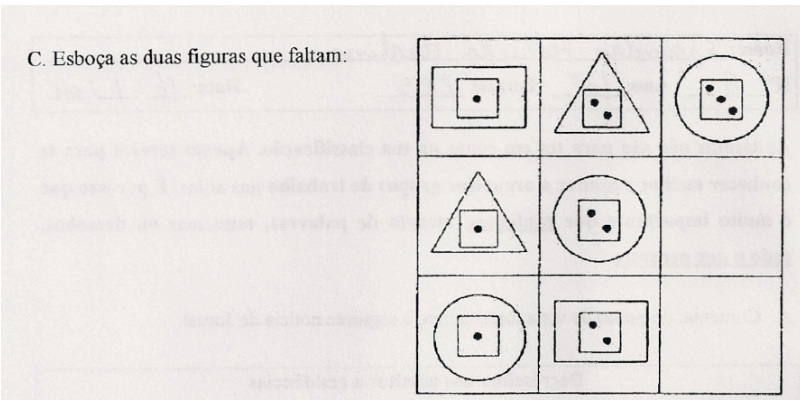


Figura 3 – Enunciado da Tarefa C

A Tarefa C é inspirada nas Matrizes Progressivas de Raven (Raven et al., 1984) e no D70 (Murphy & Davidshofer, 1991), bem como noutras provas em que se pede aos participantes que completem modelos que estão incompletos. Uma primeira decisão consistiu em não dar algumas hipóteses de resposta para que escolhessem uma delas, deixando partes do modelo em branco e pedindo ao aluno que as completasse. Para além disso, tratando-se de um instrumento de avaliação de capacidades e competências matemáticas, pretendia-se que envolvesse: (a) contagens simples (pintas); (b) figuras geométricas simples (quadrados, retângulos, triângulos e círculos); e (3) outros aspetos mais complexos, que permitissem também identificar casos em que fosse necessário dar atenção a aspetos relacionados com a acuidade visual, a lateralidade ou a dislexia, nomeadamente através do declive das pintas. A complexidade da figura que serve de modelo advém de ter três elementos a considerar – o interior (pintas), o central (quadrado) e exterior (retângulo, triângulo ou círculo) – bem como de existir informação proveniente das colunas (vertical) e das linhas (horizontais), que é necessário conjugar para completar, de acordo com o modelo, os dois espaços em branco. Assim, permitia também avaliar capacidades como atenção concentrada, observação ou recurso de mecanismos de controlo de resultados (ver Anexo 11).

Por último, pretendia-se que existisse um elemento muito fácil de identificar – quadrado central – que não exigisse conjugar as informações das colunas com as das linhas, pois seguindo apenas uma delas chegar-se-ia à resposta pretendida. Esta era a parte mais fácil de completar. Um elemento de média dificuldade – o número de pintas – em que, apenas olhando para as colunas, ou para as linhas, também se conseguia perceber que seriam necessárias três pintas, em cada um dos espaços, para completar o modelo e em que o declive era sempre o mesmo. O elemento exterior era o mais difícil de identificar, pois era necessário conjugar a informação das colunas com a das linhas para decidir em que espaço em branco desenhariam o retângulo e em qual desenhavam o triângulo. A centração em apenas um destes elementos – colunas – daria origem a um desempenho típico dos alunos que mobilizam o raciocínio concreto, mas não o abstrato.

A Tarefa C foi a primeira a estar pronta e a ser usada no estudo piloto. Uma vez decididos os elementos que a compunham, foi das que menos modificações sofreu, pois as primeiras aplicações revelaram que estava muito bem adaptada para o que se pretendia avaliar, incluindo os casos de perda de acuidade visual, dislexia e lateralidade. Decidir, na equipa de professores que a concebeu, que a figura geométrica mais simples era o quadrado e que, por isso mesmo, essa seria a figura central, foi rápido. Também foi consensual que as três figuras geométricas a usar no elemento exterior seriam o retângulo, o quadrado e o círculo. Como havia três colunas, o número de pintas também se decidiu que seria uma, duas e três, para cada coluna. O que mais se discutiu foi em relação a faltar um retângulo e um triângulo exteriores, ou um retângulo – este era consensual – e um círculo. Mas tendo experimentado as duas versões, a equipa que elaborava o IACC apercebeu-se de que desenhar um círculo era muito mais difícil e, como o que se pretendia era avaliar a mobilização do raciocínio concreto ou abstrato, a Tarefa C rapidamente chegou a uma versão final, que ainda hoje é utilizada e que veio, inclusive, a ser selecionada também para o IACC das Ciências e o da Filosofia, sendo esta a única tarefa comum a estes três instrumentos.

A Tarefa C foi a única a estar já na versão final em 1991/92, embora ainda não se tivesse decidido a designação Tarefa C, que só foi atribuída quando a ordem de apresentação das cinco tarefas já estava também acordada. No entanto, estava completa e na versão final, e ainda atualmente se mantém, pois continua a permitir obter informação relevante sobre aquilo que se pretendia avaliar.

A Tarefa B (ver Figura 4) foi a segunda a ser concebida. Partiu-se de diversos problemas que existiam em manuais, artigos e livros sobre resolução de problemas e que utilizavam canecas. Nesta tarefa, pretendia-se, do ponto de vista matemático, avaliar a capacidade de intuição matemática, pelo que a obtenção do litro de leite não deveria ser imediata, recorrendo apenas a uma medição única através das medidas existentes. Também se pretendia avaliar a persistência na tarefa e a criatividade. Para tal, era necessário que se pudesse medir a quantidade desejada – um litro de leite – começando a fazer despejos da caneca menor para a maior – o que corresponderia a uma intuição matemática mais apurada – ou da caneca maior para a menor – o que revelaria menor intuição matemática, mas mais persistência na tarefa, devido ao maior número de passos necessários para concluir a resolução da mesma (ver Anexo 11).

B. A senhora Isaura foi à leitaria do senhor Timóteo para comprar um litro de leite. O senhor Timóteo só tem duas medidas, uma de 3 litros e outra de 5 litros. Como deve o senhor Timóteo fazer para satisfazer o pedido da sua cliente?

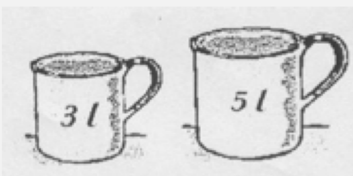


Figura 4 – Enunciado da Tarefa B (versão atual)

A decisão de que se usariam duas canecas foi consensual. Mas foram experimentadas diversas capacidades para as mesmas antes de se chegar à formulação de uma caneca de três litros e outra de cinco litros, para se conseguir medir um litro de leite, como pedido. Desde o início que foi consensual que as canecas não deveriam ter capacidades que fossem múltiplas ou divisoras uma da outra, assim como que o leite a medir também não deveria sê-lo. Contudo, foram escolhidos diversos valores, durante o estudo piloto, para se atingir os que permitissem analisar as capacidades e competências que se pretendia avaliar. Em relação a esta tarefa, os dados provenientes das entrevistas realizadas durante o estudo piloto, bem como os das conversas informais com os alunos, foram essenciais para se chegar às atuais capacidades das canecas.

Um aspeto também discutido, inicialmente, foram as informações constantes do enunciado da tarefa e que permitiam interpretá-la como mais plausível. Como nas grandes cidades já não se usavam medidas deste tipo, optou-se por falar numa mercearia e escolher nomes pouco habituais, nas grandes cidades, para cada uma das personagens. Esses nomes também tornavam pouco provável que o nome do merceeiro e da cliente fossem nomes de alunos, o que era voluntário. O enunciado teve estes nomes escolhidos desde a primeira versão, mas houve pequenos melhoramentos que foram sendo introduzidos na sua formulação. A Tarefa B chegou à versão final, que ainda atualmente se usa, em 1993/94, o que pressupõe a existência de diversas versões preliminares, em que se foram ensaiando diferentes capacidades para cada uma das canecas, bem como pela necessidade de analisar pormenorizadamente as transcrições das entrevistas aos alunos, para se tomarem decisões quanto a essas mesmas capacidades. No entanto, esta tarefa apresentou uma modificação relacionada com a figura anexa ao enunciado da mesma. Na primeira versão (ver Figura 5), as duas medidas continham algumas linhas que poderiam induzir desempenhos desajustados pelo que, posteriormente, se optou pela imagem que podemos encontrar no enunciado atual (ver Figura 4).

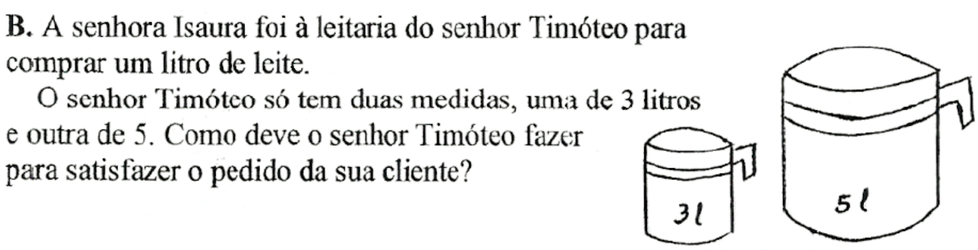

B. A senhora Isaura foi à leitaria do senhor Timóteo para comprar um litro de leite.
O senhor Timóteo só tem duas medidas, uma de 3 litros e outra de 5. Como deve o senhor Timóteo fazer para satisfazer o pedido da sua cliente?

Figura 5 – Enunciado da Tarefa B (versão inicial)

A Tarefa D (ver Figura 6) foi selecionada e adaptada para permitir identificar se os alunos recorriam, preferencialmente, a raciocínios analíticos ou a geométricos. A figura selecionada fazia parte de um outro problema, mas adequava-se ao que se pretendia avaliar, pois podia ser decomposta em diversas figuras geométricas mais simples (retângulos, triângulos, losangos), possibilitando o recurso a diversas formas de raciocínio. Pretendia-se que os alunos pudessem compreender que a parte pintada da figura correspondia a metade da sua área quer, recorrendo a fórmulas e outras estratégias aritméticas para calcularem as áreas das diversas figuras que a compunham, quer manipulando, geometricamente, essas figuras, de maneira a conseguirem mostrar, visualmente, que a área da parte pintada era igual à da parte em branco. Assim, uma das adaptações consistiu em tornar a decomposição da figura possível. Posteriormente, decidiram-se as medidas dos lados do retângulo exterior e a formulação do enunciado, que se pretendia que fosse muito simples e direta.

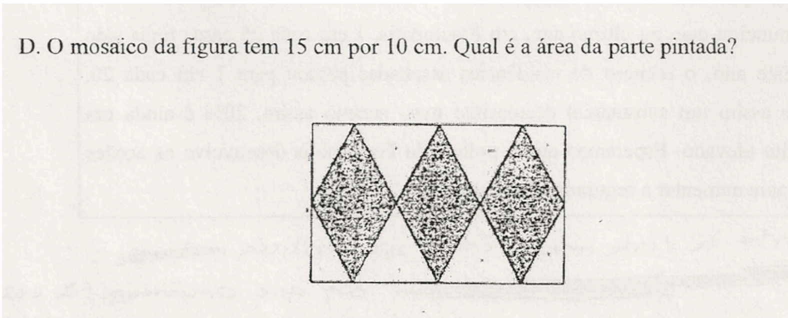


Figura 6 – Enunciado da Tarefa D

Esta tarefa começou a ser elaborada em 1991/92 e a versão final ficou pronta em 1992/93. As entrevistas que foram realizadas no estudo piloto não deram origem a grandes alterações, provavelmente porque a parte escrita do enunciado era muito simples e porque os valores escolhidos para medidas dos lados funcionaram como previsto, permitindo analisar as capacidades e competências que se pretendiam conhecer através dos desempenhos dos alunos a quem ela era proposta. Só agora, ao analisarmos em conjunto dados referentes a mais de 600 turmas, nos pareceu que haveria vantagem em propor algumas alterações quanto às medidas dos lados do mosaico, passando estas a ser de 21 cm e 10 cm. Esta alteração não permite a existência de desempenhos como os identificados no Ponto 5.3. dos Resultados, ou seja, se somarmos 21 com 10 e multiplicarmos por três, o resultado é 93 cm. Assim, não obtemos o valor de área da parte pintada, que é de 105 cm^2. Por outro lado, estes novos valores respeitam alguns requisitos que pretendíamos: (1) a medida do lado maior do mosaico ser divisível por 3; (2) terem, para além da unidade e dele próprio, apenas dois divisores, ou seja, $D_{10} = \{1;2;5;10\}$ e $D_{21} = \{1;3;7;21\}$; e (3) não originar cálculos matemáticos complexos, que dificultem a resolução da tarefa (ver Anexo 12).

Em relação à Tarefa E (ver Figura 7), esta também começou a ser elaborada em 1991/92. Pretendia avaliar competências como as conexões com o quotidiano e foi consensual que deveria tratar-se de uma situação de compra e venda, relacionada com as noções de lucro e de prejuízo, uma vez que estas situações são habituais, nas diversas culturas, sendo de prever que os alunos já tivessem vivenciado situações de compra e venda de produtos. O que levou mais tempo a decidir foi a que produtos se deveriam referir as compras e vendas, sendo pouco consensual esta decisão. A opção por obras de arte foi configurada pelo trabalho que então era desenvolvido numa escola secundária, dedicada ao ensino das artes, onde estava a ser desenvolvido um projeto com a finalidade de adaptar o currículo da disciplina de Métodos Quantitativos aos alunos do ensino artístico (Mansos, Pinto, Bastos, Pinheiro, & Saporiti, 1994; Ponte et al., 1998). Posteriormente, foi solicitado às autoras deste projeto que elaborassem um currículo prescrito adaptado às escolas secundárias especializadas no ensino artístico (ME, 1995, 1996).

E. Um negociante de arte comprou uma obra por 300 contos e, logo em seguida, vendeu-a por 400 contos. Mais tarde arrependeu-se e voltou a comprar a mesma obra por 500 contos, vendendo-a depois por 600. Nestes negócios, ele teve lucro, prejuízo, ou ficou na mesma? Porquê?

Figura 7 – Enunciado da Tarefa E (versão inicial)

Como os alunos que responderam a esta tarefa durante o estudo piloto não reagiram negativamente ao produto mencionado no enunciado do problema, optou-se por manter esse produto, em Portugal. No entanto, esta foi a tarefa que mais adaptações teve quando utilizada noutros países e culturas, o que não é de estranhar se nos recordarmos de que é a que mais diretamente se relaciona com o quotidiano, ou seja, a mais configurada por elementos culturais, tendo de ser adaptada em função das culturas em que se participa.

No início, supôs-se, porque o estudo piloto assim o fez pensar, que bastava perguntar se havia lucro ou prejuízo para que este fosse quantificado (ver Figura 7).

Porém, posteriormente, percebeu-se que isso nem sempre acontecia. Como se pretendia que os alunos quantificassem o lucro ou o prejuízo que pensavam ter existido, essa questão passou a fazer parte do enunciado a partir do terceiro ano em que os alunos responderam ao IACC (ver Figura 8). Esta alteração ilustra a vontade que existiu, por parte da equipa do IC, de ir monitorizando e avaliando os resultados obtidos, mesmo durante a longa vigência do projeto.

E. Um negociante de arte comprou uma obra por 300 contos e, logo em seguida, vendeu-a por 400 contos. Mais tarde arrependeu-se e voltou a comprar a mesma obra por 500 contos, vendendo-a depois por 600. Nestes negócios, ele teve lucro, prejuízo, ou ficou na mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi?

Figura 8 – Enunciado da Tarefa E (versão com o pedido de quantificação do lucro ou prejuízo)

Outras das alterações desta tarefa está relacionada com a mudança da moeda, de escudos para euros, pelo que o enunciado foi alterado, para passar a corresponder a esse novo dado cultural (ver Figura 9), constituindo, assim, a versão atual desta tarefa.

E. Um negociante de arte comprou uma obra por 300 euros e, logo em seguida, vendeu-a por 400 euros. Mais tarde arrependeu-se e voltou a comprar a mesma obra por 500 euros, vendendo-a depois por 600. Nestes negócios, ele teve lucro, prejuízo, ou ficou na mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi?

Figura 9 – Enunciado da Tarefa E (versão atual, com euros)

Por fim, a última alteração tem a ver com o produto que se está a vender e a comprar. Como em Cabo Verde a venda e compra de obras de arte não é característica dessa cultura, a equipa do projeto IC resolveu modificar o produto de compra e venda para uma televisão (ver Figura 10). O mesmo aconteceu, por exemplo, no Brunei, onde a venda de diamantes é habitual, tendo-se optado por esse produto. Assim, procurou-se adequar, do ponto de vista cultural, os enunciados do IACC aos países e culturas onde este instrumento era utilizado. Nesta tese, optámos por apenas considerar os enunciados em português, pelo que o do Brunei não é mostrado.

E. Um comerciante comprou uma televisão por 30 mil escudos e, logo em seguida, vendeu-a por 40 mil escudos. Mais tarde arrependeu-se e voltou a comprar a mesma televisão por 50 mil escudos, vendendo-a depois por 60 mil escudos. Nestes negócios, ele teve lucro, prejuízo, ou ficou na mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi?

Figura 10 – Enunciado da Tarefa E (versão utilizada em Cabo Verde)

Mais uma vez, havendo a preocupação de avaliar processos de raciocínio e não sendo atribuída demasiada ênfase aos aspetos de cálculo, optou-se por quantias que permitissem facilmente a execução das operações mentais e procurou-se evitar que existissem alunos que não respondiam à tarefa proposta devido à complexidade das operações de cálculo que lhes estavam subjacentes. Convém realçar que, como era essencial que os alunos explicitassem as diversas estratégias de resolução que tinham utilizado, permitindo aos professores/investigadores e investigadores inferirem os processos de raciocínio que lhes estavam subjacentes, optou-se por não deixar recorressem à calculadora, uma vez que nestes casos é frequente eles realizarem operações, ou fazerem simulações, que não anotam nas folhas de respostas. Para isso, foi desdramatizada a apresentação, sendo-lhes dito que, quando se enganavam, ou mudavam de opinião, podiam riscar e voltar a escrever a nova estratégia de resolução ou resultado. Apesar de os alunos terem compreendido esta instrução, é de salientar que revelavam, geralmente, uma enorme preocupação se a resposta não ficava com uma apresentação muito cuidada, pelo que a equipa que elaborava o IACC se apercebeu de que este cuidado era frequentemente realçado em tarefas anteriores, pelos professores.

A Tarefa E ficou pronta em 1993/94, pois também precisou de uma análise cuidada das entrevistas posteriores que foram efetuadas aos alunos, bem como das conversas informais que foram surgindo. Apesar dos ajustamentos que existiram em relação aos valores atribuídos para cada compra e venda, a análise que agora fizemos das cerca de 600 turmas do IC ainda nos fez propor uma nova alteração a esses valores, evitando desempenhos como os descritos no Padrão E.1.2. (Subponto 5.3.5.1.2.), em que alguns alunos afirmam que o lucro é de 200 euros, mas efetuam a diferença entre os valores das duas vendas (400€ e 600€) ou das duas compras (300€ e 500€). Assim, a proposta de alteração é a seguinte: na primeira transação o negociante compra a obra de arte por 200 euros e vende-a por 300 euros; depois, compra-a por 700 euros e vende-a por 800 euros. Estes valores permitem que: (1) os desempenhos mencionados anteriormente não ocorram, pois 800 – 200 = 600€, logo não se obtém como resultado 200€ e 700 – 200 = 500€, pelo que também não se obtém 200€; e (2) a abordagem que se adota (global ou passo-a-passo), bem como os cálculos matemáticos que se podem realizar, revelam um nível semelhante de exigência cognitiva, pois as operações básicas envolvidas continuam a ter uma complexidade idêntica. Para além disso, são fáceis de executar sem o recurso à calculadora, que era algo que também se pretendia (ver Anexo 13).

A tarefa que levantou mais dificuldades e suscitou mais discussões entre a equipa que foi construindo as diversas tarefas do IACC foi a que deveria avaliar a existência de sentido crítico em relação a informações que envolvessem conteúdos matemáticos (ver Figura 11). Daí que a primeira versão desta tarefa só tenha existido em 1993/94 e a versão final só tenha sido conseguida em 1994/95.

A. Comenta, do ponto de vista matemático, a seguinte notícia de Jornal:

Decréscimo nos assaltos a residências

Do nosso correspondente em Fractopolis:

A polícia anunciou que, no último ano, em Fractopolis, 1 em cada 25 casas tinha sido assaltada. Este ano, o número de residências assaltadas passou para 1 em cada 20. Verificou-se assim um substancial decréscimo mas, mesmo assim, 20% é ainda um número muito elevado. Esperamos que a polícia de Fractopolis desenvolva as acções necessárias para aumentar a segurança dos cidadãos.

Figura 11 – Enunciado da Tarefa A

Em 1992/93 ainda se ensaiaram outras hipóteses de tarefas, uma delas com gráficos e dados estatísticos, mas que não revelou corresponder ao que se pretendia avaliar, pelo que foi abandonada. A partir daí, a parte consensual manteve-se: recorrer-se a uma notícia de jornal. Mas alterou-se a sua conceção: passou a optar-se por criar o nome de uma cidade imaginária, inspirada no Pato Donald e em Walt Disney – Fractopolis – para que a notícia não fosse associada a algum local conhecido. Adotou-se um assunto que fazia parte do quotidiano: os assaltos a residências. A partir daí, elaborou-se uma falsa notícia, com dados matemáticos desajustados, que os alunos deveriam comentar. Pretendia-se que estes dados pudessem ser comentados recorrendo a diversas estratégias de resolução e conhecimentos matemáticos, bem como através de conexões ao quotidiano, como os exemplos do que acontece quando mais ou menos pessoas comem um chocolate ou uma pizza. Assim, independentemente do ano de escolaridade frequentado e dos conteúdos de matemática escolar já abordados, os alunos poderiam ser capazes de responder a esta tarefa.

A contextualização próxima do quotidiano – é frequente verem-se notícias de assaltos nos *media*, em Portugal – facilitou a adesão dos alunos à tarefa. Mesmo os que apresentavam insucesso escolar repetido, não a rejeitavam. O que também se observou, desde o estudo piloto, foi que esta era a tarefa que mais suscitava o recurso ao pensamento comum, também designado por senso comum ou conhecimento vulgar (Popper, 1935/1992), pois alguns alunos faziam considerações sobre a polícia e a segurança, mas não comentavam os dados matemáticos referidos na notícia, como era pedido. No entanto, como se pretendia avaliar a capacidade de observação e sentido crítico, a Tarefa A correspondia ao pretendido (ver Anexo 11).

Procurámos que todas as tarefas: (1) permitissem recorrer a diversas estratégias de resolução, respeitando a diversidade, nomeadamente cultural; (2) permitissem inferir os raciocínios que lhes estavam subjacentes; (3) avaliassem sobretudo capacidades e competências e não conhecimentos prescritos para os anos de escolaridade anteriores; (4) os valores escolhidos não pusessem a ênfase em cálculos muito complexos, que impedissem os alunos de as conseguir resolver sem recorrerem à calculadora; e (5) não provocassem rejeição por parte dos alunos que já tinham vivenciado insucesso escolar acumulado, em Matemática ou em disciplinas afins.

5.1.3. Ordem de apresentação das tarefas

O último aspeto a ser decidido referia-se à ordem de apresentação das tarefas. Como já afirmámos, as tarefas começaram por ser elaboradas uma a uma sendo, posteriormente, respondidas por diversas turmas. Só quando as cinco tarefas já estavam na sua versão final se propôs a sua resolução em conjunto. Assim, em 1994/95 foram elaboradas 10 versões do IACC. Cada uma delas foi respondida por 40 turmas, ou seja, cinco turmas de cada um dos anos de escolaridade a que se destina o IACC (5.º ao 12.º ano de escolaridade). Isso permitiu compreender qual era a tarefa que provocava menos rejeição do instrumento, sobretudo por parte dos alunos que habitualmente eram confrontados com insucesso escolar nesta disciplina, ou em disciplinas afins.

Este primeiro momento de trabalho empírico referente à ordenação das tarefas fez com que se decidisse escolher a Tarefa A para primeira tarefa. Apesar desta ser a tarefa que, habitualmente, tinha menos desempenhos no padrão mais elevado e complexo, era também aquela que mais estimulava os alunos, levando-os a querer responder às tarefas seguintes e a não rejeitar o IACC. Depois, voltou-se a repetir o processo para decidir a 2.ª tarefa, ou seja, fizeram-se quatro versões em que cada uma delas tinha a Tarefa A em primeiro lugar e cada uma das outras na segunda posição, voltando-se a ter cinco turmas de cada um dos anos de escolaridade que respondiam a estas versões. Isso levou a que a Tarefa B fosse selecionada para ser a segunda a ser apresentada aos alunos, uma vez que esta sequência – Tarefa A seguida da Tarefa B – facilitava a adesão dos alunos e, como tal, permitia que os alunos não desistissem de responder ao IACC.

Procedeu-se de modo semelhante para as ordenações seguintes, chegando-se à atual ordenação. Convém notar que, nestas versões provisórias, a designação da atual Tarefa A poderia ser outra, pois a letra do alfabeto era atribuída de acordo com a posição que cada tarefa ocupava nessa versão do IACC. Assim, só quando estava decidida a ordenação final se adotou a atual designação utilizada para cada uma das tarefas que compõem este instrumento.

O cuidado que presidiu à escolha da ordenação das tarefas ilustra bem como pequenos pormenores podem fazer a diferença em relação aos desempenhos que os alunos conseguem alcançar. Apesar de se tratar das mesmas cinco tarefas, apenas ordenadas de forma diferente, foi notório que, quando o IACC começava pelas tarefas que atualmente designamos por Tarefa B e Tarefa D havia 32% e 27% de alunos que afirmavam que não sabiam matemática e, por isso, não sabiam responder. Mesmo quando instados a resolverem outra das tarefas, só respondiam, geralmente, à tarefa que atualmente designamos por Tarefa C, que era aquela que eles menos associavam à Matemática, ou a provas de avaliação em Matemática. A tarefa que atualmente designamos por Tarefa A era a que mais depressa os fazia começar a trabalhar e aderir às restantes tarefas. Daí, na versão final, ter-se optado por começar pela Tarefa A, depois colocar uma das que se fossem a tarefa inicial provocava mais rejeição, seguida da Tarefa C, da D e terminando na E.

Ainda houve uma versão em que a atual Tarefa B e D estavam na posição inversa. Mas os desempenhos eram menos conseguidos, pois havia mais alunos que não resolviam a tarefa das canecas (atual Tarefa B) e, depois, já não tentavam resolver a da venda (atual Tarefa E). Assim, não é apenas a tarefa em si que precisa de ser cuidadosamente elaborada. A ordenação das tarefas constitui também um elemento que não pode ser descurado quando se pretende avaliar as capacidades e competências dos alunos, à semelhança do que também acontece quando se pretendem avaliar conhecimentos.

5.2. A PRIMEIRA SEMANA DE AULAS

A grande pregnância do projeto *Interacção e Conhecimento* (IC), em contextos de educação formal e em cenários como a sala de aula, mesmo após o seu término oficial (2005/06), é configurada, essencialmente, por dois aspetos: (1) os princípios epistemológicos e pedagógicos subjacentes às práticas desenvolvidas ao longo dos 12 anos de vigência formal do IC (César, 2009, 2013a, 2013b; Ventura, 2012); e (2) os procedimentos utilizados na primeira semana de aulas do ano letivo, em turmas que participavam no IC pela primeira vez.

Relativamente à primeira semana de aulas, o professor/investigador não leciona quaisquer conteúdos programáticos. O que se pretende é que cada professor/investigador consiga aceder a conhecimentos mais aprofundados e sustentados acerca dos alunos de cada turma, em termos de capacidades e competências que já mobilizam e que precisam de desenvolver, representações sociais que estes construíram sobre a Matemática, bem como características, interesses e necessidades específicas que cada aluno revela e às quais dificilmente teria acesso se apenas consultasse o processo individual de cada aluno. Esta informação torna-se importante quando se pretendem desenvolver, em aula, práticas baseadas no trabalho colaborativo (César, 2000a, 2009, 2013a; Machado, 2008; Machado & César, 2012a, 2013a, in press b), bem como para o estabelecimento de interações sociais e dialógicas (Renshaw, 2004), nomeadamente entre pares. Revela-se, ainda, particularmente importante para promover a equidade e o acesso ao sucesso escolar, nomeadamente na disciplina de Matemática e afins (Cobb & Hodge, 2007). Trabalhar colaborativamente tem subjacente o trabalho em díade ou em pequenos grupos. É importante decidir a constituição das díades, mobilizando e triangulando aspetos relativos à teoria piagetiana (Piaget, 1923, 1936, 1947, 1972) e à teoria vygotskiana (Vygotsky, 1932/1978, 1934/1962).

A diferença desta primeira semana de aulas do ano letivo, relativamente às que se observam, habitualmente, em muitas escolas de Portugal, está relacionada com os instrumentos utilizados, os procedimentos adotados, o tratamento e análise dos dados provenientes das respostas a esses mesmos instrumentos e aos contributos dessa informação para as decisões sobre a formação das primeiras díades, a sua distribuição espacial na sala de aula, bem como para a seleção, adaptação e/ou elaboração de tarefas matemáticas, nomeadamente as que se vão utilizar nas primeiras semanas do ano letivo e que desempenham um papel preponderante na adesão ou rejeição, por parte dos alunos, das atividades de matemática escolar que é suposto desenvolverem, particularmente em aula.

5.2.1. Instrumentos e procedimentos

Em 1994/95, quando o projeto IC teve o seu início formal, cada aula de Matemática, no ensino básico, era constituída por blocos de 50 minutos, pelo que uma semana era composta por quatro blocos de 50 minutos (ME, 1989). No ensino secundário, a carga horária semanal relativa à disciplina de Matemática era a mesma, isto é, quatro blocos de 50 minutos, com exceção da disciplina de Métodos Quantitativos, que era de três blocos de 50 minutos (ME, 1989). Mais tarde, com a reformulação do sistema de ensino, relativamente à carga horária, no ensino básico a disciplina de Matemática passou a ter três blocos e meio de 90 minutos no 2.º ciclo do ensino básico e dois blocos de 90 minutos no 3.º ciclo do ensino básico (ME, 2002). No ensino secundário, contemplava três blocos de 90 minutos, por semana, nas três vertentes: Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais (ME, 2004). Atualmente, no ensino básico a carga horária semanal desta disciplina é de, no mínimo, 200 minutos, o que, quando a escola, mediante a autonomia que lhe é concedida, organiza os tempos letivos em períodos de 45 minutos, corresponde a cinco tempos de 45 minutos (dois blocos e meio de 90 minutos) e no ensino secundário varia entre 250 e 315 minutos, consoante se trate de Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais (correspondendo a seis ou sete tempos de 45 minutos) (MEC, 2012a). Desta forma, as atividades planificadas pela equipa do projeto IC para a primeira semana de aulas do ano letivo são desenvolvidas nos primeiros quatro tempos de 45 minutos, uma vez que é esta a organização escolhida por diversas escolas.

Considerando as aulas de Matemática de 50 minutos (ou os primeiros 45 minutos, dum bloco de 90), no primeiro bloco o professor/investigador, para além de uma breve apresentação aos alunos, em que também lhes divulga o projeto IC e os resultados que têm sido obtidos, recorre a um conjunto de instrumentos e procedimentos que dão início ao desenvolvimento de práticas baseadas no trabalho colaborativo. No que se refere aos instrumentos utilizados nesta primeira aula, começa-se por uma tarefa de inspiração projetiva (TIP1, ver Anexo 3), que se encontra descrita no Ponto 4.6.. Pretende-se conhecer as representações sociais que os alunos construíram sobre a Matemática e que são influenciadas pelas suas vivências, interações sociais que até então estabeleceram, pelos *media* e outros elementos, ou seja, são elaboradas socialmente, em interação com o(s) outro(s). Este instrumento, por ser de natureza pouco estruturada, permite uma grande diversidade e flexibilidade nas respostas produzidas pelos alunos. Facilita que eles projetem sentimentos, crenças, valores e vivências que dificilmente seriam desocultados em instrumentos mais estruturados como, por exemplo, os questionários. A sua natureza pouco estruturada também significa que não existem respostas certas ou erradas, o que constitui um elemento tranquilizador, sobretudo para os alunos que vivenciaram insucesso escolar repetido em anos letivos anteriores, na disciplina de Matemática.

Para além disso, por ter uma característica pouco habitual nas tarefas pedidas por um professor, numa aula de Matemática – os alunos podem desenhar e/ou escrever – este instrumento raramente é rejeitado pelos alunos e, quando isso inicialmente acontece, eles acabam por aderir ao que lhes é solicitado. Durante os 12 anos de vigência formal do projeto IC, não houve nenhum registo de alunos que se tenham recusado a realizar esta tarefa ou que a tenham deixado em branco. É por estas razões – carácter projetivo, grande liberdade na elaboração das respostas, adesão dos alunos – que a TIP1 é a primeira tarefa a ser proposta aos alunos. Uma das mensagens implícitas é a que todos os alunos são capazes de se envolver numa atividade matemática, sendo respeitados os ritmos de cada um e as diferentes vivências. Este aspeto é essencial se queremos que, nas aulas posteriores, os alunos se envolvam nas tarefas matemáticas propostas. Como alguns alunos desenvolvem representações sociais negativas sobre esta disciplina, é preciso confrontá-los com oportunidades de desocultar essas representações, desconstruindo-as e tornando-as mais positiva (Machado, 2008; Machado & César, 2009, 2013b).

O segundo instrumento a ser utilizado é um pequeno questionário (Q1, ver Anexo 5), que também se encontra já descrito no Ponto 4.6.. Com este instrumento pretendemos ter acesso às trajetórias de participação ao longo da vida dos alunos (César, 2013a). Uma vez que não queríamos que o preenchimento fosse moroso, desmotivante e cansativo, levando alguns alunos a não responderem a todos os itens, o Q1 é constituído por questões simples, de resposta geralmente curta, embora os alunos que assim o desejarem possam explanar-se mais. A segunda parte deste questionário tinha como finalidade que os alunos expressassem, por escrito, o que pensavam sobre a disciplina de Matemática, o papel dos mesmos e do professor, em aula.

Para além disso, o professor/investigador preenche uma planta com a disposição dos alunos. Esta pretende identificar: (1) alunos com problemas de visão ou que usem óculos; (2) alunos que sejam esquerdinos; (3) alunos que revelam formas de atuação disruptivas ou pouco adequadas; e (4) outras informações que o professor/investigador considere pertinentes registar naquela aula sobre um determinado aluno ou de um conjunto de alunos. Durante os primeiros quatro tempos dessa semana os alunos escolhem os lugares, pelo que o professor/investigador também tem acesso às dinâmicas existentes entre os vários grupos de alunos que, segundo Gouveia-Pereira, Pedro, Amaral, Martins e Peixoto (2000), constitui um elemento importante. Em síntese: o primeiro bloco dessa semana caracteriza-se pela surpresa, um aspeto essencial quando se pretende desenvolver práticas inovadoras, em aula. Inicia-se pela apresentação do professor/investigador, incluindo a negociação do contrato didático (embora este vá sendo (re)negociado ao longo dessa semana, bem como nas seguintes), pela resposta à TIP1 e o preenchimentos do Q1, bem como da primeira planta de sala de aula.

O segundo bloco de 50 ou 45 minutos é dedicado exclusivamente à resolução do instrumento de avaliação de capacidades e competências (matemáticas), que está descrito no Ponto 4.6.. (IACC, ver Anexo 2). É extremamente importante que o professor/investigador realce que este instrumento não vai ser objeto de avaliação sumativa. Uma vez que irão trabalhar em díade, é importante que não copiem resoluções, para que o professor/investigador consiga aperceber-se das capacidades e competências que já conseguem mobilizar. Um elemento que habitualmente funciona como dissuasor, é explicar aos alunos que os alunos cujos desempenhos recorram a estratégias de resolução semelhantes, não irão ficar juntos, na mesma díade. Como na primeira semana de aulas são os alunos que escolhem os lugares, na sala de aula, é frequente eles estarem junto daqueles com quem têm relações mais próximas. Assim, são geralmente os que eles escolheriam para seu par, se as díades fossem escolhidas pelos alunos, no início do ano letivo. Logo, saber que resoluções iguais não lhes permitem ficar juntos costuma prevenir algumas tentações de copiarem resoluções pelos colegas.

É também de realçar que são aceites todas as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, desde que estes as expliquem, facilitando que o professor/investigador possa inferir os tipos de raciocínio a que recorreram. Assim, podem utilizar esquemas e outras representações gráficas, palavras, operações matemáticas, fórmulas, ou outro tipo de registo que considerem importante para explicar as formas de raciocínio subjacentes à estratégia de resolução adotada. Se os alunos responderem ao IACC num dia diferente daquele em que a TIP1 e Q1 foram respondidos, o professor/investigador elabora outra planta de sala de aula, com a disposição dos alunos. Esta forma de atuação permite ao professor/investigador ter acesso aos jogos interativos que ocorrem naquele grupo particular de alunos, bem como começar a identificar características que irão configurar as decisões futuras referentes às primeiras díades.

Nos últimos dois blocos de aula dessa semana (ou no terceiro e quarto tempo, de acordo com os atuais tempos de cada aula) é realizada a exploração, em grande grupo, do IACC. Para isso, o professor/investigador deverá distribuir, no início da aula, um exemplar do IACC, em branco, salientando que os alunos devem registar as várias estratégias de resolução que emergirem durante a exploração do mesmo. O realce que é dado à utilidade de registarem as diversas estratégias de resolução tem implícito a valorização dos diversos raciocínios e estratégias de resolução. Como sabemos que as estratégias de resolução preferidas pelos alunos não são independentes das culturas em que participam, nomeadamente da língua materna e da língua falada nos bairros onde vivem, esta é também uma forma de promover uma educação intercultural (César, 2009, 2013a; Meyer, César, Norén, & Prediger, in press; Ventura, César, & Matos, 2010). Como afirmámos no quadro de referência teórico, os implícitos jogam um papel fundamental nos desempenhos dos alunos. Assim, se pretendemos desenvolver, nos alunos, uma autoestima académica positiva, nomeadamente em relação à disciplina de Matemática, é importante encontrar formas de atuação e de reação que tenham subjacentes esta mensagem implícita. Esse momento é, para muitos alunos, um momento de viragem, na medida em que é a primeira vez, ao longo da sua trajetória de participação ao longo da vida e num cenário de sala de aula, que vão ao quadro explicar algo que resolveram com sucesso na disciplina de Matemática. Para além disso, para muitos deles, é também a primeira vez em que o que fizeram é escutado atentamente, tanto pelo professor/investigador, como pelos colegas (César, 2009; César et al., 2000). Por tudo isto, esta exploração do IACC tem um papel determinante na adesão dos alunos ao contrato didático que com eles é negociado. Para além disso, a exploração, em grande grupo, do IACC, constitui um marco significativo desta semana, pois pretende-se que todo e qualquer aluno vá ao quadro, expor aos colegas uma resolução, ou parte de resolução, que conseguiu fazer. Assim, a principal mensagem implícita é a de que todos os alunos são capazes de se envolver em atividades matemáticas e que todos conseguem atingir desempenhos suficientemente interessantes para que os colegas os registem, por escrito. Esta é uma mensagem potentíssima, sobretudo em turmas onde existem muitos alunos que vivenciaram situações de insucesso escolar repetido na disciplina de Matemática, em anos letivos anteriores.

Em casa, previamente, o professor/investigador analisou os três instrumentos usados na primeira semana de aulas: a TIP1, o Q1 e o IACC. Isso permite-lhe conhecer algumas das capacidades e competências que cada aluno já consegue mobilizar e aquelas que precisa de desenvolver. Também consegue identificar as diversas estratégias de resolução que foram utilizadas para cada tarefa do IACC, podendo, então, decidir sobre que alunos vai solicitar para explicarem a sua resolução, em cada uma das tarefas. Nesta aula, como os alunos continuam sentados em lugares que eles próprios escolheram, o professor/investigador deverá preencher uma nova planta com a disposição espacial dos alunos.

Como já afirmámos, existem outros instrumentos que são imprescindíveis para a formação das primeiras díades. Ao contrário dos que foram referidos anteriormente – TIP1, Q1 e IACC – estes não são preenchidos pelos alunos, mas sim efetuados pelo professor/investigador. Referimo-nos à observação, enquanto participante observador (Merriam, 1988) e às conversas informais, que lhe permitem clarificar algumas dúvidas que possam ter surgido quando analisou os dados que foi recolhendo ao longo da primeira semana de aulas. Estes instrumentos podem ainda ser complementados por uma análise documental, sobretudo no caso de alunos cujo processo inclui relatórios relevantes para compreendermos os seus processos de desenvolvimento e de aprendizagem. Assim, a primeira semana de aulas é intensiva, quanto à recolha, tratamento e análise de dados, uma vez que é imprescindível tratar e analisar os dados recolhidos, quer para proceder à exploração do IACC quer para a formação das primeiras díades, que é da responsabilidade do professor/investigador nas turmas que participam pela primeira vez no IC.

Uma vez que existe pouco tempo para realizar este primeiro tratamento e análise dos dados recolhidos na primeira semana de aulas, foi essencial desenvolver formas de registo que facilitassem este processo, bem como a consulta dos mesmos e a tomada de decisão no que se refere aos alunos que iriam participar nos diversos momentos de exploração do IACC. Estas formas de registo também se revelaram particularmente importantes para os cursos e as ações de formação que se destinavam a futuros professores e a professores, ou seja, para a formação inicial e ao longo da vida profissional. Nesta formação participavam também os futuros professores estagiários que pretendiam vir a desenvolver a sua prática pedagógica supervisionada no âmbito do IC.

Deste conjunto de formas de registo do tratamento e análise dos dados recolhidos na primeira semana de aulas fazem parte: (1) Grelha de registo e análise; (2) Folha de exploração no quadro; (3) Folha dos desempenhos no IACC; (4) Folha com as primeiras díades; e (5) Planta de sala de aula com as primeiras díades.

A grelha de registo e análise (ver Anexo 14) possibilita ao professor/investigador organizar a informação proveniente dos três instrumentos a que os alunos respondem durante a primeira semana de aulas, através de uma análise preliminar da TIP1, de algumas questões do questionário e do IACC. A existência desta grelha facilita a análise detalhada necessária à formação das primeiras díades. Para além disso, também permite ter uma visão global das características, interesses e necessidades dessa turma.

A folha de exploração no quadro (ver Anexo 15) permite registar a informação para cada uma das cinco tarefas do IACC, diferenciando as estratégias de resolução que se costumam obter em cada tarefa. Assim, permite ao professor/investigador, à medida que vai analisando as respostas ao IACC, tomar decisões sobre o que os alunos irão ao quadro explicar das suas estratégias de resolução. Geralmente, escolhe-se um aluno que realizou algo completo e com uma explicação do processo de resolução. Contudo, quando há alunos que não têm resoluções e/ou explicações completas, ou para haver diversos contributos para a exploração da Tarefa C, um aluno pode explorar uma parte da sua resposta, que pode ser completada, posteriormente, por outro colega. Aquilo que é fundamental é que: (1) todos os alunos vão ao quadro explorar uma resolução ou parte de resolução que efetuaram, de forma adequada; (2) os alunos percebam que as diversas estratégias de resolução são valorizadas; (3) uma mesma tarefa pode dar origem a uma ou mais estratégias de resolução, sendo enriquecedor que eles conheçam essas diferentes estratégias e raciocínios que lhes estão subjacentes; (4) perceberem que podem ter feito uma parte da tarefa que juntamente com outra parte feita por outro colega se obtém uma resposta completa e adequada, salientando a importância do trabalho colaborativo, entre pares com capacidades e competências complementares, que atuam alternadamente como par mais competente; e (5) cada um pode aprender com as estratégia de resolução dos diversos colegas e todos podem dar contributos para a aula. Por isso mesmo, o professor/investigador deve verificar, cuidadosamente, se todos os alunos foram selecionados para explorarem uma tarefa, ou parte de tarefa, no quadro.

A folha dos desempenhos no IACC (ver Anexo 16) está relacionada com o desempenho de cada aluno nesse instrumento. É composta por 27 itens, subdivididos em três grandes grupos. O primeiro, que corresponde aos Itens 1 a 17 (inclusive), está relacionado com a mobilização do raciocínio abstrato (RA), enquanto que o segundo grupo, correspondente aos Itens 18 a 26 (inclusive), está relacionado com a mobilização, por parte dos alunos, do raciocínio concreto (RC). Assim, estes dois grandes grupos relacionam-se diretamente com as respostas obtidas na Tarefa C. Por fim, o Item 27 está associado aos alunos aos quais é preciso dar uma atenção especial, isto é, ou que não mobilizam nem o raciocínio abstrato nem o concreto, ou que apresentam desempenhos que podem revelar algumas características de desenvolvimento que necessitam de um apoio especializado. Os dois primeiros grandes grupos – RA e RC – estão depois conjugados com as outras capacidades e competências que se podem analisar através das restantes tarefas, ou seja, analisando os desempenhos nas Tarefas A, B, D e E, começando das mais raras e que, em termos de desenvolvimento, aparecem mais tarde (A e B), para as mais frequentes (E e D). Desta forma, tratando-se de um instrumento desenvolvimentista, que é aplicado do 5.º ao 12.º ano de escolaridade, esta folha de registo permite ao professor/investigador não só ver o tipo de capacidades e competências que cada aluno consegue já mobilizar, mas também se a turma está num nível de desenvolvimento mais avançado, semelhante ou mais lento do que aquele que habitualmente se observa em turmas do mesmo ano de escolaridade. Assim, esta forma de organização da informação recolhida com o IACC permite ao professor/investigador obter um conhecimento mais sustentado e aprofundado da turma, em geral.

A folha com as primeiras díades (ver Anexo 17) permite ao professor/investigador, após completar o preenchimento da grelha de registo e análise, bem como das folhas com os desempenhos no IACC e dos registos sobre as observações da primeira semana de aulas, tomar decisões sobre a formação das primeiras díades e registá-las. Neste momento, a única preocupação é cumprir os critérios para a formação de díades, que explicitaremos depois (ver Subponto 5.2.3.). Aqui não se regista a sua disposição na sala de aula.

Por último, quando já se decidiram as díades, é necessário tomar decisões sobre a sua distribuição espacial, na sala de aula. Para isso, é elaborada uma planta da sala de aula com as primeiras díades. Esta planta será reformulada, periodicamente, por dois motivos diferentes: (1) quando, apesar de se manterem as mesmas díades, se decide trocar a sua disposição espacial para, por exemplo, não serem sempre os mesmos alunos a estarem ao fundo da sala; e (2) quando há díades que são reformuladas, pois pretendemos evitar fenómenos de dependência e, além disso, passado algum tempo, aquele par já desenvolveu as capacidades e competências que trabalhar, em conjunto, na sua ZDP, lhes permitia desenvolver, sendo benéfico que passem a trabalhar com outros pares. Assim, numa mesma turma, existem diversas plantas de sala de aula (geralmente entre 5 a 8), ao longo do ano letivo.

Pelo que foi dito, na primeira semana de aulas do ano letivo, o professor/investigador tem ao seu dispor um conjunto de instrumentos e de formas de registo dos dados recolhidos com esses mesmos instrumentos. A partir deles, desenvolve uma série de procedimentos que lhe permitem planificar as aulas de forma mais sustentada e adaptada às características, interesses e necessidades dos alunos. A grande vantagem deste conjunto de instrumentos e formas de registo é permitir ao professor/investigador ou ao professor conhecer de forma sustentada os alunos e a turma, desde a primeira semana de aulas do ano letivo. Isso possibilita que, desde o início, as tarefas propostas, as instruções de trabalho, os processos interativos e as formas de avaliação previstas possam contribuir, de forma mais efetiva e sustentada, para o envolvimento dos alunos nas atividades matemáticas, em aula, favorecendo a apropriação de conhecimentos matemáticos, bem como a mobilização e o desenvolvimento de capacidades e competências.

5.2.2. Tratamento e análise dos dados

Quando já responderam aos instrumentos relativos aos dois primeiros blocos de 50 minutos (ou aos dois primeiros tempos de 45 minutos) é necessário tratar e analisar os dados. Para tal, recorre-se às formas de registo mencionadas no subponto anterior – grelha de registo e análise, folha de exploração no quadro, folha dos desempenhos no IACC, folha com as primeiras díades e planta da sala de aula.

Na Figura 12 encontra-se um exemplo relativo ao preenchimento da grelha de registo e análise. A primeira observação que queremos destacar consiste na utilização de duas cores, cuja associação é imediata, na cultura dita ocidental: rosa – para os elementos do género feminino; azul – para os do género masculino. Esta forma de atuação facilita a identificação do género quando se olha para esta grelha de registo e análise dos dados recolhidos. Esta identificação imediata é muito útil quando o professor/investigador inicia a formação das primeiras díades, pois a heterogeneidade quanto ao género é um dos critérios utilizados para a tomada de decisão. Por outro lado, também permite obter uma visão global, em termos de género, de cada turma. O preenchimento desta grelha deve ser realizado de forma a completar toda a informação referente a cada aluno, ou seja, por linha e não por coluna. Isso permite ao professor/investigador ir construindo um conhecimento mais aprofundado de cada aluno, tal como se pretende que venha a acontecer na primeira semana de aulas sabendo, depois, como atuar, em aula, para favorecer a apropriação de conhecimentos e o desenvolvimento de capacidades e competências. No exemplo fornecido, para ilustrar os diversos aspetos que pretendíamos analisar, apenas documentamos os dados referentes aos alunos T, M, O e H. No entanto, na grelha original, todos os alunos estavam representados, ou seja, do 1 ao 27, visto que, participavam, nesta turma, 27 alunos.

Nº	Género	Idade	Ret.	Mat	Porquê	Profissão	Tempos Livres	Gosta Mat?	Porquê?	Aluno	Porquê?	Erros ort.	Representação social Mat.	Letra	Tarefa
T	M	15	N	-	Muito complicada	Veterinário	Jogar bola; PC	N	Complicada	F	Não dá para mais	N	Escrita. Negativa. Trad. Confusão, complicada e difícil.	Necessidade de espaço; necessidade de estimular auto-confiança	$\cancel{A}$ $\cancel{B}$ C $\cancel{D}$ E?
M	M	14	N	+	Interessante e sente-se à vontade	Médico ou biólogo	TV; PC	S	Interessante; sente-se à vontade	B	Participa bem e aprende com facilidade	N	Escrita. Positiva. Trad. É interessante, gosta.	Precavido; Sociável; Não se sente bem consigo próprio	$\cancel{A}$ $\cancel{B}$ C D E
O	M	13	N	+	Interessante	Eng. Máquinas	Ler; Ténis	S	Interessante	B/M	Boas notas em anos anteriores	S	Desenho + escrita. Positiva. Trad/Inov. Útil e divertida	Auto-estima variável; precisa de chamar a atenção	$\cancel{A}$ B C D E
H	F	15	N	-	Não tem jeito	Arquitecta	Bicicleta	N	Dificuldades	F	Dificuldades; "é burra"	N	Escita + Desenho. Negativa. Trad. Complicada.	Necessidade de dar nas vistas; baixa auto-estima	$\cancel{A}$ $\cancel{B}$ $\cancel{C}$ $\cancel{D}$ $\cancel{E}$

Figura 12 – Exemplo de preenchimento da grelha de registo e análise

A informação que se coloca nesta grelha de registo e análise obtém-se de duas formas distintas: (1) uma parte é retirada diretamente dos instrumentos supramencionados – TIP1, Q1 e IACC (colunas assinaladas a cinzento claro); e (2) outra parte é inferida e interpretada pelo professor/investigador através da observação ou de respostas a esses instrumentos (colunas assinaladas a cinzento escuro). Em síntese: as colunas assinaladas, no título, a cinzento claro correspondem a uma descrição, enquanto as que estão a cinzento escuro correspondem a uma interpretação.

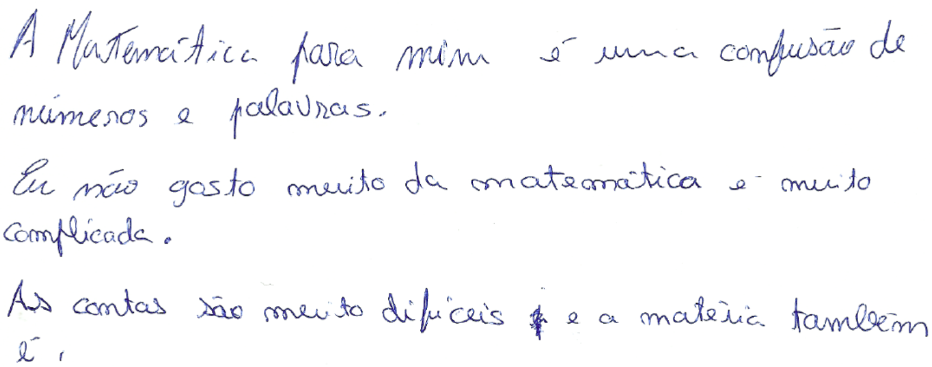
A informação que se coloca nas primeiras 11 colunas é retirada do Q1. Por exemplo, a Questão 6 está relacionada com a coluna da retenção designada por *Ret,* a coluna dos tempos livres tem a ver com a Questão 10 e a coluna relativa à Matemática

(*Mat*) está relacionada com as Questões 7 e 8 do Q1. Para o referido preenchimento desta coluna, se o aluno considera a Matemática como uma das disciplinas de que gosta mais, então o professor coloca o sinal (+); se a considera como uma das que gosta menos, coloca o sinal (-). Não existindo referência nestas duas questões à disciplina de Matemática, esse espaço fica em branco.

Na coluna designada por *Erros Ortográficos* é indicado, com base na análise de todos os instrumentos respondidos nessa semana, se o(a) aluno(a) escreve frequentemente, ou não, com erros ortográficos. Esta informação permite proporcionar oportunidades de aprendizagem com sentidos para os alunos, de modo a contribuir para a formação de cidadãos conscienciosos, críticos, participativos e com poder de argumentação e atuação, tornando-se necessário que estes melhorem a capacidade de expressão escrita, leitura e interpretação. Nesse sentido, a Matemática, em conjunto com outras disciplinas, têm um papel essencial. Como os alunos vão trabalhar colaborativamente, em díades e pequenos grupos, esta anotação permite evitar que dois alunos com dificuldades quanto a este critério trabalhem na mesma díade, sobretudo no início do ano letivo. Também permite que o professor/investigador dê especial atenção a alunos cuja língua materna é diferente da língua de instrução e que, por isso mesmo, revelam erros ortográficos particulares, configuradas pelas lógicas da grafia da língua materna. Este aspeto foi realçado como particularmente importante por alguns autores como Meyer e seus colaboradores (in press).

A coluna designada por *Representação Social da Matemática* é preenchida com base nas inferências e interpretações que o professor/investigador elabora em relação à TIP1. Neste espaço é importante mencionar dois aspetos: (1) a forma como esta é apresentada, isto é, se é escrita, se recorre a desenhos, ou é escrita e com desenhos; e (2) elementos-chave que iluminam se a representação social do(a) aluno(a) em relação à Matemática é positiva ou negativa, bem como se é tradicional (por exemplo, *Matemática são números, contas, fórmulas*) ou inovadora (por exemplo, *A Matemática é uma disciplina, mas também é uma forma de conhecimento onde podemos trabalhar diversos tipos de raciocínio matemático*).

Analisando um exemplo do *corpus* empírico do IC, ou seja, a resposta do Aluno T à TIP1, ele opta por escrever, em vez de desenhar, referindo:



A Matemática para mim é uma confusão de números e palavras.
Eu não gosto muito da matemática é muito complicada.
As contas são muito difíceis e a matéria também é.

Figura 13 – TIP1, Aluno T, 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Analisando a expressão escrita deste aluno, podemos mencionar diversos aspetos importantes para o preenchimento da grelha de registo e análise: (1) o aluno recorre, exclusivamente, à escrita para expressar o que é para ele a disciplina de Matemática; (2) revela que é uma disciplina complicada, com conteúdos programáticos (que designa por matérias) difíceis; (3) considera que esta é uma confusão de números e palavras; (4) apenas considera a Matemática uma disciplina; não uma forma de conhecimento; e (5) afirma, claramente, que não gosta de Matemática. Assim, a sua resposta é característica de uma representação social negativa e tradicional da Matemática, tal como anotado na grelha de registo e análise (ver Figura 12).

Existem outros alunos que optam por desenhar e escrever o que é para eles a Matemática, como acontece com os Alunos O e H. Na Figura 14 está representada a resposta do Aluno O.

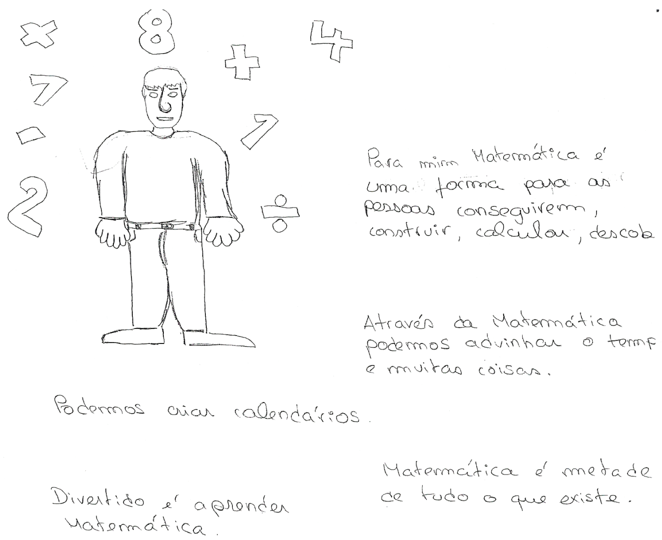


Figura 14 – TIP1, Aluno O, 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Para este aluno, esta disciplina está associada a cinco aspetos: (1) aos números, quatro operações básicas da aritmética e aos cálculos, que fazem parte do desenho; (2) à sua conexão com o quotidiano e a questões práticas, como as relativas à meteorologia ou à elaboração de calendários; (3) à sua extrema utilidade, que o leva a afirmar que a Matemática é metade de tudo o que existe, ou seja, nada no mundo existiria sem os conhecimentos matemáticos que lhe estão subjacentes; (4) não se trata apenas de uma disciplina; é uma forma de conhecimento que permite construir e descobrir; e (5) ao divertimento que existe quando se predispõe a aprendê-la, ou seja, a uma representação social positiva de si, enquanto aprendente de conhecimentos matemáticos (e não apenas enquanto aluno da disciplina de Matemática). Assim, este aluno revela ter construído uma representação social positiva da Matemática. Esta conjuga elementos mais tradicionais, difundidos pela Escola, pelos *media* e pela sociedade, em geral, como a associação entre Matemática e os números e operações, com outros inovadores, como a Matemática ser uma forma de conhecimento que permite construir e/ou descobrir, bem como que muito do que existe no mundo, muito da nossa vida, é Matemática (Machado, 2008; Machado & César, 2012a, 2013a, in press a; Piscarreta, 2002; Piscarreta & César, 2004).

A coluna relativa à letra permite registar características de cada aluno que foram identificadas pela observação e pelas conversas informais que ocorreram durante a primeira semana de aula, e que por vezes se reflete em alguns detalhes da caligrafia do aluno. Por fim, a última coluna é preenchida com base na análise efetuada aos desempenhos que os alunos evidenciaram no IACC. À medida que se efetua essa análise, o professor/investigador preenche, paralelamente, mais duas formas de registo: a folha de exploração no quadro e a folha dos desempenhos no IACC.

A equipa central do projeto IC criou uma simbologia (ver Figura 15) que facilita a rápida identificação das tarefas que cada aluno conseguiu, ou não, resolver de forma adequada, parcial ou totalmente, quando respondia ao IACC. Habitualmente, esta simbologia é complementada com outras informações importantes, colocadas em anexo. Por exemplo, na Tarefa E, se o aluno tivesse optado por uma abordagem global do problema e resolvido de forma completa essa tarefa, então o professor/investigador escreveria Ⓔ$_{G}$.

Esta forma de atuação permite que, por exemplo, quando outro professor/investigador ou investigador analisa esses mesmos dados, possa perceber as informações inseridas nestas formas de registo. Como a equipa do IC trabalhava colaborativamente, a existência de uma codificação comum a todos os professores/investigadores e investigadores era essencial. Para além destes aspetos, consiste numa maneira prática de sintetizar e uniformizar essas informações, sendo muito útil quando se desenvolvem cursos ou ações de formação, inicial e contínua, de professores.

Ⓐ – Estratégia de resolução adequada e completa

A? – Estratégia de resolução adequada, mas sem justificação (completa) ou pouco clara

$\cancel{A}$ – Estratégia de resolução desajustada

$\xcancel{A}$ – Não respondeu

Figura 15 – Simbologia utilizada no registo da análise dos desempenhos no IACC

Isto significa que, quando se assinalava Ⓐ, aquele aluno tinha conseguido mobilizar as capacidades e competências que se podiam avaliar com a Tarefa A, enquanto com os dois últimos símbolos isso não acontecia. No *A?* suspeitávamos que as tinha já desenvolvido, ou reconhecíamos que estavam em amadurecimento, consoante os desempenhos a que se referiam. Mas *A?* indicava um nível mais avançado de desenvolvimento dessas capacidades e competências do que os dois últimos símbolos que se referiam a estratégias de resolução desajustadas ou que não responderam. Algo semelhante acontecia no registo dos desempenhos nas restantes tarefas.

Quando o professor/investigador começa a analisar os IACC vai colocando, na folha de exploração no quadro, os alunos que conseguiram realizar, de forma adequada e completa, uma tarefa ou parte de uma tarefa, com o intuito de os convidar a explicá-la aos colegas, na aula seguinte. Um exemplo integral de preenchimento desta forma de registo encontra-se no Anexo 18. Contudo, para ser mais fácil explicitar alguns aspetos que consideramos importantes, na Figura 16, selecionámos um excerto dessa folha.

A.

Percentagens – Z; V

Fracções - A

Proporções - P

Representação gráfica –

Sem explicações - Q

E.

(2.º) (1.º)
Abordagem global – J U

(3.º) (1.º) (2.º)
Abordagem passo a passo – L; D; F

Figura 16 – Excerto da folha de exploração no quadro (9.º ano de escolaridade, Lisboa)

A primeira observação que queremos fazer prende-se com a Tarefa E. Esta comporta duas abordagens distintas: a global e a passo-a-passo. No entanto, para cada uma das possibilidades de resposta, pode existir apenas um, ou mais do que um aluno que pode ser quem vai ao quadro explicitar a sua estratégia de resolução. Este tipo de informação tem subjacente o que afirmámos anteriormente: a resolução de uma determinada tarefa pode ser composta por diversas estratégias de resolução que se complementam entre si. Assim, na Tarefa E, no exemplo que consta da Figura 16, na abordagem passo-a-passo, os três alunos propostos vão realizar uma parte dessa resolução, pela ordem indicada, para que, no final, se obtenha uma resposta completa. O mesmo acontece na abordagem global. Esta forma de atuação ilumina o que se pretende atingir com as práticas pedagógicas do IC e a mensagem implícita subjacente: que não existe apenas uma única estratégia de resolução válida, mas sim uma diversidade de estratégias de resolução e que estas se podem complementar, enriquecendo a construção do conhecimento matemático. Assim, procura-se que vão ao quadro alunos que tenham utilizado uma abordagem global do problema e outros uma abordagem passo-a-passo.

Mas, dentro de cada um destes dois grupos, pretende-se que os alunos tenham recorrido a formas de registo e explicitação dos raciocínios subjacentes que sejam diferentes: utilizando as operações básicas ou expressões algébricas; recorrendo a esquemas, entre muitas outras. Assim, por exemplo, podem existir turmas em que na Tarefa E, na abordagem passo-a-passo, podem ser convidados a explicitar o que fizeram três, quatro, ou mesmo cinco alunos. O interesse e respeito do professor/investigador pelas diversas estratégias de resolução, muitas delas configuradas por elementos culturais, contribui para a promoção de uma educação intercultural e inclusiva, onde o respeito mútuo é um dos princípios adotados, tal como menciona Ventura (2012).

No entanto, esta informação também pode auxiliar o professor/investigador, na aula prevista para a exploração do IACC, se um dos alunos faltar, uma vez que tem outro que pode desempenhar esta tarefa. Se fosse necessário escolher, naquele momento, outro aluno, seria muito mais complicado e isso faria diminuir o ritmo da aula. Para além disso, os alunos apercebem-se de que o professor/investigador trabalhou muito, em casa, na preparação daquela segunda aula de 90 minutos. Isso é uma mensagem implícita muito poderosa e a que eles são sensíveis, como revelam os questionários, entrevistas e conversas informais.

Ao observarmos a Figura 16, na Tarefa A podemos constatar três situações distintas, em relação às estratégias de resolução adotadas: (1) existe mais do que um aluno proposto para essa estratégia de resolução e, nesse caso, procede-se de forma semelhante ao que foi descrito para a Tarefa E, ou seja, há uma ordem previamente decidida segundo a qual os alunos vão ao quadro resolver parte dessa tarefa, ou se alguns dos alunos faltar, existe outro para resolver a mesma; (2) existe só um aluno proposto, o que significa que apenas este recorreu àquela estratégia de resolução; e (3) não existe nenhum aluno que utilizasse esse tipo de estratégia de resolução. Nesta situação, o professor/investigador pode optar por, a partir de estratégia de resolução de outro aluno, introduzir essa nova estratégia de resolução, questionando a turma, ou pode considerar não ser relevante abordá-la nessa aula, mas sim em aulas futuras.

Para cada aluno, o professor/investigador analisa os desempenhos no IACC e preenche a folha de exploração no quadro. De seguida, preenche a folha dos desempenhos no IACC, cujo exemplo integral se encontra no Anexo 18. Esta forma de registo é de extrema importância, uma vez que permite obter uma compreensão mais sustentada, em termos de capacidades e competências que os alunos já conseguem mobilizar, em relação ao grupo turma. Na Figura 17 está indicado um excerto do exemplo da folha dos desempenhos no IACC que consta dos anexos.

15. RA + D

a) raciocínio geométrico E

b) raciocínio analítico S

16. RA + E

17. Só RA T; V; W; G; X; Y

18. RC + D + E

a) raciocínio geométrico

b) raciocínio analítico Z (+ A)

Figura 17 – Excerto da folha dos desempenhos no IACC (9.º ano de escolaridade, Lisboa)

Primeiramente, queremos salientar a divisão entre os alunos que mobilizam o raciocínio abstrato (RA) e os alunos que mobilizam o raciocínio concreto (RC). Assim, todos os que conseguem mobilizar o RA estão até à Posição 17 e os que mobilizam o RC estão a partir da 18. Se um aluno responde, de forma completa, às Tarefas C e D, e nesta última recorre preferencialmente a um raciocínio analítico, então situa-se na Posição 15b. Por outro lado, se um aluno não resolve, de forma completa, a Tarefa C, mas evidencia mobilizar o RC, resolve, de forma completa, as Tarefas D e E, e na D opta por utilizar sobretudo um raciocínio geométrico, situa-se na Posição 18a.

Em síntese, o tratamento e análise dos dados provenientes da primeira semana de aulas, bem como as formas de organização desses mesmos dados, são essenciais para o professor/investigador desenvolver práticas pedagógicas baseadas no trabalho colaborativo e adaptadas à turma que está a lecionar.

5.2.3. Decisões sobre a formação das primeiras díades

Após a recolha e análise de dados da primeira semana de aulas do ano letivo, o professor/investigador vai tomar decisões quanto à formação das primeiras díades. Durante essa semana, os alunos sentaram-se onde quiseram, dividindo a mesa com quem escolheram, realçando o que Gouveia-Pereira e seus colaboradores (2000) afirmam acontecer quanto à formação dos grupos entre os adolescentes e que está relacionado com as dinâmicas escolares, nomeadamente no que respeita à constituição das turmas. Essa escolha e as formas de interação que dela resultaram possibilitam ao professor/investigador ter acesso a informações importantes, através da observação e de conversas informais, que serão consideradas quando inicia o processo de elaboração das primeiras díades.

Neste processo de decisão podemos considerar dois momentos distintos. O primeiro tem a ver com a formação das díades, sem se ter ainda uma preocupação com a distribuição espacial dos alunos, na sala de aula. O segundo momento destina-se a tomar decisões quanto ao lugar onde se vão sentar as várias díades, na sala de aula, ou seja, se é mais apropriado colocar uma determinada díade mais à frente, porque, por exemplo, um aluno revela ter problemas de visão, ou se é mais adequado colocar a díade junto da parede que não tem janelas, uma vez que um dos elementos revela formas de atuação disruptivas e/ou menos apropriadas em cenários de educação formal, como a sala de aula.

É necessário ter em consideração alguns critérios para se constituírem díades assimétricas cujas capacidades e competências sejam complementares e que permitam os alunos trabalharem na respetiva ZDP, ou seja, aquelas cujos progressos são mais acentuados, pois ao trabalharem na sua ZDP cada elemento tem mais capacidades e competências que pode desenvolver, através dos jogos interativos que estabelece com o par. Esses critérios permitem ao professor/investigador tomar decisões quando analisa as várias formas de registo efetuadas quando procedeu ao tratamento e análise dos dados recolhidos com os instrumentos da primeira semana. Quando se trabalha segundo os princípios pedagógicos e epistemológicos do projeto IC (César, 2009, 2013a; Ventura, 2012), recorremos a sete critérios fundamentais para a formação de díades assimétricas: (1) género; (2) idade; (3) diversidade cultural; (4) formas de atuação e reação observadas em aula que permitem conhecer mais características dos alunos; (5) representação social sobre a Matemática; (6) representação social que eles construíram de si mesmos, enquanto alunos de Matemática, conjugada com os desempenhos obtidos nesta disciplina em anos letivos anteriores; e (7) capacidades e competências (matemáticas) mobilizadas e as que precisam de ser desenvolvidas. Em relação ao primeiro critério – género – pretende-se que as díades sejam constituídas por elementos de ambos os géneros (masculino e feminino). Este critério nem sempre é suscetível de ser respeitado em todas as díades, uma vez que, em cada turma, o número de elementos de género feminino é, frequentemente, diferente do número de elementos do género masculino. No entanto, o que acontece é que se tenta cumprir este critério, embora existam as limitações próprias da constituição de cada turma. É frequente, sobretudo no ensino básico, os rapazes quererem ficar com rapazes e as raparigas com raparigas. Mas também é habitual que elementos de géneros diferentes tenham abordagens dos problemas e estratégias de resolução diferentes. Logo, as atividades matemáticas tornam-se mais ricas se as díades tiverem um elemento de cada género. Uma das mensagens implícitas subjacente a este critério é que cada um pode aprender e desenvolver-se com colegas que, à partida, não nos são próximos ou com os quais pensávamos que nada se podia aprender (César, 2009, 2013a; Machado & César, 2012a, 2013a, in press b).

No que se refere à idade, como em Portugal ainda se observam elevados índices de insucesso escolar e de retenções (GEPE, 2011; Strecht, 2008), é frequente existirem alunos mais velhos que outros em cada turma, chegando a amplitude desta diferença etária ser a de três, quatro ou mesmo cinco anos. Apesar dos alunos bastante mais velhos não serem muitos, escolher cuidadosamente o seu par é essencial. Geralmente são alunos mais desmotivados, com baixas expetativas em relação à Escola e, frequentemente, com insucesso escolar cumulativo, especialmente em Matemática. Por isso, sem um par cuidadosamente selecionado, tende a repetir-se o ciclo de insucesso nesta disciplina, muitas vezes acompanhado de formas de atuação e reação, em aula, que não favorecem as aprendizagens. Assim, por um lado, evita-se colocar os alunos mais novos, sobretudo se fisicamente são ainda pouco desenvolvidos, por comparação com os mais velhos, numa mesma díade. A menos que o aluno mais novo seja carismático e revele uma forte capacidade de liderança. Mas também se evita que os alunos mais velhos fiquem na mesma díade, pois isso seria juntar aqueles que mais vivenciaram situações de insucesso escolar, o que poderia ter implícita uma mensagem de discriminação, de desistência, por parte do professor/investigador, em relação às aprendizagens destes alunos. Assim, tenta-se encontrar pares mais novos para estes alunos, que os motivem e que não se deixam contaminar pela sua desmotivação e ou representação social negativa deles próprios, enquanto alunos de Matemática.

O terceiro critério prende-se com a diversidade cultural, que pretendemos que exista nas diversas díades. Esta diversidade cultural já está representada no critério género. Também está, muitas vezes, relacionada com o Critério 6, uma vez que diversos estudos mostram existir um relação estatisticamente significativa entre o nível de habilitações literárias dos pais e o sucesso escolar dos filhos. Segundo Rodrigues, Roldão, Nóvoas, Fernandes e Duarte (2010), este é mesmo o elemento mais relevante para prever o sucesso escolar de um aluno. Mas, como o projeto IC pretende contribuir para uma educação mais intercultural e inclusiva (César, 2009, 2013a; Ventura, 2012), havendo mesmo abordagens dos problemas e estratégias de resolução que aparecem mais frequentemente associadas a determinadas culturas, nomeadamente por influência da língua materna nas formas de raciocínio e no pensamento matemático (Meyer et al., in press; Ventura, 2012; Ventura et al., 2010), a diversidade cultural é algo essencial na formação das díades. Para além disso, sabemos que os alunos, quando podem escolher os pares e/ou elementos dos grupos com quem vão trabalhar, tendem a escolher alunos que fazem parte dos grupos de adolescentes com os quais habitualmente se relacionam. Sabemos, ainda, que muitos dos conflitos culturais resultam da falta de conhecimento – e compreensão – dos valores, hábitos e tradições das outras culturas. Por isso, este critério parece-nos essencial.

Uma sala de aula é um cenário protegido. Existe um professor, que pode atuar como mediador cultural, tarefas matemáticas, que podem contribuir para o conhecimento de outras culturas, para além de proporcionarem uma apropriação de conhecimentos matemáticos, como as cunhadas por D'Ambrósio (2002, 2005), Favilli e seus colaboradores (2004), ou Gerdes (2007, 2013). Logo, é um cenário de educação formal propício ao desenvolvimento de uma educação intercultural. Para isso, é preciso que cada díade seja uma oportunidade de vivenciar um processo interativo mais aprofundado e, simultaneamente, intercultural. Convém realçar que diversidade cultural é entendida no sentido lato: quanto à etnia, mas também quanto às diversas culturas existentes entre pessoas que nasceram e viveram num mesmo país.

O quarto critério – formas de atuação observadas em aula que permitem conhecer mais características dos alunos – está relacionado com a observação e as conversas informais que o professor/investigador estabelece ao longo da primeira semana de aulas e que são registadas no diário de bordo (DB). Este tipo de informação torna-se relevante, uma vez que permite identificar alunos que revelam formas de atuação e/ou reação disruptivas ou pouco adequadas, em aula, pelo que não devem formar uma díade com outro aluno com as mesmas características, bem como alunos que sejam muito pouco expansivos e tímidos, que também não devem constituir uma mesma díade, pois poderá originar barreiras às interações sociais dialógicas, dificultando o envolvimento dos mesmos nas atividades matemáticas. Assim, diversas características observadas na primeira semana de aulas são também essenciais para a formação das primeiras díades.

O quinto critério, relativo às representações sociais que os alunos construíram sobre a Matemática, comporta dois aspetos principais a ter em conta: (1) se esta é positiva ou negativa; e (2) se é tradicional ou inovadora. Desta forma, pretende-se que os elementos de cada díade tenham construído representações sociais distintas e complementares, isto é, se um aluno construiu uma representação social positiva tradicional, o outro deverá ter desenvolvido uma negativa mas inovadora. No entanto, como existem muito mais alunos com representações sociais negativas, assim como existem mais tradicionais que inovadoras, este critério é respeitado, mas está dependente do que se observa em cada turma. O essencial é evitar juntar na mesma díade alunos que, por terem desenvolvido uma representação social negativa sobre a Matemática, desistam facilmente de participar nas atividades matemáticas desenvolvidas, em aula, ou que nem sequer se envolvam, por preferirem não voltar a tentar de modo a evitarem falhar novamente.

O sexto critério – representação social que eles construíram de si mesmos, enquanto alunos de Matemática, conjugada com os desempenhos obtidos nesta disciplina em anos letivos anteriores – revela-se também muito relevante. Alguns alunos construíram uma representação de si próprios tão negativa, enquanto alunos de Matemática, que estão convencidos de que nem vale a pena tentar aprender, ou envolver-se nas atividades matemáticas desenvolvidas em aula. Assim, se uma díade for composta por dois alunos com esta representação social, que geralmente vem associada a um passado de insucesso escolar cumulativo nesta disciplina, a probabilidade de nenhum dos dois progredir, bem como de perturbarem o funcionamento das aulas, é elevada. É importante conjugar, numa mesma díade, alunos que acreditam que são capazes de aprender, com os que estão convencidos do contrário, bem como alunos sem um passado de insucesso escolar com outros que já o vivenciaram. É a diversidade que mais lhes permite progredir e virem a obter melhores desempenhos. Muitas vezes, são os alunos com uma representação social de si muito negativa, enquanto alunos de Matemática, que mais revelam intuição matemática, criatividade ou sentido crítico. Por isso, quando trabalham com alunos que obtiveram, em anos letivos anteriores, classificações finais elevadas, mas que não conseguem mobilizar estas capacidades e competências, isso pode ser benéfico para todos, uma vez que qualquer um deles desenvolve capacidades e competências que lhe poderão vir a ser úteis, como ilustram alguns estudos realizados em Portugal, no âmbito do projeto IC (César, 2003, 2009, 2013a, 2013b; César & Santos, 2006; Machado, 2008; Machado & César, 2012a).

O sétimo e último critério está relacionado com as capacidades e competências que os alunos já conseguem mobilizar, o que permite também identificar aquelas que eles precisam de desenvolver. Para tal, os elementos de cada díade devem mobilizar capacidades e competências que sejam complementares para poderem atuar alternadamente, como par mais competente e conseguirem trabalhar na ZDP de cada um deles (César, 2009, 2013a; Machado, 2008; Machado & César, 2012a, 2013a; Vygotsky, 1934/1962). Para além disso, também permite a existência de estratégias de resolução diferentes entre os dois elementos, o que aumenta as probabilidades de emergirem situações de conflito sócio-cognitivo (Doise & Mugny, 1981; Perret-Clermont & Nicolet, 1988), que facilitam a apropriação de conhecimentos (matemáticos) e o desenvolvimento de outras capacidades e competências (matemáticas). Como argumentam alguns autores, é através de situações de confronto entre formas de pensamento (matemático) diversificadas que se constrói conhecimento e, por conseguinte, que ocorre uma aprendizagem com sentidos, por parte dos alunos (César, 2009, 2013a; Cobb et al., 2001; Stein et al., 2008). Para ter em consideração este critério, a folha dos desempenhos no IACC assume especial importância, porque permite ao professor/investigador visualizar mais facilmente e, posteriormente, decidir, quais os alunos que poderão constituir díades, em termos de capacidades e competências complementares. Analisando esta forma de registo (ver Anexo 18), existem dois aspetos essenciais que devemos considerar. O primeiro tem a ver com os desempenhos dos alunos que estão na mesma posição nesta folha de registo e que, por isso mesmo, não devem constituir uma díade, uma vez que mobilizam as mesmas capacidades e competências e, também precisam de desenvolver as mesmas capacidades e competências, ou seja, têm um desenvolvimento real e potencial semelhante (Vygotsky, 1934/1962), o que não facilita que consigam trabalhar na sua ZDP. Por exemplo, os desempenhos dos Alunos I e J situam-se ambos na Posição 3, isto é, resolveram com sucesso todas as tarefas do IACC, à exceção da Tarefa A, pelo que mobilizam o mesmo conjunto de capacidades e competências. Assim, é de prever que interações sociais dialógicas entre estes dois alunos dificilmente promovam conflitos sócio-cognitivos e como eles têm formas de raciocínio e estratégias de resolução semelhantes, é menos frutuoso que interajam um com o outro do que com pares que apresentem diversidade em relação aos seus desempenhos no IACC.

O segundo aspeto está relacionado com a distância entre os vários desempenhos, isto é, não deverá existir uma grande distância entre o nível que caracteriza as capacidades e competências mobilizáveis por um determinado aluno e pelo seu par. Como afirmam Doise e Mugny (1981), se a distância entre os níveis de desenvolvimento dos alunos, ou, como observou César (1994), entre os seus desempenhos matemáticos, for demasiado grande, estes não conseguem interagir e compreender as estratégias de resolução e/ou formas de raciocínio dos pares. Por exemplo, a Aluna H e o Aluno L não deverão constituir uma díade, uma vez que as capacidades e competências que cada um mobiliza são bastante díspares. A Aluna H só mobiliza o raciocínio concreto (RC), de acordo com o desempenho na Tarefa C. Enquanto que o Aluno L, ao situar-se na Posição 9a, resolveu com sucesso as Tarefas C, D e E do IACC, já tendo acesso ao raciocínio abstrato (RA). Esta diferença pode contribuir para a criação de barreiras no jogo interativo que se iria estabelecer entre estes dois alunos, dificultando a participação nas atividades matemáticas e podendo, mesmo, contribuir para a sua desmotivação. Pelo que foi dito, é mais desejável a Aluna H formar díade com elementos que se situem entre as Posições 15 e 18, uma vez que as capacidades e competências mobilizadas são complementares, facilitando que ambos trabalhem na respetiva ZDP, podendo alguns jogos interativos proporcionar a emergência de conflitos sócio-cognitivos.

No Anexo 20 encontra-se um exemplo da folha com a constituição das primeiras díades, relativo a uma turma de 9.º ano de escolaridade. Para explicarmos alguns procedimentos relativos à escolha desses elementos, na Figura 18 apresentamos um excerto dessa folha.

PRIMEIRAS DÍADES

E / Z*

M* / X / H

O* / G

C* / T

N* / W

Figura 18 – Excerto da folha com as primeiras díades (9.º ano de escolaridade, Lisboa)

Nesta turma temos 18 elementos de género masculino e nove elementos de género feminino, pelo que não será possível cumprir o primeiro critério para a formação de todas as díades. Como podemos observar na Figura 18, ou no Anexo 20, existem díades compostas por elementos de ambos os géneros e por elementos só do género masculino (aquelas cujos elementos estão ambos a azul). Com o intuito de desocultar o procedimento que levou à escolha destas primeiras díades, exemplificaremos, com base na díade constituída pelos Alunos E e Z, como os critérios mencionados anteriormente são operacionalizados. A Aluna E é uma rapariga com 15 anos e o Aluno Z é um rapaz com 13 anos, mas bastante maduro, pelo que o género é diferente e a diferença de idades entre eles não é desaconselhável, em termos de formação da díade. Do ponto de vista da diversidade cultural, as habilitações académicas dos pais do Aluno Z são superiores às dos pais da Aluna E, uma vez que estes últimos têm habilitações ao nível do 1.º ciclo do ensino básico, enquanto que as do Aluno Z são de nível do ensino universitário. Assim, a formação desta díade permite que os alunos contribuam com vivências e conhecimentos prévios que serão, provavelmente, diversificados.

Os dados recolhidos através da observação indicam que ambos são destros, nenhum apresentava dificuldades visuais ou de outro tipo, nem formas de atuação e/ou reação que perturbassem o decurso das aulas. Também foi observado que a Aluna E era sociável e que tinha um grupo de amigas que se sentavam sempre ao pé umas das outras, na primeira semana de aulas. Para além disso, revelava uma grande falta de auto-confiança nas suas capacidades e competências, pelo que precisava de alguém que conseguisse motivá-la e fazer perceber que afinal podia ter sucesso nas atividades matemáticas. Em relação ao Aluno Z, sentou-se sozinho numa das aulas e na outra com um aluno que tinha entrado para aquela turma nesse ano letivo, o que pode revelar dificuldades ao nível da socialização com outros colegas. Recordemos que a maior parte destes alunos frequentaram esta turma desde o 5.º ano de escolaridade, sendo alguns deles colegas desde o 1.º ciclo do ensino básico. Assim, atendendo às observações efetuadas pelo professor/investigador durante a primeira semana de aulas, esta díade também revelava características pessoais complementares.

No que se refere à representação social sobre a Matemática, o Aluno Z revela ter construído uma representação social positiva e inovadora, enquanto que a Aluna E construiu uma negativa e tradicional. Associada a estas respostas, está o que estes alunos consideram ser o seu nível de desempenho nesta disciplina, com base em anos letivos anteriores: muito bom, "porque em todos anos de escola que tive sempre tive boa nota a matemática" (Aluno Z, Q1, 9.º ano de escolaridade, Lisboa); e muito fraco, "porque não entendo nada, tenho muitas dificuldades" (Aluna E, Q1, 9.º ano de escolaridade, Lisboa). No entanto, o IACC permitiu-nos ter acesso às capacidades e competências que a Aluna E já conseguia mobilizar e, assim, apercebermo-nos de que esta aluna tinha fortes probabilidades de vir a apropriar os conhecimentos matemáticos que não revelava, desde que trabalhasse com um par que permitisse otimizar as suas capacidades e competências, quando trabalhassem na ZDP de cada um deles.

Em relação às capacidades e competências que já mobilizam, a Aluna E respondeu de forma adequada e completa às Tarefas C e D do IACC, pelo que já mobiliza o raciocínio abstrato (RA, Tarefa C) e recorre ao raciocínio geométrico como estratégia de resolução preferencial (Tarefa D). O Aluno Z revelou mobilizar o raciocínio concreto (RC, Tarefa C), tem preferência por uma abordagem passo-a-passo nos problemas (Tarefa E), recorre ao raciocínio analítico como estratégia de resolução privilegiada (Tarefa D) e revela ter sentido crítico quanto ao conteúdo matemático expresso em notícias (Tarefa A). Assim, estes dois alunos mobilizam capacidades e competências complementares. Por exemplo, a Aluna E recorre a estratégias de resolução que envolvem preferencialmente raciocínios geométricos, enquanto que o Aluno Z utiliza mais raciocínios analíticos. Este mobiliza o RC e a Aluna E o RA. Assim, esta complementaridade facilita o trabalho na ZDP de cada um deles (Vygotsky, 1934/1962), sobretudo se o professor/investigador recorrer a tarefas matemáticas propostas que apelem a diversas estratégias de resolução.

A estrela indica que, em relação às capacidades e competências avaliadas pelo IACC, os desempenhos da Aluna E se encontram num nível superior aos do Aluno Z (ver Anexo 20). Esta indicação é feita através de um asterisco (*) na folha das primeiras díades. No entanto, como o que se pretende é que os alunos de uma mesma díade alternem a atuação como par mais competente (César, 2009, 2013a), o professor/investigador deverá elaborar, adaptar ou selecionar tarefas matemáticas, a resolver em aula, que permitam quer à Aluna E quer ao Aluno Z atuar, alternadamente, como par mais competente.

Por último, se nos recordarmos que era a Aluna E que revelava ter uma representação social negativa, da Matemática e enquanto aluna, não deixa de ser interessante que sejam os desempenhos dela que se encontram num nível superior aos do Aluno Z, em termos de mobilização de capacidades e competências. Esta evidência ilumina que um aluno pode ter apropriado poucos conhecimentos (matemáticos), em anos letivos anteriores, mas pode mobilizar um conjunto de capacidades e competências (matemáticas) mais complexas, do ponto de vista desenvolvimentista. Nestes casos, os alunos, se colocados com pares adequados às suas características, tendem a progredir rapidamente quanto aos desempenhos matemáticos, em aula. Daí que seja tão importante distinguir conhecimentos de matemática escolar – que habitualmente se avaliam, no início do ano letivo, através de testes de diagnóstico – de capacidades e competências, ou seja, do que pretendemos avaliar com o IACC. Se tivermos em consideração um aluno que, à partida, apropriou os conhecimentos (matemáticos) previstos para cada ano de escolaridade, como é o caso do Aluno Z, obtendo mesmo classificações muito elevadas, este aluno trabalhar em conjunto com a Aluna E pode levá-lo a manter os desempenhos matemáticos elevados, mas a desenvolver capacidades e competências que ainda não conseguia mobilizar. Para a equipa do IC, este era um aspeto essencial: não nos preocuparmos apenas com as classificações finais, mas também com as capacidades e competências que os alunos poderiam desenvolver e que lhes viriam a ser úteis em situações futuras, pessoais, escolares e profissionais, como iluminam as evidências empíricas do *follow up* (César, 2009, 2013a; Ventura, 2012). Assim, esta situação ilumina, também, a importância da informação a que podemos ter acesso através da análise do IACC, bem como dos impactes que este tem nas práticas pedagógicas desenvolvidas em aula.

Após a constituição das primeiras díades é necessário decidir a sua distribuição espacial, na sala de aula. Um exemplo de primeira planta encontra-se na Figura 19.

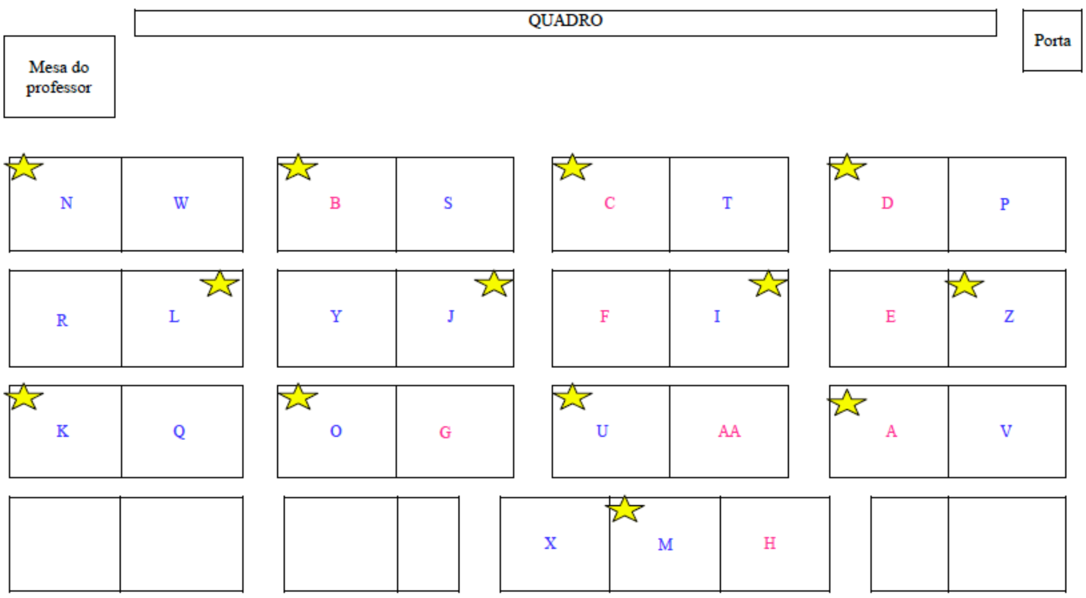


Figura 19 – Exemplo da primeira planta de sala de aula (9.º ano de escolaridade, Lisboa)

Uma primeira observação é a posição das estrelas que significam a localização dos elementos de cada díade cujos desempenhos no IACC se encontram num nível superior, em relação ao outro elemento da díade. Por exemplo, o desempenho do Aluno N encontra-se num nível superior, em termos de capacidades e competências, em relação ao do Aluno W (ver Anexo 19). Para além disso, os alunos com desempenhos superiores no IACC não ficam próximos, mas sim distribuídos pela sala de aula, configurando uma maior amplitude de interações possíveis entre alunos que já mobilizam determinadas capacidades e competências, uma vez que eles também podem interagir, de forma pontual e sobre as tarefas que estão a resolver, com elementos de outras díades ou grupos, que estejam próximos, espacialmente, ou seja, sem que isso perturbe o funcionamento da aula.

Os elementos a quem foi atribuída uma estrela devem-se posicionar em cruz, em termos espaciais na sala de aula, para que, por exemplo, se existir uma dúvida que uma determinada díade não consiga ultrapassar, um dos elementos possa perguntar algo que os ajude a progredir a um dos elementos cujos desempenhos revelam que as capacidades e competências que já mobiliza se encontram num nível mais elevado. Para além disso, quando se formam os grupos de quatro alunos, juntam-se duas díades, havendo apenas uma delas que se vira para trás, o que facilita a utilização do espaço, em aula. Esta distribuição espacial garantia que, no grupo, os alunos cujos desempenhos no IACC indicavam que eles conseguiam mobilizar mais capacidades e competências estavam em cruz, o que permitia aos outros dois elementos do grupo seguirem as suas interações, como era desejável que acontecesse. Em síntese: esta distribuição espacial possibilita a existência de jogos interativos mais ricos.

Quando se começa a proceder à colocação das díades na planta de sala de aula, habitualmente os quatro cantos da sala são reservados para os elementos que revelem formas de atuação e de reação disruptivas, ou pouco adequadas, em aula, pois pretendemos afastá-los uns dos outros e limitar a amplitude de movimentos e interações sociais que fogem ao que se pretende discutir, em aula, no âmbito das atividades de matemática escolar, favorecendo a sua concentração. Para além disso, colocamos na frente os alunos que revelem ter problemas de visão, ou de outro tipo, e que precisem de estar nessa posição espacial. Em seguida, distribuem-se as restantes díades, tendo em conta as observações efetuadas pelo professor/investigador durante a primeira semana de aulas, isto é, quais são os alunos mais conversadores, mais agitados, os que são esquerdinos, entre outras informações. Por tudo o que foi dito, os procedimentos que são efetuados na formação das primeiras díades são fulcrais. Os dados recolhidos durante a primeira semana de aulas permitem conhecer, de forma mais detalhada e sustentada, os alunos com quem se vai trabalhar. Assim, possibilitam que se comece a delinear estratégias e formas de atuação que promovam o envolvimento dos alunos nas atividades matemáticas a desenvolver.

5.3. PADRÕES DE DESEMPENHO NO IACC

Os padrões de desempenho obtidos com o IACC começaram a ser elaborados para os cursos e ações de formação, bem como para a formação dos estagiários que iriam desenvolver as práticas pedagógicas supervisionadas no âmbito do projeto IC, em regime voluntário, ou seja, estes estagiários escolhiam trabalhar no IC. Esses padrões foram sendo completados à medida que a equipa central do projeto ia lecionando mais turmas que participavam no IC, uma vez que isso significava mais alunos que respondiam ao IACC. Nesta tese analisamos, pela primeira vez, as respostas obtidas, ao longo dos 12 anos de vigência oficial do projeto, em cerca de 600 turmas que frequentavam a disciplina de Matemática ou disciplinas afins e eram lecionadas por professores/investigadores que participavam na equipa do IC. Assim, os padrões que vamos apresentar neste subponto são mais completos e abrangentes (em termos de número de alunos, turmas e professores/investigadores considerados) do que os que foram mencionados previamente nos cursos e ações de formação, bem como os utilizados em artigos e teses já publicados (Machado, César, & Matos, 2011; Ventura, 2012; Ventura et al., 2010).

Estes padrões de desempenho no IACC foram elaborados indutivamente, a partir dos dados recolhidos nas cerca de 600 turmas supramencionadas. A elaboração indutiva de padrões de desempenho é um procedimento habitual quando se adota uma perspetiva desenvolvimentista, tendo sido usada também nas provas piagetianas (Inhelder & Piaget, 1955; Piaget, 1936, 1947, 1971/2010). Posteriormente, analisámos alguns desempenhos no IACC de turmas que atualmente desenvolvem práticas pedagógicas segundo os princípios epistemológicos e pedagógicos do IC, com o intuito de confrontarmos os padrões elaborados com os desempenhos encontrados, ou seja, recorremos desta vez a um método dedutivo de validação do rigor e qualidade dos padrões estabelecidos.

Ao seguir uma perspetiva desenvolvimentista na elaboração dos padrões de desempenho, estes estão organizados do mais simples para o mais complexo. Assim, para cada tarefa, o Padrão 0 é o menos desenvolvido e o Padrão 5 (Tarefa C) ou Padrão 7 (Tarefas A, B, D e E) é o mais desenvolvido, do ponto de vista cognitivo. É de realçar que, nas Tarefas C e E, não existiu nenhum desempenho característico do Padrão 0. Porém, por uma questão de coerência na elaboração dos padrões, considerou-se que nessas tarefas este também seria incluído, em termos de modelo de análise.

Através da análise dos desempenhos dos alunos no IACC podemos identificar as estratégias de resolução utilizadas (por exemplo, aritmética, algébrica, representação gráfica, ou geométrica, entre outras), bem como inferir os processos de raciocínio subjacentes às mesmas (por exemplo, raciocínio preferencialmente analítico ou geométrico). Em relação às formas de pensamento só podemos afirmar que as utilizadas dizem respeito ao pensamento matemático, pela própria natureza das tarefas propostas neste instrumento, e ao pensamento comum, que podemos observar através da análise das Tarefas A e B, quando os alunos não as analisam do ponto de vista matemático e referem aspetos do senso comum como, por exemplo, que há muita insegurança e são precisos mais polícias (Tarefa A). A situação subjacente a estas duas tarefas – uma notícia de jornal sobre assaltos (Tarefa A) e uma venda numa mercearia (Tarefa B) – foram aquelas que deram origem ao recurso a formas de pensamento comum, que não se observam nas restantes tarefas. Apesar de a Tarefa E avaliar conexões à vida quotidiana – uma compra e venda de um produto – mesmo quando os alunos apenas respondem que, ao vender por mais do que comprou, houve lucro, já estão a recorrer a um pensamento matemático. Assim, quando efetuámos a análise dos desempenhos, em cada padrão, descrevemos as estratégias de resolução e os processos de raciocínio subjacentes. Apenas mencionaremos as formas de pensamento quando estas forem do senso comum e não referentes ao pensamento matemático, uma vez que era este o recurso que se esperava existir na maioria dos desempenhos a este instrumento, pelas características do IACC.

Para além disso, e tendo como preocupação a melhoria das práticas, em aula, através dos contributos que esta análise pode fornecer, para cada tarefa do IACC os padrões de desenvolvimento identificados pertencem a três grupos: (1) não mobilização das capacidades e competências previstas (branco); (2) encontrar-se numa fase de transição (cinzento claro); e (3) mobilização das capacidades e competências avaliadas (cinzento escuro). Esta forma de atuação é semelhante à de Piaget (1971/2010) quando este recorreu a provas piagetianas, nas quais classificava os desempenhos dos sujeitos em três categorias: não conservação; os que se encontravam na transição; e conservação. Este tipo de identificação, que as três cores ilustram, está relacionada com o que é operacionalizado, nas práticas, pelos professores/investigadores. Como tal, fornece informações importantes para a formação das primeiras díades.

5.3.1. Tarefa A

A Tarefa A pretende avaliar se os alunos revelam sentido crítico quanto aos conteúdos matemáticos, quando confrontados com uma notícia de jornal que inclui informação matemática incorreta (ver Anexo 11). É importante que os alunos consigam desenvolver o sentido crítico e que o mobilizem, tanto no quotidiano como em cenários de educação formal, nomeadamente em aula. Desta forma, torna-se necessário, para a formação das primeiras díades, perceber quais os alunos que conseguem, ou não, mobilizar o sentido crítico.

Analisando os desempenhos dos alunos nesta tarefa emergiram oito padrões que estão organizados do menos complexo para o mais complexo, do ponto de vista desenvolvimentista (ver Anexo 22). Desta forma, o Padrão A0 é o menos complexo, enquanto que o Padrão A7 é o mais complexo. Essa organização também foi seguida dentro de cada padrão. Por exemplo, no Padrão A5, o Nível 1 é o menos desenvolvido e o Nível 4 o mais avançado. Por último, queremos salientar que não existe nenhuma diferença, do ponto de vista desenvolvimentista, entre as categorias α, β e γ do Padrão A1 e dos Níveis A4.5. e A4.6., uma vez que o que difere é a estratégia de resolução utilizada. Esta tarefa foi respondida por 77,1% dos alunos das turmas que participaram no projeto IC, ao longo dos 12 anos de vigência do mesmo e, como tal, 22,9% dos mesmos não lhe responderam (ver Anexo 21).

