Instituto Superior de Estatística e Gestão de Informação
Universidade Nova de Lisboa

Working Paper nº 15

Métodos Não-Paramétricos

Diniz Duarte Pestana

Working Paper nº 15

ISSN: 0872-895X

Depósito Legal nº: 84522/94

Diniz Duarte Pestana
DEIO e CEAUL, Universidade de Lisboa

Novembro 1994

Trabalho apresentado no âmbito do Seminário de Estatística - coordenado pelo Professor Doutor Bento Murteira

MÉTODOS NÃO-PARAMÉTRICOS

Dinis Duarte Pestana

DEIO e CEAUL, Universidade de Lisboa

Resumo: Recorrer aos testes paramétricos usuais em muitas situações reais, em que dispomos de amostras de pequena dimensão, e a grande variabilidade da magnitude dos dados lança dúvidas sobre a eventual gaussianidade dos dados, parece metodologicamente errado. A abordagem não-paramétrica, em que a magnitude dos dados é moderada por pesos que levam a que apenas se considerem os respectivos sinais, ou os *ranks* das observações, ou apenas contagens em classes, leva frequentemente a resultados mais fiáveis, e em algumas circunstâncias mais eficientes.

Apresentamos alguns testes para comparação de localizações ou de escalas para duas amostras, e referimos extensões para comparação de k amostras, correlacionadas ou independentes. Apresentamos também um coeficiente de associação calculado com base nos *ranks* das observações, em vez de sobre as respectivas magnitudes.

Frases e palavras chave: Não-paramétrico, adistribucional, ponderação, *ranks*, teste dos sinais, teste de Wilcoxon, teste de aleatoriedade de Friedman, correlação ordinal de Spearman, teste de Mann-Whitney, teste de Kruskal-Wallis, teste de Siegel-Tukey, análise de variância sobre *ranks*.

Abstract: The use of the usual parametric methods in many real situations, when we are dealing with small samples, and the huge dispersion of the data at hand legitimate doubts about the gaussianity of the underlying distribution, may lead to disputed decisions. In such situations, nonparametric methods, where magnitude of the data is moderated by weights so that we only consider the sign or the rank of the observations, or merely count the number of observations in classes, lead to more sensible results, and are more efficient in many instances.

We refer some classical nonparametric tests designed to compare location or scale of two correlated or independent samples, and their extension for the case of k samples, and present an association coefficient based on ranks instead of magnitude of the data.

Key-words: Nonparametrics, distribution-free, weights, ranks, sign test, Wicoxon signed ranks test, Friedman randomness test, Spearman rank correlation, Mann-Whitney tests, Siegel-Tukey test, Kruskal-Wallis test, analysis of variance over ranks.

AMS classification: 62G10, 62G25

1. Introdução

Na abordagem estatística mais usual há um pressusposto geral de gaussianidade dos dados. Winsor, um defensor convicto deste ponto de vista, afirmava que a parte central de qualquer distribuição se aproxima da forma gaussiana. Admitindo ainda que tal é verdade, não devemos porém esquecer que nas técnicas mais usuais de inferência as nossas decisões se baseiam na observação de caudas extremas de pequena probabilidade, bem longe dessa região central.

Assim não é de estranhar que modernamente se adopte a atitude de "deixar os dados falar por si mesmos", numa abordagem exploratória em que nos resguardamos contra a eventualidade de a distribuição subjacente aos dados se afastar da forma gaussiana, e contra erros grosseiros ou frequentes na obtenção ou registo dos dados.

Estas novas abordagens robustas e/ou resistente foram precedidas por uma outra área da estatística, em que imperam as perspectivas "não-paramétricas" e "adistribucionais" — termos que em geral são tomados como sinónimos.

Não são porventura termos muito transparentes, pelo que me permito alguns comentários prévios.

O teste do qui-quadrado como teste de ajustamento é decerto conhecido por todos os que estiveram expostos a Estatística, ainda que em cursos muito elementares. Dizer que é um teste adistribucional pode parecer estranho, uma vez que como o nome indica a estatística de teste — e aproveito para referir o notabilíssimo trabalho de Berkson, e os comentários que o acompanham, em que se define como estatística do qui-quadrado qualquer estatística que envolva apenas valores observados e correspondentes valores esperados — tem um distribuição bem conhecida. O qualificativo "adistribucional" ("distribution-free") antes realça que a distribuição assintótica da estatística do teste é a distribuição de um qui-quadrado qualquer que seja a distribuição que se postule para os dados; apenas muda a forma como as probabilidades das classes são calculadas, pois o vector de efectivos observados tem sempre distribuição multinomial. Observações idênticas valem caso consideremos o teste do qui-quadrado como teste de homogeneidade ou de independência na análise de tabelas de contingência — uma das áreas não-paramétricas mais pujantes, que nem sequer aqui abordamos, uma vez que merece por si só tratamento detalhado.