5.3.1.1. Padrão A0

Este padrão é constituído pelos desempenhos dos alunos que afirmam que não entendem o que se pretende com esta tarefa. São disso exemplo os que podemos observar nas Figuras 20 e 21. Há 0,2% de desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

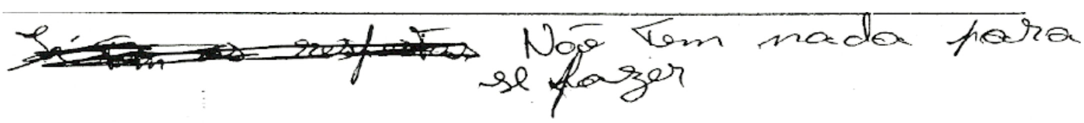


Figura 20 – T.S.1., 9.º ano de escolaridade, Leiria

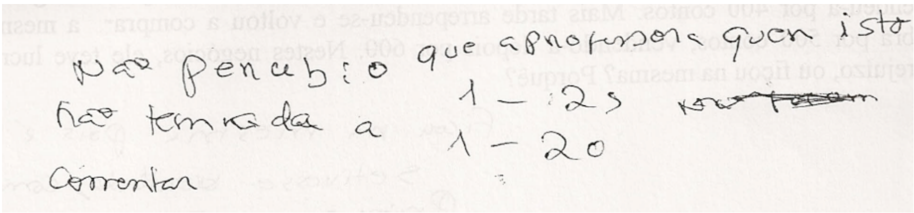


Figura 21 – N.º 8, 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Para estes alunos, o pedido expresso no enunciado – comentar, do ponto de vista matemático, a notícia – não tem sentido, o que ilumina a natureza de tarefas matemáticas que provavelmente estão habituados a resolver, em aula: baseadas na aplicação de algoritmos ou procedimentos rotineiros, pelo que as instruções de trabalho que lhes estão inerentes são de cariz mais direto e orientador. Para além disso, este tipo de resposta pode estar também relacionado com uma representação social tradicional da Matemática, considerando-a como relacionada com exercícios (repetitivos), cálculos e contas, algo que não lhes é pedida na Tarefa A.

5.3.1.2. Padrão A1

Este padrão é composto por desempenhos desconexos, tendo em conta o enunciado da Tarefa A. Foram identificadas três categorias diferentes: (α) representação gráfica; (β) cálculos matemáticos desconexos; e (γ) natureza da Matemática (ver Anexo 22). Estas não indicam uma diferença nos níveis de desenvolvimento. Há 5,4% de desempenhos dos alunos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.1.2.1. Categoria α

Nesta categoria são considerados os desempenhos que recorrem a representações gráficas como estratégia de resolução adotada. No exemplo da Figura 22, o aluno G.H. opta por desenhar dois gráficos circulares como forma de traduzir para a linguagem matemática, a informação contida na notícia. No entanto, associa 1/25 e 1/20 a 25% e 20%, respetivamente, o que ilumina dificuldades ao nível da apropriação de conhecimentos, nomeadamente no que respeita às frações e às percentagens. Do ponto de vista desenvolvimentista, ainda não mobiliza a noção de número fracionário, embora já mobilize a de número inteiro.

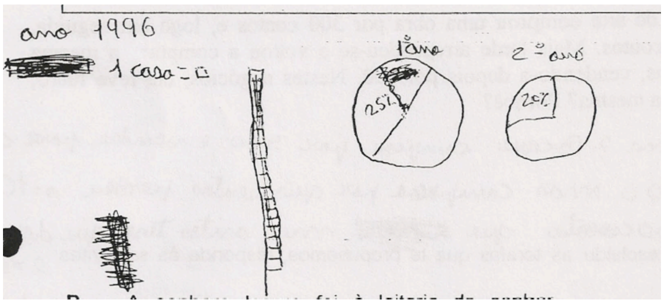


Figura 22 – G.H., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Para além disso, esta estratégia de resolução, também, evidencia que há conhecimentos que este aluno não apropriou quanto às percentagens representadas nos dois gráficos circulares. Por exemplo, segundo este aluno, 20% corresponde à quarta parte do círculo. Algo semelhante se passa para a representação dos 25%. Apesar do IACC pretender avaliar capacidades e competências e não conhecimentos matemáticos, este tipo de informação permite, em aulas posteriores, realizar tarefas matemáticas que possibilitem apropriar esses conceitos matemáticos, desenvolvendo competências associadas a esses conhecimentos, transformando-os em conhecimentos relacionais (Skemp, 1978).

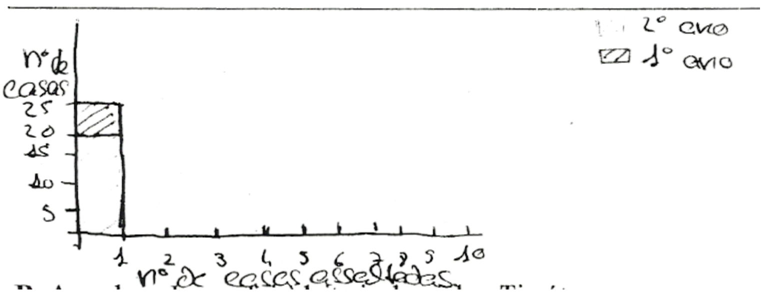


Figura 23 – J.M.1., 9.º ano de escolaridade, Leiria

O aluno J.M.1. opta por construir um gráfico de barras que lhe permita traduzir a informação contida no enunciado. No entanto, esta é desconexa, na medida em que associa cada número racional (1/20 e 1/25) a uma barra do gráfico, isto é, o numerador é representado no eixo horizontal e o denominador no eixo vertical.

Estes exemplos revelam dificuldades ao nível da interpretação de um texto que inclua dados matemáticos, bem como na conexão entre o que é dito nesse jornal e a simbologia adequada na tradução de linguagem natural para linguagem matemática.

5.3.1.2.2. Categoria β

São considerados como desempenhos desta categoria os que revelam o recurso a cálculos matemáticos desconexos face à situação descrita na notícia do jornal. No exemplo da Figura 24, o aluno associa a diferença entre 1/25 e 1/20 ao produto de 20 por 1, obtendo como resultado 20%, o que ilumina dificuldades na compreensão da informação contida na notícia, bem como a sua interpretação atendendo às informações no enunciado do problema.

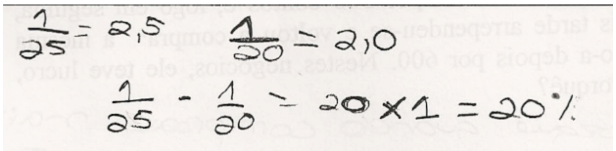


Figura 24 – N.º 5, 10.º ano de escolaridade, Lisboa

Na Figura 25 podemos observar outra estratégia de resolução desconexa, uma vez que o aluno A.S.1. soma, de forma desajustada, os algarismos de cada número racional (1, 25, 1 e 20) afirmando que o resultado corresponde ao número de pessoas assaltadas.

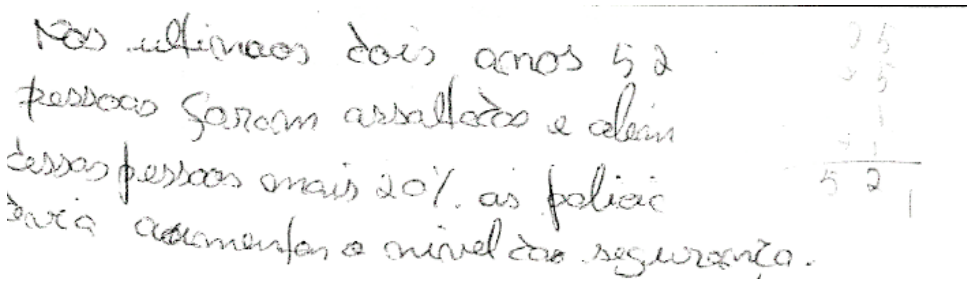


Figura 25 – A.S.1., 8.º ano de escolaridade, Açores

Estas duas estratégias de resolução iluminam dois aspetos essenciais: (1) as dificuldades evidenciadas por estes alunos na compreensão e interpretação da informação matemática constante do enunciado; e (2) como tinham que comentar, do ponto de vista matemático, isso corresponderia a utilizar os dados matemáticos contidos nessa notícia, manipulando-os através de cálculos, mesmo que o resultado desse origem a respostas desconexas.

5.3.1.2.3. Categoria γ

Esta categoria é caracterizada por desempenhos dos alunos que são baseados na natureza e importância da matemática no quotidiano, mas que são desconexos em relação ao que é pretendido nesta tarefa. Nas Figuras 26 e 27 podemos observar dois exemplos deste nível.

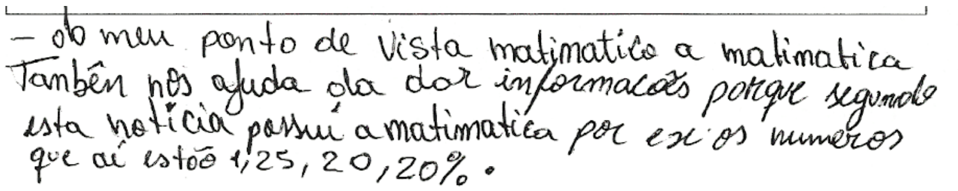
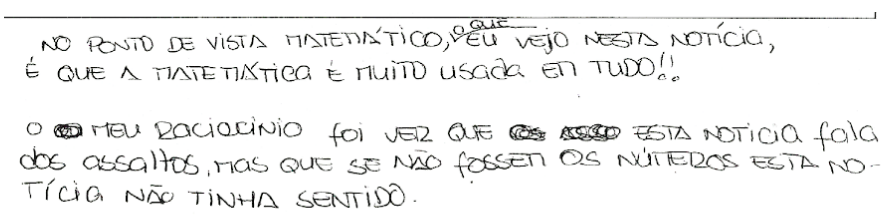

– do meu ponto de vista matimatico a matimatica Tambên nôs ajuda dá dar informacões porque segundo esta notícia possui a matimatica por ex: os numeros que aí estão 1,25, 20, 20%.

Figura 26 – J.F.1., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde


NO PONTO DE VISTA MATEMÁTICO, O QUE EU VEJO NESTA NOTÍCIA, É QUE A MATEMÁTICA É MUITO USADA EM TUDO!!

O MEU RACIOCÍNIO foi VER QUE ESTA NOTÍCIA fala dos assaltos, MAS QUE SE NÃO FOSSEM OS NÚMEROS ESTA NOTÍCIA NÃO TINHA SENTIDO.

Figura 27 – M.A.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O desempenho do aluno J.F.1. evidencia que este consegue identificar, numa notícia, elementos associados ao conhecimento matemático – números (1, 20 e 25) e percentagens (20%). No entanto, não consegue estabelecer conexões mais sustentadas e relacionadas com o que é pretendido. Na pequena composição matemática do aluno M.A.1. é realçado um aspeto recorrentemente encontrado nas representações sociais que os alunos constroem sobre a Matemática: a utilidade desta disciplina na vida quotidiana (Machado, 2008; Machado & César, 2009, 2010, 2012a, 2013a, 2013b, in press b; Piscarreta, 2002; Ramos, 2003).

5.3.1.3. Padrão A2

A este padrão estão associados os desempenhos dos alunos que abordam questões relativas à segurança da cidade ou à atuação da própria polícia, não recorrendo aos dados matemáticos existentes na notícia (ver Anexo 22). Pertencem a este padrão 11,9% dos desempenhos (ver Anexo 21). No exemplo da Figura 28, o aluno A.S.2. menciona a qualidade da segurança na cidade de Fractopolis, realçando que o número de assaltos tem vindo a diminuir.

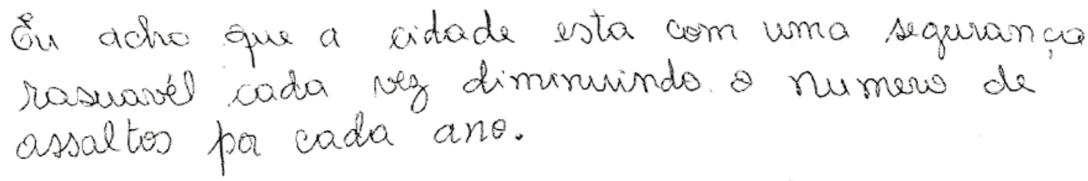

Eu acho que a cidade esta com uma segurança rasuavél cada vez diminuindo o numero de assaltos pa cada ano.

Figura 28 – A.S.2., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Na Figura 29, o aluno enaltece o trabalho desenvolvido pela polícia, mas considera-o ainda pouco adequado. Para tal, enumera um conjunto de possíveis soluções para fazer face aos assaltos existentes nessa cidade.

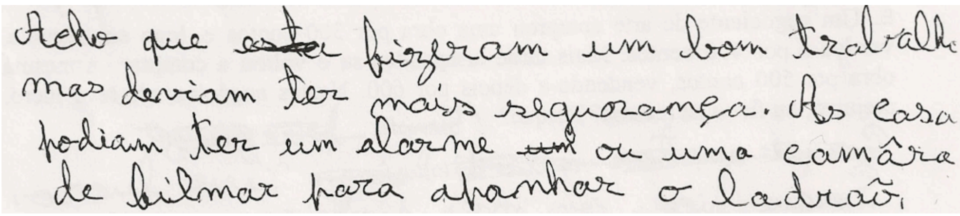

Acho que ~~este~~ fizeram um bom trabalh mas deviam ter mais segurança. As casa podiam ter um alarme ~~um~~ ou uma camâra de filmar para apanhar o ladraõ,

Figura 29 – N.º 11, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Estes dois exemplos iluminam desempenhos que recorrem ao pensamento comum, uma vez que não utilizam dados matemáticos que também fazem parte desta notícia e que era o que se pedia que comentassem.

5.3.1.4. Padrão A3

No Padrão A3 são considerados os desempenhos dos alunos que copiam os dados matemáticos existentes no enunciado, sem justificação ou comentários adicionais (ver Anexo 22). Há 3,7 % de desempenhos que se situam neste padrão (ver Anexo 21).

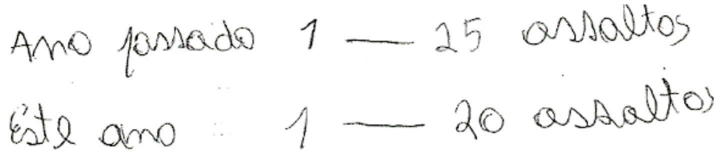

Ano passado 1 — 25 assaltos
Éste ano 1 — 20 assaltos

Figura 30 – J.T.1., 8.º ano de escolaridade, Açores

No exemplo da Figura 30, o aluno J.T.1. copia, para a folha de respostas, alguns dos dados matemáticos relativos aos assaltos (1 em 25; 1 em 20), o que ilumina que este aluno consegue reconhecer os vários tipos de dados que podem existir numa notícia. No entanto, não apresenta uma justificação ou comentário que possibilite ao professor/investigador inferir os processos de raciocínio utilizados.

5.3.1.5. Padrão A4

O Padrão A4 é composto pelos desempenhos dos alunos que confirmam a notícia do jornal, repetindo os dados do enunciado. Identificámos sete níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) os assaltos diminuíram; (2) 1/25 > 1/20 ou 1/20 < 1/25 (e diminuíram os assaltos), acrescentado, por vezes, justificações com base em questões relativas à segurança ou atuação da polícia; (3) justificações com base nos 20% (ou 80%); (4) de 1/25 para 1/20 houve diminuição de 20%; (5) foram assaltadas 5 casas a menos; (6) houve um decréscimo de 5% no número de assaltos; e (7) diminui o número de assaltos, mas não é 20% (ver Anexo 22). Há 37,9% dos desempenhos que fazem parte deste padrão (ver Anexo 21).

5.3.1.5.1. Nível A4.1.

Este nível é constituído por desempenhos de alunos que se limitam a concordar com a notícia (Figuras 31 e 32) ou que mencionam que o número de assaltos diminui, indicando mais alguns dados da notícia (Figura 33).

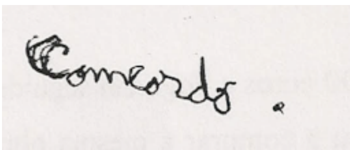


Figura 31 – R.S.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

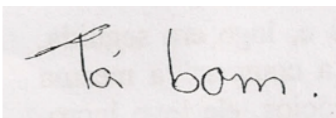
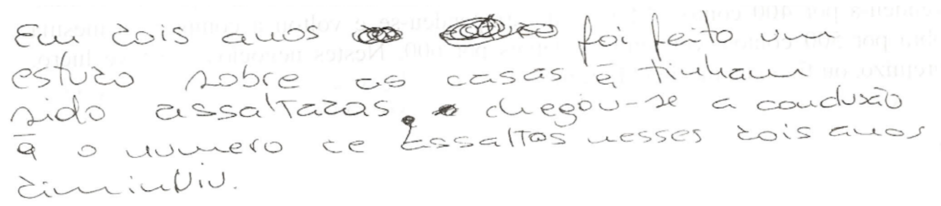


Figura 32 – J.P.1., 8.º ano de escolaridade, Leiria

Estes dois exemplos iluminam a ausência de sentido crítico face a uma notícia de um jornal que contém dados matemáticos, o que evidencia a apropriação de conhecimentos matemáticos com pouco sentido, por parte destes alunos. Por último, queremos realçar marcas características da cultura adolescente que estão associadas à forma de escrita do aluno J.P.1., quando escreve “tá bom”.



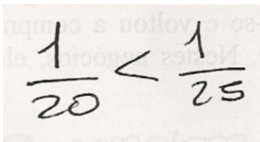
Em dois anos foi feito um estudo sobre as casas e tinham sido assaltadas, chegou-se a conclusão que o numero de assaltos nesses dois anos diminuiu.

Figura 33 – N.º 18, 10.º ano de escolaridade, Lisboa

Este exemplo evidencia que o aluno utilizou uma pequena parte da informação contida na notícia – diminuição do número de assaltos, em dois anos – confirmando a mesma. Assim, este aluno também não consegue mobilizar o sentido crítico face a notícias que contêm dados matemáticos.

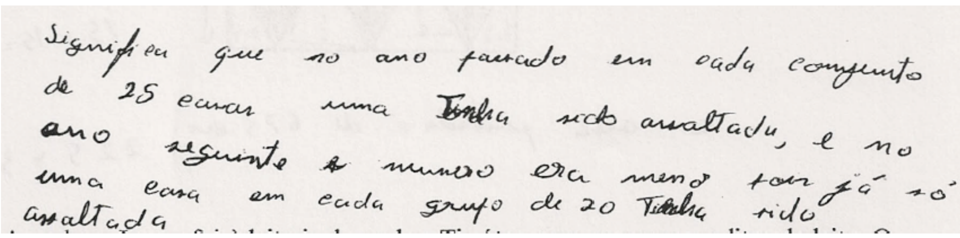
5.3.1.5.2. Nível A4.2.

Os desempenhos característicos deste nível confirmam a notícia do jornal, tendo como base o número de casas assaltadas nos dois anos, salientando, por vezes, aspetos relativos à segurança e à atuação da polícia. No exemplo da Figura 34, o aluno compara os dois valores correspondentes ao número de casas assaltadas, em cada ano (1/25 e 1/20), corroborando o que é mencionado na notícia, isto é, que de um ano para o outro houve um decréscimo no número de casas assaltadas.



$$\frac{1}{20} < \frac{1}{25}$$

Figura 34 – N.º 9, 10.º ano de escolaridade, Lisboa



Significa que no ano passado em cada conjunto de 25 casas uma tinha sido assaltada, e no ano seguinte o numero era menor porque já só uma casa em cada grupo de 20 tinha sido assaltada

Figura 35 – J.S.1., 9.º ano de escolaridade, Açores

À semelhança do que aconteceu no exemplo anterior, o aluno J.S.1. utiliza a informação relativa ao decréscimo do número de casas assaltadas (1/25 e 1/20). No entanto, recorre a uma pequena composição matemática como estratégia de resolução.

Os desempenhos que podemos observar nas Figuras 36 e 37 iluminam o recurso, em simultâneo, ao pensamento matemático e ao comum. No exemplo da Figura 36, o aluno A.C.1. afirma que a forma de atuação da polícia tem sido adequada à prevenção dos assaltos nessa cidade, pelo que está implícito que este aluno corrobora o que é dito na notícia do jornal. Para além disso, recorre a uma parte dos dados matemáticos contidos na mesma, como forma de ilustrar o que afirma (1/25 e 1/20).

Ano passado → 1 — 25 // Este ano → 1 — 20
A polícia têm se esforçado mais durante este ano.

Figura 36 – A.C.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Sabendo que, no última ano, em Fractopolis 1 em cada 25 casas tinham sido assaltad o que faz um valor 50 casas por cada 2 assaltos e que, este ano, desceu para 20 casa em cada 1 assalto que dá 40 casas por cada 2 assaltos verificando-se assim que a polícia tem de reforçar a segurança dos cidadãos.

Figura 37 – A.V., 11.º ano de escolaridade, Faro

O aluno A.V. recorre à escrita de uma pequena composição matemática como estratégia de resolução, o que lhe permite ilustrar que confirma o que é dito na notícia, isto é, que houve uma diminuição do número de assaltos na cidade de Fractopolis. Contudo, para mostrar ao professor/investigador que consegue manipular números racionais e que apropriou conhecimentos matemáticos relativos ao conceito de fração, escreve duas frações equivalentes às dadas na notícia do jornal (1/25 = 2/50 e 1/20 = 2/40).

5.3.1.5.3. Nível A4.3.

Neste nível os desempenhos dos alunos têm por base a percentagem de assaltos na cidade de Fractopolis no 2.º ano (20%), tal como podemos observar nas Figuras 38 a 40.

de anos foram ano o nº de casas assaltadas
desce 20%

Figura 38 – A.A.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno A.A.1. confirma a notícia do jornal, referindo que existiu um decréscimo de 20% no número de assaltos, não considerando que essa percentagem se refere ao número de assaltos do último ano. No desempenho do aluno D.G., que apresentamos na Figura 39, este também utiliza a informação relativa aos 20% como justificação. No entanto, estabelece uma relação dos 20% com a situação descrita no enunciado do problema, ou seja, refere que esta percentagem significa que em 100 casas, 20 foram assaltadas.

Isto quer dizer que em 100 casas há 20
casas que foram assaltadas em Enactopolis o
que ainda é um valor elevado. Ou seja os
20% de assaltos.

Figura 39 – D.G.1., 12.º ano de escolaridade, Faro

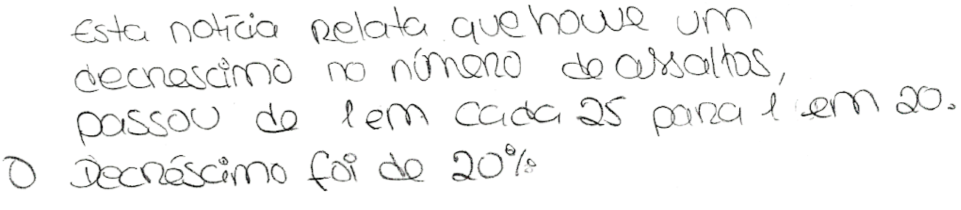
100% - 20% = 80%
Penso que 20% pode ser um número elevado, mas
80% corresponde às casas não assaltadas, por
isso, se a polícia continuar um bom trabalho
para o ano não haverá mais casas assaltadas.

Figura 40 – C.C.1., 10.º ano de escolaridade, Lisboa

Na Figura 40, o aluno C.C.1. refere que 80% (100% – 20%) corresponde ao número de casas que não foram assaltadas, isto é, baseia a sua resposta adotando uma perspetiva contrária às anteriores. Esta evidência ilumina que este aluno, apesar de não mobilizar o sentido crítico face aos dados matemáticos contidos nesta notícia do jornal, adota uma postura que indicia um nível de desenvolvimento mais avançado, visto que recorre já a uma operação inversa – subtração – e a dados que revelam mobilização de conhecimentos matemáticos, como o de que o todo equivale a 100%.

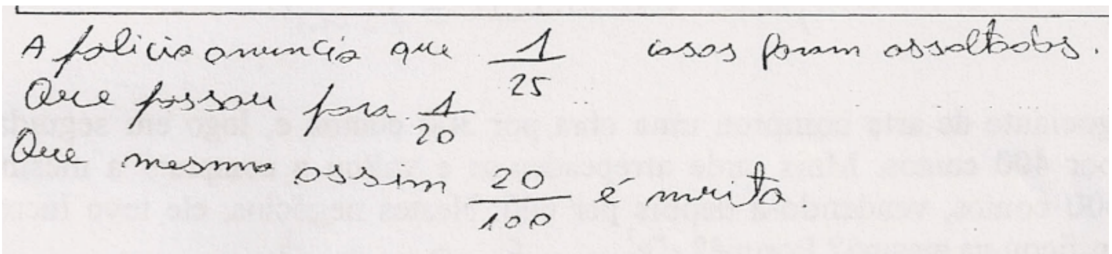
5.3.1.5.4. Nível A4.4.

São considerados como desempenhos deste nível os que confirmam a veracidade da notícia do jornal utilizando todos os dados matemáticos contidos na mesma, como podemos observar nas Figuras 41 e 42.



esta notícia relata que houve um
decrescimo no número de assaltos,
passou do 1 em cada 25 para 1 em 20.
O Decréscimo foi de 20%

Figura 41 – M.C.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa



A policia anuncia que $\frac{1}{25}$ casos foram assaltados.
Que passou para $\frac{1}{20}$
Que mesmo assim $\frac{20}{100}$ é muito.

Figura 42 – R.S.2., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Nos dois exemplos anteriores, os alunos optam por uma pequena composição matemática como estratégia de resolução. Contudo, recorrem a formas de escrita diversificadas. Enquanto que o aluno M.C.1. utiliza uma escrita muito próxima da notícia do jornal (1 em cada 25, 1 em cada 20 e 20%), o aluno R.S.2. interpreta essa informação, recorrendo à representação em fração (1/25, 1/20 e 20/100). É de realçar que o aluno M.C.1. indica que o decréscimo foi de 20%, quando na notícia (enunciado) é referido que, no segundo ano, tinha ocorrido 20% de assaltos. Este tipo de situação permite ao professor/investigador, durante a exploração desta tarefa no quadro, mostrar que existem estratégias de resolução diversas que podem ser utilizadas e que cada um pode escolher aquela(s) em que se sente mais confortável. No entanto, convém registá-las todas e aprender as diversas formas de resolução possíveis, pois as provas escritas podem fazer apelo a uma determinada estratégia de resolução, expressa nas instruções de trabalho.

5.3.1.5.5. Nível A4.5.

Como desempenhos deste nível são considerados os que referem que houve diminuição do número de assaltos, em cinco casas, de um ano para o outro. Foram identificadas três categorias: (α) só referem que houve menos cinco casas assaltadas; (β) 1/25 para 1/20, então existiram menos cinco casas assaltadas; e (γ) 20% corresponde a 1/5 e que, por sua vez, corresponde às cinco casas a menos assaltadas (ver Anexo 22). Estas não apresentam diferença no nível de desenvolvimento cognitivo.

5.3.1.5.5.1. Categoria α

Fazem parte desta categoria os desempenhos dos alunos que mencionem que houve uma diminuição em cinco casas assaltadas de um ano para o outro.

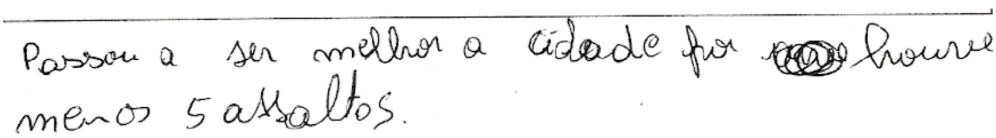

Passou a ser melhor a cidade por houve menos 5 assaltos.

Figura 43 – D.S.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

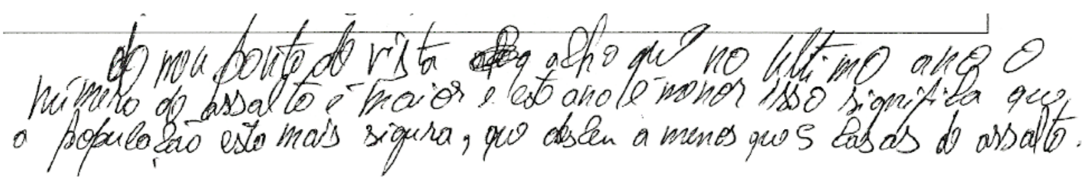

do meu ponto de vista acho que no ultimo ano o número de assalto é maior e este ano é menor isso significa que a população esta mais segura, que desceu a menos que 5 casas de assalto.

Figura 44 – S.R., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Nestes dois exemplos, os alunos referem que existiram menos cinco casas assaltadas, o que é sinónimo do aumento da segurança na cidade de Fractopolis, como podemos observar no desempenho do aluno S.R.

5.3.1.5.5.2. Categoria β

Nesta categoria são considerados os desempenhos dos alunos que mencionem que existiu uma diminuição em cinco casas assaltadas de um ano para o outro, tendo como justificação os dados 1/25 e 1/20. São exemplos os que podemos observar nas Figuras 45 e 47.

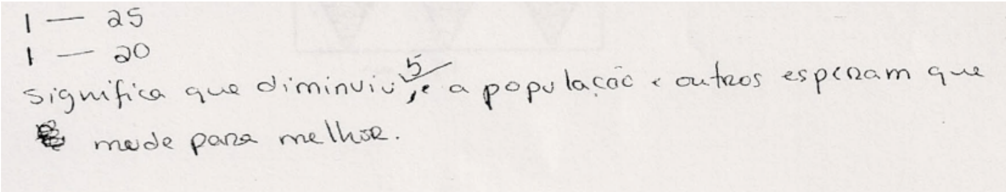


Figura 45 – J.F.2., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

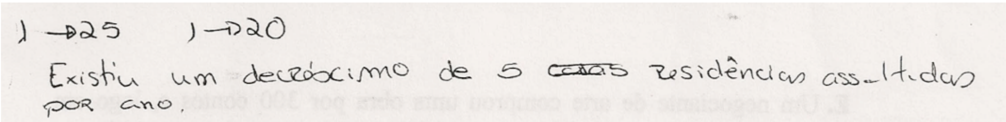


Figura 46 – N.º 8, 12.º ano de escolaridade, Leiria

Nestes dois exemplos, os alunos consideram que houve diminuição do número de assaltos em cinco casas, uma vez que efetuaram a diferença entre os dois denominadores (25 e 20). Esta evidência ilumina que estes alunos não conseguiram mobilizar competências associadas ao conhecimento instrumental (Skemp, 1978), relativo às operações de números racionais representados sob a forma de fração. Por último, queríamos salientar que este tipo de estratégia de resolução foi observada tanto no ensino básico (por exemplo, 8.º ano de escolaridade), como no ensino secundário (por exemplo, 12.º ano de escolaridade), o que pode revelar uma situação preocupante, especialmente em anos de escolaridade mais avançados.

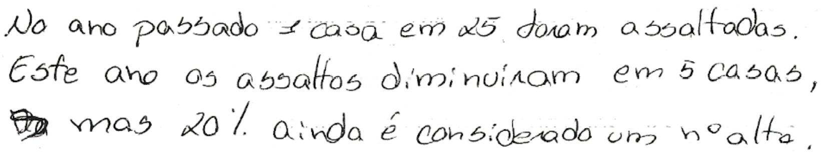


Figura 47 – C.E., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O desempenho do aluno C.E. evidencia uma estratégia de resolução semelhante às anteriores, mas ainda inclui mais um dado matemático contido na notícia – 20% – associando-o, de forma implícita, ao número de assaltos no 2.º ano.

5.3.1.5.5.3. Categoria γ

Esta categoria é constituída pelos desempenhos dos alunos que consideram que os 20% de casas assaltadas no 2.º ano correspondem às cinco casas a menos que foram assaltadas de um ano para o outro na cidade de Fractopolis, como podemos observar na Figura 48.

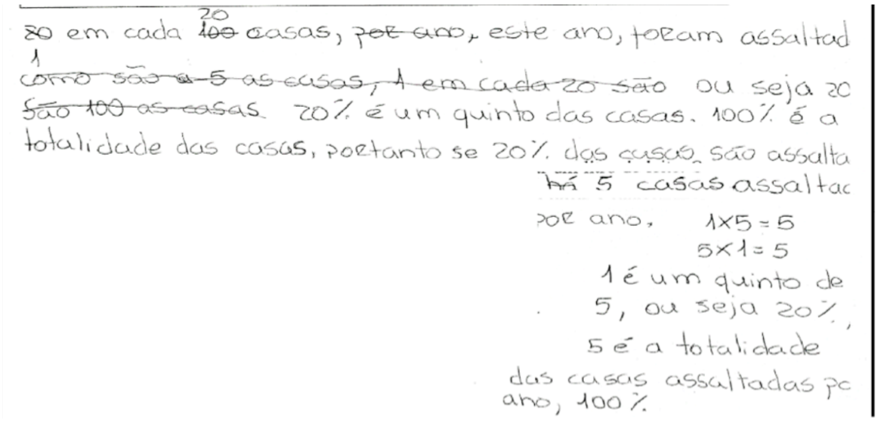


Figura 48 – D.M.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno D.M.1. refere, de forma adequada, que 20% corresponde a um quinto da totalidade, ou seja, 100%. No entanto, associa esse valor a cinco casas assaltadas por ano.

5.3.1.5.6. Nível A4.6.

Este nível é composto pelos desempenhos dos alunos que consideram que houve um decréscimo de 5% no número de assaltos de um ano para o outro. Emergiram três categorias diferentes, mas que não diferem do ponto de vista desenvolvimentista: (α) apenas afirmam uma diminuição de 5%; (β) recorrem à informação 1/25 e 1/20 e concluem que houve um decréscimo de 5%; e (γ) afirmam que os assaltos passaram de 25% para 20%, logo 5% a menos (ver Anexo 22).

5.3.1.5.6.1. Categoria α

Nesta categoria, os alunos referem apenas que ocorreu uma diminuição de 5% no número de assaltos de um ano para o outro na cidade de Fractopolis. São exemplos de desempenhos deste padrão os que se encontram nas Figuras 49 e 50.

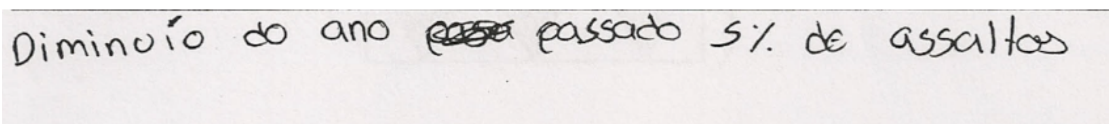
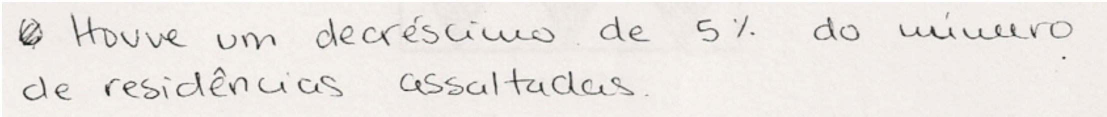


Figura 49 – D.C., 7.º ano de escolaridade, Lisboa



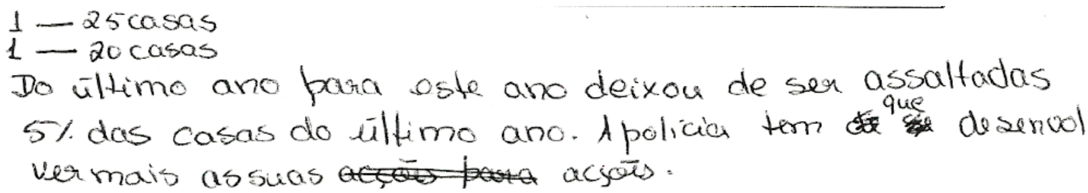
Houve um decréscimo de 5% do número de residências assaltadas.

Figura 50 – C.S.1., 12.º ano de escolaridade, Faro

Estes tipos de desempenho permitem ao professor/investigador inferir que, para estes alunos, 1/25 e 1/20 estão associados a 25% e a 20%, respetivamente, pelo que o decréscimo será de 5% (25 – 20 = 5%).

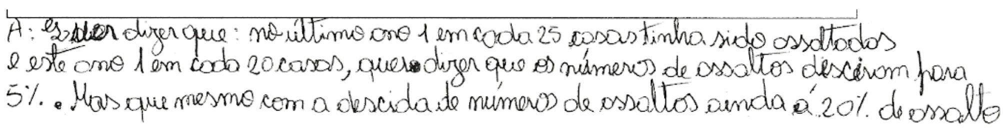
5.3.1.5.6.2. Categoria β

São considerados os desempenhos que mencionem que houve um decréscimo de 5% no número de assaltos, tendo como base os dados matemáticos 1/20 e 1/25. Nas Figuras 51 e 52, os alunos referem que, no último ano, 1 em 25 casas foram assaltadas e que, no ano seguinte, foi de 1 em 20. Assim, concluem que existiu uma diminuição de 5% de casas.



1 — 25 casas
1 — 20 casas
Do último ano para este ano deixou de ser assaltadas 5% das casas do último ano. A polícia tem que desenvol ver mais as suas ~~acções para~~ acções.

Figura 51 – A.F.1., 11.º ano de escolaridade, Viseu



A: ~~estou~~ dizer que: no último ano 1 em cada 25 casas tinha sido assaltados e este ano 1 em cada 20 casas, quero dizer que os números de assaltos desceram para 5%. Mas que mesmo com a descida de números de assaltos ainda á 20% de assalto

Figura 52 – E.M.1., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Por último, queremos salientar que, nestes dois exemplos, os alunos recorreram a duas formas de pensamento – matemático e comum – e que revelam diferentes formas de representação e de escrita para explicitar os processos de raciocínio subjacentes à resposta dada.

5.3.1.5.6.3. Categoria γ

A esta categoria estão associados os desempenhos dos alunos que afirmam que os assaltos diminuíram de 25% para 20% de um ano para o outro. São exemplos deste sub-nível os que podemos observar nas Figuras 53 a 55. O aluno J.P.2 recorre a uma representação gráfica como estratégia de resolução que lhe permite explicar os processos de raciocínio subjacentes à mesma. Constrói um pictograma em que cada casa representa 5%. Assim, no ano de 1997, existiam 25% de casas assaltadas e, em 1998, 20%. Contudo, podemos observar alguma falta de rigor na elaboração deste tipo de gráfico, nomeadamente no tamanho de cada casa, que não é o mesmo. Através da análise deste desempenho, podemos inferir que, de 1997 para 1998, os assaltos diminuíram 5%.

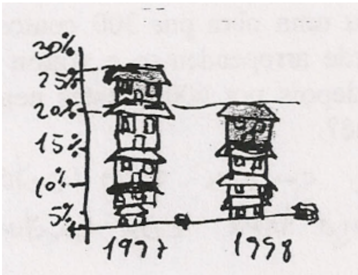


Figura 53 – J.P.2,10.º ano de escolaridade, Leiria

Os processos de raciocínio subjacentes às seguintes estratégias de resolução (Figura 54 e 55) são semelhantes ao utilizado pelo aluno J.P.2.

Os assaltos diminuiram de 25% para 20%.

Figura 54 – A.C.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Este anos menos 5 casas foram assaltadas porque 20% é 1 em cada 20, ou seja houve 1 assalto em 20 casas. E no ultimo ano foram 25 casas assaltadas, 25% mais 5% que este ano.

Figura 55 – S.L., 8.º ano de escolaridade, Açores

Estes alunos associam 1/25 a 25% e 1/20 a 20%, pelo que, num ano, houve uma diminuição de 5% do número de casas assaltadas. Estes desempenhos iluminam que não conseguem mobilizar conhecimentos relativos ao sentido do número.

5.3.1.5.7. Nível A4.7.

Este nível é caracterizado pelos desempenhos dos alunos que confirmam parte da notícia, isto é, que afirmam que houve diminuição, mas que não corresponde a 20%, como é indicado.

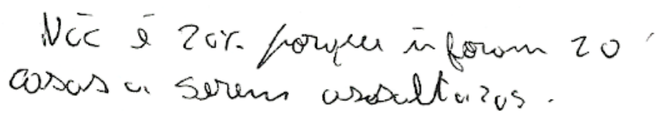


Figura 56 – E.L., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Este aluno afirma que a percentagem relativa ao número de assaltos mencionada na notícia não está correta, uma vez que não foram 20 casas a serem assaltadas, o que ilumina dificuldades na mobilização de competências associadas a conhecimentos relativos à noção de proporção e de número absoluto.

5.3.1.6. Padrão A5

O Padrão A5 é composto pelos desempenhos dos alunos que consideram que a notícia inclui dados matemáticos incorretos, isto é, que não houve uma diminuição, mas sim um aumento do número de assaltos. Identificámos quatro níveis de desenvolvimento cognitivo, em relação a estes desempenhos: (1) ausência de justificação; (2) com tentativa de explicação; (3) 1/20 não corresponde a 20%; e (4) 1/20 não corresponde a 20%, mas sim a 5% (ver Anexo 22). Há 3,1% dos desempenhos que se situam nesse padrão (ver Anexo 21).

5.3.1.6.1. Nível A5.1.

Neste nível, os alunos afirmam que a notícia do jornal está incorreta, mas não apresentam justificação. São exemplos deste nível os que podemos observar nas Figuras 57 e 58.

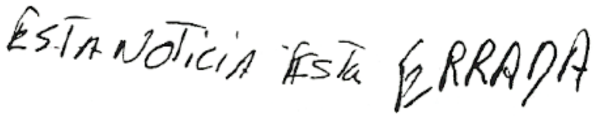


Figura 57 – J.R.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

EU ACHO QUE ESTE EXERCÍCIO ESTÁ ERRADO

Figura 58 – J.L.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Nestes dois exemplos, o professor/investigador não consegue ter acesso aos processos de raciocínio subjacentes a estas respostas, isto é, quais foram os elementos que estes alunos tiveram em consideração para afirmarem que a notícia contém dados matemáticos incorretos.

5.3.1.6.2. Nível A5.2.

Este nível é constituído pelos desempenhos que afirmam que a notícia está errada, esboçando algum tipo de justificação. São exemplos deste padrão os que se encontram nas Figuras 59 e 60. O desempenho do aluno C.S.2. tem subjacentes processos de raciocínio que envolvem a comparação de dois números racionais representados sob a forma de fração. Para este aluno, esta notícia está errada, pois compara, de forma pouco clara, os números 1/20 e 1/25, uma vez que ambos têm o mesmo numerador (mesmo número de assaltos) e, portanto, a fração que tiver menor denominador corresponderá ao maior número (número de casas maior).

Esta notícia, no meu ponto de vista, está errada porque no último ano o numero de assaltos era o mesmo mas o número de casas era maior

Figura 59 – C.S.2., 8.º ano de escolaridade, Leiria

Esta evidência ilumina que este aluno conseguiu mobilizar competências associadas ao conhecimento matemático relativo à comparação de dois números racionais representados sob a forma de fração, embora de uma forma pouco clara e rigorosa.

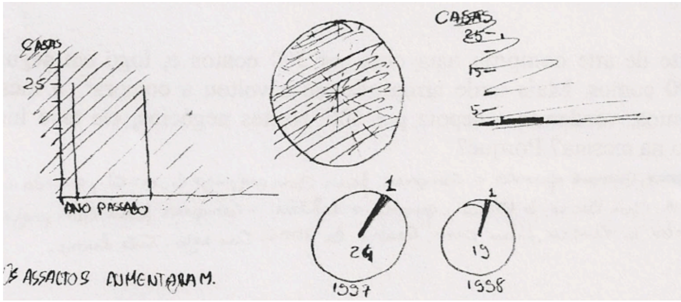


Figura 60 – B.V., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Por último, na Figura 60, o aluno B.V. opta por uma representação gráfica como estratégia de resolução privilegiada para justificar porque é que os assaltos aumentaram de um ano para o outro. Constrói dois gráficos circulares para representar o número de casas que não foram assaltadas em ambos os anos. No entanto, não se consegue ter acesso aos processos de raciocínio que o levaram a optar por esta estratégia de resolução e por esta resposta.

5.3.1.6.3. Nível A5.3.

São considerados desempenhos deste nível os que afirmam que a notícia está incorreta, pois 1/20 não corresponde a 20%. Nos exemplos das Figuras 61 e 62, os alunos referem que a notícia do jornal contém dados matemáticos incorretos, uma vez que 1 em cada 20 não corresponde a 20%. No entanto, pelas estratégias de resolução utilizadas, não se conseguem inferir quais os processos de raciocínio subjacentes às mesmas e que levaram a este tipo de argumentação.

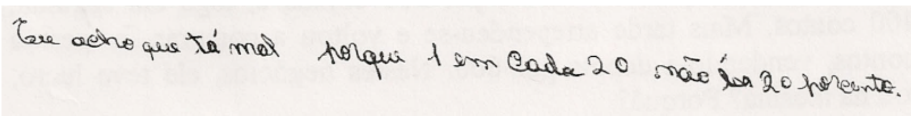


Figura 61 – N.º 21, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

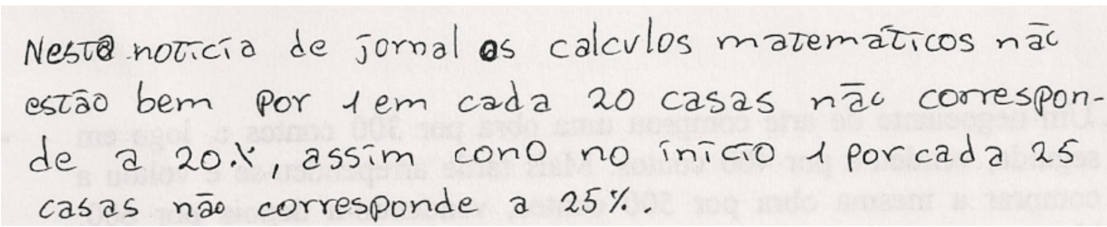


Figura 62 – N.º 7, 12.º ano de escolaridade, Leiria

Na Figura 63, o aluno M.N.1. afirma que a notícia é falsa, uma vez que 1/20 não corresponde a 20%. Contudo, não consegue determinar a percentagem de casas assaltadas, mas consegue perceber que 1/20 é um número racional associado a uma percentagem mais baixa.

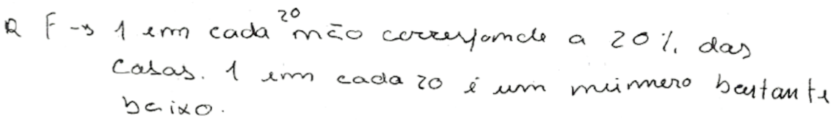
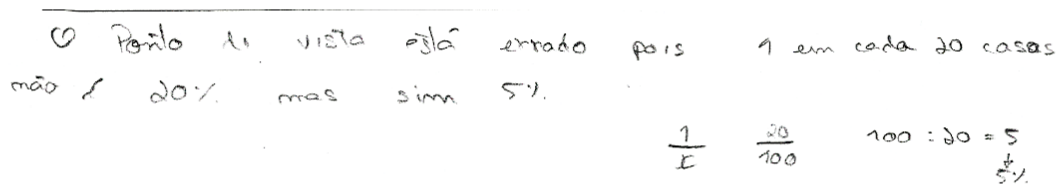

R F → 1 em cada 20 não corresponde a 20% das casas. 1 em cada 20 é um número bastante baixo.

Figura 63 – M.N.1., 10.º ano de escolaridade, Lisboa

Esta evidência ilumina que este aluno consegue mobilizar competências associadas ao conhecimento matemático relacional (Skemp, 1978), isto é, do conhecimento acerca do sentido do número, mas que revela algumas dificuldades em mobilizar outras competências associadas ao conhecimento instrumental (Skemp, 1978) como, por exemplo, na representação do número racional 1/20 sob a forma de percentagem.

5.3.1.6.4. Nível A5.4.

Este nível é caracterizado pelos desempenhos dos alunos que afirmam que a notícia está errada, uma vez que 1/20 não corresponde a 20% mas a 5%. Nas Figuras 64 e 65 podemos observar dois exemplos que pertencem a este nível. Ambos os alunos recorrem a estratégias de resolução algébrica como forma de explicitarem os processos de raciocínio subjacentes.


O ponto de vista está errado pois 1 em cada 20 casas não é 20% mas sim 5%.

$\frac{1}{x}$ $\frac{20}{100}$ 100 : 20 = 5 5%

Figura 64 – P.P.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

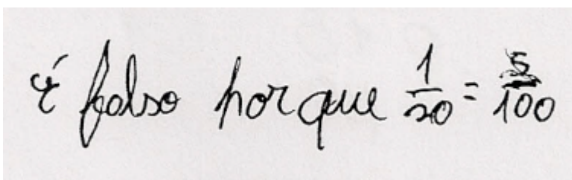

É falso porque $\frac{1}{20} = \frac{5}{100}$

Figura 65 – D.G.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno P.P.1. recorre à utilização de uma proporção para determinar a percentagem que corresponde 1/20, obtendo como resultado 5%. Por outro lado, o aluno D.G.2. recorre à noção de equivalência entre duas frações para mostrar que a percentagem é de 5%. Assim, estes dois desempenhos iluminam que os alunos conseguem mobilizar capacidades e competências que lhes permitam resolver esta tarefa, elaborando uma justificação.

5.3.1.7. Padrão A6

O Padrão A6 é composto pelos desempenhos dos alunos que afirmam que houve aumento do número de assaltos de um ano para o outro. Emergiram três níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) ausência de justificação; (2) explicação pouco clara; e (3) houve aumento de 20% (ver Anexo 22). Há 3,6% de alunos cujos desempenhos se enquadram neste padrão (ver Anexo 21).

5.3.1.7.1. Nível A6.1.

Este nível é composto pelos desempenhos em que é considerado que houve um aumento do número de assaltos, mas em que não é apresentada nenhuma justificação. São exemplos os que podemos observar nas Figuras 66 e 67.

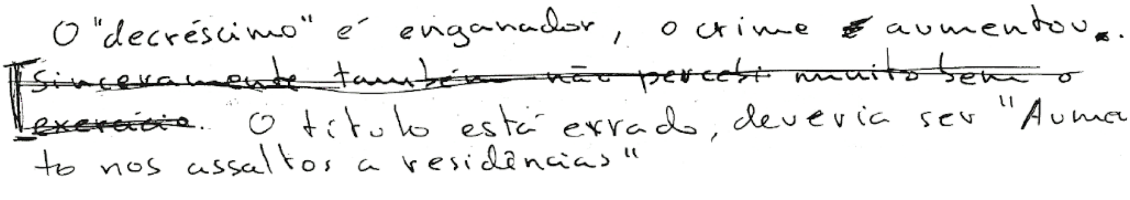

O "decréscimo" é enganador, o crime aumentou. ~~Sinceramente também não percebi muito bem o exercício~~. O título está errado, deveria ser "Aumento nos assaltos a residências"

Figura 66 – T.I., 10.º ano de escolaridade, Faro

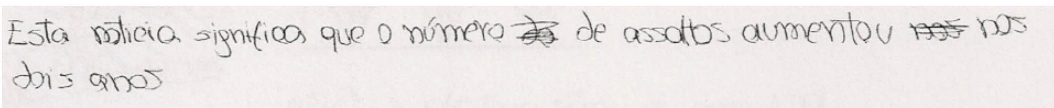

Esta noticia significa que o número ~~de~~ de assaltos aumentou ~~nos~~ nos dois anos

Figura 67 – M.S.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Nos desempenhos do alunos T.I. e M.S.1. só temos acesso à resposta do mesmo, não conseguindo inferir quais os processos de raciocínio que lhes estão subjacentes. No entanto, o aluno T.I. ainda sugere um título mais adequado à notícia.

5.3.1.7.2. Nível A6.2.

Deste nível fazem parte os desempenhos dos alunos que revelam que existe um aumento no número de assaltos de um ano para o outro, produzindo justificações pouco claras. Nas Figuras 68 e 69 pode-se observar dois exemplos que pertencem a este nível. Da análise do desempenho do aluno D.R.1. podemos, também, inferir que, recorreu a formas de pensamento comum, na medida em que baseia a justificação em questões relacionadas com a segurança e a ação da polícia no combate à criminalidade.

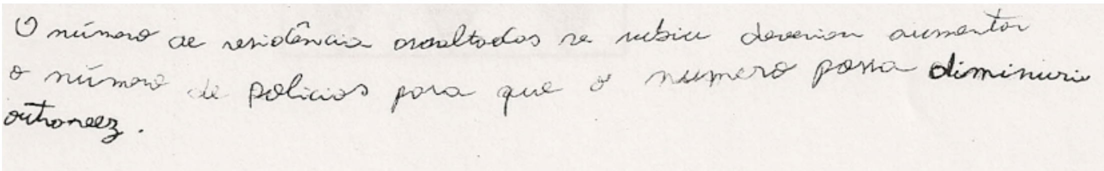

O número ae residências assaltadas se subir deveriam aumentar
o número de polícias para que o número possa diminuir
outravez.

Figura 68 – D.R.1., 8.º ano de escolaridade, Açores

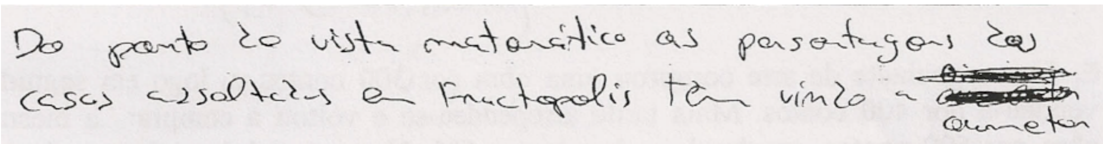

Do ponto do vista matemático as persentagens das
casas assaltadas em Fructopolis tem vindo a ~~[illegible]~~
aumentar

Figura 69 – V.C.1., 10.º ano de escolaridade, Leiria

O aluno V.C.1. fornece uma justificação com base nas percentagem correspondentes ao número de casas assaltadas em cada ano. Contudo, não explicita os processos de raciocínio que o levaram a esta conclusão.

5.3.1.7.3. Nível A6.3.

Neste nível são considerados os desempenhos dos alunos que mencionem que existiu um aumento do número de assaltos de um ano para o outro, mas referem que esse aumento é de 20%, isto é, conseguem identificar parte das incorreções, ao nível dos dados matemáticas daquela notícia. São exemplos deste nível os que se encontram nas Figuras 70 e 71.

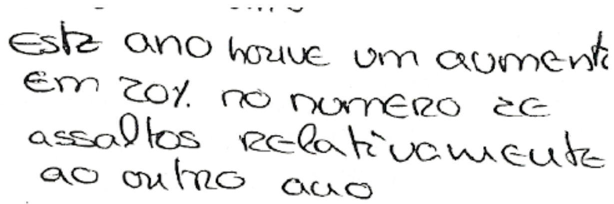

Este ano houve um aumento
em 20% no numero de
assaltos relativamente
ao outro ano

Figura 70 – R.J., 10.º ano de escolaridade, Leiria

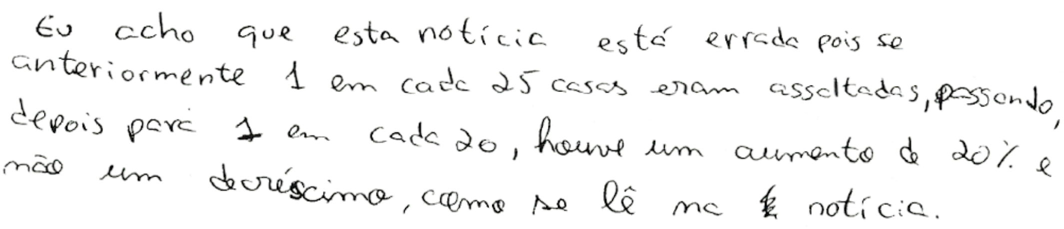


Figura 71 – M.C.2., 10.º ano de escolaridade, Leiria

A diferença entre estes dois desempenhos reside na explicitação dos processos de raciocínio utilizado, ou seja, no do aluno R.J. apenas é dito que houve um aumento de 20%, enquanto que no aluno M.C.2. esse aumento é justificado com base na comparação entre 1/25 e 1/20. No entanto, em ambos os desempenhos, os alunos apenas compreendem que parte da informação contida na notícia se encontra incorreta.

5.3.1.8. Padrão A7

O Padrão A7 é considerado o mais complexo do ponto de vista desenvolvimentista, pois são considerados os desempenhos que iluminam que existiu um aumento do número de assaltos, cujas justificações são claras e adequadas ao problema. Foram identificados cinco níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) apenas escrevem 1/20 > 1/25; (2) justificação com base nos dados 1/20 > 1/25; (3) 4% → 5%; (4) 4% → 5%; e não é 20%, mas sim 5%; e (5) 4% → 5% e aumentou 1% (ver Anexo 22). Há 11,3% de desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.1.8.1. Nível A7.1.

Este nível é constituído pelos desempenhos dos alunos que apenas escrevem que 1/20 > 1/25, como podemos observar na Figura 72.

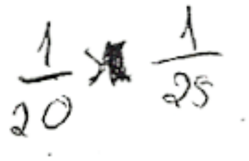


Figura 72 – I.S.1., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Esta resposta evidencia que este aluno conseguiu reconhecer que existiu um aumento no número de assaltos, mas não permite ao professor/investigador ter acesso aos processos de raciocínio que lhe estão subjacentes.

5.3.1.8.2. Nível A7.2.

Neste nível são considerados os desempenhos que mencionem que existiu um aumento do número de assaltos e apresentem justificações baseadas apenas numa parte dos dados contidos na notícia do jornal (1/20 e 1/25). No exemplo da Figura 73, o aluno L.A.1. refere que houve um aumento no número de assaltos de um ano para o outro.

O Número de assaltos a casas aumentou pois se em Fractopolis se houvessem 40 casas no ano anterior só 1 tinha sido assaltado mas este ano 2 foram assaltados.

Figura 73 – L.A.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

No entanto, este aluno tem necessidade de recorrer a um exemplo concreto como forma de explicar os processos de raciocínio associados, em que supõe que existem 40 casas. Assim, parte desse valor concreto para mostrar que, efetivamente, existiu um acréscimo no número de assaltos. Esta situação – recurso a um exemplo concreto – também é visível no desempenho que podemos observar na Figura 74, no qual o aluno recorre ao que acontece quando existe um grupo de pessoas que comem uma pizza, para explicitar o processo de raciocínio utilizado.

Os assaltos aumentaram porque se eu comer um bocado de pizza que foi dividida por vinte pessoas, eu como mais que se comer um bocado da mesma pizza que foi dividida por vinte e cinco pessoas.

Figura 74 – J.M.2., 6.º ano de escolaridade, Bélgica

Esta forma de atuação é típica de alunos que mobilizam o raciocínio concreto ou que estão na transição entre este e o raciocínio abstrato. No exemplo da Figura 75, o aluno recorre a uma pequena composição matemática para explicar a resposta. Utiliza uma parte dos dados (1/20 e 1/25), comparando-os, para justificar que o número de assaltos aumenta e não diminuiu, como é dito na notícia do jornal.

Eu acho que está mal, visto que o númerodo ano passado era de 1 em cada 25 tinham sido assaltadas. Este ano o número é de 1 em cada 20, e eles afizma que o número decresceu, quanto ele aumentou.

Figura 75 – N.º 16, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Por último, o aluno A.T.1. opta por uma estratégia de resolução semelhante à anterior.

Cada vez mais casas são assaltadas, porque é assaltada 1 casa num n.º de casas cada vez mais pequeno (no último ano foi assaltada uma casa em 25 e este ano foi assaltado uma casa em 20)/ Por esta lógica, no próximo ano é uma casa assaltada em 15 e assim sucessivamente, logo cada vez há mais assaltos.

Figura 76 – A.T.1., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Este aluno recorre à comparação de frações com o mesmo numerador e diferentes denominadores para explicitar que o número de assaltos está a aumentar – "1 casa num n.º de casas mais pequeno" – ou seja, quanto menor é o denominador maior será a fração (com igual numerador). Esta evidência ilumina que este consegue mobilizar capacidades e competências associadas a conhecimentos relacionais (Skemp, 1978) e associadas ao sentido crítico.

5.3.1.8.3. Nível A7.3.

Deste nível fazem parte os desempenhos dos alunos que referem que existiu um aumento no número de assaltos, uma vez que se passou de 4% para 5% de casas assaltadas na cidade de Fractopolis. São exemplos deste nível os que podemos observar nas Figuras 77 a 79.

Não me parece que exista um decrescimo nos assaltos a residências mas sim um aumento.

1em 25 → 4 em 100

1em 20 → 5 em 100

Figura 77 – J.S.2., 10.º ano de escolaridade, Lisboa

$1 - 25$ casas (assaltadas)
$\downarrow$
$1 - 20$ " "

$\frac{1}{25} = 0{,}04 < \frac{1}{20} = 0{,}05$

Figura 78 – C.N.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Nos dois desempenhos das figuras anteriores, os alunos escrevem a informação referente ao número de assaltos em cada ano (1/20 e 1/25) sob a forma de percentagem, concluindo, desta forma, que existiu um aumento e não um decréscimo.

O número de assaltos ~~as~~ as residencias aumentou, logo o comentário está errado, pois ao diminuir o número de casos possiveis (de 25 para 20) a possibilidade de uma casa em cada 25 ~~é mais~~ ser assaltada é menor do que uma casa em cada 20.

Figura 79 – J.S.3., 10.º ano de escolaridade, Faro

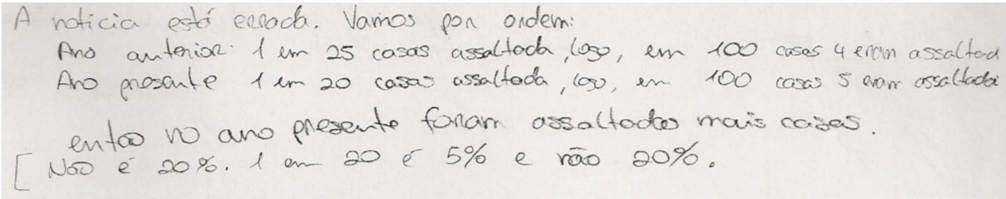
O aluno J.S.3. opta por recorrer a conhecimentos matemáticos relacionados com a teoria das probabilidade para justificar que, nesta situação, existiu um acréscimo no número de assaltos. Associa o 25 e 20 ao número de casos possíveis e, comparando a probabilidade de uma casa ser assaltada em ambas as situações, conclui que esta aumenta e não diminuiu, como é dito na notícia do jornal.

5.3.1.8.4. Nível A7.4.

Os desempenhos dos alunos que pertencem a este nível afirmam que existiu um aumento no número de assaltos, pois passou-se de 4% para 5% de casas assaltadas e, portanto, os 20% estão, também, incorretos.

Esta notícia foi mal redigida. $\frac{1}{25} = 4\%$ de casas assaltadas no último ano, $\frac{1}{20} = 5\%$ de residências assaltadas no presente ano. Em primeiro lugar $5\% \neq 20\%$, e depois $4\% < 5\%$, logo o número de assaltos aumentou.

Figura 80 – C.P.1., 10.º ano de escolaridade, Viseu



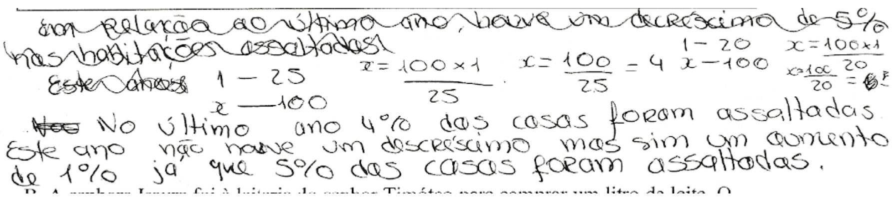
A notícia está errada. Vamos por ordem:
Ano anterior: 1 em 25 casas assaltada, logo, em 100 casas 4 eram assaltad
Ano presente 1 em 20 casas assaltada, logo, em 100 casas 5 eram assaltada
então no ano presente foram assaltadas mais casas.
[Não é 20%. 1 em 20 é 5% e não 20%.

Figura 81 – E.O.1., 12.º ano de escolaridade, Faro

Os alunos C.P.1. e E.O.1. optam por recorrer a uma pequena composição matemática como estratégia de resolução privilegiada. Estes associam 1/25 e 1/20 a 4% e a 5%, respetivamente. Assim, com base nesses valores, afirmam que existiu um aumento e não uma diminuição do número de assaltos. Para além disso, referem que como 1/20 é 5% então 5% ≠ 20%, ou seja, fazem corresponder esse dado matemático à percentagem do último ano, como é referido no enunciado da notícia do jornal.

5.3.1.8.5. Nível A7.5.

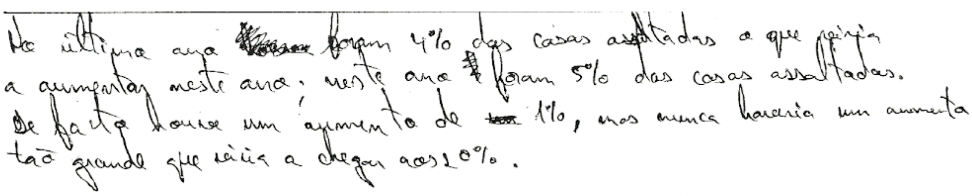
Este nível é composto pelos desempenhos dos alunos que estão mais completos, isto é, que identificaram as diversas incorreções existentes na notícia do jornal, mobilizando sentido crítico face ao que leram. São exemplos deste nível os que se encontram nas Figuras 82 e 83.



~~Em relação ao último ano, houve um decréscimo de 5%~~
~~nas habitações assaltadas~~
~~Este ano~~ 1 — 25 $x = \frac{100 \times 1}{25}$ $x = \frac{100}{25} = 4$ 1 — 20 x — 100 $x = \frac{100 \times 1}{20} = 5$
No último ano 4% das casas foram assaltadas.
Este ano não houve um descréscimo mas sim um aumento de 1% já que 5% das casas foram assaltadas.

Figura 82 – F.G.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno F.G.1. recorre a uma estratégia de resolução algébrica como forma de determinar a percentagem de assaltos em cada ano. Assim, utilizando a regra de três simples, obtém esses valores: 4% e 5%. Desta forma, conclui que existiu um aumento de 1% no número de assaltos entre os dois anos considerados na notícia do jornal.



No último ano foram 4% das casas assaltadas e que seria a aumentar neste ano; neste ano foram 5% das casas assaltadas. De facto houve um aumento de 1%, mas nunca haveria um aumento tão grande que iria a chegar aos 20%.

Figura 83 – F.O.1., 11.º ano de escolaridade, Viseu

O aluno F.O.1. recorre à escrita de uma pequena composição matemática como forma de explicar os processos de raciocínio associado a esse desempenho. A diferença entre estas duas estratégias de resolução é que este aluno não explicitou como é que determinou as percentagens associadas a cada ano. Contudo, conclui, também, que a percentagem de aumento é de 1% e não de 20%, como é dito no enunciado da notícia.

5.3.2. Tarefa B

A Tarefa B tem como finalidade avaliar se os alunos evidenciam intuição matemática, persistência na tarefa ou criatividade (ver Anexo 11). É fundamental que os alunos consigam desenvolver estas capacidades e competências ao longo das trajetórias de participação ao longo da vida, em contexto escolar (César, 2013a).

A intuição matemática está relacionada com a capacidade de o aluno conseguir, mais facilmente, encontrar um caminho adequado e rápido que lhe permita resolver um determinado problema. A persistência na tarefa é uma capacidade também importante na resolução de problemas, uma vez que os alunos tendem a desistir rapidamente de realizar tarefas matemáticas quando são confrontados com dificuldades ou barreiras. Por último, a criatividade é uma capacidade que pode facilitar a procura de soluções para um problema, recorrendo a elementos criativos na estratégia de resolução adotada, para chegar a uma solução.

Da análise dos desempenhos desta tarefa emergiram oito padrões, organizados do menos complexo para o mais complexo, do ponto de vista desenvolvimentista (ver Anexo 23). Assim, o Padrão B0 é o menos complexo, enquanto que o Padrão B7 é o mais complexo. Seguimos, também, a mesma lógica desenvolvimentista dentro de cada padrão. Por exemplo, no Padrão B2, o Nível 1 é o menos desenvolvido, enquanto que o Nível 3 é o mais avançado. Queremos, ainda, referir que as categorias α, β e γ nos Níveis B2.2. e B3.1. não apresentam diferenças, do ponto de vista desenvolvimentista.

Do total de alunos, 82,2% responderam a esta tarefa e 17,8 % deixaram-na em branco, o que ilumina a rejeição desta tarefa, por parte dos alunos (ver Anexo 21).

5.3.2.1. Padrão B0

O Padrão B0 é caracterizado pelos desempenhos dos alunos que responderam que não é possível satisfazer o pedido da cliente, ou seja, afirmam a impossibilidade de resolver este problema. Há 1,9% de alunos cujos desempenhos se enquadram neste padrão (ver Anexo 21). São exemplos os que podemos observar nas Figuras 84 e 85.

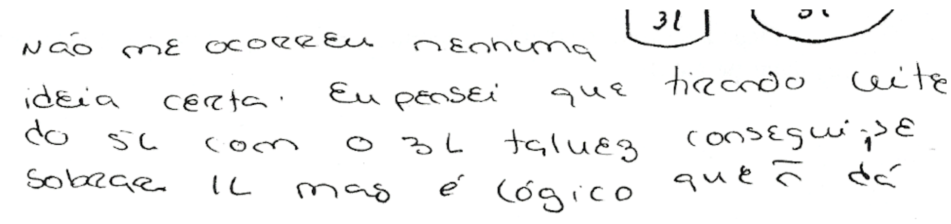


Figura 84 – A.H., 10.º ano de escolaridade, Leiria

O aluno A.H. refere que, com as medidas que são referidas no enunciado – três e cinco litros – não se pode solucionar este problema, isto é, que o senhor Timóteo não consegue dar à senhora Isaura um litro de leite.

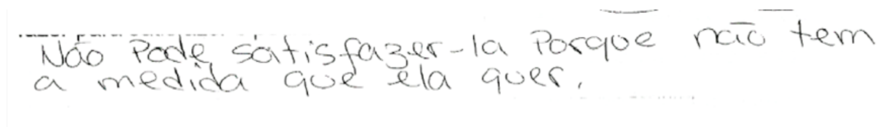


Figura 85 – M.L.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno M.L.1. também afirma que este problema não tem solução, uma vez que o senhor Timóteo não tem a medida que corresponde à quantidade de leite que a cliente pretende. Estes dois exemplos iluminam que estes alunos não conseguem mobilizar capacidades e competências tais como a intuição matemática ou a persistência na tarefa, que lhes permitiriam resolver esta situação.

5.3.2.2. Padrão B1

O Padrão B1 é composto pelos desempenhos que são desconexos face ao enunciado do problema. Há 5,6% dos desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21), cujos exemplos se podem observar nas Figuras 86 a 90.

Nos exemplos das Figuras 86 e 87 os alunos afirmam que o senhor Timóteo deve utilizar uma medida de dois litros para realizar o pedido da cliente. Para além de esta medida não ser contemplada no enunciado do problema, a forma como estes alunos tentam solucionar o mesmo é desconexa. O aluno J.R.2. apenas refere que o senhor Timóteo deve pegar na medida de dois litros e despejar, ou seja, não explica como é que obtém a quantidade de um litro, como era pretendido.

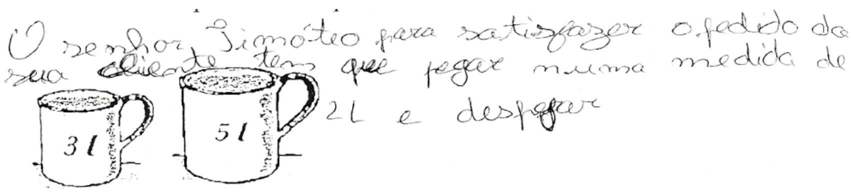


Figura 86 – J.R.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

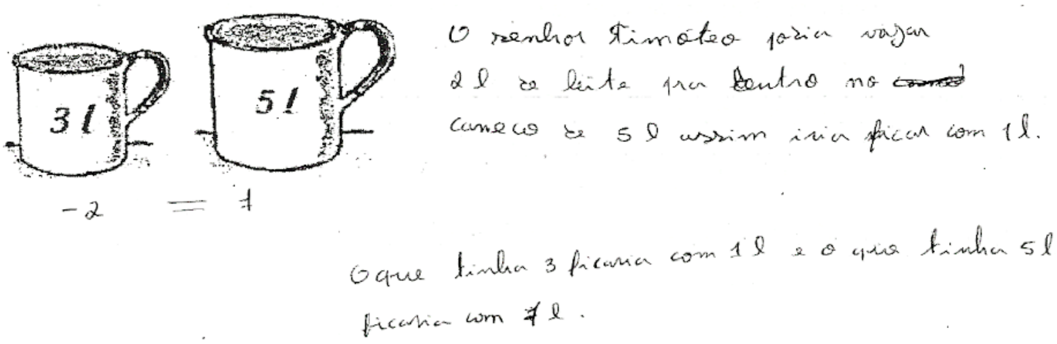


Figura 87 – M.S.2., 8.º ano de escolaridade, Açores

O aluno M.S.2. afirma que o senhor Timóteo deve pegar na medida de dois litros e vazar para a de cinco litros, obtendo um litro. Contudo, a explicação que fornece posteriormente é desconexa, uma vez que a medida de cinco litros ficaria com sete litros, o que é impossível. Esta evidência revela pouca conexão entre a estratégia de resolução que utiliza e a vida quotidiana.

Os exemplos das Figuras 88 a 90 evidenciam a utilização de cálculos matemáticos desajustados e desconexos face ao que é pedido no enunciado do problema.

Soma os duas medidas e depois divide por o maior número encontrado

Figura 88 – T.R.1., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Eu acho que deveria multiplicar 5 x 3 e dava-se 15 litros com 15 litros

Figura 89 – V.Q., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Os alunos T.R.1. e V.Q. utilizam estratégias de resolução aritmética como forma de explicitarem os processos de raciocínio subjacentes. No entanto, ambas são desconexas, tendo em conta o que é pedido no enunciado do problema.

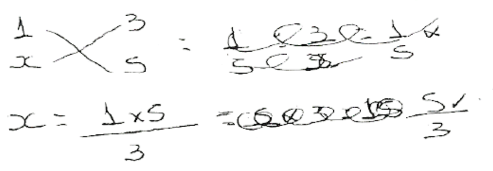


Figura 90 – P.F.1., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno P.F.1. recorre à utilização da regra de três simples para dar resposta ao problema, mas esta também não se adapta ao que era pretendido. Estes tipos de desempenhos iluminam uma representação social bastante tradicional acerca da natureza da Matemática. Para estes alunos, qualquer tarefa matemática tem que envolver cálculos matemáticos, mais ou menos complexos.

5.3.2.3. Padrão B2

Este padrão é constituído pelos desempenhos onde é considerado que há uma solução para o problema, mas a medição de um litro de leite não é conseguida. Este é constituído por três níveis de desenvolvimento, em relação aos desempenhos evidenciados pelos alunos: (1) só repetem enunciado; (2) pouca conexão aos constrangimentos do quotidiano; e (3) vendem três litros com explicação plausível para a vida quotidiana (ver Anexo 23). Há 5,6% dos desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.2.3.1. Nível B2.1.

Os desempenhos dos alunos que pertencem a este nível apenas repetem o que é dito no enunciado do problema.

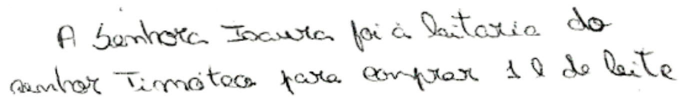


Figura 91 – P.M.1., 10.º ano de escolaridade, Viseu

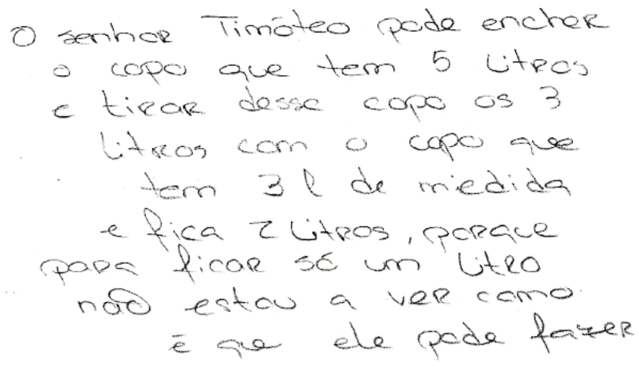
No exemplo da Figura 91, o desempenho do aluno P.M.1. evidencia que este transcreveu o primeiro período que compõe o enunciado desta tarefa, o que não permite perceber se conseguiu, ou não, interpretar o que era pedido.

5.3.2.3.2. Nível B2.2.

Este nível é caracterizado pelos desempenhos que evidenciam pouca conexão com os constrangimentos do quotidiano. Foram identificadas três categorias distintas: (α) tentam fazer passagens de uma medida para a outra, mas concluem ser impossível; (β) vendem três, cinco ou dois litros, sem explicação; e (γ) vendem três litros pelo preço de um litro ou mais barato (ver Anexo 23).

5.3.2.3.2.1. Categoria α

Fazem parte desta categoria os desempenhos dos alunos que evidenciam que houve manipulação das duas medidas mencionadas no enunciado do problema, mas concluem que é impossível. Na Figura 92 podemos observar um exemplo deste nível.



O senhor Timóteo pode encher
o copo que tem 5 Litros
e tirar desse copo os 3
Litros com o copo que
tem 3 l de medida
e fica 2 Litros, porque
para ficar só um Litro
não estou a ver como
é que ele pode fazer

Figura 92 – E.M.2., 10.º ano de escolaridade, Faro

O aluno E.M.2. consegue obter com sucesso dois litros de leite. Contudo, afirma que não se consegue satisfazer o pedido da senhora Isaura, pelo que considera este problema impossível, ou seja, revela falta de persistência na tarefa, pois desiste antes de ter obtido um litro, como desejado.

5.3.2.3.2.2. Categoria β

Esta categoria é caracterizada pelos desempenhos dos alunos que referem que o senhor Timóteo deve vender três, cinco ou dois litros à senhora Isaura, ou seja, não conseguem chegar à medida de um litro de leite. Diferem do nível anterior porque não declaram ser impossível chegar a medir um litro de leite. São exemplos deste nível os que se podem observar nas Figuras 93 a 95.

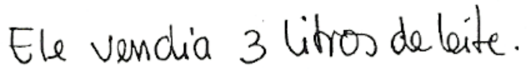

Ele vendia 3 litros de leite.

Figura 93 – N.º 16, 8.º ano de escolaridade, Leiria

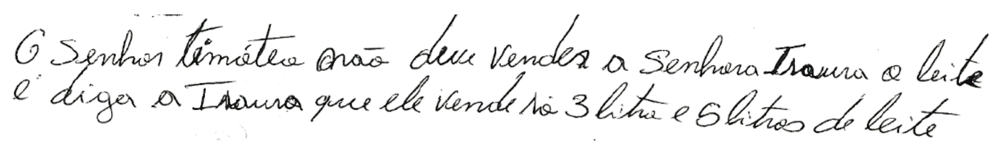

O Senhor timóteo não deve vender a Senhora Isaura o leite e diger a Isaura que ele vende só 3 litros e 5 litros de leite

Figura 94 – W.B., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Nos dois exemplos anteriores, os alunos referem que o senhor Timóteo só deve vender a quantidade de leite que corresponde a cada medida que possui, isto é, três litros ou cinco litros. No exemplo da Figura 95, o aluno P.M.2. recorre a uma pequena composição matemática como estratégia de resolução.

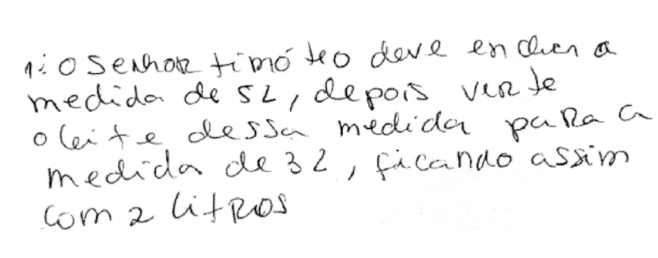

1: O senhor timóteo deve encher a medida de 5L, depois verte o leite dessa medida para a medida de 3L, ficando assim com 2 litros

Figura 95 – P.M.2., 11.º ano de escolaridade, Viseu

O desempenho deste aluno evidencia que houve uma tentativa na procura de um litro, através da manipulação das duas medidas, obtendo dois litros de leite. Desta forma, está implícito que o senhor Timóteo vende essa quantidade de leite à senhora Isaura.

5.3.2.3.2.3. Categoria γ

Desta categoria fazem parte os desempenhos dos alunos que referem que o senhor Timóteo deve vender três litros por um preço igual ou inferior ao de um litro, o que revela pouca conexão com a vida quotidiana.

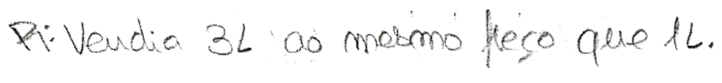


Figura 96 – T.M.1., 11.º ano de escolaridade, Faro

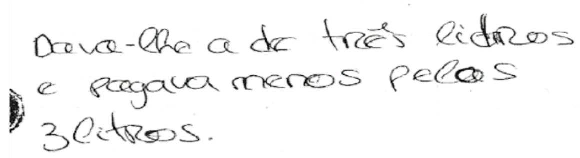


Figura 97 – S.V.1., 8.º ano de escolaridade, Açores

Os alunos T.M.1. e S.V.1., ao afirmarem que o senhor Timóteo deve vender três litros de leite pelo preço de um litro (Figura 96) ou mais barato do que habitualmente vende (Figura 97), não conseguiram realizar o que Abreu e seus colaboradores (2002) ou Zittoun (2006) designam por transições entre dois contextos (escolar e da vida quotidiana), isto é, não conseguiram mobilizar os conhecimentos que apropriaram em contextos de aprendizagem informal como, por exemplo, na vida familiar ou quotidiana, para um contexto de aprendizagem formal e num cenário de sala de aula.

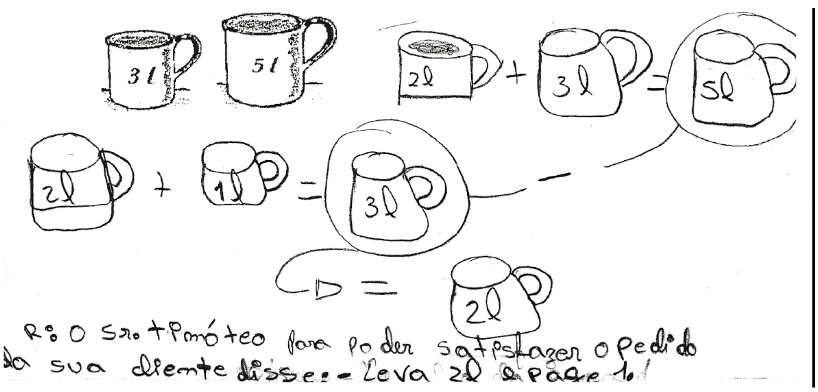


Figura 98 – K.B., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O desempenho do aluno K.B. evidencia que consegue perceber como pode obter dois litros de leite utilizando as duas medidas dadas (três e cinco litros). No entanto, recorre a uma promoção (leve dois litros pelo preço de um) como forma de satisfazer o pedido da senhora Isaura. Por último, este desempenho revela que o aluno recorreu a formas de pensamento matemático (obtenção de dois litros) e comum (ligação com a vida quotidiana).

5.3.2.3.3. Nível B2.3.

Os desempenhos que pertencem a este nível são os que mencionam que o senhor Timóteo deve vender três litros à senhora Isaura, mas apresentam justificações plausíveis para a vida quotidiana, associadas a alguma criatividade. Na Figura 99, podemos encontrar um exemplo de desempenho deste nível.

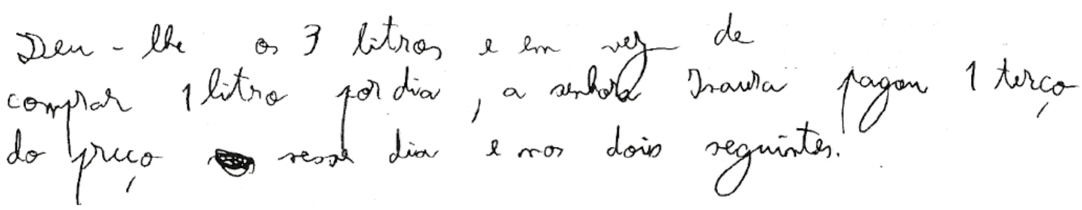

Deu-lhe os 3 litros e em vez de comprar 1 litro por dia, a senhora Isaura pagou 1 terço do preço nesse dia e nos dois seguintes.

Figura 99 – N.L.1., 8.º ano de escolaridade, Leiria

O aluno N.L.1. afirma que senhor Timóteo deve vender os três litros de leite pois, assim, a senhora Isaura não precisa de ir todos os dias comprar apenas um litro de leite. Deste modo, paga um terço do preço em cada dia, ou seja, paga o leite em prestações. Este desempenho ilumina alguma criatividade deste aluno, alguma capacidade de persuasão e de conexão com o quotidiano e a argumentação que poderia ser utilizada, uma vez que o senhor Timóteo não perde dinheiro e realiza algo muito comum acontecer em mercearias – o fiar algo.

5.3.2.4. Padrão B3

O Padrão B3 é composto pelos desempenhos dos alunos que contornam o problema proposto. Foram identificados três níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) existe medida de um litro; (2) existem outros recipientes; e (3) medem um litro, mas não referem como (ver Anexo 23). Há 12,3% dos desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.2.4.1. Nível B3.1.

Neste nível são considerados os desempenhos dos alunos que mencionam que existe uma medida de um litro, ou seja, uma medida extra, em relação às que estão referidas no enunciado do problema. Emergiram três categorias diferentes: (α) levada pela senhora Isaura; (β) o senhor Timóteo tem essa medida; e (γ) o senhor Timóteo compra/deve comprar uma medida de um litro (ver Anexo 23).

5.3.2.4.1.1. Categoria α

Esta categoria é caracterizada pelos desempenhos dos alunos que afirmam que existe uma medida de um litro, que é levada pela senhora Isaura. O aluno B.P. refere que o senhor Timóteo deveria pedir que a cliente trouxesse uma medida com capacidade de um litro.

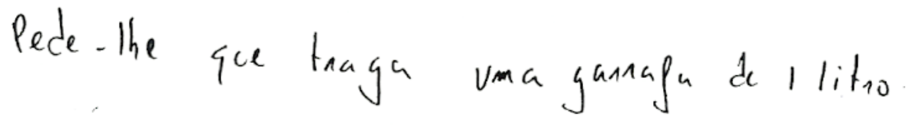

Pede-lhe que traga uma garrafa de 1 litro

Figura 100 – B.P., 10.º ano de escolaridade, Leiria

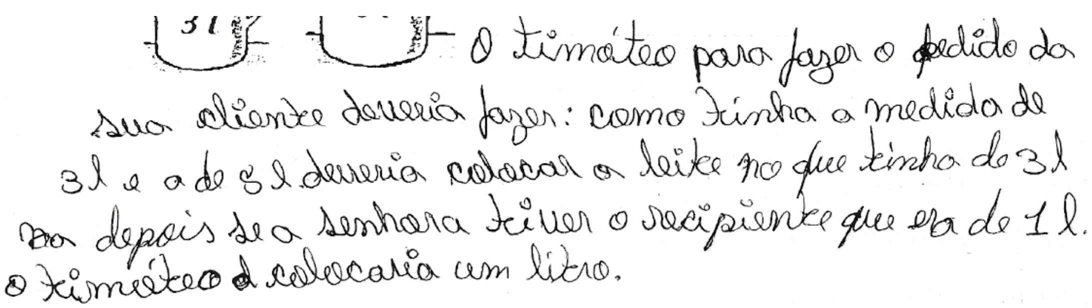

5l
O timóteo para fazer o pedido da sua cliente deveria fazer: como tinha a medida de 3l e a de 5l deveria colocar o leite no que tinha de 3l depois se a senhora tiver o recipiente que era de 1 l. o timóteo colocaria um litro.

Figura 101 – C.R.1., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

O aluno C.R.1. afirma que o senhor Timóteo, como só tem duas medidas (três e cinco litros), deveria encher a de três litros e despejar o leite para a medida de um litro que a senhora Isaura trouxe. Assim, conseguiria satisfazer o pedido da sua cliente.

5.3.2.4.1.2. Categoria β

Desta categoria fazem parte os desempenhos dos alunos que despejam um litro de leite numa garrafa extra com essa capacidade que o senhor Timóteo tem na sua loja. São exemplos deste sub-nível os que se encontram nas Figuras 102 e 103.

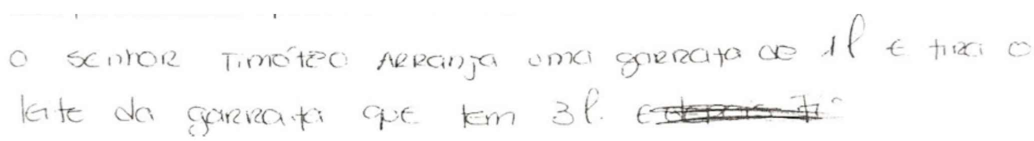

o senhor Timóteo arranja uma garrafa de 1l e tira o leite da garrafa que tem 3l.

Figura 102 – N.º 11, 9.º ano de escolaridade, Lisboa

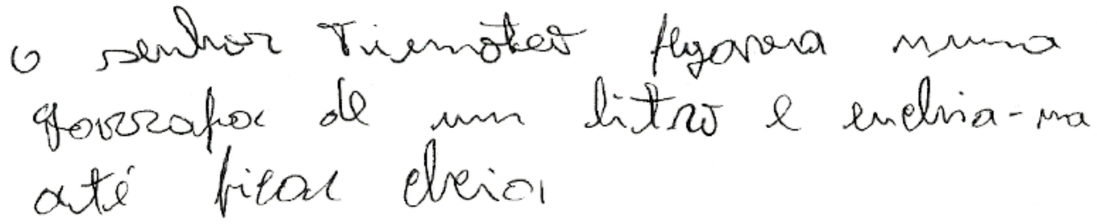


Figura 103 – A.A.2., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Nos dois exemplos, os alunos enchem uma das medidas referidas no enunciado do problema e despejam o leite numa medida de um litro. Neste caso, uma garrafa. Queremos salientar um aspeto importante e que foi identificado pelo aluno A.A.2. – encher até ficar cheio – o que revela um maior rigor, tendo em conta os desempenhos que pudemos observar anteriormente.

5.3.2.4.1.3. Categoria γ

Nesta categoria, os desempenhos dos alunos referem que o senhor Timóteo deve adquirir uma medida de um litro para satisfazer o pedido da cliente. São exemplos deste sub-nível os que podemos observar nas Figuras 104 e 105.

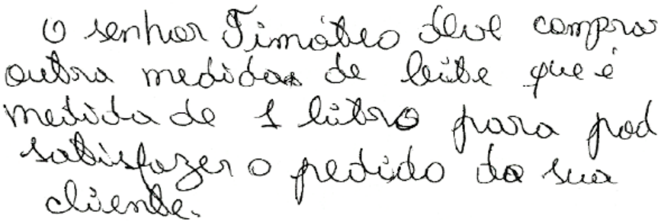


Figura 104 – D.M.2., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

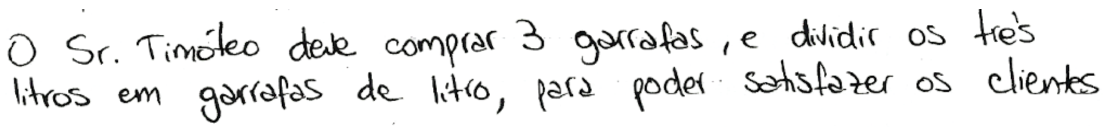


Figura 105 – C.F.1., 8.º ano de escolaridade, Leiria

Os dois desempenhos anteriores evidenciam uma solução que contorna o próprio problema, ou seja, existe uma medida extra, em relação às que estão contempladas no enunciado. Assim, esta forma de atuação revela pouca persistência na procura de soluções para o problema, tendo em conta as ferramentas que têm ao seu dispor.

5.3.2.4.2. Nível B3.2.

Os desempenhos que pertencem a este nível afirmam que existem outros recipientes extras, em relação aos do enunciado do problema, que permitem medir um litro. Identificámos dois níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) medidas com outras capacidades ou graduadas; e (2) existe uma tina graduada ou vende três litros (ver Anexo 23).

5.3.2.4.2.1. Sub-Nível B3.2.1.

Os desempenhos que constituem este sub-nível contemplam a existência de outros materiais de medição para além das duas medidas referidas no enunciado do problema. Na Figura 106, o aluno refere a existência de um copo de medição de líquidos, pelo que o senhor Timóteo deverá usá-lo para satisfazer o pedido da cliente.

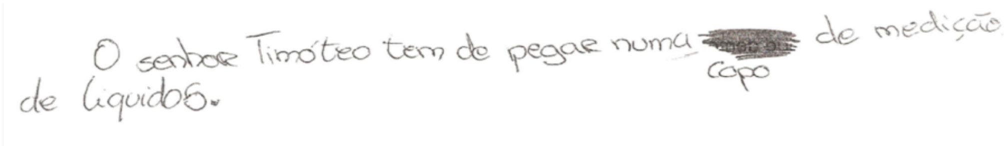


Figura 106 – N.º 6, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

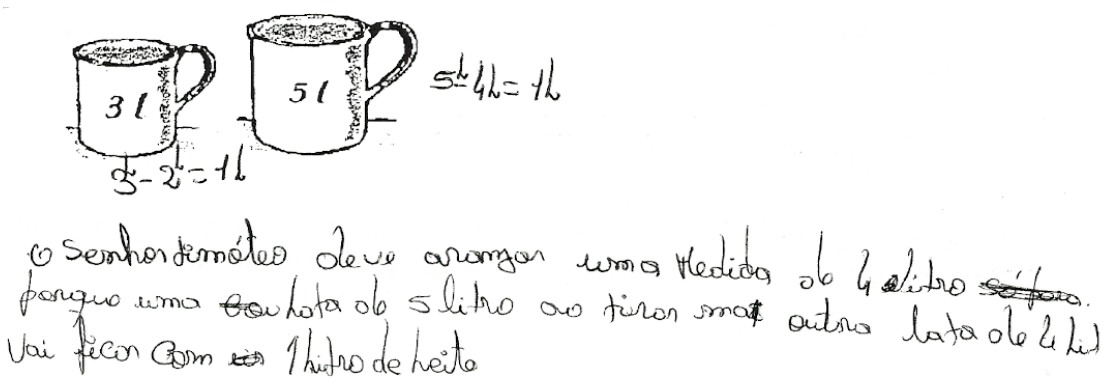


Figura 107 – J.V., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

O aluno J.V., para tentar solucionar o problema proposto, refere que existe uma medida de quatro litros de capacidade. Assim, o senhor Timóteo deve encher a medida de cinco litros e despejar o seu conteúdo na de quatro litros, obtendo um litro na medida de cinco litros.

5.3.2.4.2.2. Sub-Nível B3.2.2.

Os desempenhos que pertencem a este sub-nível exibem duas soluções possíveis para este problema. A primeira está relacionada com a existência de uma tina baixa graduada, para a qual o senhor Timóteo despeja um litro de leite. Para tal, poderá usar qualquer das medidas que constam do enunciado do problema (três ou cinco litros).

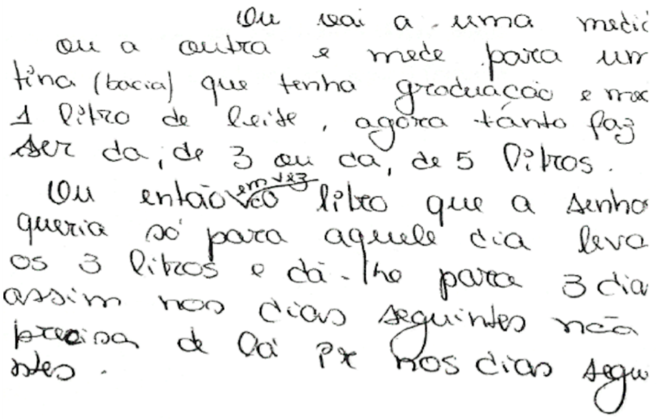

Ou vai a uma medi
ou a outra e mede para um
tina (bacia) que tenha graduação e me
1 litro de leite, agora tanto faz
ser da, de 3 ou da, de 5 litros.
Ou então em vez do litro que a senho
queria só para aquele dia leva
os 3 litros e dá-lho para 3 dia
assim nos dias seguintes não
precisa de dá lt nos dias segu
intes.

Figura 108 – C.C.2., 10.º ano de escolaridade, Viseu

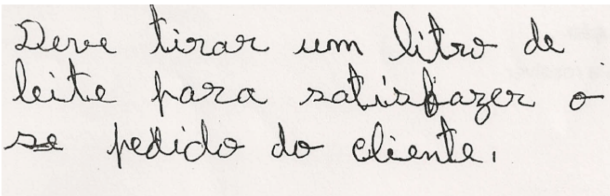
A segunda hipótese está relacionada com a venda dos três litros, argumentando que desta forma a senhora Isaura não precisava de ir à loja do senhor Timóteo todos os dias para comprar leite, uma vez que a quantidade que levava daria para três dias. Este desempenho revela alguma criatividade e conexão com a vida quotidiana.

5.3.2.4.3. Nível B3.3.

Fazem parte deste nível os desempenhos dos alunos que afirmam que medem um litro, mas não dizem como o fariam. Foram identificados três níveis de desenvolvimento cognitivo, tendo em conta os desempenhos evidenciados: (1) medem um litro sem dizer como; (2) tiram um litro da medida de três ou de cinco litros; e (3) tiram meio litro de cada medida dada no enunciado do problema (ver Anexo 23).

5.3.2.4.3.1. Sub-Nível B3.3.1.

Neste sub-nível os alunos mencionam que o senhor Timóteo deve medir um litro, mas não referem como realizam esse procedimento.



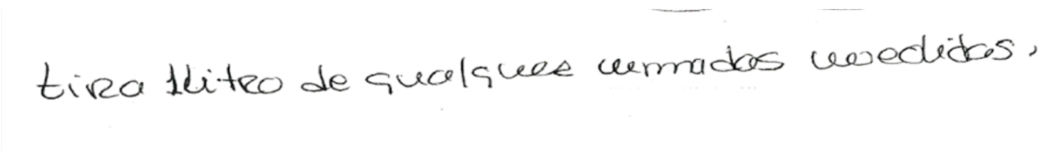
Deve tirar um litro de leite para satisfazer o ~~se~~ pedido do cliente.

Figura 109 – N.º 11, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Na Figura 109, o desempenho do aluno não permite inferir quais os processos de raciocínio associados à resposta dada.

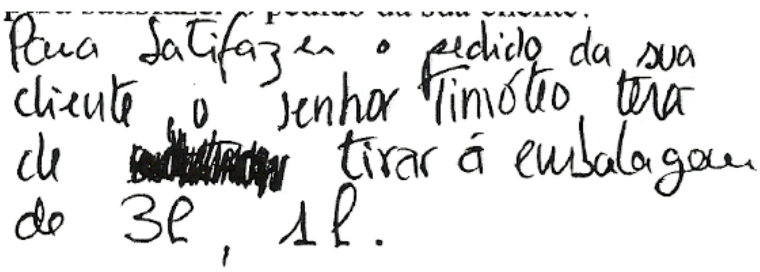
5.3.2.4.3.2. Sub-Nível B3.3.2.

Este sub-nível é composto pelos desempenhos dos alunos que afirmam que o senhor Timóteo deve tirar um litro de leite de uma das duas medidas dadas no enunciado do problema (três ou cinco litros). São exemplos deste sub-nível os que se podem observar nas Figuras 110 a 112.



tira 1litro de qualquer uma das medidas.

Figura 110 – P.S., 9.º ano de escolaridade, Lisboa



Para Satifazer o pedido da sua cliente, o senhor Timóteo terá de tirar á embalagem de 3l, 1l.

Figura 111 – C.C.3., 9.º ano de escolaridade, Leiria

O aluno P.S. refere que se deve tirar um litro de qualquer uma das medidas, enquanto que o aluno C.C.3. menciona que se deve utilizar a medida de três litros para satisfazer o pedido da cliente do senhor Timóteo.

Outro exemplo de desempenho deste padrão está relacionado com o que podemos observar na Figura 112, na qual o aluno J.C.1. refere que o senhor Timóteo deve tirar um litro de leite da medida de três litros, uma vez que é mais fácil utilizar essa medida.

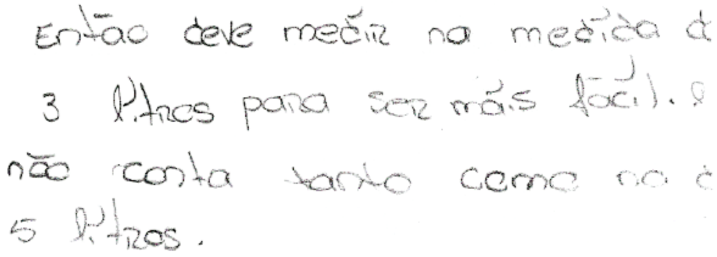


Figura 112 – J.C.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Contudo, não é explicitado como é que o senhor Timóteo mede a quantidade de leite que a senhora Isaura pretende.

5.3.2.4.3.3. Sub-Nível B3.3.3.

São considerados desempenhos deste sub-nível os que mencionam que o senhor Timóteo deve tirar meio litro de leite a cada uma das medidas dadas no enunciado do problema. Na Figura 113, estamos perante um exemplo deste sub-nível.

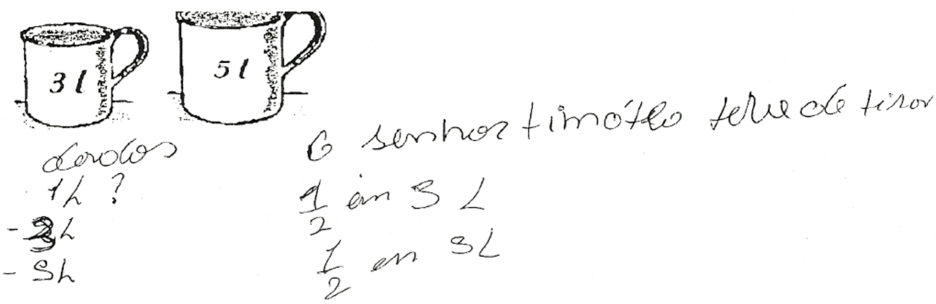


Figura 113 – M.S.3., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Este desempenho ilumina que este aluno consegue mobilizar conhecimentos sobre os números, as suas possíveis representações e as operações entre eles. Porém, não consegue ser claro e rigoroso a explicar como consegue medir meio litro de cada caneca.

5.3.2.5. Padrão B4

O Padrão B4 é composto pelos desempenhos dos alunos que realizam estimativas como forma de solucionar este problema. Foram identificados oito níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) cálculos matemáticos com procura de um litro; (2) medem mais ou menos; (3) estratégia aritmética (subtração) baseada em estimativas; (4)

medem 1/3 da medida de três litros ou 1/5 de medida de cinco litros; (5) utilizam um instrumento de medição extra; (6) estratégia aritmética (divisão e subtração); (7) realizam uma estimativa e depois uma estratégia aritmética; e (8) despejo ou aritmética de forma rigorosa (ver Anexo 23). Há 30,8% dos desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.2.5.1. Nível B4.1.

Os desempenhos que pertencem a este nível evidenciam o recurso a cálculos matemáticos que tentam dar resposta ao problema proposto, como podemos observar nas Figuras 114 a 117. Estes exemplos recorrem a estratégias de resolução aritmética que partem da manipulação das duas medidas existentes. Mas, perante a dificuldade de obterem um litro, indicam outra operação aritmética que já não se baseia na manipulação das medidas existentes (2l – 1l = 1l).

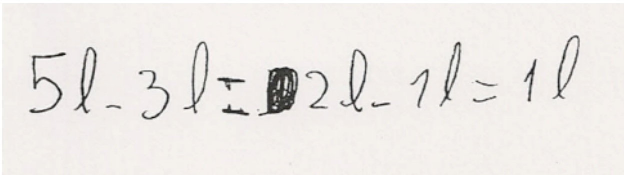


Figura 114 – R.L., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno R.L. retira à medida dos cinco litros três litros, o que perfaz dois litros. Depois, subtrai esse valor por um, obtendo a quantidade que a senhora Isaura pretende – um litro. No entanto, nesta estratégia de resolução não se percebe como é que este aluno retira um litro, utilizando apenas as duas medidas dadas no enunciado do problema. Para além disso, queremos salientar a falta de rigor evidenciada por este aluno na escrita desta estratégia de resolução.

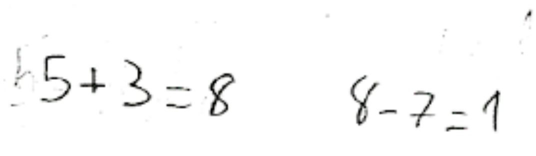


Figura 115 – L.A.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno L.A.2. opta por juntar a quantidade de leite proveniente das duas medidas (três e cinco litros) obtendo oito litros. No final, como pretende que o resultado seja um litro, subtrai sete litros. Mais uma vez não se sabe como é que este aluno consegue retirar sete litros utilizando apenas as duas medidas referidas no enunciado.

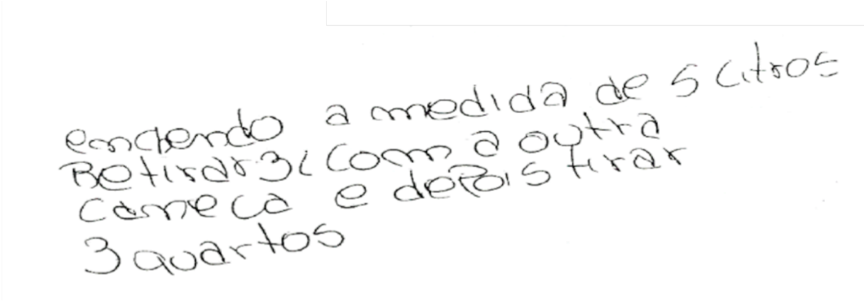


Figura 116 – C.S.3., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno C.S.3. consegue obter dois litros de leite através do enchimento da medida de três litros com a de cinco litros. No entanto, refere que, para obter a quantidade de leite que a senhora Isaura pretende, o senhor Timóteo deverá retirar três quartos de leite, o que constitui um desempenho desadequado e não justificado pelo aluno.

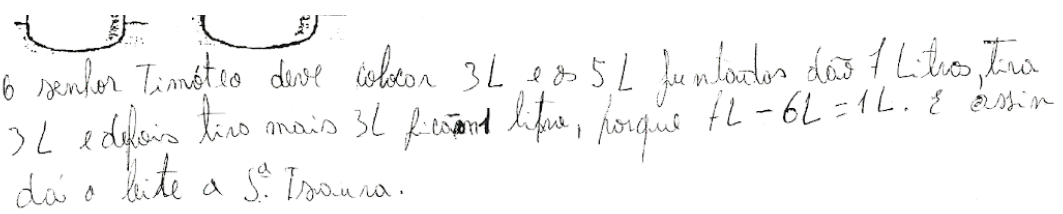


Figura 117 – E.M.3., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Por último, o aluno E.M.3. recorre a uma estratégia de resolução aritmética que utiliza as duas medidas referidas no enunciado. Contudo, ao somar três com cinco litros, obtém sete litros, o que está incorreto. Portanto, este aluno evidencia algumas dificuldades na mobilização de conhecimentos instrumentais relativos à adição de números naturais (Skemp, 1978).

5.3.2.5.2. Nível B4.2.

Neste nível são considerados os desempenhos que afirmam que o senhor Timóteo deve medir, aproximadamente, um litro de leite, utilizando as duas medidas mencionadas no enunciado do problema. Na Figura 118, o aluno D.P.1. sugere duas hipóteses para solucionar o problema. Na primeira, realiza uma estimativa da quantidade de leite a ser vendida, isto é, se metade de três litros é um litro e meio, então o senhor Timóteo deve vender à senhora Isaura menos de metade da medida de três litros. Na segunda, afirma que deve encher uma medida que saiba que tem a capacidade de um litro.

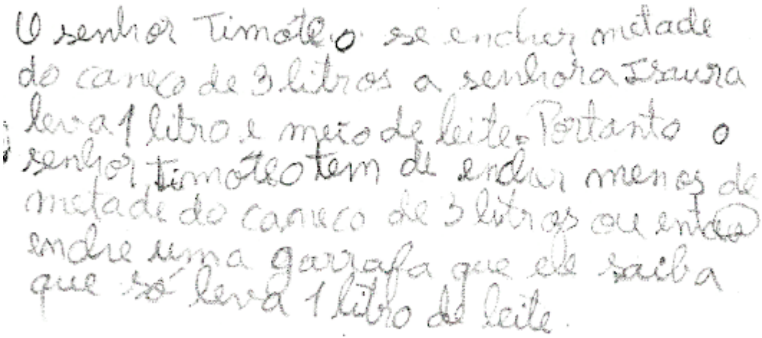

O senhor Timóteo se encher metade do caneco de 3 litros a senhora Isaura leva 1 litro e meio de leite. Portanto o senhor Timóteo tem de encher menos de metade do caneco de 3 litros ou então enche uma garrafa que ele saiba que só leva 1 litro de leite.

Figura 118 – D.P.1., 9.º ano de escolaridade, Açores

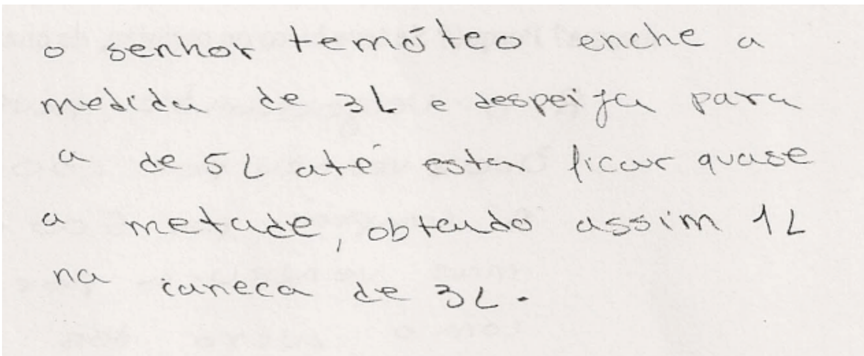

o senhor temóteo enche a medida de 3L e despeja para a de 5L até esta ficar quase a metade, obtendo assim 1L na caneca de 3L.

Figura 119 – A.F.2., 10.º ano de escolaridade, Faro

O aluno A.F.2. recorre a uma pequena composição matemática como estratégia de resolução. Para ele, o senhor Timóteo deve encher até quase metade a medida de cinco litros, utilizando a medida de três litros. Desta forma, obtém um litro nesta última.

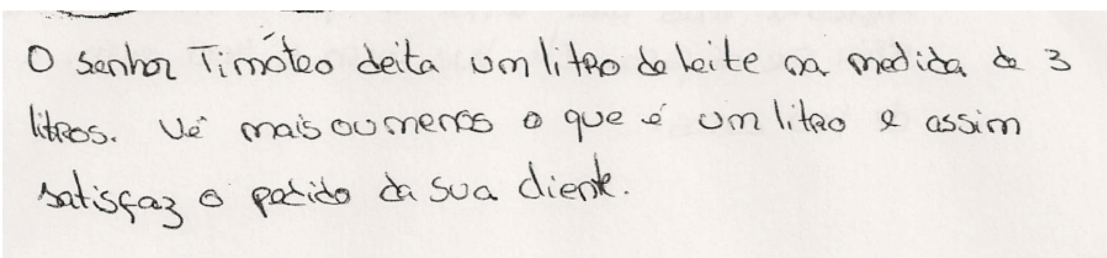

O senhor Timóteo deita um litro de leite na medida de 3 litros. Vê mais ou menos o que é um litro e assim satisfaz o pedido da sua cliente.

Figura 120 – T.G., 8.º ano de escolaridade, Açores

O aluno T.G. supõe a existência de um recipiente onde está guardado o leite. Assim, utilizando a medida de três litros, o senhor Timóteo enche-a de acordo com o que representa para ele um litro, satisfazendo o pedido da senhora Isaura.

5.3.2.5.3. Nível B4.3.

Neste nível, enquadram-se os desempenhos dos alunos que recorrem a uma estratégia de resolução aritmética (subtração), tendo como base a realização de uma estimativa. No exemplo da Figura 121, o aluno N.S. afirma que o senhor Timóteo deve tirar dois litros da medida de três litros, obtendo a quantidade de leite que a cliente pretende (um litro). No entanto, a quantidade que retira – dois litros – é feita com base numa estimativa.

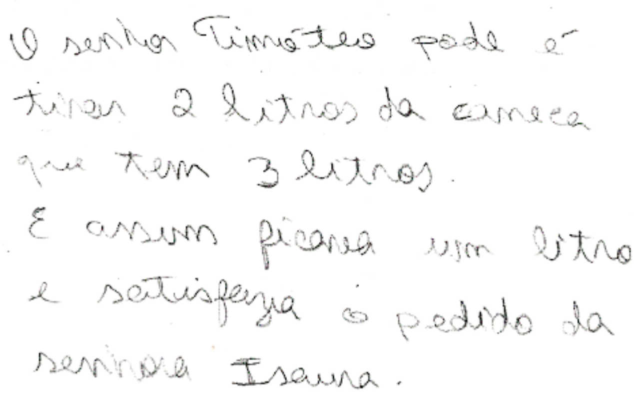

O senhor Timóteo pode é
tirar 2 litros da caneca
que tem 3 litros.
E assim ficava um litro
e satisfazia o pedido da
senhora Isaura.

Figura 121 – N.S., 8.º ano de escolaridade, Açores

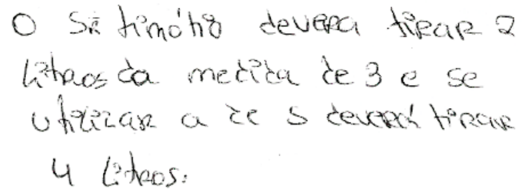

O Sr timótio deveria tirar 2
litros da medida de 3 e se
utilizar a de 5 deveria tirar
4 litros.

Figura 122 – V.V., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno V.V. recorre a uma estratégia de resolução semelhante à anterior. No entanto, acrescenta a hipótese de o senhor Timóteo utilizar a medida de cinco litros. Nesse caso, terá que tirar quatro litros para poder obter a quantidade necessária para satisfazer o pedido da sua cliente. Mas, mais uma vez, esse procedimento seria baseado numa estimativa.

5.3.2.5.4. Nível B4.4.

A este nível pertencem os desempenhos dos alunos que mencionam que o senhor Timóteo deve tirar 1/3, se considerar a medida de três litros, ou 1/5, se considerar a medida de cinco litros. No entanto, essa medição é feita com base numa estimativa. São exemplos deste nível os que podemos observar nas Figuras 123 a 126.

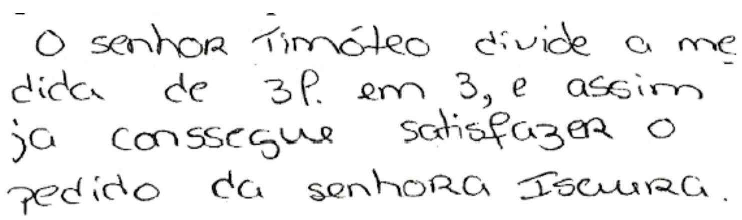

O senhor Timóteo divide a me
dida de 3l. em 3, e assim
ja conssegue satisfazer o
pedido da senhora Iscura.

Figura 123 – N.º 16, 10.º ano de escolaridade, Leiria

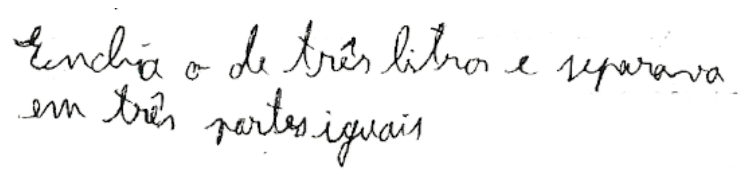

Enchia o de três litros e separava
em três partes iguais

Figura 124 – H.R., 8.º ano de escolaridade, Leiria

Nos dois exemplos anteriores, os alunos recorrem a um estratégia aritmética como forma de solucionarem o problema. Afirmam que o senhor Timóteo deve dividir a medida de três litros por três para satisfazer o pedido da cliente. Queremos salientar que o desempenho do aluno H.R. se encontra num nível superior, do ponto de vista cognitivo, ao do da Figura 123, uma vez que considera que, quando divide a medida em três partes, estas precisam de ser iguais.

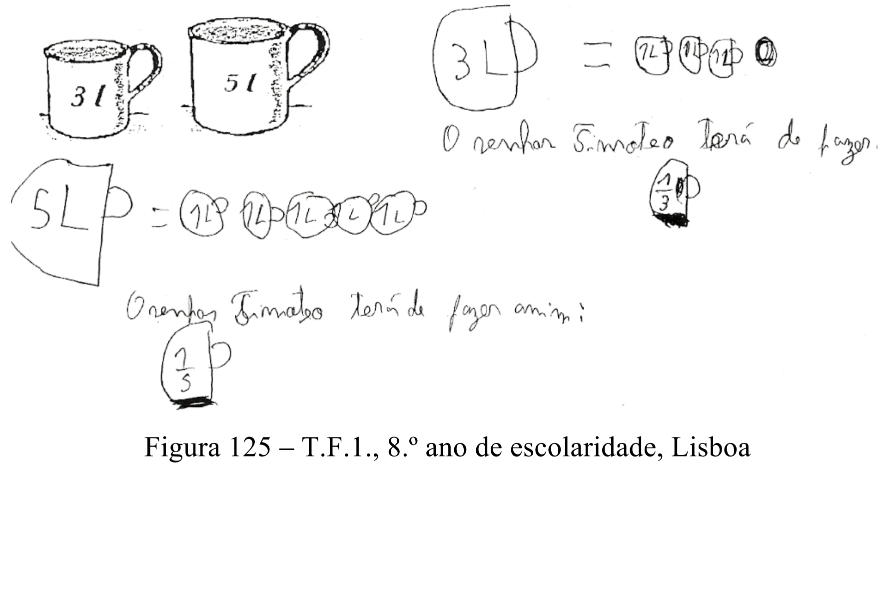


Figura 125 – T.F.1., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno T.F.1. recorre a uma representação gráfica como estratégia de resolução. Se o senhor Timóteo utilizar a medida de três litros, então deverá dividir em três partes iguais, sendo cada uma dela equivalente a um litro. Assim, para satisfazer o pedido da senhora Isaura, terá que lhe dar um terço da capacidade da medida de três litros. Um processo semelhante deverá ser utilizado, se o senhor Timóteo utilizar a medida de cinco litros, recorrendo a uma divisão em cinco partes iguais.

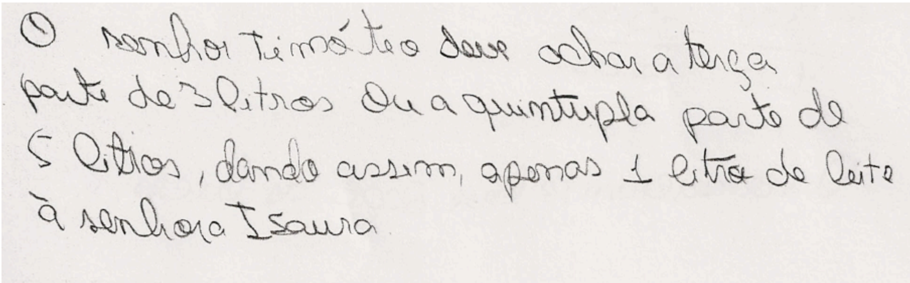

O senhor Timóteo deve achar a terça parte de 3 Litros ou a quintupla parte de 5 Litros, dando assim, apenas 1 litro de leite à senhora Isaura

Figura 126 – M.M.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Por último, o aluno M.M.1. refere que, para o senhor Timóteo satisfazer o pedido da senhora Isaura, deverá dar um terço da medida de três litros ou um quinto da medida de cinco litros que correspondem, em ambos os casos, a um litro de leite. Apesar deste aluno ter escrito “quíntupla parte”, em vez de quinta parte, isso não invalida o processo de raciocínio associado a este desempenho.

5.3.2.5.5. Nível B4.5.

Neste nível são característicos os desempenhos dos alunos que recorrem a instrumentos de medição extra, em relação ao enunciado do problema, como por exemplo, uma régua, para conseguirem solucionar o problema proposto. São exemplos deste nível os que podemos observar nas Figuras 127 e 128.

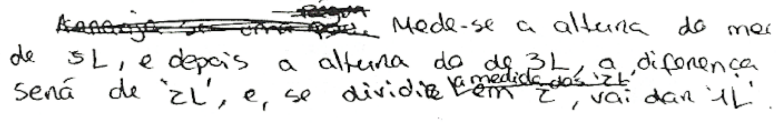

Mede-se a altura do mec de 5L, e depois a altura do de 3L, a diferença será de '2L', e, se dividir a medida dos '2L' em 2, vai dar '1L'.

Figura 127 – C.S.4., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno C.S.4. recorre à utilização de um material extra, relativamente aos que se encontram no enunciado do problema, que lhe permite medir a altura das duas medidas. Assim, a metade dessa diferença corresponderá a um litro de leite, pelo que o senhor Timóteo consegue satisfazer o pedido da sua cliente.

No meu caso se isto acontecer eu vou na medida de 3 l medir com a régua se dá 1,5 cm vou pegar nessa medida (1.5 cm) vou dividir fica 0,5; 0,5; 0,5 vou essa medida de 3l, colocar 0,5 mais 0,5 mais 0,5 isto quer dizer que 0,5 é um litro. veja em cima.

Figura 128 – E.V., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

O aluno E.V. utiliza uma régua como ferramenta que lhe permite medir um litro de leite. Neste caso, só utiliza a medida de três litros. Para explicitar os processos de raciocínio utilizados, supõe que altura dessa medida é de 1,5 cm. Depois, divide esse valor por três (1,5 : 3) e cada parte (0,5 cm) corresponderá a um litro.

5.3.2.5.6. Nível B4.6.

Neste nível são considerados os desempenhos dos alunos que evidenciam estratégias de resolução aritmética, recorrendo à divisão seguida de uma subtração. Em ambas as situações são feitas estimativas.

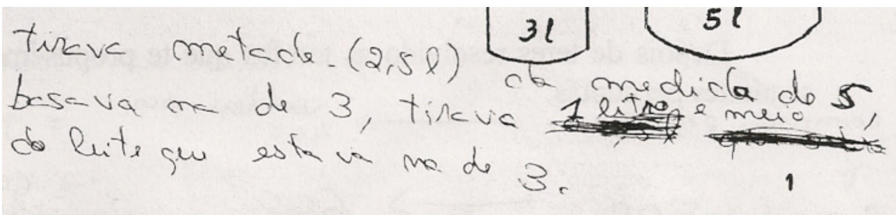


Figura 129 – N.º 4, 12.º ano de escolaridade, Leiria

Enche metade da medida de 3 l (1,5 l) e retira o equivalente a meio litro.

Figura 130 – N.º 8, 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Nos dois exemplos anteriores, os alunos enchem metade de uma das medidas dadas no enunciado do problema – cinco litros (Figura 129) e três litros (Figura 130). Depois, retiram a quantidade que excede um litro. Na Figura 129, o aluno, após retirar metade da medida de cinco litros, despeja o seu conteúdo na de três litros e retira a quantidade de leite de tal forma que nessa medida só fique um litro de leite (2,5 – 1,5). Já na Figura 130 temos o exemplo de um aluno que opta por encher metade da medida de três litros e retirar meio litro dessa quantia (1,5 – 0,5). Ambos os passos são baseados em estimativas.

5.3.2.5.7. Nível B4.7.

Este nível é constituído pelos desempenhos dos alunos que recorrem, em primeiro lugar, a uma estimativa e que, depois, utilizam uma estratégia de resolução aritmética para obter um litro de leite.

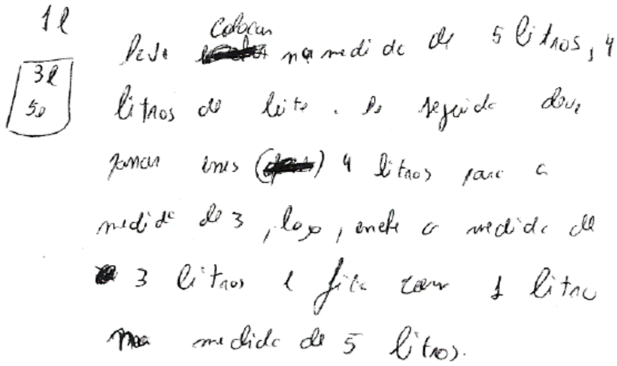


Figura 131 – M.P., 11.º ano de escolaridade, Viseu

Para o aluno M.P., o senhor Timóteo deve encher, com base numa estimativa, a medida de cinco litros com quatro litros de leite. Depois, deve despejar o seu conteúdo para a medida de três litros, ficando um litro na medida de cinco litros. Desta forma, consegue satisfazer o pedido da senhora Isaura.

5.3.2.5.8. Nível B4.8.

Neste nível são considerados os desempenhos em que os alunos conseguem medir, de forma rigorosa e adequada, dois litros, mas que obtêm um litro de leite com base numa estimativa. São exemplos deste nível os que se encontram nas Figuras 132 e 133.

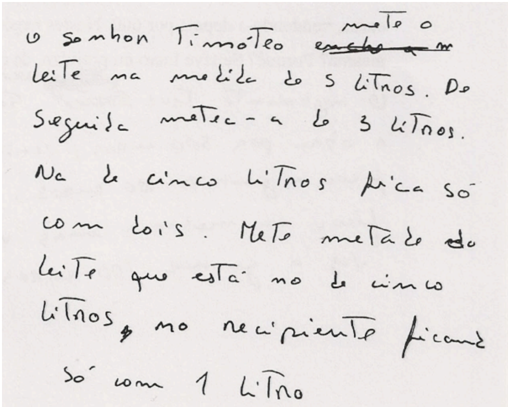

o senhor Timóteo ~~enche o~~ mete o
leite na medida de 5 litros. De
seguida mete-a de 3 litros.
Na de cinco litros fica só
com dois. Meto metade do
leite que está no de cinco
litros, no recipiente ficando
só com 1 litro

Figura 132 – D.F., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno D.F. recorre a uma composição matemática para explicitar os processos de raciocínio subjacentes à sua resposta. Segundo ele, o senhor Timóteo deve encher a medida de cinco litros e despejar o seu conteúdo na de três litros. Assim, esta última fica cheia, restando dois litros na medida de cinco litros. Para obter um litro de leite, o senhor Timóteo deverá dividir ao meio essa quantidade. Este último passo só será possível recorrendo a uma estimativa.

O processo de raciocínio utilizado pelo aluno D.F. é semelhante ao do aluno J.C.2. Este recorre a uma composição matemática associada a uma representação gráfica para explicitá-lo.

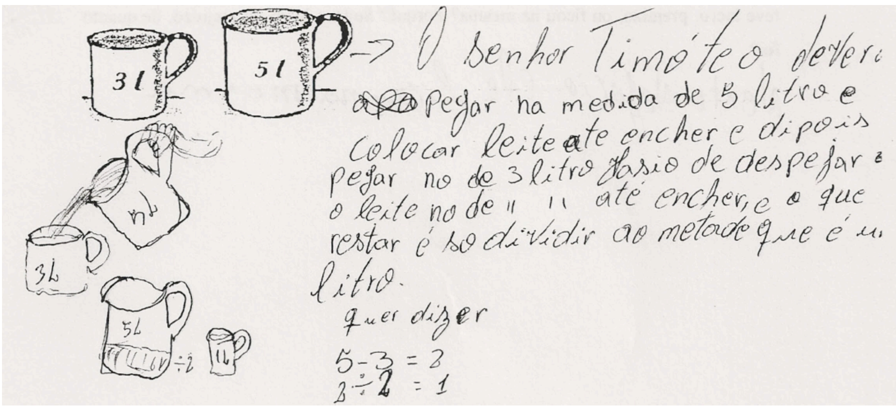


Figura 133 – J.C.2., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Segundo este aluno, ao encher a medida de cinco litros e despejá-la na de três litros, obtém dois litros. Desta forma, para satisfazer o pedido da cliente, o senhor Timóteo deverá recorrer a uma estimativa, isto é, deverá dividir ao meio a quantidade de leite que restou na medida de cinco litros.

5.3.2.6. Padrão B5

O Padrão B5 é composto pelos desempenhos dos alunos que evidenciam criatividade e conexões plausíveis com a vida quotidiana. Através da análise dos desempenhos, identificámos cinco níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) existência de um recipiente extra, de tal forma que 5x5 – 3x8 = 1 litro; (2) existência de um recipiente extra, tal que 2x(5 – 3) – 3 = 1 litro; (3) 2x5 – 3x3 = 1 litro; (4) efetuam passagens de uma medida para a outra, auxiliadas por marcas realizadas nas mesmas, para obter um litro de leite; e (5) 2x3 – 5 = 1 litro (ver Anexo 23). Há 3,1% de desempenhos dos alunos que fazem parte deste padrão (ver Anexo 21).

5.3.2.6.1. Nível B5.1.

Neste nível, os desempenhos considerados referem que o senhor Timóteo possui um recipiente extra, não graduado, em relação aos que existem no enunciado do problema, cuja função é armazenar o leite proveniente dos vários movimentos efetuados com as medidas.

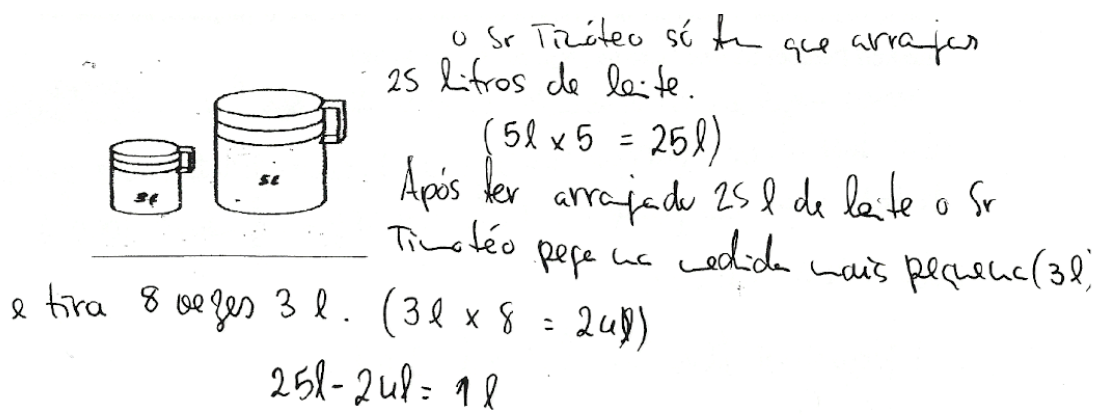


Figura 134 – N.A.1., 11.º ano de escolaridade, Viseu

O aluno N.A.1. recorre a uma estratégia de resolução aritmética como forma de solucionar o problema proposto. Neste caso, o senhor Timóteo enche cinco vezes a medida de cinco litros e despeja o seu conteúdo num recipiente extra, não graduado, cuja medida se desconhece. Depois, utilizando a medida de três litros, enche-a oito vezes, restando, nesse recipiente, um litro de leite. Esta estratégia de resolução ilumina persistência na tarefa e alguma criatividade, uma vez que, numa loja, existe habitualmente, como este aluno referiu na entrevista, posteriormente, algum recipiente extra, pelo que isso torna possível satisfazer o pedido da senhora Isaura.

5.3.2.6.2. Nível B5.2.

A este nível estão associados os desempenhos dos alunos que também recorrem a um recipiente extra, como forma de armazenamento do leite para solucionar o problema, como se pode observar um exemplo na Figura 135. O aluno C.L. recorre a uma composição matemática como estratégia de resolução.

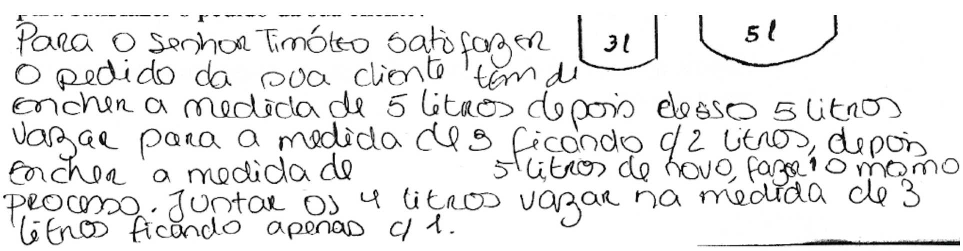

Para o Senhor Timóteo satisfazer o pedido da sua cliente tem de encher a medida de 5 litros depois desso 5 litros vazar para a medida de 3 ficando c/ 2 litros, depois encher a medida de 5 litros de novo, fazer o mesmo processo. Juntar os 4 litros vazar na medida de 3 litros ficando apenas c/ 1.

Figura 135 – C.L., 9.º ano de escolaridade, Leiria

Para este aluno, o senhor Timóteo deve encher a medida de cinco litros e despejá-la na de três litros, ficando com dois litros. Depois, repete o mesmo processo, estando implícito que o senhor Timóteo despeja para um recipiente extra os dois litros. Assim, após esta repetição, fica com quatro litros. Desta forma, se despejar o seu conteúdo na medida de três litros, obtém um litro, como era pretendido.

5.3.2.6.3. Nível B5.3.

Este nível é constituído pelos desempenhos que evidenciam, implicitamente, que existe mais de uma medida de três litros e/ou de cinco litros. No exemplo da Figura 136, o aluno recorre a uma estratégia de resolução aritmética para mostrar, de forma bastante sucinta, como é que o senhor Timóteo deve proceder – encher duas medidas de cinco litros (5 + 5) e tirar três medidas de três litros (3x3), por forma a obter um litro de leite.

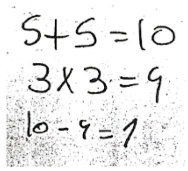
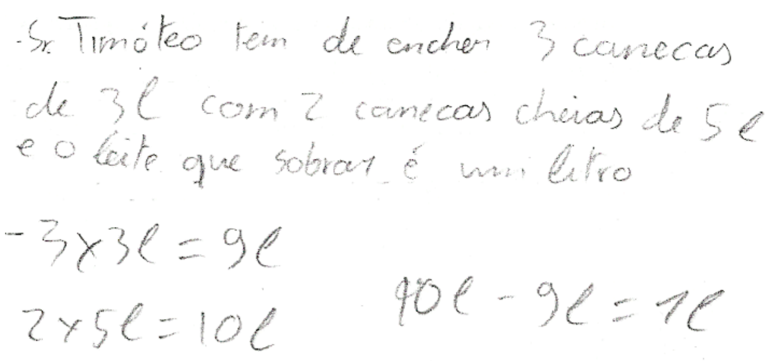

$5+5=10$
$3\times3=9$
$10-9=1$

Figura 136 – N.º 14, 8.º ano de escolaridade, Leiria



-Sr. Timóteo tem de encher 3 canecas
de 3l com 2 canecas cheias de 5l
e o leite que sobrar é um litro

-3x3l = 9l
2x5l = 10l   10l - 9l = 1l

Figura 137 – V.A.1., 10.º ano de escolaridade, Viseu

O desempenho do aluno V.A.1. revela um processo de raciocínio semelhante ao do exemplo da figura anterior. Neste caso, existe uma explicação mais clara de como deverá proceder o senhor Timóteo para poder satisfazer o pedido da senhora Isaura.

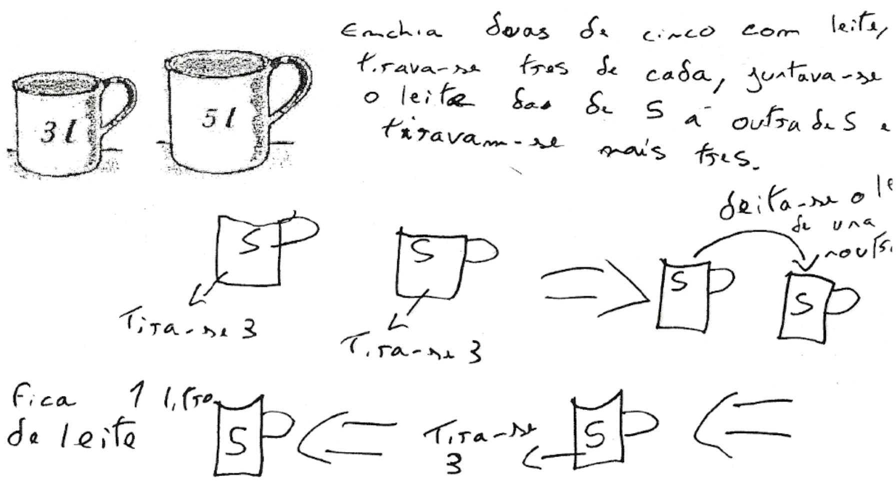


Figura 138 – F.E.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno F.E.1. utiliza como estratégia de resolução uma representação gráfica associada a uma breve justificação que ilumina a existência de duas medidas de cinco litros, que lhe permite solucionar a tarefa proposta.

5.3.2.6.4. Nível B5.4.

Este nível é constituído pelos desempenhos dos alunos que efetuam passagens de uma medida para a outra, recorrendo a marcas, que fazem nas próprias medidas, para obterem um litro de leite.

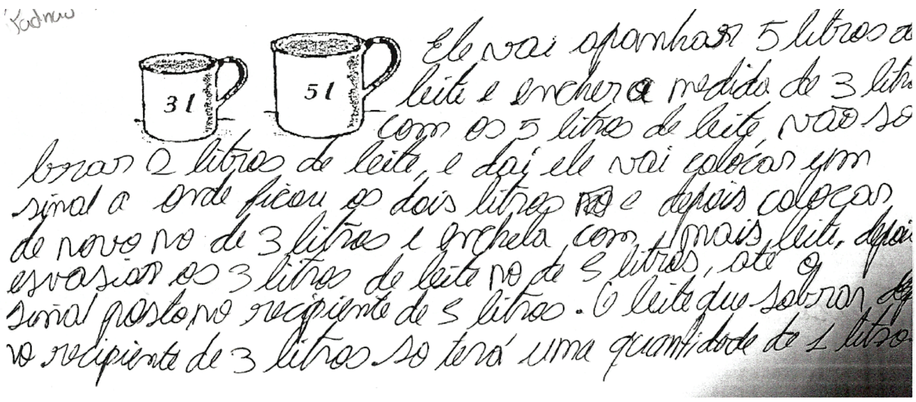


Figura 139 – C.A.1., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Neste exemplo, o aluno C.A.1. enche a medida de cinco litros e despeja-a para a medida de três litros, ficando com dois litros na de cinco. Depois, marca nessa medida a altura atingida pelos dois litros, despejando essa quantidade na medida de três litros. De seguida, volta a encher a medida de três litros e despeja o seu conteúdo na de cinco, tendo em conta a marca que fez anteriormente. Assim, obtém um litro na medida de três litros. Esta estratégia de resolução ilumina alguma criatividade do aluno ao utilizar uma marca que lhe permitisse solucionar a tarefa, bem como alguma persistência em concluir a mesma, encontrando resposta para o mesmo.

5.3.2.6.5. Nível B5.5.

Deste nível são característicos os desempenhos que evidenciam a existência de um recipiente extra, não graduado, que tem como finalidade o armazenamento de leite, durante os diversos procedimentos. No exemplo da Figura 140, o aluno opta por uma composição matemática como estratégia de resolução. Para ele, o senhor Timóteo deve encher duas vezes a medida de três litros e despejar para um recipiente extra. Depois despeja essa quantidade de leite na medida de cinco litros, obtendo um litro no recipiente extra.

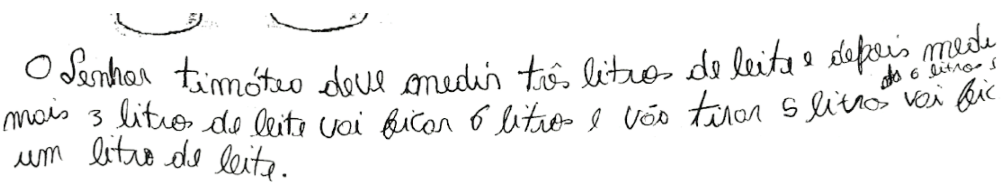


Figura 140 – A.L.2., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

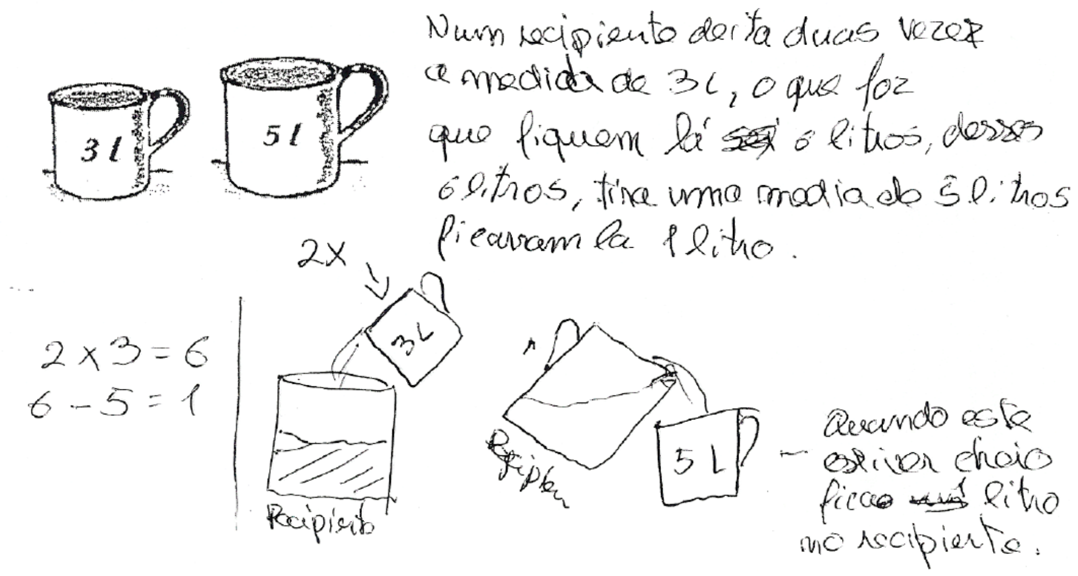


Figura 141 – J.P.3., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno J.P.3. recorre a uma representação gráfica associada a pequenas explicações adicionais como estratégia de resolução para explicitar os processos de raciocínio utilizados. À semelhança do desempenho do aluno do exemplo anterior, J.P.3. também recorre a um recipiente extra com a finalidade de ir armazenando o leite, após o enchimento das canecas de três litros. Assim, enche esse recipiente com seis litros (duas vezes a medida de três litros) e despeja-o na medida de cinco litros, ficando com um litro de leite, que era o pretendido. É de realçar que, sem o recipiente extra, este aluno teria conseguido medir um litro de leite, se começasse logo por despejar a caneca de três litros para a de cinco litros.

5.3.2.7. Padrão B6

O Padrão B6 é composto pelos desempenhos dos alunos que evidenciam persistência na tarefa, ou seja, uma medição rigorosa de um litro, indiciando pouca intuição matemática, pois o número de passos a que recorrem é superior ao necessário (ver Anexo 23). Há 0,2% dos desempenhos dos alunos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21). Na Figura 142 temos presente um exemplo. O aluno C.P.2. recorre a uma composição matemática como estratégia de resolução. Efetua muitos mais passos, se compararmos os desempenhos que pertencem ao Padrão B7, uma vez que inicia o procedimento pela medida de cinco litros.

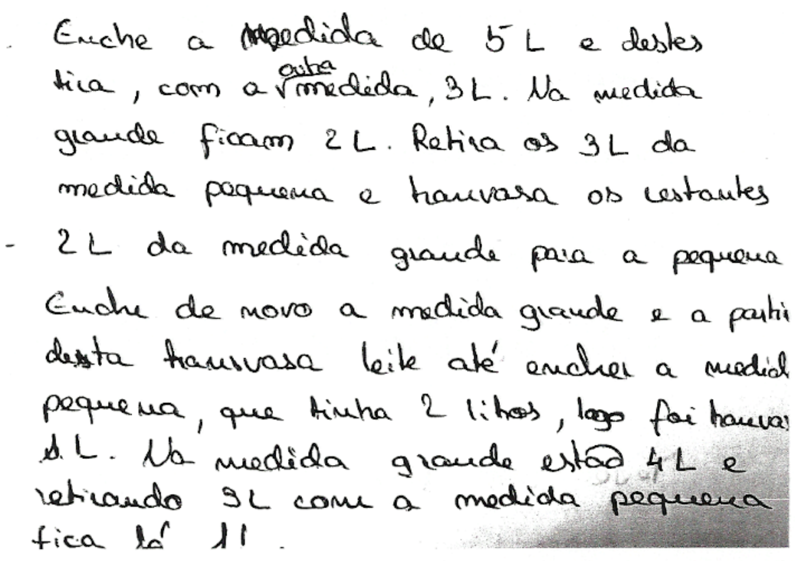

Enche a medida de 5L e destes
tira, com a outra medida, 3L. Na medida
grande ficam 2L. Retira os 3L da
medida pequena e transvasa os restantes
2L da medida grande para a pequena
Enche de novo a medida grande e a parti
desta transvasa leite até encher a medid
pequena, que tinha 2 litros, logo foi transva
1L. Na medida grande estão 4L e
retirando 3L com a medida pequena
fica lá 1l.

Figura 142 – C.P.2., 10.º ano de escolaridade, Viseu

Começando deste maneira, só quem revela persistência na tarefa consegue obter a solução pretendida. Esta estratégia de resolução revela persistência na tarefa, mas não mobiliza a intuição matemática.

5.3.2.8. Padrão B7

O Padrão B7 é o mais complexo, do ponto de vista desenvolvimentista, pelo que os desempenhos que pertencem a este padrão evidenciam a mobilização da intuição matemática. Identificámos quatro níveis de desenvolvimento cognitivo, tendo em conta os desempenhos dos alunos: (1) existem outras tentativas de resolução, mas também contempla as deste padrão; (2) existem movimentos anteriores desnecessários; (3) intuição matemática com explicação pouco clara e rigorosa; e (4) intuição matemática com explicação clara e rigorosa (ver Anexo 23). Há 22,7% dos desempenhos dos alunos que se enquadram neste padrão (ver Anexo 21).

5.3.2.8.1. Nível B7.1.

Este nível é caracterizado pelos desempenhos dos alunos que revelam intuição matemática, mas também contemplam outras tentativas de explicação. Na Figura 143, vemos um exemplo deste nível.

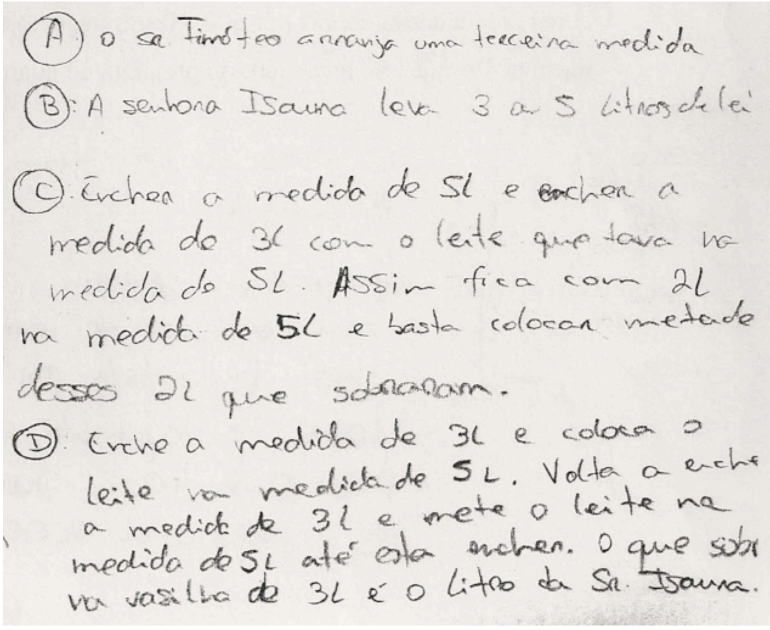


Figura 143 – E.O.2., 12.º ano de escolaridade, Faro

Como podemos observar, o aluno E.O.2. fornece quatro possíveis respostas que permitem ao senhor Timóteo satisfazer o pedido da senhora Isaura. A primeira está associada à Categoria B3.1.β., a segunda à B2.2.β. e a terceira ao Nível B4.8. No entanto, conclui a sua estratégia de resolução mobilizando a intuição matemática – Hipótese D. Nesta situação, consideramos a estratégia de resolução mais complexa – D.

5.3.2.8.2. Nível B7.2.

Este nível é constituído por desempenhos dos alunos que revelam mobilizar a intuição matemática, mas efetuam também movimentos desnecessários, como se pode observar na Figura 144.

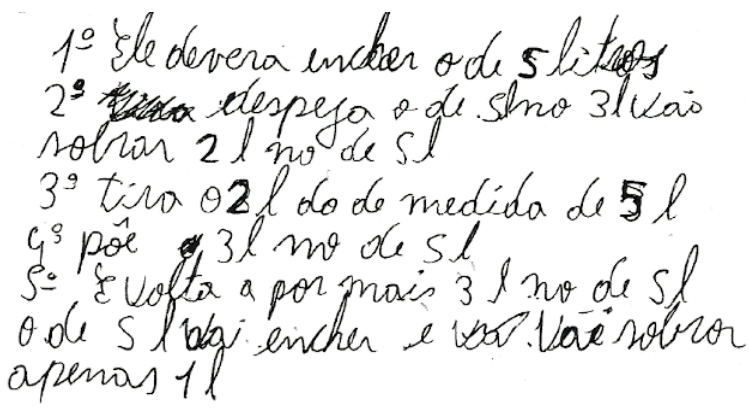


Figura 144 – N.F., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Neste caso, os primeiros três movimentos considerados pelo aluno N.F. são desnecessários, uma vez que são apenas os Movimentos 4.º e 5.º que permitem resolver o problema proposto. Esta forma de atuação evidencia que este aluno só conseguiu intuir quais os processos em jogo quando finalizou o terceiro passo, ou seja, já estava a fazê-lo antes, ainda que sem sucesso. Para além disso, não foi capaz de riscar os três primeiros movimentos e compreender que os dois últimos eram suficientes. Aqui, a intuição matemática só surge com a experimentação, com o recurso ao concreto.

5.3.2.8.3. Nível B7.3.

Deste nível fazem parte os desempenhos dos alunos que revelam mobilizar a intuição matemática, mas a explicação dada é pouco clara e rigorosa, como se pode observar um exemplo na Figura 145.

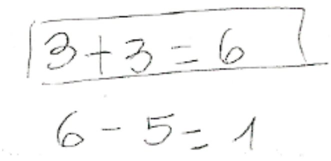

$\boxed{3+3=6}$
$6-5=1$

Figura 145 – L.D., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno L.D. opta por utilizar uma linguagem essencialmente matemática para explicitar os movimentos utilizados. No entanto, o desempenho evidencia pouca clareza e rigor na explicitação da estratégia de resolução utilizada.

5.3.2.8.4. Nível B7.4.

Este nível é composto pelos desempenhos dos alunos que evidenciam a mobilização de intuição matemática e cujas explicações são claras e completas. São exemplos deste nível os que se encontram nas Figuras 146 a 149.

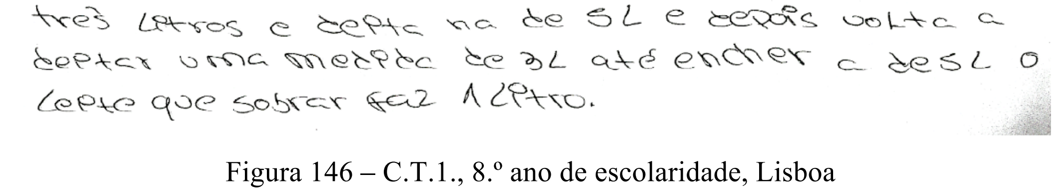

o senhor António enche uma medida de três litros e deita na de 5L e depois volta a deitar uma medida de 3L até encher a de 5L o resto que sobrar faz 1 litro.

Figura 146 – C.T.1., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

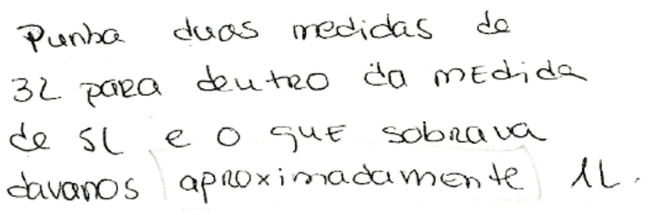


Figura 147 – J.C.3., 12.º ano de escolaridade, Faro

Os alunos C.T.1. e J.C.3. recorrem a uma pequena composição matemática como estratégia de resolução, revelando que conseguiram mobilizar a intuição matemática. Para eles, o senhor Timóteo deve encher a medida de três litros e despejá-la para a medida de cinco litros. Depois, enche novamente a medida de três litros e despeja-a para a de cinco. Como esta já tinha três litros só lá cabem mais três litros. Assim, obtém-se um litro, que sobra, na medida de três litros. Queremos salientar no desempenho do aluno J.C.3., um aspeto que nos parece importante: o rigor que revelou quanto à noção de medida, uma vez que afirma que o que se obtém, no último movimento é, aproximadamente, um litro de leite.

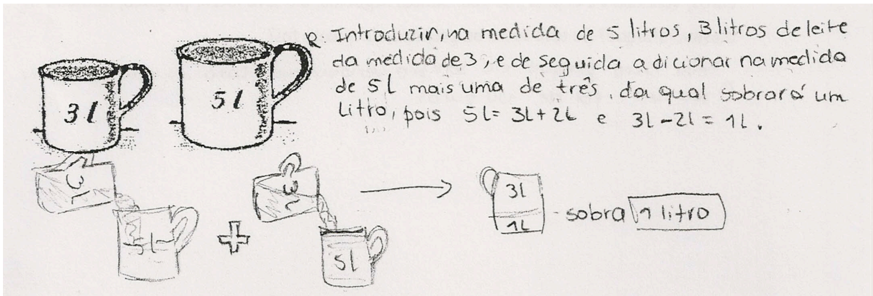


Figura 148 – T.S.2, 10.º ano de escolaridade, Faro

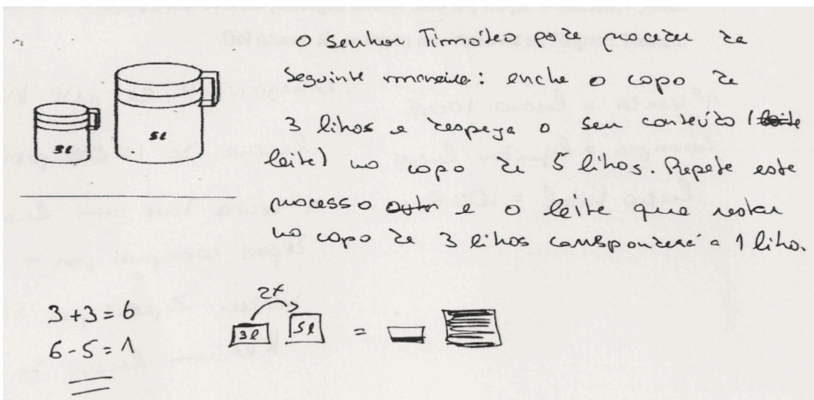


Figura 149 – V.A.2., 10.º ano de escolaridade, Viseu

Ao analisar os desempenhos dos alunos T.S.2 e V.A.2. podemos constatar a utilização de estratégias de resolução semelhantes. Ambos recorrem a representações gráficas associadas a uma pequena composição matemática como estratégia de resolução. Para além disso, também sentem a necessidade de traduzir para linguagem matemática os processos de raciocínio subjacentes a estas respostas. Esta forma de atuação ilumina um aspeto bastante recorrente encontrar nos desempenhos dos alunos e que está relacionado com a construção de uma representação social tradicional sobre a Matemática: uma resposta só é válida se recorrermos a cálculos ou a expressões algébricas, ou seja, se utilizamos estratégias de resolução baseadas num raciocínio analítico.

5.3.3. Tarefa C

A Tarefa C do IACC pretende avaliar se os alunos conseguem mobilizar o raciocínio concreto (RC) ou o raciocínio abstrato (RA) (ver Anexo 11). A necessidade de os alunos desenvolverem o raciocínio lógico é amplamente destacada nos documentos de política educativa, nacionais e internacionais (Abrantes et al., 1999; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007). Como argumentam Abrantes e suas colaboradoras (1999), todos os alunos devem desenvolver "a aptidão [que designamos por capacidade] de raciocinar matematicamente, isto é, para explorar as situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica" (p. 40).

Como afirmou Piaget (1947), a transição do raciocínio concreto para o abstrato geralmente ocorre cerca dos 14/15 anos de idade cronológica, pelo que se espera que determinados desempenhos se enquadrem mais num tipo de raciocínio que no outro. Em Matemática, os currículos prescritos no ensino secundário, pressupõem que os alunos já terão acesso ao raciocínio abstrato, exigindo-lhes graus de formalização elevados (Silva, Fonseca et al., 2001a, 2001b, 2002a, 2002b, 2002c; Silva, Martins et al., 2001).

Da análise dos desempenhos dos alunos nesta tarefa emergiram seis padrões, organizados do menos complexo para o mais complexo, do ponto de vista desenvolvimentista (ver Anexo 24). Assim, o Padrão C0 é o menos complexo, enquanto que o Padrão C5 é o mais complexo. Seguimos, também, a mesma lógica desenvolvimentista dentro de cada padrão. Por exemplo, no Padrão C1, o Nível 1 é o menos desenvolvido, enquanto que o Nível 3 é o mais avançado desse padrão. Como já foi mencionado anteriormente, o Padrão C0 está associado aos desempenhos dos alunos que mencionem que não sabem ou que é impossível resolver a tarefa proposta. Embora nesta tarefa não existisse nenhum resposta característica desse padrão, por uma questão de coerência, do ponto de vista da estrutura dos padrões, consideramos também esse padrão. Por último, queremos salientar que não existe nenhuma diferença, do ponto de vista desenvolvimentista, entre as categorias α e β, no Nível C4.6. Daí que não os designássemos por algarismos precisamente para indicar que a diferença entre eles é nominal e não ordinal. Essa diferença reside nos elementos utilizados para completar as duas figuras pedidas.

Com o intuito de não criar situações de confusão e de multiplicidade de sentidos, em relação aos processos de análise desta tarefa, designaremos as pintas, os triângulos, os quadrados, os retângulos e os círculos como elementos constituintes de cada figura. Assim, cada figura é composta por três desses elementos, ou seja, por um elemento exterior (existiam retângulos, triângulos e círculos), por um central (quadrado) e interior (pintas).

Apenas 0,1% dos alunos não responderam a esta tarefa, o que corresponde à mais baixa taxa de ausência de resposta, se compararmos com as restantes tarefas deste instrumento (ver Anexo 21). Esta evidência era previsível pela própria natureza desta tarefa, isto é, não tinha um enunciado longo, aparentemente não apelava a conhecimentos matemáticos e quase todos os alunos encontravam uma solução para o que era pedido.

5.3.3.1. Padrão C1

O Padrão C1 é constituído pelos desempenhos dos alunos que utilizam elementos que não existem no modelo que se encontra no enunciado do problema, relativamente à quantidade ou posição. Identificámos três níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) existem mais do que três elementos na figura; (2) só existem elementos exteriores; e (3) existe um círculo ou triângulo como elementos centrais (ver Anexo 24). Há 1,4% dos desempenhos dos alunos que se enquadram neste padrão (ver Anexo 21).

5.3.3.1.1. Nível C1.1.

Neste nível são considerados os desempenhos que evidenciam a utilização de mais de três elementos quando completam as duas figuras em falta.

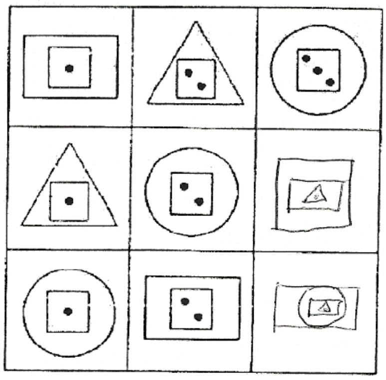


Figura 150 – L.R., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

No exemplo da Figura 150, o aluno L.R. utiliza, na primeira figura, quatro elementos distintos (um quadrado exterior, um retângulo, um triângulo e pintas), enquanto que, na segunda figura, utiliza cinco elementos (retângulo exterior, círculo, um retângulo, um triangulo e pintas). Este desempenho revela um desenvolvimento cognitivo ao qual o professor/investigador deve estar atento, particularmente nas primeiras aulas, uma vez que este aluno não consegue reconhecer que cada figura é composta por apenas três elementos e que o elemento central é sempre um quadrado, ou seja, na sua interpretação do que deverá desenhar não identifica os dois aspetos mais simples, que são os que referimos.

5.3.3.1.2. Nível C1.2.

Este nível é constituído pelos desempenhos dos alunos que apenas representam os elementos exteriores em cada figura, como podemos observar na Figura 151.

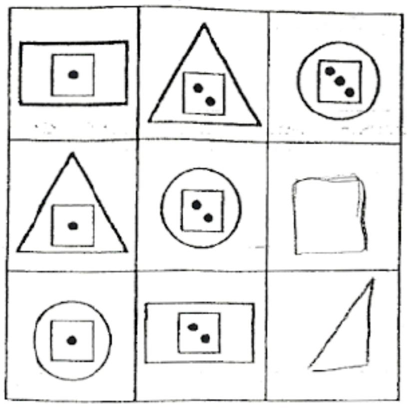


Figura 151 – P.P.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno P.P.2. apenas representa um quadrado e um triângulo como elementos exteriores de cada uma das figuras. Contudo, este tipo de triângulo – retângulo – não aparece em nenhuma das outras figuras do modelo. Assim, este desempenho evidencia, também, uma situação à qual o professor/investigador deve ter atenção em aulas posteriores.

5.3.3.1.3. Nível C1.3.

Este nível é composto pelos desempenhos dos alunos que consideram o círculo ou o triângulo como elemento central da figura.

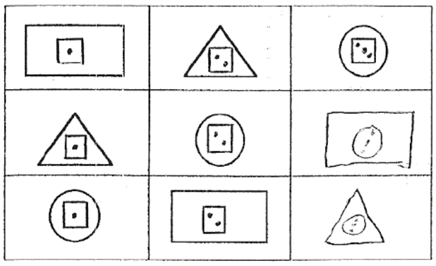


Figura 152 – P.F.2., 9.º ano de escolaridade, Leiria

No exemplo da Figura 152, o aluno P.F.2. reconhece que o elemento exterior de cada figura é composto por um retângulo e um triângulo e que o número de pintas é igual a três. No entanto, este aluno não consegue identificar que existe um elemento que é constante em todas as figuras – o quadrado.

Fazem também parte deste nível os desempenhos dos alunos que consideram o triângulo como elemento central da figura, como podemos observar nas Figuras 153 e 154.

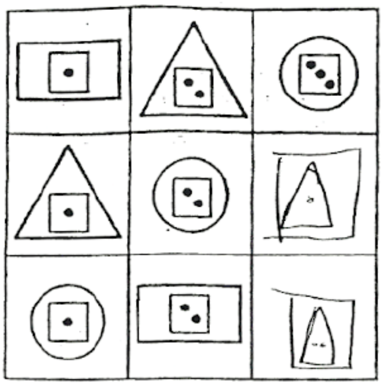


Figura 153 – M.M.2., 8.º ano de escolaridade, Leiria

O desempenho do aluno M.M.2. evidencia uma situação preocupante, do ponto de vista do desenvolvimento cognitivo. Este não consegue identificar a existência de um elemento constante, independentemente da figura que se considera, isto é, o quadrado. Para além disso, refere que os elementos exteriores em cada figura são os mesmos, neste caso, um quadrado, o que revela dificuldades ao nível da observação e compreensão do modelo, uma vez que não existe nenhum quadrado como elemento exterior de uma figura.

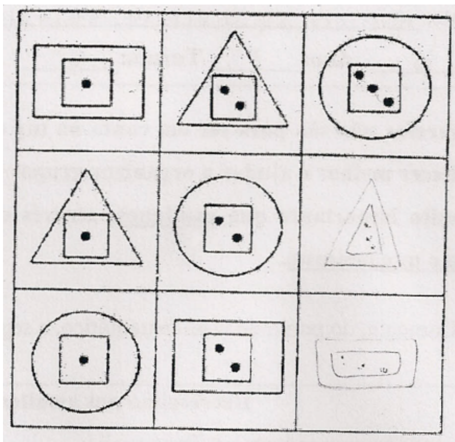


Figura 154 – M.F.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Ao contrário do aluno M.M.2., o aluno M.F.2. identifica que o número de pintas terá que ser igual a três e que os elementos exteriores das figuras são um triângulo e um retângulo, ainda que os represente na ordem inversa à pretendida. Contudo, considera que, numa das figuras, um dos elementos centrais é um triângulo e na outra um retângulo o que, também, pode iluminar dificuldades ao nível do desenvolvimento cognitivo ou uma situação de distração, pelo que o professor/investigador deve ter em atenção as formas de atuação deste aluno, nas aulas posteriores.

5.3.3.2. Padrão C2

O Padrão C2 é composto pelos desempenhos dos alunos que omitem o elemento central da figura – o quadrado. Através da análise dos desempenhos dos alunos, foram identificados cinco níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) uma figura desadequada ao modelo e a outra com dois elementos adequados; (2) cada figura com o elemento interior adequado; (3) elementos exteriores de ordem trocada (4) elementos exteriores adequados ao modelo; e (5) omitem elemento central numa das figuras e elementos exteriores adequados ao modelo (ver Anexo 24). Há 1,9% de desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.3.2.1. Nível C2.1.

Fazem parte deste nível os desempenhos dos alunos que evidenciam uma figura desadequada ao modelo e a outra com dois elementos adequados, como podemos observar um exemplo na Figura 155.

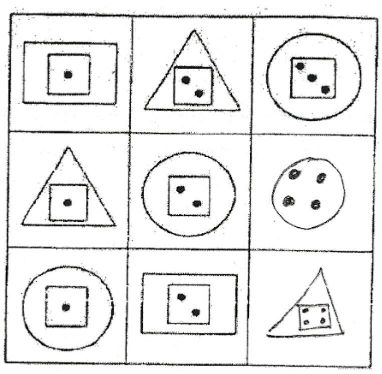


Figura 155 – T.P.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O desempenho do aluno T.P.1. evidencia algumas dificuldades ao nível cognitivo, na medida em que não compreende, em ambas as figuras que desenha, que existe um elemento constante em cada figura (elemento central), bem como que o número de pintas representado (quatro pintas em cada figura) não corresponde ao modelo. Para além disso, não consegue compreender que, em cada coluna, não existe repetição do elemento exterior.

5.3.3.2.2. Nível C2.2.

Os desempenhos que pertencem a este nível omitem o elemento central da figura (o quadrado), bem como os elementos exteriores. No entanto, o elemento interior (pintas) encontra-se adequado ao modelo, no que se refere ao número de pintas e ao declive das mesmas. Na Figura 156 podemos observar um exemplo de desempenho deste nível.

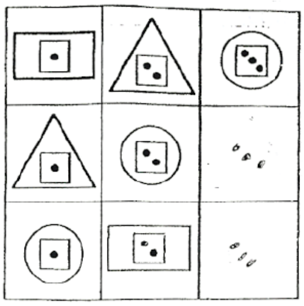


Figura 156 – S.F.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Este tipo de desempenho revela uma situação à qual o professor/investigador deverá estar particularmente atento nas aulas posteriores, uma vez que este aluno não reconhece a existência de um elemento constante nas duas figuras – o quadrado central – nem a existência das figuras exteriores.

5.3.3.2.3. Nível C2.3.

Neste nível são considerados os desempenhos dos alunos que omitem o elemento central (quadrado) e que representam os elementos exteriores com ordem trocada. Identificámos dois níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) elemento interior adequado ao modelo quanto ao número, mas não quanto ao declive; e (2) elemento interior adequado ao modelo, nos dois aspetos mencionados (ver Anexo 24).

5.3.3.2.3.1. Sub-Nível C2.3.1.

Fazem parte deste sub-nível os desempenhos dos alunos que representam os elementos exteriores com ordem trocada e o elemento interior (pintas) adequado ao modelo, quanto ao número, como podemos observar na Figura 157.

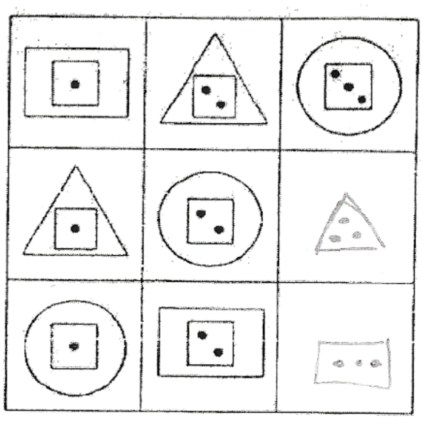


Figura 157 – C.S.5., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

No exemplo da Figura 157, o aluno C.S.5. identifica que o número de pintas tem que ser três, embora não as represente na posição/declive adequados. Para além disso, a ordem dos elementos exteriores (triângulo e retângulo) encontra-se trocada, ainda que se tratem dos elementos adequados. Desta forma, este aluno não consegue reconhecer a existência de um elemento central em cada figura e que este é constante nas sete figuras que constam deste modelo. Nas aulas seguintes, o professor deverá estar atento para tentar compreender se esta resposta se deve a uma distração, a um problema de visão ou a algum comprometimento cognitivo.

5.3.3.2.3.2. Sub-Nível C2.3.2.

Neste sub-nível são considerados os desempenhos dos alunos que omitem o elemento central (quadrado) e que representam um dos elementos da figura de acordo com o modelo. É exemplo deste sub-nível o que se pode encontrar na Figura 158. O aluno R.V.1. apresenta um desempenho em que é o número e o declive das pintas (elemento interior) cumpre os requisitos do modelo, estando a ordem dos elementos exteriores trocada.

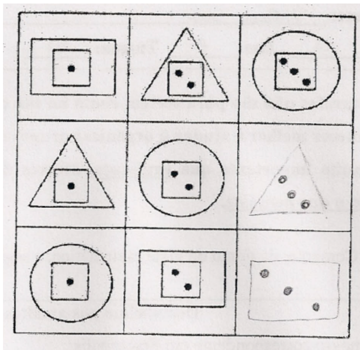


Figura 158 – R.V.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Este desempenho pode evidenciar uma situação de distração ou dificuldade ao nível da perceção, além da troca das figuras exteriores ser típica de desempenhos que recorrem ao raciocínio concreto.

5.3.3.2.4. Nível C2.4.

Este nível é composto pelos desempenhos dos alunos que omitem o elemento central (quadrado), mas representam, de forma adequada ao modelo, os elementos exteriores. Identificámos três níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) elemento interior adequado ao modelo quanto ao número de pintas; (2) elemento interior adequado quanto ao número e declive; e (3) dois elementos adequados ao modelo (exteriores e central ou interior) (ver Anexo 24).

5.3.3.2.4.1. Sub-Nível C2.4.1.

Deste sub-nível fazem parte os desempenhos dos alunos que omitem o elemento central (quadrado), representam de forma adequada ao modelo os elementos exteriores e interiores, quanto ao número de pintas, como se pode observar na Figura 159.

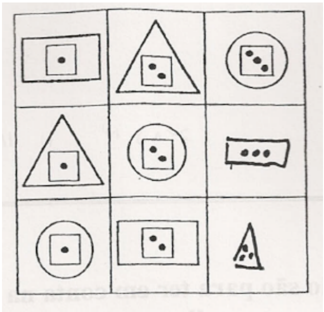


Figura 159 – N.º 14, 10.º ano de escolaridade, Lisboa

O desempenho deste aluno evidencia que este não conseguiu identificar que existia um elemento constante em todas as figuras – o quadrado central. Consegue identificar, de forma adequada, os elementos exteriores (retângulo e triângulo) e o número de pintas (três pintas em cada figura). No entanto, o declive das mesmas encontra-se desadequado ao modelo.

5.3.3.2.4.2. Sub-Nível C2.4.2.

São considerados como desempenhos neste sub-nível os que omitem o elemento central (quadrado) na figura, mas os restantes elementos que estão representados cumprem os requisitos do modelo, como podemos observar um exemplo na Figura 160.

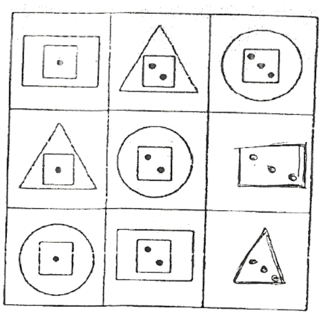


Figura 160 – C.B., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno C.B. identificou dois dos elementos que compõem a figura, isto é, o exterior (retângulo e triângulo) e o número de pintas, incluindo o declive das mesmas. No entanto, não compreendeu que o elemento central (quadrado) é constante e que deveria existir nas duas figuras. Esta forma de atuação pode iluminar situações associadas à distração pontual ou a dificuldades ao nível da visão, a analisar, pelo professor/investigador, em aulas posteriores.

5.3.3.2.4.3. Sub-Nível C2.4.3.

Este sub-nível é composto pelos desempenhos dos alunos que cumprem os requisitos dos modelo em relação a dois elementos: elementos exteriores e central ou elementos exteriores e interior (pintas). Na Figura 161 podemos observar um exemplo de desempenho que pertence a este sub-nível.

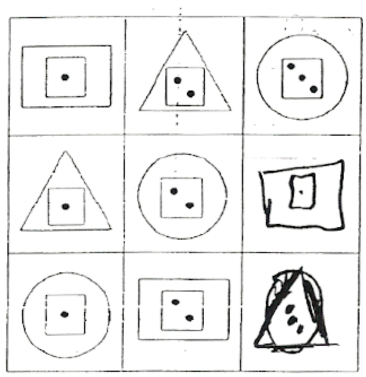


Figura 161 – J.R.3., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O desempenho do aluno J.R.3. evidencia que este conseguiu identificar o elemento exterior em cada figura (retângulo e triângulo). No entanto, na primeira figura não omite o elemento central, mas apenas desenha uma pinta, enquanto que na segunda representa o número de pintas e respetiva inclinação, mas omite o elemento central. Se tivermos também em consideração que este aluno, primeiro, desenhou como elemento exterior um círculo, que depois mudou para um triângulo, identificamos diversos aspetos característicos de alunos que mobilizam o raciocínio concreto: representarem as pintas em espelho como se as figuras da coluna central fossem um eixo de simetria; e só conseguir centrar-se na análise de um elemento de cada vez (elemento exterior, central ou interior).

5.3.3.2.5. Nível C2.5.

Deste nível fazem parte os desempenhos dos alunos que apenas omitem o elemento central numa das figuras e os elementos exteriores estão de acordo com os requisitos do modelo. Foram identificados dois níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) elemento interior adequado ao modelo quanto ao número; e (2) numa das figuras o elemento interior está totalmente adequado ao modelo (ver Anexo 24).

5.3.3.2.5.1. Sub-Nível C2.5.1.

A este sub-nível fazem parte os desempenhos que omitem o elemento central apenas numa das figuras e em que o número de pintas (elemento interior) e os elementos exteriores estão adequados ao modelo.

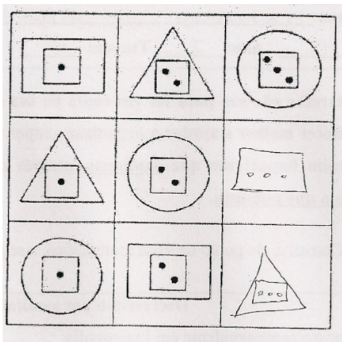


Figura 162 – M.F.3., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Neste caso, o aluno M.F.3. consegue identificar o elemento exterior (retângulo e triângulo) em cada figura, bem como o número de pintas, embora com uma inclinação que não se ajusta ao modelo. Contudo, só numa das figuras é que representa o elemento central (quadrado). Esta evidência ilumina que este aluno poderá ter dificuldades ao nível da visão ou pode esta representação ter sido resultado de uma distração pontual. Assim, o professor/investigador deve ter em atenção as formas de atuação deste aluno, nas aulas posteriores, com o intuito de identificar as possíveis explicações para que esta situação tenha ocorrido.

5.3.3.2.5.2. Sub-Nível C2.5.2.

São característicos deste sub-nível os desempenhos que omitem o elemento central numa das figuras. Para além disso, representam os elementos exteriores e um dos elementos interiores de acordo com os requisitos do modelo. Na Figura 163 podemos observar um exemplo deste sub-nível.

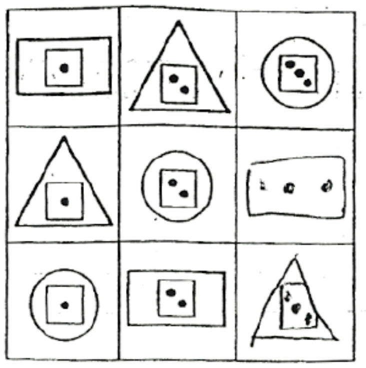


Figura 163 – P.N., 10.º ano de escolaridade, Leiria

O aluno P.N. consegue identificar, de forma adequada ao modelo, o elemento exterior (retângulo e triângulo) em cada figura, bem como o número de pintas. No entanto, só numa das figuras é que o declive se ajusta ao modelo. Para além disso, só numa das figuras é que representa o elemento central (quadrado). Esta evidência ilumina que este aluno poderá ter dificuldades ao nível da visão ou pode esta representação ter sido resultado de uma distração pontual, pelo que o professor/investigador deverá estar atento às formas de atuação deste aluno, em aulas posteriores.

5.3.3.3. Padrão C3

O Padrão C3 é composto pelos desempenhos dos alunos que representaram o elemento interior (pintas) de forma desajustada ou ajustada. Foram identificados cinco níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) número de pintas que não se ajusta ao modelo, com um círculo como elemento exterior; (2) número de pintas que não se ajusta ao modelo, com ordem do elemento exterior trocada; (3) número de pintas adequado com elemento exterior repetido (dois triângulos ou dois retângulos); (4) número de pintas que não se ajusta ao modelo, com elementos central e exterior adequados; (5) uma das figuras segue os requisitos do modelo e a outra não o faz (ver Anexo 24). Há 7,7% dos desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.3.3.1. Nível C3.1.

Este nível é constituído pelos desempenhos dos alunos que representam um número de pintas desajustado ao modelo e com um círculo como elemento exterior da figura. O exemplo da Figura 164 ilumina esse tipo de desempenho.

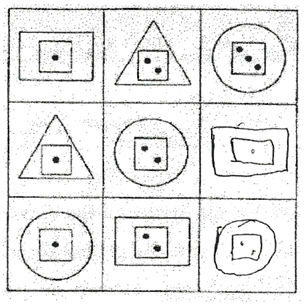


Figura 164 – J.S.4., 9.º ano de escolaridade, Açores

O aluno J.S.4. consegue identificar que existe um elemento que é constante ao longo das várias figuras – o quadrado. No entanto, considera como elemento exterior um retângulo e um círculo, não respeitando a lógica subjacente a cada linha, isto é, a não repetição do elemento exterior. Para além disso, o número de pintas considerado também não segue os requisitos do modelo (um e dois), o que evidencia dificuldades de raciocínio lógico não verbal.

5.3.3.3.2. Nível C3.2.

A este nível estão associados os desempenhos dos alunos que representam um número de pintas desajustado ao modelo e a ordem do elemento exterior trocada, como podemos observar nas Figuras 165 e 166.

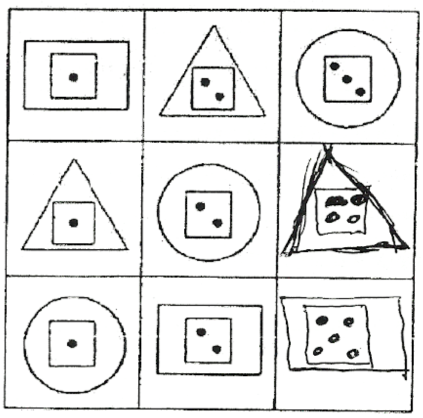


Figura 165 – S.C.1., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

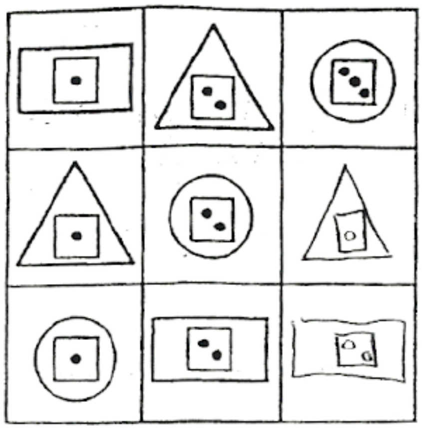


Figura 166 – J.I., 8.º ano de escolaridade, Leiria

Em ambos os exemplos, os alunos identificaram a existência de um elemento central constante em cada figura – o quadrado. Contudo, o número de pintas considerado é diferente do que é esperado – três pintas – uma vez que o aluno S.C.1. representa quatro e cinco pintas e o aluno J.I. uma e duas pintas. Este aspeto evidencia pouca coerência em relação ao modelo, pelo que o professor/investigador deve ter especial atenção às suas formas de atuação e desempenhos, em aulas futuras. Contudo, queremos salientar, na resolução do aluno S.C.1. que este segue uma lógica crescente do número de pintas – 1, 2, 3 (primeira linha) 4 e 5 (terceira coluna) –, ou seja, este alunos consegue identificar uma regularidade, que é o aumento do número de pintas, da esquerda para a direita, mas não conjuga com a informação das colunas (sempre o mesmo número de pintas), o que é característico de alunos disléxicos.

5.3.3.3.3. Nível C3.3.

Este nível é caracterizado pelos desempenhos dos alunos que apresentam um número de pintas que cumpre os requisitos do modelo, mas repetem o elemento exterior, isto é, consideram existir dois triângulos ou dois retângulos. No exemplo da Figura 167, podemos observar um desempenho de um aluno que repete o triângulo como elemento exterior da figura.

O aluno E.B. identifica o elemento central (quadrado) como invariante e o número de pintas, embora a disposição das mesmas não siga o modelo. Contudo, considera que o elemento exterior, em cada figura, é um triângulo, pelo que não reconhece a informação proveniente de cada linha e coluna – não repetição do elemento exterior.

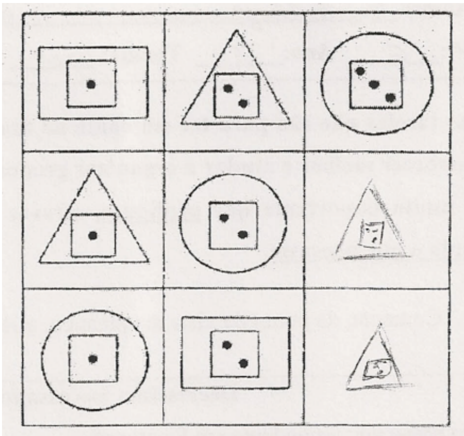


Figura 167 – E.B., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Assim, é importante que o professor/investigador perceba, em futuras aulas, se se trata de uma situação de distração ou algo mais complexo e relacionado com aspetos do desenvolvimento cognitivo.

5.3.3.3.4. Nível C3.4.

Neste nível são considerados os desempenhos dos alunos que têm o número de pintas desajustado ao modelo, mas os elementos central e exterior cumprem os requisitos sugeridos pelas figuras originais. São exemplos de desempenhos que pertencem a este nível os que podemos observar nas Figuras 168 e 169.

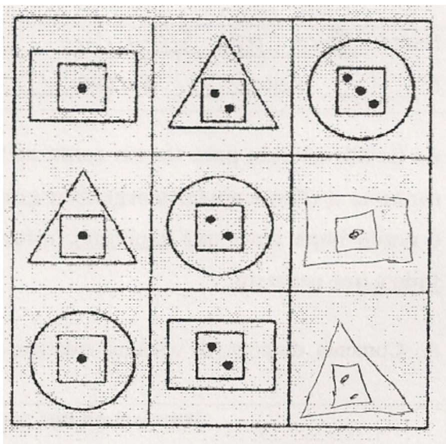


Figura 168 – A.J.1., 11.º ano de escolaridade, Faro

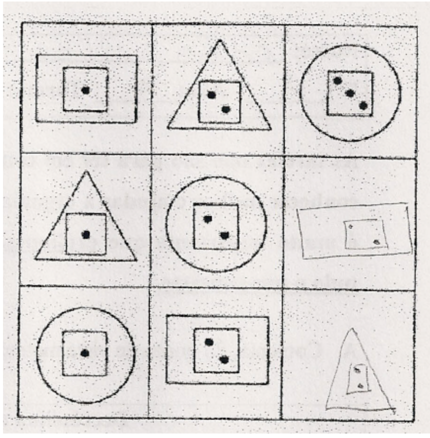


Figura 169 – C.T.2., 9.º ano de escolaridade, Açores

Nestes dois exemplos, os desempenhos dos alunos são semelhantes, uma vez que conseguiram identificar que existe um elemento central que é sempre constante (quadrado). Respeitaram a informação que é fornecida pelas linhas, ou seja, a não repetição do elemento exterior. Contudo, não conseguiram cruzar a informação respeitante ao número de pintas – aumenta em uma unidade à medida que se avança da esquerda para a direita, nas colunas. O aluno A.J.1. considera como número de pintas um e dois, enquanto que o aluno C.T.2. representa duas pintas em cada figura.

5.3.3.3.5. Nível C3.5.

Os desempenhos característicos deste nível representam uma das figuras de acordo com os requisitos do modelo e a outra composta por um número de pintas desajustado. Na Figura 170 podemos observar um exemplo de um destes desempenhos.

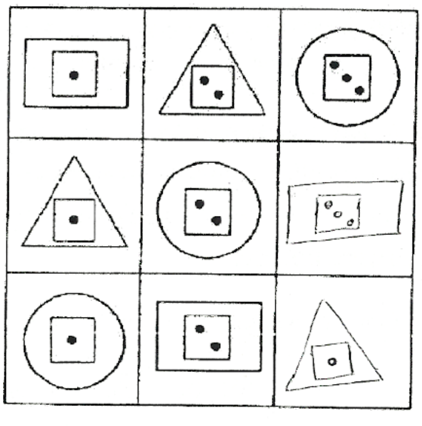


Figura 170 – E.M.4., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Nesta situação, o aluno E.M.4. consegue perceber dois tipos de informação em jogo nesta figura complexa: (1) o elemento central (quadrado) é invariante; e (2) segundo cada linha, não existe repetição do elemento exterior. No entanto, não consegue compreender, em ambas as figuras que desenha, a informação respeitante ao número de pintas, pelo que considera existirem três na primeira figura e uma na segunda. Isto pode indicar que se encontra na transição do raciocínio concreto para o abstrato.

5.3.3.4. Padrão C4

O Padrão C4 é composto pelos desempenhos dos alunos que conseguem mobilizar o raciocínio concreto, isto é, os seus desempenhos evidenciam que não conseguem controlar, simultaneamente, as informações provenientes das linhas e colunas, que fazem parte desta figura complexa. Identificámos quatro níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) pintas (1,1) e ordem do elemento exterior trocada e com um círculo; (2) pintas (1,1) e ordem do elemento exterior trocada; (3) adequado ao modelo, exceto um círculo como elemento exterior; (4) número de pintas adequado (mas que podem não ter declive), com ordem do elemento exterior trocada; (5) número de pintas adequado (com inclinação trocada) e com ordem do elemento exterior trocada e (6) adequado ao modelo, exceto pintas (1,1) ou ordem do elemento exterior (ver Anexo 24). Há 16,3% dos desempenhos que fazem parte deste padrão (ver Anexo 21).

5.3.3.4.1. Nível C4.1.

Neste Nível são considerados os desempenhos que referem que o número de pintas em cada figura é de um e que existe um círculo como elemento exterior, cujo exemplo se encontra na Figura 171.

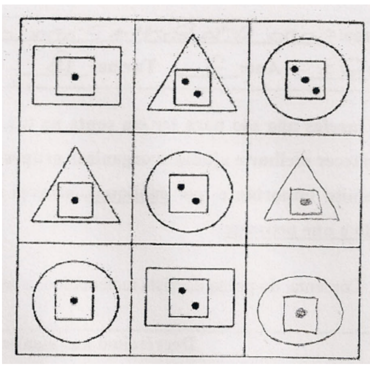


Figura 171 – S.A.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno S.A.2. consegue identificar que existe um elemento invariante: o quadrado. No entanto, efetua uma resolução em espelho, isto é, reflete as pintas e os restantes elementos segundo um eixo de simetria vertical, representado pela coluna central. Este desempenho é típico de alunos que mobilizam o raciocínio concreto.

5.3.3.4.2. Nível C4.2.

Os desempenhos associados a este nível consideram como um o número de pintas em cada figura e a ordem do elemento exterior está trocada, como podemos observar no exemplo da Figura 172.

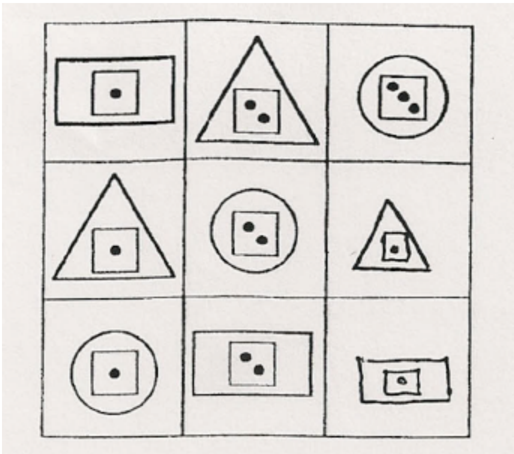


Figura 172 – N.º 21, 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O desempenho deste aluno ilumina que efetua uma resolução em espelho quanto ao número de pintas, segundo um eixo de simetria vertical (coluna central) e quanto à informação relativa ao elemento exterior é feita em coluna. Contudo, não consegue conjugar a informação proveniente de cada linha com a das colunas, isto é, não existe repetição do elemento exterior.

5.3.3.4.3. Nível C4.3.

Este nível tem desempenhos que representam os elementos de acordo com os requisitos do modelo à exceção da existência de um círculo como elemento exterior (ver Figura 173).

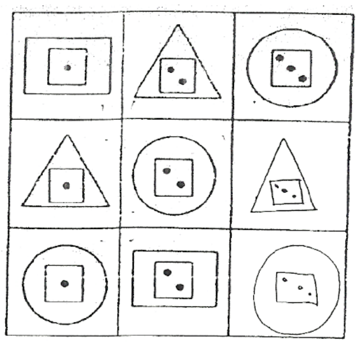


Figura 173 – A.G., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

Neste caso, o aluno A.G. consegue interpretar a informação relativa ao número de pintas (três) que correspondem à terceira coluna, bem como o respetivo declive das mesmas. Contudo, realiza uma resolução em espelho, tendo em conta os elementos exteriores de cada figura, segundo um eixo de simetria vertical (coluna central).

5.3.3.4.4. Nível C4.4.

Deste nível fazem parte os desempenhos que consideram o número de pintas adequado ao modelo (três em cada figura), mas com a ordem trocada dos elementos exteriores, isto é, o retângulo e o triângulo, na primeira e na segunda figura, respetivamente. São exemplos de desempenhos deste nível os que podemos observar nas Figuras 174 e 175.

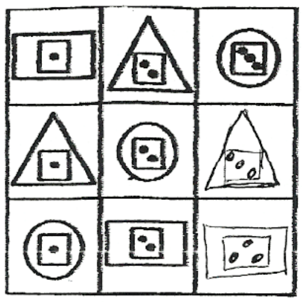


Figura 174 – S.A.1., 11.º ano de escolaridade, Viseu

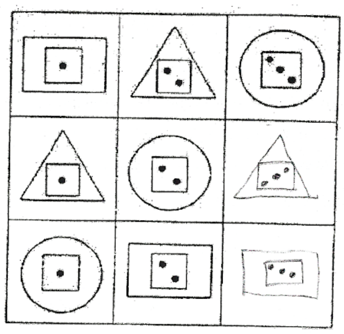


Figura 175 – S.C.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Nestes dois exemplos, os alunos conseguem interpretar a informação relativa ao número de pintas em falta em cada figura (três pintas). Contudo, não respeitam a orientação das mesmas. Este tipo de informação ilumina que os alunos podem apresentar dificuldades ao nível da visão, características associadas à dislexia ou serem esquerdinos.

5.3.3.4.5. Nível C4.5.

Este nível inclui desempenhos que apresentam o número de pintas adequado, embora a inclinação das mesmas seja contrária à do modelo, bem como a ordem do elemento exterior trocada, como podemos observar na Figura 176.

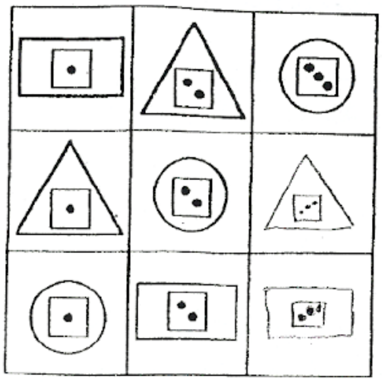


Figura 176 – S.F.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O desempenho do aluno S.F.2. revela que conseguiu interpretar a informação relativa ao número de pintas das figuras em falta. No entanto, a orientação das mesmas é contrária à do modelo, o que pode iluminar situações em que o aluno seja esquerdino ou disléxico. Desta forma, é de extrema importância a observação que o professor/investigador realiza durante a primeira semana de aulas e nas seguintes, para poder confrontar a informação recolhida com a análise deste desempenho.

5.3.3.4.6. Nível C4.6.

Fazem parte deste nível os desempenhos dos alunos que representam, de forma adequada ao modelo, todos os elementos à exceção de: (α) pintas (1,1); ou (β) ordem do elemento exterior. São exemplos deste nível os que se podem observar nas Figuras 177 e 178.

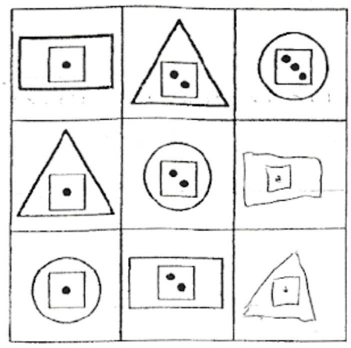


Figura 177 – R.F., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O desempenho do aluno R.F. ilumina que este efetua uma resolução em espelho, relativamente ao número de pintas, segundo um eixo de simetria vertical (coluna central). Para além disso, consegue interpretar a informação proveniente de cada linha – a não repetição do elemento exterior em cada figura.

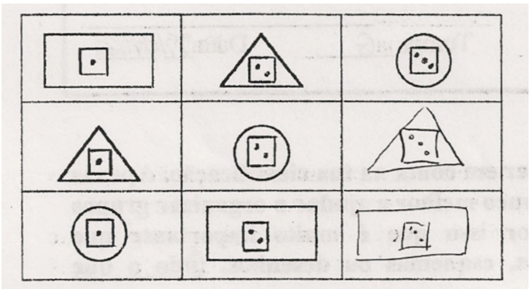


Figura 178 – N.º 11, 12.º ano de escolaridade, Leiria

O desempenho do aluno da Figura 178 evidencia que este coloca as três pintas que correspondem à terceira coluna e percebe a existência de um elemento constante em todas as figuras – elemento central (quadrado). No entanto, não consegue respeitar a sequência dos elementos em cada linha, isto é, não deveria existir repetição do elemento exterior. Estes dois exemplos evidenciam que estes alunos não conseguem cruzar as informações provenientes de cada linha e coluna desta figura complexa.

5.3.3.5. Padrão C5

O Padrão C5 é considerado o mais complexo do ponto de vista desenvolvimentista, pois são considerados os desempenhos que revelam a mobilização do raciocínio abstrato, isto é, quando os alunos conseguem completar, de forma adequada ao modelo, as duas figuras. Identificámos dois níveis de desenvolvimento cognitivo, de acordo com os desempenhos evidenciados: (1) distribuição espacial das pintas desajustadas; e (2) todos os elementos adequados ao modelo (ver Anexo 24). Há 72,6% de desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.3.5.1. Nível C5.1

Este nível é constituído pelos desempenhos dos alunos que representam, de acordo com o modelo, os elementos pedidos à exceção da distribuição espacial das pintas. Foram identificados dois níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) em ambas as figuras; e (2) só numa das figuras (ver Anexo 24).

5.3.3.5.1.1. Sub-Nível C5.1.1.

Neste sub-nível são considerados os desempenhos dos alunos que identificam os elementos a representar em cada figura, mas a orientação das pintas está desajustada em ambas. São exemplos deste sub-nível os que podemos observar nas Figuras 179 e 180.

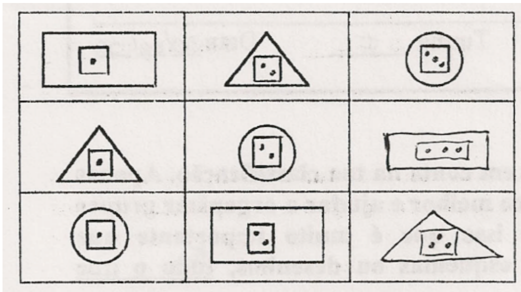


Figura 179 – N.º 10, 12.º ano de escolaridade, Leiria

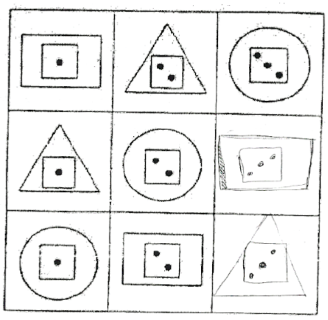


Figura 180 – J.T.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Nos dois exemplos anteriores, os alunos conseguem interpretar as informações provenientes das linhas e das colunas, ou seja, colocam o número de pintas adequado em cada uma (três), o quadrado como elemento central e o retângulo e o triângulo como elementos exteriores. No caso da Figura 179, o aluno coloca as pintas numa posição arbitrária (segundo uma linha reta ou formando um triângulo), enquanto que o aluno J.T.2. coloca-as numa orientação contrária à do modelo. Isto pode indiciar dificuldades de visão ou uma dislexia ou ser esquerdino, pelo que o professor/investigador deve ter em atenção as formas de atuação destes alunos, em aulas posteriores.

5.3.3.5.1.2. Sub-Nível C5.1.2.

Deste sub-nível fazem parte os desempenhos que identificam os elementos que devem completar o modelo proposto pela figura complexa, mas cuja orientação das pintas está desajustada, apenas numa das figuras. As Figuras 181 e 182 constituem exemplos deste sub-nível.

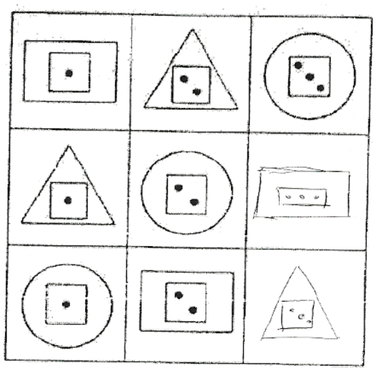


Figura 181 – A.T.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

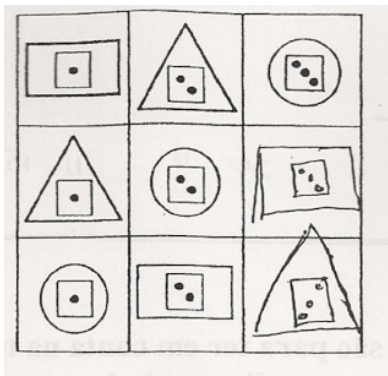


Figura 182 – N.º 15, 10.º ano de escolaridade, Lisboa

Ambos os desempenhos destes alunos evidenciam que conseguiram cruzar as informações provenientes de cada linha e de cada coluna. No entanto, a orientação das pintas não foi respeitada nas duas figuras. O aluno A.T.2. apenas colocou na segunda figura a orientação das pintas de forma adequada, enquanto que, na Figura 182, esta situação ocorre na primeira figura. Mais uma vez, este tipo de desempenho pode evidenciar dificuldades ao nível da visão, que os alunos são esquerdinos ou disléxicos. Contudo, também se pode dever a uma simples distração ou a uma representação espacial menos conseguida. Assim, são extremamente importantes as formas de atuação do professor/investigador nas aulas seguintes para poder avaliar as diversas explicações relacionadas com estes desempenhos.

5.3.3.5.2. Nível C5.2.

Neste nível os desempenhos dos alunos evidenciam que conseguiram completar, de forma adequada ao modelo, as duas figuras, como podemos observar nas Figuras 183 a 185.

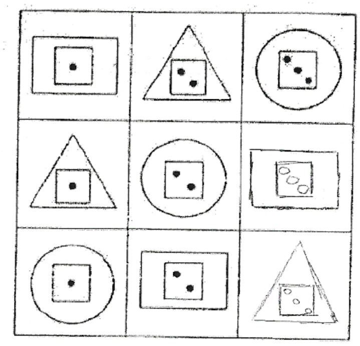


Figura 183 – S.T.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

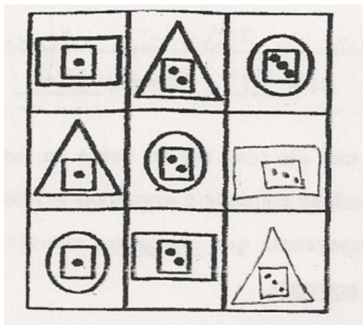


Figura 184 – S.O., 11.º ano de escolaridade, Viseu

Nos dois exemplos anteriores, os alunos conseguiram controlar, simultaneamente, as informações respeitantes às linhas e colunas desta figura complexa, pelo que mobilizam o raciocínio abstrato.

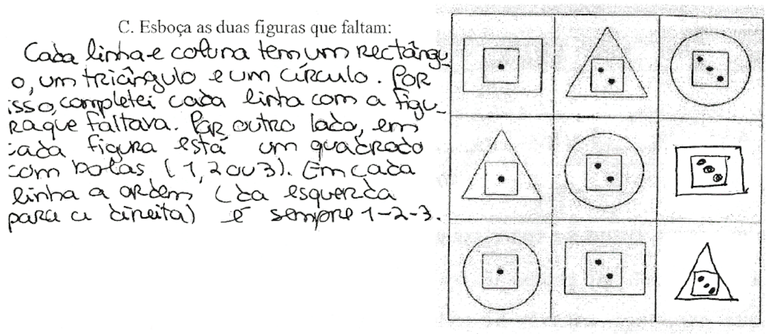


Figura 185 – M.A.2., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Por último, queremos salientar que, alguns alunos, apesar de não ser frequente como nas outras tarefas do IACC justificar as estratégias de resolução e os processos de raciocínio associados, recordaram e respeitaram a instrução inicial, que pedia para explicitarem os seus raciocínios. Assim, após terem completado as duas figuras, elaboraram uma pequena composição matemática em que explicitam os processos de raciocínio subjacentes à resposta dada, como podemos observar um exemplo na Figura 185.

5.3.4. Tarefa D

A Tarefa D do IACC pretende avaliar se os alunos recorrem, preferencialmente, a raciocínios analíticos ou geométricos, quando resolvem este problema (ver Anexo 11). Esta diferenciação entre raciocínio analítico e geométrico está relacionada com o que é evocado nos currículos prescritos e nas provas de avaliação externa, vulgo exames nacionais, do ensino básico e secundário, em relação à Matemática escolar. Por exemplo, pode-se ler, no teste intermédio de Matemática A, de 12.º ano de escolaridade, realizado em fevereiro de 2013: "Resolva os itens 3.1. e 3.2. recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora" (MEC/GAVE, 2013, p. 5) ou "Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos" (MEC/GAVE, 2012, p. 7) na prova de avaliação externa de Matemática A, de 12.º ano de escolaridade, realizada em junho de 2012. Assim, face a este contexto, a equipa central do projeto IC decidiu distinguir, em problemas de Matemática escolar, o raciocínio analítico, que recorre frequentemente a uma estratégia de resolução aritmética ou a uma estratégia de resolução algébrica, do raciocínio geométrico, que recorre geralmente a estratégias de representação gráfica e que evidenciam manipulação ou decomposição da figura que consta do enunciado.

Da análise dos desempenhos dos alunos nesta tarefa emergiram oito padrões, organizados do menos complexo para o mais complexo, do ponto de vista desenvolvimentista (ver Anexo 25). Assim, o Padrão D0 é o menos complexo, enquanto que o Padrão D7 é o mais complexo. Seguimos, também, a mesma lógica desenvolvimentista dentro de cada padrão. Por exemplo, no Padrão D1, o Nível 1 é o menos desenvolvido, enquanto que o Nível 4 é o mais avançado. Queremos, ainda, referir que nos Padrões D2, D6 e D7 não existe nenhuma diferença, do ponto de vista desenvolvimentista, entre as categorias α e γ. A diferença reside no tipo de raciocínio adotado, isto é, se os alunos revelam preferência por um raciocínio analítico (α) ou geométrico (γ). Contudo, dentro de cada um destes tipos de raciocínio, existem níveis de desenvolvimento tendo em conta os desempenhos dos alunos. Do total de alunos, 79,1% responderam a esta tarefa e 20,9 % deixaram-na em branco (ver Anexo 21).

5.3.4.1. Padrão D0

O Padrão D0 é constituído pelos desempenhos dos alunos que afirmam que não sabem resolver o problema, como podemos observar na Figuras 186.

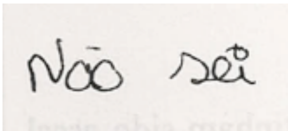


Figura 186 – N.º 15, 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Há 0,2% de desempenhos dos alunos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.4.2. Padrão D1

Este padrão é caracterizado pelos desempenhos dos alunos que evidenciam a utilização de estratégias de resolução desadequadas, atendendo ao que era pretendido no enunciado da tarefa. Estas podem recorrer, preferencialmente, a um raciocínio analítico ou geométrico. Foram identificados quatro níveis de desenvolvimento, em relação aos desempenhos destes alunos (ver Anexo 25). Há 19,4% de alunos cujos desempenhos se enquadram neste padrão (ver Anexo 21).

5.3.4.2.1. Nível D1.1.

Neste nível são considerados os desempenhos em que os alunos só referem um valor para a área da parte pintada da figura dada, sem justificação, ou que apenas utilizam as duas medidas dadas no enunciado, manipulando-as através das quatro operações básicas da aritmética. Assim, este nível é composto por cinco sub-níveis de desenvolvimento cognitivo, seguindo um lógica crescente em relação ao grau de complexidade: (1) referem um valor sem justificação; (2) somam as duas medidas do mosaico da figura (15 + 10 = 25); (3) subtraem o valor dessas duas medidas (15 – 10 = 5); (4) dividem os valores das duas medidas do mosaico (15 : 10 = 1,5); e (5) somam as duas medidas do mosaico, multiplicando esse valor por três (15 + 10) x 3 = 75 (ver Anexo 25). Em qualquer um dos sub-níveis considerados, os alunos recorrem, preferencialmente, a um raciocínio analítico.

5.3.4.2.1.1. Sub-Nível D1.1.1.

Os desempenhos considerados neste sub-nível remetem-nos para situações em que os alunos só referem, desajustadamente, o valor da área da parte pintada, não apresentando nenhuma justificação. Neste caso, existem duas situações. Na primeira, os alunos respondem que a área pedida é igual a uma das medidas do mosaico (Figura 187). Na segunda situação, referem um valor diferente dos que existem no enunciado do problema (Figura 188).

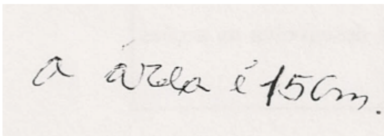


Figura 187 – J.C.4., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Na Figura 187 podemos observar que este aluno considera que a área da parte pintada do mosaico corresponde a uma das dimensões do mesmo, ou seja, ao comprimento. Esta evidência ilumina uma situação preocupante, na medida em que estão subjacentes dificuldades ao nível da compreensão dos invariantes funcionais do conceito de área.

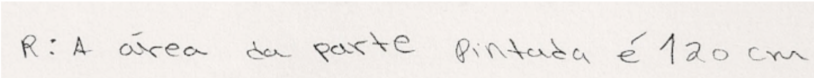


Figura 188 – A.F.3., 10.º ano de escolaridade, Faro

No exemplo da Figura 188, o desempenho do aluno revela um valor desajustado face ao que é pedido no enunciado da tarefa, pois o aluno A.F.3. afirma que a área é de 120 cm (unidade de comprimento), o que, à semelhança do que aconteceu na Figura 189, revela dificuldades ao nível da compreensão dos invariantes funcionais do conceito de área.

5.3.4.2.1.2. Sub-Nível D1.1.2.

Neste sub-nível, os alunos optam por somar as duas medidas do mosaico dadas no enunciado do problema (15 e 10), evidenciando a utilização de estratégias de resolução aritmética.

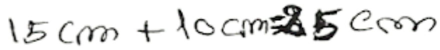


Figura 189 – P.M.3., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

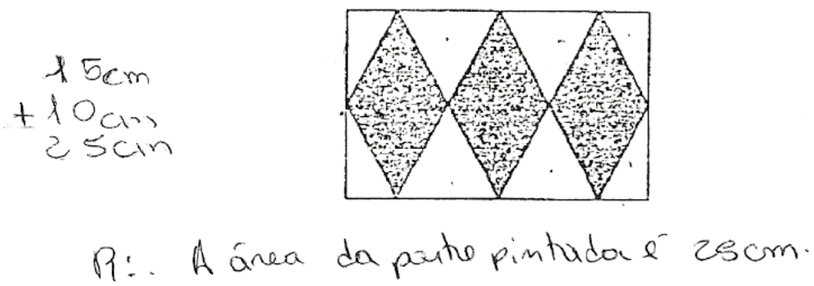


Figura 190 – M.V.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Como podemos observar nas figuras anteriores, para este alunos, a área da parte pintada da figura corresponde à soma das medidas do mosaico da figura (15 + 10 = 25). Para além disso, associam a unidade de área a uma unidade de comprimento, iluminando desta forma que a apropriação de conhecimentos instrumentais relativos à noção de área não foi mobilizada na resolução desta tarefa.

5.3.4.2.1.3. Sub-Nível D1.1.3.

Deste sub-nível fazem parte os desempenhos que consideram que a área da parte pintada da figura é igual à diferença entre as medidas do mosaico que se encontram no enunciado (15 – 10 = 5). Nas Figuras 191 a 193, os desempenhos do alunos revelam uma estratégia de resolução aritmética que recorreram para dar resposta ao problema.

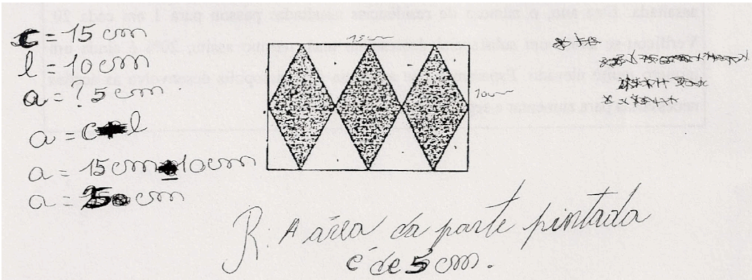


Figura 191 – J.T.3., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Queremos salientar que o desempenho do aluno J.T.3. evidencia que este começou por somar as duas medidas do mosaico que constam do enunciado do problema. No entanto, este aluno opta por mudar a estratégia de resolução, uma vez que efetua a diferença entre as duas medidas do mosaico (15 cm e 10 cm).

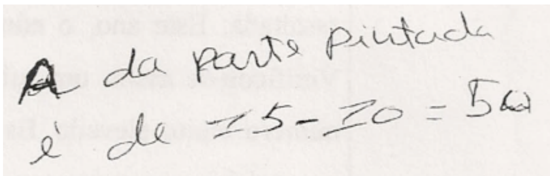


Figura 192 – A.J.2., 11.º ano de escolaridade, Faro

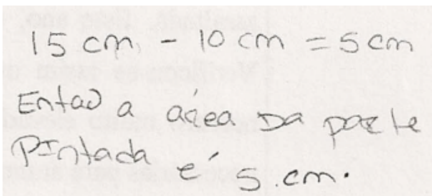


Figura 193 – M.C.3., 9.º ano de escolaridade, Açores

Nas situações descritas nestas três figuras, os alunos revelam dificuldades na apropriação de conhecimentos instrumentais (Skemp, 1978) associados às fórmulas de área de figuras geométricas como, por exemplo, a do retângulo. Para além disso, a estratégia de resolução do aluno A.J.2. é preocupante, na medida em que, num 11.º ano de escolaridade, respostas desta natureza não se coadunam com o que é exigido no currículo prescrito.

5.3.4.2.1.4. Sub-Nível D1.1.4.

Este sub-nível é caracterizado pelos desempenhos dos alunos que afirmam que a área da parte pintada do mosaico é de 1,5, cujos exemplos se encontram nas Figuras 194 e 195.

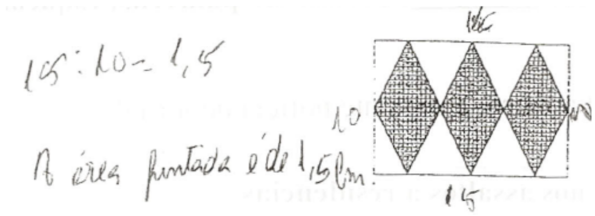


Figura 194 – N.º 24, 10.º ano de escolaridade, Lisboa

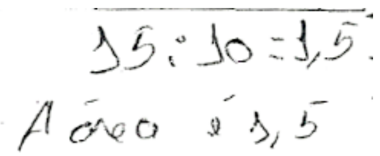


Figura 195 – P.C., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Nestes dois exemplos, os alunos recorrem a uma estratégia de resolução aritmética, efetuando a divisão entre as duas medidas do mosaico dadas no enunciado do problema (15 e 10). Mais uma vez, estes exemplos iluminam dificuldades ao nível da interpretação do enunciado deste problema, bem como na apropriação de conhecimentos relativos ao conceito de área.

5.3.4.2.1.5. Sub-Nível D1.1.5.

A este sub-nível estão associados os desempenhos dos alunos que afirmam que a área da parte pintada da figura é de 75 cm^2, mas que utilizam uma estratégia de resolução desajustada à tarefa. No exemplo que podemos observar na Figura 196, o aluno A.R. consegue identificar que a área da parte pintada do mosaico corresponde às três figuras a preto. No entanto, ao determinar a área de cada uma delas, fá-lo de forma desajustada, na medida em que soma as medidas do próprio mosaico (15 e 10).

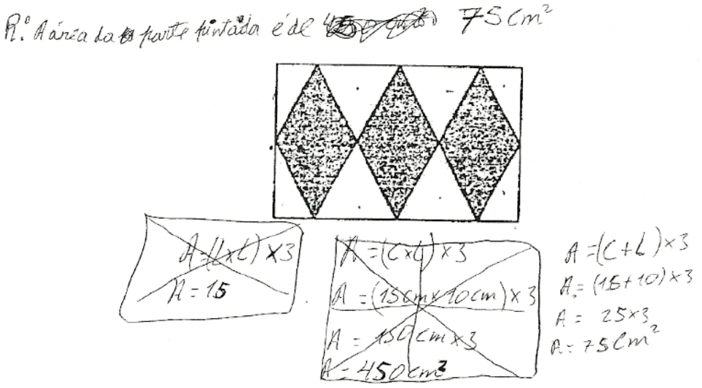


Figura 196 – A.R., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Este aluno revela estar num nível de desenvolvimento cognitivo superior, em relação aos desempenhos que constituem o Padrão D1.1.2, uma vez que consegue identificar o que é pretendido com este problema – calcular a área dos três losangos – e recorre à unidade de área. Este desempenho ilumina que a escolha dos valores para as dimensões do retângulo (15 cm e 10 cm) não foi a mais adequada, na medida em que, adotando esta estratégia de resolução que se encontra desajustada, não deveria obter como solução, ou seja, 75 cm^2, que é a resposta pretendida. Assim, uma possível escolha dos valores para um novo enunciado desta tarefa, poderia ser 10 cm por 21 cm, como discutimos no Ponto 5.1.2..

Por último, queremos salientar a importância de ter acesso aos processos de raciocínio subjacentes às estratégias de resolução adotadas. Neste caso, a resposta dada por este aluno estava correta, mas o processo pelo qual optou é desajustado. Assim, esta evidência permite-nos recorrer a formas de atuação e reação mais adequadas para cada aluno.

5.3.4.2.2. Nível D1.2.

Neste nível são considerados os desempenhos dos alunos que recorrem, nas estratégias de resolução utilizadas, a valores que não existem no enunciado do problema. Para o aluno A.N. (ver Figura 197), o cálculo da área da parte pintada do mosaico é efetuado com base numa tentativa de utilização da fórmula da área de um círculo. No entanto, através da análise desta estratégia de resolução, não se tem acesso à origem dos valores 156 e 106.

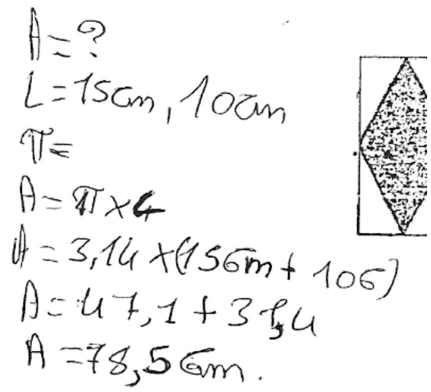


Figura 197 – A.N., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

No exemplo da Figura 198 temos presente a utilização de uma proporção no cálculo da área da parte pintada do mosaico, representada pela incógnita *x*. Neste caso, não está explicitada a origem do valor de um dos extremos da proporção (8). Para além disso, esta estratégia de resolução algébrica ilumina a necessidade de alguns alunos recorrerem a conceitos matemáticos, ainda que desajustados ao enunciado do problema, como forma de mostrarem ao professor/investigador que apropriaram determinados conhecimentos matemáticos.

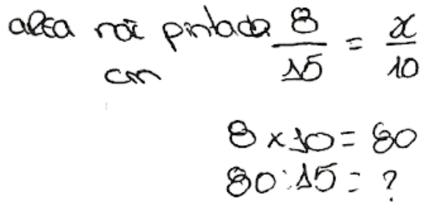


Figura 198 – F.V.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

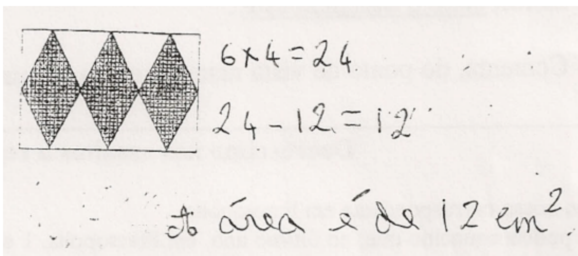


Figura 199 – N.º 27, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Na Figura 199 podemos observar uma estratégia de resolução com recurso, preferencialmente, a um raciocínio geométrico. Este aluno parece perceber que a área da parte pintada é metade da área do mosaico. No entanto, não se consegue ter acesso aos processos de raciocínio associados à escolha dos valores 6 e 4, uma vez que não constam do enunciado deste problema.

5.3.4.2.3. Nível D1.3.

Consideramos como desempenhos deste nível os que recorrem, preferencialmente, a um raciocínio geométrico, mas desconexo. Na Figura 200, o aluno E.S.1. afirma que a área da parte pintada do mosaico é duas vezes a área do triângulo. Esta resposta ilumina que este aluno consegue perceber que existe uma diferença entre a área do mosaico e a da parte pintada. No entanto, essa relação é expressa de forma desajustada.

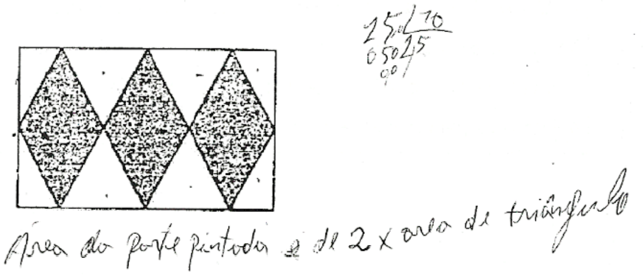


Figura 200 – E.S.1., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Na Figura 201 podemos observar uma estratégia de resolução associada a um raciocínio geométrico. Este aluno já consegue perceber, à semelhança do que aconteceu no exemplo anterior, que a área do mosaico e da parte pintada não são a mesma. No entanto, considera esta última como sendo mais de metade da área do mosaico. Ao determinar o valor da mesma, este aluno opta por somar as duas medidas dadas no enunciado (10 + 15 = 25), o que revela ser, também, desajustado.

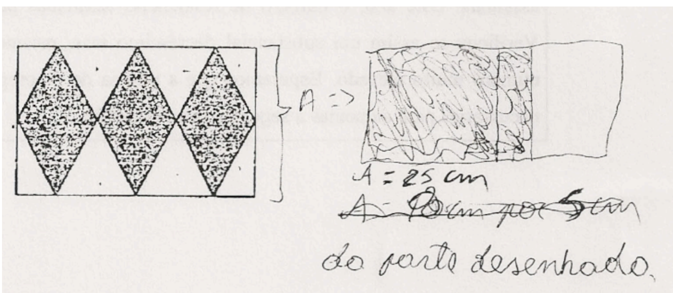


Figura 201 – J.C.5., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Por último, queremos salientar que a utilização de estratégias de resolução com recurso, preferencialmente, a raciocínios geométricos é mais frequente em culturas como a cabo-verdiana, cuja língua materna é ideográfica (Meyer et al., in press).

5.3.4.2.4. Nível D1.4.

Este nível é composto pelos desempenhos dos alunos que confundem os conceitos de perímetro e de área de figuras geométricas. Na Figura 202, o aluno P.B.1. associa à área da parte pintada o perímetro do mosaico, iluminando que estes dois conceitos ainda não conseguem ser mobilizados por este aluno.

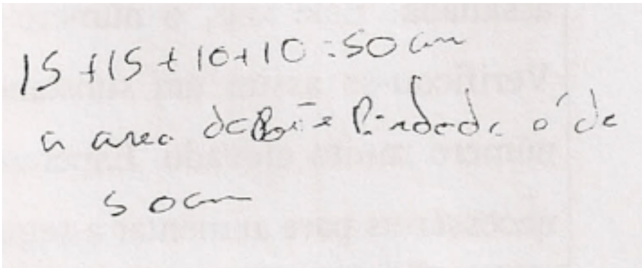


Figura 202 – P.B.1., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

No exemplo da Figura 203, o aluno F.O.2. considera como área da parte pintada do mosaico uma fórmula que resulta da junção da referente ao perímetro de um retângulo com a da área dessa mesma figura geométrica. No entanto, este aluno já apropriou os conhecimentos relativos às unidades de medida que, neste exemplo, correspondem às unidades de área e não de comprimento, como podemos observar em exemplos dos padrões anteriores.

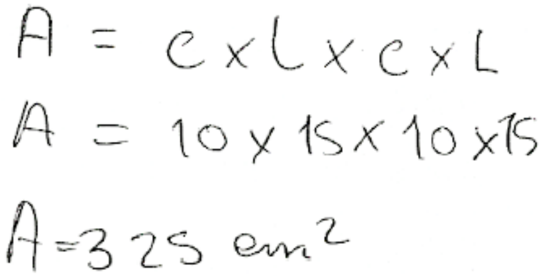


Figura 203 – F.O.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

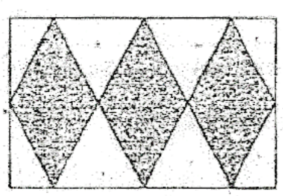
A = 15 + 10 + 15 + 10 = 50 cm

A.p = 50 : 3

A : 50 : 3

Figura 204 – C.R.2., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno C.R.2. também confunde os conceitos de área e de perímetro de uma figura geométrica. Afirma que a área da parte pintada da figura é a terça parte da área total do mosaico, provavelmente por existirem três figuras sombreadas (losangos).



15 + 15 + 10 + 10 = 50 cm

A área da parte pintada é 25 cm.

Figura 205 – S.C.3., 9.º ano de escolaridade, Açores

À semelhança do que aconteceu nos exemplos anteriores, o aluno S.C.3. considera que a área do mosaico é igual ao perímetro do mesmo. Contudo, percebe que a área da parte pintada é metade da do mosaico (25). Esta evidência ilumina que o que este aluno revela são dificuldades ao nível da apropriação de conhecimentos matemáticos associados a conhecimentos instrumentais (Skemp, 1978) e não relativos à compreensão do enunciado e de figuras, uma vez que estas lhe permitiram recorrer a processos de raciocínio adequados para perceber que a área da parte pintada é metade da área do mosaico.

5.3.4.3. Padrão D2

O Padrão D2 é constituído pelos desempenhos dos alunos que utilizam, de forma desajustada, a informação contida no enunciado do problema. Identificámos estratégias de resolução associadas, preferencialmente, a um raciocínio analítico (α) e outras associadas, preferencialmente, a um raciocínio geométrico (γ). Neste último, identificámos, ainda, três níveis de desenvolvimento, em relação aos desempenhos evidenciados pelos alunos: (1) só calculam a área do retângulo; (2) dividem por três a área do retângulo; e (3) referem que área da parte pintada é metade da do mosaico, mas o valor encontrado é desajustado face ao enunciado do problema (ver Anexo 25). Há 16,6% dos desempenhos dos alunos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.4.3.1. Preferência por um raciocínio analítico (α)

Exemplos de estratégias de resolução associadas a um raciocínio preferencialmente analítico são as que podemos encontrar nas Figuras 206 a 208.

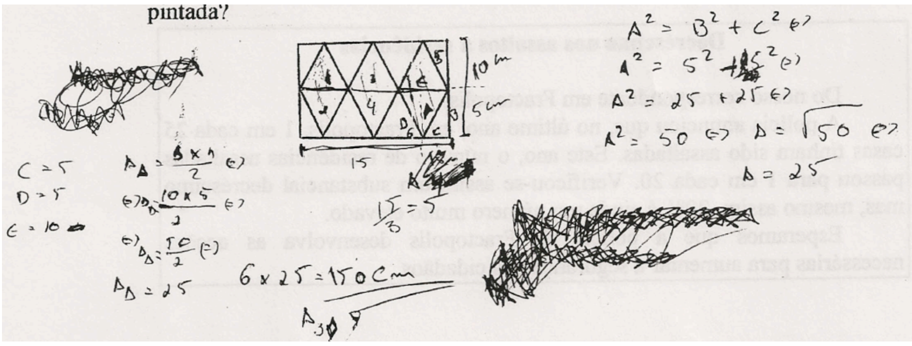


Figura 206 – N.º 3, 12.º ano de escolaridade, Leiria

Na Figura 206, a estratégia de resolução indica-nos que este aluno associa a área pintada do mosaico à soma das áreas dos seis triângulos que a compõem. No entanto, utiliza as informações contidas no enunciado do problema de forma desajustada, na medida em que considera que a base de cada triângulo mede 5 cm e a altura 10 cm, obtendo como área da parte pintada 150 cm^2.

O aluno J.F.3 também utiliza de forma desajusta as informações fornecidas no enunciado. A estratégia de resolução deste aluno é muito semelhante à anterior, uma vez que associa a área da parte pintada à soma da área dos três losangos (que são compostos por seis triângulos). Para ele, a medida da altura de cada triângulo é de 5 cm e a da base de 15 cm. Assim, ao obter a área de cada triângulo, determina a área de cada losango (75 cm^2) e, posteriormente, a área da parte pintada do mosaico (225 cm^2). Esta estratégia de resolução não evidencia a existência de sentido crítico face ao resultado obtido, uma vez que determina a área do mosaico (que corresponde à área do retângulo

– 150 cm^2), mas quando determina a área total (A_t = 375 cm^2) não consegue perceber que o resultado obtido não tem sentido face ao enunciado daquele problema.

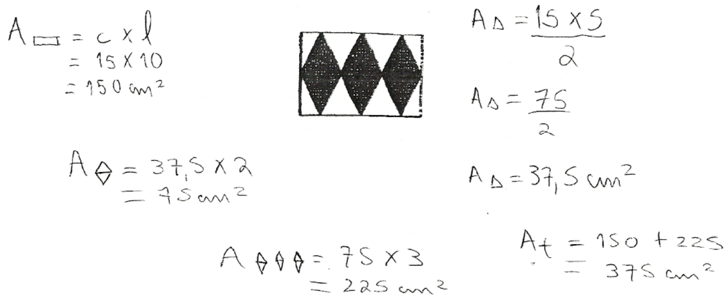


Figura 207 – J.F.3, 10.º ano de escolaridade, Viseu

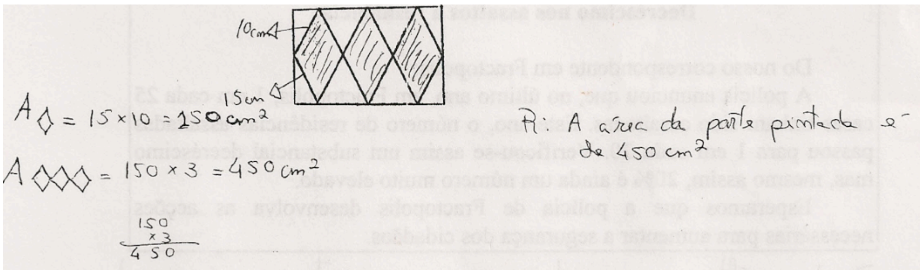


Figura 208 – N.º 4, 12.º ano de escolaridade, Leiria

O exemplo da Figura 208 ilumina uma estratégia de resolução que associa a área da parte pintada à soma da área dos três losangos. No entanto, este aluno utiliza, de forma desajustada, as medidas dadas no enunciado quando procede ao cálculo da área do losango, que associa à fórmula da área de um retângulo. Mais uma vez, estamos perante a uma situação em que as dificuldades estão ao nível da apropriação de conhecimentos matemáticos e não ao nível dos processos de raciocínio adotados.

5.3.4.3.2. Preferência por um raciocínio geométrico (γ)

Da análise dos desempenhos dos alunos emergiram três níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) só calculam a área do retângulo; (2) dividem por três a área do retângulo; e (3) afirmam que é metade, mas dão um valor desajustado face ao enunciado do problema.

5.3.4.3.2.1. Nível D2.1.

Este nível é composto por desempenhos que consideram que a área da parte pintada corresponde à área do retângulo, isto é, à do mosaico. Nas Figura 209 podemos observar um exemplo deste nível. O aluno C.F.2. determina a área do retângulo, associando-a, implicitamente, à da parte pintada do mosaico.

Figura 209 – C.F.2., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Esta resposta ilumina algumas dificuldades na interpretação do problema, quer ao nível do que está escrito no enunciado quer ao nível do que é observado na figura.

5.3.4.3.2.2. Nível D2.2.

Neste nível são considerados os desempenhos que afirmam que a área da parte pintada do mosaico corresponde à terça parte dessa área. São exemplos deste nível os que se encontram nas Figuras 210 e 211.

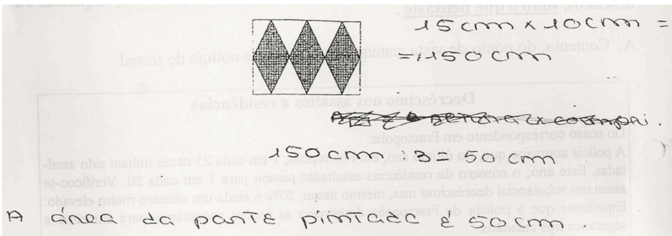


Figura 210 – N.º 9, 9.º ano de escolaridade, Lisboa

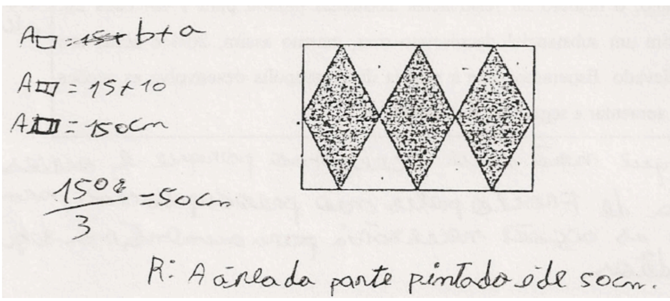


Figura 211 – A.L.3., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Em ambas as estratégias de resolução, os alunos determinam a área do retângulo, que corresponde ao mosaico. No entanto, como existem três figuras pintadas, estes alunos associam que, nesse caso, a área da parte pintada deve ser a terça parte do mosaico. Por último, queríamos salientar que, mais uma vez, observamos a utilização desajustada das unidades de medida.

5.3.4.3.2.3. Nível D2.3.

Os desempenhos que são considerados neste nível afirmam que a área da parte pintada é igual a metade da área do mosaico, mas o valor obtido está desajustado, face ao enunciado do problema. Na Figura 212 podemos observar um exemplo deste nível.

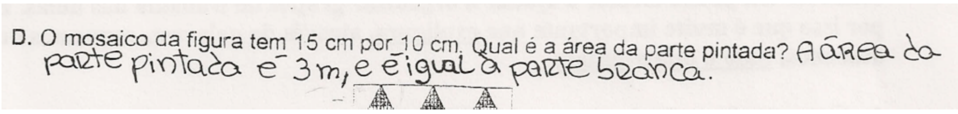


Figura 212 – N.º 7, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Este aluno refere que a área da parte pintada é igual à parte branca do mosaico, mas o valor que refere não tem sentido face ao enunciado do problema. A esta estratégia de resolução estão subjacentes processos de raciocínio geométricos, mas não se consegue inferir quais os que levaram este aluno a afirmar que a área é de 3m, nem porque considera ser metade.

5.3.4.4. Padrão D3

Este padrão é caracterizado pelos desempenhos dos alunos que descrevem o procedimento que deverá ser feito para obter a área da parte pintada, mas não o concretizam. São exemplos deste padrão os que podemos observar nas Figuras 213 a 215. Há 1,6% dos alunos cujos desempenhos fazem parte deste padrão (ver Anexo 21).

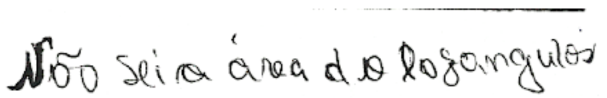


Figura 213 – S.V.2., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Na Figura 213, o aluno S.V.2. afirma não saber resolver o problema, por não saber a fórmula que lhe permite determinar a área do losango. Este aluno reconhece o que é pedido no enunciado do problema, isto é, determinar a área da parte pintada. Para este aluno, subentende-se que isso equivale a calcular a área dos três losangos. Mas, por não saber a fórmula da área dessa figura geométrica, não consegue resolvê-lo. Esta evidência ilumina que o aluno S.V.2. não consegue mobilizar as competências associadas ao conhecimento instrumental, ou seja, a fórmula relativa à área do losango

(Skemp, 1978), nem procura outras formas de contornar a questão, revelando pouca persistência na tarefa.

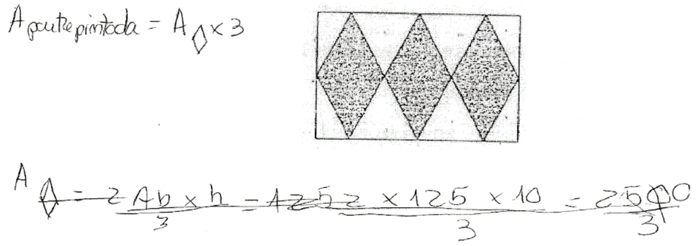


Figura 214 – P.G., 10.º ano de escolaridade, Lisboa

No exemplo da Figura 214, o aluno recorre, preferencialmente, a um raciocínio analítico, uma vez que refere que a área da parte pintada da figura é igual à soma dos três losangos. Mas, como revela dificuldades ao nível da determinação da área de cada losango (ver parte riscada), prefere só indicar o procedimento.

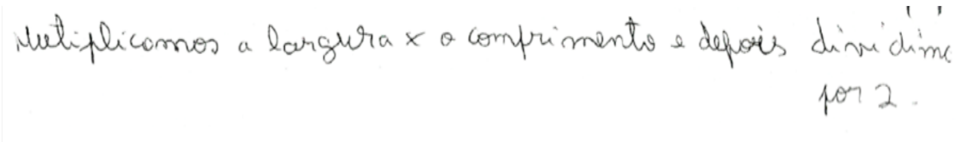


Figura 215 – V.M.1., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno V.M.1. recorre, preferencialmente, a um raciocínio geométrico para explicar o procedimento a adotar para determinar a área da parte pintada do mosaico, pois refere que esta é metade da do mosaico, pelo que, neste caso, tem que se calcular a área do retângulo (largura x comprimento) e depois calcular a metade desse valor.

5.3.4.5. Padrão D4

O Padrão D4 é composto por desempenhos desajustados face ao enunciado do problema, devido à utilização incorreta de fórmulas matemáticas (ver Anexo 25). Há 2,1% dos desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21). Na Figura 216, o aluno F.M.1. identifica que o que é pedido no problema corresponde a determinar a área dos três losangos. Para tal, recorre, preferencialmente, a um raciocínio analítico. No entanto, a fórmula que utiliza para determinar a área de cada losango está incorreta, o que ilumina dificuldades ao nível da apropriação de conhecimentos instrumentais (Skemp, 1978), relativos às áreas de figuras geométricas.

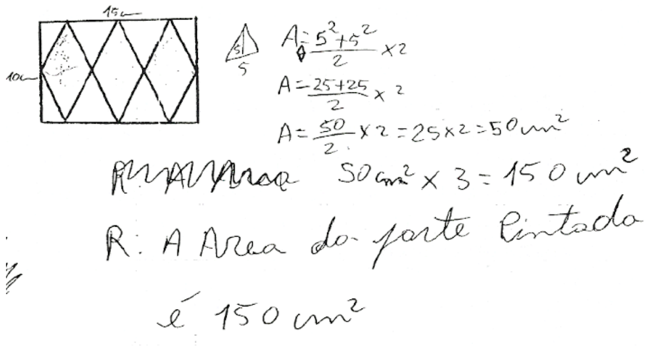


Figura 216 – F.M.1., 9.º ano de escolaridade, Leiria

No exemplo da Figura 217, o aluno M.C.4. utiliza, de forma desajustada, o teorema de Pitágoras como ferramenta que lhe permitiria determinar a área de cada triângulo. No entanto, consegue identificar, de forma quase completa, que a área da parte pintada corresponde a doze triângulos retângulos.

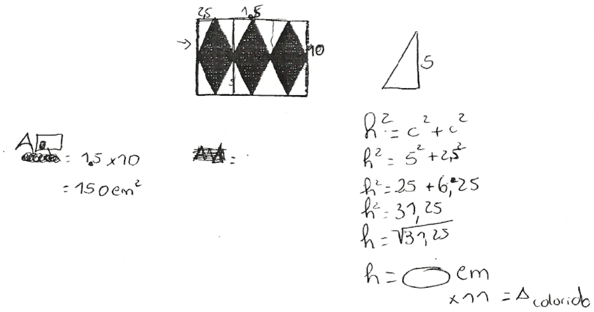


Figura 217 – M.C.4., 10.º ano de escolaridade, Viseu

Figura 218 – S.V.3., 10.º ano de escolaridade, Faro

O aluno S.V.3. recorre a um estratégia de resolução algébrica para determinar o que era pedido no enunciado do problema. Identifica que a área da parte pintada corresponde à área dos seis triângulos. Contudo, recorre a uma fórmula da área dessa figura geométrica incorreta, o que contribuiu para uma resposta desajustada.

5.3.4.6. Padrão D5

Neste padrão são considerados os desempenhos que iluminam processos de raciocínio adequados ao enunciado do problema, mas com um passo ou etapa que não controlam, pelo que a resposta obtida está desajustada. Identificámos dois níveis de desenvolvimento. O primeiro nível está relacionado com respostas desajustadas ou estratégias de resolução incompletas e o segundo com a divisão por dois das medidas do retângulo antes de calcularem a sua área (ver Anexo 25). Há 2,0% de alunos cujos desempenhos se enquadram neste padrão (ver Anexo 21).

5.3.4.6.1. Nível D5.1.

Este nível é constituído por desempenhos dos alunos que evidenciam processos de raciocínio adequados, mas que não controlam um passo do mesmo, contribuindo para uma resposta desajustada ao problema. No exemplo da Figura 219, o aluno refere que a área da parte que não está pintada é igual à área da parte pintada. Mas, quando dá a resposta, refere que a parte pintada tem de dimensão 15 cm por 10 cm, o que corresponde ao mosaico e não ao que este aluno afirmou na produção escrita.

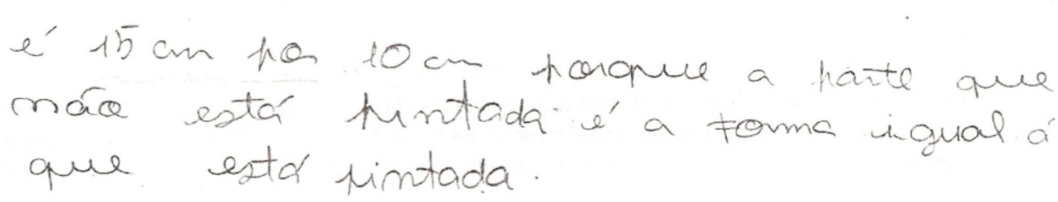


Figura 219 – N.º 5, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

No exemplo da Figura 220, o aluno reconhece a existência da relação metade/dobro, mas em vez de calcular a metade da área do retângulo (mosaico), dá como resposta o dobro dessa área (300).

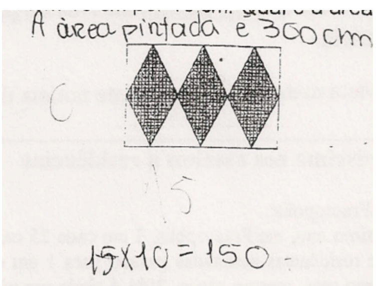


Figura 220 – N.º 10, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O desempenho que se pode observar na Figura 221 evidencia que este aluno associa a área da parte pintada à soma da área dos três losangos. Assim, determina a área de cada triângulo que compõe o losango (12,5) e determina a área dessa figura geométrica (12,5 x 2 = 25). No entanto, em vez de multiplicar esse valor por três (pois existem três losangos), multiplica-o por dois, o que faz supor que este não considerou o losango a que inicialmente recorreu para determinar a área dessa figura geométrica. Esta forma de atuação é característica de alunos que ainda só mobilizam o raciocínio concreto.

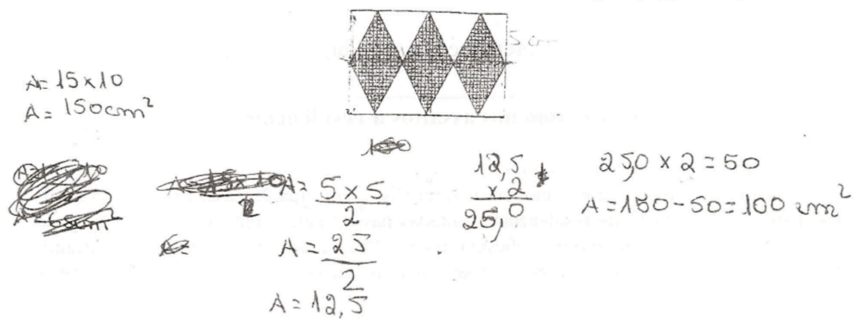


Figura 221 – N.º 3, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

A estratégia de resolução utilizada pelo aluno C.G.1. é semelhante à anterior, na medida em que associa a área da parte pintada à soma da área dos três losangos.

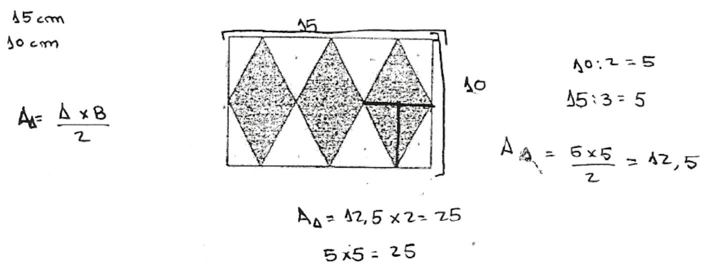


Figura 222 – C.G.1., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Contudo, este aluno não completa a estratégia de resolução, pois apenas determinou a área de um dos losangos.

5.3.4.6.2. Nível D5.2.

Este nível é composto por desempenhos que consideram que a área da parte pintada do mosaico é metade da do mosaico, mas dividem por dois ambas as medidas (comprimento e largura). São exemplos deste nível os que se encontram nas Figuras 223 a 225.

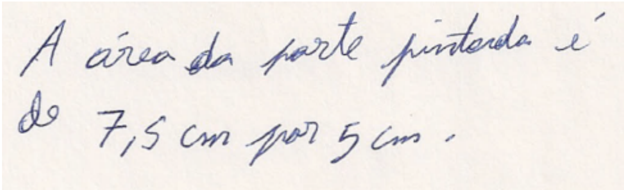


Figura 223 – M.D., 9.º ano de escolaridade, Leiria

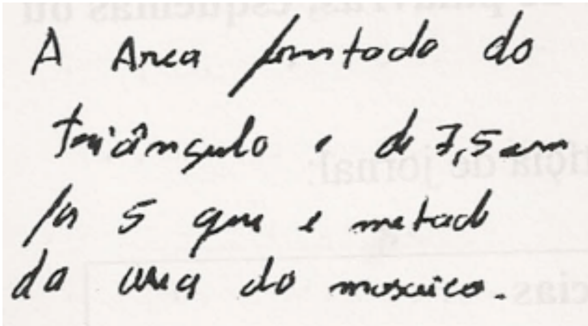


Figura 224 – N.º 13, 10.º ano de escolaridade, Lisboa

Nos dois primeiros exemplos, os alunos escrevem as dimensões correspondentes à parte pintada da figura (7,5 cm e 5 cm), estando implícitos os processos de raciocínio subjacentes a estas respostas e não sendo apresentado o cálculo da área, propriamente dito.

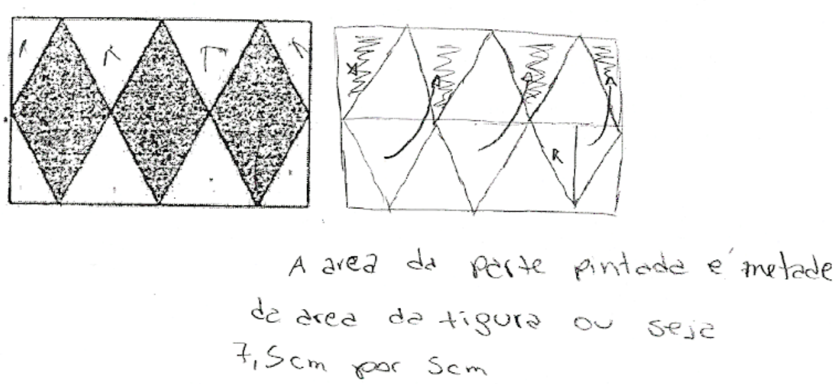


Figura 225 – C.R.3., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

A estratégia de resolução do aluno C.R.3. ilumina, explicitamente, os processos de raciocínio subjacentes à mesma. Através de uma representação gráfica, vai associando cada parte a negro à respetiva parte em branco, preenchendo metade do mosaico. No entanto, à semelhança do que aconteceu anteriormente, este aluno divide por dois ambas as dimensões. Esta forma de atuação evidencia a preferência deste aluno por raciocínios geométricos, mas também que mobiliza o raciocínio concreto.

5.3.4.7. Padrão D6

Neste padrão são considerados os desempenhos dos alunos que evidenciam estratégias de resolução adequadas ao problema proposto recorrendo, preferencialmente, ao raciocínio analítico ou ao geométrico. Identificámos dois níveis de desenvolvimento cognitivo, de acordo com os desempenhos dos alunos: (1) resposta adequada, sem justificação; e (2) estratégia de resolução adequada, mas incompleta ou com alguns erros de cálculo, contemplando os dois tipos de raciocínio – preferencialmente analítico ou geométrico (ver Anexo 25). Há 9,5% de desempenhos que fazem parte deste padrão (ver Anexo 21).

5.3.4.7.1. Nível D6.1.

Este nível é composto por desempenhos dos alunos que mencionam que a área da parte pintada da figura é de 75 cm^2 ou metade, sem justificarem. São exemplos deste nível os que podemos observar nas Figuras 226 a 228.

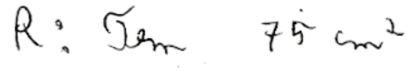


Figura 226 – N.L.2., 8.º ano de escolaridade, Leiria

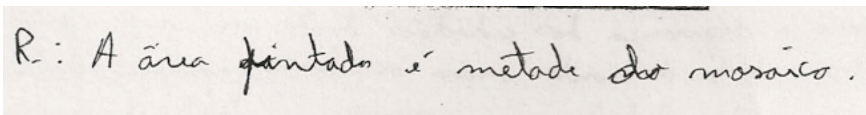


Figura 227 – R.T., 9.º ano de escolaridade, Açores

Como já afirmámos anteriormente, é importante que os alunos explicitem as estratégias de resolução adotadas para que o professor/investigador consiga ter acesso aos processos de raciocínio subjacentes às mesmas. Este tipo de informação torna-se essencial, por exemplo, quando se pretendem constituir as primeiras díades, após a primeira semana de aulas.

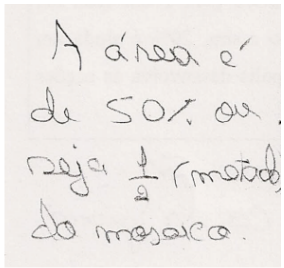


Figura 228 – M.M.3., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Queremos salientar, na resposta do aluno M.M.3., a capacidade deste aluno em transitar entre formas de escrita matemática diversificadas (percentagem e fração), aspeto especialmente relevante se tivermos em consideração que se trata de um aluno com a idade cronológica esperada para o 7.º ano de escolaridade.

5.3.4.7.2. Nível D6.2.

A este nível estão associados os desempenhos que evidenciam estratégias de resolução adequadas ao problema proposto, mas que se encontram incompletas (por exemplo, ausência de resposta) ou que revelam alguns erros de cálculo, mas que não afetam os processos de raciocínio a que os alunos recorreram.

5.3.4.7.2.1. Preferência por raciocínios analíticos

Na Figura 229, o aluno J.C.6. opta por uma estratégia de resolução algébrica para determinar a área de cada um dos triângulos, uma vez que a soma dos seis triângulos corresponde à área da parte pintada do mosaico. Contudo, revela algumas dificuldades na obtenção do resultado final da área de cada triângulo e da parte pintada. Para além disso, esta estratégia de resolução ilumina, também, a falta de sentido crítico deste aluno face aos resultados obtidos.

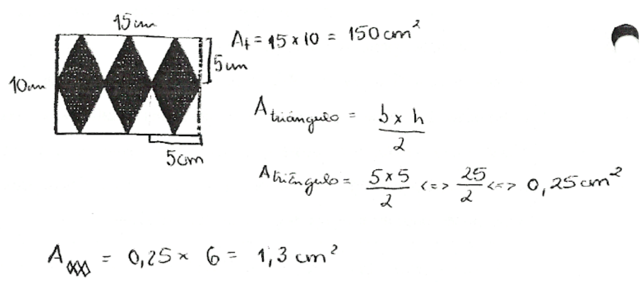


Figura 229 – J.C.6., 10.º ano de escolaridade, Viseu

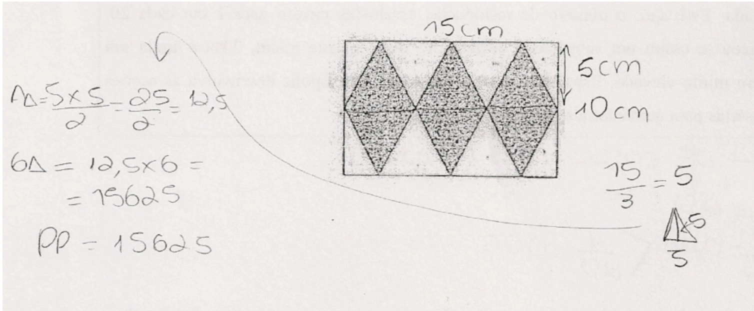


Figura 230 – C.N.2., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

A estratégia de resolução que podemos observar na Figura 230 é muito semelhante à anterior. Este aluno consegue determinar a área de cada triângulo com sucesso. Porém, quando calcula o valor da área da parte pintada comete um erro de cálculo. Por último, queremos salientar que, nesta estratégia de resolução, há uma ausência de unidades de medida.

5.3.4.7.2.2. Preferência por raciocínios geométricos

Nas Figuras 231 e 232, podemos observar estratégias de resolução que recorrem a desenhos ou esquemas para explicitarem os processos de raciocínio. No entanto, ambas as estratégias de resolução encontram-se incompletas, na medida em que não determinam o valor da área da parte pintada do mosaico. No entanto, o aluno R.G.1. refere quais as dimensões da área pintada (15 cm por 5 cm), o que corresponde a metade da área do mosaico.

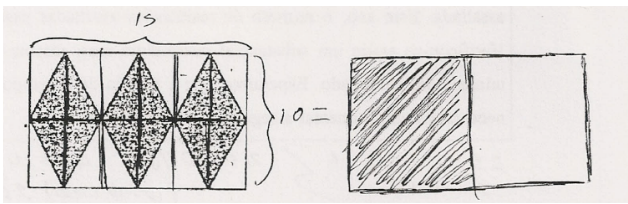


Figura 231 – S.T.2., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

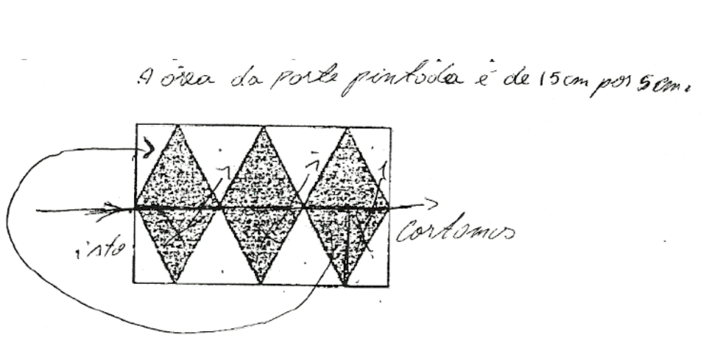


Figura 232 – R.G.1., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Nas Figuras 233 e 234, as estratégias de resolução dos alunos iluminam o recurso a uma simbologia própria para explicitarem os processos de raciocínio associados. O aluno D.M.3. recorre a símbolos, tais como "+", "0", "-" e "x", para associar partes do mosaico que juntas formam um ou metade de um losango. Assim, conclui que a área da parte pintada é metade da do mosaico.

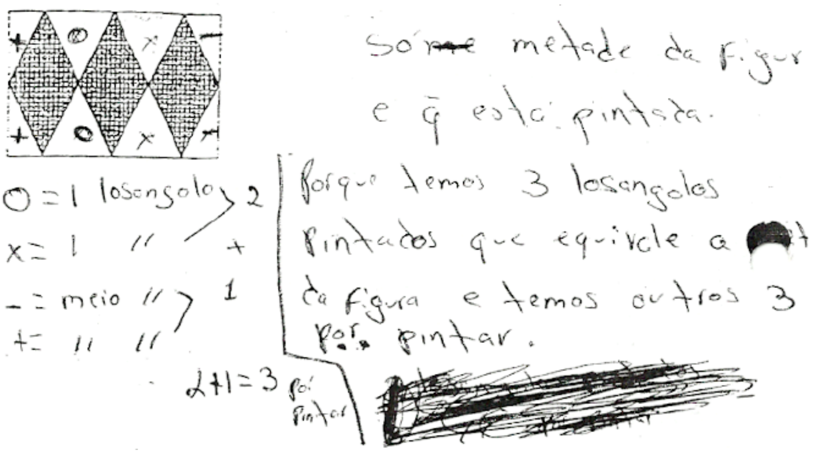


Figura 233 – D.M.3., 10.º ano de escolaridade, Leiria

O aluno M.A.3 recorre a uma estratégia semelhante à anterior, mas opta por numerar cada parte em branco do mosaico, associando-a, posteriormente, a uma parte pintada do mesmo. Desta forma, concluiu que a área da parte pintada é metade da área do mosaico.

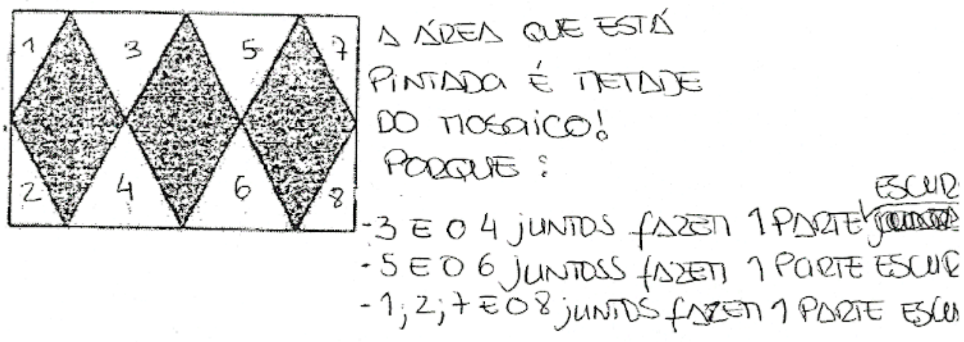


Figura 234 – M.A.3, 9.º ano de escolaridade, Lisboa

No entanto, ambas as estratégias de resolução não referem, como pedido no enunciado do problema, o valor da área da parte pintada. No exemplo que se segue (Figura 235), podemos observar um exemplo de estratégia de resolução que revela alguns erros de cálculo.

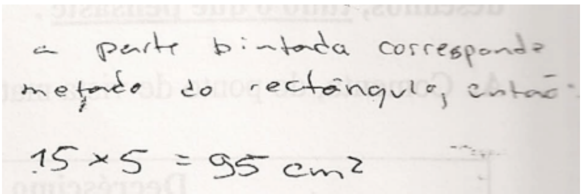


Figura 235 – N.º 3, 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Este aluno identifica, com sucesso, que a área da parte pintada do mosaico é igual a metade da área do mesmo. No entanto, quando determina esse valor (15 x 5), fá-lo de forma incorreta, uma vez que o produto de 15 cm por 5 cm é 75 cm^2 e não 95 cm^2.

5.3.4.8. Padrão D7

O Padrão D7 é considerado o mais complexo, do ponto de vista desenvolvimentista, pois é composto pelos desempenhos dos alunos que evidenciam uma estratégia de resolução e resposta completas. Estes podem recorrer, preferencialmente, a um raciocínio analítico ou geométrico. Neste padrão identificámos, em cada um dos raciocínios utilizados, dois níveis de desenvolvimento cognitivo, em relação aos desempenhos evidenciados pelos alunos: (1) estratégia de resolução com pequenas faltas de rigor; e (2) estratégia de resolução completa (ver Anexo 25). Há 27,7% de desempenhos dos alunos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.4.8.1. Preferência por um raciocínio analítico

5.3.4.8.1.1. Nível D7.1.

Neste nível estão considerados os desempenhos adequados e completos. No entanto, revelam pequenas faltas de rigor, em relação a três sub-níveis diferentes: (1) ausência ou inadequação da unidade de medida; (2) nos cálculos efetuados; e (3) alguns cálculos subentendidos.

5.3.4.8.1.1.1. Sub-Nível D7.1.1.

Os desempenhos que fazem parte deste sub-nível evidenciam uma estratégia de resolução completa, mas com ausência ou inadequação da unidade de medida. São exemplos os que podemos observar nas Figuras 236 e 237.

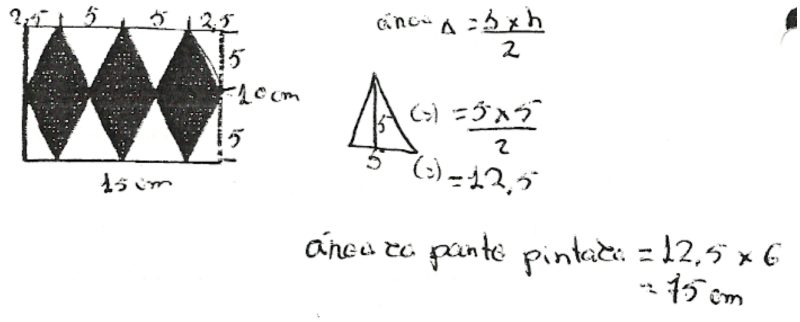


Figura 236 – A.P.1., 11.º ano de escolaridade, Viseu

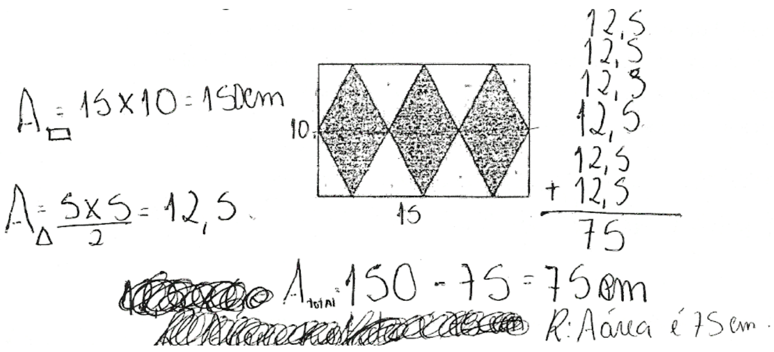


Figura 237 – A.C.3., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Em ambos os exemplos, os alunos optam por recorrer a estratégias de resolução algébrica para determinarem a área da parte pintada do mosaico. Contudo, a unidade de medida utilizada – unidade de comprimento – é desajustada face ao que é pedido. Por último, queremos salientar a forma como o aluno A.C.3. determinou a área dos seis triângulos, isto é, recorreu à adição repetida da área de cada triângulo (12,5).

5.3.4.8.1.1.2. Sub-Nível D7.1.2.

Este sub-nível é constituído por desempenhos que iluminam estratégias de resolução completas, mas com pequenas faltas de rigor, ao nível dos cálculos efetuados.

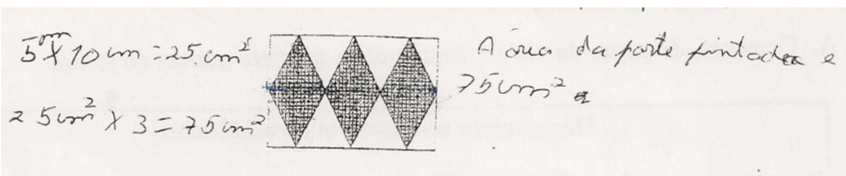


Figura 238 – N.º 19, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Na Figura 238, o aluno determina, em primeiro lugar, a área de cada losango. No entanto, não indica esse passo de forma completa, pois esquece-se de colocar sobre dois, o produto das duas diagonais (10 e 5), embora isso esteja implícito, pela análise da estratégia de resolução.

5.3.4.8.1.2. Nível D7.2.

Este nível é caracterizado pelos desempenhos que são considerados completos, recorrendo a um raciocínio preferencialmente analítico. São exemplos deste nível os que se encontram nas Figuras 239 a 242. Na Figura 239, o aluno H.S. associa a área da parte pintada da figura à dos seis triângulos que a compõem. Assim, começa por determinar a área de cada triângulo e, em seguida, multiplica esse valor por seis, obtendo a resposta ao problema.

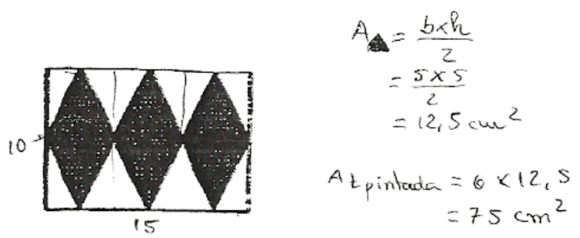


Figura 239 – H.S., 11.º ano de escolaridade, Viseu

O aluno F.G.2. faz corresponder a área da parte pintada do mosaico à área dos três losangos a preto. Assim, determina a área de cada losango e, em seguida, multiplica esse valor por três, obtendo o valor final da área da parte pintada da figura.

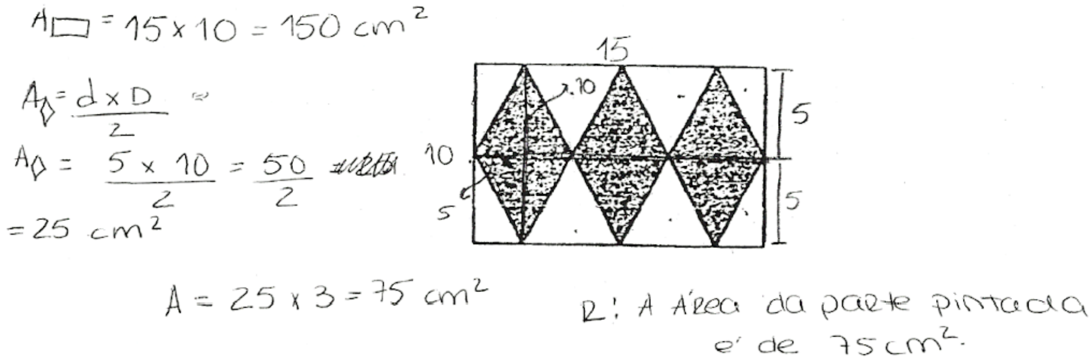


Figura 240 – F.G.2., 10.º ano de escolaridade, Lisboa

Nos dois exemplos a seguir estamos perante a estratégias de resolução que fazem uso diferente das informações que se podem obter através da observação da figura dada. Quer o aluno F.O.3. quer o aluno A.M. afirmam que a área da parte pintada é igual à diferença entre a área total do mosaico e a área que se encontra em branco.

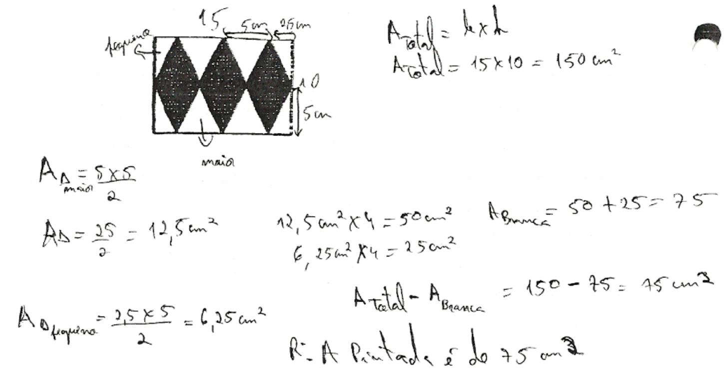


Figura 241 – F.O.3., 11.º ano de escolaridade, Viseu

O aluno F.O.3. começa por determinar a área total do mosaico (15 x 10 = 150 cm^2). Depois, recorre a uma abordagem passo-a-passo na obtenção da área da parte em branco, isto é, determina a área de cada triângulo que compõe essa parte (12,5 x 4 e 6,25 x 4) e soma esses dois valores (50 + 25 = 75 cm^2). Por fim, efetua a diferença entre a área total do mosaico e a área da parte em branco (150 – 75 = 75 cm^2), obtendo a resposta final ao problema proposto.

Por seu turno, o aluno A.M. adota uma estratégia de resolução semelhante à anterior, mas determina a área de cada triângulo, multiplicando esse valor por seis (6 x 12,5 = 75 cm^2). Assim, a diferença entre os valores da área total do mosaico e da parte em branco, resultará no valor da área da parte pintada da figura dada.

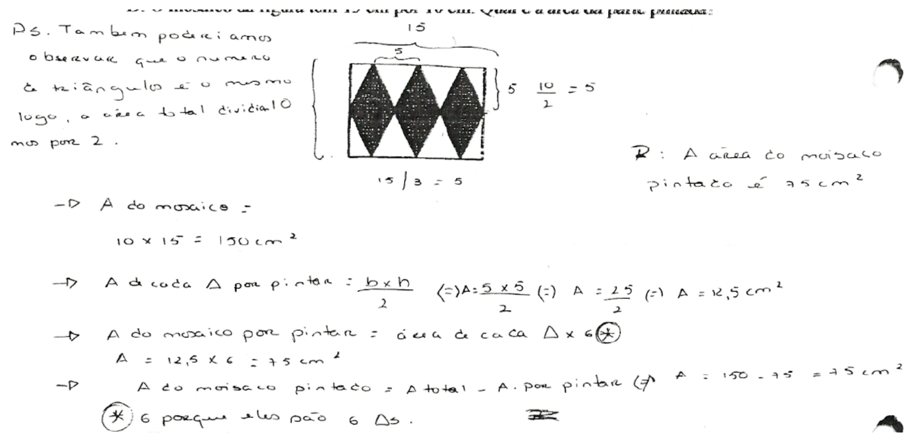


Figura 242 – A.M., 10.º ano de escolaridade, Viseu

Por último, nesta última estratégia de resolução, queremos realçar o recurso a um raciocínio mais geométrico (canto superior esquerdo da folha de respostas) como forma de validação do resultado obtido. Esta evidência ilumina que este aluno revela facilidade em recorrer a estes dois tipos de raciocínio (analítico e geométrico), mas é o analítico que se afigura como forma preferencial de resolução deste problema, talvez por ser o habitualmente mais valorizado na Matemática escolar.

5.3.4.8.2. Preferência por um raciocínio geométrico

5.3.4.8.2.1. Nível D7.1.

Neste nível estão considerados os desempenhos completos ao problema proposto. No entanto, estes revelam algumas pequenas faltas de rigor, em relação a três níveis diferentes: (1) ausência ou inadequação da unidade de medida; (2) nos cálculos efetuados; e (3) alguns cálculos subentendidos.

5.3.4.8.2.1.1. Sub-Nível D7.1.1.

Deste sub-nível fazem parte os desempenhos completos dos alunos, mas que revelam pequenas faltas de rigor, nomeadamente no que respeita à unidade de medida utilizada. No exemplo da Figura 243, o aluno T.R.3. recorre a um raciocínio preferencialmente geométrico na resolução do problema, na medida em que afirma que se juntarmos todas as partes em branco obtemos as mesmas figuras que estão a preto. Logo, a área da parte pintada da figura é igual a metade da área total da mesma. Assim, este aluno determina a área do mosaico (retângulo) e divide esse valor por dois, obtendo o resultado pretendido. No entanto, a unidade de medida utilizada é desajustada (cm), uma vez que esta é uma unidade de comprimento e não de área.

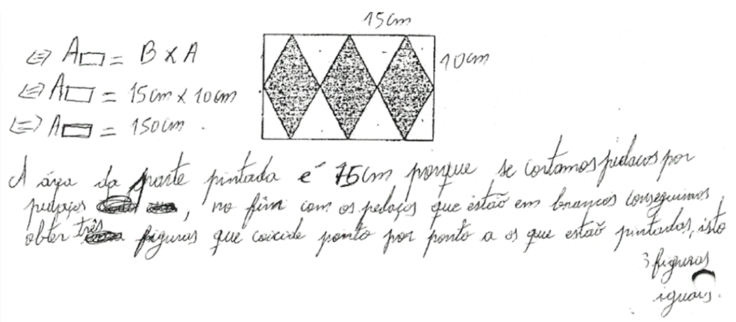


Figura 243 – T.R.3., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

A estratégia de resolução do aluno P.D. também evidencia uma preferência por um raciocínio geométrico. Este associa a área da parte pintada da figura à soma da área de três quadrados de lado 5 cm. Assim, determina a área de cada uma desses quadrados, multiplicando esse resultado por três, obtendo a solução ao problema proposto. Contudo, à semelhança do que aconteceu no exemplo anterior, este aluno utiliza uma unidade de medida desajustada à situação.

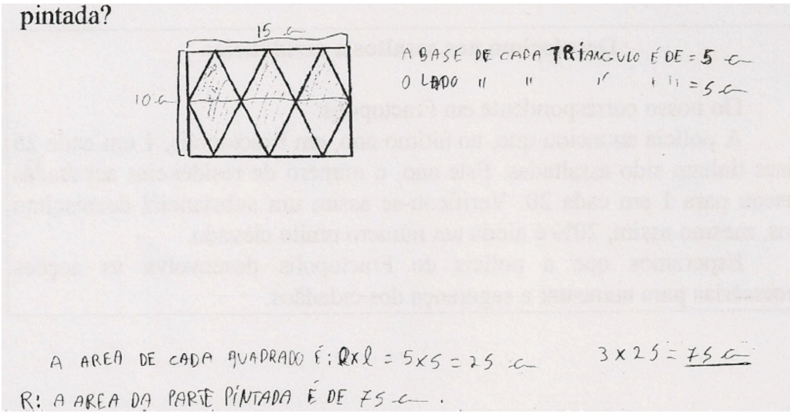


Figura 244 – P.D., 10.º ano de escolaridade, Leiria

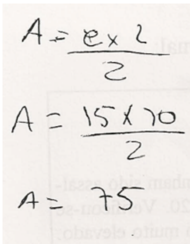


Figura 245 – N.º 7, 10.º ano de escolaridade, Lisboa

Por último, na Figura 245, o aluno compreende que a área da parte pintada é metade da área do mosaico. Assim, determina a área do retângulo e divide por dois para obter o valor pretendido. Neste caso, o aluno não coloca qualquer unidade de medida na resposta ao problema.

5.3.4.8.2.1.2. Sub-Nível D7.1.2.

Este sub-nível é caracterizado por desempenhos dos alunos que se encontram completos, mas que revelam pequenas faltas de rigor nos cálculos efetuados. É exemplo deste sub-nível o que se pode observar na Figura 246.

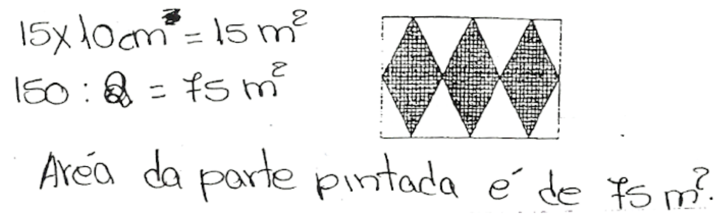


Figura 246 – C.F.3., 8.º ano de escolaridade, Leiria

O aluno C.F.3. recorre, preferencialmente, a um raciocínio geométrico na resolução deste problema. Afirma que a área da parte pintada do mosaico corresponde a metade da área desse mosaico, pelo que determina a área do retângulo (mosaico) e divide esse valor por dois, obtendo o resultado pretendido. Contudo, quando efetua o produto de 15 por 10, ou seja, quando calcula o valor da área do retângulo, o resultado que escreve não está correto (15). Mas, através da análise da estratégia de resolução, consegue-se perceber que se trata de um erro de escrita, uma vez que, no passo imediatamente a seguir, utiliza o valor da área apropriado.

5.3.4.8.2.1.3. Sub-Nível D7.1.3.

Neste sub-nível os desempenhos dos alunos evidenciam a existência de alguns cálculo subentendidos, como podemos observar um exemplo na Figura 247.

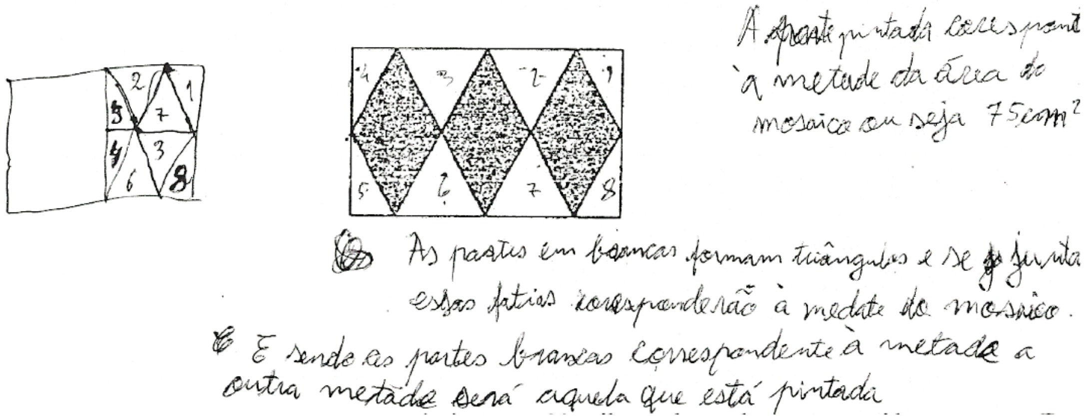


Figura 247 – E.C., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

A estratégia de resolução utilizada pelo aluno E.C. ilustra que este decompõe o mosaico para mostrar que a área da parte pintada é metade da área total. Para tal, numera as parte que se encontram em branco na figura inicial e, através de um novo desenho, rearranja-as, mostrando o que pretende afirmar. Assim, concluiu que a área da parte pintada é de 75 cm^2, estando subjacentes os cálculos efetuados por este aluno para concluir o valor da área da parte pintada.

5.3.4.8.2.2. Nível D7.2.

Para este nível são considerados os desempenhos que estão completos, nos quais os alunos recorrem, preferencialmente, a um raciocínio geométrico, cujos exemplos se encontram nas Figuras 248 a 253.

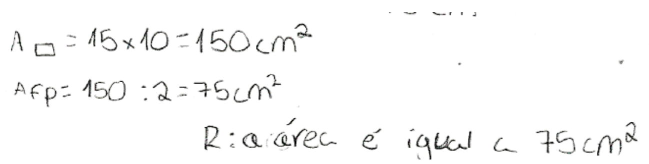


Figura 248 – G.M., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

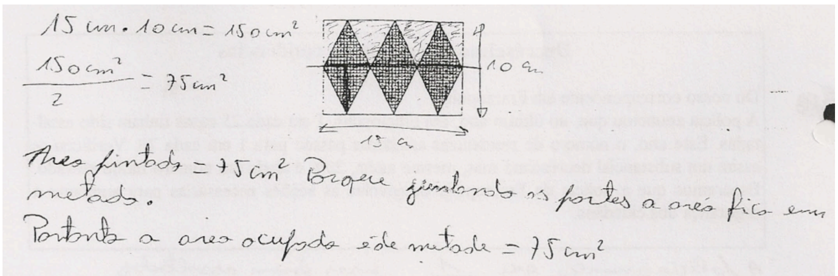


Figura 249 – R.S.3., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Nos exemplos das Figuras 248 e 249, os alunos G.M. e R.S.3. afirmam que a área da parte pintada é metade da área do mosaico. Desta forma, determinam a área do retângulo e, em seguida, dividem esse valor por dois, obtendo a resposta pretendida ao problema. Enquanto que, na estratégia de resolução do aluno G.M., identificamos apenas as operações realizadas, na do R.S.3. temos acesso aos processos de raciocínio utilizados por este aluno.

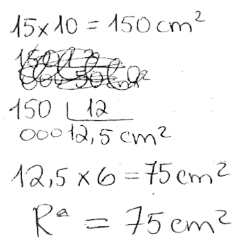


Figura 250 – I.L., 8.º ano de escolaridade, Leiria

A estratégia de resolução do aluno I.L. evidencia que este decompõe o mosaico em 12 triângulos iguais e que a parte pintada corresponde a seis desses triângulos. Assim, este aluno determina a área do retângulo, dividindo-a por 12 para obter a área de cada triângulo. Por fim, multiplica esse valor por 6, obtendo a resposta ao problema proposto.

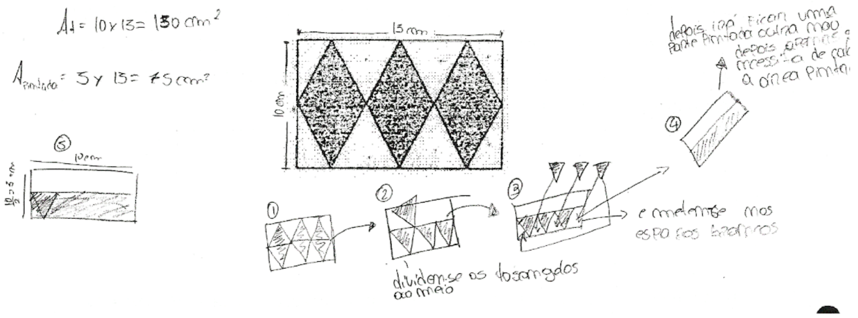


Figura 251 – D.P.2., 10.º ano de escolaridade, Faro

O exemplo da Figura 251 ilumina uma estratégia de resolução com recurso a esquemas e desenhos que ilustram os processos de raciocínio subjacentes. Este aluno opta por rearranjar a figura dada no problema, preenchendo uma das metades com os triângulos existentes na outra metade, obtendo desta forma que a área da parte pintada é metade da do mosaico. Assim, determina a área da parte pintada que corresponde à área de um retângulo com dimensões 5 e 15 cm, obtendo a resposta pretendida ao problema.

Este exemplo ilumina a importância de, no IACC, ser permitido o recurso a diversas estratégias de resolução associadas aos processos de raciocínio utilizados, uma vez que existem alunos que têm mais facilidade na escrita e, por isso, optam por pequenas composições matemáticas, mas existem outros que preferem recorrer a outras estratégias de resolução, por exemplo, estratégias de representação gráfica, com recurso a esquemas ou desenhos.

Na Figura 252 podemos observar uma estratégia de resolução que recorre a desenhos para explicar os processos de raciocínio utilizados. Este aluno decompõe a figura inicial para mostrar que a área da parte pintada corresponde a um retângulo com as dimensões de 7,5 cm por 10 cm. Logo, esse valor corresponde à metade da área do mosaico.

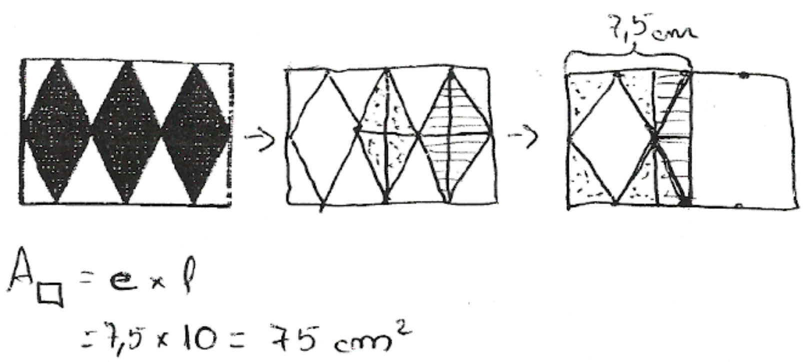


Figura 252 – C.P.3., 10.º ano de escolaridade, Viseu

Por último, no exemplo da Figura 253 podemos observar uma estratégia de resolução diferente das utilizadas anteriormente.

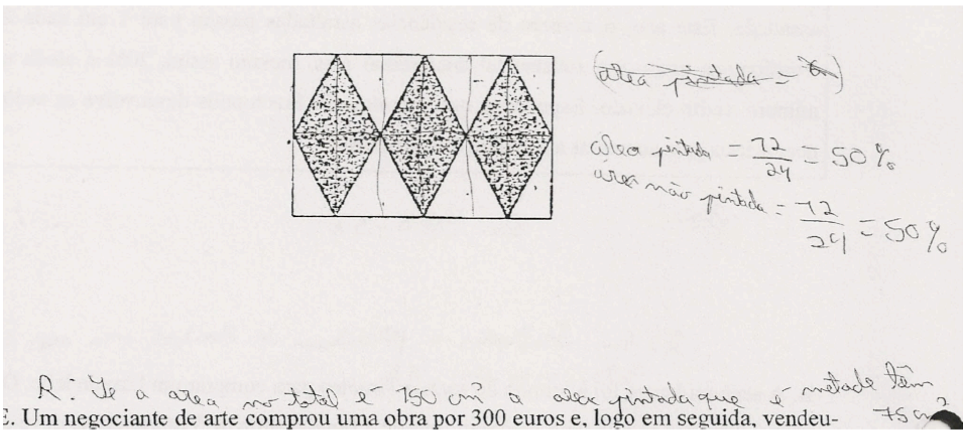


Figura 253 – A.A.4., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

Este aluno divide a figura inicial em 24 partes iguais, sendo que 12 delas estão pintadas e 12 estão em branco. Desta forma, conclui que a área da parte pintada corresponde a 50% da área total. Assim, se a área do retângulo é de 150 cm^2, então a área da parte pintada é de 75 cm^2. Esta estratégia de resolução ilumina dois aspetos essenciais e pouco observados em alunos com idade cronológica esperada neste ano de escolaridade: (1) a utilização de formas de escrita matemática diversificadas (frações e percentagens); e (2) o rigor e o cuidado na própria escrita.

5.3.5. Tarefa E

A Tarefa E pretende avaliar se os alunos, quando confrontados com um problema que envolve uma situação de compra e venda, ou seja, conectada com a vida quotidiana, preferem uma abordagem global ou passo-a-passo (ver Anexo 11). Os alunos que optam por uma abordagem global analisam os dados do enunciado como um todo. Por exemplo, pensam em tudo o que se gastou e em tudo o que se recebeu, decidindo, depois, se houve lucro ou prejuízo. Por sua vez, os alunos que preferem uma abordagem passo-a-passo seguem exatamente a ordem das operações tal como ela é indicada no enunciado. Convém realçar que a abordagem adotada se pode tornar facilitadora, ou criar barreiras, em relação à resolução de alguns problemas.

Da análise dos desempenhos a esta tarefa emergiram oito padrões de desempenho, organizados do menos complexo para o mais complexo, do ponto de vista desenvolvimentista (ver Anexo 26). Assim, o Padrão E0 é o menos complexo, enquanto que o Padrão E7 é o mais complexo. Seguimos, também, a mesma lógica desenvolvimentista dentro de cada padrão. Por exemplo, no Padrão E3, o Nível 1 é o menos desenvolvido, enquanto que o Nível 6 é o mais avançado desse padrão. À semelhança do que ocorreu na Tarefa C, nesta tarefa não emergiram desempenhos característicos do Padrão E0. Contudo, por uma questão de coerência tivemos em consideração este padrão.

Queremos, ainda, salientar que, no Padrão E7, não existe nenhuma diferença, do ponto de vista desenvolvimentista, entre as categorias α e β. A diferença reside no tipo de abordagem adotada, isto é, qual o tipo de abordagem a que os alunos recorreram – passo-a-passo (α) ou global (β). Contudo, quer na abordagem passo-a-passo quer na global, existem níveis de desenvolvimento tendo em conta os desempenhos que os alunos evidenciaram nas respostas dadas. O mesmo acontece, em relação a não existir nenhuma diferença, do ponto de vista desenvolvimentista, com as categorias δ, λ e μ no Nível E.5.2..

Esta tarefa foi respondida por 96,3% dos alunos das turmas que participavam no projeto IC, ao longo dos 12 anos de vigência do mesmo e, como tal, 3,7% dos mesmos não responderam a esta tarefa, sendo uma das que mais adesão provocava (ver Anexo 21).

5.3.5.1. Padrão E1

Os desempenhos que são característicos deste padrão remetem-nos para situações em que os alunos fornecem explicações desconexas, tendo em conta a situação descrita no enunciado do problema. Identificámos dois níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) relativas a situações de prejuízo e lucro, de prejuízo e nem lucro nem de prejuízo; e (2) lucro de 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos) (ver Anexo 26). Há 3,9% de desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.5.1.1. Nível E1.1.

Neste nível são considerados os desempenhos que recorrem a explicações desconexas, que contemplam situações de lucro e prejuízo (Figuras 254 a 256), prejuízo (Figuras 257 e 258) e nem lucro nem prejuízo (Figuras 259 a 261).

Na Figura 254 o aluno considera existir lucro e prejuízo ao mesmo tempo, uma vez que o negociante ganha e perde dinheiro nas várias situações até acabar por vender a obra de arte por 600 euros. No entanto, o desempenho não evidencia o que este considera ser lucro e prejuízo. Esta diferença é visível nos desempenhos de J.C.7. e A.S.3. (Figuras 255 e 256, respetivamente), na medida em que estes afirmam, explicitamente, o que entendem por estes dois conceitos.

O negociante teve prejuizo e lucro ao mesmo tempo porque gastou e ganhou dinheiro até resolver vendêr a obra por 600.

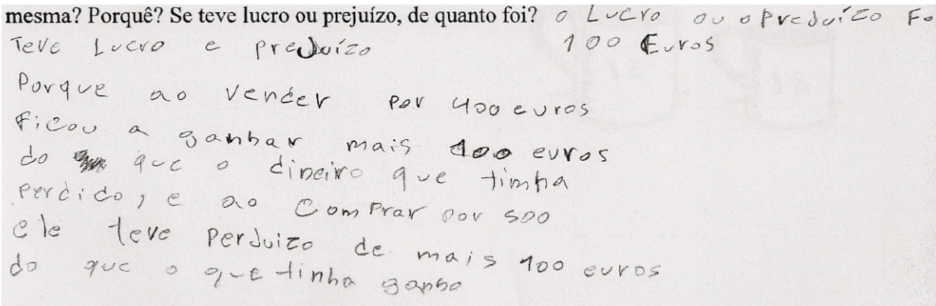
Figura 254 – I.S.3., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Para J.C.7. (ver Figura 255), o prejuízo está relacionado com o que o negociante perdeu ao comprar de novo a obra de arte, em relação ao que tinha obtido pela venda no primeiro negócio (100 euros). Assim, para este aluno, o prejuízo é o montante que se investe para se comprar algum produto, o que, do ponto de vista matemático, não é completamente rigoroso. Por sua vez, o lucro está associado ao montante final da venda do produto (600 euros). Neste desempenho, é explícito o valor do prejuízo, mas não o do lucro, o que nos leva a questionar o que este aluno entende por este último conceito.

Não. Porque perdeu 100 euros.
Sim. Porque ao gastar 100 euros ganhou 600 euros.

300 → comprou
400 - vendeu
500 - arrepende-se
600 - vendeu

Figura 255 – J.C.7., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

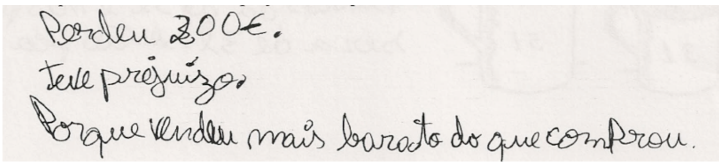


mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi? o Lucro ou o prejuízo Fo
Teve Lucro e prejuízo 100 Euros
Porque ao vender por 400 euros
ficou a ganhar mais 100 euros
do que o dinheiro que tinha
perdido, e ao comprar por 500
ele teve perjuizo de mais 100 euros
do que o que tinha ganho

Figura 256 – A.S.3., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

No desempenho do aluno A.S.3. está presente a mesma argumentação que observámos nos alunos anteriores, isto é, que o lucro está associado à venda do produto numa das transações (neste caso a primeira) e que o prejuízo tem a ver com o montante que se investiu, nas duas vezes, pela compra da obra de arte. Esta resposta acrescenta, à anterior, a explicitação do valor do lucro e do prejuízo (100 euros).

Em relação às explicações desconexas tendo como base situações de prejuízo, na Figura 257, o aluno afirma haver prejuízo, quantificando-o (200 euros), uma vez que o negociante vendia sempre mais barato a obra de arte em relação ao montante que tinha pago para a adquirir. Esta justificação não corresponde ao que é expresso no enunciado, uma vez que em todas as transações o negociante vendeu a obra por um valor superior ao que tinha pago pela compra. Embora não saibamos como este aluno determinou os 200 euros, a resposta evidencia alguma dificuldades ao nível da interpretação do enunciado, bem como em relação ao que se entende por lucro e prejuízo.



Perdeu 200€.
teve prejuízo.
Porque vendeu mais barato do que comprou.

Figura 257 – J.G., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Na Figura 258 podemos observar outro exemplo de desempenho deste padrão. Neste caso, o aluno considera que o negociante teve prejuízo, pois só considera as situações de compra deste artigo, isto é, sempre que comprava a obra, o montante que dava era sempre superior. Esta evidência ilumina algo que já afirmámos anteriormente: para alguns alunos, ter prejuízo está relacionado com o montante que se investiu para adquirir a obra, quer da primeira quer da segunda vez. Portanto, ao centralizar a sua resposta no que era gasto, a mais, na nova compra, não compreendem as restantes informações referentes às transições efetuadas.

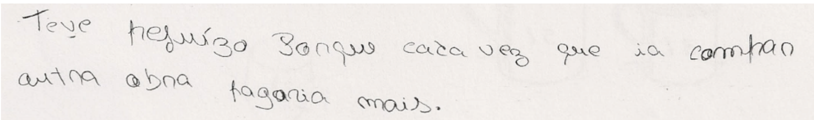


Figura 258 – R.A., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Por fim, nas Figuras 259 a 261 temos presente desempenhos dos alunos que consideram que, nesta situação, o negociante ficou na mesma, fornecendo explicações desconexas. O desempenho que consta da Figura 259 ilustra uma situação diferente daquela que é descrita no enunciado.

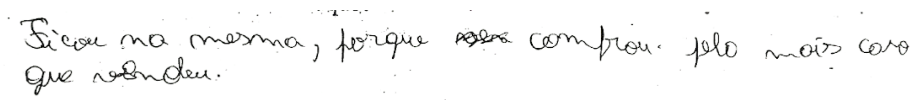


Figura 259 – N.º 9, 8.º ano de escolaridade, Leiria

Na Figura 260, o aluno P.F.3. afirma que o negociante ficou na mesma, uma vez que apenas ficou com o valor do montante que investiu inicialmente (300 euros). Este tipo de resposta não nos permite identificar os processos de raciocínio subjacentes. Daí a importância que, no IACC, assumem as justificações fornecidas pelos alunos. Pretende-se que estas sejam o mais completas e detalhadas possíveis, para que se possam avaliar, de forma mais sustentada, as estratégias de resolução adotadas, bem como os processos de raciocínio subjacentes.

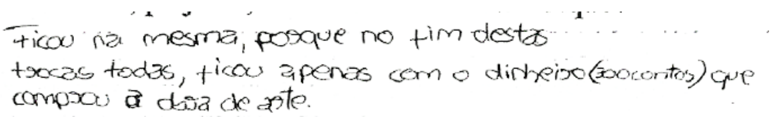


Figura 260 – P.F.3., 9.º ano de escolaridade, Leiria

A estratégia de resolução utilizada pelo aluno C.G.2. (Figura 261) revela uma situação de confusão entre o que é compra e venda, uma vez que este aluno utiliza os quatro valores dados no enunciado deste problema (300, 400, 500 e 600), mas sem relação com a situação descrita. Assim, os valores que opta por somar ora dizem respeito à venda, ora à compra. Por exemplo, 400 é o montante da 1.ª venda e 500 é o montante da 2.ª compra.

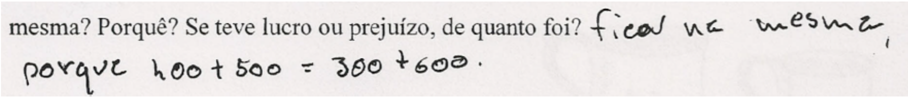


Figura 261 – C.G.2., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Esta estratégia de resolução ilumina três aspetos importantes: (1) o aluno manipulou os valores dados de forma a que o resultado da soma entre dois pares de números fosse igual (900); (2) não estabeleceu conexões entre os dois contextos apresentados – vida quotidiana e escola; e (3) não conseguiu mobilizar os conceitos de lucro e prejuízo.

5.3.5.1.2. Nível E1.2.

Os desempenhos deste nível estão associados à existência de lucro de 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos). No entanto, a explicação fornecida é desconexa, atendendo ao enunciado do problema. Esta situação leva-nos a considerar que o enunciado desta tarefa deve ser melhorado, no futuro, em alguns aspetos, nomeadamente na escolha dos montantes para cada transação. O lucro que se obtém nesta situação é de 200 euros. No entanto, os exemplos de desempenhos dos alunos que se encontram nas Figuras 262 e 263 iluminam que a escolha dos valores (300, 400, 500 e 600) deveria ter sido diferente, uma vez que o valor de lucro final (200 euros), pode ser obtido através da diferença entre 600 e 400 euros, ou entre 500 e 300 euros. Contudo, esta conclusão só foi possível porque analisámos cerca de 600 turmas e tivemos uma leitura mais sustentada e aprofundada acerca dos desempenhos dos alunos, que não é possível obter quando apenas analisamos poucas turmas.

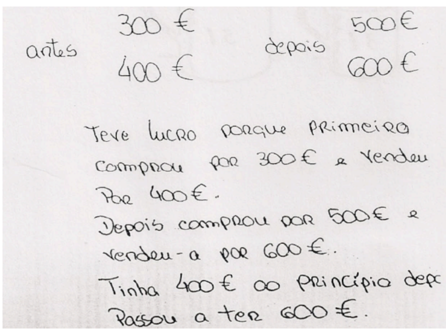
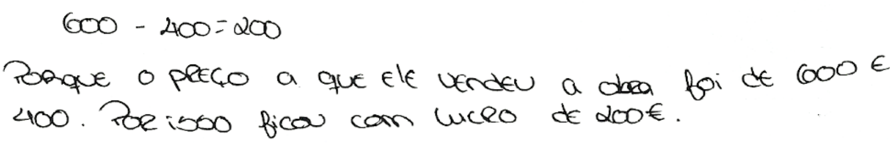


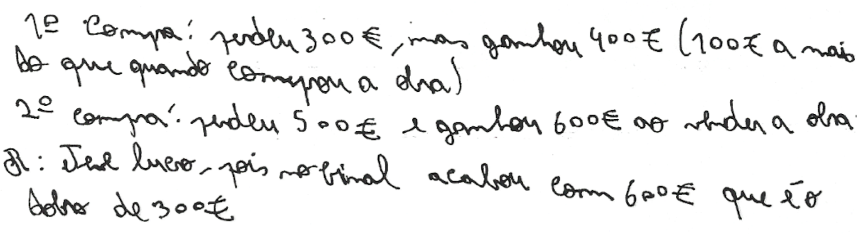
Figura 262 – L.E., 8.º ano de escolaridade, Lisboa



600 - 400 = 200
Porque o preço a que ele vendeu a obra foi de 600 €
400. Por isso ficou com lucro de 200€.

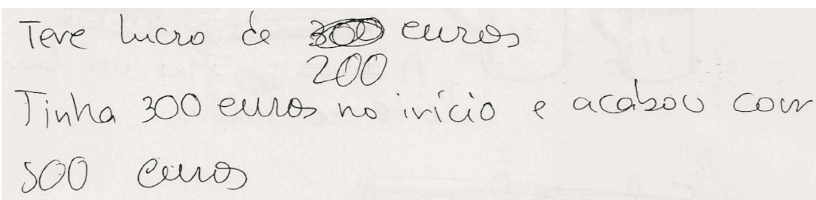
Figura 263 – F.V.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

O desempenho do aluno que se pode observar na Figura 264 ilumina uma preferência por uma abordagem passo-a-passo, uma vez que avalia, sucessivamente, o que ocorre em cada negócio. No entanto, ao finalizar a estratégia de resolução, o aluno A.C.5. dá uma resposta desconexa, tendo em conta a situação descrita no enunciado da tarefa e o seu desempenho anterior. Para justificar que o lucro é de 200 euros, afirma que o montante com o qual o negociante finalizou o negócio corresponde ao dobro do montante com que iniciou o mesmo. Como já afirmámos anteriormente, a escolha dos valores para este problema poderá ter despoletado este tipo de resposta. No entanto, a parte final deste desempenho poderá significar uma utilização forçada da Matemática na própria resposta, pois como se tratava de uma tarefa matemática teria que haver algo que permitisse ao aluno mostrar ao professor/investigador alguns conceitos matemáticos que já apropriara.



1º Compra: perdeu 300 €, mas ganhou 400 € (100 € a mais do que quando comprou a obra)
2º compra: perdeu 500 € e ganhou 600€ ao vender a obra
R: Teve lucro, pois no final acabou com 600€ que é o dobro de 300€

Figura 264 – A.C.5., 10.º ano de escolaridade, Lisboa



Teve lucro de ~~300~~ 200 euros
Tinha 300 euros no início e acabou com 500 euros

Figura 265 – J.F.4., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O exemplo que podemos observar na Figura 265 ilumina um desempenho característico deste padrão, ou seja, o aluno J.F.4. afirma ter lucro de 200 euros, mas recorre aos valores das duas compras (300 e 500) para justificar esse valor. Esta evidência ilumina que este aluno poderá – ou não – saber o que se entende por lucro, mas quando tenta justificar o lucro obtido, apresenta uma explicação desconexa.

5.3.5.2. Padrão E2

Neste padrão, os desempenhos dos alunos revelam a repetição de parte do enunciado do problema que lhes é apresentado, como podemos observar na Figura 266, na qual o aluno repete o que aconteceu na primeira transação. Há 0,1% dos desempenhos dos alunos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).


ELE gastou 300 euros depois vendeu-a por 400 euros

Figura 266 – A.B., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Este tipo de resposta leva-nos a questionar se os alunos conseguiram compreender o que era pedido na tarefa, o que pode evidenciar a existência de algum tipo de barreira ao nível da língua ou ao nível da interpretação e compreensão de enunciados. É importante que os alunos desenvolvam e/ou mobilizem este tipo de competência em qualquer disciplina do ensino básico e secundário. No entanto, a sua mobilização é especialmente importante quando estes são confrontados com situações do dia a dia como, por exemplo, na tomada de decisões.

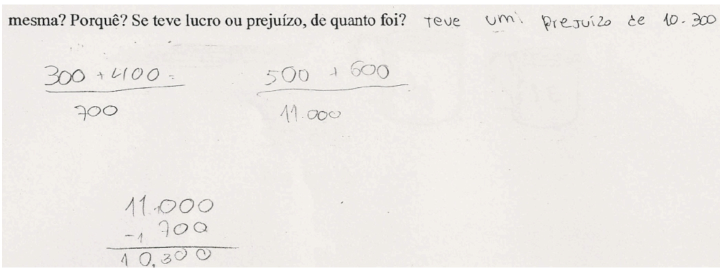
5.3.5.3. Padrão E3

Este padrão é constituído pelos desempenhos onde é considerado que, nesta situação, houve prejuízo. Identificámos cinco níveis de desenvolvimento: (1) existência de vários valores para o prejuízo; (2) houve um prejuízo de 800 euros (ou 800 contos); (3) prejuízo de 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos); (4) prejuízo de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos); (5) eventuais problemas de linguagem ou esquecimento de alguns dados do problema (ver Anexo 26). Há 5,2% de desempenhos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.5.3.1. Nível E3.1.

Deste nível fazem parte os desempenhos que consideram que nesta situação houve prejuízo e que, simultaneamente, quantificam esse prejuízo. Como tal, são exemplos deste nível os que se encontram nas Figuras 267 a 271.

O desempenho do aluno M.S.4. ilumina uma situação problemática, uma vez que realiza cálculos matemáticos sem sentido face à situação com a qual se confronta. Soma os dois valores (compra e venda) de ambas as transações e, no final, subtrai os dois valores obtidos, resultando, segundo ele, o montante do prejuízo. De realçar que o resultado de uma das somas se encontra incorreto (500 + 600 = 11000). Esta evidência ilumina que este aluno não conseguiu mobilizar os conceitos de lucro e prejuízo numa situação de compra e venda. Por último, esta estratégia de resolução ilustra que conseguiu mobilizar algumas competências associadas ao conhecimento instrumental, mas que não conseguiu usar o conhecimento relacional (Skemp, 1978).


mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi? teve um prejuízo de 10.300

300 + 400 = 700

500 + 600 11.000

11.000
-1 700
10.300

Figura 267 – M.S.4., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Ao contrário do que aconteceu anteriormente, este próximo exemplo não nos permite ter acesso às formas de raciocínio utilizadas pelo aluno, uma vez que este apenas se limita a responder às duas questões formuladas, sem apresentar uma justificação (Figura 268).

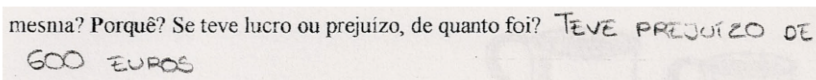

mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi? TEVE PREJUÍZO DE 600 EUROS

Figura 268 – M.G., 10.º ano de escolaridade, Faro

Nos exemplos que se encontram nas Figuras 269 a 271 podemos observar o recurso à abordagem passo-a-passo para resolver o problema, uma vez que consideram o resultado de cada transação e, depois, com base nessa informação, concluem a estratégia de resolução, dando a resposta. Na Figura 269, a estratégia de resolução adotada pelo aluno leva-nos a inferir que, para este aluno, investimento e prejuízo são sinónimos, uma vez que, ao comprar pela segunda vez a obra de arte, fica com um prejuízo de 400 euros (500 – 100) e como obtém um lucro de 100 euros na segunda venda, fica ainda com uma dívida de 300 euros.

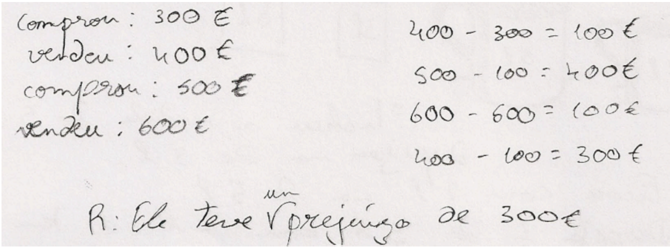


Figura 269 – J.M.3., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno M.R. afirma que o negociante teve um lucro de 200 euros proveniente do lucro das duas transações (100 + 100), mas que acabou por ter um prejuízo de 600 euros (800 – 200). Esta argumentação é semelhante à do aluno T.M.2.. No entanto, este realiza de forma desajustada a soma das duas compras (300 + 500). Nestas duas estratégias de resolução é evidenciado que estes alunos conseguem mobilizar conhecimentos relativos aos conceitos de lucro e prejuízo, mas não conseguem mobilizar mecanismos que lhes permitem realizar conexões com as situações de compra e venda, apercebendo-se de que o que realizaram não tem em consideração as diversas informações do enunciado do problema, conectadas com a vida quotidiana.

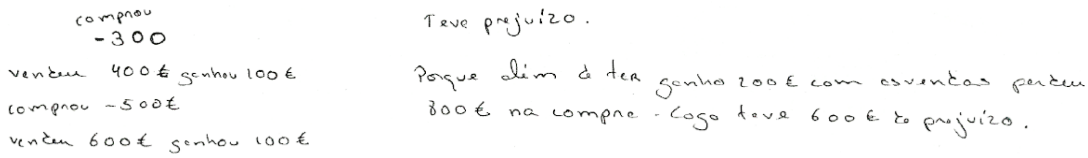


Figura 270 – M.R., 10.º ano de escolaridade, Viseu

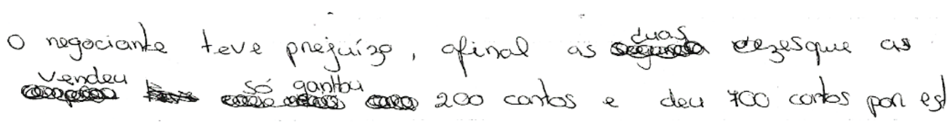


Figura 271 – T.M.2., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Assim, este nível já supõe algum avanço em relação aos anteriores, do ponto de vista do desenvolvimento cognitivo, apesar de ainda continuar a considerar que existiu prejuízo, ou seja, de ainda não mobilizar as capacidades e competências necessárias à compreensão e resolução, completa e adequada, de situações de compra e venda.

5.3.5.3.2. Nível E3.2.

Como exemplos de desempenhos pertencentes a este nível temos os que podemos observar nas Figuras 272 e 273. Nestas duas situações, os alunos afirmam haver prejuízo, pois só consideram as duas compras da obra de arte (300 + 500). Este tipo de desempenho, no qual só se considera uma parte do enunciado – neste caso a compra – é característico de quem ainda só mobiliza o raciocínio concreto, o que é esperado se tivermos em consideração que se trata de um aluno do 7.º ano de escolaridade, com a idade cronológica esperada. Portanto, apesar desta tarefa pretender avaliar o tipo de abordagem adotada pelos alunos em problemas que apelem a situações de compra e venda, também se pode obter informações, ou complementá-las, com outras capacidades e competências que mobilizam e que não eram as centrais, para esta tarefa.

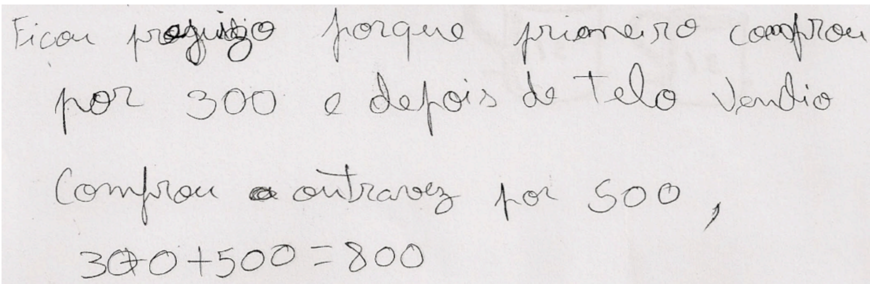


Figura 272 – C.S.6., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Ao observarmos a estratégia de resolução da Figura 273 emergem alguns aspetos a ter em consideração: (1) o aluno tem preferência por uma abordagem passo-a-passo na resolução do problema, uma vez que analisa cada uma das transações separadamente; (2) mais uma vez, prejuízo e investimento aparecem como conceitos equivalentes; e (3) apesar da estratégia de resolução ser mais complexa, do ponto de vista desenvolvimentista, do que a anterior, este aluno baseia a resposta final, exclusivamente, no montante que o negociante pagou pela compra da obra de arte, nas duas vezes (300 + 500).

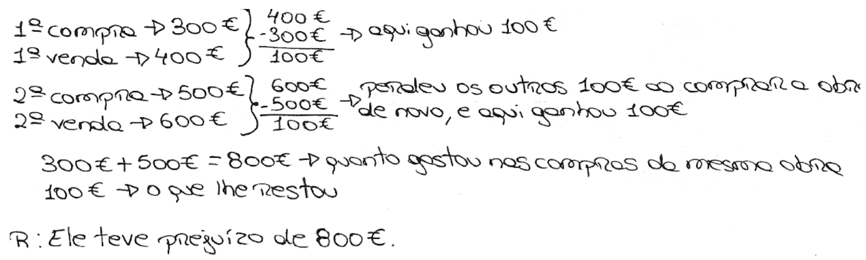


Figura 273 – I.S.4., 11.º ano de escolaridade, Faro

De realçar que a própria organização (escrita) da resposta corrobora a existência de um nível de desenvolvimento mais avançado, quando comparado com aquele que é evidenciado pelo desempenho anterior (Figura 272).

5.3.5.3.3. Nível E3.3.

Este nível está associado a desempenhos que mencionem que houve prejuízo e que esse foi de 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos). No exemplo da Figura 274, o aluno analisa o que sucedeu em cada fase do processo – 1.ª venda (+100 euros), 2.ª compra (-400) e 2.ª venda (+100), em que o sinal "+" significa lucro e "-" prejuízo.

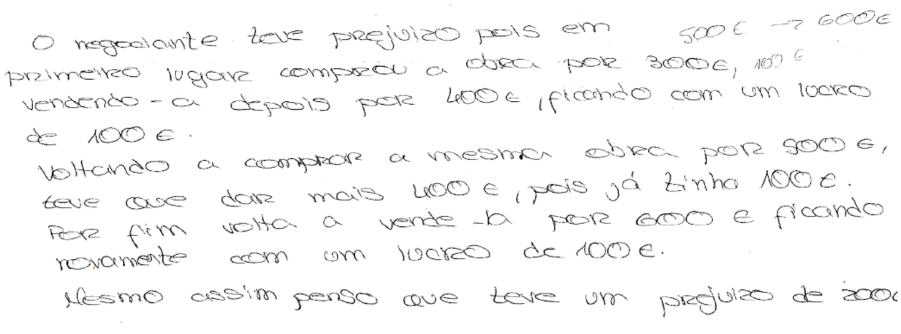


Figura 274 – T.R.4., 10.º ano de escolaridade, Faro

No entanto, ao considerar que o negociante tem prejuízo ao comprar pela segunda vez a obra de arte, conclui que no final tem um prejuízo de 200 euros. Mais uma vez, este exemplo ilumina a confusão existente entre o que significa ter lucro, ter prejuízo e o que é considerado um investimento.

5.3.5.3.4. Nível E3.4.

Neste nível são considerados os desempenhos que referem que houve prejuízo e que este foi de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos). Podemos ter duas possibilidades distintas de desempenhos. Na primeira, os alunos apenas mencionam que houve prejuízo e que foi de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos) sem apresentarem qualquer tipo de justificação. É exemplo desse tipo de desempenho o que se encontra na Figura 275.

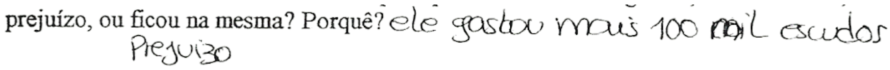

prejuízo, ou ficou na mesma? Porquê? ele gastou mais 100 mil escudos
Prejuizo

Figura 275 – A.L.4., 8.º ano de escolaridade, Leiria

A segunda possibilidade tem a ver com a existência de justificação para o negociante ter tido um prejuízo de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos). São exemplos deste desempenho os que se encontram nas Figuras 276 e 277. O aluno A.L.5. (ver Figura 276) considera que, nesta situação, o negociante teve um prejuízo de 10 mil escudos. Este só tem em consideração o processo até à segunda compra, isto é, analisou o que aconteceu durante a primeira transação, na qual o negociante ganhou 10 mil escudos mas, como recuperou a mesma televisão, comprando-a por 50 mil escudos, ficou a perder 10 mil escudos. Mais uma vez, temos presente uma situação em que o aluno evidenciou mobilizar uma estratégia de resolução passo-a-passo na abordagem do problema, mas que, por considerar que investimento e prejuízo são conceitos equivalentes, a resposta dada não se encontra completa nem adequada à situação.

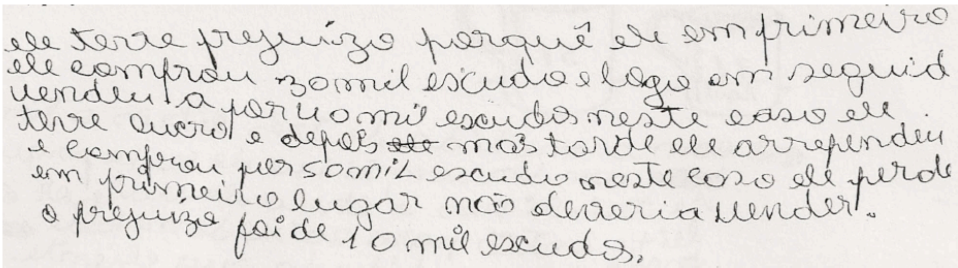

ele teve prejuízo porquê ele em primeiro
ele comprou 30 mil escudos e logo em seguida
vendeu a por 40 mil escudos neste caso ele
teve lucro e depois ~~ele~~ mais tarde ele arrependeu
e comprou por 50 mil escudos neste caso ele perde
em primeiro lugar não deveria vender.
o prejuízo foi de 10 mil escudos.

Figura 276 – A.L.5., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

A estratégia de resolução utilizada pelo aluno P.M.4., na Figura 277, evidencia dois aspetos importantes: (1) entende o que significa prejuízo, uma vez que reconhece que o negociante ficou com menos dinheiro do que tinha; e (2) determina, de forma adequada, o montante gasto nesta situação de compra e venda. No entanto, não consegue determinar, de forma adequada, o dinheiro que foi ganho com as vendas, uma vez que só considerou a última venda (600 euros) e o lucro que proveio da primeira transação (100 euros). Esta estratégia de resolução ilumina uma abordagem global, ainda não conseguida, a que o aluno recorreu para resolver este problema, isto é, recorreu a capacidades e competências que ainda não fazem parte do seu nível de desenvolvimento real (Vygotsky, 1934/1962).

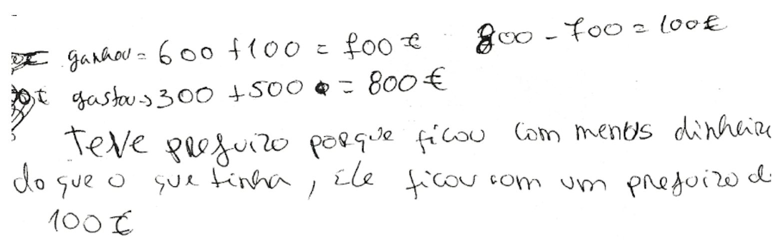


Figura 277 – P.M.4., 11.º ano de escolaridade, Viseu

Para este aluno, trabalhar na sua ZDP (Vygotsky, 1934/1962) pode facilitar a passagem destas capacidades e competências para o nível de desenvolvimento real, ou seja, através das interações sociais ele poderá vir a conseguir utilizar essas capacidades e competências de forma autónoma, futuramente.

5.3.5.3.5. Nível E3.5.

Este nível está associado a desempenhos que abordam dois aspetos, em que cada um deles está associado a um nível de desenvolvimento diferente: (1) não se percebe se efetivamente é um problema de linguagem; e (2) raciocínio adequado, mas não contempla os 400 euros (ver Anexo 26).

5.3.5.3.5.1. Sub-Nível E3.5.1.

Este sub-nível comporta os desempenhos que mencionam que existe prejuízo, mas cuja estratégia de resolução evidencia poder tratar-se de um problema de língua, ou seja, poderá existir confusão entre os termos lucro e prejuízo. No entanto, através da análise da produção escrita não é clara essa confusão, ao contrário do que se pode ver em exemplos que pertencem ao Nível E6.5, cuja análise da estratégia de resolução ilumina dificuldades na compreensão dos conceitos envolvidos neste problema. Um exemplo deste tipo de desempenho encontra-se na Figura 278. Neste caso, a justificação dada por este aluno não evidencia quais os processos de raciocínio subjacentes à resposta, o que nos leva a considerar se se trata, efetivamente, de dificuldades linguísticas.

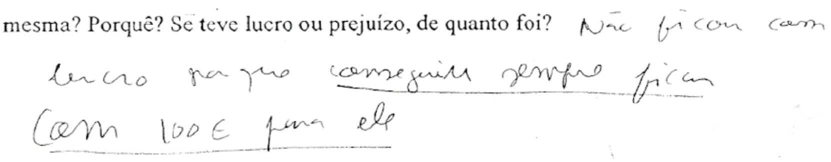

mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi? Não ficou com lucro porque conseguiu sempre ficar com 100€ para ele

Figura 278 – P.T., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

5.3.5.3.5.2. Sub-Nível E3.5.2.

Neste sub-nível estão contemplados os desempenhos que iluminam estratégias de resolução que evidenciam formas de raciocínio adequadas ao enunciado do problema mas, devido a não considerarem um dado do problema, a resposta torna-se desajustada.

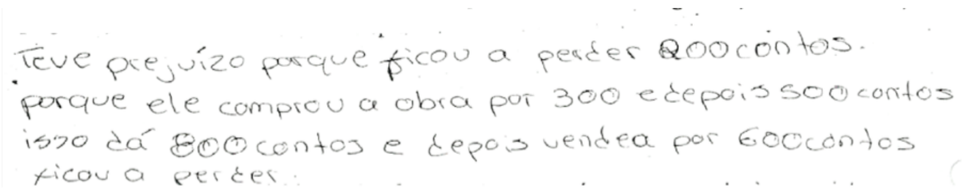

Teve prejuízo porque ficou a perder 200 contos. porque ele comprou a obra por 300 e depois 500 contos isso dá 800 contos e depois vendeu por 600 contos ficou a perder.

Figura 279 – N.º 5, 8.º ano de escolaridade, Leiria

No exemplo da Figura 279 podemos observar que o aluno recorre à abordagem global como estratégia de resolução privilegiada. No entanto, ao considerar que o valor das vendas é apenas de 600 euros, esquecendo-se dos 400 euros da primeira transação, conclui que, no final desta situação, o negociante teve prejuízo de 200 euros. Assim, o que este aluno precisa de desenvolver são processos de verificação das estratégias de resolução a que recorre. No entanto, se tivesse sentido crítico, ter-se-ia apercebido de que, quem vende por mais do que compra, irá ter lucro e não prejuízo.

5.3.5.4. Padrão E4

Neste padrão são considerados os desempenhos que mencionam que, nesta situação, o negociante nem teve lucro, nem prejuízo. Está organizado em seis níveis de desempenho, segundo uma perspetiva desenvolvimentista: (1) sem justificação; (2) com tentativa de explicação; (3) ganhou 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos) em cada transação; (4) houve ganho, perda e ganho de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos); (5) existência de pequenas incorreções nos cálculos efetuados; e (6) raciocínio adequado, mas resposta desajustada (ver Anexo 26). Há 18,2% dos desempenhos dos alunos que fazem parte deste padrão (ver Anexo 21).

5.3.5.4.1. Nível E4.1.

Neste nível são considerados os desempenhos que afirmam que o negociante ficou na mesma, mas nos quais não é esboçado nenhum tipo de justificação. São exemplos destes desempenhos os que ilustramos nas Figuras 280 a 282.

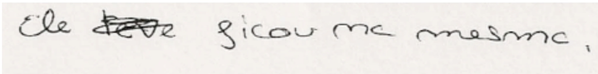

Ele ~~teve~~ ficou na mesma,

Figura 280 – C.F.4., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

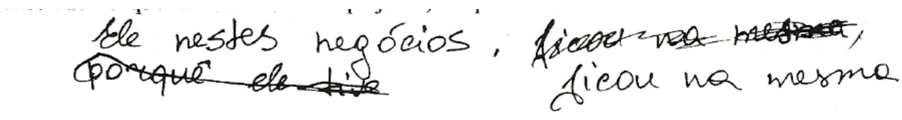

~~Ele~~ nestes negócios, ~~ficou na mesma~~,
~~porque ele tira~~ ficou na mesma

Figura 281 – V.C.2., 12.º ano de escolaridade, Faro

Queremos salientar duas situações que consideramos pertinentes. A primeira está relacionada com a resposta do aluno V.C.2. (Figura 281). Uma das características importantes do IACC é poder ser respondido por alunos do 5.º ao 12.º ano de escolaridade, uma vez que o que se pretende é avaliar as capacidades e competências que os alunos já mobilizam. Assim, as tarefas que o compõem não apelam a conceitos matemáticos próprios de um determinado ano de escolaridade. No entanto, o que se espera é que, à medida que vamos avançando, em termos de ano de escolaridade, os desempenhos produzidos pelos alunos sejam mais complexos do que aqueles que observamos, na mesma tarefa, em anos de escolaridade anteriores. Portanto, desempenhos como o deste aluno, num 12.º ano de escolaridade, são alertas importantes, levando o professor/investigador a ter especial atenção, em relação a este aluno, quando toma decisões para a formação das primeiras díades, bem como para a seleção, adaptação ou elaboração de tarefas matemáticas.

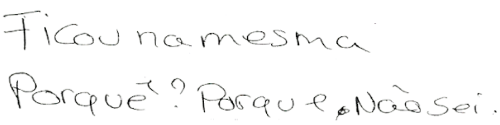

Ficou na mesma
Porquê? Porque, Não sei.

Figura 282 – M.M.4., 8.º ano de escolaridade, Leiria

A segunda situação que queremos destacar está associada ao desempenho do aluno M.M.4. (Figura 282). Este aluno afirma que o negociante ficou na mesma, mas opta por escrever, explicitamente, que não sabe porque é que o negociante ficou na mesma. Assim, neste caso, não sabemos se a resposta foi fruto do acaso.

5.3.5.4.2. Nível E4.2.

Este nível é composto pelos desempenhos que consideram que o negociante ficou na mesma, esboçando algum tipo de justificação. Contudo, não se conseguem inferir os processos de raciocínio inerentes aos tipos de justificação. Estes exemplos constam das Figuras 283 a 285. À exceção do exemplo da Figura 285, os restantes alunos evidenciam que, ficar na mesma, corresponde a recuperar o lucro obtido na primeira venda.

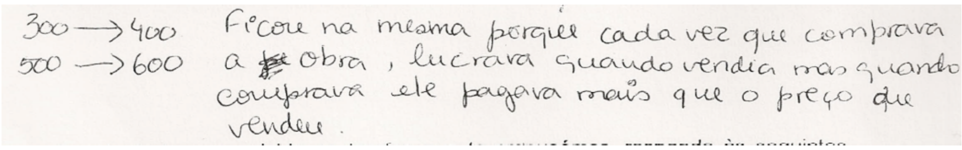

300 → 400
500 → 600
Ficou na mesma porque cada vez que comprava a obra, lucrava quando vendia mas quando comprava ele pagava mais que o preço que vendeu.

Figura 283 – N.º 12, 10.º ano de escolaridade, Lisboa

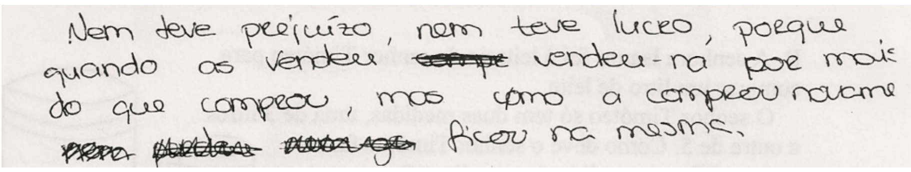

Nem teve prejuízo, nem teve lucro, porque quando os vendeu ~~compr~~ vendeu-a por mais do que comprou, mas como a comprou novamente ficou na mesma.

Figura 284 – N.º 1, 12.º ano de escolaridade, Leiria

No entanto, o desempenho da Figura 285 salienta um aspeto que não foi mencionado até agora: que ficar na mesma significa não ter ganho nenhum dinheiro nessas duas transações.

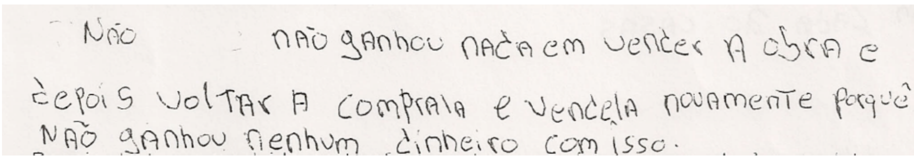

Não não ganhou nada em vender a obra e depois voltar a comprala e vendela novamente porquê não ganhou nenhum dinheiro com isso.

Figura 285 – N.º 15, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Embora não tenhamos conseguido identificar, de forma completa, os processos de raciocínio subjacentes a esta situação de compra e venda, este desempenho destaca-se dos anteriores, uma vez que este aspeto ilumina uma maior compreensão do que é ficar na mesma, numa situação de negócio.

5.3.5.4.3. Nível E4.3.

Os desempenhos que estão associados a este nível referem que o negociante ficou na mesma porque em ambas as transações ganhou 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos). Nas Figuras 286 e 287 são apresentados alguns exemplos deste nível.

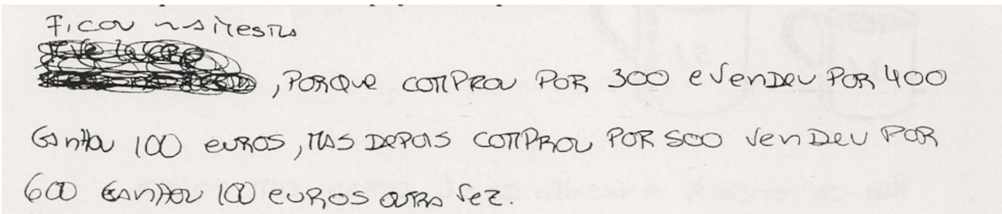


Figura 286 – R.S.4., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

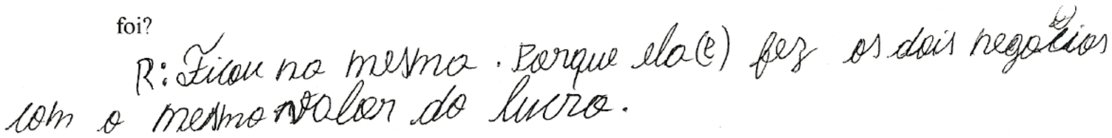
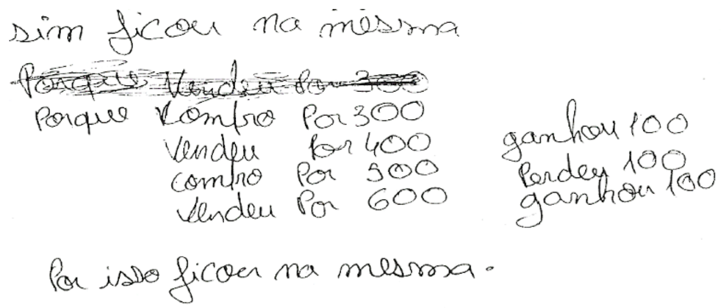


Figura 287 – I.C., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

As estratégias de resolução anteriores iluminam uma preferência por uma abordagem passo-a-passo do problema, uma vez que estes alunos analisam o que sucede em cada transação. No entanto, apesar de identificarem que existe um lucro de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos) após cada venda, para estes alunos significa que, como o negociante ganhou o mesmo montante em cada transação, este ficou na mesma. Esta justificação evidencia que os desempenhos dos alunos se encontram num nível de desenvolvimento em que não conseguem afirmar que houve ganho, se o negociante teve lucro nas duas situações.

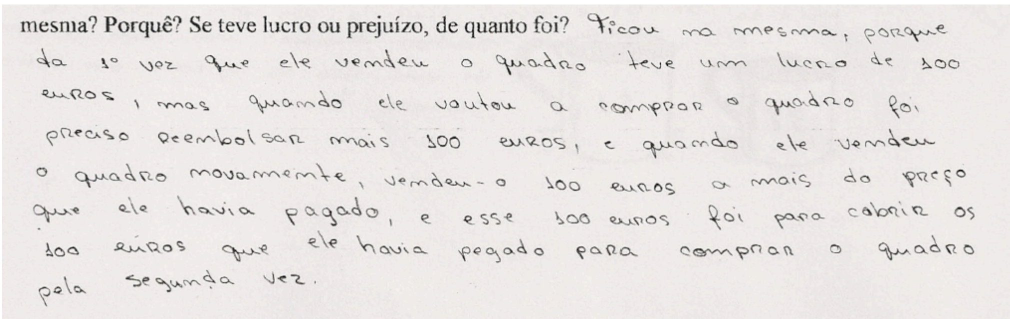
5.3.5.4.4. Nível E4.4.

Considerámos como desempenhos deste nível aqueles em que os alunos afirmam que o negociante ficou na mesma, porque recuperou, na segunda venda, o montante que ganhou na primeira venda e que, posteriormente, perdeu quando voltou a comprar a mesma obra de arte. Os exemplos que constam nas Figuras 288 a 290 ilustram os desempenhos que caracterizam este nível.



sim ficou na mesma
~~Porque Vendeu por 300~~
Porque Kompro Por 300
Vendeu Por 400
compro Por 500
Vendeu Por 600
ganhou 100
Perdeu 100
ganhou 100
Por isso ficou na mesma.

Figura 288 – R.R., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

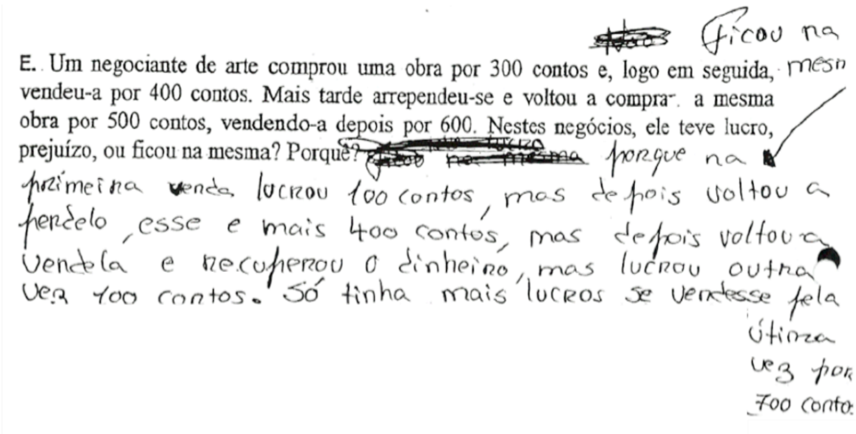


mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi? Ficou na mesma, porque da 1º vez que ele vendeu o quadro teve um lucro de 100 euros, mas quando ele voutou a comprar o quadro foi preciso reembolsar mais 100 euros, e quando ele vendeu o quadro novamente, vendeu-o 100 euros a mais do preço que ele havia pagado, e esse 100 euros foi para cobrir os 100 euros que ele havia pegado para comprar o quadro pela segunda vez.

Figura 289 – T.M.3., 10.º ano de escolaridade, Faro

Nestes desempenhos, os alunos consideram a existência de lucro na primeira venda, o que ilumina que compreendem que, quando um artigo é vendido por um preço mais elevado do que foi comprado, existe lucro. Na maior parte das respostas é acrescentada a esta justificação o montante correspondente ao lucro. No entanto, o negociante, ao comprar pela segunda vez a obra de arte, perde o lucro que tinha ganho e, como volta a recuperá-lo na última venda, para estes alunos é sinónimo de que este ficou na mesma. Com isto queremos salientar que, para estes alunos, ficar na mesma significa recuperar o montante de lucro obtido através da primeira venda. Este tipo de raciocínio é frequente ocorrer em alunos que mobilizam o raciocínio concreto ou que se encontram em fase de transição entre este e o raciocínio abstrato.

Como podemos observar na Figura 290, o aluno recorre a uma estratégia de resolução característica deste padrão, mas finaliza-a dando uma sugestão, isto é, afirma que, para o negociante ter um maior lucro, teria que vender a obra de arte por 700 contos. Esta situação ilumina que este aluno reconhece que existiu lucro em ambas as vendas. Mas, como considera existir prejuízo quando é comprada pela segunda vez a obra de arte, refere que para existir um maior lucro, portanto superior a 100 contos, esta teria que ser vendida por um preço superior a 600 contos.



E. Um negociante de arte comprou uma obra por 300 contos e, logo em seguida, vendeu-a por 400 contos. Mais tarde arrependeu-se e voltou a comprar a mesma obra por 500 contos, vendendo-a depois por 600. Nestes negócios, ele teve lucro, prejuízo, ou ficou na mesma? Porquê?

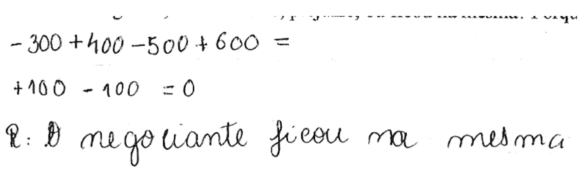
Ficou na mesm porque na primeira venda lucrou 100 contos, mas depois voltou a pendelo, esse e mais 400 contos, mas depois voltou a vendela e recuperou o dinheiro, mas lucrou outra vez 100 contos. Só tinha mais lucros se vendesse pela útima vez por 700 contos

Figura 290 – T.F.2., 8.º ano de escolaridade, Leiria

Nestes exemplos, apesar de considerarem que o comerciante ficou na mesma, os raciocínios subjacentes à resposta são mais elaborados, havendo já uma parte do conceito de lucro que é focada.

5.3.5.4.5. Nível E4.5.

Os desempenhos que constituem este nível estão relacionados com a existência de pequenas incorreções nos cálculos efetuados e que contribuíram para uma resposta desajustada acerca desta situação. Os diversos exemplos que aqui apresentamos e que ilustram os desempenhos deste nível revelam que, ficar na mesma, significa que o negociante, após as duas transações, não obteve dinheiro nenhum. É este aspeto que diferencia os desempenhos deste nível dos anteriores. São exemplos os que se encontram nas Figuras 291 a 293.

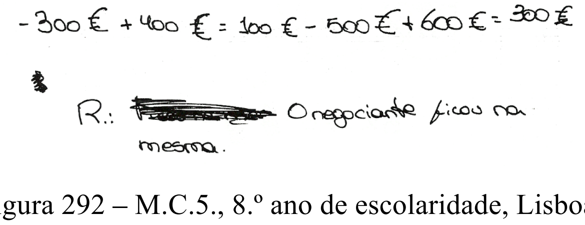


$-300+400-500+600=$

$+100-100=0$

R: O negociante ficou na mesma

Figura 291 – L.C., 10.º ano de escolaridade, Leiria



-300 € + 400 € = 100 € - 500 € + 600 € = 300 €

R.: O negociante ficou na mesma.

Figura 292 – M.C.5., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

Atendendo às estratégias de resolução das duas figuras anteriores, queremos salientar um elemento que nos parece importante e que está relacionado com o rigor da escrita, do ponto de vista matemático. Esse rigor pode estar associado ao nível de escolaridade em que o aluno se encontra, isto é, enquanto que o aluno L.C. já revela conseguir realizar uma estratégia de resolução algébrica mais rigorosa, o aluno M.C.5. ainda utiliza uma simbologia algébrica pouco cuidada e rigorosa.

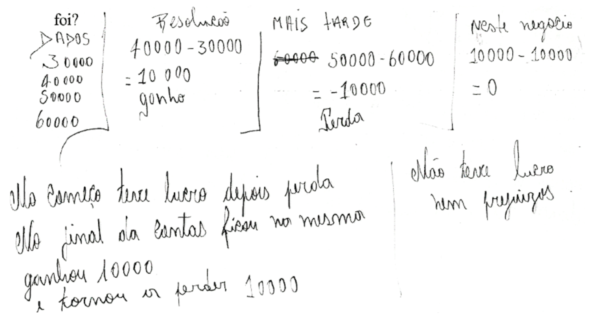


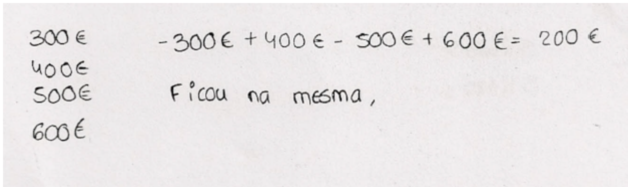
Figura 293 – J.L.2., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

Por fim, a estratégia de resolução da Figura 293 revela um erro de natureza diferente dos anteriores, uma vez que considera, na segunda venda, que houve perda. Essa situação resulta deste aluno ter atribuído, de forma desajustada, o sinal matemático para designar venda e compra ("-" e "+", respetivamente), o que originou que o resultado final desta situação fosse não ter ganho nenhum dinheiro.

5.3.5.4.6. Nível E4.6.

Para este nível considerámos os desempenhos que revelam que os alunos utilizam uma estratégia de resolução adequada ao problema, recorrendo a uma abordagem global ou passo-a-passo, mas a resposta dada é desajustada, devido à inexistência de mecanismos de verificação. São exemplos deste nível os que se encontram nas Figuras 294 a 297.

No primeiro exemplo, o aluno V.M.2. opta por utilizar uma abordagem passo-a-passo, que lhe permitiria resolver com sucesso o problema. Porém, quando escreve a resposta, esta está desajustada. Esta evidência pode iluminar alguma dificuldade em relação à interpretação do resultado matemático referente à expressão algébrica que utilizou. Assim, este aluno revela conseguir traduzir para a linguagem matemática, de forma completa, a informação contida no enunciado do problema. No entanto, não realiza com sucesso a última fase da estratégia de resolução – interpretação do resultado (200 euros).



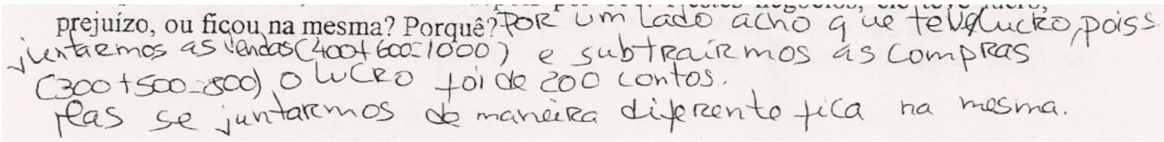
300 €
400 €
500 €
600 €

−300 € + 400 € − 500 € + 600 € = 200 €

Ficou na mesma,

Figura 294 – V.M.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

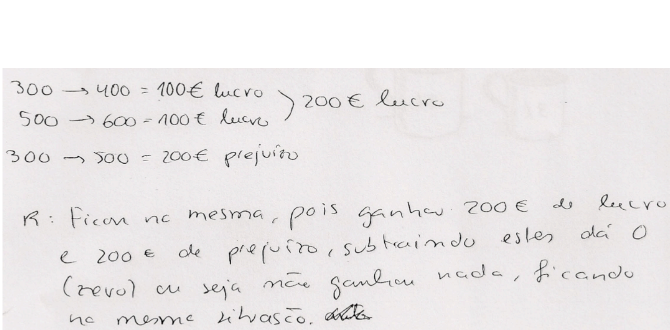
Na Figura 295, o desempenho que se pode observar ilumina que este aluno recorre a uma abordagem global do problema, uma vez que soma o montante que o negociante ganhou com as vendas e subtrai o que perdeu com as compras. Contudo, à semelhança do que aconteceu no exemplo anterior, este aluno dá uma resposta desajustada. Não se consegue, no entanto, ter acesso aos processos de raciocínio associados à última parte desta estratégia de resolução, que levaram a considerar que o negociante ficava na mesma.



prejuízo, ou ficou na mesma? Porquê? Por um lado acho que teve lucro, pois juntarmos as vendas (400 + 600 = 1000) e subtrairmos as compras (300 + 500 = 800) o lucro foi de 200 contos. Mas se juntarmos de maneira diferente fica na mesma.

Figura 295 – N.º 13, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Nas Figuras 296 e 297 temos uma situação diferente das anteriores, embora seja ainda notória a inexistência de mecanismos de verificação. Nestes dois casos, os alunos optam por uma estratégia de resolução passo-a-passo, identificando que houve um lucro de 200 euros. No entanto, ao determinar o valor do prejuízo (500 – 300 = 200) não se apercebem que já consideraram essa informação quando determinaram o valor do lucro, estando, neste caso, a duplicar a informação.



300 → 400 = 100 € lucro
500 → 600 = 100 € lucro } 200 € lucro
300 → 500 = 200 € prejuízo

R: Ficou na mesma, pois ganhou 200 € de lucro e 200 € de prejuízo, subtraindo estes dá 0 (zero) ou seja não ganhou nada, ficando na mesma situação.

Figura 296 – C.C.4., 10.º ano de escolaridade, Lisboa

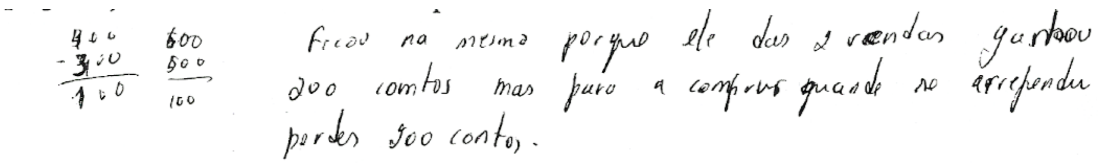


Figura 297 – R.V.2., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Estas situações iluminam a importância da existência de mecanismos de verificação, que permitam identificar situações de utilização repetida da mesma informação, que pode originar respostas desajustadas. Para além disso, também realçam a necessidade da mobilização da capacidade de interpretação da informação contida nos enunciados dos problemas.

5.3.5.5. Padrão E5

O Padrão E5 é composto pelos desempenhos que consideram que existiu lucro nesta situação de compra e venda do artigo, mas o valor indicado é diferente do adequado, ou seja, não são 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos). Abrange sete níveis de desenvolvimento: (1) outros valores de lucro (diferentes de 100 e 300); (2) sem justificação; (3) lucro de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos) com explicação pouco clara; (4) 300 euros (ou 300 contos ou 30 mil escudos) de lucro; (5) lucro de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos), porque vendia mais caro; (6) lucro de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos), considerando a 1.ª ou 2.ª transação; e (7) perde 100 euros e ficou só com 100 euros no final (ou 100 contos ou 10 mil escudos) (ver Anexo 26). Há 29,1% dos desempenhos dos alunos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.5.5.1. Nível E5.1.

Este nível engloba os desempenhos dos alunos que consideram que houve lucro, mas o valor que referem ter existido não respeita as diversas informações do enunciado. Os exemplos das Figuras 298 e 299 iluminam que, para estes alunos, o lucro está associado ao que o negociante recebeu na última venda (600 euros), ignorando o que ocorreu anteriormente, em termos de compras e vendas.

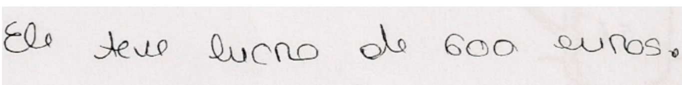


Figura 298 – P.P.3., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

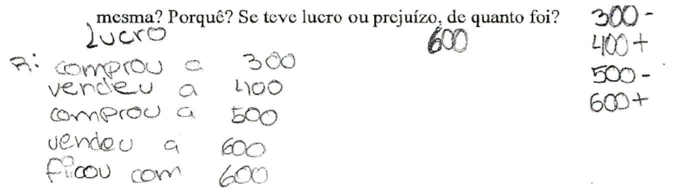


Figura 299 – E.S.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Queremos ainda salientar, no desempenho do aluno E.S.2., que este consegue perceber que, quando compra um artigo, é dinheiro a menos (300- e 500-) e que vender é dinheiro a mais (400+ e 600+), o que ilumina que consegue, ainda que parcialmente, mobilizar competências associados a conhecimentos inerentes a uma situação de compra e venda.

5.3.5.5.2. Nível E5.2.

São considerados como desempenhos deste nível os que referem que o negociante teve lucro, mas não existe justificação. Identificámos três categorias diferentes que apresentam igual nível, em relação ao desenvolvimento cognitivo: (δ) apenas afirmam que teve lucro, sem indicarem valor; (λ) indicam 300 euros (ou 300 contos ou 30 mil escudos) como o valor do lucro; e (μ) indicam 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos) como valor do lucro (ver Anexo 26).

Na categoria δ são considerados os desempenhos que apenas afirmam que o negociante teve lucro, como podemos observar um exemplo na Figura 300. Este tipo de desempenho, no qual não existe justificação, não permite compreender as formas de raciocínio subjacentes à resposta dada.

Figura 300 – M.A.4., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Na Figura 301 podemos observar um exemplo de desempenho característico da categoria λ, na qual os alunos referem que existiu um lucro de 300 euros, mas não fornecem uma explicação que permita ao professor/investigador inferir quais os processos de raciocínio utilizados.

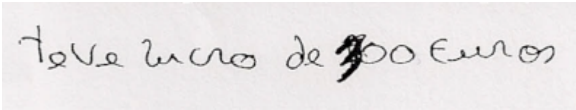


Figura 301 – P.B.2., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

Fazem parte da categoria μ os desempenhos que referem que o negociante teve lucro e que este foi de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos), mas tal como aconteceu com os exemplos anteriores, estes também não apresentam justificação, como podemos observar nas Figuras 302 e 303.

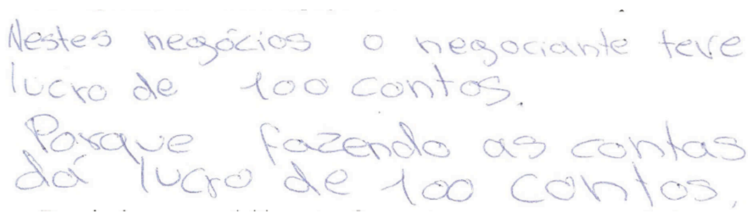


Figura 302 – A.P.2., 9.º ano de escolaridade, Leiria

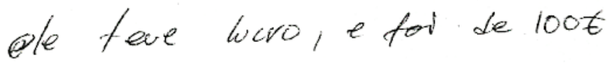


Figura 303 – S.A.4., 9.º ano de escolaridade, Açores

Assim, mesmo no caso de A.P.2., que revela ter feito cálculos, não temos acesso a como essas operações foram realizadas. Quando os alunos não apresentam as razões que os levaram a optar por aquela resposta, não permitem ao professor/investigador inferir os processos de raciocínio associados a essa resposta, contribuindo para uma avaliação pouco rigorosa acerca das capacidades e competências que este já mobiliza e das que precisa de desenvolver.

5.3.5.5.3. Nível E5.3.

Neste nível são considerados os desempenhos em que os alunos afirmam que o negociante teve um lucro de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos), mas cujas justificações são pouco claras. Na Figura 304 temos um exemplo de desempenho deste nível. O aluno P.M.5. refere que o negociante ficou com 100 euros de lucro, porque vendeu e comprou até acabar com 600 euros. Contudo, embora mencione os 400 e 600 euros, não conclui que o lucro foi de 200 euros.

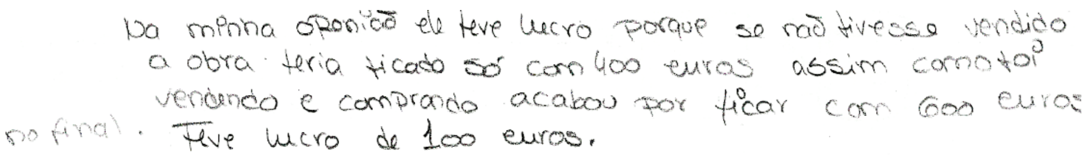

Na minha opinião ele teve lucro porque se não tivesse vendido a obra teria ficado só com 400 euros assim como foi vendendo e comprando acabou por ficar com 600 euros no final. Teve lucro de 100 euros.

Figura 304 – P.M.5., 10.º ano de escolaridade, Faro

Este aluno revela, assim, algumas dificuldades na interpretação dos dados do enunciado e da sua própria resolução.

5.3.5.5.4. Nível E5.4.

Os desempenhos que pertencem a este nível são aqueles em que o negociante obteve um lucro de 300 euros (ou 300 contos ou 30 mil escudos), apresentando uma justificação para esse valor, como podemos observar um exemplo na Figura 305.

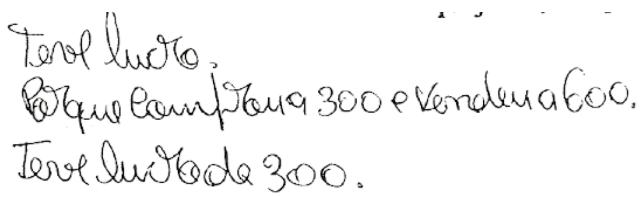

Teve lucro.
Porque comprava 300 e vendeu a 600.
Teve lucro de 300.

Figura 305 – C.C.5., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

Este exemplo ilumina um desempenho de alunos que ainda mobilizam o raciocínio concreto ou que se encontram num processo de transição entre este e o abstrato, mas ainda numa fase inicial do mesmo. Esta informação é inferida através da análise da produção escrita: só consideram o que ocorreu no início e no final, ignorando o que ocorreu durante o processo. Assim, consideram que o negociante teve um lucro de 300 euros (ou 300 contos ou 30 mil escudos), pois é o resultado da diferença entre o montante final obtido com a última venda (600) e o inicial (300), que corresponde à primeira aquisição da obra de arte.

5.3.5.5.5. Nível E5.5.

Este nível é caracterizado por desempenhos que afirmam que o negociante teve um lucro de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos), porque vendia sempre por um valor mais elevado do que aquele pelo qual tinha comprado. Nas Figuras 306 e 307 estão exemplos que considerámos fazer parte deste nível. Embora a quantificação do lucro esteja determinada de forma desajustada, estes alunos mostram ter apropriado o conceito de lucro, isto é, que este existe sempre que vendemos um bem por um montante superior ao que o comprámos.

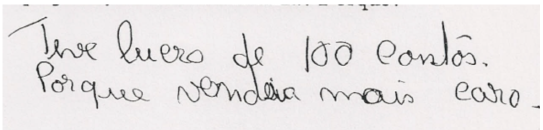


Figura 306 – J.P.4., 8.º ano de escolaridade, Leiria

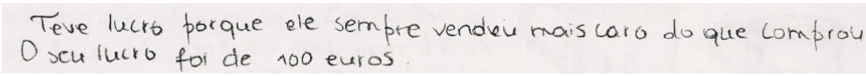


Figura 307 – T.S.2., 10.º ano de escolaridade, Faro

Estes desempenhos apenas nos permitem compreender parte dos processos de raciocínio destes alunos, uma vez que não conseguimos inferir quais foram os processos de raciocínio associados à resposta dos 100 euros, por não termos acesso à estratégia de resolução explicitada de forma detalhada.

5.3.5.5.6. Nível E5.6.

Deste nível fazem parte os desempenhos que consideram que o negociante teve lucro de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos), mas que centram a própria justificação apenas numa das transações. Por exemplo, se considerarmos a estratégia de resolução que nos é apresentada na Figura 308, o aluno C.F.5. afirma que o negociante teve lucro, uma vez que comprou a obra de arte por 300 euros e vendeu por 400, lucrando 100 euros. Assim, este aluno apenas baseou a sua resposta no que ocorreu inicialmente.

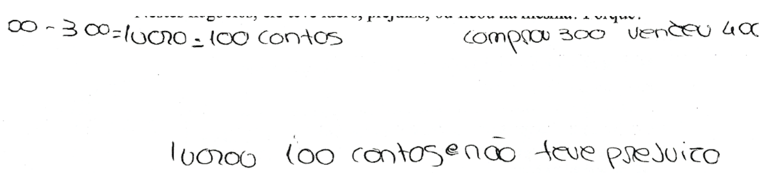


Figura 308 – C.F.5., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Por seu turno, o aluno D.R.2. utiliza para justificar o porquê do negociante ter tido um lucro de 100 euros, apenas o que aconteceu na última transação, isto é, quando este compra a obra de arte por 500 euros e a vende por 600 euros. Para além disso, este aluno também justifica a escolha da palavra lucro, pois nesta situação esta é vendida acima do preço.

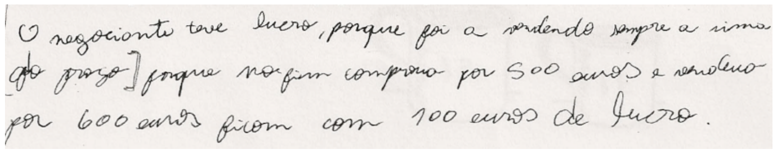
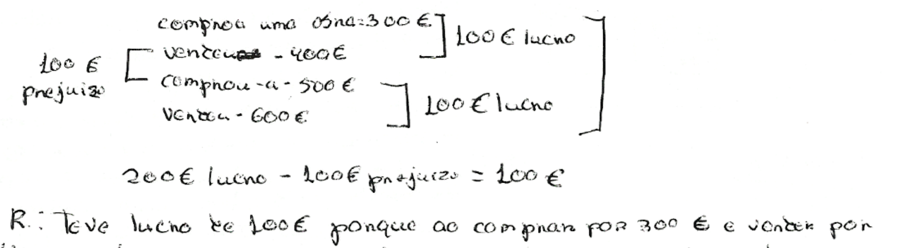

O negociante teve lucro, porque foi a vendendo sempre a cima do preço] porque no fim comprou por 500 euros e vendeu por 600 euros ficou com 100 euros de lucro.

Figura 309 – D.R.2., 8.º ano de escolaridade, Açores

Assim, em qualquer um destes exemplos, os alunos compreendem o conceito de lucro, contabilizam-no para uma das vendas, mas ignoram a outra venda, pelo que a resposta não tem em consideração uma parte dos dados do enunciado deste problema.

5.3.5.5.7. Nível E5.7.

No Nível E5.7 são considerados os desempenhos que mencionam que o negociante ficou com 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos), uma vez que consideram que o lucro obtido na 1.ª transação se perde com a 2.ª compra da obra de arte ou televisão. Na Figura 310, o desempenho do aluno A.P.3. baseia-se numa abordagem passo-a-passo do problema. Afirma existir lucro de 100 euros na primeira e na segunda venda do artigo. No entanto, considera que o negociante teve prejuízo quando voltou a comprar a obra de arte, o que o leva a considerar que o lucro foi de 100 euros.


comprou uma obra: 300 €] 100 € lucro
vendeu - 400 €
comprou-a - 500 €] 100 € lucro
vendeu - 600 €
100 € prejuízo

200 € lucro - 100 € prejuízo = 100 €

R.: Teve lucro de 100 € porque ao comprar por 300 € e vender por 400, ele teve lucro de 100 €, depois ao tornar a comprar teve prejuízo de 100 €, e depois ao tornar a vender teve lucro de 100 €, ou seja dos 200 € lucro ~~menos~~ menos os 100 € de prejuízo, concl...

Figura 310 – A.P.3., 11.º ano de escolaridade, Viseu

Como é explicado no enunciado do IACC e repetido pelo professor/investigador quando os alunos respondem a este instrumento, na primeira semana de aulas do ano letivo, é válida qualquer forma de expressar as diversas estratégias de resolução. Como podemos observar nas Figuras 311 a 313, os alunos optaram por utilizar estratégias de resolução diferentes.

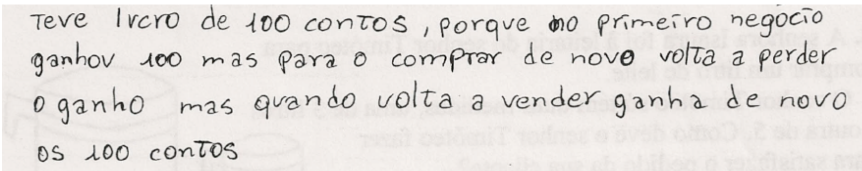

Teve lucro de 100 contos, porque no primeiro negocio ganhou 100 mas para o comprar de novo volta a perder o ganho mas quando volta a vender ganha de novo os 100 contos

Figura 311 – N.º 7, 12.º ano de escolaridade, Leiria

Enquanto que o aluno da Figura 311, opta por uma composição matemática como estratégia de resolução privilegiada, os alunos A.C.4. e N.A.2. (Figuras 312 e 313) recorrem a esquemas para iluminar os processos de raciocínio e a estratégia de resolução algébricas, associadas a pequenos esquemas, respetivamente.

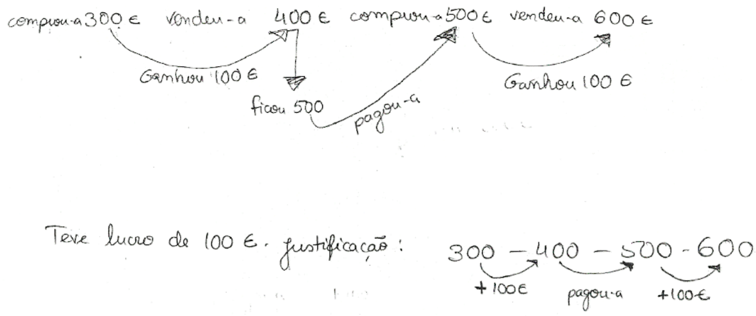


Figura 312 – A.C.4., 10.º ano de escolaridade, Viseu

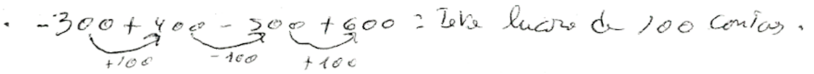


Figura 313 – N.A.2., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Nas Figuras 312 e 313 podemos, também, observar exemplos que iluminam que os alunos recorrem a uma abordagem passo-a-passo. Por exemplo, o aluno N.A.2. indica uma soma algébrica que traduz o enunciado do problema (-300 + 400 – 500 + 600). Porém, como considera que, quando é feita a segunda compra, há prejuízo (-100), não resolve a expressão algébrica que escreveu, obtendo um lucro de 100 euros e não de 200 euros.

5.3.5.6. Padrão E6

O Padrão E6 está associado a desempenhos que tenham em consideração que o negociante teve um lucro de 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos), mas fornecem uma justificação incompleta. Fazem parte deste padrão cinco níveis de desempenho: (1) em cada transação teve lucro de 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos); (2) lucro de 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos) sem explicação; (3) lucro de 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos), porque vendeu por mais; (4) lucro com pequenas incorreções; e (5) raciocínio adequado, mas com dificuldades na Língua Portuguesa (ver Anexo 26). Há 14,3% de desempenhos que fazem parte deste padrão (ver Anexo 21).

5.3.5.6.1. Nível E6.1.

Este nível é composto pelos desempenhos que consideram que o negociante teve lucro porque ganhou, em cada negócio, 100 euros (ou 100 contos ou 10 mil escudos). Este tipo de justificação ilumina que estes alunos não conseguiram compreender esta situação num plano mais abrangente e abstrato, isto é, que não conseguiram perceber que, se o negociante ganhou o mesmo montante nas duas transações, então o lucro que obteve seria o dobro desse valor, ou seja, 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos).

Nos três exemplos seguintes (Figuras 314, 315 e 316) temos presentes estratégias de resolução e formas de escrita diferentes.

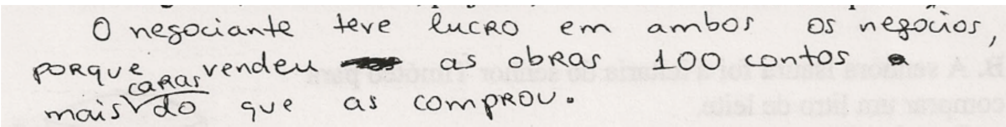

O negociante teve lucro em ambos os negócios, porque vendeu as obras 100 contos mais caras do que as comprou.

Figura 314 – N.º 9, 12.º ano de escolaridade, Leiria

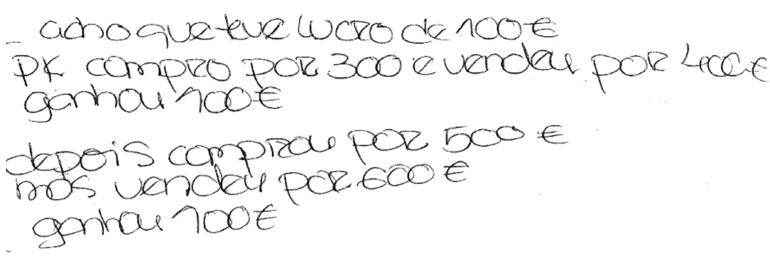

acho que teve lucro de 100€
PK compro por 300 e vendeu por 400€
ganhou 100€
depois comprou por 500 €
mas vendeu por 600 €
ganhou 100€

Figura 315 – T.B., 8.º ano de escolaridade, Açores

Enquanto que na Figura 316, o aluno opta por fornecer uma explicação mais sucinta acerca do que ocorreu neste negócio, os alunos T.B. e G.R. constroem uma explicação mais completa, enumerando todos os passos de cada transação.

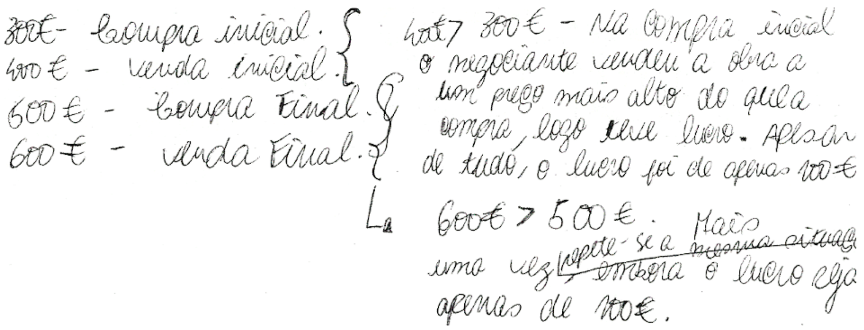


Figura 316 – G.R., 10.º ano de escolaridade, Faro

Por último, queremos salientar um aspeto que nos parece importante no desempenho do aluno G.R. Este recorre a um comparação de quantidades, indicando qual delas é a maior, para explicar que o negociante teve lucro (400 > 300 e 600 > 500). Esta forma de atuação ilumina que este aluno recorreu a uma abordagem passo-a-passo na resolução deste problema.

5.3.5.6.2. Nível E6.2.

Neste nível são considerados os desempenhos que referem que o negociante obteve um lucro de 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos), mas sem explicação. São exemplos deste nível os que se podem observar nas Figuras 317 e 318.

Figura 317 – R.G.2., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

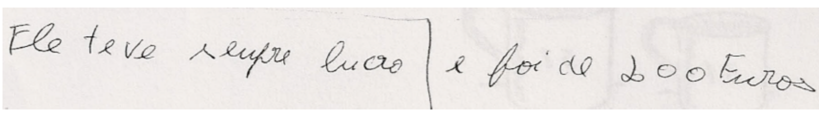


Figura 318 – J.C.8., 12.º ano de escolaridade, Faro

Estas respostas não nos permitem ter acesso aos processos de raciocínio utilizados por estes alunos.

5.3.5.6.3. Nível E6.3.

Os desempenhos que constituem este nível são aqueles em que os alunos referem que, no final, este negócio proporcionou um lucro de 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos), uma vez que o negociante vendia sempre a obra de arte por um valor superior ao que tinha comprado.

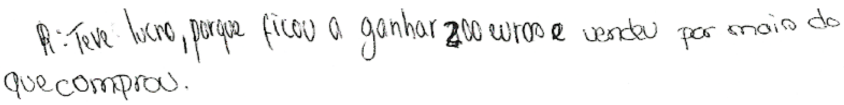

R: Teve lucro, porque ficou a ganhar 200 euros e vendeu por mais do que comprou.

Figura 319 – C.M., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

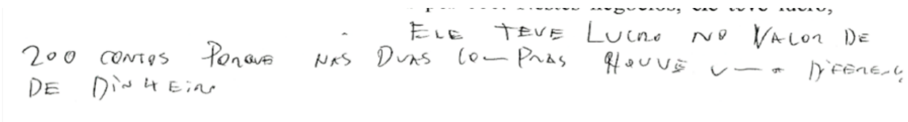
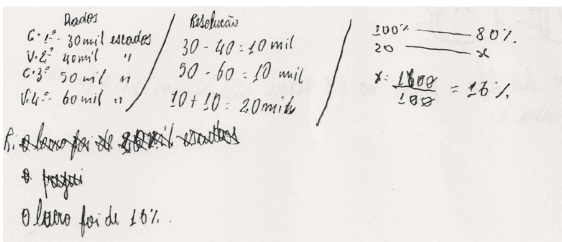

Ele teve lucro no valor de 200 contos porque nas duas compras houve uma diferença de dinheiro

Figura 320 – R.S.6., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Como a quantificação apresentada são os 200 euros (ou 200 contos) percebemos que houve estratégias de resolução que o aluno utilizou, mas que não explicitou.

5.3.5.6.4. Nível E6.4.

Neste nível os alunos recorrem a uma abordagem passo-a-passo ou global do problema. No entanto, existem algumas incorreções, do ponto de vista matemático. Por exemplo, na Figura 321, o aluno L.V. determina, de forma completa, o valor do lucro em cada transação (10 mil escudos), bem como o montante do mesmo, no final do negócio (20 mil escudos). Contudo, sente a necessidade de dar a resposta em forma de percentagem. Esta evidência ilumina o que também já afirmámos anteriormente em alguns padrões: alguns alunos tendem a recorrer a conhecimentos matemáticos, mesmo que sejam desapropriados em relação à situação descrita no enunciado do problema, para mostrar ao professor/investigador que apropriaram determinados conhecimentos.


Dados
C 1.º 30 mil escudos
V 2.º 40 mil "
C 3.º 50 mil "
V 4.º 60 mil "

Resolução
30 - 40 = 10 mil
50 - 60 = 10 mil
10 + 10 = 20 mil

100% — 80%
20 — x
x = 1600/100 = 16%

O lucro foi de 16%.

Figura 321 – L.V., 10.º ano de escolaridade, Cabo Verde

O exemplo de desempenho que se encontra na Figura 322 também ilumina a necessidade da utilização de conceitos matemáticos. Neste caso, temos também as percentagens, mas usadas de outra forma.

400 - 300 = 100 10%
600 - 500 = 100 10%
Ele teve um lucro de 20% porque em cada compra e venda ele ficou a ganhar mais 100 € ou seja mais 10%, como ele comprou e vendeu 2 vezes 10 + 10 = 20, então ele teve um lucro de 20% = 200 €

Figura 322 – A.A.5., 10.º ano de escolaridade, Lisboa

Enquanto que, no exemplo anterior (Figura 321), o aluno pretende dar a resposta sob a forma de percentagem, realizando com sucesso a determinação do valor do lucro, o aluno A.A.5. (Figura 322) associa o ganho em cada transação a 10%, concluindo que o negociante teve um lucro de 20%, que corresponde a 200 euros.

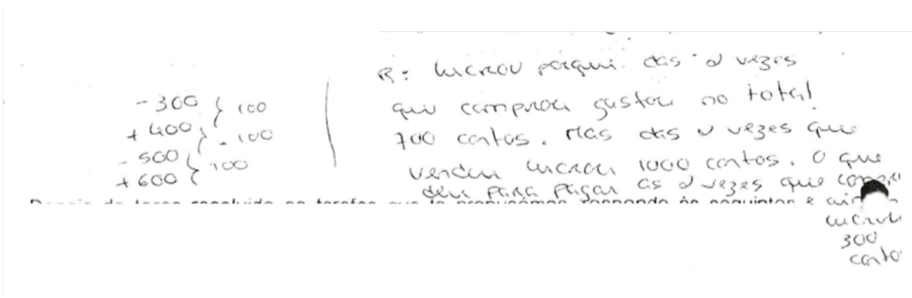
Nas Figuras 323 e 324 podemos observar outros exemplos de desempenho deste nível.

Negociante → $-300 + 400 - 500 + 600 =$
$= -800 + 900$
$= +100$

Teve lucro de 100 euros

Figura 323 – F.E.2., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

O aluno F.E.2. opta pela escrita de uma expressão algébrica, como estratégia de resolução privilegiada, que represente o que aconteceu nesta situação. Mas, devido a um erro de cálculo (400 + 600 = 900), concluiu que o negociante teve um lucro de 100 euros. Já na Figura 324, o aluno M.S.5. determina, de forma desajustada, o valor que o negociante gastou para comprar, pela duas vezes, a obra de arte (700 euros). No entanto, esta incorreção, devida a em erro de cálculo, não invalida a estratégia de resolução algébrica adotada por este aluno, nem o processo de raciocínio que lhe está subjacente e que é adequado ao problema proposto. Queremos, ainda, salientar que este aluno oscila entre os dois tipos de abordagem – passo-a-passo ou global – evidenciado alguns aspetos desadequados, em ambas.


-300 } 100
+400 } -100
-500 } 100
+600

R: lucrou porque das 2 vezes que comprou gastou no total 700 contos. Mas das 2 vezes que vendeu lucrou 1000 contos. O que deu para pagar as 2 vezes que comprou ... lucrou 300 contos

Figura 324 – M.S.5., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Se observarmos o quadro que contém todos os padrões que emergiram da análise dos desempenhos dos alunos nesta tarefa (ver Anexo 26), podemos constatar que existe um padrão que engloba os desempenhos que mencionam que o negociante teve um lucro de 300 euros (Padrão E5.4). Portanto, se nos focássemos unicamente no resultado obtido e não nos processos de raciocínio subjacentes às estratégias de resolução, teríamos avaliado de forma pouco adequada o desempenho que é ilustrado na Figura 324.

5.3.5.6.5. Nível E6.5.

Para este nível são considerados os desempenhos que evidenciem algumas barreiras ao nível linguístico, embora os processos de raciocínio tenham sido utilizados de forma adequada ao enunciado do problema. São exemplos os que se encontram nas Figuras 325 à 329.

Na Figura 325 está presente um exemplo de uma estratégia de resolução que recorre a uma abordagem global do problema, uma vez que este aluno considera o montante que o negociante gastou com as compras (800 euros) e o que ganhou com as vendas (1000 euros). No entanto, considera que houve prejuízo de 200 euros, pois só ficou com esse valor no final. Este exemplo ilumina que o aluno em questão não consegue estabelecer conexões entre o resultado obtido e os significados, na língua portuguesa, de lucro e prejuízo. Assim, apesar de ter utilizado uma estratégia de resolução semelhante à dos alunos da Categoria E7.1.β, fornece uma resposta que não corresponde ao que aconteceu, por não mobilizar os significados de lucro e prejuízo. Este tipo de desempenho era típico de alunos cujas línguas maternas eram outras e que residiam há pouco tempo em Portugal, só tendo contacto com a língua portuguesa quando emigraram.

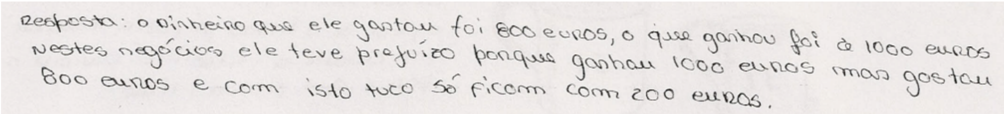

Resposta: o dinheiro que ele gastou foi 800 euros, o que ganhou foi à 1000 euros
nestes negócios ele teve prejuizo porque ganhou 1000 euros mas gastou
800 euros e com isto tudo só ficom com 200 euros.

Figura 325 – I.I., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

Como podemos observar na Figura 326, o aluno I.F. adota uma abordagem global do problema: (1) determina o valor gasto nas duas compras, associando-o ao prejuízo (800 euros); e (2) calcula o montante ganho nas duas vendas, associando-o ao lucro (1000 euros). No entanto, a resposta que dá ao problema evidencia que existiu alguma dificuldade quanto à interpretação do próprio problema, pois não compreende que o que era pedido era se tinha havido, no final das duas transações, lucro ou prejuízo, ou seja, confunde o dinheiro investido com prejuízo e o recebido com lucro.

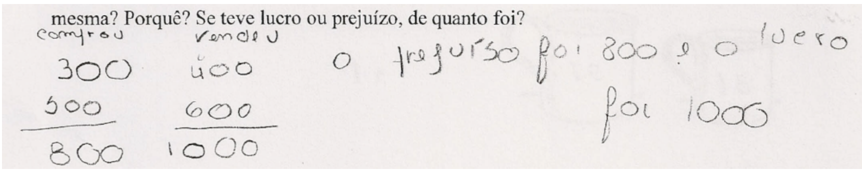

mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi?
comprou vendeu
300 400 o prejurso foi 800 e o lucro
500 600 foi 1000
800 1000

Figura 326 – I.F., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

No exemplo da Figura 327, temos uma situação semelhante, uma vez que o aluno T.P.2. afirma ter existido lucro e prejuízo, quantificando-o. No entanto, a justificação que exibe ilumina alguns problemas de compreensão do próprio problema e de expressão escrita.

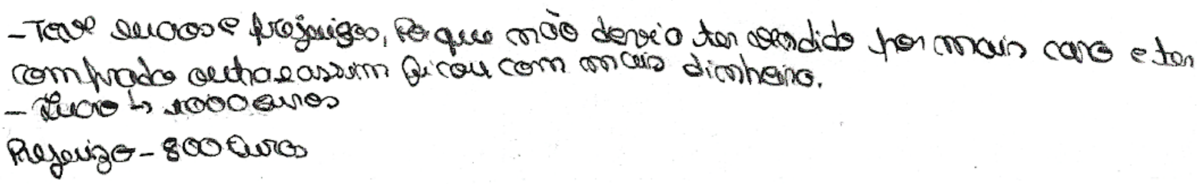

- Teve lucros e prejuizos, porque não devia ter vendido por mais caro e ter
comprado outra e assim ficou com mais dinheiro.
- Lucro → 1000 euros
Prejuizo - 800 euros

Figura 327 – T.P.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Estes desempenhos podem também indicar que os alunos não apropriaram o significado de lucro e prejuízo. Mas, na ausência de entrevistas posteriores à resolução, este aspeto só poderá ser clarificado nas aulas seguintes.

Na Figura 328, estamos perante outro desempenho pertencente a este padrão. O aluno sabe que existiu um lucro de 200 euros, porque o negociante vendeu sempre a obra de arte por mais 100 euros. Contudo, escolhe a palavra "prejuízo" como resposta ao problema. Esta evidência ilumina que o que existe não é um problema de raciocínio ou na apropriação de conhecimentos matemáticos, mas sim problemas ao nível da língua e de vocabulário, ou seja, do significado de cada uma destas duas palavras.

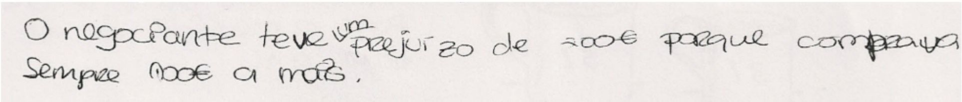

O negociante teve um prejuizo de 200€ porque comprava
Sempre 100€ a mais.

Figura 328 – S.N., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

Esta situação também é visível no exemplo que se encontra na Figura 329. Se analisarmos o desempenho deste aluno, apercebemo-nos que, à semelhança do que aconteceu com o aluno S.N., o F.M.2. também revela ter um raciocínio adequado ao problema proposto e dificuldades ao nível da língua, nomeadamente quanto ao significado das palavras utilizadas neste problema.

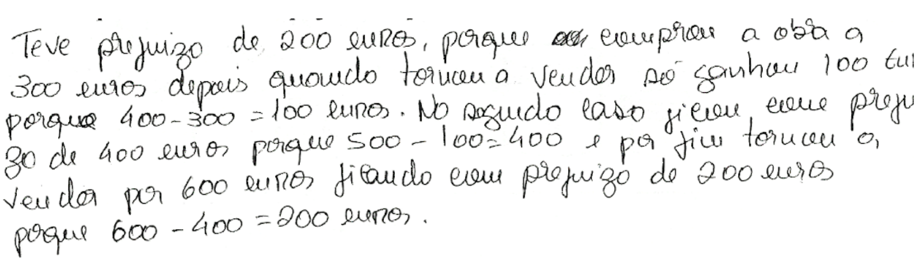

Teve prejuizo de 200 euros, porque comprou a obra a
300 euros depois quando tornou a vender só ganhou 100 eu
porque 400-300=100 euros. No segundo caso ficou com preju
zo de 400 euros porque 500-100=400 e por fim tornou a
vender por 600 euros ficando com prejuízo de 200 euros
porque 600-400=200 euros.

Figura 329 – F.M.2., 11.º ano de escolaridade, Viseu

Convém realçar que, em algumas entrevistas e conversas informais, os alunos que forneceram este tipo de respostas afirmaram que não sabiam o significado das palavras lucro e prejuízo e que, como a Matemática é difícil, escolheram também a palavra mais difícil, pois pensaram que, assim, dariam a resposta correta.

5.3.5.7. Padrão E7

O Padrão E7 é considerado o mais complexo do ponto de vista desenvolvimentista. Foram identificados dois níveis de desenvolvimento: (1) recorrem à abordagem passo-a-passo (α) ou global (β); e (2) recorrem às duas abordagens anteriores (γ) para resolverem esta situação (ver Anexo 26). Queremos salientar que não existe diferença, do ponto de vista desenvolvimentista, entre α e β. O que acontece é que as abordagens adotadas são diferentes. Há 25,5% dos desempenhos dos alunos que pertencem a este padrão (ver Anexo 21).

5.3.5.7.1. Nível E7.1.

5.3.5.7.1.1. Abordagem passo-a-passo (α)

Neste tipo de abordagem podemos considerar dois níveis de desempenho: (1) não indicam o valor do lucro, quando este é pedido explicitamente; e (2) a estratégia de resolução está completa, incluindo uma resposta.

5.3.5.7.1.1.1. Sub-Nível E7.1.1.

Neste sub-nível estão contemplados os desempenhos que se encontram incompletos, uma vez que os alunos não mencionam o valor do lucro final, quando este é pedido, explicitamente, no enunciado desta tarefa. Nas Figuras 330 e 331 estão exemplos deste sub-nível.

A estratégia de resolução do aluno R.I. evidencia o recurso a um exemplo concreto, como ponto de partida na resolução do problema (ver Figura 330). Esta forma de atuação é frequente em alunos que sentem necessidade recorrer ao raciocínio concreto e não ao abstrato, porque mobilizam esta forma de raciocínio.

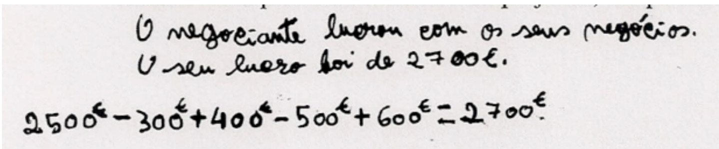


Figura 330 – R.I., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Este aluno supõe que, no início, o negociante tem 2500 euros. Com base nesse valor, recorre a uma abordagem passo-a-passo do problema, isto é, analisa o que se sucede em cada negócio. No entanto, não consegue perceber que o valor final da expressão numérica utilizada não corresponde ao que é pretendido – o valor do lucro – uma vez que não compreende que o valor do lucro é a diferença entre o resultado final (2700) e o valor que o negociante tinha inicialmente (2500). Assim, usa uma estratégia de resolução algébrica, mas não fornece resposta ao problema, isto é, que o lucro foi de 200 euros.

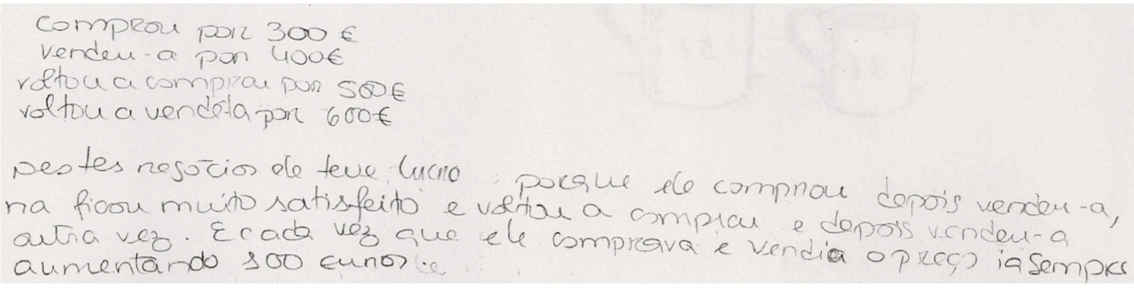


Figura 331 – D.N., 9.º ano de escolaridade, Açores

Embora os desempenhos das duas figuras anteriores iluminem uma preferência por uma abordagem passo-a-passo deste problema, a forma de apresentação da própria estratégia de resolução difere, pois o aluno D.N. recorre à escrita de uma composição matemática para justificar a existência de lucro no final do negócio, enquanto que o R.I. opta por uma expressão algébrica.

5.3.5.7.1.1.2. Sub-Nível E7.1.2.

Este sub-nível engloba os desempenhos dos alunos que se encontram completos, isto é, existe evidência dos processos de raciocínio subjacentes às estratégias de resolução adotadas, bem como a quantificação do lucro obtido no final do negócio, sempre que isso já era explicitamente referido no enunciado do problema.

Na Figura 332 está representada uma estratégia de resolução que evidencia que o aluno toma como ponto de partida um montante inicial (1000 euros), iluminando, desta forma, que ainda mobiliza o raciocínio concreto. O aluno S.S. supõe que o negociante tem 1000 euros no início e realizando as operações necessárias e que correspondem ao que ocorreu na situação descrita no enunciado chega à conclusão que ficou com 1200 euros. Consegue perceber que, como partiu de 1000 euros, teve um lucro de 200 euros.

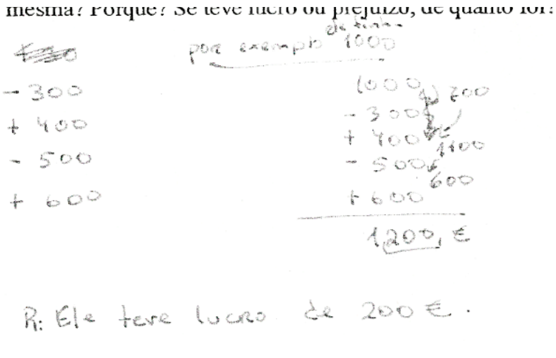
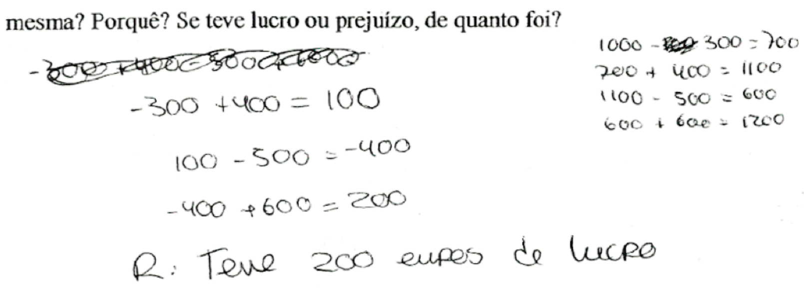


Figura 332 – S.S., 8.º ano de escolaridade, Lisboa

O exemplo que se segue (Figura 333) ilumina a existência de duas estratégias de resolução que permitem ao aluno confirmar a sua resolução. Este opta por uma abordagem passo-a-passo do problema, associada a uma estratégia de resolução algébrica, ou seja, vai efetuando operações sucessivas, de acordo com o que acontece na situação descrita no enunciado do problema, até concluir que houve um lucro de 200 euros. No entanto, sente necessidade de validar o resultado obtido, através do recurso a um exemplo concreto. Esta forma de atuação evidencia que este aluno se encontra num processo de transição do raciocínio concreto para o abstrato, na medida em que já consegue raciocinar sem suporte concreto, mas ainda sente necessidade de validá-lo recorrendo a um exemplo prático.


mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi?

-300 +400 = 100

100 - 500 = -400

-400 +600 = 200

R: Teve 200 euros de lucro

1000 - 300 = 700

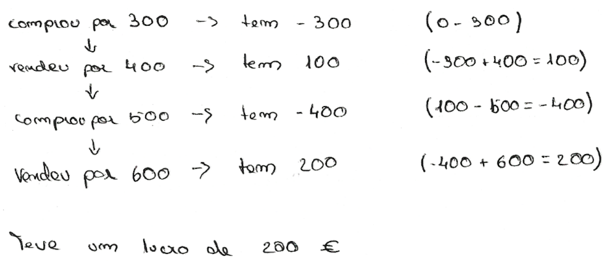
700 + 400 = 1100

1100 - 500 = 600

600 + 600 = 1200

Figura 333 – A.L.6., 10.º ano de escolaridade, Lisboa

As Figuras 334 e 335 ilustram abordagens semelhantes, embora recorrendo a estratégias de resolução diferentes. No primeiro caso, o aluno recorre a um esquema para indicar as várias situações que ocorreram neste negócio, complementando-o com as operações matemáticas correspondentes a cada uma delas. No segundo caso, o aluno opta por recorrer a uma composição matemática, que explica o que aconteceu e o lucro obtido, como forma privilegiada para explicar os processos de raciocínio. Ambas as estratégias de resolução são iniciadas com a informação de que o negociante não tinha dinheiro nenhum antes de comprar a obra de arte, pela primeira vez, que corresponde ao zero no desempenho do aluno C.P.4.


comprou por 300 -> tem -300 (0 - 300)

vendeu por 400 -> tem 100 (-300 + 400 = 100)

comprou por 500 -> tem -400 (100 - 500 = -400)

vendeu por 600 -> tem 200 (-400 + 600 = 200)

Teve um lucro de 200 €

Figura 334 – C.P.4., 10.º ano de escolaridade, Viseu

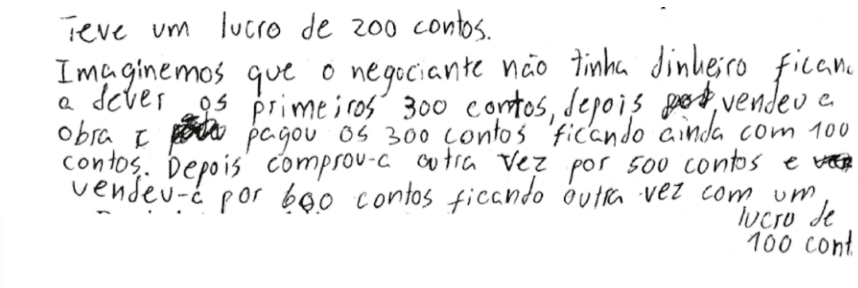
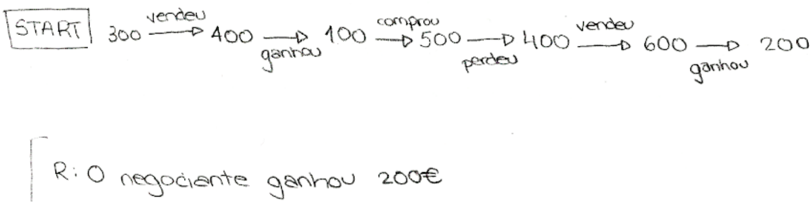

Teve um lucro de 200 contos.
Imaginemos que o negociante não tinha dinheiro ficando a dever os primeiros 300 contos, depois vendeu a obra e pagou os 300 contos ficando ainda com 100 contos. Depois comprou-a outra vez por 500 contos e vendeu-a por 600 contos ficando outra vez com um lucro de 100 cont

Figura 335 – C.A.2., 10.º ano de escolaridade, Leiria

Os exemplos de estratégias de resolução que se encontram nas Figuras 336 a 339 ilustram formas de raciocínio diversificadas, associadas à abordagem passo-a-passo, na resolução deste problema. Uma das finalidades do IACC é permitir aos alunos expressarem-se da maneira que lhes é mais confortável, pois se existem alunos que preferem escrever uma pequena composição matemática para explicar os processos de raciocínio, há outros que preferem recorrer a esquemas ou outras representações gráficas como estratégia de resolução.


START 300 $\xrightarrow{\text{vendeu}}$ 400 $\xrightarrow[\text{ganhou}]{}$ 100 $\xrightarrow{\text{comprou}}$ 500 $\xrightarrow[\text{perdeu}]{}$ 400 $\xrightarrow{\text{vendeu}}$ 600 $\xrightarrow[\text{ganhou}]{}$ 200

R: O negociante ganhou 200€

Figura 336 – D.S.2., 10.º ano de escolaridade, Faro

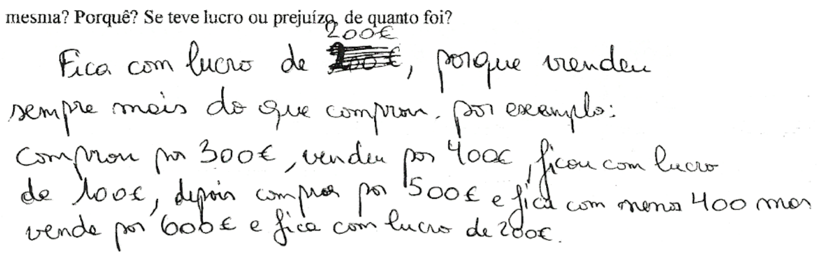

mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi?
Fica com lucro de ~~100€~~ 200€, porque vendeu sempre mais do que comprou, por exemplo:
Comprou por 300€, vendeu por 400€, ficou com lucro de 100€, depois compra por 500€ e fica com menos 400 mas vende por 600€ e fica com lucro de 200€.

Figura 337 – L.F., 12.º ano de escolaridade, Faro

Por último, queremos realçar um aspeto comum às estratégias de resolução que estão nas Figuras 338 e 339. Nestes dois exemplos, os alunos evidenciam uma necessidade de utilizar a simbologia matemática para resolverem o problema. De salientar que, o desempenho do aluno P.F.4., é pouco rigoroso do ponto de vista matemático, nomeadamente na utilização da simbologia algébrica.

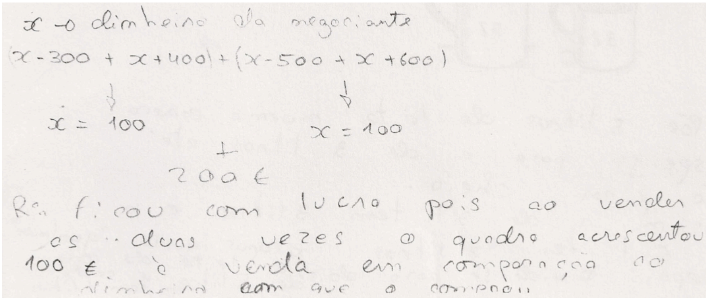

x → o dinheiro do negociante
(x - 300 + x + 400) + (x - 500 + x + 600)
x = 100
x = 100
+
200 €
R: ficou com lucro pois ao vender os duas vezes o quadro acrescentou 100 € à venda em comparação ao dinheiro com que o comprou

Figura 338 – P.F.4., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

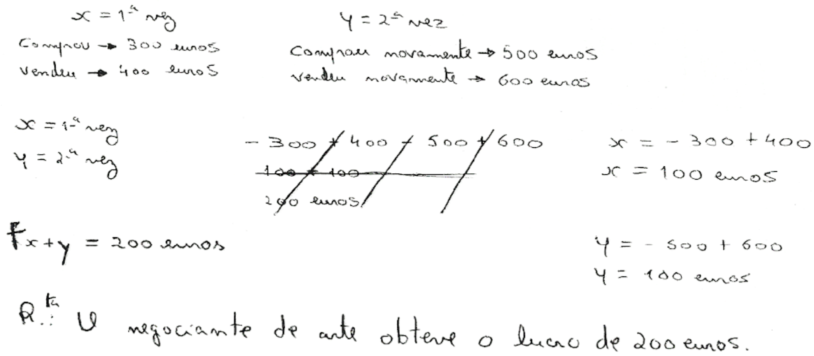

x = 1ª vez
Comprou → 300 euros
Vendeu → 400 euros
y = 2ª vez
Comprou novamente → 500 euros
Vendeu novamente → 600 euros
x = 1ª vez
y = 2ª vez
- 300 + 400 + 500 + 600
~~100 + 100~~
200 euros
x = - 300 + 400
x = 100 euros
x + y = 200 euros
y = - 500 + 600
y = 100 euros
R.ta: O negociante de arte obteve o lucro de 200 euros.

Figura 339 – J.F.3, 10.º ano de escolaridade, Viseu

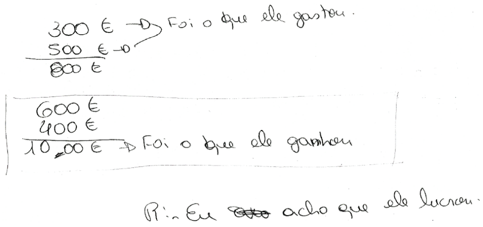
Para muitos deles, essa utilização confere maior validade aos resultados obtidos. Alguns afirmaram, nas conversas informais e entrevistas, que só assim é que a estratégia de resolução é valorizada e aceite pelo professor. Esta forma de atuação está relacionada com uma construção bastante tradicional da representação social da Matemática e deles próprios, enquanto alunos dessa disciplina.

5.3.5.7.1.2. Abordagem global (β)

Nesta situação, os alunos recorrem a uma abordagem global do problema, ou seja, consideram o montante gasto nas duas vendas e nas duas compras, comparando-os, isto é, subtraem esses dois valores, obtendo o lucro final desta situação. Este padrão está dividido em dois níveis de desenvolvimento cognitivo: (1) ausência da indicação do valor do lucro, quando esta era explicitamente pedido; e (2) estratégia de resolução completa, incluindo uma resposta.

5.3.5.7.1.2.1. Sub-Nível E7.1.1.

Neste sub-nível estão considerados os desempenhos que não contemplam o valor do lucro obtido no final desta situação de compra e venda, quando este é pedido explicitamente no enunciado do problema. Na Figura 340 temos um exemplo de desempenho de alunos que recorrem a uma abordagem global mas que, apesar de mencionarem que existiu lucro, não determinam esse valor.


300 € → Foi o que ele gastou.
500 € →
800 €

600 €
400 €
10,00 € → Foi o que ele ganhou

R: Eu acho que ele lucrou.

Figura 340 – M.V.2., 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Este aluno escolhe uma estratégia de resolução aritmética adequada, revelando ter compreendido o enunciado do problema. Contudo, omite a resposta (quantificação do lucro), que também era pedida.

5.3.5.7.1.2.2. Sub-Nível E7.1.2.

Este sub-nível é caracterizado pelos desempenhos dos alunos que referem que existiu um lucro de 200 euros (ou 200 contos ou 20 mil escudos), recorrendo a uma abordagem global do problema. Nas Figuras 341 e 342 estão descritas estratégias de resolução adequadas, mas os alunos não referem o valor do lucro final. No entanto, estes desempenhos são considerados completos, uma vez que a tarefa não pedia que os alunos quantificassem o valor do lucro ou prejuízo. Nestes exemplos também podemos observar diferentes estratégias de resolução associadas a uma abordagem global. Na Figura 341, a resposta é dada exclusivamente através do recurso a uma frase que tem subjacente o recurso a uma estratégia de resolução aritmética (300 + 500 e 400 + 600). Assim, fica subentendida a forma como este aluno determinou o montante que o negociante recebeu e gastou neste negócio.

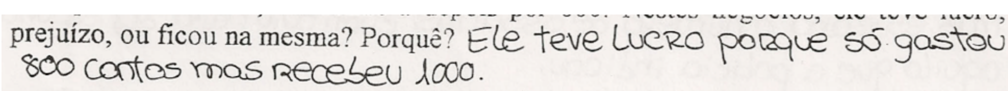

prejuízo, ou ficou na mesma? Porquê? Ele teve LUCRO porque só gastou 800 contos mas recebeu 1000.

Figura 341 – N.º 7, 7.º ano de escolaridade, Lisboa

Na Figura 342, o aluno mostra, de forma explícita, como determinou os valores das vendas e das compras (ilustradas pelas operações matemáticas indicadas do lado esquerdo da folha de respostas e com recurso ao algoritmo da adição).

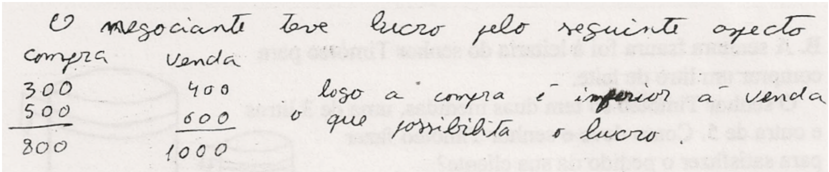

O negociante teve lucro pelo seguinte aspecto
compra venda
300 400 logo a compra é inferior a venda
500 600 o que possibilita o lucro
800 1000

Figura 342 – N.º 5, 12.º ano de escolaridade, Leiria

Os exemplos que se seguem dizem respeito à atual versão do enunciado desta tarefa, ou seja, é pedido que os alunos quantifiquem o lucro. Se tivermos em consideração o exemplo que se encontra na Figura 343, podemos constatar que este aluno muda de abordagem (parte riscada na folha de resposta), isto é, passa de uma abordagem passo-a-passo para uma abordagem global. É esta última que lhe permite solucionar o problema proposto. A estratégia de resolução utilizada por este aluno é semelhante à que se encontra na Figura 341, mas o aluno F.D. refere explicitamente como determinou o valor que o negociante gastou para comprar a obra de arte (800 euros) e o que ganhou ao vendê-la (1000 euros), pelo que a diferença entre esses dois valores corresponde ao lucro obtido.

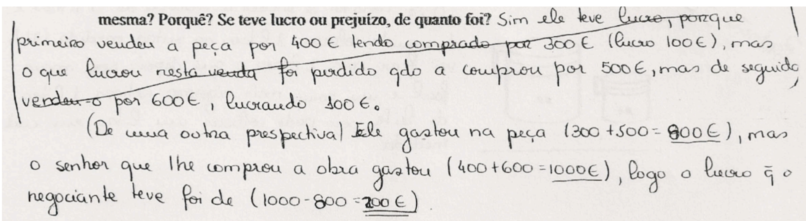

mesma? Porquê? Se teve lucro ou prejuízo, de quanto foi? Sim ele teve ~~lucro, porque~~ ~~primeiro vendeu a peça por 400 € tendo comprado por 300 € (lucro 100 €), mas~~ ~~o que lucrou nesta venda foi perdido qdo a comprou por 500 €, mas de seguida~~ ~~vendeu-o por 600 €, lucrando 100 €.~~
(De uma outra prespectiva) Ele gastou na peça (300+500=800€), mas o senhor que lhe comprou a obra gastou (400+600=1000€), logo o lucro q̄ o negociante teve foi de (1000-800=200€).

Figura 343 – F.D., 11.º ano de escolaridade, Viseu

A estratégia de resolução seguinte (Figuras 344) ilumina, também, uma forma diferente de explicação dos processos de raciocínio associados à resolução deste problema. O aluno M.N.2. começa por escrever os dados do problema e agrupa-os, somando-os, de acordo com as vendas ou compras. De seguida, elabora uma composição matemática para explicar o que tinha realizado anteriormente, bem como para mencionar o valor do lucro final (200 euros).

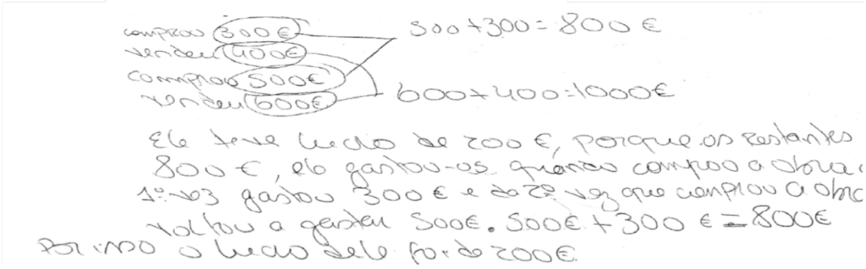


Figura 344 – M.N.2., 9.º ano de escolaridade, Açores

Por último, queremos salientar que no exemplo da Figura 345, o aluno G.C. recorre a uma terminologia mais elaborada, tendo em conta o ano de escolaridade que frequentava, uma vez que utiliza os conceitos de *despesa* e *receita*, para se referir aos gastos e ganhos, respetivamente.

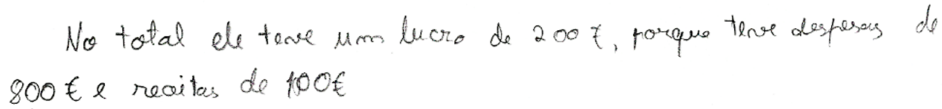


Figura 345 – G.C., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Assim, as pequenas composições matemáticas, que têm geralmente subjacentes estratégias de resolução aritméticas ou algébricas, também permitem observar o rigor da terminologia matemática utilizada.

5.3.5.7.2. Nível E.7.2.

Neste nível estão considerados os desempenhos associados às duas formas de abordagem: passo-a-passo e global, o que iluminam o recurso a estas duas abordagens com finalidades distintas. Enquanto que a abordagem passo-a-passo é vista como forma preferencial de abordagem, à global é-lhe atribuído um papel de verificação ou validação do resultado obtido através da outra abordagem.

No exemplo da Figura 346 ilumina um desempenho de um aluno que, primeiramente, recorre a uma abordagem passo-a-passo do problema, mas revela necessidade de confirmar os processos de raciocínio subjacentes à mesma, através da abordagem global (lado direito da folha de respostas).

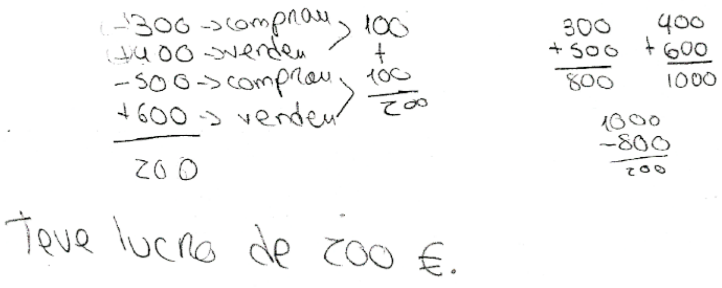


Figura 346 – M.S.6., 9.º ano de escolaridade, Lisboa

Nesta situação, na abordagem passo-a-passo ele recorre a uma estratégia de resolução algébrica (lado esquerdo da folha de resposta) e na abordagem global a uma estratégia de resolução aritmética, o que revela uma grande plasticidade dos processos de raciocínio, abordagens dos problemas e estratégias de resolução que consegue mobilizar. De acordo com César (1994), esta forma de atuação é característica de alunos com um desenvolvimento cognitivo avançado e que, simultaneamente, apresentam desempenhos matemáticos muito conseguidos, mesmo em tarefas matemáticas mais complexas.

5.4. IMPACTES DO IACC PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

5.4.1. Cursos e ações de formação

Um dos objetivos expressos pelo projeto IC consistia em contribuir para a formação de jovens investigadores, bem como para a formação de professores (Ventura, 2012). Na equipa deste projeto de investigação pretendia-se que participassem professores do ensino básico e secundário, trabalhando colaborativamente com investigadores e académicos do ensino superior (César, 2009, 2013a; Hamido & César, 2009). Este trabalho colaborativo, que caracterizava a equipa do IC, tornando-se uma das suas imagens de marca, permitia distingui-lo de muitos outros projetos de investigação, tendo impactes nas formas como se concebiam e organizavam os próprios cursos e ações de formação. Os diversos professores/investigadores e a coordenadora do projeto elaboravam, em conjunto, os materiais a utilizar nestes cursos e ações de formação, tomando decisões colaborativas e partilhadas sobre a parte da dinamização que ficava a cargo de cada um dos elementos do IC, bem como sobre a organização e dinâmicas que caracterizavam cada curso e ação de formação.

Convém realçar que, sendo o IC um projeto com uma duração longa (12 anos de duração formal e um *follow up* de 10 anos), três *designs* de investigação, muitos professores/investigadores e diversas disciplinas onde se desenvolviam práticas colaborativas, era grande a variedade de cursos e ações de formação disponíveis para serem dinamizadas por elementos desta equipa. Entre eles, podemos mencionar, a título de exemplo, cursos e ações de formação relacionados com alunos que necessitavam de apoios educativos especializados, sobre materiais interculturais e interdisciplinares, o papel do diretor de turma, a indisciplina, o trabalho de projeto em estatística, a área de projeto, o estudo acompanhado, a educação de adultos, a educação para a sustentabilidade, a pedagogia diferenciada, a observação em aula, a adolescência, ou as relações Escola/Família. No entanto, o tema que mais foi solicitado, pelos professores e futuros professores, para a dinamização de cursos e ações de formação foi, sem dúvida, o das interações sociais nas aulas de Matemática. Muitos professores e futuros professores estavam interessados em aprender a trabalhar colaborativamente, segundo os princípios do IC (Ventura, 2012). Assim, foram realizados, entre 1998 e 2008, 24 cursos sobre esta temática, nos quais também participou a coordenadora do projeto IC e muitos outros já sem a sua colaboração, o que indica um aspeto essencial: a pregnância que o trabalho colaborativo foi assumindo. Alguns deles foram dinamizados a convite da APM e outros propostos pela equipa do IC, sendo muitos deles realizados nos dias que antecediam o ProfMat ou nas instalações da FCUL, a pedido de diversos grupos de interessados. Os cursos que antecediam o ProfMat duravam dois dias e os que se desenvolviam na FCUL ocupavam um dia. Porém, diversos grupos de professores frequentaram mais de um curso, pelo que alguns foram designados por cursos avançados, ou seja, destinados a quem já tinha feito a formação básica sobre esta temática.

Nestes cursos, de índole muito prática, uma vez que os professores pretendiam aprender a trabalhar colaborativamente, de acordo com os princípios do IC (Ventura, 2012), a exploração dos instrumentos utilizados na primeira semana de aulas era um aspeto essencial. Para tal, a equipa do IC preparou materiais que incluíam a TIP1, o Q1 e o IACC, sendo explicado aos participantes como se analisavam os desempenhos dos alunos em cada uma destas tarefas. Desde os primeiros cursos que existiram materiais que incluíam acetatos, para serem discutidos em grande grupo, bem como em suporte papel, a serem distribuídos aos participantes. Estes recursos já identificavam grupos de possíveis desempenhos, baseando-se nas estratégias de resolução e/ou respostas obtidas no IACC. No entanto, o que se pretendia nestes cursos e ações de formação não era estabelecer padrões de desempenho de índole desenvolvimentista, mas sim que os professores compreendessem como as informações do IACC, conjugadas com as da TIP1, Q1 e observação da primeira semana, permitiam adequar as práticas, em aula, às características, interesses e necessidades daquela turma, proporcionando uma educação de qualidade, baseada em tarefas de natureza diversificada e na promoção de interações sociais dialógicas, entre pares, bem como entre alunos e professor. Para isso, era fundamental que aprendessem a tomar decisões sobre a constituição das primeiras díades. Neste sentido, as estratégias de resolução e/ou respostas selecionadas para serem apresentadas e discutidas com os professores, embora tendo subjacente o carácter desenvolvimentista do IACC, apenas esboçavam alguns dos padrões de desempenho que, posteriormente, em artigos escritos a partir de 2010 (Machado et al., 2011; Ventura, 2012; Ventura et al., 2010) e, sobretudo, nesta tese de doutoramento, vieram a ser teorizados.

Como se pretendia que os cursos tivessem um carácter prático, existiam turmas, que tinham sido lecionadas pelos professores/investigadores que participavam na dinamização do curso, previamente preparadas para serem utilizadas nestes cursos. Para tal, as folhas de resposta dos alunos, com a sua autorização prévia, tinham sido fotocopiadas omitindo o nome do aluno e da escola, mas indicando o género (que era acrescentado manuscrito), por este ser um elemento essencial para a formação das primeiras díades. Assim, a partir dos dados que tinham sido recolhidos numa determinada turma, na primeira semana do ano letivo, os professores e futuros professores que participavam nestes cursos analisavam estes materiais, preenchendo também a grelha de registo e análise, a folha de exploração no quadro e a folha dos desempenhos no IACC, tomando decisões quanto às primeiras díades e à distribuição espacial das mesmas na sala de aula, ou seja, desempenhando todas as tarefas que teriam de efetuar caso estas turmas fossem lecionadas por si. Para estas aprendizagens, o IACC desempenhava um papel central, que incluía: aprender a analisar as estratégias de resolução e/ou respostas a cada tarefa; preencher a grelha de registo e análise e a folha de desempenhos no IACC; selecionar os alunos que iriam ao quadro explicitar as estratégias de resolução e/ou respostas; compreender os contributos das informações recolhidas com este instrumento para a formação das primeiras díades e para as decisões sobre a organização espacial da sala de aula. Assim, a análise dos desempenhos dos alunos no IACC era um elemento fundamental dos cursos que foram dinamizados pela equipa do IC.

Posteriormente, quando os professores e futuros professores optavam por começar a trabalhar colaborativamente, segundo os princípios do IC (Ventura, 2012), era recomendado que o fizessem num início de ano letivo, por uma questão de coerência pedagógica. Nesse caso, no primeiro ano em que analisavam os instrumentos da primeira semana de aulas, era-lhes proporcionada a possibilidade de existir uma supervisão, por parte do elemento da equipa do IC que tinha participado no seu grupo de trabalho, durante o curso. Este trabalho de supervisão constituía um suporte muito importante para que os primeiros meses de trabalho colaborativo decorressem de acordo com os princípios do IC e para que os professores conseguissem operacionalizar o que tinham aprendido nos cursos. Desempenhava também um papel fundamental na gestão dos progressos manifestados pelos alunos, que nem sempre eram suficientemente rápidos para não causarem alguma frustração. Permitia ultrapassar dúvidas, ter acesso a mais materiais que fossem necessários, como tarefas de matemática escolar já usadas noutras turmas e que se adequavam às características da turma que estava a ser lecionada, bem como proporcionar apoio em relação à elaboração de novas tarefas de matemática escolar e à utilização dos diversos instrumentos de avaliação dos desempenhos dos alunos no que se refere aos conteúdos, capacidades e competências mencionados nos currículos prescritos. Por isso mesmo, o trabalho efetuado nestes cursos não se esgotava quando o curso terminava, prolongando-se pelos meses subsequentes.

Nas ações de formação, que tinham uma duração mais breve, geralmente entre duas e quatro horas, eram abordados alguns dados referentes ao IACC, que serviam de sensibilização e originaram, em muitos casos, pedidos subsequentes para a dinamização de cursos, mas não eram exploradas respostas de uma turma completa ao IACC. No entanto, é de salientar que, mesmo nas ações de formação os dois instrumentos que mais foram abordados foram, sem dúvida, o IACC e as TIPs, conforme se pode ver, por exemplo, quando se consulta a lista dos cursos e ações de formação dinamizados por elementos da equipa central do IC. A existência de um instrumento que permitia aos professores, de forma autónoma, conhecerem as capacidades e competências dos alunos, desde a primeira semana de aulas, era algo que vinha responder a necessidades que estes mesmos sentiam, o que fazia com que existisse uma enorme adesão a estes cursos e ações de formação. Convém realçar que os mesmos se prolongaram muito para além da duração formal do IC, havendo ainda hoje pedidos para a sua dinamização, pelo que os mesmos se têm continuado a realizar, numa base de voluntariado de quem neles participa, como sempre aconteceu.

5.4.2. Aulas de licenciatura, mestrado e programas doutorais, em Portugal

A coordenadora do IC, que era docente do DEFCUL, e tinha uma formação inicial em Psicologia, lecionava disciplinas relacionadas com este domínio, habitualmente a alunos que frequentavam a Licenciatura em Ensino da Matemática, pelo que a análise do IACC não fazia parte dos conteúdos prescritos. No entanto, ao abordar a Psicologia do Desenvolvimento e a Psicologia da Aprendizagem, alguns dos exemplos eram retirados do IC, o que fazia com que a referência ao IACC, ainda que breve, fosse inevitável. O interesse dos alunos pelo que ouviam e a vontade de aprenderem, de forma mais detalhada, como se trabalhava no IC, fizeram com que muitas turmas viessem, a participar em cursos que permitiam aprender a trabalhar de acordo com as práticas e princípios do IC (Ventura, 2012). Esses cursos, que já abordámos no Ponto 5.4.1., realizavam-se depois de terminado o 1.º semestre, logo depois de terminadas as avaliações da disciplina lecionada pela coordenadora do IC.

Nos Mestrados em Educação já existia uma disciplina de opção diretamente relacionada com o IC, que se designava por *Interacções Sociais na Sala de Aula*. Mais uma vez, embora a análise do IACC não fizesse parte dos conteúdos prescritos, ao serem analisados excertos de processos interativos gravados no âmbito do IC, este instrumento acabava por ser referido, notando-se mais uma vez o interesse dos alunos por virem a frequentar o referido curso. Convém salientar que não bastava que os alunos manifestassem esse interesse para que o curso se viesse a realizar. Eram eles que tinham de se organizar e formar um grupo de interessados, para que o curso viesse a existir. Portanto, tinham de revelar uma atitude pró-ativa, de agentes capazes de promover meios para alargarem a sua formação.

Enquanto a coordenadora do IC lecionou no DEFCUL, apenas existiu um esboço de programa doutoral, que não era oficial e que se destinava a alunos de diferentes especialidades, mas com formação inicial em Matemática. Muitos deles já conheciam o IACC quando frequentaram estas aulas e alguns eram elementos da equipa do IC. No entanto, embora também não fizesse parte do currículo prescrito a análise do IACC, diversas questões sobre este instrumento foram debatidas, sendo trazidas pelos alunos para a discussão geral.

Pelo que foi dito, embora o IACC não fizesse parte dos diversos currículos prescritos, o interesse dos alunos por este instrumento era nítido, levando a que, em diversos momentos, ele viesse a ser abordado. No entanto, o dado mais relevante é que, muitos destes alunos, depois de fazerem os cursos mencionados no Ponto 5.4.1., optaram por trabalhar colaborativamente nas aulas das turmas que lecionavam, seguindo os princípios do IC (Ventura, 2012). Neste trabalho colaborativo, o IACC desempenha um papel fundamental e muitos deles, em diversas conversas informais, registadas no DB da coordenadora do IC, revelaram como o recurso ao IACC lhes tinha permitido serem professores muito mais adaptados às necessidades e características dos alunos do que eram – ou teriam sido – caso não pudessem recorrer às informações sobre os mesmos que este instrumento lhes permitia obter.

5.4.3. Prática pedagógica supervisionada

Quando a coordenadora do projeto IC desenvolvia a sua atividade profissional no DEFCUL, a Licenciatura em Ensino da Matemática tinha a duração prevista de cinco anos, sendo o último ocupado pela prática pedagógica supervisionada (vulgo, estágio) que decorria numa escola, onde eram atribuídas turmas aos professores estagiários, que por elas eram responsáveis, pelo que participavam nas diversas atividades previstas para um docente (aulas, reuniões de grupo e de turma, reuniões de avaliação, entre outras). Neste modelo, existiam três supervisores: um da escola onde se realizava a prática pedagógica supervisionada (que lecionava a mesma disciplina que o professor estagiário); outro do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (DMFCUL) e um terceiro do DEFCUL. A coordenadora do IC colaborou como supervisora desde antes da criação do IC e mesmo após a sua conclusão oficial, ou seja, de 1989/90 até 2007/08. Muitos dos professores estagiários cuja prática pedagógica supervisionada foi por ela orientada participavam no projeto IC.

Convém realçar que os professores estagiários que desenvolveram a prática pedagógica supervisionada no âmbito do projeto IC o fizeram de forma voluntária. Isto significa que, previamente, enquanto ainda eram alunos do 4.º ano da licenciatura, contactavam a coordenadora do IC, manifestando-lhe o desejo de virem a desenvolver a prática pedagógica supervisionada no âmbito deste projeto. Estes contactos decorriam habitualmente durante o 2.º semestre, pois como esta docente lecionava uma disciplina do 1.º semestre e muitos dos futuros professores estagiários eram alunos que ela lecionava nesse semestre do 4.º ano da licenciatura, não considerava eticamente correto que os mesmos se efetuassem enquanto as aulas e avaliações dessa disciplina ainda estavam a decorrer. Isso permitia que os futuros professores estagiários pudessem fazer uma formação prévia, que incluía, entre outros aspetos, o curso sobre interações sociais na aula de Matemática, que mencionámos no Ponto 5.4.1., pois era essencial que soubessem utilizar os instrumentos previstos para a primeira semana de quem trabalha de acordo com as práticas e princípios do IC (César, 2009, 2013a; Ventura, 2012). Assim, estes futuros professores estagiários contactavam com o IACC e as formas de analisar os dados com ele recolhidos antes de terem iniciado a prática profissional supervisionada.

Quando já estavam a desempenhar as funções de professores estagiários, a primeira semana de aulas decorria nos moldes descritos no Ponto 5.2., ou seja, de acordo com o que é habitual para as turmas que participavam neste projeto de investigação, no *design* de investigação-ação. Na maioria das escolas, o orientador da escola também era membro da equipa do IC e, em alguns casos, o orientador do DMFCUL já tinha colaborado em mais práticas pedagógicas supervisionadas cujos professores estagiários participavam no IC, o que permitia discutir, em conjunto, as decisões tomadas em relação às primeiras díades, as capacidades e competências que pretendíamos que os alunos viessem a desenvolver, bem como a natureza das tarefas mais adequadas àquela turma e alunos. Isto significa que muitas das práticas pedagógicas supervisionadas foram configuradas pelos resultados obtidos com os instrumentos da primeira semana de aulas, entre eles o IACC e, ainda, que as discussões, no núcleo de estágio, a que deram origem, foram extremamente ricas, pois contavam com contributos de profissionais com formações iniciais e práticas muito diferenciadas.

Para além de ser essencial para as decisões sobre a formação das primeiras díades, as tarefas do IACC foram frequentemente referidas, ou mesmo retomadas, em diversas turmas, quando se abordavam os conteúdos programáticos previstos para aquele ano de escolaridade. Nestas alturas, os impactes que a primeira semana de aulas e, em particular, o IACC, tinham tido nos alunos tornavam-se muito nítidos, tal como iluminam muitas das entradas do diário de bordo de alguns investigadores e professores/investigadores:

> Ao abordarmos as percentagens, retomei a Tarefa A, do IACC, como ponto de partida para a necessidade de sermos críticos, quando lemos informação matemática,

fornecida pelos *media*. Assim que ouviram falar na Tarefa A do IACC, muitos alunos sorriram e vários manifestaram o seu agrado pelas tarefas da 1.ª semana de aulas, em especial o IACC. Como estagiária e sem experiência anterior como professora, nunca pensei que uma tarefa pudesse ter tanta importância no empenho dos alunos e contribuir tanto para que eles se interessassem por Matemática. (professora/investigadora estagiária 1, DB, p. 57)

Quando começámos a estudar as áreas dos polígonos, houve vários alunos que se referiram logo à Tarefa D, do IACC, revelando que era algo que não estava esquecido e que os tinha influenciado muito positivamente. Além de se recordarem da figura, com diversos detalhes e, em alguns casos, até com as medidas que vinham indicadas no enunciado – e já passaram 5 meses desde que começou o ano lectivo! – eles lembravam-se de que uns tinham calculado a área da parte pintada a partir da área do rectângulo, outros dos triângulos e outros dos losangos. O mais curioso é que, mesmo os que não tinham usado algumas destas fórmulas, ainda se lembravam delas e afirmavam que as tinham aprendido nessa aula [em que fizeram a discussão geral do IACC]. (professora/investigadora estagiária 2, DB, p. 38)

Qualquer uma destas citações permite compreender os impactes do IACC e das práticas que lhes estão associadas nos desempenhos matemáticos dos alunos e, também, no seu envolvimento nas tarefas matemáticas propostas, em aula, e na apropriação de conhecimentos matemáticos. Apercebendo-se disso, os professores/investigadores estagiários tendiam a retomar as tarefas do IACC quando isso se revelava adequado aos conteúdos que iriam ser lecionados. No entanto, a importância do IACC ia para além de os alunos se referirem a ele ou ficarem mais entusiasmados e empenhados nas tarefas de matemática escolar quando estas se relacionavam com as deste instrumento. Os próprios professores/investigadores estagiários registavam reflexões que revelavam a importância deste instrumento para a sua formação, enquanto docentes, e para as práticas que estavam a desenvolver, com os alunos.

Aquilo que consegui saber sobre os alunos, na primeira semana de aulas, sobretudo quanto às suas competências, foi essencial para saber seleccionar as tarefas e como agir com eles, nas aulas. Sinto que alguns já conseguiram desenvolver outras competências graças ao trabalho colaborativo e às tarefas que têm resolvido. Mas sobretudo que trabalham mais convencidos de que vão progredir, de que vão conseguir aprender. (...) Curioso perceber que alguns já falam de competências também. O M. exclamou, na aula passada: "É isto que é raciocínio abstracto, não é?" e perante o meu ar espantado, acrescentou: "Vocês [referindo-se à coordenadora do IC, que fora assistir à aula, ao orientador do DMFCUL e da escola e aos restantes estagiários] estavam a falar disso no final da aula da semana passada [referindo-se ao intervalo, em que ficámos na aula a falar uns com os outros e com alunos, de forma informal]. (professora/investigadora estagiária 3, DB, p. 38)

Este excerto, que retrata o que está escrito noutros, produzidos por outros professores/investigadores estagiários da equipa do IC, revela cinco aspetos que nos parecem fundamentais: (1) a importância de conhecer as capacidades e competências dos alunos desde a primeira semana de aulas para saber elaborar, adaptar e/ou selecionar as tarefas matemáticas; (2) a relevância desse conhecimento para saber atuar, em aula, de acordo com as características e necessidades dos alunos; (3) as capacidades e competências que esse conhecimento permite desenvolver; (4) o carácter formativo, para os docentes, deste tipo de práticas baseadas nos princípios do IC e no trabalho colaborativo; e (5) a curiosidade e o gosto por aprender que despertam nos alunos, levando-os a dar atenção e a aprenderem aspetos que nem estavam previstos, como o que se entende por raciocínio abstrato. Convém realçar que muitos outros excertos de diários de bordo ilustram outros aspetos que os alunos aprenderam e que se prendem com capacidades e competências que, se não tivéssemos o IACC como recurso disponível, provavelmente não teríamos discutido entre nós, ou tido em consideração nas práticas, em aula.

5.4.4. Escolas e instituições de outros países

A existência do IACC tornou-se conhecida de professores e investigadores que desenvolviam a sua atividade profissional noutros países, quer por intermédio dos eventos científicos e publicações em que participaram elementos da equipa do IC, quer por contactos informais entre pessoas que neles tinham participado e pessoas que trabalhavam nestas instituições internacionais, ou porque alguns elementos da equipa do IC lecionaram nesses mesmos países, como aconteceu em Cabo Verde e na secção portuguesa da Escola Europeia de Bruxelas. Nos países e escolas onde a língua de escolarização era o português, o IACC foi usado nessa língua, sendo as tarefas objeto de algumas adaptações culturais, como já descrevemos anteriormente (ver Ponto 5.1.2.). Nestes casos, tratando-se os professores/investigadores de elementos da equipa do IC, os dados por eles recolhidos foram utilizados nesta tese de doutoramento, quando formulámos os padrões de desempenho do IACC.

Um exemplo dos impactes que o IACC teve nestes professores que lecionavam turmas noutros países, alguns deles com muitos anos de prática profissional prévia antes de fazerem parte da equipa do IC, está ilustrado na resposta que uma professora/investigadora forneceu quando, ao celebrar 10 anos de existência, a equipa do IC decidiu realizar uma avaliação interna do projeto, baseada em instrumentos que a coordenadora elaborou e a que os diversos elementos da equipa central responderam. Esta avaliação abrangeu tanto os anteriores elementos como os que ainda dela faziam parte. Na questão *Se tivesse de falar deste projecto a um colega seu, o que lhe diria?...*, esta professora/investigadora afirmou: “Digamos que o projeto põe à nossa disposição instrumentos de actuação que nos permitem agir simultaneamente sobre a qualidade das aprendizagens e sobre o trabalho das capacidades intelectuais necessárias a essas aprendizagens;” (professora/investigadora, QP1, p. 1). Assim, existe uma clara alusão aos instrumentos disponíveis e às “capacidades intelectuais” dos alunos, bem como ao seu papel nas aprendizagens.

Quando se tratava de outros professores, que não faziam parte da equipa do IC e que lecionavam em países onde a língua de escolarização era o inglês, foi necessário traduzir o IACC para essa língua e, em alguns países, adaptar algumas das tarefas para que elas se adequassem às características culturais da maioria da população a que se destinavam. Por exemplo, nos Estados Unidos da América e em Inglaterra, bem como no Canadá, apenas se traduziu o IACC. Mas quando este foi usado no Brunei, um país onde, naquela época, não existiam roubos, a notícia de jornal (Tarefa A) foi adaptada, para se referir a algo que fizesse parte daquela cultura – falando da produção de marisco em viveiros – e a Tarefa E, em vez de se referir a uma obra de arte, referia-se a diamantes. A moeda referida na Tarefa E também era a que circulava no país onde aqueles alunos viviam.

Por último, apesar disso não estar inicialmente previsto, quando a coordenadora do projeto IC esteve a colaborar com a universidade de Paris VIII, como professora convidada, durante o 2.º semestre de 2002/03, proferiu uma conferência plenária, que originou um pedido para que, posteriormente, viesse a abordar a análise e utilização do IACC nas aulas que lecionava. Assim, nesta universidade, o IACC foi abordado na disciplina de licenciatura designada por *Culture et Cognition*, pelo que também foi traduzido para francês. Posteriormente, esta tradução veio a ser utilizada por professores na França, na Bélgica e no Canadá (Quebec).

Pelo que foi dito, apesar de, quando foi construído, não existir a intenção de o IACC vir a ser traduzido e adaptado a outras línguas e culturas, a sua pregnância e a curiosidade que despertava nos professores e investigadores, fez com que isso viesse a acontecer. Embora se trate de casos pontuais, não deixa de ser representativo do interesse e das potencialidades deste instrumento, quando usado em cenários de educação formal.

5.4.5. Eventos científicos e publicações

Apesar de serem poucos os eventos científicos e as publicações em que se apresentaram e discutiram resultados exclusivamente referentes ao IACC (Machado et al., 2011; Ventura et al., 2010), pois estas comunicações e artigos só começaram a existir quando já tínhamos começado a identificar, de forma exaustiva, os padrões de desempenho dos alunos, são muitíssimas as comunicações e publicações em que nos referimos a dados recolhidos com o IACC quando analisamos os resultados obtidos nos projetos de investigação-ação. Segundo Ventura (2012), os elementos da equipa do IC tinham tido, até julho de 2012, 352 participações em eventos nacionais e 502 em internacionais, bem como publicado 62 capítulos de livros, 41 artigos em revistas e 319 comunicações em atas de eventos da especialidade. Das publicações, de acordo com as publicações anotadas (para mais detalhes, ver Ventura, 2012), há 12 capítulos, 17 artigos em revistas e 72 textos em atas de eventos científicos da especialidade que abordam resultados obtidos com o IACC, o que ilustra, de forma inequívoca, a relevância deste instrumento para as práticas que eram desenvolvidas, em aula, e que se encontram relatadas nestas publicações. Convém salientar que, devido à riqueza e interesse do *corpus* empírico do IC, ainda hoje, em 2013, continuam a surgir convites para participações em eventos da especialidade e publicações referentes aos resultados obtidos neste projeto e no *follow up* que dele fazia parte. Assim, diversas publicações recentes e já aceites para publicação referem-se a este projeto (Borges & César, 2012; César, 2013a, 2013b, in press a; César & Ventura, 2012; Courela & César, 2012; Machado & César, 2012a, 2012b, 2013a, in press b; Melro & César, 2012; Meyer et al., in press; Ventura, Santos, & César, 2012) para citarmos apenas artigos em revistas e capítulos de livros. Nestas publicações, o papel desempenhado pelo IACC aparece identificado, percebendo-se que era um contributo essencial para as práticas colaborativas desenvolvidas pelos professores/investigadores.

Para além disso, das nove teses de doutoramento concluídas por elementos da equipa do IC e supervisionadas pela coordenadora deste projeto, quatro referem-se a projetos de investigação-ação e a dados recolhidos com o IACC e das cinco atualmente em curso, uma delas, ou seja, esta tese, analisa especificamente este instrumento. No que se refere às 28 dissertações de mestrado supervisionadas ou co-supervisionadas pela coordenadora do projeto IC, 12 incluem dados recolhidos com o IACC. Assim, este instrumento foi também objeto de análise e publicação a este nível, tanto mais que as teses de doutoramento e as dissertações que se relacionam com o domínio da Educação Matemática se encontram, na sua maioria, publicadas pela APM.

Por último, convém referir que é frequente, nos eventos científicos da especialidade, que o período de discussão após as apresentações tenha comentários e questões relativos ao IACC. Em muitos casos, alguns destes participantes vieram mesmo a frequentar, posteriormente, os cursos e as ações de formação referidos no Ponto 5.4.1.. Assim, por tudo o que foi dito, os contributos do IACC para a qualidade dos processos de ensino e de aprendizagem têm sido largamente debatidos em eventos da especialidade e este instrumento e as práticas colaborativas do IC estão na origem de diversos convites que têm sido efetuados a elementos da sua equipa, mesmo após a conclusão oficial do projeto, para participarem em conferências plenárias e painéis relacionados com a qualidade da educação.

5.5. IMPACTES DO IACC NAS PRÁTICAS PEDAGÓGICAS

A análise dos instrumentos respondidos pelos alunos na primeira semana de aulas, particularmente do IACC, permite configurar práticas mais adaptadas às suas características, necessidades e interesses. Com base num exemplo de uma turma do ensino básico, pretendemos desocultar algumas das tomadas de decisão dos professores/investigadores, baseadas nas informações provenientes do IACC, conjugadas com as da TIP1, Q1 e observações realizadas na primeira semana de aulas. Os conhecimentos sobre os alunos a que estes instrumentos permitem ter acesso são essenciais para a constituição das primeiras díades, para escolher a natureza das tarefas matemáticas propostas, em especial nas primeiras aulas, bem como para decidir as instruções de trabalho e formas de atuação do próprio professor/investigador, tentando envolver os alunos nas atividades de matemática escolar que lhes permitirão apropriar os conhecimentos, bem como desenvolver as capacidades e competências previstos no currículo prescrito (Gimeno, 2000; Pacheco, 2005).

De entre as turmas do ensino básico que participaram no IC, ao longo dos 12 anos de vigência formal do projeto, selecionámos uma turma de 9.º ano de escolaridade de uma escola situada no distrito de Lisboa. Este ano de escolaridade pareceu-nos particularmente interessante, como objeto de análise, por ser o último ano do 3.º ciclo do ensino básico, pelo que existia uma prova global ou uma prova de avaliação externa, consoante os anos letivos considerados e a legislação vigente nessa altura. Para além disso, na época de vigência do IC a escolaridade obrigatória terminava aos 15 anos de idade (AR, 1986). Isso significava que, se o aluno nunca ficasse retido e entrasse para o 1.º ano do 1.º ciclo do ensino básico no ano civil em que completava os seis anos de idade cronológica, terminava o 9.º ano de escolaridade durante a escolaridade obrigatória. Por último, neste ano de escolaridade abordavam-se, pela primeira vez, alguns conteúdos programáticos que viriam a ser retomados no ensino secundário, como as Probabilidades ou a Trigonometria (Abrantes et al., 1999; ME/DGEBS, 1991). Assim, estes critérios fizeram-nos centrar numa turma do 9.º ano de escolaridade.

5.5.1. Caracterização geral da turma

Esta turma era constituída por 27 alunos, sendo 18 do género masculino e nove do feminino. Isso permite compreender como se procedia numa turma cujo número de alunos era ímpar: formando uma tríade, para que todos os alunos pudessem trabalhar colaborativamente. Convém realçar que as turmas eram constituídas pelas pessoas responsáveis por essa tarefa, em cada escola, não havendo geralmente interferência dos elementos da equipa do IC neste processo, como aconteceu neste caso.

Esta turma apresentava características que a distinguiam de outras turmas do mesmo ano de escolaridade, que também participaram no projeto IC: (1) o número de alunos que se encontravam a repetir o 9.º ano de escolaridade, pois nenhum estava nessa situação; (2) o gosto pela Matemática; e (3) as representações sociais que revelavam acerca deles próprios, enquanto aprendentes de Matemática e sobre esta disciplina. Assim, as idades cronológicas encontravam-se dentro das idades esperadas para este ano de escolaridade, oscilando entre os 13 e os 15 anos. De forma mais detalhada, havia seis alunos com 15 anos, seis com 13 anos e os restantes com 14 anos (N=15).

Relativamente ao gosto pela Matemática, um elevado número destes alunos afirmaram no Q1 (ver Anexo 5) que gostavam desta disciplina (Sim: N=18; Sim/Não: N=2, de acordo as respostas obtidas), ou seja, mais de metade dos alunos desta turma, o que revela uma situação não muito habitual nas cerca de 600 turmas que participaram no IC. O mesmo aconteceu com a representação social que tinham deles próprios enquanto alunos de Matemática, ou seja, consideravam ser “Bons” alunos (N=9) ou “Muito Bons” (N=1), tal como aparecia designado no Q1. Paralelamente, existia um número reduzido de alunos que consideravam ser “Fracos” (N=4) ou “Muito Fracos” (N=1) nesta disciplina, o que também não é usual acontecer. Assim, esta turma colocava desafios extra ao professor/investigador, pois havia um núcleo significativo de alunos que gostavam de Matemática, tinham obtido classificações de Nível 4 ou 5 nos anos letivos anteriores e apresentavam uma elevada auto-estima académica, nomeadamente enquanto aprendentes de Matemática.

Mas, simultaneamente, distraiam-se facilmente. Alguns consideravam tão fácil aprender Matemática que, se não se empenhassem nas aulas e nas tarefas matemáticas propostas, não o consideravam grave, pois aprenderiam, depois, a tempo de ainda obterem uma elevada classificação no teste (com recurso a explicadores, como acontecia com alguns alunos). Em síntese: muitos deles tinham apropriado os conhecimentos matemáticos previstos para os anos letivos anteriores, tinham conseguido obter classificações finais elevadas em cada período, mas também achavam que estudar nas vésperas dos testes era suficiente e não estavam habituados a empenharem-se nas atividades matemáticas, em aula. Portanto, para que aderissem ao contrato didático que se pretendia negociar e que subscrevia os princípios epistemológicos e pedagógicos do IC (César, 2009; Ventura, 2012), era necessário conceber primeiras tarefas que apostassem no fator surpresa e que os envolvessem profundamente nas atividades matemáticas realizadas em aula, permitindo aos que habitualmente obtinham classificações elevadas mantê-las. Mas também se pretendia que desenvolvessem mais capacidades e competências, entre elas a resistência à frustração, persistência na tarefa, sentido crítico, criatividade ou intuição matemática. Paralelamente, os alunos que apresentavam mais dificuldades na apropriação de conhecimentos (matemáticos) precisavam de também se sentir motivados, assim como apoiados pelos pares, podendo participar, enquanto participantes legítimos (César, 2009, 2013a; Lave & Wenger, 1991). As atividades matemáticas deviam permitir-lhes atuar, alternadamente como par mais competente (Vygotsky, 1934/1962), contribuindo para a utilização de mecanismos de *inter-empowerment* (César, 2013a, 2013b, in press b).

Se considerarmos as representações sociais que estes alunos já tinham construído sobre a Matemática, podemos analisá-las tendo em conta dois critérios: (1) serem negativas ou positivas; e (2) serem mais tradicionais ou inovadoras. Analisando as respostas à TIP1 produzidas pelos alunos desta turma, podemos afirmar que 18 revelaram representações sociais positivas e cinco negativas, enquanto quatro apresentam elementos positivos e negativos, o que ilumina que a maioria dos alunos desta turma gostava de Matemática, tinha prazer em recorrer ao pensamento matemático e considerava esta disciplina importante e útil na vida quotidiana. Para além disso, três alunos revelaram uma representação social mais inovadora acerca da Matemática, nove evidenciaram elementos característicos de ambas (tradicional e inovadora) e 15 uma tradicional. Assim, esta turma tinha algo pouco habitual no que respeita às representações sociais que os alunos construíram sobre a Matemática: mais alunos revelavam uma representação social positiva e inovadora. Isso tornava-a desafiante para o professor/investigador e para a equipa do IC, bem como para nós, enquanto investigadores, ao analisarmos o IACC e os impactes que teve nas práticas pedagógicas.

5.5.2. Constituição das primeiras díades

Como foi mencionado no Subponto 5.2., existiam sete critérios fundamentais para a formação de díades, muitos deles diretamente relacionados com a análise dos instrumentos da primeira semana de aulas. Ainda nesse subponto foi exemplificado, recorrendo a uma das díades desta turma, formada pelos Alunos E e Z, como se operacionalizavam esses mesmos critérios. Para além disso, procedeu-se à apresentação das primeiras díades (ver Anexo 20) e da primeira planta de sala de aula (ver Figura 19, Subponto 5.2.3.).

Considerando as informações a que o professor/investigador tem acesso através da análise do IACC, pretendemos explicitar, para cada díade formada, quais as capacidades e competências que já conseguem mobilizar e quais as que precisam de desenvolver (ver Anexos 11, 22, 23, 24, 25 e 26). Desta forma, pretende-se construir uma visão geral relativa às primeiras díades, em termos de capacidades e competências, para que sejam desocultadas as decisões tomadas e o percurso adotado, em termos de natureza das tarefas matemáticas propostas, para esta turma. Nesta turma, o professor/investigador optou por elaborar uma tarefa destinada ao primeiro conteúdo que iria lecionar, de acordo com o currículo prescrito então em vigor: as Probabilidades (Abrantes et al., 1991; ME/DGEBS, 1991). Como era habitual acontecer no âmbito do IC, esta tarefa foi discutida quer no núcleo de estágio quer pela coordenadora desse projeto.

Na Figura 347, podemos observar esta turma, em termos espaciais, relativamente às capacidades e competências avaliadas pelo IACC e que os alunos conseguiram mobilizar, quando lhe respondiam (ver verde). É com base nesta informação, conjugada com as do Q1 (lilás) e as da TIP1 (laranja, para o critério positiva/negativa e vermelho para o inovadora/tradicional), conjugadas ainda com dados da observação da primeira semana, que o professor/investigador toma decisões sobre a constituição das primeiras díades e opta por elaborar, adaptar ou selecionar o primeiro conjunto de tarefas matemáticas, decidindo a natureza das mesmas, as instruções a fornecer aos alunos e as formas de atuação, durante o trabalho em díade e na discussão geral, em grande grupo, para aquele conteúdo programático.

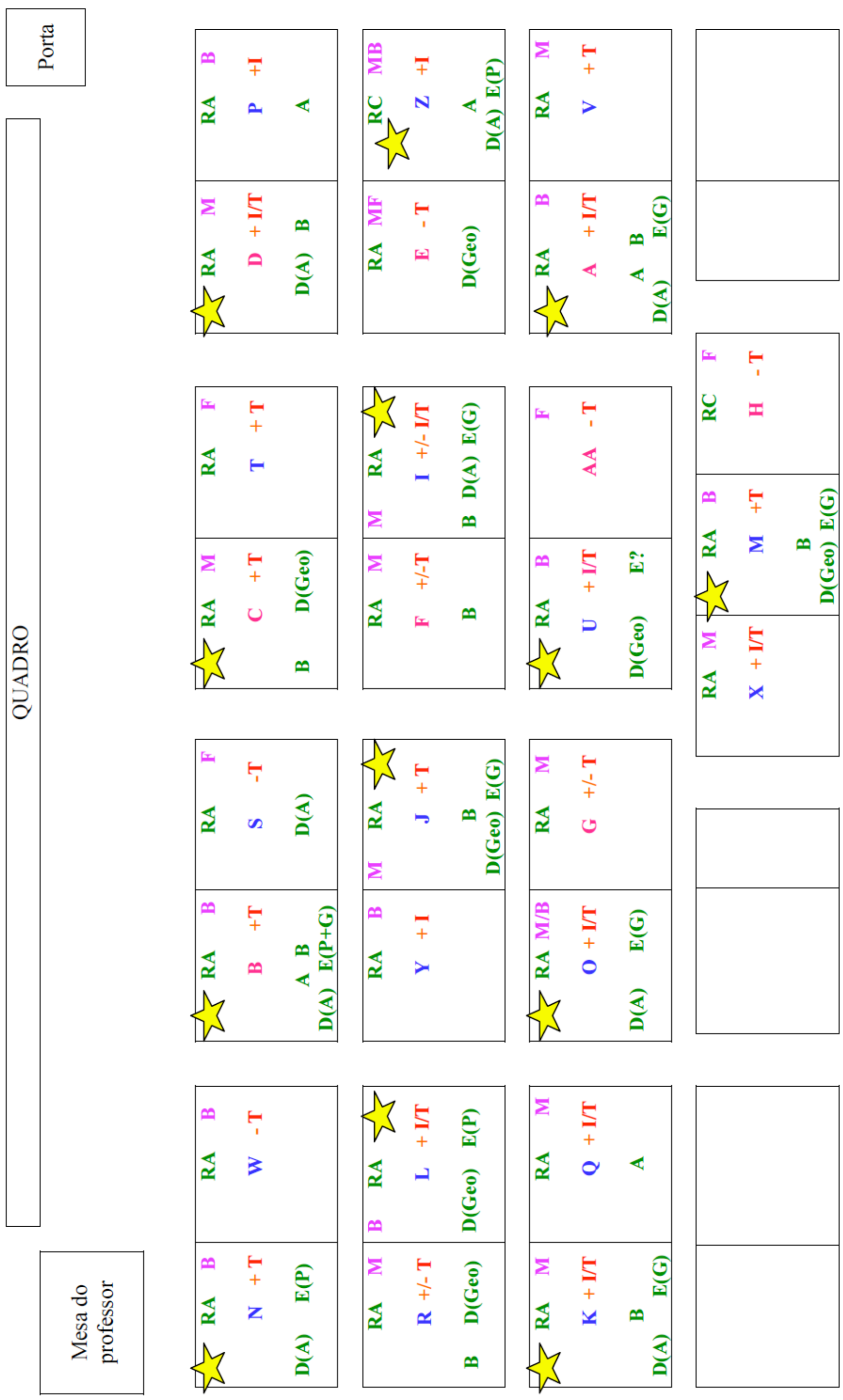


Figura 347 – D, DB do professor/investigador, 2 de outubro de 2003, primeira planta de sala de aula com a informação proveniente do IACC, Q1, TIP1 e Observação

Decidimos designar os alunos por letras, que não correspondem à primeira letra do seu nome, nem seguem a ordenação dos números, nesta turma, para garantirmos o seu anonimato. As letras a azul indicam tratar-se de alunos de género masculino e as rosa de género feminino. Assim, numa primeira observação apercebemo-nos da existência de sete cores: azul e rosa, para os géneros; verde para as capacidades e competências mobilizadas e avaliadas através do IACC; as estrelas amarelas, que designam o aluno que tinha mobilizado mais capacidades e competências no IACC, no início do ano letivo; o lilás, que indica como o aluno se considerava enquanto aprendente de Matemática, numa escala de *likert* – muito fraco (MF), fraco (F), médio (M), bom (B) e muito bom (MB); laranja, que designa se a representação social que construiu, sobre a Matemática, é positiva (+), negativa (-), ou está entre estas duas posições (+/-); e vermelho, que indica se esta é inovadora (I) ou tradicional (T), ou está entre estes critérios (I/T).

Em relação às capacidades e competências que tinham conseguido mobilizar, existe também uma codificação: (1) RA e RC designa o raciocínio abstrato ou o raciocínio concreto, respetivamente (Tarefa C); (2) D(A) ou D(Geo) significa que os alunos atingiram o padrão de desenvolvimento mais elevado para a Tarefa D recorrendo, preferencialmente, a um raciocínio analítico (A) ou a um raciocínio geométrico (Geo); (3) E(P) ou E(G) ilumina que os alunos resolveram, de forma completa, a Tarefa E, recorrendo a uma abordagem passo-a-passo (P), global (G) ou recorrendo a ambas (P+G); e (4) A e B significa que os alunos conseguiram resolver, de forma completa, as Tarefas A e B, respetivamente, pelo que mobilizaram as capacidades e competências avaliadas em cada uma delas.

Analisando a informação que emerge da observação da planta de sala de aula (ver Figura 348), podemos dividi-la em dois grupos. No entanto, queremos salientar que a Aluna AA não esteve presente na primeira semana de aula, pelo que não respondeu ao IACC. O primeiro está relacionado com os alunos que mobilizam o RC (N=2) e o segundo com os que mobilizam o RA (N=24), quando analisamos a Tarefa C. Sendo esta a característica que mais professores de Matemática gostariam de saber, no início do ano letivo, de acordo com a pergunta que lhes foi formulada antes da elaboração do IACC (QP0), mas também com outras investigações realizadas (NCTM, 1991; Stein et al., 1996), pareceu-nos essencial considerar estes dois grupos como primeiro critério, em termos de capacidades e competências, para a formação das díades. Nesta turma, onde a maioria dos alunos conseguiu mobilizar o RA na Tarefa C, isso era fácil de operacionalizar. Mas nem sempre isso acontece, acima de tudo quando existem muitos alunos que apenas mobilizam o RC nesta tarefa e se trata de turmas do ensino secundário, onde os conteúdos programáticos previstos para a disciplina de Matemática apelam frequentemente ao recurso ao RA.

Sobre este aspeto convém ainda realçar que a Tarefa C é aquela em que é geralmente mais fácil os alunos mobilizarem o RA. Existem outras tarefas, nomeadamente a D e a E, que não pretendiam, acima de tudo, analisar se os alunos mobilizam, ou não, esta forma de raciocínio mas que, em algumas estratégias de resolução, fornecem informações complementares referentes a esta forma de raciocínio. Por exemplo, é típico dos alunos que mobilizam o RC, na Tarefa D, dividirem ambas as medidas do retângulo exterior para calcularem metade da sua área. Neste caso, se o aluno revelou mobilizar o RA na Tarefa C e apresenta este tipo de resolução na Tarefa D, isso significa que ele se encontra numa fase de transição entre o RC e o RA. Algo semelhante acontece em relação à Tarefa E, onde considerar que a segunda compra corresponde a uma perda de 100 euros também é típico de alunos que apelam ao RC para resolver este problema. Por isso, se eles revelaram mobilizar RA na Tarefa C, também se encontram numa fase de transição entre estas duas formas de raciocínio. Pelo que foi dito, compreende-se que as informações obtidas com cada uma das tarefas do IACC não devem ser interpretadas de forma isolada. É necessário conjugar o que se conseguiu compreender com as diversas estratégias de resolução e processos de raciocínio utilizados em cada tarefa, conjugando essas informações de modo a obtermos um conhecimento o mais aprofundado e fidedigno possível sobre os alunos de cada turma. Posteriormente, quando começam a resolver tarefas matemáticas relacionadas com os conteúdos previstos para cada ano de escolaridade, é preciso que o professor/investigador vá observando atentamente as formas de atuação e analisando os desempenhos dos alunos, confrontando a informação que fornecem com as que obteve na primeira semana, quer para esclarecer aspetos que então assinalasse quer para assegurar a justeza das interpretações então efetuadas. Daí a importância de ir registando, no DB, o que vai observando.

No que se refere às capacidades e competências avaliadas através do IACC, nesta turma os alunos que respondem de forma completa a cada tarefa, ou seja, que estão no último padrão de desempenho que focámos no Ponto 5.3., são os que podemos observar no Quadro 2.

Quadro 2 – Número de alunos com desempenhos completos em cada tarefa do IACC

Tarefa	A	B	C	D	E
N.º alunos	5	10	24	16	11

Convém realçar que a Tarefa C é sempre a que obtém mais respostas completas e a Tarefa A aquela que apresenta menos destas respostas. Geralmente, é a Tarefa D ou a E que apresentam maior número de respostas completas, a seguir à Tarefa C. O que é mais raro é que o número de respostas completas para a Tarefa E esteja tão próximo do encontrado para a Tarefa B, como sucede nesta turma.

Quando uma turma tem número ímpar de alunos forma-se uma tríade. Habitualmente, esta sentava-se na última fila para permitir que um dos alunos das pontas se sente de lado, na mesa, para que os três consigam interagir mais facilmente e não impeçam o professor/investigador de circular entre as mesas. Nesta turma, a primeira tríade foi composta pelos Alunos X, H e M.

O Aluno M, na primeira semana de aulas, revelou ser muito solidário com os colegas, calmo, apresentando uma elevada autoestima académica e enquanto aprendente de Matemática, bem como uma representação social positiva desta disciplina, que também tinha revelado na TIP1. Assim, parecia reunir características adequadas para trabalhar com a Aluna H, que precisava de melhorar a auto-estima académica e dela própria, enquanto aprendente de Matemática. A previsão era a de que M, ao ter de explicitar mais os processos de raciocínio e as estratégias de resolução, para trabalhar colaborativamente com alunos que apresentavam mais dificuldades em Matemática e que tinham mobilizado menos capacidades e competências no IACC, iria desenvolver outras capacidades e competências, como o sentido crítico e a organização, que nele não estavam muito desenvolvidos. Convém realçar que as capacidades e competências de M – que mobilizou nas Tarefas E e D – são as que mais próximas estão do RC e da transição deste para o RA, o que também era conveniente, pois os níveis de desenvolvimento dos alunos de uma mesma díade ou tríade não devem ser tão afastados que dificultem o processo interativo (César, 1994). Por último, o Aluno M preferia uma abordagem global dos problemas e o Aluno X uma passo-a-passo. Assim, neste aspeto eles eram complementares, o que é conveniente, quando se trabalha colaborativamente. Algo semelhante sucede em relação a preferirem raciocínios geométricos ou analíticos. M revelou recorrer preferencialmente ao raciocínio geométrico (Tarefa D), enquanto os outros dois alunos recorrem preferencialmente a raciocínios analíticos. Assim, também neste aspeto são complementares, podendo todos eles desenvolver novas capacidades e competências, ao interagirem uns com os outros, durante as atividades de matemática escolar.

Se confrontados com tarefas adequadas para que todos trabalhassem na sua ZDP (Vygotsky, 1934/1962), o Aluno M poderia desenvolver novas capacidades e competências (matemáticas), apropriando os conhecimentos previstos no currículo prescrito e atingindo o Nível 5, que era superior ao que tinha obtido em anos letivos anteriores. Isto ilustra que se previa que este aluno também progredisse, embora fosse igualmente de prever que, em muitas situações, ele atuaria como par mais competente (Vygotsky, 1934/1962). Daí que ele fosse sentado entre os outros dois elementos que compunham a tríade, para evitar que, quando dialogasse com um deles, o outro pudesse sentir-se excluído do processo interativo, algo mais fácil de suceder se ele estivesse numa posição exterior e falasse com o elemento que estava sentado no meio, dificultando a participação do terceiro elemento da tríade.

Esta tríade evidencia a necessidade de que as primeiras tarefas matemáticas, referentes aos conteúdos programáticos previstos para este ano de escolaridade, promovam o desenvolvimento do raciocínio abstrato. Na resolução dessas tarefas os Alunos X e M poderão atuar como par mais competente (Vygotsky, 1934/1962). Porém, sendo a Aluna H extremamente organizada e gostando de embelezar as respostas que fornece, por exemplo, com cores, quando estes aspetos forem necessários para uma resolução, ela pode também atuar como par mais competente. Assim, mesmo quando um/a aluno/a revela mobilizar menos capacidades e competências no IACC do que os seus pares, ele/a pode, em algumas tarefas, atuar como par mais competente, desde que o professor/investigador observe aspetos em que essa pessoa pode dar um contributo significativo. Esta forma de atuação é particularmente importante para alunos como a Aluna H, que revelou ter construído uma representação social negativa da Matemática e que se considerava uma aluna fraca, nesta disciplina. Nestes casos, a promoção de uma auto-estima positiva, enquanto aprendente de Matemática, é essencial para que o aluno se envolva mais nas atividades de matemática escolar, podendo vir a melhorar os seus desempenhos nesta disciplina. Não é realista pensar que os desempenhos melhoram quando não se atua, simultaneamente, sobre a mudança das representações sociais em relação à Matemática e ao próprio, enquanto aprendente dessa disciplina (César, 2003, 2009, 2013a; Machado, 2008; Machado & César, 2012a, 2013a, in press b).

Na Tarefa D, a Aluna H, como mobiliza o raciocínio concreto e não o abstrato, considerou que, dividindo ambos os lados do retângulo por dois, obteria as medidas necessárias para calcular metade da área dessa figura geométrica. Assim, ela compreende que a parte pintada é metade da área do retângulo, mas não compreende que, para obter metade da área teria apenas de dividir por dois, uma das dimensões (largura ou comprimento). Esta resolução realça a necessidade de facilitar a transição do raciocínio concreto para o abstrato, aspeto que o professor/investigador deverá ter considerado desde as primeiras tarefas propostas. No entanto, percebemos que esta aluna prefere raciocínios analíticos aos geométricos. O Aluno X também divide as duas dimensões por dois, e não apenas uma, o que indica que se encontra na transição entre o raciocínio concreto e o abstrato, tendo conseguido mobilizar o RA na Tarefa C, mas não na D. A resolução da Tarefa E volta a apontar para uma transição entre estas formas de raciocínio, pois ambos consideram um lucro de 100 euros, uma vez que encaram a segunda compra como uma perda de 100 euros. Logo, para esta tríade, as tarefas que promovam a transição entre o raciocínio concreto e o abstrato, por exemplo através da manipulação de materiais associada a estimativas, como é possível acontecer em tarefas destinadas ao estudo das Probabilidades, revelam-se particularmente adaptadas.

Quanto à Tarefa A, os Alunos X e H não a resolveram e o Aluno M confirmou o que lá estava escrito, o que ilumina a representação social dele, enquanto aluno, que o leva a não rejeitar tarefas, não as deixando por responder. Assim, todos precisavam de desenvolver o sentido crítico em relação a conteúdos matemáticos que pudessem ler. Para isso, dois aspetos podem contribuir: a natureza das tarefas propostas aos alunos, os processos interativos que decorrem durante o trabalho em tríade, bem como na discussão geral, que é orquestrada pelo professor/investigador. Para além disso, nas próximas díades em que participarem, se ainda não tiverem desenvolvido esta capacidade, deverão ter um par que tenha conseguido mobilizar o sentido crítico quando respondeu ao IACC, ou que entretanto o tenha desenvolvido, pelo trabalho colaborativo realizado, em aula. Em relação à intuição matemática, há dois dos alunos que não a mobilizam, visto que a Aluna H não respondeu à Tarefa B e o Aluno X elaborou uma explicação desconexa. Mas o Aluno M revela intuição matemática. Assim, no que se refere a esta capacidade, também pode atuar como par mais competente (Vygotsky, 1934/1962).

A Aluna H obteve os Níveis 3, 4 e 3, respetivamente nos 1.º, 2.º e 3.º períodos desse ano letivo. Assim, tal como se tinha previsto, trabalhar nesta díade melhorou a sua auto-estima positiva, permitiu a mudança da representação social, enquanto aprendente de Matemática e ajudou-a a ter acesso ao sucesso escolar, nesta disciplina, onde obteve sempre níveis positivos, no final de cada período. O Aluno M obteve os Níveis 4, 5 e 5, o que ilustra que atingiu, nos dois últimos períodos, o nível que se tinha pressuposto que atingiria. Logo, trabalhar colaborativamente também se revelou benéfico para ele. O Aluno X obteve também Níveis 3, 4 e 3, ou seja, no 2.º período conseguiu atingir um nível mais elevado do que o habitual, em anos letivos anteriores, mas não o conseguiu manter no final do ano letivo, apesar do Nível 3 que lhe foi atribuído ser bastante elevado.

A díade formada pelos Alunos E e Z também é constituída por um elemento (Z) que mobiliza o raciocínio concreto e outro o abstrato (E), na Tarefa C. Esta díade apresenta características que são muito interessantes para analisarmos, uma vez que o aluno que mobiliza RC (Z) é o que se considera muito bom a Matemática e que obtinha, habitualmente, Nível 5 nessa disciplina, nos anos letivos anteriores, enquanto o aluno que mobilizava o RA era o que se considerava muito fraco e que tinha transitado de ano com nível inferior a 3 a Matemática. Isto ilustra que, muitas vezes, sobretudo durante o ensino básico, o RC permite atingir elevados níveis de desempenho, sobretudo quando associado a formas preferenciais de raciocínio analítico, que é o habitualmente mais valorizado em atividades de matemática escolar e a abordagens passo-a-passo, mais frequentes quando os alunos mobilizam RC e não RA (César, 2003, 2009). Outros autores descrevem que, por vezes, os alunos que preferem raciocínios geométricos acabam por ser penalizados, em termos de desempenhos escolares (Meyer et al., in press; Ventura et al., 2010). Assim, estas capacidades e competências complementares, associadas a uma representação social de si, enquanto aprendentes de Matemática, muito diferente, bem como a uma representação social positiva dessa disciplina, por parte do Aluno Z, sendo esta negativa, para o Aluno E, permitiam supor que ambos teriam a ganhar com os processos interativos subjacentes ao trabalho colaborativo. Pelo que foi dito, para esta díade, as tarefas matemáticas devem apelar, simultaneamente, ao recurso a estratégias de resolução associadas a raciocínios analíticos e a raciocínios geométricos, para que estes dois alunos possam mobilizá-los e ambos desenvolvam aquilo que necessitam ao trabalharem na ZDP de cada um deles (Vygotsky, 1934/1962). Este aspeto é iluminado pela resolução que eles fazem da Tarefa D: a Aluna E recorre preferencialmente a raciocínios geométricos e o Z a analíticos, e ambos perceberam que a parte pintada era metade da área do retângulo. Mas a Aluna E não calcula esse valor, enquanto o Aluno Z resolve a tarefa de forma completa.

Para além disso, o Aluno Z revelou capacidade de observação e sentido crítico em relação a notícias com conteúdos matemáticos (Tarefa A), enquanto a Aluna E não respondeu a esta tarefa. Assim, no que se refere ao sentido crítico, o Aluno Z pode atuar como par mais competente (Vygotsky, 1934/1962). Na Tarefa B, nenhum revela intuição matemática, nem criatividade. Como tal, estas capacidades terão de vir a ser desenvolvidas durante as discussões gerais ou, posteriormente, com outros pares, quando as díades forem reorganizadas, algo que acontece periodicamente. Mas é necessário que as tarefas matemáticas propostas no início do ano letivo promovam estas capacidades, uma vez que poucos alunos (N=10), nesta turma, resolveram com sucesso a Tarefa B.

Na Tarefa E, o Aluno Z resolve-a de forma completa, preferindo uma abordagem passo-a-passo, enquanto a Aluna E indica um lucro de 100 euros, mostrando que o seu desempenho se encontra na transição entre o raciocínio concreto e o raciocínio abstrato, que mobilizou na Tarefa C, mais associado a raciocínios geométricos, que ela prefere, mas não na Tarefa E, que apelava a raciocínios analíticos, preferenciais para o Aluno Z. É frequente os alunos que se encontram na transição entre o RC e o RA só conseguirem mobilizar o RA na forma preferencial de raciocínio: analítico ou geométrico. Esta situação também ilustra, de forma clara, como a natureza das tarefas pode facilitar – ou dificultar – a mobilização de determinadas capacidades e competências em função da sua natureza e das formas como os diversos conteúdos matemáticos são abordados. Assim, as tarefas devem proporcionar a promoção do confronto de diferentes estratégias de resolução, bem como formas de pensamento e processos de raciocínio entre estes dois alunos, isto é, facilitar a emergência do que Doise e Mugny (1981) designam por conflito sócio-cognitivo. Mas, para que tal aconteça, as tarefas deverão ser de elevado nível de exigência cognitiva (Boston & Wolf, 2006; Garrison, 2011; Jackson et al., 2011; 2012; Stein et al., 1996), uma vez que estas apelam mais à mobilização de conhecimentos relacionais do que instrumentais (Skemp, 1978), promovendo espaços e tempos nos quais a argumentação e a comunicação matemática ganham especial relevo (César, 2009, 2013a).

A Aluna E obteve sempre Nível 3 nos três períodos. Se pensarmos que se tratava de uma aluna que, em anos letivos anteriores, tinha transitado com nível inferior a 3 a Matemática e que se considerava muito fraca (Q1), podemos considerar a evolução dos seus desempenhos matemáticos como muito positiva e estável no tempo, pois conseguiu atingir esse nível desde o 1.º período e mantê-lo, ao longo do ano. De realçar que, para esta aluna, esta mudança foi essencial para que escolhesse uma continuação de estudos, no ensino secundário, em que existisse a disciplina de Matemática, algo que não pensava fazer quando se iniciou o 9.º ano de escolaridade. O Aluno Z obteve Níveis 4, 4+ e 5, ou seja, veio a atingir Nível 5, tal como se tinha previsto que viria a acontecer, pois o trabalho colaborativo poderia facilitar a transição para o RA, aspeto essencial para que atingisse esse nível, dada a elevada exigência que caracteriza o processo de avaliação do IC.

No segundo grupo, composto pelos alunos que mobilizam pelo menos o RA, existem alguns aspetos a salientar. A díade formada pelos alunos N e W junta dois alunos que se descrevem como bons, mas que apresentam características, quanto às capacidades e competências que conseguiram mobilizar ao responderem ao IACC, que são bastante diferentes. Isso ilumina a utilidade de se ter acesso às capacidades e competências dos alunos e não apenas aos níveis de aproveitamento obtidos nos anos letivos anteriores. Neste caso, as classificações obtidas eram semelhantes. Mas as capacidades e competências que tinham desenvolvido, não. O Aluno N distraía-se com alguma facilidade, o que levou o professor/investigador a colocá-lo numa carteira da fila da frente, mas afastado da maioria dos colegas, para facilitar a sua concentração. Também escolheu um par que era bastante concentrado e organizado, para permitir a N desenvolver essas capacidades. No entanto, W não mobilizara outras capacidades e competências para além do RA, enquanto N tinha conseguido estabelecer conexões com o quotidiano, mostrando uma preferência por abordagens passo-a-passo (Tarefa E) e tinha revelado também preferir raciocínios analíticos (Tarefa D). Na Tarefa A, o Aluno W copia parte dos dados da notícia e, na Tarefa B, realiza o primeiro movimento previsto (despejar a caneca de 3 litros na de 5 litros) mas, ao não conseguir mobilizar a intuição matemática, não percebe que teria de repetir o movimento para obter 1 litro na caneca de 3 litros, como desejado. Na Tarefa D, não responde e na Tarefa E soma valores de compras e vendas, obtendo 900 e considerando que o comerciante ficou na mesma, ou seja, não teve lucro nem prejuízo, revelando uma dificuldade em distinguir compras de vendas e os respetivos contributos para a existência de lucro ou de prejuízo. O Aluno N não responde à Tarefa A e na Tarefa B revela pouca intuição matemática e falta de persistência na tarefa. Começa pelo movimento que daria origem a mais transbordos do leite, pois passa 3l da caneca de 5l para a de 3l. Mas desiste rapidamente e opta por calcular por estimativa 1l de leite, a partir dos 2l que ficaram na caneca de 5l. Assim, ambos precisam de trabalhar a persistência na tarefa.

Para além disso, apesar de ambos se considerarem bons alunos, W tinha construído uma representação social negativa da Matemática e N uma positiva. Assim, com as características complementares destes dois alunos, ambos poderiam atuar alternadamente como par mais competente (César, 2009, 2013a) e, com isso, desenvolver novas capacidades e competências, atingindo níveis mais elevados de desempenhos matemáticos.

O Aluno N obteve Níveis 3, 3+ e 4 em cada um dos períodos, enquanto o Aluno W obteve 3, 4 e 3. Assim, embora ambos desenvolvam capacidades e competências, ao longo do ano letivo, o nível de exigência do processo de avaliação levou a que apenas um deles obtivesse Nível 4 no 3.º período, que é aquele cujas classificações contam para a transição para o próximo ano de escolaridade. A capacidade de persistência na tarefa foi mais desenvolvida por aquele que veio a obter Nível 4.

Na díade formada pelos Alunos R e L, ambos mobilizam o RA na Tarefa C e ambos construíram uma representação social positiva da Matemática, mas a do R é tradicional, enquanto a do L tem já alguns elementos inovadores. Assim, o processo interativo próprio do trabalho colaborativo poderá dar origem a uma representação social mais inovadora e flexível, por parte do Aluno R. Este aluno, que se considera médio, mobiliza a intuição matemática (Tarefa B) e revela preferência por raciocínios geométricos (Tarefa D). Por sua vez, o Aluno L, embora também revelando preferência por raciocínios geométricos (Tarefa D), consegue estabelecer conexões com o quotidiano, compreender situações de venda e prefere uma abordagem passo-a-passo (Tarefa E). Na Tarefa B, consegue revelar alguma intuição matemática, embora considere ser necessário um recipiente extra, não graduado, para ir deitando o leite, ou seja, o seu desempenho pertence ao antepenúltimo padrão, estando já muito próximo do padrão mais avançado. Também é de salientar que o Aluno L, apesar de não explicitar todas as opções tomadas na Tarefa C, explica como decidiu o número de pintas que desenhou, revelando capacidade de atenção concentrada e de memorização das instruções que se encontram no início do IACC. O Aluno R faz algo interessante: no modelo, na primeira coluna, designa cada figura por primeira, segunda e terceira. Depois, procura-as na segunda coluna e, por último, desenha-as na terceira coluna, conjugado essa informação com a das linhas. Assim, este aluno, embora de forma mais esquemática, também explicitou como tinha pensado. Na Tarefa E, o Aluno R chega à solução esperada – 200 euros de lucro – mas os cálculos que indica deveriam levá-lo a concluir existirem 100 euros de lucro, pois ele considera que o comerciante perdeu 100 euros quando efetua a segunda compra. Este é um exemplo de como este aluno provavelmente se encontra na transição entre o RC e o RA, mas ao ser muito organizado e ao poder raciocinar geometricamente, como prefere, conseguiu mobilizar o RA na Tarefa C. Assim, em alguns aspetos, estes dois alunos apresentam capacidades e competências complementares, permitindo-lhes alternar quem atua como par mais competente em função da natureza das tarefas propostas, em aula. Em relação ao sentido crítico (Tarefa A), nenhum deles o revelou, pois ambos copiaram parte dos dados contidos na notícia. Mas, com a capacidade de análise que ambos revelaram, este poderá ser desenvolvido durante as discussões gerais.

Quanto às classificações finais obtidas, o Aluno L teve sempre Nível 4, enquanto o Aluno R obteve sempre Nível 3. Isso ilumina como as capacidades e competências criam possibilidades de acesso ao sucesso escolar mas, depois, é preciso conjugar essas capacidades e competências com outros elementos, que podem fazer com que alunos com capacidades e competências semelhantes venham a obter classificações diferentes, como acontece neste caso.

Se considerarmos a díade formada pelos Alunos K e Q observamos que ambos mobilizam o RA quando resolvem a Tarefa C. No entanto, o Aluno K revela também ser muito organizado e pretender dar respostas muito completas, pois escreve uma explicação referente ao que pensou quando completou o modelo com as duas figuras em falta, ou seja, foi para além do que estava pedido nas instruções desta tarefa, tendo em atenção que, no início do IACC, é pedido para que expliquem sempre o que pensaram. Como esta primeira instrução está do outro lado da folha, quase nenhum aluno se lembrou dela quando respondeu à Tarefa C. Assim, revela uma capacidade de memória, atenção concentrada e rigor elevados. O Aluno Q desenha as figuras em falta de forma rigorosa, sem hesitações ou emendas, mas não fornece uma explicação para o que o levou a desenhá-las assim.

O Aluno K revela mobilizar intuição matemática (Tarefa B), resolve a Tarefa D recorrendo preferencialmente a raciocínios analíticos e a Tarefa E preferindo uma abordagem global dos problemas. No entanto não mobiliza sentido crítico (Tarefa A), apenas repetindo dados constantes na notícia, algo que o Aluno Q mobiliza. Mas este último não mobiliza as capacidades e competências avaliadas nas Tarefas B (à qual não responde), D e E. Na Tarefa D, decompõe a figura em losangos e vai calcular, através do teorema de Pitágoras, o comprimento do lado do losango. No entanto, depois, em vez de usar a fórmula para calcular a área do losango, calcula o perímetro dos três losangos, ou seja, confunde o conceito de perímetro com a de área. Na Tarefa E, apresenta um desempenho típico de quem mobiliza o RC, onde considera que, quando existe a segunda compra, o comerciante perde dinheiro, indicando que os seus desempenhos se encontram na transição entre o RC e o RA, pois mobiliza o RA na tarefa mais simples – Tarefa C – mas não na Tarefa E. Assim, se confrontados com tarefas adequadas às suas capacidades e competências, por mobilizarem algumas que são diferentes, quando resolvem o IACC, estes alunos podem atuar, alternadamente, como par mais competente, passando algumas destas capacidades e competências, no futuro, a fazer parte do nível de desenvolvimento real de cada um deles (Vygotsky, 1934/1962), permitindo-lhes usarem-nas já de forma autónoma, por exemplo, quando resolviam testes individuais.

Quanto à sua representação social, enquanto aprendentes de Matemática, ambos se consideram alunos médios e revelam uma representação social da Matemática positiva, com elementos tradicionais e outros inovadores. Assim, embora ambos se considerem alunos médios, as capacidades e competências que mobilizam são complementares e permitem-lhes desenvolver as que necessitam de ser promovidas através do trabalho colaborativo, efetuado na ZDP (Vygotsky, 1934/62), de cada um deles. Paralelamente, como ambos construíram uma representação social positiva da Matemática, isso permitiu supor que se iriam empenhar nas tarefas propostas, podendo ser dos que começavam por ficar na última fila de carteiras. A existência, em ambos, de aspetos inovadores na representação social da Matemática também permitiu prever que poderão conseguir desenvolver a criatividade, através dos processos interativos em jogo durante o trabalho colaborativo.

O Aluno K obteve os Níveis 3, 2 e 3, obtendo também Nível 3 na prova global. O Aluno Q obteve sempre Nível 3, em qualquer um dos períodos. Assim, apesar de terem desenvolvido novas capacidades e competências, ao longo do ano letivo, o nível de desempenho manteve-se médio, como acontecia nos anos letivos anteriores.

A díade formada pela Aluna B e o Aluno S também inclui dois alunos que mobilizam o RA. No entanto, as representações sociais de cada um deles sobre a Matemática eram diferentes, pois S construíra uma negativa e B uma positiva. Para além disso, quanto à sua representação social enquanto aprendentes de Matemática, S considerava-se fraco e B considerava-se boa. O Aluno S mobilizou o raciocínio analítico ao resolver a Tarefa D de forma completa, tal como B. Mas esta última aluna tinha conseguido também mobilizar o sentido crítico (Tarefa A), a intuição matemática (Tarefa B) e as conexões com o quotidiano (Tarefa E), onde revelou, inclusive, que conseguia seguir tanto uma abordagem global, como uma abordagem passo-a-passo dos problemas. Para além disso, esta aluna ainda evidenciou que se lembrava das instruções iniciais, ao explicar porque desenhou daquela maneira as figuras em falta na Tarefa C. Logo, era a aluna que mais capacidades e competências mobilizara. Mas também revelara ser calma, paciente, solidária com os colegas, que procurava animar (por exemplo, na discussão geral do IACC, quando algum mais inseguro não queria ir ao quadro, ou hesitava), alegre e com um profundo gosto pela Matemática, sendo capaz de uma enorme concentração de atenção e organização, o que levou o professor/investigador a começar por a escolher para par do S, que precisava de tornar a sua representação social da Matemática e dele próprio, enquanto aluno dessa disciplina, mais positivas, aspetos em que a B se poderia revelar muito adequada. O Aluno S não respondeu à Tarefa A, na Tarefa B não revelou persistência na tarefa – algo que a Aluna B o poderia ajudar a desenvolver – e na Tarefa E apresenta um desempenho típico de quem mobiliza o RC, indicando que, provavelmente, os seus desempenhos estão na transição entre o RC e o RA, uma vez que resolveu, de forma completa, a Tarefa C. Assim, os benefícios desta díade são mais nítidos para o Aluno S, mas a Aluna B, ao ser alguém que gosta de explicar o que sabe, pode desenvolver mais capacidades e competências por ser, em muitas tarefas, tutora de S. No entanto, em díades posteriores, houve o cuidado de a pôr a trabalhar com outros alunos que lhe fornecessem desafios de outro tipo como, por exemplo, um colega que recorresse preferencialmente ao raciocínio geométrico.

O Aluno S manteve o Nível 2 em todos os períodos. A Aluna B manteve o Nível 4 em todos os períodos, embora as suas capacidades e competências fizessem prever, inicialmente, que iria atingir o Nível 5. No caso do Aluno S, a desmotivação e a insegurança não progrediram o suficiente para o fazerem atingir o Nível 3. Quanto à Aluna B, ela gostava de aprender, empenhava-se bastante nas atividades das aulas, mas o nervosismo que manifestava nos testes individuais não lhe permitiram atingir o Nível 5 embora também não a fizessem descer do Nível 4 na prova global, o que ela já considerou um progresso, pois não era isso que esperava que acontecesse, no início do ano letivo. Foram precisamente as características do Aluno S, nomeadamente a sua visível desmotivação, que fez com que fosse colocada esta díade na fila da frente.

Os Alunos J e Y mobilizaram ambos RA na Tarefa C. Estes dois alunos apresentavam uma representação social da Matemática positiva, mas a de J era tradicional, enquanto que a de Y era inovadora, pelo que se complementavam e este era um aspeto que J poderia desenvolver ao interagir com Y. Quanto à sua representação social enquanto aprendentes de Matemática, Y considerava-se bom aluno e J médio, apesar de ser este quem mobilizou mais capacidades e competências, quando respondeu ao IACC. Isto ilustra como, muitas vezes, o sistema de ensino não conhece, nem valoriza – nem atualiza – as capacidades e competências dos alunos.

O Aluno J não revela sentido crítico ao responder à Tarefa A, pelo que repete que existiu um decréscimo de assaltos. Mas revela intuição matemática (Tarefa B), uma preferência por raciocínios geométricos (Tarefa D) e competências que lhe permitem fazer conexões com a vida quotidiana (Tarefa E), revelando preferir uma abordagem global aos problemas. O Aluno Y recorre a um pensamento comum na Tarefa A, fazendo comentários sobre a segurança mas não comentando a notícia, do ponto de vista matemático. Na Tarefa B, não revela intuição matemática, mas revela alguma persistência na tarefa. Começa por despejar o leite da caneca de 5 litros para a de 3 litros, ficando com 2 litros nessa caneca. Depois, despeja-os para um recipiente não graduado. Em seguida, deita esses dois litros na caneca de 3 litros e fica a faltar 1 litro. Logo, ele não consegue fornecer 1 litro de leite com estes procedimentos. Mas tentou chegar a uma solução, o que revela alguma persistência na tarefa. Na Tarefa C, recorda-se das instruções da primeira página e fornece uma explicação para as figuras que desenhou nos espaços em branco. Na Tarefa E considera que o comerciante perdeu 100 euros na segunda compra, o que indica que deve estar na transição entre o RC e o RA, uma vez que completou a Tarefa C, que lhe permite raciocinar geometricamente, como prefere, mas tem um desempenho típico dos alunos que mobilizam RC na Tarefa E, onde teria de usar um raciocínio analítico.

Ao formar esta díade, previa-se que os alunos alternassem a atuação como par mais competente, em função das tarefas propostas e que ambos conseguissem melhorar os desempenhos matemáticos. As classificações obtidas pelo Aluno J foram: Níveis 3, 2 e 3, em cada um dos períodos, tendo também obtido Nível 3 na prova global. Assim, manteve o nível médio que afirmava também ter obtido em anos letivos anteriores. O Aluno Y obteve 3, 4 e 4, pelo que também manteve os níveis atingidos anteriormente.

A díade formada pela Aluna G e o Aluno O juntava dois alunos que tinham mobilizado o RA na Tarefa C. No entanto, tanto na Tarefa D, como na Tarefa E, a

Aluna G apresenta desempenhos típicos de quem mobiliza o RC. Na Tarefa D, porque divide cada uma das dimensões por dois para calcular metade da área do retângulo, na Tarefa E porque considera que o comerciante perdeu 100 euros com a segunda compra. Assim, os seus desempenhos encontram-se na transição entre o RC e o RA, pois é na tarefa mais fácil que consegue mobilizar o RA. Na Tarefa A esta aluna repete parte dos dados da notícia e na Tarefa B indica só que 1 litro é 1/3 de 3 litros ou 1/5 de 5 litros. O Aluno O também não mobiliza sentido crítico (Tarefa A), mas mobiliza intuição matemática (Tarefa B), embora recorra a um recipiente extra, pelo que o seu desempenho se situa no antepenúltimo padrão de desempenho desta tarefa. Na Tarefa D revela preferência por raciocínios analíticos e na Tarefa E consegue estabelecer conexões com o quotidiano e prefere uma abordagem global dos problemas. Para além disso, tinha construído uma representação social positiva da Matemática, sendo a da Aluna G entre o positivo e o negativo. A sua representação social já incluía alguns elementos inovadores, enquanto a da G era apenas tradicional. A sua representação social enquanto aprendentes de Matemática não divergia muito: G considerava-se média e O entre médio e bom.

Com estas características, ambos poderiam trabalhar na sua ZDP e progredir quanto aos desempenhos matemáticos. Nas classificações finais dos períodos, G obteve Níveis 4, 3 e 3, o que revela que o trabalho colaborativo com o Aluno O lhe permitiu atingir desempenhos mais elevados do que o habitual, algo que também aconteceu na prova global. O Aluno O obteve sempre Nível 3, inclusive na prova global. Assim, era em relação a ele que as previsões apontavam para melhorias dos desempenhos que, embora se tenham registado, não foram suficientes para que atingisse o Nível 4.

Se considerarmos a díade composta pelos Alunos C e T observamos que ambos mobilizaram o RA na Tarefa C. À semelhança do que aconteceu com alguns alunos desta turma, a Aluna C também explicita os processos de raciocínio subjacentes ao desempenho que revelou na Tarefa C. Esta aluna não conseguiu revelar sentido crítico (Tarefa A), mas evidenciou intuição matemática (Tarefa B), bem como a preferência por raciocínios geométricos (Tarefa D). Por outro lado, o desempenho que evidenciou na Tarefa E é típico dos alunos que se encontram na transição do RC para o RA, uma vez que considera que o comerciante perdeu 100 euros na segunda compra. Por ser uma tarefa mais complexa do que a Tarefa C e não apelar a raciocínios geométricos, não conseguiu mobilizar o RA nesta tarefa.

O Aluno T não responde à Tarefa A. Quanto à Tarefa B, não revela intuição matemática, mas evidencia alguma persistência na tarefa, na medida em que enche a caneca de 3 litros e vaza o seu conteúdo para a de 5 litros. De seguida, despeja a caneca de 5 litros para a de 3 litros, mas desta vez só até metade, dando mais meio litro à senhora Isaura, ou seja, este aluno tenta efetuar passagens com o leite de uma caneca para a outra, sem desistir de procurar satisfazer o que era pretendido. No entanto, não é dos que revela mais persistência na tarefa, pois desiste de fazer passagens, de uma caneca para outra, antes de ter chegado à medida pretendida: 1 litro de leite.

Pelo que foi dito, quando a Aluno C atuar como par mais competente (Vygotsky, 1934/1962), o Aluno T poderá desenvolver capacidades como a intuição matemática e competências associadas aos raciocínios geométricos, se confrontado com tarefas matemáticas adequadas às suas características, ou seja, que promovam o desenvolvimento desta capacidade e desta competência. Apesar de não ter resolvido de forma adequada e completa a Tarefa E, o seu desempenho evidencia preferência por uma abordagem passo-a-passo dos problemas. Para além disso, se compararmos com o desempenho da Aluna C, este aluno evidenciou conseguir perceber os significados de lucro e prejuízo, uma vez que afirma que nas duas transações vendeu sempre mais caro do que comprou, por isso teve lucrou. Esta evidência permite ao Aluno T atuar como par mais competente (Vygotsky, 1934/1962) em tarefas que apelem a competências que lhe permitem fazer conexões com a vida quotidiana, nomeadamente as que se referem a situações de compra e de venda.

Quando se formou esta díade, previa-se que os alunos alternassem a atuação como par mais competente em função das tarefas propostas e que ambos conseguissem melhorar os desempenhos matemáticos. As classificações obtidas pela Aluna C revelam que obteve sempre Nível 3 em todos os períodos, enquanto que o Aluno T obteve Níveis 2, 3 e 3, em cada um dos períodos. Recordemos que este aluno tinha desenvolvido uma representação social negativa, enquanto aprendente de Matemática, pois considerava-se fraco e, nos anos letivos anteriores, nunca tinha obtido Nível 3, ou outros níveis não inferiores a 3. Assim, o que se tinha previsto, no início do ano letivo, através da análise do IACC, conjugada com as informações da TIP1 e Q1, aconteceu, ou seja, o Aluno T conseguiu melhorar os seus desempenhos ao longo do ano letivo e transitar de ano com um nível positivo a Matemática e a Aluna C, apesar de ter sempre mantido o mesmo nível (Nível 3), estava já bastante perto do Nível 4 e conseguiu desenvolver outras capacidades e competências, nomeadamente as relacionadas com as da Tarefa E, ou seja, com as conexões à vida quotidiana.

Os Alunos F e I mobilizaram ambos o RA na Tarefa C. Estes dois alunos apresentavam uma representação social da Matemática que contemplava elementos positivos e negativos. Contudo, a da Aluna F era tradicional, enquanto a de I continha também elementos que a fazia ser considerada inovadora, pelo que se complementavam. Assim, através do estabelecimento de interações sociais dialógicas e do trabalho colaborativo, o Aluno I poderia contribuir para mudar a representação social de F, tornando-a mais inovadora.

O Aluno I não revelou sentido crítico ao responder à Tarefa A, pelo que repete que existiu um decréscimo do número de assaltos, associando 1/25 a 25% e 1/20 a 20%. No entanto, evidenciou mobilizar a intuição matemática (Tarefa B), uma preferência por raciocínios analíticos (Tarefa D) e competências que lhe permitem fazer conexões com a vida quotidiana (Tarefa E), revelando preferir uma abordagem global aos problemas. A Aluna F também não revelou sentido crítico (Tarefa A), mas conseguiu evidenciar intuição matemática (Tarefa B), embora o seu desempenho fosse pouco detalhado, na medida em que só escreve as operações matemáticas associadas às passagens de leite entre as canecas (3 x 2 = 6 ; 6 – 5 = 1). Assim, o Aluno I, que também mobilizou intuição matemática, mas cujo desempenho é claro e rigoroso, poderá atuar como par mais competente, facilitando o desenvolvimento à Aluna F de capacidades e competências relacionadas com a escrita detalhada e o rigor na explicitação das formas de pensamento e dos processos de raciocínio utilizados. Para além disso, esta aluna não responde de forma completa à Tarefa D, embora revele preferência por raciocínios analíticos e o desempenho na Tarefa E evidencie que se encontra na transição do RC para o RA, uma vez que considera que o negociante não obteve lucro quando voltou a comprar a obra de arte. Portanto, se confrontada com tarefas adequadas à sua ZDP, esta aluna poderá desenvolver diversas capacidades e competências ao interagir com o Aluno I. Por sua vez, a Aluna F mostrou ser muito organizada quando transcrevia o que estava a ser registado no quadro, ter um caderno com aspetos realçados a cor, ser pontual e concentrada nas tarefas, aspetos que o Aluno I precisava de melhorar. Assim, ela também poderia atuar como par mais competente nesses aspetos.

Desta forma, com as características que estes dois alunos apresentam, poder-se-ia supor que ambos iam conseguir progredir quanto aos desempenhos matemáticos, se trabalhassem na respetiva ZDP (Vygotsky, 1934/1962). O Aluno I obteve Níveis 3, 4 e

4 em cada um dos períodos, o que ilumina que o trabalho colaborativo permitiu que atingisse melhores desempenhos, uma vez que este se considerava um aluno médio e que, anteriormente, tinha obtido sempre Nível 3. A Aluna F teve sempre Nível 3 em qualquer dos períodos, pelo que manteve o nível médio que afirmava ter obtido em anos letivos anteriores, mas desenvolveu capacidades e competências que não apresentava no início do ano letivo, como o sentido crítico, a argumentação e as conexões com o quotidiano.

Em relação aos Alunos U e AA, estes formaram uma díade por se ter considerado que, as características do Aluno U, que esteve presente desde a primeira aula, lhe permitiriam trabalhar com a Aluna AA, caso esta se apresentasse nas primeiras aulas já referentes aos conteúdos matemáticos previstos para este ano de escolaridade. Por esta ter faltado às duas primeiras aulas, pouco se sabia sobre esta aluna, nomeadamente quanto às suas capacidades e competências. Nem sequer havia a certeza de que fosse frequentar esta turma, ou se iria ser transferida. Daí não lhe termos atribuído nenhuma letra, na primeira semana de aulas, pelo que recebeu, posteriormente, a designação AA, uma vez que o alfabeto tem 26 letras e já todas tinham sido atribuídas. Se a Aluna AA não tivesse estado presente na primeira aula que já abordava conteúdos programáticos, o Aluno U ficaria com a Aluna H e a tríade seria transformada em díade, formada pelos Alunos M e X.

As características que permitiam supor que o Aluno U poderia ser par da Aluna AA, da qual não conhecíamos muitas das características, são as seguintes: revela uma representação social positiva acerca da Matemática, que inclui elementos tradicionais e inovadores, enquanto que a Aluna AA, que respondeu à TIP1, posteriormente, revela uma negativa e tradicional, pelo que as representações sociais destes dois alunos se complementam. Assim, através dos processos interativos que se podem estabelecer durante as aulas, a Aluna AA poderá modificar a sua representação social, tornando-a mais positiva. Para além disso, o Aluno U mobilizou o RA (Tarefa C), mas não conseguiu mobilizar o sentido crítico (Tarefa A), uma vez que confirmou o que era dito na notícia. Revelou ter preferência por raciocínios geométricos (Tarefa D) e conseguiu mobilizar competências que lhe permitem fazer conexões com a vida quotidiana (Tarefa E). No entanto, como este aluno só forneceu uma resposta adequada ao problema, não explicitando os processos de raciocínio associados, não se conseguiu perceber qual o tipo de abordagem que prefere. Assim, com estas características e atendendo a que este aluno revela uma representação social positiva, enquanto aprendente de Matemática, pois considera-se bom aluno, estes dois alunos podiam trabalhar na ZDP de cada um deles (Vygotsky, 1934/1962) e progredir quanto aos desempenhos matemáticos.

O Aluno U obteve sempre Nível 3 em todos os períodos, assim como na prova global. Constatámos, posteriormente, que ele se considerava bom aluno, mas já tinha obtido também Nível 3 em anos letivos anteriores. Em conversas informais posteriores, explicou que se considerava bom aluno porque nunca estava em risco de obter negativa a Matemática, o que acontecia a muitos outros colegas. A Aluna AA obteve Níveis 3, 2 e 3 em cada um dos períodos, o que ilumina que o que se tinha pensado para esta aluna, em termos de desenvolvimento de capacidades e competências se veio a constatar, tendo as novas competências impactes diretos nas classificações finais obtidas. Por outro lado, esta aluna revelou, no final do ano letivo, uma mudança na representação social sobre a Matemática, uma vez que a considera "uma disciplina complicada onde tem o seu lado interessante, lógico e divertido" (AA, TIP2, junho, 2003), o que ilumina os contributos do trabalho colaborativo para essa mudança, bem como para a melhoria dos desempenhos académicos nessa disciplina.

A díade formada pelos Aluno D e P, também é constituída por dois alunos que mobilizam o RA (Tarefa C). Ambos apresentam uma representação social positiva sobre a Matemática, sendo a do Aluno P inovadora e a da D com elementos tradicionais e inovadores, complementando-se, pelo que ambos podem desenvolver novas perspetivas sobre a Matemática. Esta aluna não conseguiu mobilizar o sentido crítico (Tarefa A), uma vez que confirmou o que era dito na notícia do jornal. Contudo, evidenciou intuição matemática (Tarefa B) e preferência por raciocínios analíticos (Tarefa D). Quanto à Tarefa E, esta aluna, apesar de não ter respondido de forma adequada e completa, evidenciou preferência por abordar os problemas passo-a-passo.

O Aluno P conseguiu revelar sentido crítico (Tarefa A), mas não a intuição matemática (Tarefa B). Nesta tarefa consegue obter, de forma rigorosa, dois litros de leite (despejando a caneca de 5 litros cheia de leite na caneca de 3 litros) e depois recorre a uma estimativa para solucionar o problema. Logo, para as Probabilidades, o primeiro conteúdo programático a abordar, poderia dar contributos ao trabalho a desenvolver, em aula. Apesar de não ter resolvido de forma adequada e completa a Tarefa D, o seu desempenho evidencia preferência por raciocínios analíticos. No entanto, também revela dificuldades ao nível da interpretação da informação contida no enunciado do problema. Apesar de este aluno conseguir mobilizar o RA na Tarefa C, o desempenho que se pode observar na Tarefa E é característico de um aluno que se encontra na transição do RC para o RA, uma vez que considera que houve lucro de 100 euros, porque perdeu o que tinha ganho na primeira venda quando voltou a comprar a obra de arte. Pelo que foi dito para cada um destes alunos, observa-se que eles apresentam capacidades e competências complementares, pelo que será possível conseguir propor-lhes tarefas matemáticas em que possam atuar, alternadamente, como par mais competente.

Ao longo do ano letivo, o Aluno P obteve sempre Nível 5 em todos os períodos. Se nos recordarmos de que este aluno revelava uma representação social positiva, enquanto aprendente de Matemática, considerando-se um bom aluno, mas que evidenciou que mobilizava poucas capacidades e competências, em comparação com o seu par, no início do ano letivo, esta evidência ilumina as potencialidades que o trabalho colaborativo assume no acesso a desempenhos mais elevados à disciplina de Matemática, bem como no desenvolvimento de capacidades e competências, que se vieram a observar e que tiveram impactes diretos na melhoria dos desempenhos matemáticos do Aluno P. Por seu turno, a Aluna D obteve os Níveis 4, 3 e 3, em cada um dos períodos, pelo que manteve o nível médio que afirmava ter obtido em anos letivos anteriores e que correspondia à representação social dela própria, enquanto aprendente de Matemática. No entanto, o período em que mais progrediu, quanto aos desempenhos matemáticos, foi aquele em que trabalhou com o Aluno P, provavelmente porque as capacidades e competências complementares que apresentavam, aliadas ao carácter inovador das primeiras tarefas, tiveram impactes mais nítidos nos desempenhos deste período do que nos períodos subsequentes. Convém, contudo, realçar, que esta aluna obteve um Nível 3 elevado e que, no 3.º período, apenas não obteve novamente Nível 4 porque, sendo muito ansiosa, na prova global não atingiu os níveis habituais (teve Nível 2, alto), o que a fez não obter o Nível 4 que teria se esta prova não tivesse existido. De salientar que, durante o ano letivo, os alunos fizeram sete testes individuais e ela obteve sempre Nível 4 ou Nível 3, bastante próximo do Nível 4. Assim, este caso salienta como os aspetos emocionais também configuram os desempenhos dos alunos e, ainda, como as informações veiculadas pelos *media*, que esta aluna referiu em conversas informais, como ansiogénicos, podem ter impactes negativos nos desempenhos dos alunos, quando se trata de provas de avaliação externa, que são as mais comentadas nestes meios de comunicação social.

Por último, se considerarmos a díade constituída pelos Alunos A e V, podemos observar que ambos mobilizam o RA (Tarefa C), embora só a Aluna A tenha explicitado os processos de raciocínio subjacentes às figuras que completou. Ambos revelam uma representação social positiva sobre a Matemática, mas complementam-se, na medida em que a Aluna A revela elementos tradicionais e inovadores, enquanto que o Aluno V apenas tradicionais. Assim, trabalharem em díade, envolvendo-se nas atividades matemáticas, pode contribuir para serem confrontados com novos elementos sobre esta representação social. Este aluno não evidenciou mobilizar o sentido crítico (Tarefa A) e não resolveu a Tarefa B. Apesar de não resolver de forma adequada e completa a Tarefa D, o desempenho evidencia preferência por raciocínios analíticos, uma vez que opta por determinar, embora de forma desajustada, a área de um dos triângulos que compõem cada losango. Na Tarefa E revela que não consegue mobilizar as competências associadas a situações de compra e venda, no quotidiano, uma vez que afirmou que o negociante teve lucro e prejuízo, se vendeu ou comprou a obra de arte. No entanto, pelo desempenho deste aluno podemos inferir que prefere uma abordagem dos problemas passo-a-passo.

A Aluna A conseguiu revelar sentido crítico (Tarefa A), intuição matemática (Tarefa B), preferência por raciocínios analíticos (Tarefa D) e uma abordagem global dos problemas (Tarefa E). Como tal, esta díade apresenta competências complementares, podendo ambos trabalhar na ZDP se confrontados com tarefas adequadas às suas características, interesses e necessidades.

Em termos de classificações ao longo do ano letivo, a Aluna A obteve sempre Nível 4 em todos os períodos e na prova global, o que ilumina que conseguiu manter o nível bom, que afirmava ter obtido em anos letivos anteriores. No entanto, é de realçar que, embora isso não tenha alterado o nível de classificação atingido, ela desenvolveu capacidades e competências ao longo desse ano letivo, tais como a capacidade de argumentação sustentada, o rigor matemático ou a capacidade de efetuar estimativas ou conjecturas, conforme registado no DB do professor/investigador e no DB da coordenadora do IC. Por outro lado, o Aluno V obteve sempre Nível 3 em todos os períodos e na prova global. Contudo, conseguiu desenvolver capacidades e competências ao longo desse ano letivo, tais como a persistência na tarefa, capacidade de interpretação e de seleção de informação relevante, entre outras.

Convém realçar que, sendo as classificações finais, no ensino básico, numa escala de 1 a 5, as mudanças de nível de classificação nem sempre acontecem. Por exemplo, um aluno que obtivesse, em anos letivos anteriores, Nível 3 muito próximo do Nível 2 (por exemplo, 52%), pode subir bastante as classificações nos diversos instrumentos de avaliação e, mesmo assim, não atingir o Nível 4, que só era atribuído a partir dos 75%, nesta escola. No entanto, se ele tivesse atingido um nível de 72%, tinha sido uma melhoria de desempenhos matemáticos significativa. O mesmo se passa para os que obtinham Nível 2, ou 4. Assim, houve diversos alunos que melhoraram a classificação obtida, quando se consideram as percentagens, mas cujo nível se manteve o mesmo.

Como foi mencionado no Subponto 5.2., um dos critérios para a disposição espacial das díade, na sala de aula, está relacionado com a existência de alunos que evidenciam formas de atuação pouco adequadas e, como tal, uma das decisões adotadas pelos professores/investigadores era colocar esses alunos em díades que ficassem em cada um dos quatro cantos da sala de aula. No entanto, esse aspeto é complementado com as capacidades e competências que os alunos já conseguem mobilizar. Considerando as díades formadas pelos Alunos N/W e R/L podemos observar que este grupo de quatro alunos se complementa, tendo em conta as capacidades e competências que os alunos já conseguem mobilizar, uma vez que o Aluno N tem preferência por raciocínios analíticos, enquanto que o Aluno L tem por raciocínios geométricos. Este aspeto é importante, uma vez que estes alunos, durante a resolução de uma tarefa matemática, perante alguma dificuldade, podem comunicar entre díades, sobretudo nas que se situam à frente ou atrás da díade considerada, atuando como mediadores, para desenvolverem outras capacidades e competências. Se ainda considerarmos a díade composta pelos elementos K e Q, esta situação também é visível.

Nesta turma, não havia alunos que apresentassem formas de atuação muito problemáticas, em termos de indisciplina, mas havia alguns que tendiam a distrair-se facilmente, sobretudo se estivessem perto de certos colegas da turma. Assim, era necessário afastar os Alunos N, K, O e Z, que eram capazes de se distrair mutuamente, sobretudo se o seu posicionamento, em diagonais próximas, lhes permitisse irem falando de outros assuntos extra-aulas. Assim, o posicionamento das díades teve em consideração as informações recolhidas com o IACC, o Q1 e a TIP1, mas também as que foram obtidas através da observação e registadas no DB do professor/investigador. Por vezes, quando isso se justificava, para clarificação de alguns aspetos, este encetou algumas breves conversas informais com os alunos, para complementar os dados da observação realizada, sobretudo, em cenário de sala de aula e durante a primeira semana de aulas do ano letivo.

Pelo que foi dito, a informação proveniente da análise do IACC para a formação das díades, bem como para a disposição espacial, na sala de aula, revela ser extremamente importante para o professor/investigador. Permite-lhe, com maior sustentação, tomar decisões e configurar oportunidades de aprendizagem para aqueles alunos. Para além disso, facilita a construção de espaços/tempos dialógicos (César, 2013a) ou de espaços de pensamento, como os designa Perret-Clermont (2004), que promovam uma educação matemática de elevada qualidade.

5.5.3. As primeiras tarefas matemáticas

Para que ocorra uma aprendizagem colaborativa, em que os alunos atribuam sentidos aos conhecimentos apropriados, as primeiras tarefas matemáticas propostas devem promover o desenvolvimento de interações sociais e dialógicas entre os alunos e entre estes e o professor. Esta necessidade é amplamente sustentada pelos documentos de política educativa, nacionais e internacionais (Abrantes et al., 1999; NCTM, 2007; Ponte et al., 2007), bem como pela investigação que se tem vindo a desenvolver (Baucal et al., 2011; César, 2000a, 2009, 2013a, 2013b, in press b; Cobb et al., 2001; Machado, 2008; Machado & César, 2012a, 2013a; Stein et al., 2008; Ventura, 2012). Para tal, a natureza das tarefas propostas deve ser pensada, tendo em conta as trajetórias de participação ao longo da vida daqueles alunos, particularmente na Escola. Pretende-se que vão sendo traçadas, em conjunto, pelo professor e alunos, indo ao encontro das características, necessidades e interesses dos mesmos (César, 2009; M. C. Silva, 2007). Assim, estas devem ser de natureza mais aberta e desafiantes, ou seja, de elevada exigência cognitiva (Boston & Wolf, 2006; Garrison, 2011; Jackson et al., 2011, 2012; Stein et al., 1996), facilitando a comunicação entre os alunos e configurando situações para o desenvolvimento de capacidades e competências (matemáticas). Desta forma, para conseguir que os alunos se envolvam nas atividades matemáticas, em cenários de educação formal, como a sala de aula, recorrendo ao trabalho colaborativo, as primeiras tarefas matemáticas assumem especial importância.

Para elaborar, adaptar ou selecionar as (primeiras) tarefas matemáticas a pertinência da utilização do IACC, na primeira semana de aulas, bem como a análise da informação a que, com este instrumento, se pode ter acesso, é essencial, na medida em que permite ao professor/investigador passar do currículo prescrito para o currículo real (Pacheco, 2005) ou em ação (Gimeno, 2000). Isso possibilita que adapte as práticas pedagógicas, direcionando-as para um determinado grupo de alunos e não a um grupo ideal de alunos que, na prática, nunca existem. Por outras palavras, o IACC permite passar de um sujeito epistémico (Piaget, 1971/2010), idealizado, que serve como modelo, mas que não existe, para um participante real, com características, necessidades e interesses particulares. Esta transição faz-se, precisamente, através do acesso às informações que permitem conhecer as capacidades e competências que cada um dos alunos já consegue mobilizar, bem como aquelas que precisa de vir a desenvolver.

Tratando-se de uma turma que frequentava o 9.º ano de escolaridade, o primeiro conteúdo matemático a abordar eram as Probabilidades (D, 2003). De acordo com o currículo prescrito em vigor nessa altura, recomendava-se uma "abordagem intuitiva da noção de probabilidade, a partir de jogos ou outras actividades" (ME/DGEBS, 1991, p. 51). Era habitual os professores introduzirem este conteúdo programático através de jogos matemáticos relacionados com o lançamento de um dado, extração de uma carta de um baralho ou de uma bola de entre as que existiam num saco, o que se coadunava com as sugestões metodológicas do currículo prescrito (ME/DGEBS, 1991). Para além disso, os próprios manuais escolares apontavam essas experiências aleatórias como elementos de motivação para o início ao estudo das Probabilidades.

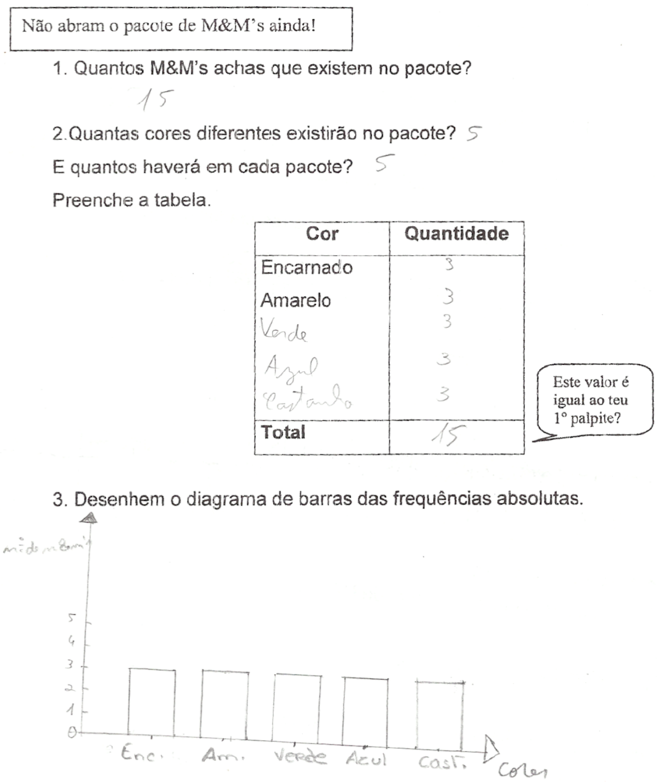
Atendendo às características desta turma do 9.º ano de escolaridade, mencionadas anteriormente, considerou-se que essas tarefas matemáticas seriam pouco desafiadoras e estimulantes para estes alunos, uma vez que muitos deles consultavam o manual antes das aulas, ou tinham irmãos mais velhos, que já tinham concluído o 9.º ano de escolaridade, pelo que se fossem selecionadas tarefas matemáticas baseadas nessas experiências aleatórias, a surpresa e motivação que se pretendia que ocorressem teriam menos probabilidade de acontecer. Para além disso, pretendia-se recorrer a uma experiência que utilizasse uma ferramenta cultural usual (Vygotsky, 1934/1962), algo que fizesse parte das culturas dos adolescentes nas quais os alunos participavam, aspeto a que um pacote de chocolates *M&M's* corresponde.

Este conteúdo programático foi distribuído por seis aulas, sendo contempladas quatro tarefas matemáticas, três mini-testes, um trabalho de casa semanal e um teste de avaliação individual (D, 2003). A primeira tarefa matemática – *Tarefa dos M&M's* – já foi analisada em outros trabalhos (Borges & César, 2009; Ventura, 2012). Contudo, a opção por utilizar esta mesma tarefa prende-se com o desocultar das tomadas de decisão feitas pelo professor/investigador, no que respeita à elaboração da mesma e ao desenvolvimento, em aula, complementando o que já foi escrito e analisado. Com isto, pretendemos analisar esta tarefa segundo outras lentes, que permitam avançar na construção do conhecimento no domínio da Educação Matemática.

É importante recordar que, nesta turma, havia dois alunos que tinham mobilizado o RC na Tarefa C e 24 o RA. No entanto, destes 24, existem 10 alunos que se encontram na transição do RC para o RA, embora todos eles tenham mobilizado o RA na Tarefa C, ou seja, conseguiram resolvê-la de forma completa (Alunos X, E, R, Q, S, Y, G, C, F e P). Estes alunos, quando confrontados com tarefas mais complexas, que não lhes permitiam recorrer preferencialmente ao raciocínio geométrico, como a Tarefa E, ou mesmo a Tarefa D, que permitia recorrer a este tipo de raciocínio, mas era mais complexa que a Tarefa C, apresentaram desempenhos típicos do RC. Se recordarmos que o acesso ao RA foi o aspeto mais focado pelos professores, no QP0, em relação às características que pretendiam saber para conseguirem promover uma educação matemática de maior qualidade, percebemos a necessidade de promover o acesso ao RA. Assim, havia 12 alunos que precisavam que a transição do RC para o RA fosse facilitada. Para tal, recorrer a materiais manipuláveis (RC), associados a estimativas (RA), que seriam depois confrontadas com contagens de *M&M's* (RC), para se chegar, posteriormente, a níveis mais elevados de formalização (RA), permitia fazer um percurso de vai-e-vem entre o RC e o RA que facilita a transição entre estes dois tipos de raciocínio. Assim, esta tarefa afigurava-se particularmente adequada a três aspetos essenciais: (1) motivar os alunos, aumentando o seu envolvimento nas atividades de matemática escolar; (2) facilitar as transições entre o RC e o RA, aspeto essencial para que os alunos, quando transitassem para o 10.º ano de escolaridade, já terem acesso ao RA, tal como previsto no currículo prescrito (Silva, Fonseca et al., 2001a, 2001b; Silva, Martins et al., 2001); e (3) promover o envolvimento da família nas atividades escolares, pois o elemento surpresa tornava bastante provável que os alunos falassem das atividades matemáticas, desenvolvidas em aula, quando estivessem em casa, a dialogar com as famílias.

A *Tarefa dos M&M's* (ver Anexo 27) recorre à utilização de um pacote de chocolates *M&M's* com o intuito de "facilitar a transição entre a matemática escolar e as matemáticas utilizadas em actividades do quotidiano" (Ventura, 2012, p. 274). Para além disso, pretendia-se que esta fosse apelativa e desafiadora para os alunos, envolvendo-os nas atividades de matemática escolar (Borges & César, 2009). Esta tarefa era constituída por duas partes. Na primeira parte, os alunos não podiam abrir os pacotes de chocolate *M&M's*. Pretendia-se que recorressem ao RA e que estimassem o número total de chocolates no pacote que tinham ao seu dispor (Questão 1), bem como a diversidade de cores existentes e o número de chocolates por cada cor considerada (Questão 2). Por fim, teriam que representar, através de um gráfico de barras, a informação obtida na questão anterior (Questão 3). Nestas três questões eram abordados, de forma intuitiva, alguns temas matemáticos/conhecimentos matemáticos tais como: estimativa, frequência absoluta e gráfico de barras. Os gráficos de barras já tinham sido estudados em anos de escolaridade anteriores, pelo que esta tarefa também permitia observar se os alunos conseguiam mobilizar as regras referentes à sua elaboração, ou seja, se conseguiam construir gráficos de barras que fossem rigorosos, do ponto de vista matemático.

As análises efetuadas até agora, noutras turmas, têm-se centrado sobre díades ou grupos de quatro alunos, formados por duas díades prévias (por exemplo, César, 2009, 2013a; César & Santos, 2006; Machado, 2008; Machado & César, 2012a, 2013a, in press b). Como é mais raro existirem tríades do que díades, optámos por analisar as respostas da tríade formada pelos Alunos X, M e H. Na Figura 348 podemos observar os seus desempenhos, na primeira parte da tarefa sobre os *M&M's*.


Não abram o pacote de M&M's ainda!

1. Quantos M&M's achas que existem no pacote? 15

2.Quantas cores diferentes existirão no pacote? 5

E quantos haverá em cada pacote? 5

Preenche a tabela.

Cor	Quantidade
Encarnado	3
Amarelo	3
Verde	3
Azul	3
Castanho	3
Total	15

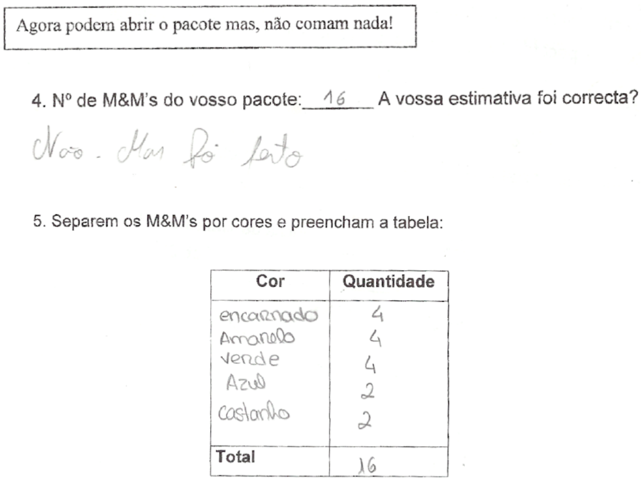
Este valor é igual ao teu 1º palpite?

3. Desenhem o diagrama de barras das frequências absolutas.

Figura 348 – D, protocolos dos alunos, 2 de outubro de 2003, resolução da primeira parte da 1.ª tarefa, tríade X/M/H

Com esta primeira parte da tarefa pretendia-se facilitar a mobilização ou o desenvolvimento de capacidades e competências associadas ao pensamento matemático e ao pensamento comum (vulgo, senso comum). Estas três primeiras questões têm como finalidade iniciar o desenvolvimento das interações dialógicas entre pares (César, 2009, 2013a; Renshaw, 2004), promovendo momentos onde a argumentação (matemática) ganha especial relevo. Ao terem de fazer estimativas sobre quantidades de chocolates e de cores de um pacote que se encontra fechado, os alunos que compõem cada díade/tríade vão ter de interagir, justificando as posições que assumem e procurando chegar a um consenso, uma vez que cada díade/tríade apenas tem uma folha de respostas, ou seja, os dois/três alunos têm de chegar a uma resposta única. Desta forma, os alunos mobilizam conhecimentos (matemáticos) que apropriaram, dentro e fora da sala de aula, ou seja, em diferentes contextos, cenários e situações. Precisam de conjugar conhecimentos matemáticos com outros do senso comum, uma vez que é no quotidiano que já contactaram com pacotes de *M&M's* e conheceram, por exemplo, as cores de chocolates existentes. Para além disso, como esta tarefa matemática, em particular estas três primeiras questões, recorre a um material manipulável – os pacotes de chocolate *M&M's* – pode facilitar a transição entre o RC e o RA, facilitando que os alunos que ainda não mobilizam o RA o venham a fazer e que os que se encontram numa fase de transição entre os dois possam vir a mobilizar o RA, de forma autónoma, em situações futuras. Isso equivale, segundo Vygotsky (1934/1962) a trabalhar na ZDP de cada aluno, facilitando que os que ainda não apresentam o RA como parte do nível de desenvolvimento real o venham a fazer, no futuro, ou seja, que esta função mental passe a estar amadurecida e pronta a ser utilizada, de forma autónoma. Nesse sentido, esta descrição ilustra como as aprendizagens, nomeadamente as que ocorrem em cenários de educação formal, podem contribuir para o desenvolvimento dos alunos, transformando funções mentais que faziam parte do nível de desenvolvimento potencial, ou da ZDP, em funções mentais que já fazem parte do nível desenvolvimento real.

Na segunda parte desta tarefa, os alunos podiam abrir os respetivos pacotes de chocolates *M&M's*, verificando se a estimativa que tinham feito, na primeira parte, tinha sido adequada, ou não (Questões 4 e 5), como podemos observar na Figura 349.


Agora podem abrir o pacote mas, não comam nada!

4. Nº de M&M's do vosso pacote: 16 A vossa estimativa foi correcta?

Não. Mas foi perto

5. Separem os M&M's por cores e preencham a tabela:

Cor	Quantidade
encarnado	4
Amarelo	4
verde	4
Azul	2
castanho	2
Total	16

Figura 349 – D, protocolos dos alunos, 2 de outubro de 2003, resolução das Questões 4 e 5 da 1.ª tarefa, tríade X/M/H

Queremos salientar algo que nos parece importante quando se desenvolvem práticas colaborativas e se negociam contratos didáticos coerentes com essas práticas: a escrita no enunciado da tarefa não é exclusiva de um elemento da díade/tríade, uma vez que esta pode – e deve – ser partilhada por todos os elementos. Se observarmos atentamente, nesta folha de resposta reconhecem-se diferentes tipos de letra manuscrita, o que indica que os registos foram efetuados pelos vários elementos da tríade, iluminando o empenho mútuo nesta atividade de matemática escolar. Esta forma de atuação permite o envolvimento dos três elementos da tríade na resolução da tarefa matemática, bem como o desenvolvimento de mecanismos de *inter-empowerment* (César, 2013a), sobretudo essenciais para a Aluna H, que revelou uma baixa auto-estima positiva e uma representação social negativa dela própria, enquanto aprendente de Matemática. No futuro, estes mecanismos poderão ser internalizados, tornando-se mecanismos de *intra-empowerment* (César, 2013a), ou seja, à semelhança do que descrevemos para as funções mentais e os conhecimentos, os mecanismos de *intra-empowerment* fazem parte do nível de desenvolvimento real e podem já ser usados de forma autónoma, sem precisarmos de estar a interagir com pares mais competentes e a trabalhar na ZDP, como ilustram César (2013a), Courela e César (2012) ou Machado e César (2013a).

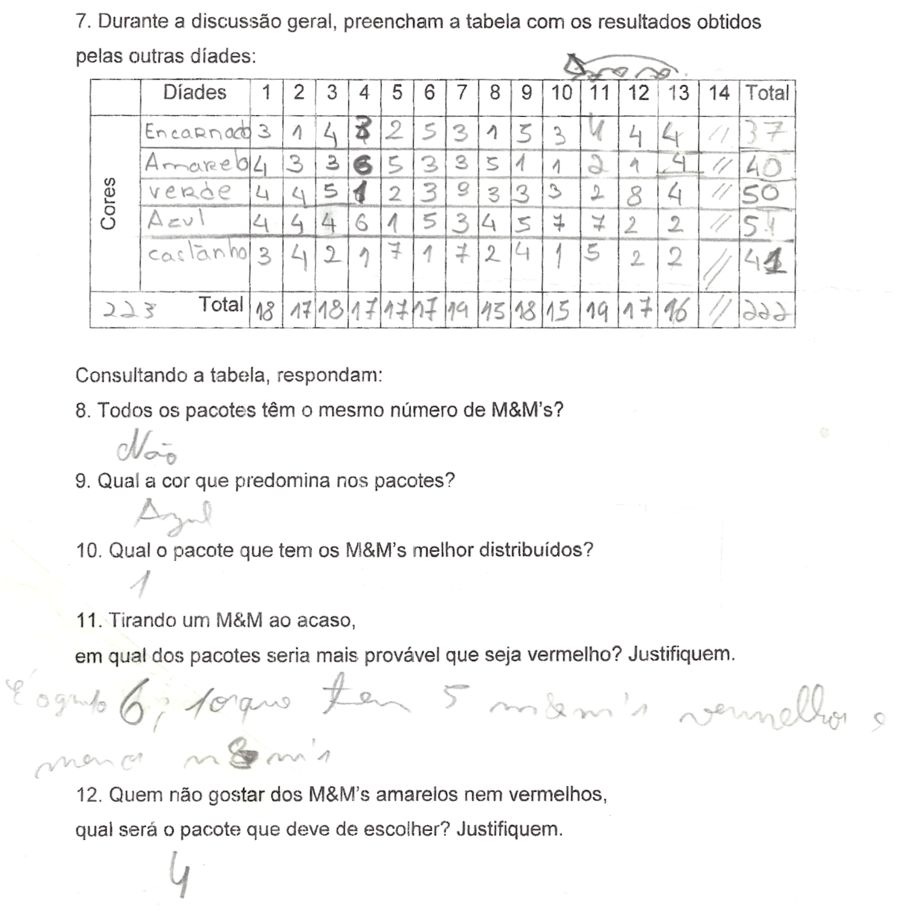
Na análise desta tarefa, há outros aspetos que nos parecem de salientar. A estimativa quanto ao número de chocolates existentes no pacote (N=15) indica que estes alunos já tinham contactado previamente com pacotes de *M&M's*, pois não está muito afastada do número de chocolates que se veio a verificar existir, quando abriram o pacote e procederam à contagem: 16. É de realçar que os alunos não se limitaram a reconhecer que a sua estimativa não correspondia ao número de chocolates que existia no pacote. Tiveram necessidade de salientar "Não. Mas foi perto.", indicando ao professor/investigador que não tinham feito uma estimativa muito desajustada. Este "Mas foi perto" constitui, também, um mecanismo de *inter-empowerment*, para a H e de *intra-empowerment*, para o M, que já o conseguia utilizar de forma autónoma, visto que tinha uma elevada representação social de si, enquanto aprendente de Matemática. Assim, esta letra é do M e a sugestão de escreverem isso foi dele, prontamente suportada pelo X. A H, mais insegura quanto aos seus desempenhos matemáticos, não teria escrito algo semelhante se trabalhasse individualmente e o X, apesar do seu pronto acordo, provavelmente também não. Mas, quando confrontados com esta frase, tiveram a oportunidade de contatar com este mecanismo de *inter-empowerment* e, assim, posteriormente, podem internalizá-lo, tornando-o acessível quando trabalham individualmente, ou seja, transformando-o num mecanismo de *intra-empowerment*, que já sabem utilizar de forma autónoma. Viemos a observar isso mesmo, quando analisámos registos do DB do professor/investigador e, sobretudo, da coordenadora do IC, que fazia registos bastante detalhados das aulas a que assistia regularmente (cerca de uma vez por mês).

Outro aspeto que importa analisar é a estimativa para cada cor. Os elementos da tríade discutiram bastante esta parte. Não revelaram qualquer dificuldade em identificarem as cores dos *M&M's*, o que indica que já deveriam ter comido alguns antes da aula em que estudaram as Probabilidades com recurso a esta tarefa. As interações dialógicas prenderam-se com a opção entre considerarem que cada cor teria o mesmo número de chocolates, ou não. Curiosamente, quem afirmou "Devem ser diferentes, na fábrica não devem contar os chocolates que metem em cada pacote pelas cores...", foi a H. Mas, como ela era quem tinha menos voz – auto-silenciava-se, por ter uma representação social de si, enquanto aprendente de Matemática, muito negativa – o que acabou por prevalecer foram as sugestões do M e do X, que consideraram que deveriam ser três chocolates de cada cor. Como a afirmação inicial da H se veio a verificar, ao abrirem o pacote e contarem, pois havia três cores com quatro chocolates e duas apenas com duas, esta constatação, para ela, funcionou também como um mecanismo de *inter-empowerment*, assim como a exclamação do M: "Ela tinha razão!".

Apesar destes pequenos episódios não terem impactes que fossem imediatamente visíveis, em termos da representação social negativa da H, enquanto aprendente de Matemática, tiveram efeitos práticos nítidos, desde as primeiras aulas. Assim, ao trabalhar colaborativamente, na sua ZDP, imersa em processos interativos dialógicos, onde existiam mecanismos *inter-empowerment* postos em ação pelos colegas e pelo professor/investigador, a H mostrou-se mais empenhada nas tarefas de matemática escolar e, aos poucos, mais confiante nos desempenhos que conseguia atingir. Isso veio a ter impactes ao nível do sucesso escolar, uma vez que esta aluna, ainda no 1.º período, veio a conseguir atingir Nível 3 a Matemática. Assim, ela conseguiu internalizar conhecimentos, mecanismos de *intra-empowerment* e, até uma representação social mais positiva dela enquanto aprendente de Matemática, e da própria disciplina, na medida em que considerou, no final do ano letivo, que "gostava mais ou menos de matemática, porque ainda continua a ser complicada" (Aluna H, Q2, Junho, 2004). Para além disso, a análise da TIP2 (ver Figura 350) desta aluna revelou alguns aspetos mais positivos – desenhou uma menina a pensar sobre matemática, mas com uma expressão alegre.

Figura 350 – TIP2, Aluna H, 9.º ano de escolaridade, Lisboa

De seguida, em grande grupo, foi preenchida a tabela que consta da Questão 7, referente aos resultados obtidos pelas várias díades e pela tríade, ou seja, pelos diversos alunos da turma. Depois, novamente em díade/tríade, os alunos responderam às restantes questões (Questões 8 à 14), tendo como base a tabela que preencheram anteriormente, em grande grupo, cujo exemplo podemos observar na Figura 351. Estas questões posteriores pretendiam ser uma introdução à classificação de acontecimentos (impossível e possível; e quanto aos possíveis, em certo, muito provável ou improvável). Para além disso, tinham subjacente a mobilização ou o desenvolvimento de capacidades e competências tais como a capacidade de interpretar e analisar dados matemáticos provenientes de uma tabela de dupla entrada, o sentido crítico associado a esses dados matemáticos e comunicar (matematicamente) de forma rigorosa e clara, recorrendo a uma argumentação sustentada e a uma linguagem apropriada ao problema que estava a ser resolvido.


7. Durante a discussão geral, preencham a tabela com os resultados obtidos pelas outras díades:

	Díades	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Total
Cores	Encarnado	3	1	4	3	2	5	3	1	3	3	4	4	4	//	37
	Amarelo	4	3	3	6	5	3	3	5	1	1	2	1	4	//	40
	verde	4	4	5	1	2	3	9	3	3	3	2	8	4	//	50
	Azul	4	4	4	6	1	5	3	4	5	7	7	2	2	//	54
	castanho	3	4	2	1	7	1	7	2	4	1	5	2	2	//	41
223	Total	18	17	18	17	17	17	19	13	18	15	19	17	16	//	222

Consultando a tabela, respondam:

8. Todos os pacotes têm o mesmo número de M&M's?

Não

9. Qual a cor que predomina nos pacotes?

Azul

10. Qual o pacote que tem os M&M's melhor distribuídos?

1

11. Tirando um M&M ao acaso,
em qual dos pacotes seria mais provável que seja vermelho? Justifiquem.

É o grupo 6; porque tem 5 m&m's vermelhos e menos m&m's

12. Quem não gostar dos M&M's amarelos nem vermelhos,
qual será o pacote que deve de escolher? Justifiquem.

4

Figura 351 – D, protocolos dos alunos, 2 de outubro de 2003, resolução das Questões 7 a 12 da 1.ª tarefa, tríade X/M/H

O preenchimento desta tabela de dupla entrada permitiu uma discussão geral muito rica. Primeiro, há a realçar o espanto dos alunos quando compreenderam que os pacotes de *M&M's* não tinham todos o mesmo número de chocolates, algo que eles não tinham reparado quando os consumiam na vida quotidiana. Isso fê-los comentar que, então, há consumidores que ficam beneficiados, enquanto outros ficam prejudicados, uma vez que todos pagam o mesmo preço, mas nem todos têm a mesma quantidade de chocolates. Se repararmos que a variação é entre 15 e 19 chocolates, percebe-se melhor a adequação deste comentário. Nessa altura, alguns alunos resolveram ver se os chocolates tinham todas o mesmo tamanho, em função da cor, ou o mesmo peso. Mas, para isso, perceberam que teriam de pesá-los numa balança, material que não estava disponível na aula. Contudo, perceberam que, para saberem se era justa a diferença de quantidade de chocolates, teriam de confirmar o peso, por embalagem, uma vez que era o peso e não o número de chocolates que vinha indicado na embalagem. Esta parte da discussão geral ilustra, de forma nítida, como uma tarefa deste tipo permite melhorar a capacidade de observação, assim como o sentido crítico, capacidades e competências avaliadas pela Tarefa A, do IACC, que foi aquela que estes alunos menos responderam de forma completa, atingindo o último padrão de desempenho.

Por último, visto que apenas existiam três pacotes, em 13, que tinham menos de 17 chocolates, também se discutiu a margem de erros aceitável no enchimento de pacotes, ou seja, outro tipo de probabilidades, que se prende com a probabilidade de comprar um item que não cumpre as regras esperadas. Assim, torna-se visível a importância das conexões com o quotidiano, até para os alunos perceberem a diferença entre matemática escolar e matemática para a vida, ou seja, aquela que é utilizada no quotidiano, quando se desempenham diversas funções que fazem apelo a conhecimentos matemáticos.

Em relação às capacidades e competências analisadas no IACC há que realçar que esta tarefa permitia trabalhar: (1) a capacidade de observação – especialmente quando confrontava a estimativa com o que existia no pacote de *M&M's* e, posteriormente, quando respondiam, em grande grupo, à Questão 7; (2) o sentido crítico – quando confrontavam as estimativas que tinham elaborado com o conteúdo do pacote; (3) a intuição matemática que, segundo alguns autores (Ben-Zeev & Star, 2002; Dehaene, 2009; Longo & Viarouge, 2010), pode ser desenvolvida através das estimativas; (4) a persistência nas tarefas, favorecida pela surpresa, a inovação e os conteúdos apelativos (pacote de *M&M's*), algo que foi notório na observação destas aulas, pois os alunos trabalharam de forma muitíssimo empenhada e, em avaliações posteriores, os conhecimentos sobre Probabilidades continuavam a ser mobilizados sem dificuldades, mesmo por alunos que atingiam Nível 2, em Matemática; (5) os raciocínios analíticos, conjugados com elementos habitualmente associados aos raciocínios geométricos, como as cores; (6) as conexões com o quotidiano, que eram nítidas, nesta tarefa; e (7) a transição do RC para o RA, como já referimos anteriormente. Assim, esta tarefa permitia trabalhar capacidades e competências adaptadas às necessidades de cada aluno e, para além disso, nos casos de alunos que apresentavam uma representação social negativa da Matemática e/ou deles próprios, enquanto aprendentes desta disciplina, ao ser surpreendente, motivadora, permitindo-lhes envolverem-se com entusiasmo em atividades de Matemática escolar, contribuía para que fossem tornando essas representações sociais mais positivas e para que fossem internalizando mecanismos de *intra-empowerment*.

Assim, através de uma tarefa de natureza aberta e desafiante, com recurso a uma ferramenta cultural (pacote de chocolates *M&M's*), que faz parte das culturas adolescentes em que os alunos participam, conseguiram-se abordar conceitos e aspetos que são próprios dos conhecimentos e linguagem da teoria das probabilidades e que eram referidos nos documentos de política educativa vigentes naquela altura (Abrantes et al., 1999; DEB, 2001; ME/DGEBS, 1991). Nesta tarefa, parece-nos importante, ainda, salientar a existência de um esquema que pretendia sintetizar o que precisava de ser apropriado sobre os conceitos trabalhados durante aquela aula (ver Anexo 27). Este aspeto é importante, na medida em que possibilita aos alunos organizar as informações mais relevantes, salientando o que é essencial num determinando espaço/tempo para que, posteriormente, o estudo autónomo seja facilitado.

Convém realçar que, quando se decidem elaborar tarefas inovadoras como ferramentas facilitadoras das aprendizagens (matemáticas) e do envolvimento dos alunos nas atividades de matemática escolar, ao iniciar um determinado conteúdo programático, é importante que as tarefas matemáticas seguintes façam alusão a essa experiência inicial. Neste caso, as duas tarefas matemáticas posteriores revelam essa característica (ver Anexos 28 e 29). A segunda tarefa matemática pretende que os alunos trabalhem o conceito de acontecimentos equiprováveis, formulando também a lei de Laplace. Para tal, partindo de um pacote de chocolate de *M&M's* e do preenchimento de uma tabela de frequências absolutas e relativas (experiência realizada na aula anterior), são explorados: (1) alguns conceitos trabalhados nessa aula prévia (por exemplo, acontecimentos mais, ou menos, prováveis); (2) o conceito de casos possíveis e de casos favoráveis, para compreenderem a lei de Laplace; (3) acontecimentos equiprováveis; e (4) a existência de diversos formatos escritos para representar a probabilidade de um acontecimento (percentagem, fração ou numeral decimal).

Na Figura 352, podemos observar os desempenhos da tríade formada pelos alunos X, M e H na resolução das Questões 1 a 5, que exemplifica o trabalho desenvolvido por outras díades dessa mesma turma.

O Tomás abriu um pacote de M&M's e verificou que continha 16 M&M:

9 amarelos, 1 azul, 2 verdes, 2 encarnados e 2 castanhos.

1. Preencham a seguinte tabela:

Cores	Frequência Absoluta (F)	Frequência Relativa (f)
Amarelo	9	0,5625
Azul	1	0,0625
verde	2	0,125
encarnados	2	0,125
castanhos	2	0,125
Total	16	1

Recorda que $f = \frac{F}{T}$

$f_a = \frac{F_a}{T}$

$2 = \frac{9}{16}$

2. Qual a frequência relativa de amarelos no pacote?

0,5625

3. "A probabilidade de sair um M&M azul é maior que a probabilidade de sair um M&M vermelho." Comentem a afirmação.

A afirmação é falsa porque os M&M's vermelhos em maior número do que os azuis.

4. Qual é a cor de M&M's que acham mais provável de encontrar neste pacote?

Amarelo

5. O João trocou com o Tomás 4 azuis por 4 amarelos.

Qual a frequência relativa de M&M's amarelos no pacote do Tomás?

$\frac{5}{16} = 0,3125$

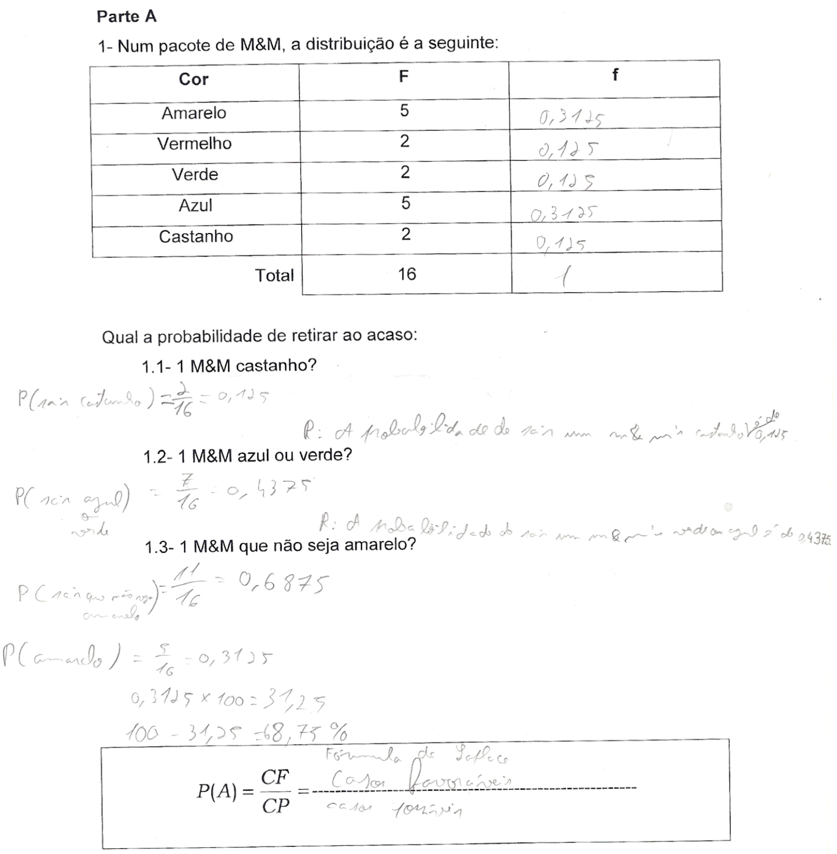
Sem alterar a totalidade de M&M´s no pacote, a percentagem de amarelos aumenta se diminuir a percentagem das outras cores

Figura 352 – D, protocolos dos alunos, 7 de outubro de 2003, resolução das Questões 1 a 5 da 2.ª tarefa, tríade X/M/H

Estas cinco questões iniciais pretendem promover a mobilização ou o desenvolvimento de capacidades e competências, tais como a interpretação, sentido crítico face aos dados matemáticos existentes no enunciado da tarefa, de organização da informação, transição entre as diversas formas de escrita possíveis para uma mesma situação e mobilização dos conhecimentos apropriados na aula anterior. Mais uma vez, queremos salientar a existência de quadros síntese ao longo da tarefa proposta, como forma de organização da informação essencial e de regulação do estudo, posteriormente. Este aspeto é facilitador da mobilização dos conhecimentos matemáticos lecionados em aulas anteriores, uma vez que as tarefas matemáticas podem ser mais facilmente consultadas, quando os alunos estudam de forma autónoma ou quando resolvem a tarefa em díade/tríade. Se confrontarmos esta tabela com o que pode ser consultado no manual escolar, ou mesmo nos apontamento registados pelos alunos no caderno escolar, podemos compreender a utilidade deste tipo de quadros síntese.

Nesta segunda tarefa os alunos têm de mobilizar conhecimentos já trabalhados na primeira tarefa, como a frequência absoluta observada para cada uma das cores de chocolates que existem num pacote de *M&M's.* Mas, posteriormente, têm uma coluna onde lhes é pedido que calculem também a frequência relativa, que está a ser trabalhada pela primeira vez, neste ano de escolaridade. Para além disso, na Questão 3 continuam a trabalhar a capacidade de observação – reconhecer se é mais provável sair uma cor ou outra, implica observar atentamente a tabela que preencheram – mas, ao ser-lhes pedido que comentem a afirmação que consta no enunciado está-se a trabalhar também a argumentação sustentada, o rigor na linguagem matemática utilizada e, para além disso, a levar os alunos a mobilizarem conhecimentos que apropriaram na aula anterior, ou seja, a facilitar a transição entre contextos, cenários e situações em que se recorre aos diferentes conhecimentos matemáticos já apropriados, um aspeto que é particularmente importante para diversos autores (Abreu et al., 2002; César, 2009, 2013a; Cobb, 1995; Cobb et al., 2001; Nunes & Bryant, 1997; Staples, 2007; Stein et al., 2008), assim como para diversos documentos de política educativa (Abrantes et al., 1999; DEB, 2001; ME/DGEBS, 1991; NCTM, 2007). Algo de semelhante acontece também na Questão 5, que desenvolve o pensamento matemático ao abordar hipóteses diferentes das representadas na tabela, permitindo aos alunos mobilizarem os conhecimentos apropriados para os utilizarem noutras situações.

A terceira tarefa matemática alusiva ao conteúdo programático das Probabilidades (ver Anexo 29) é composta por duas partes (Parte A e B) e pretende que os alunos mobilizem os conhecimentos matemáticos relativos à lei de Laplace noutras situações. A Parte A começa com um exemplo associado à tarefa dos *M&M's* para os alunos conseguirem mais facilmente mobilizar os conhecimentos que apropriaram na aula anterior (ver Figura 353). De realçar as diferenças de notação, nas duas tarefas anteriores – frequência absoluta e relativa – para a que é usada nesta terceira tarefa – F e f.



Parte A

1- Num pacote de M&M, a distribuição é a seguinte:

Cor	F	f
Amarelo	5	0,3125
Vermelho	2	0,125
Verde	2	0,125
Azul	5	0,3125
Castanho	2	0,125
Total	16	1

Qual a probabilidade de retirar ao acaso:

1.1- 1 M&M castanho?

P(sair castanho) $= \frac{2}{16} = 0,125$

R: A probabilidade de sair um M&M castanho é 0,125

1.2- 1 M&M azul ou verde?

P(sair azul ou verde) $= \frac{7}{16} = 0,4375$

R: A probabilidade de sair um M&M verde ou azul é de 0,4375

1.3- 1 M&M que não seja amarelo?

P(sair que não seja amarelo) $= \frac{11}{16} = 0,6875$

P(amarelo) $= \frac{5}{16} = 0,3125$

$0,3125 \times 100 = 31,25$

$100 - 31,25 = 68,75\ \%$

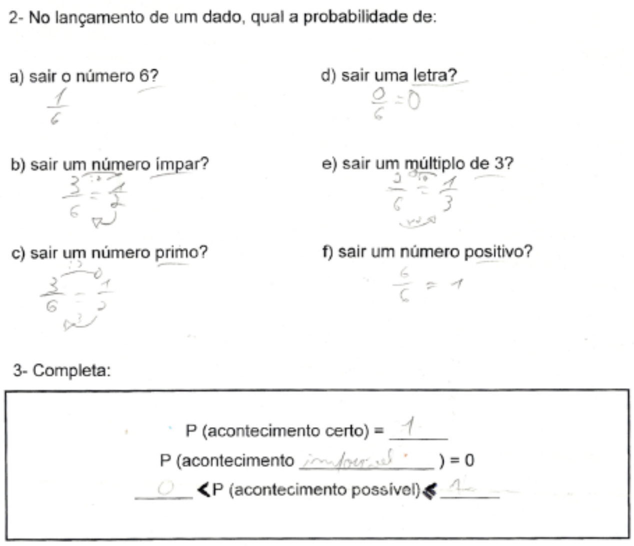
Fórmula de Laplace

$$P(A) = \frac{CF}{CP} = \frac{\text{Casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

Figura 353 – D, protocolos dos alunos, 9 de outubro de 2003, resolução da Questão 1 da 3.ª tarefa, tríade X/M/H

Se observarmos os desempenhos desta tríade podemos destacar alguns aspetos que nos parecem importantes: (1) a utilização de diversas formas de representação quanto à probabilidade de um acontecimento (fração, numeral decimal e percentagem). Recordemos que esse foi um aspeto trabalhado na primeira tarefa matemática deste conteúdo e esta tríade conseguiu mobilizar estes conhecimentos nesta tarefa matemática; (2) o rigor da própria escrita, que foi sendo trabalhado e discutido pelos alunos e pelo professor/investigador, em particular nos momentos de discussão geral, em grande grupo; e (3) a mobilização de capacidades e competências associadas à seleção da informação pertinente em cada caso e à forma de organização que esta díade adotou para explicitar os processos de raciocínio subjacentes às estratégias de resolução que usaram e às respostas fornecidas.

Contudo, como previsto no currículo prescrito vigente nessa altura, os alunos deveriam também mobilizar esses conhecimentos em situações que envolvessem experiências aleatórias, nomeadamente, lançamento de um ou dois dados, lançamento de moedas, ou extração de bolas dentro de um saco (com ou sem reposição) (Abrantes et al., 1999; ME/DGEBS, 1991). Assim, a segunda questão desta tarefa matemática está relacionada com o lançamento de um dado (ver Figura 354). Depois, os alunos devem preencher um quadro síntese, no qual associam a probabilidade de um acontecimento certo, impossível e possível a um determinado valor, ou seja, enunciam algumas propriedades importantes das probabilidades (ver Figura 354).


2- No lançamento de um dado, qual a probabilidade de:

a) sair o número 6? $\frac{1}{6}$

b) sair um número ímpar? $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) sair um número primo? $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d) sair uma letra? $\frac{0}{6} = 0$

e) sair um múltiplo de 3? $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

f) sair um número positivo? $\frac{6}{6} = 1$

3- Completa:

P (acontecimento certo) = 1

P (acontecimento impossível) = 0

0 < P (acontecimento possível) < 1

Figura 354 – D, protocolos dos alunos, 9 de outubro de 2003, resolução das Questões 2 e 3 da 3.ª tarefa, tríade X/M/H

À semelhança do que aconteceu na primeira questão desta tarefa matemática, os alunos desta tríade evidenciaram que conseguiram mobilizar capacidades e competências que lhes permitiram resolver esta segunda questão. Para além de terem representado a probabilidade de um acontecimento de diversas formas, adotaram uma estratégia de resolução que lhes permitiu salientar, através duma estratégia de resolução gráfica, que incluía sublinhar o que era pedido em cada alínea, isto é, a informação mais relevante, contribuindo para obterem sucesso nas respostas fornecidas para cada questão. Esta evidência ilumina que esta tríade conseguiu colocar em ação funções mentais que fazem parte da zona de desenvolvimento proximal (Vygotsky, 1934/1962), quando a situação assim o exigia. Ilustra também como o vai-e-vem entre RA – necessário para responder a algumas das questões sobre Probabilidades – e o RC (sublinhar as partes mais importantes da informação, manipulando-as) permite a alunos cujos desempenhos iniciais, no IACC, se encontram na transição entre o RC e o RA (Aluno X), ou mesmo a quem mobiliza o RC (Aluna H) resolver esta tarefa com sucesso. Por seu turno, para o Aluno M, ter de compreender processos de raciocínio diferentes do seu e clarificar os que usa, para os tornar acessíveis aos Alunos X e H, permite-lhe desenvolver o RA, que já faz parte do seu nível de desenvolvimento real (Vygotsky, 1934/1962), uma vez que ser capaz de coordenar diversos pontos de vista e, inclusivamente, usar argumentações de posições que não correspondem àquelas que se assumem, são características do próprio raciocínio abstrato (RA). Daí que esta forma de raciocínio se caracterize pela plasticidade, pela possibilidade de levantar hipóteses e de fazer conjeturas, ou seja, pelo real ser apenas uma das possibilidades das formas de pensamento (Piaget, 1947, 1964/1997).

A Parte B corresponde à indicação para a utilização do manual escolar, no qual estão descritos os exercícios que os alunos devem realizar e as respetivas páginas. Esta forma de atuação está relacionada com a utilização do manual nas aulas, subjacente aos princípios epistemológicos e pedagógicos do projeto IC (Ventura, 2012), ou seja, em geral, o professor/investigador recorre ao manual escolar quando pretende que os alunos trabalhem, de forma autónoma e extra-aula, os conhecimentos apropriados, em aula. Para além disso, os alunos também consultam o manual, em aula, quando têm dúvidas que precisam de ser esclarecidas e a interação com os pares, na díade ou tríade, não lhes permite ultrapassá-las sem essa consulta. Desta forma, o manual escolar aparece como uma ferramenta que permite aos alunos colocarem em ação os conhecimentos matemáticos apropriados ao longo das atividades matemáticas desenvolvidas em aula e, para além disso, ser consultado quando dele necessitam, enquanto ferramenta mediadora da apropriação de conhecimentos, ou seja, enquanto promotor da autonomia na aprendizagem de conhecimentos matemáticos.

A quarta tarefa (ver Anexo 30) pretendia que os alunos trabalhassem a lei dos grandes números. Neste caso, optou-se por recorrer ao lançamento de um dado como forma de abordar esse tema matemático, adotando as sugestões dos documentos de política educativa então em vigor (Abrantes et al., 1999; ME/DGEBS, 1991). Não nos foi possível aceder aos protocolos dos alunos, referentes a esta tarefa, uma vez que os mesmos foram danificados aquando a elaboração de artigos com base nesse conjunto de tarefas matemáticas. Assim, como decorreram quase 10 anos entre o momento em que estes foram recolhidos e a presente investigação, não nos foi possível contactar, de novo estes alunos, para podermos reaver os desempenhos efetuados por cada díade, nesta tarefa matemática.

Por fim, o trabalho de casa (TPC, ver Anexo 31) é composto por diversas questões, que pretendiam que os alunos, de forma autónoma, conseguissem mobilizar os conhecimentos apropriados durante as aulas anteriores. Quem desenvolve práticas colaborativas, segundo os princípios epistemológicos e pedagógicos do projeto IC (Ventura, 2012), assume que os trabalhos de casa têm uma natureza diferente daquela que é habitual acontecer. Para o IC, estes têm uma frequência semanal, pois pretendem ser um contributo para a regulação do ritmo de estudo, pelo que também se referem, muitas vezes, ao conteúdo programático que se esteja a lecionar. Como a equipa do IC se apercebeu, por um lado, de que alguns alunos tinham quem os ajudasse a resolver os trabalhos de casa (explicadores, centros de estudos, pais, irmãos ou outros familiares e/ou conhecidos com habilitações literárias que lhes permitem auxiliarem-nos), enquanto outros alunos não podiam contar com este tipo de apoios e, por outro lado, que muitos alunos copiavam, acriticamente, os trabalhos de casa através das resoluções de outros colegas ou das resoluções que faziam parte dos próprios manuais, decidimos que a avaliação dos trabalhos de casa contava em termos de atitudes e valores e não quanto aos desempenhos atingidos. Assim, evitam-se situações de injustiça social – geralmente são os alunos que participam em culturas minoritárias vulneráveis, socialmente pouco valorizadas, que não têm apoio quando estudam ou resolvem tarefas, em casa, relacionadas com a matemática escolar – e também se contribui mais para os progressos dos desempenhos dos alunos. O que lhes é pedido é que, quando não conseguem resolver uma tarefa, ou terminar de a resolver, que digam porque não o conseguem fazer. Isso permite ao professor/investigador atuar de uma forma muito mais adequada às dificuldades e também às capacidades e competências de cada aluno. Por outro lado, desdramatiza o erro e torna a aprendizagem um processo, em que as expectativas são de que todos os alunos são capazes de melhorar os desempenhos matemáticos.

Pelo que foi dito, a avaliação dos trabalhos de casa é contabilizada em termos de o aluno ter, ou não, realizado o TPC. Mas, efetuar um TPC pode ser explicar, em cada tarefa, porque não a conseguiu resolver. Isto tem impactes fortemente positivos sobretudo para os alunos que vivenciaram insucesso repetido em Matemática e que, assim, não se sentem excluídos das tarefas que é suposto resolverem autonomamente, em casa. Assim, os trabalhos de casa não têm uma classificação quantitativa nem qualitativa, sendo por isso contabilizados na parte dos critérios de avaliação correspondente às atitudes e valores. Pretende-se, também através dos TPCs, desenvolver uma avaliação autorreguladora das aprendizagens (L. Santos et al., 2010), promovendo um *feedback* regular acerca dos desempenhos dos alunos nesses TPCs, para que estes consigam perceber onde precisam de focar mais a atenção, a vontade e o estudo para atingirem melhores desempenhos. Esta forma de atuação permite: (1) incentivar os alunos a realizarem os TPCs (o que não acontecia, anteriormente, nas turmas que participaram no IC, antes desta decisão ser tomada pela equipa deste projeto); (2) o professor/investigador perceber quais os aspetos menos conseguidos, em termos de desempenhos dos alunos, referentes a um determinado conteúdo programático; (3) desenvolver hábitos de estudo e de trabalho regulares, semanais, por parte dos alunos (aspeto para o qual também contribuem os mini-testes); e (4) regular as aprendizagens dos alunos para que estes consigam perceber o que precisam de fazer para melhorar os desempenhos, nesta disciplina.

Apresentado o conjunto de tarefas matemáticas propostas para o estudo das probabilidades para aquela turma, queremos iluminar os processos, segundo os quais, as informações do IACC têm impactes nessas tomadas de decisão. Em qualquer das tarefas matemáticas mencionadas anteriormente, pretendia-se que todas as díades apropriassem os conhecimentos matemáticos previstos para esse conteúdo programático. No entanto, no que respeita às capacidades e competências que gostaríamos que os alunos desenvolvessem, durante aquele ano letivo, estas diferiam de díade para díade. Com isso, salienta-se que uma tarefa matemática não permite desenvolver todas as capacidades e competências, em todas as díades, simultaneamente. O professor/investigador deve conceber as práticas, em aula, para que se consiga maximizar o desenvolvimento de capacidades e competências dos alunos, ou seja, uma determinada tarefa é mais adequada às capacidades e competências que algumas díades, ou alunos de algumas díades, precisam de desenvolver, enquanto que a seguinte deve ser mais apropriada para outros alunos. Assim, pretende-se que, no final de uma sequência de tarefas matemáticas, os diversos alunos de uma determinada turma tenham tido oportunidades de aprendizagem ricas e diversificadas, que lhes possibilitassem o desenvolvimento de determinadas capacidades e competências.

Por exemplo, na primeira tarefa matemática poder-se-á dizer que era mais dirigida às díades compostas pelos Alunos X/M/H, E/Z, se considerarmos a primeira parte, e às díades B/S, C/T, P/D e R/L, se tivermos em consideração a segunda parte dessa tarefa matemática. Na primeira parte, os alunos tinham que recorrer a formas de pensamento (mais) abstratas para poderem responder às primeiras duas questões, nas quais os Alunos M e E atuavam como par mais competente (Vygotsky, 1934/1962), facilitando o desenvolvimento de raciocínios (mais) abstratos, por parte dos seus pares, permitindo-lhes trabalharem na ZDP (Vygotsky, 1934/1962). Se considerarmos a segunda parte dessa tarefa matemática, é necessária a mobilização de sentido crítico e de análise para puderem responder às questões formuladas. Assim, os Alunos B, Q, P e A, através da partilha de pontos de vistas e argumentações distintas com os pares, podem desenvolver capacidades e competências associadas ao sentido crítico e à análise de informação matemática. Desta forma, os alunos podem trabalhar na ZDP de cada um deles, através do estabelecimento de interações sociais dialógicas, em díades assimétricas (César, 2003, 2009, 2013a; Machado, 2008; Machado & César, 2012a, 2013a; Vygotsky, 1934/1962).

5.5.4. Discussão geral

A discussão geral, em grande grupo (turma), é um dos momentos importantes nas aprendizagens matemáticas dos alunos, na medida em que facilita a atribuição de sentidos aos conhecimentos matemáticos que estes devem apropriar, bem como o desenvolvimento de capacidades e competências (César, 2009, 2013a, 2013b; Machado & César, 2012a, 2013a, 2013b; Staples, 2007; Ventura, 2012). Para além disso, como argumentam Stein e seus colaboradores (2008), as discussões gerais possibilitam a construção do pensamento matemático, que é essencial numa sociedade em constante mudança, altamente tecnológica e onde o acesso à informação constitui uma forma de poder e de valorização social. Assim, as discussões gerais complementam o trabalho em díade/tríade ou em pequenos grupos, realizado anteriormente.

Nesses espaços/tempos são exploradas diversas estratégias de resolução de uma mesma tarefa, bem como diferentes argumentos que as sustentam, numa valorização da diversidade e, além disso, como forma de promover o desenvolvimento de outras capacidades e competências, por parte dos alunos. Esta discussão geral é, inicialmente, dinamizada pelo professor/investigador, que atua como orientador. Ao longo do ano letivo, essa orquestração da discussão geral vai sendo progressivamente passada para os alunos, que começam a conseguir colocar, diretamente, questões ao aluno que está no quadro a explicar a estratégia de resolução da sua díade/tríade. Este, por sua vez, responde às questões dos colegas e, além disso, pede contributos a outros colegas, quando não sabe responder de forma completa. Também formula ele próprio questões, para se certificar de que os colegas estão atentos e a compreender o processo de resolução da tarefa, bem como para explorar possíveis argumentações divergentes.

Assim, a discussão geral torna-se, progressivamente, mais dialógica, contribuindo para o processo de auto-responsabilização e autonomia que se pretende promover nos alunos. Para além disso, esta forma de atuação facilita a promoção da participação legítima dos alunos numa comunidade de aprendizagem (César, 2007, 2009; Lave & Wenger, 1991), facilitando a distribuição de poder e o desenvolvimento de mecanismos de *inter-* e *intra-empowerment* (César, 2013a).

A relevância das discussões gerais, em grande grupo, foi também estudada no *Design* 1 do projeto IC, estudos *quasi-experimentais*, nomeadamente quando esta componente foi acrescentada ao trabalho em díade, permitindo obter progressos ainda mais acentuados nos desempenhos matemáticos dos alunos. Assim, César (1994) encontrou evidências empíricas para as vantagens do trabalho em díade, sobretudo quando estas eram assimétricas e as instruções de trabalho favoreciam as interações sociais entre os alunos que compunham uma mesma díade, dizendo-lhes que discutissem as possíveis estratégias de resolução entre eles, chegassem a um consenso e registassem a resposta da díade numa só folha de respostas. Mas, neste estudo, não existiam discussões gerais, sendo o mesmo anterior ao projeto IC e tendo como seu objetivo último a criação deste projeto. Posteriormente, quando um outro estudo realizado também com alunos do 7.º ano de escolaridade (Carvalho, 2001), juntou ao tipo de díades (assimétricas) e de instruções de trabalho que se tinham revelado mais facilitadoras de progresso, no trabalho de César (1994) e uma discussão geral, os resultados foram ainda mais significativos, do ponto de vista estatístico. Assim, quando se começaram os projetos de investigação-ação (*Design* 2) foi dada especial relevância à discussão geral e a formação dos professores que trabalhavam no IC incidia especialmente neste aspeto, uma vez que não é fácil gerir de forma adequada uma discussão geral, dando progressivamente mais voz(es) e poder aos alunos.

Durante o trabalho em díade, o professor/investigador vai circulando pela sala de aula e vai observando o trabalho desenvolvido pelas diversas díades, com o intuito de: (1) incentivar os alunos a empenharem-se nas atividades de matemática escolar que estão a realizar; (2) moderar algumas discussões existentes dentro de cada díade para que consigam progredir na resolução de uma determinada tarefa; e (3) lançar questões ou comentários que possam fazer começar, avançar e/ou aprofundar o trabalho que está a ser efetuado. É importante que o professor/investigador não atue como um elemento que esclarece as dúvidas fornecendo as respostas necessárias quando os alunos o solicitam. O que se pretende é que o professor/investigador promova a discussão entre os dois elementos da díade, colocando questões que facilitem as interações sociais dialógicas, a argumentação sustentada, a persistência na tarefa e a autonomia quanto aos processos de aprendizagem (de conteúdos matemáticos, mas não só); e (4) ter acesso às diferentes estratégias de resolução adotadas nas várias díades para começar a planear como irá ser orquestrada a discussão geral, ou seja, que díades terão um elemento convidado a ir ao quadro para explicar as estratégias de resolução utilizadas, por que ordem irão, que questões podem ser formuladas com o intuito de aprofundar determinados aspetos das mesmas, que contributos as outras díades podem dar, entre outros critérios que é preciso ter em consideração. Assim, há um detalhado trabalho de observação que o professor/investigador precisa de realizar para saber intervir de forma adequada (na discussão geral, e não só), promovendo a apropriação de conhecimentos, os desempenhos matemáticos dos alunos e a mobilização e desenvolvimento de capacidades e competências.

Quando o professor/investigador começa a delinear a forma como vai conduzir a discussão geral, é necessário que também tenha em consideração os alunos que apresentam baixa autoestima académica positiva ou que desistem facilmente durante a resolução das tarefas matemáticas. É importante que esses alunos sejam convidados a ir ao quadro explicar as estratégias de resolução às quais recorreram para que se sintam mais confiantes e, posteriormente, tomem a iniciativa de participar nas mesmas, de forma voluntária. Observar o aumento de alunos voluntários para explicarem as estratégias de resolução utilizadas e, sobretudo, apercebermo-nos de que os próprios alunos já internalizaram que, no quadro, se exploram estratégias de resolução distintas, pelo que dizem frases como "S'tora, agora posso ir eu [ao quadro], porque fiz de uma maneira diferente", como registou a coordenadora do IC no DB, na aula a que assistiu, na turma que anteriormente analisámos, a 25 de novembro de 2003, revela que os alunos compreendem não só as regras do contrato didático que são explícitas, mas também as implícitas, o que é mais uma forma de desenvolver a capacidade de observação e a socialização alargada. Assim, uma observação detalhada de como decorre a discussão geral permite compreender se os alunos de uma turma já internalizados e aderiram mais, ou menos, aos princípios subjacentes ao trabalho colaborativo, tal como este era concebido pela equipa do projeto IC.

Habitualmente, nas primeiras tarefas matemáticas, como a que apresentámos neste ponto da tese de doutoramento, começa-se a discussão geral por convidar os elementos das díades que apresentem mais dificuldades na mobilização dos conhecimentos matemáticos e que pouco se envolvem ou participam nas atividades matemáticas. Desta forma, pretende-se tornar implícita uma mensagem de que todos são capazes de aprender, embora com ritmos diferentes, que o ritmo de cada um é respeitado e que podem aprender uns com os outros, pois cada aluno tem formas de pensamento, processos de raciocínio e estratégias de resolução diferentes, mas todos eles valorizados, pelo professor/investigador. Este aspeto é essencial para promover a mudança das representações sociais negativas, enquanto aprendentes de Matemática, que muitos alunos construíram anteriormente e que os impedem, tantas vezes, de melhorar os desempenhos matemáticos, em aula.

5.5.5. Avaliação

A avaliação deste conteúdo programático englobou: (1) as informações provenientes da observação do trabalho realizado em aula, efetuada pelo professor/investigador, que incluía o trabalho em díade/tríade, bem como as participações nas discussões gerais; (2) as classificações obtidas em três mini-testes; e (3) a classificação obtida num teste de avaliação individual. Assim, pretendia-se que a avaliação englobasse uma componente oral e outra escrita, umas delas em díades/tríades e outras individuais, ou seja, que os diversos tipos de avaliação estivessem contemplados, favorecendo os diversos estilos de alunos, que geralmente têm preferência por alguma delas, em detrimento de outras.

Em relação aos mini-testes, estes são momentos de avaliação, em díade/tríade, pelo que a classificação atribuída aos dois elementos da díade, ou aos três da tríade, é igual. Cada mini-teste pretende avaliar se os conhecimentos matemáticos lecionados durante a semana que antecede a realização do mesmo foram apropriados pelos alunos (César, 2009, 2013b; Machado, 2008; Machado & César, 2012a, 2013a, in press b; Ventura, 2012). Assim, este constitui uma forma de regulação do estudo, contribuindo para a criação de hábitos de trabalho regulares, uma vez que o mini-teste tem uma frequência semanal e aborda um número reduzido de conhecimentos matemáticos subjacentes ao conteúdo programático que se está a lecionar. Para além disso, os mini-testes, ao serem efetuados no início da aula, durante apenas 10 minutos, também ajudam os alunos com mais dificuldades de concentração de atenção a desenvolverem essa capacidade, sendo depois capazes de alargar os tempos de atenção concentrada, enquanto resolvem tarefas matemáticas. É de realçar que os alunos consideram uma vantagem resolverem mini-testes em díade/tríade, pelo que a sua existência tem nítidos impactes no estudo (que se torna semanal), bem como nos desempenhos, favorecendo o sucesso escolar nos testes individuais. Por último, ao serem semanais, tornam a resolução de testes como algo que faz parte das rotinas, desdramatizando-os e contribuindo para que muitos alunos deixem de apresentar sinais ansiogénicos tão nítidos durante os testes, provas globais e outras formas de avaliação mais longas, individuais. Por isso, esta forma de atuação coaduna-se com o que é sustentado por L. Santos (2002, 2008), bem como por esta autora e seus colaboradores (2010), em relação ao que deve ser a avaliação, em contextos de educação formal: autorreguladora das aprendizagens.

De acordo com os princípios pedagógicos e epistemológicos do projeto IC (César, 2009, 2013a; Ventura, 2012), os mini-testes são compostos por uma ou duas questões e têm uma duração de cerca de 10 minutos. São efetuados no mesmo dia da semana, geralmente, aquele em que a turma tende a estar mais agitada, pois a realização do mini-teste, no início da aula, favorece a concentração dos alunos, que aderem muito bem a esta forma de avaliação, como ilustram as respostas ao Q2 (ver Anexo 6) e Q3, (ver Anexo 7), quando assinalam o que mais lhes agradou nas aulas. Nesta turma, considerando os dois questionários, nove alunos, isto é, um terço dos alunos, consideram que a realização dos mini-testes faz parte do que mais gostaram nas aulas, naquele ano letivo.

Durante os 1.º e 2.º períodos são realizados sete mini-testes e no 3.º período, se este for, como acontece frequentemente, mais curto, realizar-se-ão apenas cinco. Quando há sete mini-testes, é retirada a classificação mais baixa obtida por cada aluno. Isto evita que, se um aluno, excecionalmente, chegar atrasado ou faltar a uma aula de mini-teste, isso tenha impactes negativos na classificação final. Porém, para não inflacionar as classificações, ao retirar-se a classificação mais baixa, também se terá de retirar a mais elevada. Assim, cada aluno fica com cinco classificações, sendo os mini-testes do ensino básico classificados, cada um, até um máximo de 20% e os do ensino secundário de quatro valores. Assim, como a classificação máxima de cada mini-teste é de 20% (ensino básico), a soma dos cinco perfaz um total de 100%, o que equivale a um teste de avaliação individual. Algo semelhante acontece para o ensino secundário.

Na aula seguinte à realização do mini-teste procede-se à correção do mesmo. Nesse momento, um elemento de algumas díades, previamente selecionadas pelo professor/investigador, é convidado a ir ao quadro explicar as estratégias de resolução utilizadas pela díade, quando respondeu ao mini-teste. Dependendo do desempenho quando explicam, no quadro, a sua resolução, podem manter ou subir/descer metade da classificação atribuída àquela questão. Por exemplo, se uma díade acertou a questão no mini-teste e na correção no quadro não a consegue resolver, a classificação da díade – e não apenas do elemento que está no quadro, a explicar – desce metade da classificação atribuída nessa questão; se não resolveu corretamente no mini-teste, mas consegue resolver a questão no quadro, a díade sobe metade da classificação atribuída à mesma (para mais detalhes, ver Ventura, 2012). Desta forma, pretende-se que os alunos internalizem a responsabilização mútua, pois ambos os elementos de cada díade devem saber explicar as estratégias de resolução a que recorreram para resolverem uma determinada questão. Esta forma de avaliação tem impactes nítidos nas atuações dos alunos. Estes não só resolvem os mini-testes. Frequentemente observámos que, depois, antes da aula onde se procede à correção, discutem entre si, mesmo envolvendo outras díades, como se pode resolver cada tarefa do mini-teste de forma completa. Assim, estes momentos entre a resolução inicial e a correção constituem, também, importantes formas de aprendizagem, que acabam por ter impactes nos desempenhos posteriores dos alunos, nos testes individuais.

O primeiro mini-teste (ver Anexo 32) foi realizado a seguir à segunda tarefa matemática proposta. Pretendia-se que os alunos mobilizassem os conhecimentos matemáticos relativos à classificação de acontecimentos – possível e impossível. A questão referia-se à existência de um saco com bolas de diversas cores e os alunos deveriam indicar, justificando, um determinado tipo de acontecimento. O segundo mini-teste (ver Anexo 33), realizado após a terceira tarefa matemática proposta, era constituído por apenas uma questão que envolvia uma situação com três amigos que tinham um número próprio de casacos de cores diversas. As três subquestões estão relacionadas com a mobilização de conhecimentos matemáticos relativos ao cálculo de probabilidade de um determinado acontecimento, utilizando a lei de Laplace. Por fim, o terceiro mini-teste (ver Anexo 34) apela à mobilização de conhecimentos matemáticos associados à lei de Laplace e à lei dos Grandes Números, pelo que foi realizado após a quarta tarefa matemática proposta nesta sequência didática. Este era constituído por uma única questão, subdividida em três alíneas.

Na Figura 355 podemos observar as classificações que as várias díades obtiveram nos três mini-testes (MT) deste conteúdo programático, bem como no teste individual. Esta forma de organização de informação, que designamos por chavetas, permite ao professor/investigador compreender o percurso de cada díade, em termos de desempenhos matemáticos, ao longo do ano letivo, possibilitando também compreender com que díades os progressos, nos desempenhos matemáticos, foram mais nítidos, para cada aluno.

Figura 355 – D, DB do professor/investigador, chavetas das várias díades desta turma, 4 de novembro de 2003

Mais uma vez, o sistema de cores assume especial importância. Assim, temos: (1) a azul os elementos do género masculino e a rosa os femininos; (2) a roxo as classificações correspondentes ao Nível 1; (3) a vermelho as classificações correspondentes ao Nível 2; (4) a preto as referentes ao Nível 3; (5) a verde as classificações pertencentes ao Nível 4; e (6) a amarelo as correspondentes ao Nível 5, ou seja, as mesmas cores que os professores/investigadores usam para colorir os testes de avaliação e ver se estes respeitam as percentagens previstas naquela escola para cada um dos níveis em que se expressam as classificações, nos finais dos períodos. Para além disso, as classificações que se encontram sem parênteses correspondem às do mini-teste e as que estão entre parênteses às que os alunos obtiveram no teste de avaliação individual.

Uma primeira observação prende-se com as classificações que os alunos obtiveram no terceiro mini-teste. Estas são, comparativamente às dos outros mini-testes, bastante inferiores. Isso deve-se a que esse mini-teste tinha um grau de dificuldade superior aos restantes dois. Na medida em que cada mini-teste só ocupa cerca de 10 minutos e se refere aos conteúdos lecionados na semana anterior, para que o seu somatório seja equilibrado, em termos de grau de dificuldade das tarefas, os professores/investigadores têm em atenção que dois dos mini-testes devem ser de mais fácil resolução, dois média e dois mais complexos. Depois, de acordo com o nível de cada turma, decidem o nível do mini-teste que falta. Assim, foi voluntário que o terceiro mini-teste fosse mais difícil, quanto às questões formuladas.

Ao analisarmos as chavetas desta turma, existem algumas considerações importantes: (1) nas díades formadas pelos Alunos R/L, B/S, D/P, E/Z, A/V assistiu-se, claramente, a uma melhoria nos desempenhos matemáticos, bem como no desenvolvimento de capacidades e competências. Por exemplo, se observarmos a díade E/Z e se tivermos em consideração que a Aluna E se considerava uma aluna muito fraca a Matemática, podemos constatar que esta aluna, ao trabalhar com o par, o Aluno Z, desenvolveu a auto-estima académica positiva, bem como capacidades e competências que lhe permitiram, no teste de avaliação individual, obter uma classificação positiva muito próxima de Nível 4 (69%); (2) nas díades N/W, K/Q, C/T e U/AA, bem como na tríade X/M/H também assistimos a uma melhoria dos desempenhos matemáticos, mas não de forma tão significativa. Se analisarmos as classificações que estes alunos obtiveram no momento de avaliação individual, podemos constatar que, em geral, corrobora o que eles afirmaram ser, enquanto aprendentes de Matemática; e (3) nas díades Y/J, O/G e F/I não é tão evidente a melhoria nos desempenhos. Contudo, estes alunos conseguiram desenvolver algumas das capacidades e competências que estavam previstas desenvolverem com o seu par. Se observarmos, também, as classificações obtidas no teste de avaliação individual, apercebemo-nos que estas corroboram o que eles afirmaram, no início do ano letivo, quando questionados acerca da representação social que tinham construído de si mesmos, enquanto aprendentes da Matemática. Assim, estas evidências empíricas iluminam que as mudanças que ocorrem ao nível dos desempenhos matemáticos e no desenvolvimento das capacidades e competências são um processo lento, que por vezes não está isento de avanços e recuos, sendo configurado pelas características de cada aluno, nomeadamente pelos mecanismos de *intra-empowerment* (César, 2013a) que já internalizaram, ou que ainda não desenvolveram, bem como pelas trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a) que já traçaram e que esperam vir a traçar, no futuro.

O teste de avaliação individual (ver Anexo 35) pretendia avaliar se os alunos tinham conseguido apropriar e eram capazes de mobilizar os conhecimentos matemáticos previstos para este conteúdo programático. Era constituído por quatro questões subdivididas em várias alíneas e teve a duração de 50 minutos. Se analisarmos este teste, podemos constatar que a linguagem adotada e o tipo de questões formuladas aproximam-se das que foram realizadas nos três mini-testes e durante as próprias aulas. Para além disso, houve uma preocupação quanto ao número de perguntas e respetiva classificação, para o tornar o mais equilibrado possível; bem como adequado àquela turma, em particular. Quando se desenvolvem práticas colaborativas no âmbito do projeto IC, a distribuição da classificação por cada questão que compõe o teste de avaliação individual é algo bastante debatido e refletido.

De acordo com a escala de classificação qualitativa e quantitativa em vigor nessa escola, referente ao ensino básico, este teste apresenta as seguintes características: (1) existência de um número de questões que sejam de Nível 1 e cuja soma das classificações não deve exceder os 20%; (2) existência de questões de Nível 2 perfazendo a soma total de 30%; (3) questões de Nível 3 cuja soma das classificações não deve exceder os 25%; (4) existência de questões de Nível 4 perfazendo a soma total de 15%; e (5) questões de Nível 5 que não devem exceder a classificação total de 10%. Desta forma, permite que os alunos com mais dificuldade em apropriar e mobilizar os conhecimentos matemáticos consigam resolver algumas questões do teste de avaliação individual, bem como permite destacar os alunos que tenham desempenhos muito elevados e possam vir a obter as classificações finais de Nível 4 ou 5, no final do período. No Quadro 3 está exemplificada, com base no teste de avaliação individual relativo às Probabilidades, a distribuição da classificação de cada questão, por nível, sendo a roxo as questões de Nível 1, a vermelho as de Nível 2, a preto as de Nível 3, a verde as de Nível 4 e a amarelo as de Nível 5.

Quadro 3 – Distribuição da classificação das questões do 1.º teste individual por níveis de classificação (Nível 1 a Nível 5)

Questão	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	4.1a	4.1b	4.2a	4.2b
%	4	4	4	4	4	8	6	7	10	6	6	6	8	7	6	10
Total	20%					8%	13%		10%	12%		14%		7%	6%	10%

Assim, este teste de avaliação individual cumpre o que foi dito anteriormente, quanto à distribuição das questões pelos níveis de classificação, ou seja, 20% de Nível 1 (Questões 1 e 2a), 30% de Nível 2 (10% + 14% + 6%, que corresponde às Questões 3a, 3d, 4.1.a e 4.2.a), 25% de Nível 3 (13% + 12%, que corresponde às Questões 2c, 2d, 3b e 3c), 15% de Nível 4 (8% + 7%, que corresponde às Questões 2b e 4.1.b) e 10% de Nível 5 (Questão 4.2.b)

Ainda em relação à classificação, convém realçar que, no IC, os alunos resolviam três testes individuais por período, podendo optar por melhorar um deles, na última semana de aulas. Esta decisão também valoriza a aprendizagem ser considerada um processo, o que significa que é de esperar que, em dezembro, os alunos tenham apropriado mais conhecimentos e melhorado os desempenhos matemáticos. Como o que se pretende é que eles se sintam motivados para estudar, esta opção funciona nesse sentido. Para além disso, permite evitar que um aluno que, por um motivo pontual, não tenha, apenas num teste, obtido as classificações que habitualmente consegue atingir, se sinta penalizado e desmotivado por isso. No que se refere ao primeiro teste de avaliação individual, que foi sobre Probabilidades, 13 dos 27 alunos desta turma escolheram melhorar este teste, na última semana de aulas, sendo que seis alunos conseguiram melhorar a classificação, cinco baixaram a mesma e dois mantiveram a mesma classificação que obtiveram no primeiro teste de avaliação individual. O teste de melhoria, elaborado pelo professor/investigador abordou os mesmos conteúdos e teve um nível de dificuldade semelhante ao primeiro teste de avaliação individual. De notar que, nessa aula, no final do período, os alunos estão, simultaneamente, a resolver diferentes testes, consoante tenham escolhido melhorar o 1.º, o 2.º, ou o 3.º teste (para mais detalhes, ver também Ventura, 2012).

5.5.6. Dois exemplos de tarefas matemáticas utilizadas durante outros momentos do ano letivo

Ao longo do ano letivo o professor/investigador desta turma procurou, sempre que possível, introduzir os novos conteúdos programáticos com propostas de tarefas matemáticas que apelassem a situações do quotidiano ou que recorressem a ferramentas culturais (Vygotsky, 1934/1962) que fizessem parte das culturas nas quais os alunos participavam. Esta forma de atuação facilitava o envolvimento dos alunos nas atividades de matemática escolar, tornando-os participantes legítimos de uma comunidade de aprendizagem (César, 2007, 2009, 2013a; Lave & Wenger, 1991). Para além disso, a opção de trazer para a aula alguns elementos culturais do quotidiano dos alunos facilitava que o poder fosse distribuído pelos diversos elementos dessa comunidade de aprendizagem (alunos e professores), na qual todos tinham voz(es) (Wertsch, 1991), partilhando e expressando as diversas formas de pensamento, processos de raciocínio e estratégias de resolução.

5.5.6.1. Tarefa matemática – Correr até rebentar

O primeiro exemplo que iremos mencionar está relacionado com a tarefa matemática designada por *Correr até rebentar* (Borges & César, 2012). Esta foi realizada no início do 2.º período e tinha como finalidade a análise de representações gráficas que traduzissem situações da vida real. Este tema matemático fazia parte do conteúdo programático relativo à proporcionalidade inversa (ME/DGEBS, 1991). Esta tarefa baseava-se numa notícia da revista *Super Interessante*, que se referia ao que acontecia ao corpo humano durante uma maratona (ver Anexo 36). Convém realçar que, nesse ano, as maratonas foram particularmente focadas pelos *media*.

Era composta por duas partes, em que os alunos tinham que: (1) analisar os vários gráficos que constavam da notícia dessa revista, segundo algumas sugestões mencionadas no enunciado da tarefa matemática; e (2) fazer corresponder cada um dos textos (retirados da notícia) a um diferente momento da corrida. Ao contrário do que aconteceu nas tarefas matemáticas anteriores, esta foi realizada em grupos de quatro elementos. A constituição dos grupos de trabalho foi feita pelo professor/investigador e baseou-se na junção de duas díades, que já se encontravam estrategicamente sentadas, ou seja, uma atrás da outra, relativamente à ocupação espacial, na sala de aula, o que facilitava o trabalho em pequenos grupos: apenas era necessário virarem as cadeiras para trás. Convém recordar que as díades/tríade foram alteradas quando isso se justificava, fosse porque os alunos já tinham progredido o que poderiam progredir com aquele par, ou porque se pretendiam evitar formas de dependência que podem surgir quando se trabalha todo o ano letivo com o mesmo par. Assim, quando os grupos foram formados, as díades já não eram as mesmas da planta apresentada para o início das aulas referentes aos conteúdos programáticos, ou seja, inícios de Outubro.

Na Figura 356, podemos observar o desempenho de um dos grupos, em relação à primeira parte desta tarefa matemática. Estes alunos recorrem a uma pequena composição matemática como estratégia de resolução. Utilizam uma linguagem matemática com algum rigor, mencionando elementos característicos da análise de uma função apresentada sob a forma de um gráfico.

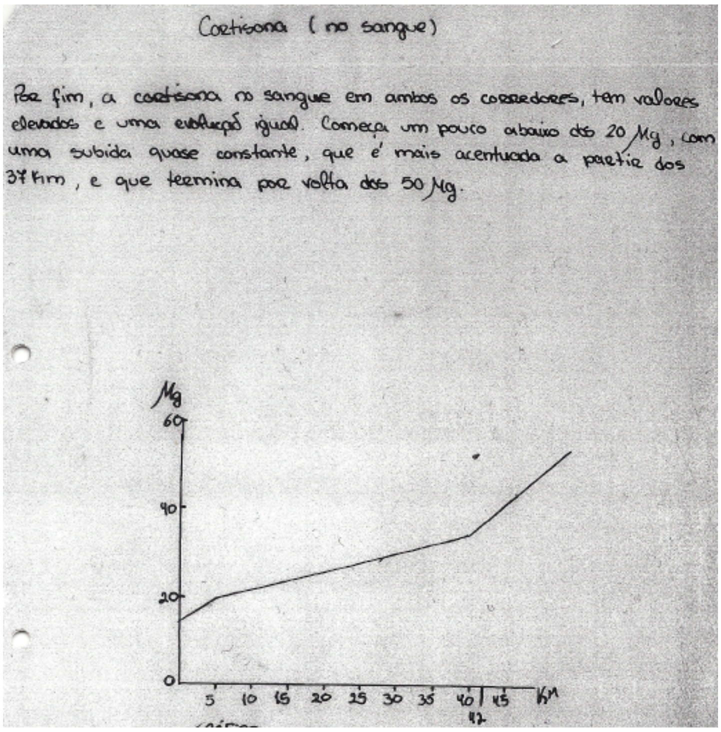


Figura 356 – D, protocolos dos alunos, 6 de janeiro de 2004, estratégia de resolução do grupo composto pelos Alunos M, J, E e H

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos mobilizassem os conhecimentos matemáticos associados à análise de uma função representada sob a forma de um gráfico. Para além disso, permitia a produção de argumentações sustentadas, recorrendo à linguagem do senso comum e/ou matemática, com base na análise e interpretação da informação contida no enunciado do problema, podendo, ainda, recorrer a conhecimentos de outros domínios científicos. Desta forma, configurou-se um espaço/tempo no qual os alunos podiam realizar transições entre dois contextos (Abreu et al., 2002; Zittoun, 2006) – vida quotidiana e escola – interpretando e criticando os resultados referentes à situação descrita: uma maratona. Para além disso, ao elaborarem as composições matemáticas os alunos precisavam de usar sentido crítico – em relação aos dados da notícia da revista – bem como competências que envolviam a seleção de informação relevante, organização da exposição dos dados considerados mais importantes, interpretação da informação fornecida e recurso a raciocínios geométricos, essenciais para a interpretação de gráficos, conjugados com raciocínios analíticos, que também são utilizados neste tipo de interpretação, bem como na produção das composições matemáticas.

Esta tarefa matemática surge na primeira aula do 2.º período, aula em que as díades podem ser – e, geralmente, são – alteradas, tendo em conta as capacidades e competências que os alunos ainda precisam desenvolver, bem como os desempenhos matemáticos obtidos durante o 1.º período. Este grupo foi constituído juntando duas das díades – M/E e J/H. Este grupo de alunos está a relacionar a quantidade de cortisona no sangue com os quilómetros percorridos, sendo capaz de compreender que há um aumento lento e, depois, mais acelerado, a partir dos 37 kms. Desta forma, estes alunos mobilizam capacidades e competências como a capacidade de observação e análise de informação, o sentido crítico, a capacidade de síntese e argumentação sustentada, bem como competências associadas às conexões com a vida quotidiana e aos conhecimentos que apropriaram sobre diversos conteúdos matemáticos, que precisam de mobilizar (interpretação de textos que contêm informações matemáticas, percentagens, tempos de reação, entre outros).

Se nos recordamos que a Aluna E se encontrava na transição do RC para o RA, no início do ano letivo, quando respondeu ao IACC, esta tarefa matemática confronta-a com oportunidades para que consiga progredir nos desempenhos matemáticos (ver Figuras 347 e 355), assim como capacidades, tais como o acesso ao RA, e competências como as que já mencionámos acima. Para os Alunos M e J, esta tarefa permitia-lhes desenvolver o sentido crítico face aos dados matemáticos que a notícia continha, ou seja, esta tarefa matemática permitia desenvolver as competências avaliadas pela Tarefa A, do IACC. Para além disso, a Aluna H, que já se encontrava na transição entre o RC e o RA, no início do ano letivo, também era confrontada com oportunidades para fazer a transição para o RA, como é desejável que aconteça antes do 10.º ano de escolaridade. Assim, esta tarefa tem subjacentes capacidades e competências avaliadas pelas Tarefas

A, C e E, também permitindo desenvolver o raciocínio geométrico e analítico, que eram avaliados pela Tarefa D. Sendo uma tarefa motivante, baseada numa notícia de uma revista, cujo título desperta curiosidade e abordando um tema que estava em discussão, naquela altura, nos *media*, constitui um exemplo de como a escolha, adaptação e/ou elaboração de tarefas, por parte dos professores/investigadores, podem contribuir para a melhoria dos desempenhos dos alunos e, simultaneamente, para o desenvolvimento de capacidades e competências.

Se os professores de outras disciplinas estiverem interessados em desenvolver projetos interdisciplinares, permite facilmente fazê-lo com disciplinas como Português, onde se pode analisar a diferença entre a escrita de uma notícia e de outros tipos de texto; em Ciências Naturais onde se podem analisar muitas das informações relacionadas com reações fisiológicas e discutir também porque é que as reações do corpo diferem quando se é atleta profissional ou quando se corre esporadicamente; em Inglês, onde se podem analisar textos que também abordem as maratonas e que estejam disponíveis, traduzir esta notícia, ou discuti-la oralmente; em História, pesquisando e discutindo onde se começaram a realizar maratonas, as características dessas culturas e, inclusivamente, dos jogos olímpicos; em Educação Física, debatendo em que consiste o treino de atletas de alta competição e como os amadores se podem preparar para participarem em maratonas e mini-maratonas, podendo mesmo ver se alguns alunos se queriam preparar para alguma delas; ou em Educação Visual, fazendo trabalhos baseados em colagens, desenhos e outros tipos de produções artísticas baseados na temática das corridas e das maratonas. Queremos, com este exemplo, ilustrar que, caso as escolas e os professores tenham apetência por desenvolver projetos interdisciplinares, estas tarefas, ao desenvolverem capacidades e competências transversais, para além de permitirem abordar os conteúdos programáticos previstos, revelam-se particularmente adequadas. Em algumas escolas isso aconteceu e teve impactes nítidos no envolvimento dos alunos nas atividades, bem como no acesso ao sucesso escolar, influenciando, positivamente, as trajetórias de participação ao longo da vida dos alunos (César, 2013a), nomeadamente na escola e, futuramente, profissionalmente, como realçam as evidências do *follow up*.

Ainda neste grupo de alunos e segundo o DB do professor/investigador, houve a necessidade de recorrer ao manual escolar para conseguirem perceber o que era pretendido com esta tarefa matemática, o que revela o desenvolvimento de formas de atuação que lhes permitem ser mais autónomos, aumentando a auto-estima académica positiva, mas também aprendendo a procurar informação extra que seja necessária, a ler criticamente essa mesma informação e a sintetizá-la, para ser utilizável nos trabalhos que estão a elaborar.

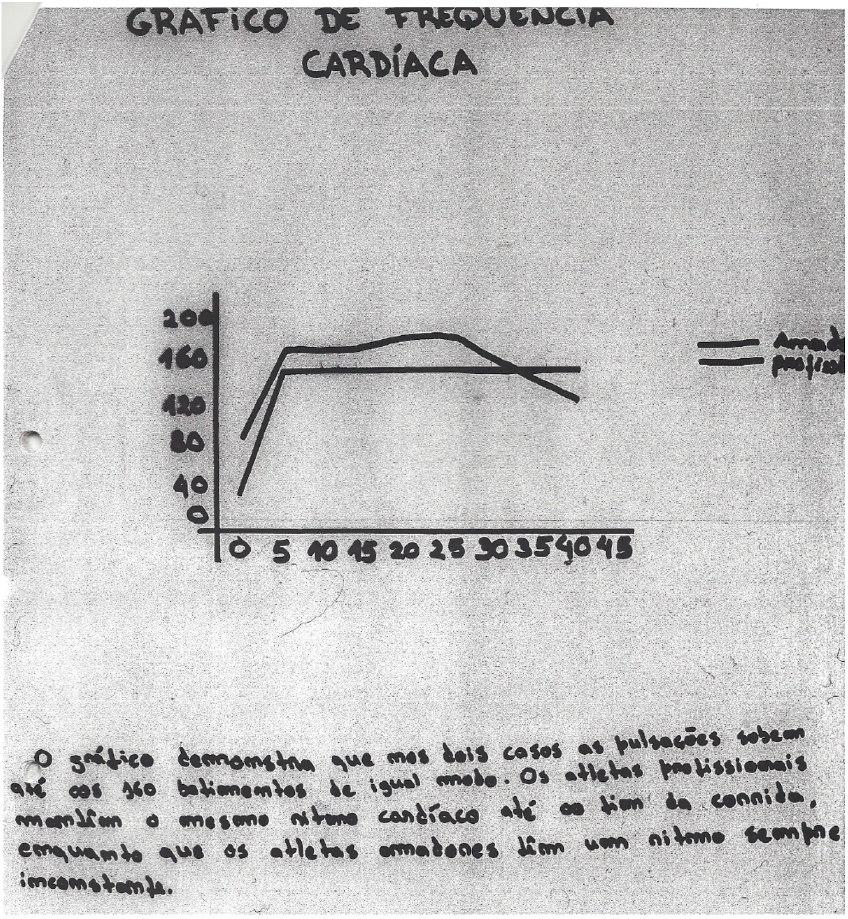


Figura 357 – D, protocolos dos alunos, 6 de janeiro de 2004, estratégia de resolução do grupo composto pelos Alunos F, G, X e Y

Na Figura 357 estamos perante um exemplo de outro grupo quanto aos desempenho na primeira parte desta tarefa. Este grupo era formado pelas díades F/Y e G/X. Adotam como estratégia de resolução uma composição matemática, associando-a a uma reprodução bastante rigorosa do gráfico contido na notícia da revista. A análise deste grupo é centrada em aspetos da monotonia do gráfico – por exemplo, “as pulsações sobem”, “mantêm o mesmo ritmo”. Desta forma, de uma forma intuitiva e quase lúdica, os alunos vão trabalhando conceitos matemáticos que, posteriormente, na discussão geral, serão discutidos e aprofundados, com um maior grau de formalização, com base nas intervenções dos alunos e do professor/investigador. Assim, umas das finalidades desta tarefa matemática é envolver os alunos numa linguagem matemática associada ao tema da Funções.

Para além disso, a análise que este grupo elabora, a partir do gráfico relativo à frequência cardíaca de um atleta profissional e de um amador, revela mobilização de capacidades e competências que foram desenvolvidas (e que continuam a ser) durante o trabalho em díade, realizado no 1.º período. Não nos esquecendo das informações provenientes da análise do IACC, que desocultámos anteriormente, podemos dizer que esta tarefa possibilitou que os Alunos X, Y e G continuassem a desenvolver o raciocínio abstrato (RA), na medida em que estes, no início do ano letivo, se encontravam na transição entre o RC e o RA. Porém, a Aluna F ainda revelava ter que desenvolver competências associadas ao rigor da escrita das formas de pensamento e dos processos de raciocínio utilizados, pelo que esta tarefa lhe permitia ir ao encontro dessa necessidade, ao apelar para a produção de uma composição matemática.

Assim, a elaboração de tarefas matemáticas com base em artigos de jornais ou revistas, sobretudo se estas têm títulos apelativos e costumam ser lidas por jovens, podem configurar oportunidades únicas de partilha de sentidos matemáticos, bem como de apropriação de conhecimentos e de desenvolvimento de capacidades e competências (matemáticas). Para além disso, este tipo de tarefas matemáticas permite aos alunos tomar consciência do papel da Matemática na vida quotidiana, bem como da necessidade dos cidadãos serem críticos em relação à informação matemática contida nas notícias veiculadas pelos *media*, uma vez que esta nem sempre é rigorosa e fidedigna. Assim, para além da apropriação dos conteúdos matemáticos, previstos nos documentos de política educativa (Abrantes et al., 1999; ME/DGEBS, 1991), há uma preocupação paralela em contribuir para a formação de cidadãos críticos e participativos, um aspeto que nos parece essencial dadas as características atuais da sociedade e culturas em que estes alunos participam.

5.5.6.2. Tarefa matemática – Geometria na minha escola

O segundo exemplo que queremos mencionar consiste na abordagem ao estudo dos critérios de paralelismo e perpendicularidade no espaço. Para tal, o professor/investigador optou por elaborar uma tarefa matemática que consistia na observação de cinco imagens da própria escola e identificar, em cada imagem, alguns exemplos de posições relativas entre retas, entre planos e entre retas e planos (ver Anexo 37). Mais uma vez, tentou-se recorrer a algo familiar para estes alunos – neste caso, a escola – e, a partir daí, explorar os conteúdos matemáticos. O recurso à escola constitui aquilo que Doise e Mugny (1981) designam por marcação social. Estes autores mostraram que, quando as tarefas têm marcação social, ou seja, podem ser interpretadas a partir de vivências do quotidiano, os desempenhos dos alunos são superiores a quando as tarefas apelam ao mesmo tipo de funções e organização cognitiva, mas sem apresentarem marcação social.

Na Figuras 358 estão dois exemplos das imagens que foram facultadas aos alunos, que se encontravam a trabalhar em pequenos grupos. Esta tarefa facilitou o desenvolvimento de capacidades e competências como a capacidade de observação, capacidade de visualização espacial, comunicação matemática, em especial no que respeita à geometria, sentido crítico, mobilização de conhecimentos matemáticos em situações da vida quotidiana, entre outras.

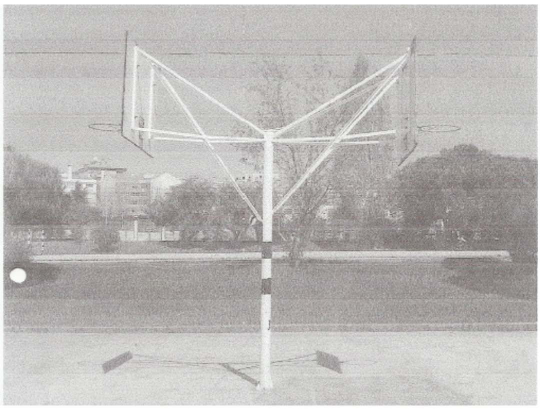



Figura 358 – Duas das imagens da escola que figuravam na tarefa matemática

Na Figura 359 encontra-se um exemplo de resposta do grupo formado pelos Alunos Q, I, B e T, durante a discussão geral, onde exemplificavam como tinham resolvido a tarefa proposta. Este grupo foi formado juntando duas díades, onde participavam os Alunos Q e I e os Alunos B e T. Ao longo desse ano letivo, estes alunos já tinham trabalhado com outros pares para desenvolverem capacidades e competências que não seriam potenciadas com o par com que estavam, anteriormente, ou que tinham desenvolvido parcialmente com eles, mas que precisavam de continuar a desenvolver. Se nos recordarmos de que, no início do ano letivo, os Alunos Q, I e T necessitavam de trabalhar com pares que lhes permitissem desenvolver capacidades e competências associadas ao raciocínio geométrico, quando analisamos algumas interações dialógicas que ocorreram nesta tarefa matemática, registadas no DB do professor/investigador, constatamos que já são estes alunos que tomam a iniciativa de começarem a tarefa, mobilizando competências associadas ao raciocínio geométrico. Também revelam conseguir mobilizar algum sentido crítico, quando procuram no manual escolar alguns dos conceitos em jogo nesta tarefa matemática, bem como capacidade de seleção da informação relevante. Conseguem, ainda, colocar em ação, numa figura em particular, aquilo que viam ou sabiam acerca das posições relativas entre retas, entre planos e entre retas e planos. Assim, atendendo à análise que efetuámos acerca das capacidades e competências que estes alunos mobilizavam e as que precisavam de desenvolver, quando responderam ao IACC e, depois, ao longo do ano letivo, podemos afirmar que o trabalho colaborativo configurou a existência de oportunidades de aprendizagem centradas na partilha de sentidos matemáticos, bem como no desenvolvimento de capacidades e competências.

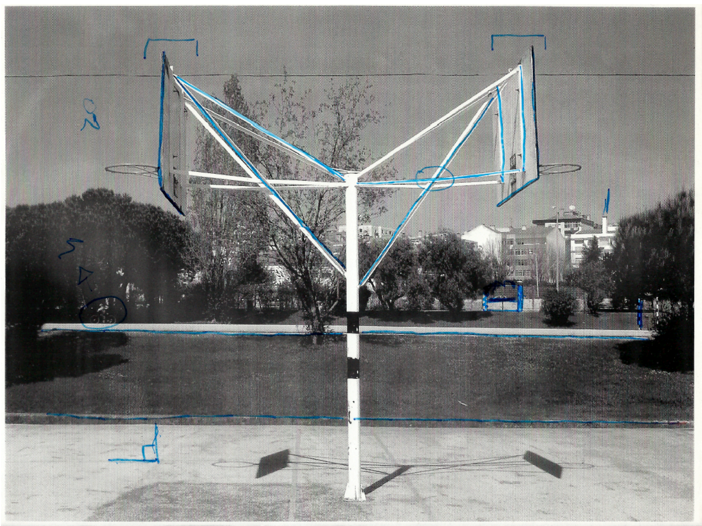


Figura 359 – D, protocolos dos alunos, 27 de maio de 2004, estratégia de resolução do grupo composto pelos Alunos Q, I, B e T

Na discussão geral, o Aluno T vai explicar aos restantes colegas as estratégias de resolução adotadas pelo grupo. Para tal, vai marcando no acetato, que se encontrava projetado e onde estava esta figura (ver Figura 359), os vários elementos considerados, questionando os colegas sobre se estavam a perceber o que ele estava a fazer e se queriam acrescentar algo. Esta evidência ilumina a internalização de mecanismos de *inter-empowerment,* por parte deste aluno, na medida em que, ao apropriar-se das regras do contrato didático que foi negociado naquele ano letivo, consegue adotar formas de atuação e reação próprios do professor/investigador, no início do ano letivo, e revela que conseguiu internalizar a distribuição do poder, sendo capaz de dar voz(es) aos colegas.

Por último, queremos salientar a existência da indicação das páginas do manual escolar para os alunos consultarem, se estes tiverem alguma dúvida relacionada com algum conceito ou propriedade matemática. Esta forma de atuação está relacionada com um dos aspetos que o professor/investigador pretendia: desenvolver nos alunos processos que lhes permitam resolver, de forma autónoma e responsável, uma determinada tarefa de matemática escolar. Assim, o professor/investigador atua mais como um orientador, um mediador, deixando os alunos assumirem poder e voz(es), atuando como participantes legítimos nos processos de ensino e de aprendizagem, facilitando a atribuição de sentidos aos conhecimentos matemáticos apropriados e desenvolvendo capacidades e competências.

5.5.7. Impactes das tarefas matemáticas na avaliação dos alunos sobre o trabalho realizado durante o ano letivo

A natureza do trabalho desenvolvido pelo professor/investigador, ao longo de um ano letivo, é muitas vezes salientada pelos alunos como algo benéfico e que teve impactes nas trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a), nomeadamente na escola, como se pode observar através da análise dos diversos questionários (Q2 e Q3), respondidos pelos alunos.

Esta turma de 9.º ano de escolaridade não foi exceção. Em janeiro de 2004, no Q2, quando questionados sobre o que mais lhes agradou nas aulas de Matemática (do 1.º período), muitos foram os alunos que salientaram as tarefas matemáticas propostas, bem como a forma de trabalho desenvolvida em aula, isto é, o trabalho em díade. A Aluna C responde que “Foi poder fazer as fichas de trabalho e os mini-testes com o meu colega do lado, pois podia partilhar o meu raciocínio com outra pessoa” (Aluna C, Q2, janeiro, 2004). Esta argumentação manteve-se quando esta aluna respondeu ao Q3, no final do ano letivo, o que ilumina a importância das tarefas propostas, em aula, bem como as formas de atuação do professor/investigador e dos alunos nas atividades matemáticas subjacentes às mesmas. Outro exemplo dos impactes durante o 1.º período do ano letivo, também é destacado pela Aluna E, na medida em que afirma que o que mais lhe agradou foi “a maneira como as aulas são dadas, talvez por ser diferente, não como aquelas aulas normais, secantes, agradou-me muito mais” (Aluna E, Q2, janeiro, 2004). Esta resposta ilumina não só uma mudança na representação social que esta aluna construiu sobre a Matemática, mas também a própria forma de atuação e envolvimento nas atividades matemáticas.

Como afirmam Borges e César (2009), a tarefa dos *M&M's* foi promotora do desenvolvimento de uma auto-estima positiva dos alunos, enquanto aprendentes de Matemática, observando-se, ainda, impactes positivos desta tarefa nas aprendizagens matemáticas dos alunos. Como relatam dois alunos dessa turma, que neste texto eram designados por nomes fictícios,

> Uma aula que gostei especialmente foi quando estávamos a dar probabilidades e a professora fez uma ficha em que nós tínhamos um pacote de M&M's e tínhamos que descobrir quantos M&M's o pacote tinha, etc...tudo relacionado às probabilidades (Isabel, auto-avaliação do 1.º período)
>
> (...) eu consegui naquele dia a base da matéria sobre probabilidades e também achei que foi uma maneira divertida de aprender (Luís, auto-avaliação do 1.º período, grafia do aluno). (Borges & César, 2009, p. 5)

Assim, a tarefa inicial, que serviu de introdução ao estudo das Probabilidades, teve impactes nítidos nos alunos desta turma. Para além de permitir abordar os conteúdos relativos a esse tema quase na íntegra, também possibilitou a realização de uma aprendizagem situada, na qual os alunos se tornaram participantes legítimos de uma comunidade de aprendizagem (César, 2007, 2009, 2013a; Lave & Wenger, 1991). Também a tarefa matemática relativa ao tema de geometria foi mencionada como algo que vários alunos consideraram ser o que lhes mais agradou nas aulas de Matemática. Por exemplo, o Aluno Y menciona que o que mais lhe agradou foram "as aulas teóricas sobre as rectas, sobre a trigonometria e outras" (Aluno Y, Q3, junho, 2004). Por último, queremos referir que, o sistema de codificação dos participantes usado por Borges e César (2009), é diferente do utilizado neste tese. Contudo, ambos garantem o anonimato dos alunos, aspeto que nos parecesse essencial.

Em síntese: a elaboração, adaptação ou seleção de tarefas matemáticas adequadas às características, necessidades e interesses de um grupo de alunos revela ser um elemento fundamental, não só no desenvolvimento de práticas colaborativas, mas também na promoção de uma educação matemática de elevada qualidade. Assim, a informação que se pode obter através da análise do IACC, conjugada com as da TIP1, Q1 e observação na primeira semana de aulas do ano letivo, possibilita a operacionalização de práticas pedagógicas que promovam a apropriação de conhecimentos matemáticos, bem como o desenvolvimento de capacidades e competências (matemáticas).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Contributos desta tese para a construção de conhecimento

Esta investigação pretendia estudar e compreender as potencialidades de um instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), elaborado pela equipa do projeto *Interacção e Conhecimento* (IC), definindo padrões de desempenho dos alunos. Para além disso, interessava-nos analisar os contributos desse instrumento nas práticas pedagógicas, ou seja, de que forma é que a informação a que o professor/investigador consegue ter acesso com o IACC facilita a operacionalização das orientações curriculares para a disciplina de Matemática, numa determinada turma, promovendo uma educação matemática de elevada qualidade. Assumindo um paradigma interpretativo (Denzin, 2002), optámos por desenvolver um estudo de caso intrínseco (Stake, 1995/2009), por ser um *design* de investigação que nos permite analisar um caso particular em profundidade, tendo em conta as suas especificidades, afigurando-se especialmente indicado quando os casos em estudo são raros e existe pouca literatura da especialidade sobre esse tema, como acontece com os instrumentos de avaliação de capacidades e competências utilizados em contexto escolar, por professores ou professores/investigadores. Este estudo também possibilita avançar no conhecimento, nomeadamente no domínio da Educação, em geral, e da Educação Matemática, em particular, o que constitui outra das finalidades deste trabalho.

Elaborámos cinco questões de investigação que nortearam este estudo e cujas respostas sintetizamos em seguida.

Questão 1

Como foi o processo de construção do instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC), usado na disciplina de Matemática e afins?

Ter tido acesso ao espólio e *corpus* empírico que o projeto IC construiu, ao longo dos 12 anos de existência formal, permitiu-nos traçar uma trajetória relativa ao processo de elaboração do IACC. Um aspeto que é essencial salientar, para se perceber a pregnância deste instrumento, é que ele ainda continua a ser utilizado nas aulas de Matemática ou afins dos professores/investigadores que participaram na equipa central deste projeto, bem como dos que fizeram formação com membros desta equipa. Outro aspeto a realçar é que este instrumento apresenta características que o tornam único, diferente de outros que avaliam capacidades e competências e que são utilizados em Educação, em Portugal, mas que são geralmente analisados por psicólogos ou agentes educativos com outro tipo de formações e não por docentes.

A convicção acerca da necessidade de um instrumento que avaliasse capacidades e competências, desde o início do ano letivo, para que se pudessem adaptar as práticas pedagógicas às características, necessidades e interesses dos alunos, foi realçada tanto por César (1994), na tese de doutoramento, como pelos professores com quem a coordenadora do projeto IC contactava, enquanto orientadora da prática pedagógica supervisionada, vulgo estágio pedagógico, docente da Licenciatura em Ensino da Matemática do DEFCUL, bem como de mestrados frequentados por professores de Matemática e dinamizadora de cursos e ações de formação contínua destinados a professores e futuros professores.

De acordo com os princípios epistemológicos e pedagógicos subjacentes às práticas colaborativas do projeto IC (César, 2009, 2013a; Ventura, 2012), o IACC deveria apresentar características que o distinguissem de outros instrumentos de avaliação de capacidades e competências, nomeadamente: (1) os professores deveriam poder utilizá-lo de forma autónoma, após a participação em cursos especializados, que a equipa do IC, ou professores por ela formados, realizavam. Assim, em oposição ao que acontecia com outros instrumentos, que eram essencialmente utilizados por psicólogos, a análise e interpretação dos resultados teriam de estar adaptadas a serem elaboradas pelos próprios professores; (2) as informações obtidas com o IACC deveriam ter impactes nas práticas pedagógicas dos professores, ou seja, com base na análise desse instrumento, os professores deveriam conseguir elaborar, adaptar e/ou selecionar, tarefas matemáticas adequadas aos alunos duma determinada turma, construindo oportunidades de aprendizagem únicas para eles; (3) não era um teste de diagnóstico, pois não se pretendia que avaliasse conhecimentos (matemáticos), mas sim capacidades e competências; (4) este instrumento era desenvolvimentista e não psicométrico, ou seja, o foco de análise seriam as estratégias de resolução, bem como os processos de raciocínio e as formas de pensamento subjacentes aos desempenhos dos alunos, considerando-se que as capacidades e competências se desenvolvem e, como tal, mudam, tornando-se mais complexas, à medida que o processo de desenvolvimento avança; e (5) o IACC destinava-se a alunos do 5.º ao 12.º ano de escolaridade, iluminando a evolução das capacidades e competências ao longo do processo de desenvolvimento e de aprendizagem dos mesmos.

Para a elaboração do IACC foi questionado um grupo bastante alargado de professores (N=1011), com diferentes anos de experiência profissional, lecionando vários níveis de escolaridade, em escolas distribuídas pelas várias regiões de Portugal. Foi-lhes pedido que mencionassem três características dos alunos, que gostariam de conhecer no início do ano letivo, para poderem adaptar as práticas pedagógicas à turma e a cada aluno, promovendo uma educação de qualidade e o acesso ao sucesso escolar. Assim, para cada característica, ou seja, para cada capacidade e competência que obteve mais de 85% de respostas, a equipa do projeto IC elaborou uma tarefa matemática que a avaliasse. Desta forma, a análise das respostas dos professores deu origem às cinco tarefas matemáticas que compõem o IACC, permitindo cada uma delas avaliar algumas capacidades e competências: Tarefa A – o sentido crítico em relação a informações matemáticas e a capacidade de observação; Tarefa B – a intuição matemática, a persistência nas tarefas e a criatividade; Tarefa C – o raciocínio lógico (raciocínio concreto ou raciocínio abstrato), mas também a atenção concentrada e a memorização de instruções; Tarefa D – o tipo de raciocínio preferencial na abordagem de um problema (analítico ou geométrico) e, em algumas estratégias de resolução, o raciocínio concreto e abstrato; Tarefa E – as conexões entre a Matemática e a vida quotidiana, nomeadamente em situações de venda, bem como o tipo de abordagem dos problemas (global ou passo-a-passo), retomando mais uma vez, em algumas estratégias de resolução, a análise do raciocínio concreto e abstrato que foi, nitidamente, o aspeto que mais professores gostariam de saber sobre os alunos.

As tarefas matemáticas que constituem este instrumento foram sendo alvo de algumas modificações, uma vez que cada tarefa foi respondida por alunos de diversas turmas e anos de escolaridade, de forma individual, para que os professores e investigadores que estavam a elaborar o IACC se apercebessem se as tarefas concebidas permitiam avaliar as capacidades e competências pretendidas. Nesta fase inicial da elaboração das tarefas, os alunos eram também entrevistados, para se perceber mais, em profundidade, as dificuldades que tinham sentido, bem como as estratégias de resolução, processos de raciocínio e formas de pensamento a que tinham recorrido para as resolverem.

Quando se chegou à versão final de cada tarefa que constitui o IACC, foi necessário tomar decisões sobre a ordenação das tarefas. Só quando a ordenação ficou decidida as tarefas passaram a ter a designação que hoje se utiliza: Tarefa A, B, C, D e E. Este aspeto era importante, porque se pretendia que os alunos não rejeitassem este instrumento, ou seja, que a maioria dos alunos resolvesse todas as tarefas. Caso contrário, a informação que se obtinha não era a mais completa possível acerca daquele aluno. Para além disso, as tarefas tinham graus de dificuldade diferentes e também se pretendia averiguar qual seria a posição relativa mais conveniente, em função do tipo de desafio envolvido em cada uma delas. Assim, apenas as decisões sobre a ordenação das tarefas foi um aspeto que ocupou cerca de um ano de trabalho.

Em síntese: a elaboração do IACC foi um processo complexo, moroso e faseado, mas também desafiante, para os professores e investigadores que nele participaram e, posteriormente, para a equipa do projeto IC, uma vez que se tratou de um trabalho pioneiro em Portugal, pois não existia nenhum instrumento que apresentasse as mesmas características e que tivesse os impactes que o IACC teve (e continua a ter) nas práticas pedagógicas.

Questão 2

Como são analisados os desempenhos dos alunos quando se utiliza este instrumento de acordo com os princípios do projeto Interacção e Conhecimento (IC)?

Uma das características mais relevantes do projeto IC, relacionada com as práticas pedagógicas, é a forma como é concebida a primeira semana de aulas de cada ano letivo, em turmas sem continuidade pedagógica. Essa semana assume especial importância, na medida em que se configuram espaços/tempos, nos quais os professores/investigadores recolhem informações acerca das características, interesses e necessidades de cada aluno e, ainda, pela relevância do critério surpresa na adesão dos alunos às tarefas propostas. Assim, nessa semana, os alunos respondem a três instrumentos: uma tarefa de inspiração projetiva (TIP1), um questionário (Q1) e um instrumento de avaliação de capacidades e competências (IACC).

Após terem respondido a estes instrumentos, o professor/investigador recorre a três formas de registo que lhe permitem organizar a informação proveniente desses instrumentos para, de seguida, a analisar. Assim, preenche uma grelha de registo e análise, a folha de exploração no quadro e a folha de desempenhos no IACC. Estas formas de registo facilitam uma análise mais sustentada destes instrumentos, bem como permitem o preenchimento de outras duas formas de registo – a folha das primeiras díades e a primeira planta de sala de aula.

A análise dos desempenhos dos alunos no IACC é realizada recorrendo a uma simbologia própria e que foi elaborada pela equipa do projeto IC, facilitando que outro investigador ou professor/investigador que analisasse esses dados conseguisse compreender o que tinha sido observado e inferido, a partir dos desempenhos dos alunos. Para além disso, também permite a sintetização da informação, para cada tarefa matemática que compõe o IACC. Para cada aluno e tarefa analisada, o professor/investigador preenchia a grelha de registo e análise, no espaço dedicado ao IACC, com a simbologia indicada, ou seja, indicando se a estratégia de resolução estava completa, sem justificação ou pouco clara, desajustada ou se não respondeu.

Para além disso, preenche a folha de exploração no quadro, onde indica, para cada tarefa do IACC, qual ou quais o(s) aluno(s) que vão ser convidados a ir ao quadro, na aula seguinte, para resolver uma parte ou a totalidade de uma tarefa. Desta forma, pode acontecer que, numa mesma tarefa, exista mais do que um aluno proposto para ir ao quadro. Esta forma de atuação permite tornar explícito que existem várias estratégias de resolução possíveis para um mesmo problema e estas são consideradas relevantes, tanto pelo professor/investigador como pelos seus pares, pelo que as devem registar, por escrito, numa nova folha com as tarefas do IACC, que lhes foi fornecida nessa aula. Este aspeto é importante, uma vez que se pretende que os alunos atribuam sentidos às aprendizagens realizadas e que desenvolvam capacidades e competências (matemáticas) que lhes permitam colocar em ação, noutros contextos, cenários ou situações, os conhecimentos matemáticos que apropriaram, em aula. Para além disso, os momentos onde os alunos são confrontados com estratégias de resolução diversificadas contribuem para desenvolver a capacidade de argumentação sustentada, permitindo-lhes desenvolver o pensamento matemático, tornando-o mais plástico, facilitando que o mobilizem noutras situações problemáticas, fora dos contextos de educação formal.

Por fim, o professor/investigador preenche a folha dos desempenhos no IACC. Esta forma de registo permite-lhe ter uma visão global da turma, em termos de capacidades e competências, isto é, se a turma corresponde ao que era esperado para aquele ano de escolaridade e para as idades dos alunos. Por exemplo, se a maioria dos alunos mobilizam, apenas ou conjugando-o com outras capacidades e competências, o raciocínio concreto (RC), no início do 10.º ano de escolaridade, pode ser considerada uma situação que merece especial cuidado, na medida em que o primeiro conteúdo programático lecionado é relativo à geometria e inclui, por exemplo, ser capaz de visualizar o que aconteceria se um determinado sólido geométrico fosse cortado por um determinado plano, pelo que é necessário que os alunos mobilizem o raciocínio abstrato (RA). Esta forma de registo também facilita a constituição das primeiras díades, pois consegue-se perceber quais os alunos que podem, ou não, formar uma díade assimétrica e cujas capacidades e competências sejam complementares, ou seja, cujas ZDPs se intersectem. Assim, alunos que estejam na mesma posição não devem fazer parte da mesma díade, bem como os que estejam a uma grande distância, em termos de capacidades e competências, pois será mais difícil conseguirem estabelecer interações sociais dialógicas.

Desta forma, a análise dos desempenhos dos alunos ao IACC é um processo faseado e que envolve o preenchimento de três formas de registo que permitem ao professor/investigador organizar a informação proveniente desse e de outros instrumentos respondidos pelos alunos, para que este realize uma análise mais aprofundada, tomando opções adequadas e ajustadas às características, necessidades e interesses dos alunos. Para as decisões sobre a constituição das primeiras díades, as informações sobre o IACC serão conjugadas com as da TIP1, do Q1 e da observação, registada no DB do professor/investigador ou do professor.

Questão 3

Assumindo uma perspetiva desenvolvimentista, que padrões de desempenho esta análise permite identificar? Como se caracteriza cada um deles?

Analisar os desempenhos dos alunos, recolhidos ao longo dos 12 anos de vigência do projeto IC, afigurou-se uma tarefa complexa e desafiadora, uma vez que foram alvo de análise cerca de 600 turmas do ensino básico e secundário que participaram nesse projeto. Este estudo complementa a análise que foi anteriormente realizada, quando apenas se tinha acesso aos dados referentes a um número reduzido de turmas. Estas análises preliminares destinavam-se aos cursos e ações de formação sobre a utilização do IACC e a formação das primeiras díades. Também expande as análises que já se encontram publicadas em artigos ou teses de doutoramento (Machado et al., 2010; Ventura, 2012; Ventura et al., 2010), iluminando um aspeto importante deste projeto: a procura de formas mais rigorosas e adequadas para a explicação de um determinado fenómeno educativo ou ferramenta pedagógica, neste caso, o IACC.

Os padrões de desempenho foram elaborados de forma indutiva, a partir da análise dos desempenhos dos alunos das turmas que participaram no IC, o que se coaduna com a perspetiva desenvolvimentista (Piaget, 1936, 1971/2010). Conseguimos identificar estratégias de resolução (por exemplo, aritmética, geométrica, ou algébrica, entre outras) e inferir os processos de raciocínio subjacentes às mesmas (por exemplo, raciocínio preferencialmente analítico ou geométrico). Quanto às formas de pensamento apenas podemos afirmar que as utilizadas se referem ao pensamento matemático pela própria natureza das tarefas propostas neste instrumento e ao pensamento comum, quando os alunos não analisam as tarefas do ponto de vista matemático, referindo-se a elementos do senso comum como acontece, por vezes, nas Tarefas A e B.

A elaboração dos padrões de desempenho, para cada tarefa, seguiu uma lógica desenvolvimentista, sendo organizados do mais simples para o mais complexo. Considerou-se, para todas as tarefas, que o Padrão 0 estava relacionado com os desempenhos dos alunos que referissem que não sabiam resolver a tarefa proposta ou que era impossível resolvê-la. Assim, os Padrões A0, B0, C0, D0 e E0 dizem respeito a esse tipo de desempenhos. Embora no caso das Tarefas C e E não tenha existido nenhuma resposta deste padrão, por uma questão de coerência na elaboração dos padrões, considerou-se que nesta tarefa também era incluído, em termos de modelo de análise, esse padrão.

O número de padrões que emergiram para cada tarefa não é sempre o mesmo, uma vez que as Tarefas A, B, D e E são compostas por oito padrões de desenvolvimento e a Tarefa C por seis padrões de desenvolvimento. Dentro de cada padrão, existem níveis que também seguem uma lógica desenvolvimentista, ou seja, com um grau crescente de complexidade. Por exemplo, o Padrão C1 é composto por três níveis de desenvolvimento, sendo o primeiro nível o mais simples e o terceiro nível o mais complexo.

Relativamente à Tarefa A, os desempenhos dos alunos evidenciaram: desempenhos desconexos (Padrão A1); senso comum (Padrão A2); repetição de dados matemáticos do enunciado (Padrão A3); confirmação da notícia, repetindo dados do enunciado (Padrão A4); a notícia inclui dados incorretos (Padrão A5); aumento do número de assaltos (Padrão A6); e estratégia de resolução e resposta completas (Padrão A7). Destes, os Padrões A1 a A4 estão associados aos desempenhos que não revelaram que os alunos tinham mobilizado as capacidades e competências avaliadas (cor branca, ver Anexo 22). Os Padrões A5 e A6 referem-se aos desempenhos que ilustram uma fase de transição (cor cinzento claro, ver Anexo 22) e o Padrão A7 os que iluminam a mobilização das capacidades e competências avaliadas (cinzento escuro, ver Anexo 22).

Quanto à Tarefa B, os desempenhos dos alunos revelaram a existência de: desempenhos desconexos (Padrão B1); tentativa de explicação (Padrão B2); fuga ao problema (Padrão B3); estimativas (Padrão B4); criatividade (Padrão B5); persistência na tarefa (Padrão B6); e intuição matemática (Padrão B7). Os desempenhos que fazem parte dos Padrões B1 a B4 não evidenciaram a mobilização das capacidades e competências avaliadas (cor branca, ver Anexo 23), os que pertencem ao Padrão B5 encontravam-se numa fase de transição, onde se observa o recurso à criatividade (cor cinzento claro, ver Anexo 23) e os dos Padrões B6 e B7 evidenciaram a mobilização de duas das capacidades e competências avaliadas – intuição matemática e persistência na tarefa (cinzento escuro, ver Anexo 23).

Na Tarefa C emergiram desempenhos que se caracterizam por: elementos que não existem no modelo (Padrão C1); omissão do quadrado central (Padrão C2); número de pintas (desajustado ou ajustado) (Padrão C3); raciocínio concreto (Padrão C4); e raciocínio abstrato (Padrão C5). Destes, os Padrões C1 a C3 estão associados aos desempenhos que não evidenciaram a mobilização das capacidades e competências avaliadas (cor branca, ver Anexo 24), o Padrão C4 aos desempenhos que ilustram o recurso ao raciocínio concreto (cor cinzento claro, ver Anexo 24) e o Padrão C5 os que revelaram mobilizar o raciocínio abstrato (que corresponde ao cinzento escuro, ver Anexo 24).

No que respeita à Tarefa D, identificámos desempenhos que se caracterizam por: estratégias de resolução desadequadas (Padrão D1); formas desajustadas de utilizar a informação (Padrão D2); descrição do procedimento, sem operacionalização (Padrão D3); fórmulas matemáticas incorretas (Padrão D4); raciocínio adequado, mas um passo não controlado (Padrão D5); raciocínio adequado, mas detalhes incompletos ou desadequados (Padrão D6); e estratégia de resolução e resposta completas (Padrão D7). Os desempenhos que compõem os Padrões D1 a D4 não evidenciam a mobilização das capacidades e competências avaliadas (cor branca, ver Anexo 25), os que fazem parte do Padrão D5 e D6 encontram-se numa fase de transição, já resolvendo parte da tarefa, mas não toda e estando, alguns deles, na transição entre o raciocínio concreto e o abstrato (cor cinzento claro, ver Anexo 25) e os desempenhos que constituem o Padrão D7 iluminam a mobilização das capacidades e competências necessárias a uma resolução adequada desta tarefa (cinzento escuro, ver Anexo 25). Convém realçar que uma parte do que pretendíamos avaliar – preferência por um raciocínio analítico ou por um geométrico – pode ser avaliado mesmo nos primeiros padrões, ou seja, quando as estratégias de resolução e/ou os processos de raciocínio não se coadunam com o que era pedido nesta tarefa.

Por fim, os desempenhos característicos da Tarefa E evidenciam que existiu: desempenhos desconexos (Padrão E1); repetição do enunciado (Padrão E2); prejuízo (E3); nem lucro, nem prejuízo (E4); lucro diferente do adequado (Padrão E5); lucro adequado, mas justificação incompleta (Padrão E6); e lucro, com estratégia de resolução completa (Padrão E7). Destes, os Padrões E1 a E5 correspondem aos desempenhos que não revelaram a mobilização das capacidades e competências avaliadas, no que se refere ao conceito de lucro e às conexões com a vida quotidiana (cor branca, ver Anexo 26), o Padrão E6 ilumina os que se encontravam numa fase de transição, quanto a esses aspetos (cor cinzento claro, ver Anexo 26) e o Padrão E7 ilustra os desempenhos que evidenciaram a mobilização dessas capacidades e competências (cinzento escuro, ver Anexo 26). No entanto, à semelhança do que acontecia na Tarefa D, uma parte do que pretendíamos avaliar pode ser analisada desde os primeiros padrões – se os alunos preferiam uma abordagem global, ou uma abordagem passo-a-passo, quando resolviam esta tarefa.

Em síntese: esta análise permitiu-nos elaborar padrões de desempenho mais abrangentes, sustentados e com uma maior complexidade do que os que foram feitos anteriormente, o que nos possibilitou ter uma maior compreensão acerca das potencialidades deste instrumento nas práticas pedagógicas. Um efeito nítido desta análise ter maior profundidade foi termo-nos apercebido de que havia alguns melhoramentos a propor para as quantidades consideradas em algumas tarefas, pois as existentes podem permitir obter a resposta pretendida, mas através de processos de raciocínio desadequados. Por serem muito raros, estes casos apenas foram encontrados quando se analisaram, em conjunto, as cerca de 600 turmas que responderam ao IACC.

Questão 4

Como contribui o IACC para práticas, em aula, nomeadamente quanto à formação das primeiras díades, no início do ano letivo?

Como já foi mencionado anteriormente, a primeira semana de aulas assume-se como um elemento essencial para quem desenvolve práticas, em aula, segundo os princípios epistemológicos e pedagógicos do projeto IC (César, 2009, 2013a; Ventura, 2012). Desta forma, as informações provenientes da análise do IACC, conjugadas com as da TIP1, Q1 e observação, permitem tomar decisões sobre a formação das primeiras díades. Para isso, tem-se em consideração alguns elementos das teorias de Piaget (1923, 1924, 1947, 1971/2010) e Vygotsky (1932/1978, 1934/1962), nomeadamente, os conceitos de raciocínio concreto e abstrato, par mais competente, ou zona de desenvolvimento proximal (ZDP).

A análise dos desempenhos dos alunos no IACC permite ao professor/investigador dividir a turma em dois grandes grupos: os alunos que mobilizam o RC e os que mobilizam o RA. Este aspeto é importante, uma vez que está relacionado com o nível de desenvolvimento dos alunos, ou seja, é de esperar que a partir dos 14/15 anos os alunos já consigam mobilizar o RA, embora alguns já tenham acesso a este raciocínio de forma generalizada, antes dessa idade. Para além disso, atendendo aos conteúdos programáticos que se pretendem lecionar num determinado ano de escolaridade, é importante obter esse tipo de informação, pois alguns conteúdos programáticos têm subjacentes elevados níveis de abstração. Assim, o IACC permite ao professor conhecer as capacidades e competências dos alunos, nomeadamente as que mais diretamente se referem ao que está previsto nos currículos prescritos. Se, de acordo com Piaget (1947), é de esperar que os alunos venham a atingir o RA, as práticas, nas aulas de Matemática, devem favorecer a passagem do RC para o RA para os alunos que ainda não mobilizam esta forma de raciocínio e devem permitir, aos que já mobilizam o RA, no início do ano letivo, desenvolver a capacidade de formalização matemática clara e rigorosa.

Também permite identificar os alunos que revelam sentido crítico em relação a dados matemáticos, persistência na tarefa, criatividade, intuição matemática, preferência por raciocínios analíticos ou geométricos, bem como a forma de abordar um problema (passo-a-passo ou global). Esta informação permite elaborar, adaptar ou selecionar tarefas matemáticas adequadas às capacidades e competências que os alunos de uma determinada turma já mobilizam, bem como às que precisam de vir a desenvolver, de acordo com o currículo prescrito e os conteúdos programáticos que os alunos deverão apropriar. Com este tipo de informação o professor pode não só diversificar a natureza das tarefas propostas, mas adequar as instruções de trabalho e as situações a que as mesmas se referem às características, interesses e necessidades dos alunos, incluindo não apenas as informações recolhidas com o IACC, mas também as que provêm da

TIP1, que indicam se a representação social dos alunos sobre a Matemática é positiva ou negativa, tradicional ou inovadora. A conjugação desta informação com a do Q1 permite, ainda, ter em consideração os interesses dos alunos, bem como a representação social deles próprios, enquanto aprendentes de Matemática. Assim, as informações provenientes do IACC, TIP1, Q1 e observação do professor, ou do professor/investigador, permitem conjugar elementos de índole cognitiva, social e emocional, considerando os alunos como um todo, multifacetado e complexo, como é próprio de qualquer ser humano.

No que se refere mais especificamente às informações a que se tem acesso através do IACC, o professor ou professor/investigador deverá colocar numa mesma díade os alunos que mobilizam capacidades e competências complementares. Por exemplo, se um aluno mobiliza a intuição matemática, mas não o sentido crítico e com outro acontece o contrário, estes dois alunos poderão beneficiar ambos do processo interativo se trabalharem em conjunto, de forma colaborativa. De modo semelhante, um aluno que prefira raciocínios geométricos e outro que mostre sentir-se mais confortável quando recorre a raciocínios analíticos, têm vantagens nítidas ao trabalharem na mesma díade, pois ambos podem desenvolver capacidades e competências que ainda não mobilizam. Alguns exemplos destas vantagens foram amplamente discutidos em publicações e trabalhos da equipa do IC (César, 2003, 2009, 2013a; César & Santos, 2006; Machado, 2008; Machado & César, 2012a, 2013a, in press b).

O que acima descrevemos facilita que, quando confrontados com tarefas matemáticas adequadas às suas características, necessidades e interesses, os alunos consigam desenvolver outras capacidades e competências, melhorando também os desempenhos matemáticos. A adequação na formação das díades, o contrato didático negociado e a natureza das tarefas devem permitir aos dois alunos de cada díade atuarem, alternadamente, como par mais competente (Vygotsky, 1934/1962), trabalhando na ZDP de cada um e, assim, promover não só as suas aprendizagens (matemáticas), mas também o desenvolvimento. Numa época em que os alunos passam muitas horas, durante o dia, na escola, que as práticas pedagógicas promovam o desenvolvimento, em vez de lhe criarem barreiras, ou mesmo de o bloquearem, parece-nos um aspeto essencial e ao qual não tem sido atribuída suficiente importância, sobretudo nos últimos documentos de política educativa (ME, 2011).

Nesta investigação selecionámos uma turma de 9.º ano de escolaridade do ensino básico, que apresentava alguns desafios, ao professor/investigador e, para nós, enquanto investigadores que elaboravam uma análise baseada no IACC e nos seus contributos para as práticas pedagógicas. Através deste exemplo procurámos desocultar as tomadas de decisão do professor/investigador na formação das primeiras díades, recorrendo à informação proveniente do IACC e dos restantes instrumentos usados na primeira semana de aulas. Este exemplo permite compreender, de forma mais prática, baseada em evidências, como as decisões referentes às primeiras díades influenciam os desempenhos matemáticos dos alunos e como, posteriormente, os diversos reajustamentos que vão sendo efetuados, quando se formam outras díades e se propõem novas tarefas matemáticas, configuram as trajetórias de participação ao longo da vida (César, 2013a), nomeadamente na Escola. Também ilustram que as decisões, referentes às primeiras díades e baseadas nas informações recolhidas com o IACC, não se limitam às relacionadas com os diversos pares, mas incluem decisões sobre a distribuição espacial das díades, nas sala de aula e em cada mesa que estas ocupam. Assim, são as decisões sustentadas que permitem vir a proporcionar aos alunos uma educação matemática de qualidade. A falta de informação, o improviso, tem muitas vezes preços muito caros para quem aprende e vai vivenciando insucesso escolar acumulado, como tantas vezes acontece nesta disciplina.

Questão 5

Como é que os conhecimentos sobre a turma e cada aluno, obtidos com o IACC, configuram a seleção, adaptação e elaboração de tarefas matemáticas?

Quando analisamos o IACC, a informação a que podemos ter acesso está relacionada com as capacidades e competências que cada aluno já consegue mobilizar e as que precisa desenvolver, através da interação com um par mais competente (Vygotsky, 1934/1962), quanto a essas funções mentais. Assim, como já foi referido, o primeiro tipo de decisão do professor/investigador refere-se à constituição das primeiras díades. Também é relevante elaborar, adaptar e/ou selecionar tarefas matemáticas que consigam envolver os alunos nas atividades matemáticas, ao mesmo tempo que facilitam o desenvolvimento das capacidades e competências que se previa, desde o início do ano letivo, que os alunos desenvolvessem.

Quando se pretende desenvolver determinadas capacidades e competências é necessário ter em consideração vários elementos, como a natureza das tarefas propostas, as instruções de trabalho, as formas de atuação e de reação, em aula ou a comunicação matemática que se promove entre alunos, bem como entre estes e o professor. Contudo, é preciso estar ciente de que uma determinada tarefa matemática não desenvolve, de forma imediata, uma determinada capacidade e competência. Para que isso possa vir a acontecer, é fundamental planear um conjunto de tarefas matemáticas que permitam o desenvolvimento de capacidades e competências e que o professor vá monitorizando os progressos que já se observam, para se aperceber se os alunos conseguiram, ou não, mobilizar aquelas que pretendia desenvolver.

Nesta tese recorremos, enquanto exemplo, a uma turma de 9.º ano de escolaridade do ensino básico que nos permitiu desocultar algumas tomadas de decisão em relação à natureza das tarefas matemáticas propostas, bem como às formas de atuação durante o trabalho realizado em aula. Iluminámos uma unidade didática, relativa ao conteúdo programático das Probabilidades, na qual se desocultaram as opções que o professor/investigador tomou para conseguir que os alunos se envolvessem nas atividades matemáticas e desenvolvessem as capacidades e competências previstas, tendo em conta as informações recolhidas através do IACC.

Um dos elementos que queremos salientar foi a opção por tarefas matemáticas com marcação social (Doise & Mugny, 1981), uma vez que o recurso a um pacote de chocolates *M&M's*, nas Probabilidades, ou a utilização de fotografias da própria escola como forma de abordar o estudo dos critérios de paralelismo e perpendicularidade no espaço, facilitou a atribuição de sentidos matemáticos aos conhecimentos apropriados, bem como o desenvolvimento de capacidades e competências essenciais numa sociedade em constante mudança. Para além disso, estes dois exemplos de tarefas matemáticas promoveram uma educação matemática de qualidade, como é desejável.

Em síntese: os conhecimentos a que o professor/investigador pode ter acesso através da análise do IACC permitem adequar as práticas, em aula, nomeadamente no que se refere à elaboração, adaptação e seleção de tarefas matemáticas, uma vez que estas se configuram como ferramentas facilitadoras na apropriação dos conhecimentos matemáticos e na mobilização ou desenvolvimento de capacidades e competências (matemáticas). Para além disso, a construção de espaços/tempos dialógicos (César, 2013a) permite colocar em ação formas de pensamento (matemático) diversificadas através do recurso a argumentações sustentadas e a mecanismos de *inter* e *intra-empowerment* (César, 2013a). Desta forma, promove-se a equidade na educação matemática, bem como a operacionalização de princípios de uma educação (mais) intercultural e inclusiva.

Desenvolvimento pessoal e profissional do professor e investigador

Nos diversos contextos, cenários e situações com os quais somos confrontados na trajetória de participação ao longo da vida (César, 2013a), a aprendizagem e o desenvolvimento de capacidades e competências são algo desejável. São esses fenómenos de mudança, adaptação e readaptação ao novo, ao desconhecido, que nos permitem evoluir como seres humanos, nomeadamente enquanto profissionais, em especial no domínio da Educação. Assim, ao realizarmos esta investigação sabemos que existe uma grande diferença, em termos pessoais e profissionais, do investigador, se tivermos em consideração a dimensão tempo: iniciou este estudo e agora, que termina esta etapa, o que culmina com a escrita e a discussão pública deste trabalho. Podemos afirmar que, nos diversos momentos desta investigação, houve mudança, desenvolvimento e aprendizagem. Uns mais suaves, outros mais duros e sofridos, uns de que nos apercebemos mais depressa, outros de que nos vamos consciencializando agora e, ainda, alguns de que nos damos conta através de comentários, críticas e discussões que temos vindo a realizar em eventos da especialidade, quando apresentamos resultados preliminares desta investigação. Mas reconhecemos que este é o percurso próprio de nos assumirmos como investigadores – ou aprendizes de investigador – ou seja, de um processo complexo e exigente, que pretendíamos que atingisse a qualidade desejável num trabalho desta índole.

Esta tese representou uma oportunidade única e privilegiada para operacionalizarmos alguns aspetos que ambicionámos quando concluímos o Mestrado em Educação, na especialização de Didática da Matemática, em 2009. De entre eles, podemos destacar o poder estar dedicado, de forma exclusiva, à investigação que optámos por realizar, através da atribuição de uma bolsa de doutoramento pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT). A decisão de interromper, por um período de quatro anos, a docência nos ensinos básico e secundário foi algo bastante pensado e refletido, uma vez que esta é uma componente bastante marcada da identidade do investigador e é algo que nos faz sentir realizados. Mas o gosto pela investigação, que emergiu quando começámos a fazer parte da equipa do projeto IC, levou-nos a considerar essa hipótese como desejável. Desta forma, atendendo às especificidades da investigação que pretendíamos realizar e pela riqueza e extensão do *corpus* empírico do projeto IC, pareceu-nos – e, hoje, pensamos que ajustadamente – que esta só poderia ser realizada, com a qualidade e rigor que pretendíamos, se estivéssemos dedicados exclusivamente a ela. Assim, durante estes últimos anos, a *I-*

position como investigador teve um papel dominante e a *I-position* como professor foi menos dominante (Hermans, 2001), na arquitetura do *dialogical self* que nos permitiu concretizar este trabalho.

Esta primeira mudança permitiu-nos desenvolver novas capacidades e competências, conjugando-as com algumas que já mobilizávamos, mas que atingiram uma maior profundidade, nomeadamente: (1) aprender a gerir o tempo, dividindo-o pelas várias tarefas que requeriam atenção e empenho, a curto, médio e a longo prazo, pois quatro anos podem parecer muito tempo, mas não o são, quando há tanto trabalho para fazer; (2) resistir à frustração quando não vemos o trabalho a avançar ao ritmo desejado, quando não se encontra a bibliografia de que se precisa naquele momento, ou quando o dinheiro não chega para participar em eventos da especialidade onde gostaríamos de discutir este trabalho e outros, de outros autores, que nos proporcionariam um conhecimento mais alargado dos fenómenos educativos; (3) aprender a ser (mais) persistente e resiliente para conseguir atingir algo a que nos propúnhamos; (4) melhorar a capacidade de observação, de análise e de rigor na escrita – aspetos que são a tarefa de uma vida, pois há que tentar chegar ainda mais longe; e (5) melhorar a capacidade de nos distanciarmos de um projeto que conhecíamos, mas onde só participámos na fase final, para melhor compreendermos determinados fenómenos em jogo neste investigação, ou seja, desenvolver mais competências, enquanto investigador.

Outros elementos que contribuíram para o desenvolvimento pessoal e profissional do investigador foram, sem dúvida, os contactos com especialistas de renome internacional durante períodos de tempo mais alargados do que aqueles que, habitualmente, se pode ter em eventos da especialidade, como foi o caso do trabalho desenvolvido com o Professor Paul Cobb (Nashville, EUA) e Professora Anne-Nelly Perret-Clermont (Neuchâtel, Suíça), bem como com as equipas que eles coordenam. A estadia nos EUA, que durou dois meses, permitiu-nos alargar e aprofundar o quadro de referência teórico relativo ao domínio da Didática da Matemática e Metodologia de Investigação, bem como experienciar situações de aprendizagem bastante diversificadas, incluindo participar em reuniões e sessões de trabalho da equipa do Professor Paul Cobb, participar em aulas do programa doutoral em Educação Matemática promovidas naquela instituição (Peabody College, Vanderbilt University), nas quais se discutiam e aprofundavam aspetos relacionados com as teorias nesse domínio científico e as mudanças que ocorreram nas últimas duas décadas. Um bónus extra consistiu em melhorar aspetos relativos à língua inglesa (vocabulário, fluência, entre outros) que possibilitaram obter, depois de regressar a Portugal, uma certificação nesta língua.

A estadia em Neuchâtel, que durou duas semanas e meia, foi sediada no *Institut de Psychologie et Éducation,* da Universidade de Neuchâtel, e possibilitou-nos um aprofundamento do quadro de referência teórico relativo à aprendizagem e ao desenvolvimento. À semelhança do que aconteceu nos EUA, as oportunidades de aprendizagem foram muitas. Desde a aprendizagem de uma língua que não nos era muito familiar (francês) até à discussão de aspetos teóricos relativos à psicologia da educação, o que permitiu que encarássemos esta estadia como algo único e que só conseguimos concretizar por estarmos dedicados, de forma exclusiva, ao doutoramento. Convém salientar que sendo a equipa com que trabalhámos nos EUA especializada em Educação Matemática e a da Suíça em Psicologia da Educação, estas duas estadias permitiram-nos contactar com especialistas e investigações destes dois domínios, que são pedras angulares desta tese de doutoramento. Assim, a complementaridade destas duas experiências de aprendizagem foi uma mais valia para o desenvolvimento pessoal e profissional do investigador.

Em síntese: ao longo destes quatro anos, a trajetória de participação ao longo da vida (César, 2013a) foi sendo, sucessivamente, enriquecida pelas aprendizagens realizadas, em que os momentos de desânimo foram claramente suplantados pelos de entusiasmo, em que alguns convites para participar em reuniões, conferências ou publicações constituíram desafios que também permitiram enriquecer este trabalho e em que, sobretudo, a vontade de trabalhar em investigação saiu reforçada.

Trajetórias futuras

Apesar de termos acabado uma etapa da vida profissional, não concluímos a jornada pelo mundo da Educação Matemática, um domínio que, por ser complexo e aliciante, nos fascina e nos faz ter vontade de continuar. Neste momento, resta-nos perguntar: Continuar para onde? Com que direção? Contudo, uma certeza é transversal a qualquer das trajetórias de participação que possamos tomar: queremos continuar a trabalhar colaborativamente, a partilhar sentidos, a refletir e a confrontar as formas de pensamento que mobilizamos, pois acreditamos que nada se constrói isoladamente, no vazio social, mas sim em conjunto, em colaboração com os outros, em sistemas de partilha de sentidos e significados, de vivências e conhecimentos.

Tendo em conta a presente investigação, e uma vez que o domínio da Educação Inclusiva, nomeadamente da educação de alunos cegos, é algo que nos interessa e onde já fizemos formação, em cursos de Braille e de técnicas de orientação e mobilidade de pessoas cegas, gostaríamos, de estudar os contributos do IACC na elaboração de adaptações curriculares, destinadas a alunos cegos, que frequentam escolas públicas do ensino regular diurno. Para tal, gostaríamos de tornar o IACC adaptado às características desses alunos para, posteriormente, ter acesso, através da análise dos seus desempenhos, aos processos de raciocínio e formas de pensamento que utilizam, confrontando-as com as usadas pelos alunos que não são cegos, identificando semelhanças e diferenças e aprendendo com elas a tornar a Educação Matemática adequada a todos os alunos.

Através deste trabalho, pudemos ter acesso ao vasto espólio do projeto IC e perceber a riqueza do mesmo. Assim, gostaríamos de analisar os processos interativos que emergem, nos vários momentos, em algumas das aulas de Matemática do projeto IC e que foram filmadas nos 12 anos de vigência do mesmo. Desta forma, gostaríamos de perceber quais os contributos do trabalho colaborativo na construção de sentidos matemáticos atribuídos pelos alunos e na promoção de uma educação matemática de elevada qualidade, ou seja, como é que foram operacionalizadas as orientações curriculares, tendo como base o trabalho em díade e/ou em pequenos grupos, bem como as discussões gerais. Gostaríamos de analisar as interações sociais dialógicas que se estabeleceram no início de cada aula (motivação do professor para o envolvimento dos alunos nas atividades matemáticas, que Cobb e Jackson (2011) e Jackson e seus colaboradores (2011, 2012) designam por *launch*), durante o trabalho em díade e na discussão geral, tentando compreender quais os padrões interativos facilitadores da apropriação de conhecimentos (matemáticos) e da mobilização e desenvolvimento de capacidades e competências (matemáticas).

Por último, gostaríamos que este trabalho facilitasse o desenvolvimento de outros projetos de investigação em Educação Matemática, por forma a que promovessem o acesso ao sucesso escolar dos alunos nesta disciplina. Nesse sentido, gostaríamos de conceber e pôr em prática mais cursos e ações de formação que permitissem aos professores terem acesso ao que este trabalho permitiu aprender e ao que o projeto IC trouxe de inovador para a Educação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: A experiência do projecto MAT789*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM). [Tese de doutoramento, apresentada na Universidade de Lisboa (UL)]

Abrantes, P. (1996). Interpretação dos níveis de literacia: O domínio quantitativo. In A. Benavente, A. Rosa, A. F. Costa, & P. Ávila (Eds.), *A literacia em Portugal. Resultados de uma pesquisa extensiva e monográfica* (pp. 94-102). Lisboa: Instituto de Ciências Sociais da Universidade de Lisboa.

Abrantes, P. (2002). Introdução: A avaliação das aprendizagens no ensino básico. In P. Abrantes, & F. Araújo (Eds.), *Reorganização curricular do ensino básico: Avaliação das aprendizagens, das concepções às práticas* (pp. 9-15). Lisboa: Ministério de Educação/Departamento da Educação Básica (ME/DEB).

Abrantes, P. (2003). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Quadrante, 12*(2), 95-110.

Abrantes, P. (2005). *Viagem de ida e volta* (2.ª ed.). Lisboa: APM.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999*). A matemática na educação básica.* Lisboa: ME/DEB.

Abreu, G. de, Bishop, A., & Presmeg, N. C. (2002). *Transitions between contexts of mathematical practices*. Cambridge: Kluwer Academic Publishers.

Abreu, G. de, Bishop, A., & Pompeu Jr., G. (1997). What children and teachers count as mathematics. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 233-264). Hove: Psychology Press.

Almeida, P. (2007). Aprendizagem e ensino da geometria. *Educação e Matemática*, *95*, 2-11.

Alonso, L. (2002). Integração currículo-avaliação: Que significados? Que constrangimentos? Que implicações?. In P. Abrantes, & F. Araújo (Eds.), *Reorganização curricular do ensino básico: Avaliação das aprendizagens, das concepções às práticas* (pp. 19-23). Lisboa: ME/DEB.

Alrø, H., Ravn, O., & Valero, P. (Eds.) (2010). *Critical mathematics education: Past, present and future. Festschrift for Ole Skovsmose.* Rotterdam: Sense Publishers.

Alrø, H., Skovsmose, O., & Valero, P. (2005). Culture, diversity and conflict in landscapes of mathematics learning. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the fourth conference of the European society for research in mathematics education (CERME 4)* (pp. 1141-1151). Sant Féliu de Gixols: Ramon Llull University & ERME.

Alves, I. (2006). Novos estudos psicométricos do teste D70. *Avaliação Psicológica*, *5*(2), 251-253.

Anastasi, A. (2003). *Testes psicológicos*. São Paulo: Editora Pedagógica Universitária.

Anastasi, A., & Urbina, S. (2000). *Testagem psicológica* (7.ª ed.). Porto Alegre: Artmed Editora.

Andrade, A. (2009). Interpretative research aiming at theory building: Adopting and adapting the case study design. *The Qualitative Report*, *14*(1), 42-60. Recuperado em janeiro 6, 2010, de http://www.nova.edu/sss/QR/QR14-1/diaz-andrade.pdf

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 33-52.

Apple, M. (1995). Taking power seriously: New directions in equity in mathematics education and beyond. In W. Secada, E. Fennema, & L. Adajian (Eds.), *New directions for equity in mathematics education* (pp. 329-348). Cambridge: Cambridge University Press.

Apple, M. (1999). What counts as legitimate knowledge? The social production and use of reviews. *Review of Educational Research*, *69*(4), 343-346.

Arbaugh, F., & Brown, C. A. (2005). Analyzing mathematical tasks: A catalyst for change?. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(6), 499-536.

Assembleia da República (AR) (1986). Lei n.º 46/86, de 14 de outubro: Lei de bases do sistema educativo. *Diário da República*, I Série, n.º 237. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda (INCM).

AR (2012). Decreto-lei n.º 139/2012, de 5 de julho. *Diário da república,* I Série, n.º 129. Lisboa: INCM.

Badalo, C. (2006). *Educação de adultos e ensino recorrente: Quando o desejo de ser se cruza com a razão* (Dissertação de mestrado, CdRom). Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (DEFCUL), Lisboa.

Badalo, C. (2012). *O regresso à escola na idade adulta: Reflexões e relatos dos participantes de um projecto de investigação-acção no ensino secundário recorrente* (Tese de doutoramento, CdRom). Instituto de Educação (IE), Lisboa.

Baker, M. (2003). Computer-mediated interactions for the co-elaboration of scientific notions. In J. Andriessen, M. Baker, & D. Suthers (Eds.), *Arguing to learn: Confronting cognitions in computer-supported collaborative learning environments* (pp. 47-70). Utrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bakhtin, M. (1929/1981). *The dialogical imagination* (M. Holquist, Ed.) (M. Holquist, & C. Emerson, Trads.). Austin: University of Texas Press. [Trabalho original publicado em russo, em 1929]

Bakhurst, D. (2007). Vygotsky's demons. In H. Daniels, M. Cole, & J. Wertsch (Eds.), *The Cambridge companion to Vygotsky* (pp. 50-76). Cambridge: Cambridge University Press.

Ball, D. L. (2001). Teaching with respect to mathematics and teaching. In T. Wood, B. S. Nelson, & J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 11-22). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ball, D. L., Goffney, I. M., & Bass, H. (2005). The role of mathematics instruction in building a socially just and diverse democracy. *The Mathematics Educator*, *15*(1), 2-6.

Bandura, A. (1962). *Social learning through imitation*. Lincoln, NE: University of Nebraska Press.

Bandura, A. (1977). *Social learning theory*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Barbosa, E., & Borralho, A. (2006). A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação: Um estudo de caso no 8.º ano de escolaridade. In *Actas do XVII SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM. [CdRom]

Barrelet, J.-M., & Perret-Clermont, A.-N. (Eds.) (1996). *Jean Piaget: Aprendiz e mestre* (F. Oliveira, Trad.). Lisboa: Instituto Piaget.

Baucal, A., Arcidiacono, F., & Budevac, N. (Eds.) (2011). *Studying interactions in different contexts: A qualitative view*. Belgrade: Institute of Psychology Belgrade.

Bauersfeld, H. (1993, Março). *Teachers pre and in-service education for mathematics teaching.* Comunicação apresentada no Seminaire sur la Representaflon, Université du Québec à Montreal, Canada.

Baxter, J. A., & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: Managing the dilemma of telling. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(1), 7-26.

Ben-Zeev, T., & Star, J. (2002). Intuitive mathematics: Theoretical and educational implications. Recuperado em abril 12, 2013, de https://www.msu.edu/~jonstar/papers/intuition.pdf

Bertau, M.-C. (2007). On the notion of voice: An exploration from a psycholinguistic perspective with development implications. *International Journal for Dialogical Science*, *2*(1), 133-161.

Binet, A., & Simon, T. (1904). Methodes nouvelles pour le diagnostic du niveau intellectuel des anormaux. *Année Psychologique*, *11*, 191-244.

Bishop, A. (2001). What values do you teach when you teach mathematics?. *Teaching Children Mathematics*, *7*(6), 346-349.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos* (M. J. Alvarez, S. dos Santos, & T. Baptista, Trads.). Porto: Porto Editora.

Bond, T., & Tryphon, A. (2009). Piaget and method. In U. Müller, J. Carpendale, & L. Smith (Eds.), *The Cambridge companion to Piaget* (pp. 171-199). Cambridge: Cambridge University Press.

Borasi, R. (1990). The invisible hand operating in mathematics instruction: Students' conceptions and expectations. In T. J. Cooney, & C. R. Hirsh (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (pp. 174-182). Reston, VA: NCTM.

Borges, I. (2009). *Alunos Surdos e a matemática: Dois estudos de caso, no 12.º ano de escolaridade do ensino regular*. Lisboa: APM. [Dissertação de mestrado apresentada no DEFCUL]

Borges, I., & César, M. (2009). Construir sentidos para aprender: O trabalho colaborativo e a natureza das tarefas enquanto ferramentas mediadoras das aprendizagens. In A. Estrela, L. Marmoz, R. Canário, J. Ferreira, B. Cabrito, N. Alves, ... P. Figueiredo (Eds.), *Actas do XVI colóquio da AFIRSE. Tutoria e mediação em educação: Novos desafios à investigação educacional*. Lisboa: Secção Portuguesa da AFIRSE. [CdRom]

Borges, I., & César, M. (2012). The way we work: Contributions of collaborative work to mathematics learning. *Quaderni di ricerca in didattica (Mathematics), 22, julho de 2012, Supplemento 1,* 198-201.

Borralho, A., & Barbosa, E. (2009). Exploração de padrões e pensamento algébrico. In I. Vale, & A. Barbosa (Eds.), *Patterns-multiple perspectives and contexts in mathematics education* (pp. 59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viano do Castelo.

Borralho, A., & Barbosa, E. (2011). Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In *Atas da XII conferência interamericana de educação matemática – CIAEM* (pp. 1-10). Recife: CIAEM.

Borralho, A., & Neutel, S. (2011). O currículo nacional do ensino básico e a prática lectiva dos professores de matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, *56*, 227-246.

Boston, M., & Wolf, M. K. (2006). *Assessing academic rigor in mathematics instruction: The development of the instructional quality assessment toolkit. CSE Technical Report 672* (No. 672). Los Angeles, CA: National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing (CRESST).

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8.º ano*. Lisboa: APM. [Tese de doutoramento, apresentada na UL]

Bringuier, J.-C. (1977). *Conversations libres avec Jean Piaget*. Paris: Robert Laffont.

Brousseau, G. (1988). Le contract didatique: Le milieu. *Reserches en Didactiques des Mathématiques*, *9*(3), 309-336.

Bruner, J. (1978). The role of dialogue in language acquisition. In A. Sinclair, R. Jarvella, & W. J. M. Levelt (Eds.), *The child's conception of language* (pp. 241-256). New York: Springer-Verlag.

Burns, R. B. (2000). *Introduction to research methods* (4.ª ed.). London: Sage Publications.

Carvalho, C. (2001). *Interacção entre pares: Contributos para a promoção de desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico, no 7.º ano de escolaridade*. Lisboa: APM. [Tese de doutoramento, apresentada na UL]

Carvalho, C., & César, M. (1996). Concepções de futuros professores sobre os professores, os alunos e a matemática: Um estudo exploratório. *Revista de Educação*, *VI*(1), 63-70.

César, M. (1994). *O papel da interacção entre pares na resolução de tarefas matemáticas: Trabalho em díade vs. trabalho individual em contexto escolar* (Tese de doutoramento, documento policopiado). DEFCUL, Lisboa.

César, M. (2000a). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: A investigação contextualizada. In J. P. Ponte, & L. Serrazina (Eds.), *Educação* *matemática em Portugal, Espanha e Itália: Actas da escola de verão em educação matemática, 1999* (pp. 5-46). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação - Secção de Educação Matemática (SPCE-SEM).

César, M. (2000b). Interacções na aula de matemática: Um percurso de 20 anos de investigação e reflexão. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. P. da Ponte, J. M. Matos, & L. Menezes (Eds.), *Interacções na aula de matemática* (pp. 13-34). Viseu: SPCE-SEM.

César, M. (2001). E o que é isso de aprender?: Reflexões e exemplos de um processo complexo. In I. Lopes, J. Silva, & P. Figueiredo (Eds.), *Actas do ProfMat2001* (pp. 103-109). Vila Real: APM.

César, M. (2003). A escola inclusiva enquanto espaço-tempo de diálogo de todos e para todos. In D. Rodrigues (Ed.), *Perspectivas sobre a inclusão: Da educação à sociedade* (pp. 117-149). Porto: Porto Editora.

César, M. (2007). Dialogical identities in students from cultural minorities or students categorised as presenting SEN: How do they shape learning, namely in mathematics?. In ScTIG Group (Eds.), *2nd socio-cultural theory in educational research & practice conference proceedings*. Manchester: University of Manchester. [On-line: www.lta.education.manchester.ac.uk/ScTIG/index.htm]

César, M. (2008, Outubro). *Relatório sobre a disciplina de psicologia da educação.* (Relatório apresentado no âmbito do concurso para professora associada, documento policopiado). DEFCUL, Lisboa.

César, M. (2009). Listening to different voices: Collaborative work in multicultural maths classes. In M. César, & K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in multicultural settings* (pp. 203-233). Rotterdam: Sense Publishers.

César, M. (2010). Comment to Paola's conference: Dialogism in action. In V. Durand-Guerrier, S., Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. LXXXVII-XCIII). Lyon: INRP – Institut National de Recherche Pédagogique. [On-line: http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/plenary-2]

César, M. (2012). O papel das famílias nos processos de aprendizagem matemática dos alunos: Caminhos para a inclusão ou retratos de formas (subtis) de exclusão?. *Interacções*, *8*(20), 255-292.

César, M. (2013a). Collaborative work, dialogical self and inter-/intra-empowerment mechanisms: (Re)constructing life trajectories of participation. In M. B. Ligorio, & M. César (Eds.), *Interplays between dialogical learning and dialogical self* (pp. 151-192). Charlotte, NC: Information Age Publishing (IAP).

César, M. (2013b). Cultural diversity and regulatory dynamics of participation between schools and families. In P. Marsico, K. Komatzu, & A. Iannaccone (Eds.), *Crossing boundaries: Intercontextual dynamics between family and school* (pp. 35-81). Charlotte, NC: IAP.

César, M. (in press a). Travail collaboratif et processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques: L'importance des mécanismes de inter-et intra-empowerment. In M. Giglio, & F. Arcidiacono (Eds.), *Les interactions sociales en classe: Réflexions et perspectives.*

César, M. (in press b). Inter- and intra-empowerment mechanisms: Contributions to mathematical thinking and achievement. In A. Innaccone, & T. Zittoun (Eds.), *Activities of thinking in social spaces*. New York: Nova Science Publishers, Inc.

César, M., Camacho, H., & Marcelino, T. (1991). Desenvolvimento cognitivo e sucesso escolar num meio sócio-culturalmente desfavorecido. *Aprendizagem e Desenvolvimento*, *III(*13/14), 149-152.

César, M., & Esgalhado, A. (1991). Desenvolvimento cognitivo e percurso escolar. *Revista de Educação*, *II(*1), 57-61.

César, M., & Kumpulainen, K. (Eds.) (2009). *Social interactions in multicultural settings.* Rotterdam: Sense Publishers.

César, M., & Oliveira, I. (2005). The curriculum as a mediating tool for inclusive participation: A case study in a Portuguese multicultural school. *European Journal of Psychology of Education, XX*(1), 29-43.

César, M., & Santos, N. (2006). From exclusion into inclusion: Collaborative work contributions to more inclusive learning settings. *European Journal of Psychology of Education, XXI*(3), 333-346.

César, M., Torres, M., Rebelo, M., Castelhano, A., Candeias, N., Candeias, A., ... Costa, C. (2000). Interacções sociais e matemática: Ventos de mudança nas práticas de sala de aula. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. P. da Ponte, J. M. Matos, & L. Menezes (Eds.), *Interacções na aula de matemática* (pp. 47-83). Viseu: SPCE-SEM.

César, M., & Ventura, C. (2012). Regulatory dynamics between schools and families: Empowering families to facilitate mathematics learning. In J. Díez-Palomar, & C. Kanes (Eds.), *Family and community in and out of the classroom: Ways to improve mathematics' achievement* (2.ª ed.) (pp. 101-112). Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

Civil, M. (2002). Culture and mathematics: A community approach. *Journal of Intercultural Studies, 23*(2), 133-148.

Civil, M. (2007). Building on community knowledge: An avenue to equity in mathematics education. In N. Nasir, & P. Cobb (Eds.), *Improving access to mathematics: Diversity and equity in the classroom* (pp. 105-117). New York: Teachers College Press.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Clandinin, D. J., & Connelly, F. M. (1998). Personal experience methods. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 150-178). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interactions: Four case studies. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 25-130). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P. (2006). Mathematics learning as a social practice. In J. Maasz, & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 147-152). Rotterdam: Sense Publishers.

Cobb, P., & Hodge, L. L. (2007). Culture, identity, and equity in the mathematics classroom. In N. Nasir, & P. Cobb (Eds.), *Improving access to mathematics: Diversity and equity in the classroom* (pp. 159-171). New York: Teachers College Press.

Cobb, P., & Jackson, K. (2011). Towards an empirically grounded theory of action for improving the quality of mathematics teaching at scale. *Mathematics Teacher Education and Development, 13*(1), 6-33.

Cobb, P., & McClain, K. (2001). An approach for supporting teachers' learning in social context. In F.-L. Lin, & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 207-231). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, *10*(1&2), 113-163.

Cohen, L., Manion, L., & Morrisson, K. (2001). *Research methods in education* (5.ª ed.). London and New York: Routledge/Falmer.

Coll, C. (1994). *Aprendizagem escolar e construção do conhecimento*. Porto Alegre: ArtMed Editora.

Cornelius, L. L., & Herrenkohl, L. R. (2004). Power in the classroom: How the classroom environment shapes students' relationships with each other and with concepts. *Cognition and Instruction*, *22*(4), 467-498.

Cortesão, L. (2002). Formas de ensinar, formas de avaliar: Breve análise das práticas correntes de avaliação. In P. Abrantes, & F. Araújo (Eds.), *Reorganização curricular do ensino básico: Avaliação das aprendizagens, das concepções às práticas* (pp. 37-42). Lisboa: ME/DEB.

Cortesão, L. (2009). Cidadania(s) em sociedades multiculturais: (Im)possibilidades para a educação?. In M. Sanches (Ed.), A. Seiça, A. M. Bettencourt, F. Veiga, I. Davies, J. Pintassilgo, ... R. Vieira, *A escola como espaço social: Leituras e olhares de professores e alunos* (pp. 9-22). Porto: Porto Editora.

Courela, C. (2007). *Começar de novo: Contributos de um currículo em alternativa para percursos de vida inclusivos, de estudantes adultos. A mediação dos trabalhos de projecto colaborativos desenvolvidos em educação ambiental* (Tese de doutoramento, CdRom). DEFCUL, Lisboa.

Courela, C., & César, M. (2012). Inovação educacional num currículo emancipatório: Um estudo de caso de um jovem adulto. *Currículo sem Fronteiras*, *12*(2), 326-363.

Cronbach, J. C. (1970). *Essentials of psychological testing* (3.ª ed.). New York: Harper & Row Publishers.

Cunha, M. V. (2008). *Psicologia da educação*. Rio de Janeiro: Editora Lamparina.

D'Ambrósio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pegagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *5*(1), 44-48.

D'Ambrósio, U. (2002). Etnomatemática: Um enfoque antropológico da matemática e do ensino. In M. Ferreira (Ed.), *Idéias matemáticas de povos culturalmente distintos*. São Paulo: Global.

D'Ambrósio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação e Pesquisa*, *31*(1), 99-120.

Daniels, H. (Ed.) (1998). *An introduction to Vygotsky* (2.ª ed.). London: Routledge.

Daniels, H. (2001). *Vygotsky and pedagogy*. London: Routledge.

Daniels, H. (2008). *Vygotsky and research*. Oxon and New York: Routledge.

Daniels, H., Cole, M., & Wertsch, J. (Eds.) (2007). *The Cambridge companion to Vygotsky.* Cambridge: Cambridge University Press

Davis, E. A., & Miyake, N. (2004). Explorations of scaffolding in complex classroom system. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(3), 265-272.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Davydov, V., & Kerr, S. (1995). The influence of L. S. Vygotsky on education theory, research, and practice. *Educational Researcher*, *24*(3), 12-21.

Dehaene, S. (2009). Origins of mathematical intuition: The case of arithmetic. *Annals of the New York Academy of Sciences, 1156*, 232-259

Denzin, N. K. (2002). The interpretative process. In A. Haberman, & M. Miles (Eds.), *The qualitative researchers companion* (pp. 349-366). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.) (1994). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1998). Entering the field of qualitative research. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 1- 34). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: DEB.

Dewey, J. (1897/2008). *My pedagogic creed*. Recuperado em fevereiro 24, 2012, de http://www.infed.org/archives/e-texts/e-dew-pc.htm [Originalmente publicado em *The School Jounal*, *LIV*(3), 77-80]

Dias, E. (2008). *Trabalho de projecto em estatística: Contributos do trabalho colaborativo para as práticas de uma turma de 10.º ano de escolaridade* (Dissertação de mestrado, CdRom). DEFCUL, Lisboa.

Dickens, W. T., & Flynn, J. R. (2006). Black Americans reduce the racial IQ gap: Evidence from the standardization samples. *Psychological Science, 17*, 913-920.

Dillenbourg, P. (1999). Introduction: What do you mean by "collaborative learning"?. In Dillenbourg, P. (Ed.), *Collaborative learning: Cognitive and computacional approaches* (pp. 1-19). Amesterdam: Pergamon/EARLI.

Doise, W., & Mugny, G. (1981). *Le developpment social de l'intelligence*. Paris: Interéditions.

Doise, W., Mugny, G., & Perret-Clermont, A.-N. (1975). Social interaction and the development of cognitive operations. *European Journal of Social Psychology*, *5*(3), 367-383.

Doise, W., Mugny, G., & Perret-Clermont, A.-N. (1976). Social interaction and cognitive development: Further evidence. *European Journal of Social*

Psychology, *6*(2), 245-247.

Edwards, A. (2007). An interesting resemblance: Vygotsky, Mead, and American pragmatism. In H. Daniels, M. Cole, & J. Wertsch (Eds.), *The Cambridge companion to Vygotsky* (pp.77-100). Cambridge: Cambridge University Press.

Eisenhardt, K. M. (1989). Building theories from case study research. *Academic of Management Review*, *14*(4), 532-550. Recuperado em janeiro 6, 2010, de http://pages.cpsc.ucalgary.ca/~sillito/cpsc-601.23/readings/eisenhardt-1989.pdf

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3.ª ed.) (pp. 119-161). New York: Macmillan Publishing Company.

Favilli, F., César, M., & Oliveras, M. L. (2004). *Projecto IDMAMIM: Matemática e intercultura.* Pisa: Universidade de Pisa. [3 CdRoms: La Zampoña, Os Batiques e Las Alfombras]

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das aprendizagens: Desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa: Texto Editora.

Fink, A. (1995). *How to analyse survey data*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Flanagan, D. P., & Kaufman, A. S. (2004). *Essentials of WISC-IV assessment*. New York: Wiley.

Freeman, F. S. (1976). *Teoria e prática dos testes psicológicos.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Freire, P. (2003). *Pedagogia da autonomia* (26.ª ed.). São Paulo: Paz e Terra.

Freire, P. (2010). *Pedagogia do oprimido* (49.ª ed.). São Paulo: Paz e Terra.

Foucault, M. (1982). The subject and power. *Critical Inquiry*, *8*(4), 777-795.

Fox, E., & Riconscente, M. (2008). Metacognition and self-regulation in James, Piaget and Vygotsky. *Educational Psychology Review*, *20*(4), 373-389.

Furinghetti, F., Matos, J. M., & Menghini, M. (2013). From mathematics and education, to mathematics education. In A. B. M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 273-302). New York: Springer.

Gabinete de Estatística e Planeamento da Educação (GEPE) (2011). *Educação em números: Portugal 2011.* Lisboa: GEPE.

Gall, M., Borg, W., & Gall, J. (1996). *Educational research: An introduction* (6.ª ed.). New York: Longman Publishers USA.

Gaspar, M. I., & Roldão, M. C. (2007). *Elementos do desenvolvimento curricular*. Lisboa: Universidade Aberta.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2005). A framework for teaching and assessing reasoning about variability. *Statistics Education Research Journal, 4(1), 92-99.* [On-line: http://www.stat.auckland.ac.nz/serj]

Garrison, A. L. (2011, Setembro). *The cognitive demand of mathematical tasks: Investigating links to teacher characteristics and contextual factors.* Comunicação apresentada na Society for Research in Educational Effectiveness, Washington, DC. Recuperado em novembro 20, 2011, de http://peabody.vanderbilt.edu/Documents/pdf/tl/Garrison_SREE_2011.pdf

Gerdes, P. (1999). *Geometry from Africa: Mathematical and educational explorations.* Washington DC: The Mathematical Association of America.

Gerdes, P. (2007). *Etnomatemática: Reflexões sobre a diversidade cultural.* Ribeirão: Edições Húmus.

Gerdes, P. (2013). *Viver a matemática: Desenhos de Angola*. Ribeirão: Edições Húmus.

Giménez, J., Santos, L., & Ponte, J. P. (Eds.) (2004). *La actividad matemática en la aula: Homenaje a Paulo Abrantes*. Barcelona: Graó.

Gimeno, J. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática* (E. Rosa, Trad.). Porto Alegre: ArtMed.

Goldenberg, E. P. (1998a). "Hábitos de pensamento": Um princípio organizador para o currículo (I). *Educação e Matemática*, *47*, 31-44.

Goldenberg, E. P. (1998b). "Hábitos de pensamento": Um princípio organizador para o currículo (II). *Educação e Matemática*, *48*, 37-44.

Gonçalves, T. (2010). Investigar em educação: Fundamentos e dimensões da investigação qualitativa. In M. G. Alves, & N. Azevedo (Eds.), *Investigar em educação: Desafios da construção do conhecimento e da formação de investigadores num campo multi-facetado* (pp. 39-63). Óbidos: Várzea da Rainha Impressores.

Gorgorió, N., & Planas, N. (2005). Social representations as mediators of mathematics learning in multiethnic classrooms. *European Journal of Psychology of Education*, *XX*(1), 91-104.

Gouveia-Pereira, M., Pedro, I., Amaral, V., Martins, M. A., & Peixoto, F. (2000). Dinâmicas grupais na adolescência. *Análise Psicológica*, *18*(2), 191-201.

Gresalfi, M. S., & Cobb, P. (2011). Negotiating identities for mathematics teaching in the context of professional development. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 270-304.

Grossen, M. (2001, Agosto). *Constructing meanings and context in teacher-student interactions*. Conferência plenária apresentada na 9th EARLI Conference, Suíça.

Grossen, M., & Py, B. (1997). *Pratiques sociales et médiations symboliques*. Berna: Peter Lang.

Guba, E., & Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of quality research* (pp. 105-117). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Guba, E., & Lincoln, Y. S. (1997). Naturalistic and rationalistic enquiry. In J. Keeves (Ed.), *Educational research, methodology, and measurement: An international handbook* (pp. 86-91). New York: Pergamon.

Guenther, Z., & Rondini, C. (2012). Capacidade, dotação, talento, habilidades: Uma sondagem da conceituação pelo ideário dos educadores. *Educação em Revista*, *28*(1), 237-266.

Gutiérrez, R. (2007). (Re)defining equity: The importance of a critical perspective. In N. Nasir, & P. Cobb (Eds.), *Improving access to mathematics: Diversity and equity in the classroom* (pp. 37-50). New York: Teachers College Press.

Hamido, G. (1996). *(Re)pensar o ensino para ensinar a pensar* (Dissertação de mestrado, CdRom). Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Coimbra, Coimbra.

Hamido, G. (2005). *Meta-análise do processo de (re)construção colectiva de um projecto curricular de formação de professores* (Tese de doutoramento, CdRom). DEFCUL, Lisboa.

Hamido, G. (2007). A escola, ecologia viva e reflexiva: O poder de mudar. *Interacções*, *3*(7), 141-178. [On-line: http://revistas.rcaap.pt/interaccoes/issue/archive]

Hamido, G., & César, M. (2009). Surviving within complexity: A meta-systemic approach to research on social interactions in formal educational scenarios. In K. Kumpulainen, C. Hmelo-Silver, & M. César (Eds.), *Investigating classroom interactions: Methodologies in action* (pp. 229-262). Rotterdam: Sense Publishers.

Hammond, J., & Gibbons, P. (2001). What is scaffolding?. In J. Hammond (Ed.), *Scaffolding: Teaching and learning in language and literacy education* (pp. 13-26). Newton: Primary English Teaching Association.

Hand, V. (2012). Seeing culture and power in mathematical learning: Toward a model of equitable instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1&2), 233-247.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança: O trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna.* Lisboa: McGraw-Hill.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and students cognition: Classroom-based factors that support ad inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524-549.

Hermans, H. (1996). Voicing the self: From information processing to dialogical interchange. *Psychological Bulletin*, *119*(1), 31-50.

Hermans, H. (2001). The dialogical self: Toward a theory of personal and cultural positioning. *Culture and Psychology, 7*(3), 323-366.

Hermans, H. (2003). The construction and reconstruction of a dialogical self. *Journal of Constructivist Psychology*, *16*, 89-130.

Hermans, H., Kempen., H., & van Loon, R. (1992). The dialogical self: Beyond individualism and rationalism. *American Psychologist, 47*, 23-33.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal, 30*(2), 393-425.

Hogan, D., & Tudge, J. (1999). Implications of Vygotsky's theory for peer learning. In A. M. O'Donnell, & A. King (Eds.), *Cognitive perspectives on peer learning* (pp. 39-65). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Horn, I. S. (2008). Turnaround students in high school mathematics: Constructing identities of competence through mathematical worlds. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(3), 201-239.

Hornemann, J. (1975). Aperçu sur les élèves de la filière III. *L'orientation scolaire et professionelle*, *4*(1), 31-50.

Inhelder, B., & Caprona, D. (1985). Introduction: Construtivisme et creation des nouveautés. In Fondation Archives Jean Piaget (Ed.), *Le construtivisme aujourd'hui/Construtivism today* (pp. 7-17). Genève: Médicine et Hygiène.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent. Essai sur la construction des structures opératoires formelles*. Paris: Presses Universitaires Françaises (PUF).

Jackson, K., Garrison, A. L., Wilson, J., Gibbons, L., & Shahan, E. (2011, April). *Investigating how setting up cognitively demanding tasks is related to opportunities to learn in middle-grades mathematics classrooms*. Comunicação apresentada na National Council of Teachers of Mathematics Research Presession, Indianapolis, IN. [Recuperado em novembro 1, 2011, de http://www.cadrek12.org/resources/publications/investigating-how-setting-cognitively-demanding-tasks-related-opportunities-l]

Jackson, K., Shahan, E., Gibbons, L., & Cobb, P. (2012). Setting up complex tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *18*(1), 24-29.

Johnson, D., & Johnson, R. (2010). *Introduction to cooperative learning.* Recuperado em janeiro 21, 2010, de http://www.co-operation.org

Johnson, J. A., & D'Amato, R. C. (2005). Review of the Stanford-Binet intelligence scales: Fifth Edition. In R. A. Spies, & B. S. Plake (Eds.), *The sixteenth mental measurements yearbook* (pp. 975-979). Lincoln: University of Nebraska.

Johnson, R., & Johnson, D. (1994). An overview of cooperative learning. In J. Thousand, A. Villa, & A. Nevin (Eds.), *Creativity and collaborative learning* (pp. 31-44). Baltimore: Brookes Press.

Jonnaert, P. (2012). *Competências e socioconstrutivismo: Um quadro teórico* (J. Duarte, Trad.). Almada: Instituto Piaget.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it*? The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kilpatrick, J. (2005). A critique of impure unreason. In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas*. Lisboa: APM.

Kincheloe, J., & Tobin, K. (2006). Doing educational research in a complex world. In K. Tobin, & J. Kincheloe (Eds.), *Doing educational research – A handbook* (pp. 3-13). Rotterdam: Sense Publishers.

Koffka, K. (1924/1999). *The growth of the mind: An introduction to child psychology* (R. M. Ogden, Trad.). London: Routledge.

Kohlberg, L. (1976). Moral reasoning and moralization: The cognitive development approach. In T. Lickona (Ed.), *Moral development and behaviour*. New York: Holt, Riverhart and Wilson.

Köhler, W. (1947/1992). *The gestalt psychology: The definitive statement of the gestalt theory.* New York : Liveright Publishing Corporation. [Edição revista e alargada por L. Köhler, em 1975]

Krippendorff, K. (1980). *Content analysis: An introduction to its methodology*. Beverly Hill, Ca: Sage Publications.

Kumpulainen, K., Hmelo-Silver, C., & César, M. (Eds.) (2009). *Investigating classroom* *interaction: Methodologies in action*. Rotterdam: Sense Publishers.

Kumpulainen, K., Krokfors, L., Lipponen, L., Tissari, V., Hilppö, J., & Rajala, A. (2010). *Learning bridges: Toward participatory learning environments* (Pekka Hirvonen, Trads.). Helsinki: Helsinki University Print.

Kumpulainen, K., & Lipponen, L. (2010). Productive interaction as agentic participation in dialogic inquiry. In C. Howe, & K. Littleton (Eds.), *Educational dialogues* (pp. 48-63). London: Taylor & Francis.

Kumpulainen, K., & Lipponen, L. (2013). The dialogic construction of agency in classroom communities. In M. B. Ligorio, & M. César (Eds.), *Interplays between dialogical learning and dialogical self* (pp. 193-217). Charlotte, NC: IAP.

Kush, J. C. (2005). Review of the Stanford-Binet intelligence scales: Fifth edition. In R. A. Spies, & B. S. Plake (Eds.), *The sixteenth mental measurements yearbook* (pp. 979-984). Lincoln: University of Nebraska.

Ladson-Billings, G. (1997). It doesn't add up: African American students' mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(6), 697-708.

Lampert, M., & Graziani, F. (2009). Instructional activities as a tool for teachers' and teacher educators' learning. *The Elementary School Journal, 109*(5), 491-509.

Lau, P., Singh, P., & Hwa, T.-Y. (2009). Constructing mathematics in an interactive classroom context. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(3), 307-324.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Le Boterf, G. (1994). *De la compétence. Essai sur un attracteur étrange.* Paris: Les Éditions d'Organization.

Le Boterf, G. (1998). Évaluer les competences. Quels jugements? Quels critères? Quelles instances?. *Education Permanente*, *135*, 143-152.

Legendre, M. (2007). La notion de compétence au coeur des réformes curriculaires: Effet de mode ou moteur de changements en profundeur. In F. Audigier, & F. Tutiaux-Guillon (Eds.), *Compétences et contenus: Les curriculums en questions* (pp. 27-50). Bruxelas: De Boeck.

Leite, C. (2002). *O currículo e o multiculturalismo no sistema educativo português.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Leite, C. (2003). *Para uma escola curricularmente inteligente.* Porto: Edições ASA.

Leite, C. (2006). Políticas de currículo em Portugal e (im)possibilidades da escola se assumir como uma instituição curricularmente inteligente. *Currículo sem Fronteiras, 6*(2), 67-81.

Leite, C., & Delgado, F. (2012). Práticas curriculares no ensino da matemática: Percepções de alunos do 9.º ano de escolaridade e sua relação com a contextualização curricular. *Interacções, 8*(22), 83-112. [On-line: http://revistas.rcaap.pt/interaccoes/issue/archive]

Léssard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2005). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas* (2.ª ed.) (M. J. Reis, Trad.). Lisboa: Instituto Piaget.

Ligorio, M. B. (2012). The dialogical self and educational research: A fruitful relationship. In H. Hermans, & T. Gieser (Eds.), *Handbook of dialogical self theory* (pp. 439-453). Cambridge: Cambridge University Press.

Ligorio, M. B. (2013). Dialogical learning and dialogical self: Two stories and many interplays. In M. B. Ligorio, & M. César (Eds.), *Interplays between dialogical learning and dialogical self* (pp. xiii-xl). Charlotte, NC: IAP.

Ligorio, M. B., & César, M. (Eds.) (2013). *Interplays between dialogical learning and dialogical self*. Charlotte, NC: IAP.

Lincoln, Y. S. (2002, Dezembro). *Justifying, verifying and validating qualitative data*. Comunicação apresentada na Conferência Internacional de Investigação em Educação, Viana do Castelo.

Longeot, F. (1966). Expérimentation d'une échelle individuelle de développement de la pensée logique. *BINOP*, *22*, 306-319.

Longeot, F. (1969). *Psychologie différentielle et théorie opératoire de l'intelligence.* Paris: Dunod.

Longeot, F. (1979). *L'echelle de développment de la pensée logique.* Paris: Editions Scientifiques et Psychologiques.

Longo, G., & Viarouge, A. (2010). Mathematical intuition and the cognitive roots of mathematical concepts. *Mathematical knowledge: Intuition, visualization, and understanding*, *29*(1), 15-27.

Loureiro, M., Rijo, C., & César, M. (2003). E para mim... O que é a matemática?. In APM (Eds.), *Actas do ProfMat 2003* (pp. 299-304). Santarém: APM. [CdRom]

Lourenço, O. (1994). *Além de Piaget? Sim, mas devagar!...*. Coimbra: Livraria Almedina.

Lourenço, O. (2010). *Psicologia de desenvolvimento cognitivo: Teoria, dados e implicações* (2.ª ed.). Coimbra: Edições Almedina.

Lüdke, M., & André, M. (2005). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas* (9.ª ed.). São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

Ludvigsen, S., Lund, A., Rasmussen, I., & Säljö, R. (Eds.) (2011). *Learning across sites: New tools, infrastructures and practices*. Oxon and New York: Routledge.

Maasz, J., & Schloeglmann, W. (Eds.) (2006). *New mathematics education research and practice*. Rotterdam: Sense Publishers.

Machado, R. (2008). *Brócolos e matemática: Representações sociais da matemática de alunos do 8.º ano de escolaridade*. Lisboa: APM. [Dissertação de mestrado, apresentada no DEFCUL]

Machado, R., & César, M. (2008). Broccoli and mathematics: Students' social representations about mathematics. In J. F. Matos, P. Valero, & K. Yasukawa (Eds.), *Proceedings of the 5th international mathematics education and society conference* (Vol. 2, pp. 376-385). Lisboa: CIEFCUL & Department of Education, Learning and Philosophy, Aalborg University.

Machado, R., & César, M. (2009). Representações sociais da matemática enquanto instrumento de mediação sociocultural. In A. Estrela, L. Marmoz, R. Canário, J. Ferreira, A. M. Simão, P. Pinto, ... P. Figueiredo (Eds.), *Actas do XVI Colóquio* *da AFIRSE. Tutoria e mediação em educação: Novos desafios à investigação educacional*. Lisboa: Secção Portuguesa da AFIRSE. [CdRom]

Machado, R., & César, M. (2010). Trabalho colaborativo e matemática: Contributos para a comunicação e aprendizagem matemática. In J. M. Matos, A. Domingos, C. Carvalho, & P. Teixeira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – 2010: Comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática* (pp. 73-86). Caparica: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Machado, R., & César, M. (2012a). Trabalho colaborativo e representações sociais: Contributos para a promoção de sucesso escolar em matemática. *Interacções*, *8*(20), 98-140. [On-line: http://revistas.rcaap.pt/interaccoes/issue/archive]

Machado, R., & César, M. (2012b). La Fontaine and mathematics: Contributions for learning functions in the 8th grade. *Quaderni di ricerca in didattica (Mathematics), 22, julho de 2012, Supplemento 1,* 414-418.

Machado, R., & César, M. (2013a). Contributos das representações sociais e do trabalho colaborativo para o acesso às ferramentas culturais da matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática/International Journal for Studies in Mathematics Education*, *6*(1), 96-146.

Machado, R., & César, M. (2013b). Diversity, dialogism and mathematics learning: Social representations in action. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1764-1773). Ankara: Middle East Technical University. [http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf]

Machado, R., & César, M. (in press a). Aprendizagem e Desenvolvimento: Um estudo sobre representações sociais enquanto mediador das aprendizagens. In *Actas do Congresso Internacional Aprendizagem/ Desenvolvimento.* Almada: Instituto Piaget.

Machado, R., & César, M. (in press b). Social representation and mathematical learning. In *CIEAEM 62 site*. London: CIEAEM.

Machado, R., César, M., & Matos, J. M. (2011). Investigar em educação matemática: Contributos de um instrumento de avaliação de capacidades e competências para as práticas profissionais. In C. S. Reis, & F. S. Neves (Eds.), *Livro de atas do XI congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (SPCE) (Vol. 1, pp. 259-266). Guarda: Instituto Politécnico da Guarda.

Mansos, M. P., Pinto, A., Bastos, R, Pinheiro, C., & Saporiti, C. (1994). Métodos Quantitativos para os alunos do ensino artístico: Proposta de adaptação do programa. *Educação e Matemática*, *30*, 3-6.

Marková, I. (2005). *Dialogicality and social representations: The dynamics of mind* (2.ª ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Marková, I. (2013). Dialogical knowing and believing: Trust and responsability in the context of learning. In M. B. Ligorio, & M. César (Eds.), *Interplays between dialogical learning and dialogical self* (pp. 3-26). Charlotte, NC: IAP.

Martins, M., & Ponte, J. P. (2011). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa: ME/Direcção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC).

Martins, M. A., & Neto, F. C. (1990). A influência dos factores sociais contextuais na resolução de problemas. *Análise Psicológica*, *8*(3), 265-274.

Matos, J. M. (2002). Comunidades de Matemática. In D. Moreira, C. Lopes, I. Oliveira, J. M. Matos, & L. Vicente (Eds.), *Matemática e comunidades: A diversidade social no ensino-aprendizagem da matemática* (pp. 93-104). Lisboa: SPCE-SEM & Instituto de Investigação em Educação (IIE).

Matos, J. M. (2006). História do ensino da matemática em Portugal: Constituição de um campo de investigação. *Revista Diálogo Educacional 6*(18), 11-18. Recuperado em abril 1, 2011, de http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=189116273002

Matos, J. M. (2008). A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín, & L. J. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 141-158). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Matos, J. M. (2010). Elementos sobre o ensino e a aprendizagem da matemática moderna em Portugal no final dos anos 70. In J. M. Matos, & W. R. Valente (Eds.), *A reforma da matemática moderna em contextos ibero-americanos* (pp. 137-174*)*. Lisboa: Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento (UIED).

Matthews, G., Zeidner, M., & Roberts, R. D. (2002). *Emotional intelligence: Science and myth*. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology.

Melro, J., & César, M. (2012). Abraçando e efectivando a inclusividade: O exemplo da inclusão de alunos Surdos no ensino regular. In I. Sanches, M. Costa, A. Mota, & Á. Santos (Eds.), *Para uma educação inclusiva: Dos conceitos às práticas* (Vol. I, pp. 255-272). Lisboa: Edições Universitárias Lusófonas.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Meyer, M., César, M., Norén, E., & Prediger, S. (in press). Making use of multiple (non-shared) first languages: State and need of research and development in the European language context. In R. Barwell, P. Clarkson, A. Halai, Kazima, J. Moschkovich, N. Planas, … M. Villavicencio (Eds.), *Mathematics education and language diversity: The 21st ICMI study*. London: Springer.

Miles, M., & Huberman, A. (1994). *Qualitative data analysis*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

ME (1989). Decreto de lei n.º 286/89, de 29 de agosto. *Diário da República,* I Série, n.º 198. Lisboa: INCM.

ME (1995). *Métodos Quantitativos: 10.º ano* (1.ª versão do programa para as escolas secundárias especializadas do ensino artístico). Porto: Departamento do Ensino Secundário (DES).

ME (1996). *Métodos Quantitativos: Programa para as escolas secundárias especializadas do ensino artístico*. Porto: DES.

ME (2002). Decreto de lei n.º 209/2002, de 17 de outubro. *Diário da República,* I Série-A, n.º 240. Lisboa: INCM.

ME (2004). Decreto de lei n.º 74/2004, de 26 de março. *Diário da República,* I Série-A, n.º 73. Lisboa: INCM.

ME/Direcção-Geral dos Ensinos Básico e Secundário (DGEBS) (1991). *Programa de matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem* (3.º ciclo do ensino básico, Vol. II). Lisboa: ME/DGEBS.

ME/Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE) (2004). *PISA 2003: Conceitos fundamentais em joga na avaliação da literacia matemática*. Lisboa: ME/GAVE.

Ministério da Educação e Ciência (MEC) (2011). Despacho n.º 17169/2011, de 23 de dezembro. *Diário da República,* II Série, n.º 245. Lisboa: INCM.

MEC (2012a). Decreto de lei n.º 139/2012, de 5 de julho. *Diário da República,* I Série, n.º 129. Lisboa: INCM.

MEC (2012b). *Metas curriculares – Matemática*. Recuperado em setembro 12, 2012, de http://www.dge.mec.pt

MEC/GAVE (2012). *Exame nacional do ensino secundário – Matemática A*. Recuperado em abril 11, 2013, de http://gave.min-edu.pt/np3/np3/451.html

MEC/GAVE (2013). *Teste intermédio de Matemática A*. Recuperado em abril 11, 2013, de http://gave.min-edu.pt/np3/430.html

Monteiro, V. (2003). *Leitura a par: Efeitos de um programa tutorial no desempenho em leitura, motivação, auto-conceito e auto-estima de alunos do 2.º e 4.º anos de escolaridade* (Tese de doutoramento, documento policopiado). DEFCUL, Lisboa.

Morin, E. (2001). *O desafio do século XXI: Religar os conhecimentos*. Lisboa: Instituto Piaget.

Mugny, G. (1985). *Psychologie sociale du développement cognitif*. Berna: Peter Lang.

Müller, U., Carpendale, J., & Smith, L. (Eds.) (2009). *The Cambridge companion to Piaget*. Cambridge: Cambridge University Press.

Murphy, K. R., & Davidshofer, C. O. (1991). *Psychological testing: Principles and applications* (2.ª ed.). Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

McClain, K., & Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(3), 236-266.

McInnerney, J., & Roberts, T. (2004). Collaborative or cooperative learning. In T. Roberts (Ed.), *Online collaborative learning: Theory and practice* (pp. 203-214). Hershey PA: Idea Group Publishing.

Muller Mirza, N., Perret-Clermont, A.-N., Tartas, V., & Iannaccone, A. (2009). Psychosocial processes in argumentation. In N. Muller Mirza, & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and education: Theorical foundations and practices* (pp. 67-90). New York, NY: Springer.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, Va: NCTM.

NCTM (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, Va: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (M. Melo, Trad.). Lisboa: APM.

Nasir, N. S. (2002). Identity, goals, and learning: Mathematics in cultural practice. *Mathematical Thinking and Learning*, *4*(2&3), 213-247.

Nathan, M. J., & Knuth, E. J. (2003). A study of whole classroom mathematical discourse and teacher change. *Cognition and Instruction, 21*(2), 175-207.

Nunes, T., & Bryant, P. (1997) (Eds.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective*. Hove: Psychology Press.

Nuthall, G. (1999). *International Journal of Educational Research*, *31*, 141-256.

Oliveira, H. (2004). *A construção da identidade profissional de professores de matemática em início de carreira* (Tese de doutoramento, documento policopiado). DEFCUL, Lisboa.

Oliveira, I. (2006). *Uma alternativa curricular no 2.º ciclo do ensino básico: Vivências e reflexões* (Tese de doutoramento, CdRom). DEFCUL, Lisboa.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, *100*, 3-9.

OCDE (2008). Ten steps to equity in education. *Policy Brief*, *January*, 1-8. [On-line: http://www.oecd.org/education/school/39989494.pdf]

OCDE (2009). *Creating effective teaching and learning environments: First results from TALIS.* Paris: OCDE Publishing. [On-line: http://www.oecd-ilibrary.org/]

Pacheco, J. A. (1996). *Currículo: Teoria e prática*. Porto: Porto Editora.

Pacheco, J. A. (2005). *Estudos curriculares: Para a compreensão crítica da educação*. Porto: Porto Editora.

Pacheco, J. A. (2011). *Discursos e lugares das competências em contextos de educação e formação*. Porto: Porto Editora.

Panitz, T. (1999). *Collaborative versus cooperative learning: A comparison of the two concepts which will help us understand the underlying nature of interactive learning*. Recuperado em maio 1, 2008, de http://www.capecod.net/“Tpanitz/Tedspage

Papert, S. (2001). Change and resistance to change in education. Taking a deeper look at why school hasn't changed. In Fundação Calouste Gulbenkian (Ed.), *Novo conhecimento, nova aprendizagem* (pp. 61-70). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Patton, M. Q. (1980). *Qualitative evaluations methods*. Newbury Park, CA: Sage Publications.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Peixoto, E. (2010). *Competências.* Recuperado em novembro 14, 2012, de http://www.uac.pt/~jazevedo/pessoal/textos/competencias.htm

Pereira, O. G., Jesuíno, J. C., & Joyce-Moniz, L. (1979). *Desenvolvimento psicológico da criança* (Vol. 2, Tomo I). Lisboa: Moræs Editora.

Perrenoud, P. (1999). *Construir as competências desde a escola.* Porto Alegre: ArtMed Editora.

Perrenoud, P. (2000). *Dez novas competências para ensinar* (P. Ramos, Trad.). Porto Alegre: ArtMed Editora.

Perrenoud, P. (Ed.) (2001). *Porquê construir competências a partir da escola? Desenvolvimento da autonomia e luta contra as desigualdades* (F. Alves, Trad.). Porto: Edições Asa.

Perret-Clermont, A.-N. (1992). Approaches in the social psychology of learning and group work. In P. Stringer (Ed.), *Confronting social issues* (pp. 97-122). London: Academic Press.

Perret-Clermont, A.-N. (1993). What is it develops?. *Cognition and Instruction*, *11*(3&4), 197-205.

Perret-Clermont, A.-N. (2004). Thinking spaces of the young. In A.-N. Perret-Clermont, C. Pontecorvo, L. Resnick, T. Zittoun, & B. Burge (Eds.), *Joining society: Social interaction and learning in adolescence and youth* (pp. 3-10). Cambridge: Cambridge University Press.

Perret-Clermont, A.-N., Carugati, F., & Oates, J. (2004). A socio-cognitive perspective on learning and cognitive development. In J. Oates, & A. Grayson (Eds.), *Cognitive and language development in children* (pp. 305-332). Oxford: Blackwell Publishing.

Perret-Clermont, A.-N., & Nicolet, M. (1988). *Interagir et connaître: Enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif*. Fribourg: DelVal.

Perret-Clermont, A.-N., Pontecorvo, C., Resnick, L., Zittoun, T., & Burge, B. (Eds.) (2004). *Joining society: Social interaction and learning in adolescence and youth.* Cambridge: Cambridge University Press.

Piaget, J. (1923). *Le langage et la pensée chez l'enfant*. Neuchâtel, Paris: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1924). *Le jugement et le raisonement chez l'enfant*. Neuchâtel, Paris: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1926). *La représentation du monde chez l'enfant*. Paris: Alcan.

Piaget, J. (1932/1965). *The moral judgment of the child* (M. Gabain, Trad.). Glencoe, IL: The Free Press.

Piaget, J. (1936). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1947). *La psychologie de l'intelligence.* Paris: Armand Colin.

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique (III). Conclusions [générales]*. Paris: PUF.

Piaget, J. (1964/1997). Development and learning. In M. Gauvin, & M. Cole (Eds.), *Readings on the development of children* (pp. 19-28). New York: W. H. Freeman and Company.

Piaget, J. (1967). *Biologie et connaissance.* Saint Amand: Gallimard.

Piaget, J. (1970). *L'épistemologie génétique*. Paris: PUF.

Piaget, J. (1971/2010). Seis estudos de psicologia (N. Pereira, Trad.). Lisboa: Texto Editores.

Piaget, J. (1972). *Para onde vai a educação?* (I. Braga, Trad.). Lisboa: Livros Horizonte.

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives.* Paris: PUF.

Piaget, J. (1977/1995). *Sociological studies*. London: Routledge. [Trabalho original publicado em 1965, Cap. 1 a 4; 2.ª ed. alargada em 1977, Cap. 1 a 9; originais em língua francesa]

Piaget, J., & Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion.

Piaget, J., & Garcia, R. (1987). *Vers une logique des significations*. Genève: Murionde.

Piaget, J., & Gréco, P. (Eds.) (1959). *Etudes de epistemologie génétique* (Vol. VII – Apprentissage et Connaissance). Paris: PUF.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Piscarreta, S. (2002). *Malmequer, bem-me-quer, muito, pouco ou nada: Representações sociais da matemática em alunos do 9.º ano de escolaridade.* Lisboa: APM. [Dissertação de mestrado, apresentada na Universidade Aberta]

Piscarreta, S., & César, M. (2004). Desafinado... ou o meu primeiro amor: A construção das representações sociais da matemática. *Vetor Neteclem*, *2*(s/n.º), 31-51.

Polya, G. (1945/1973). *How to solve it* (2.ª ed.). Princeton: Princeton University Press. [Original publicado em inglês, em 1945]

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares.* Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães. H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., ... Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Popper, K. (1935/1992). *The logic of scientific discovery.* London & New York: Routledge. [Original publicado em alemão, em 1935]

Precatado, A., Lopes, A. V., Baeta, A., Loureiro, C., Ferreira, E., Guimarães H. M., ... Abrantes, P. (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: APM & IIE.

Ramos, M. (2003). *Matemática: A bela ou o monstro? Contributos para uma análise das representações sociais da matemática dos alunos do 9.º ano de escolaridade*. Lisboa: APM. [Tese de doutoramento, apresentada na UL]

Rarick, C. A. (2003). Case study as interpretative research: An example and *commentary*. Recuperado em dezembro 10, 2009, de http://ssrn.com/abstract=1117624

Raven, J. C., Court, J. H., & Raven, J. (1984). *Manual for Raven's progressive matrices and vocabulary scales* (Section 2). London: H. K. Lewis & Co., Ltd.

Reiser, B. J. (2004). Scaffolding complex learning: The mechanisms of structuring and problematizing student work. *Journal of the Learning Sciences, 13*(3), 273-304.

Renshaw, P. (2004). Introduction. Dialogic teaching, learning and instruction: Theoretical roots and analytical frameworks. In J. van der Linden, & P. Renshaw (Eds.), *Dialogic learning: Shifting perspectives to learning, instruction, and teaching* (pp. 1-15). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Renshaw, P. (2013). The socio cultural and emotional dimensions of scaffolding. *Learning, Culture and Social Interaction*, *2*, 56-60.

Resnick, L. B. (1991). Shared cognition: Thinking as social practice. In L. B. Resnick, J. M. Levine, & S. D. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition* (pp. 1-20). Washington, DC: American Psychological Association.

Ribeiro, R. B., & Almeida, L. S. (2005). Tempos de reacção e inteligência: A robustez dos dados face à fragilidade da sua interpretação. *Avaliação Psicológica*, *4*(2), 95-103.

Rigotti, E., & Greco, S. (2005). *Introducing argumentation*. Argumentum eLearning module. Recuperado em maio 25, 2012, de http://www.argumentum.ch

Rigotti, E., & Greco, S. (2009). Argumentation as an object of interest and as a social and cultural resource. In N. Muller Mirza, & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and education: Theorical foundations and practices* (pp. 9-66). New York, NY: Springer.

Robbins, J. (2005). Contexts, collaboration, and cultural tools: A sociocultural perspective on researching children's thinking. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 140-149.

Rodrigues, N., Roldão, C., Nóvoas, D., Fernandes, S., & Duarte, T. (2010). *Estudantes à saída do secundário 2009/2010*. Lisboa: Observatório do Trajecto dos Estudantes do Ensino Secundário (OTES) & Gabinete de Estatística e Planeamento de Educação/Ministério da Educação (GEPE/ME). Recuperado em março 9, 2011, de http://www.gepe.min-edu.pt/np4/?newsId=364&fileName=OTES_EASS_0910.pdf

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking: Cognitive development in sociocultural activity*. New York: Oxford University Press.

Rogoff, B. (1994). Developing understanding of the idea of communities of learners. *Mind, Culture, and Activity, 1*(4), 209-229.

Roldão, M. C. (1999a). *Os professores e a gestão do currículo: Perspectivas e práticas em análise.* Porto: Porto Editora.

Roldão, M. C. (1999b). *Gestão curricular: Fundamentos e práticas*. Lisboa: ME/DEB.

Roldão, M. C. (2003). *Gestão do currículo e avaliação de competências: As questões dos professores*. Lisboa: Editorial Presença.

Roldão, M. C. (2007). Colaborar é preciso: Questões de qualidade e eficácia no trabalho dos professores. *Noesis, 71*, 24-29.

Roldão, M. C. (2009). O lugar das competências no currículo – ou o currículo enquanto lugar das competências? *Educação Matemática Pesquisa, 11*(3), 585-596.

Roldão, M. C. (2011). *Um currículo de currículos*. Chamusca: Edições Cosmos.

Rommetveit, R. (1985). Language acquisition as increasing linguistic structuring of experience and symbolic behavior control. In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition* (pp. 183-205). Cambridge: Cambridge University Press.

Rose, R. (2002). The curriculum: A vehicle for inclusion or a lever for exclusion?. In C. Tilstone, L. Florian, & R. Rose (Eds.), *Promoting inclusive practice* (pp. 27-38). London/New York: Routledge Falmer.

Rousseau, J.-J. (1762/1961). *Émile ou de l'éducation.* Paris: Garnier.

Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Rotterdam: Sense Publishers.

Rushton, J., & Jensen, A. (2005). Thirty years of research on race differences in cognitive ability. *Psychology, Public Policy, and Law, 11(2)*, 235-294.

Rushton, J., & Jensen, A. (2006). The totality of available evidence shows the race IQ gap still remains. *Psychological Science, 17*, 921-922.

Santiago, P., Donaldson, G., Looney, A., & Nusche, D. (2012). *OECD reviews of evaluation and assessment in education: Portugal 2012*. Paris: OECD Publishing. [On-line: http://www.oecd.org/dataoecd/21/10/50077677.pdf]

Santos, J. (2007). *A casa da praia: O psicanalista na escola* (4.ª ed.). Lisboa: Livros Horizonte.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como?. In P. Abrantes, & F. Araújo (Eds.), *Reorganização curricular do ensino básico: Avaliação das aprendizagens, das concepções às práticas* (pp. 77-84). Lisboa: ME/DEB.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: SPCE-SEM.

Santos, L. (Ed.), Pinto, J., Rio, F., Pinto, F., Varandas, J. M., Moreirinha, O. ... Bondoso, T. (2010). *Avaliar para aprender: Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário*. Porto: Porto Editora.

Santos, N. (2008). *Ver a matemática com pontos: Um estudo de caso de um aluno cego do 12.º ano de escolaridade* (Dissertação de mestrado, CdRom). DEFCUL, Lisboa.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handboock of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (2002). Making mathematics work for all children: Issues of standards, testing, and equity. *Educational Researcher, 31*(1), 13-25.

Schubauer-Leoni, M. L. (1986). Le contract didactique: Un cadre interpretatif pour comprendre les savoirs manifestés par les elèves en mathématiques. *European Journal of Psychology of Education, 1*(2), 139-153.

Schubauer-Leoni, M. L., & Perret-Clermont, A.-N. (1997). Social interactions and mathematics learning. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 265-283). Hove: Psychology Press.

Schwandt, T. A. (1994). Constructivist, interpretivist approaches to human inquiry. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of quality research* (pp. 118-137). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Secada, W. G. (1995). Social and critical dimensions for equity in mathematics education. In W. G. Secada, E. Fennema, & L. B. Adajion (Eds.), *New directions for equity in mathematics education* (pp. 146-163). New York: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse that meets the ears: Learning from mathematical communication things that we have not known before. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 13-57.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2001a). *Matemática A: 10.º ano*. Lisboa: ME/DES.

Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2001b). *Matemática B: 10.º ou 11.º anos*. Lisboa: ME/DES.

Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2002a). *Matemática A: 11.º ano*. Lisboa: ME/DES.

Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2002b). *Matemática B: 11.º ou 12.º anos*. Lisboa: ME/DES.

Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2002c). *Matemática A: 12.º ano*. Lisboa: ME/DES.

Silva, J., Martins, M. L., Martins, A., & Loura, L. (2001). *Programa de matemática aplicada às ciências sociais*. Lisboa: ME/DES.

Silva, M. (2008). *Uma outra forma de ver o mundo: A inclusividade através de actividades laboratoriais em ciências físico-químicas do 8.º ano de escolaridade* (Dissertação de mestrado, CdRom). Faculdade de Motricidade Humana da Universidade Técnica de Lisboa e Faculdade de Ciências Médicas da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Silva, M. C. (2007). A relação "saber científico" e a "experiência" na profissão docente. *Revista da Faculdade de Ciências Sociais e Humanas*, *19*, 107-118.

Skemp, R. R. (1978). *Relational understanding and instrumental understanding. Arithmetic teacher*, Novembre, 9-15.

Skinner, B. F. (1938/1991). *The behavior of organisms: An experimental analysis*. Cambridge, MA: B. F. Skinner Foundation.

Skinner, B. F. (1968). *The technology of teaching*. East Norwalk, CT: Appleton-Century-Crofts.

Skinner, B. F. (1974/1988). *Sobre o behaviorismo* (5.ª ed.) (M. P. Villalobos, Trad.). S. Paulo: Editora Cultrix. [Original publicado em ingles, em 1974]

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluver.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, *14*, 66-91.

Skovsmose, O. (2006). Challenges for mathematics education research. In J. Maasz, & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 33-50). Rotterdam: Sense Publishers.

Skovsmose, O. (2007). *Educação crítica: Incerteza, matemática, responsabilidade*. São Paulo: Cortez.

Slavin, R. (1990). Research on cooperative learning: Consensus and controversy. *Educational Leardership, 47*(4), 52-54.

Slavin, R. (1991). Synthesis of research on cooperative learning. *Educational Leadership*, *48*(5), 71-82.

Slavin, R. (1996). Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. *Contemporary Educational Psychology*, *21*, 43-69.

Slavin, R. (1999). Comprehensive approaches to cooperative learning. *Theory into Practices*, *32*(2), 74-79

Smith, M. S., Bill, V., & Hughes, E. K. (2008). Thinking through a lesson: Sucessfully implementing high-level tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(3), 132-138.

Spearman, C. (1904). General intelligence, objectively determined and measured. *American Journal of Psychology, 15*, 201-293.

Staples, M. H. (2007). Supporting whole-class collaborative inquiry in a secondary mathematics classroom. *Cognition & Instruction*, *25*(2&3), 161-217.

Stake, R. (1994). Case studies. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Stake, R. (1995/2009). *A arte da investigação com estudos de caso.* (2.ª ed.) (A. Chaves, Trad.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455-488.

Stenhouse, L. (1985). A note on case study and educacional practice. In R. G. Burgess (Ed.), *The research process in educational settings: Ten case studies* (pp. 263-271). Lewes: Falmer Press.

Stone, C. A. (1998). The metaphor of scaffolding: Its utility for the field of learning disabilities. *Journal for Learning Disabilities, 31*(4), 344-364.

Strecht, P. (2008). *A minha escola não é esta: Dificuldades de aprendizagem e comportamento em crianças e adolescentes*. Lisboa: Assírio & Alvim.

Sturman, A. (1997). Case study methods. In J. Keeves (Ed.), *Educational research, methodology, and measurement: An international handbook* (pp. 61-66). New York: Pergamon.

Teitelbaum, K., & Apple, M. (2001). Clássicos: John Dewey (J. Paraskeva, & L. Gandin, Trads.). *Currículo sem Fronteiras*, *1*(2), 194-201. [On-line: www.curriculosemfronteiras.org]

Tesch, R. (1990). *Qualitative research: Analysis types and software tools*. Lewes: Falmer Press.

Tobin, K., & Kincheloe, J. (Eds.) (2006). *Doing educational research – A handbook*. Rotterdam: Sense Publishers.

Tryphon, A., & Vonèche, J. (Eds.) (1996). *Piaget-Vygotsky: The social genesis of thought.* Hove: Psychology Press.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L., & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática: Propostas curriculares para o ensino básico*. Viana de Castelo: Escola Superior do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

van der Linder, J., Erkens, G., Schmidt, H., & Renshaw, P. (2000). Collaborative learning. In R.-J. Simons, J. van der Linden, & T. Duffy (Eds.), *New learning* (pp. 37-54). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

van der Maren, J.-M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Bruxelles: DeBoeck Université.

van der Veer, R., & Valsiner, J. (Eds.) (1998). *The Vygotsky reader* (3.ª ed.). Oxford: Blackwell Publishers.

Veloso, E. (2007). Notas sobre o ensino da geometria: Sobre as definições (II). *Educação e Matemática*, *93*, 19-22.

Ventura, C. (2012). *Interacção e Conhecimento: Um estudo de caso que analisa a história de um projecto*. Lisboa: APM. [Tese de doutoramento, apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCTUNL)]

Ventura, C., César, M., & Matos, J. M. (2010). Evaluating competencies to promote collaborative work: The *Interaction and Knowledge* project. In *SIGs 10 and 21 Meetings homepage*. Utrecht: University of Utrecht. [On-line: http://sig10and21meeting.risbo.org/papers.php, Paper 57]

Ventura, C., Santos, N., & César, M. (2012). Blind students' participation in mainstream mathematics classes. *Quaderni di ricerca in didattica (Mathematics), 22, julho de 2012, Supplemento 1,* 234-237.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didatique des Mathématiques*, *10*(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5-28). Hove: Psychology Press.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.), *Emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (1932/1978). *Mind and society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, Trad.). Cambridge MA: Harvard University Press. [Original publicado em russo, em 1932]

Vygotsky, L. S. (1934/1962). *Thought and language*. (Myshlenie I rech', Trad.). Cambridge MA: MIT Press. [Original publicado em russo, em 1934; edição revista por Alex Kozulin]

Vygotsky, L. S. (1978/1997). Interaction between learning and development. In M. Gauvin, & M. Cole (Eds.), *Readings on the development of children* (pp. 29-36). New York: W. H. Freeman and Company.

Wallon, H. (1979a). *Psicologia e educação da criança* (A. Rabaça, & C. Trindade, Trads.). Lisboa: Editorial Vega.

Wallon, H. (1979b). *Do acto ao pensamento: Ensaio de psicologia comparada* (2.ª ed.) (J. S. Dinis, Trad.). Lisboa: Moræs Editores.

Wellington, J. (2000). *Educational research: Contemporary issues and pratical approaches*. London: Continuum.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge, USA: Cambridge University Press.

Wenger, E. (2000). Communities of practices and social learning systems. *Organization*, *7*(2), 225-246.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of mind: A sociocultural approach to mediated action*. Hemel Hempstead: Havester Wheatsheaf.

Wertsch, J. V. (1998). Mind as action. New York: Oxford University Press.

Wertsch, J. V. (2007). Mediation. In H. Daniels, M. Cole, & J. V. Wertsch (Eds.), *The Cambridge companion to Vygotsky* (pp. 178-192). Cambridge: Cambridge University Press.

Wechsler, D. (1939). *The measurement of adult intelligence*. Baltimore: Williams & Wilkins.

Wechsler, D. (1958). *The measurement and appraisal of adult intelligence* (4.ª ed.). Baltimore: Williams & Wilkins.

Wechsler, D. (1997a). *Wechsler Adult Intelligence Scale, Third Edition*. San Antonio: Harcourt Assessment.

Wechsler, D. (1997b). *Wechsler Preschool and Primary Scale of Intelligence, Third Edition*. San Antonio: Harcourt Assessment.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology & Psychiatry & Allied Disciplines, 17*(2), 89-100.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Yackel, E., Cobb, P., & Wood, T. (1991). Small-group interactions as source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(5), 390-408.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3.ª ed.). California: Sage Publications.

Zhu, J., Weiss, L. G., Prifitera, A., & Coalson, D. (2003). The Wechsler intelligence scales for children and adults. In G. Goldstens, & S. R. Beens (Eds.), *Comprehensive handbook of psychology assessment* (pp. 51-75, Vol. 1). New York: Willey.

Zittoun, T. (2006). *Transitions: Development through symbolic resources*. Greenwich: Information.

Zittoun, T., & Perret-Clermont, A.-N. (2009). Four social psychology lenses for developmental psychology. *European Journal of Psychology of Education*, *XXIV*(3), 387-403.