A expressão "não-paramétrico" também se presta a má interpretação, pois não significa de modo nenhum que não se dê relevância a parâmetros de localização e de escala (a mediana, em particular, serve frequentemente para centrar amostras e permitir posterior investigação de igualdade de escalas, ou de formas). Significa antes que as estatísticas de teste não especificam parâmetros —de facto, muitos dos métodos a que recorremos nem sequer dão uma importância privilegiada aos dados recolhidos, antes consideram os respectivos *ranks*, *scores*, sinais, ou perfazem contagens.

Note-se que nas abordagens robustas, mais recentes, os elementos suspeitos da amostra são tratados com algum afastamento, reduzindo a sua importância na inferência através de ponderações que salientam a parte central da amostra, por exemplo, chegando mesmo a ponderar negativamente algumas estatísticas ordinais extremas (cf. Hoaglin *et al*, 1992, nomeadamente cap. IX-XII).

Na abordagem não paramétrica, neste aspecto mais radical (talvez devido a ser uma primeira revolta contra a escravatura ao modelo gaussiano), a magnitude dos dados é quase apagada, considerando-se as ordens (ranks) dos dados na amostra ordenada, ou mesmo apenas o sinal dos dados! Tal não parece descabido, depois da surpresa inicial, sobretudo em casos em que a escassez de dados e a sua grande variabilidade levantam as maiores dúvidas sobre o pressuposto de a distribuição parente ser gaussiana.

2. O Teste dos Sinais e o Teste de Wilcoxon.

Considerem-se duas amostras $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\underset{\sim}{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ emparelhadas, provenientes de distribuições com a mesma forma.

Por exemplo, a fim de testar um novo medicamento para queimaduras, aproveita-se o facto de as lesões provocadas por excesso de exposição ao sol dos ombros de um mesmo indivíduo serem em geral de idêntica gravidade; um dos ombros é tratado com o novo medicamento, e o outro com o medicamento usual (em geral é uma experiência duplamente cega, em que há codificação de qual dos ombros é tratado com qual dos medicamento — médico e doente não sabem até ao final da experiência, para que não haja subjectivismo na avaliação das melhoras), e regista-se (x_i, y_i) = (nº de horas até cicatrização com o medicamento usual, nº de horas até cicatrização com o novo medicamento).

Suponha-se por exemplo que

y_i:	15.4	19.3	4.2	19.3	45.2	18.6	11.2	18.1	33.0
x_i:	14.7	28.9	7.4	19.3	54.2	27.4	12.8	15.4	36.4

Caso se deseje testar a hipótese nula de ambas as amostras provirem da mesma população — ou seja, de o novo medicamento ter efeitos semelhantes ao usual — a forma mais simples de abordar o problema consiste em observar que sob H_0 há igual probabilidade de $y_i>x_i$ e de $y_i<x_i$. Assim o sinal da diferença é "+" ou "-" com probabilidades $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$.

Consequentemente, para efectuar o <u>teste dos sinais</u> basta:

1. Observar o sinal da diferença de cada par de valores emparelhados, desprezando as diferenças nulas, e tomando como n o número de diferenças não nulas.

2. Estabelecer um nível de probabilidade, abaixo do qual rejeitaremos a hipótese nula.

3. Recorrer à tabela binomial com o n dado e $p = \frac{1}{2}$ para calcular a probabilidade de um resultado pelo menos tão extremo quanto o observado (o nível de significância descritivo). No caso de o nível de significância descritivo ser inferior ou igual ao nível de probabilidade escolhido, rejeita-se a hipótese estatística sob investigação.

No nosso exemplo há 9 pares, mas um deles é constituído por valores iguais, pelo que não é informativo no que respeita a nossa decisão. No que refere os 8 pares remanescentes, a diferença é positiva em dois casos. Como X tem, sob H_0, distribuição $bi(8,\frac{1}{2})$, a probabilidade de achar um resultado pelo menos tão extremo é

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = (1+8+28) \cdot 2^{-8} \approx 0.145 \ (>0.05)$$

Assim, ao nível a = 0.05, não há razões para rejeitar a hipótese nula com base naquelas amostras.

Note-se que, apesar de ser um teste muito simples de perfazer, é um teste a evitar. De facto, os dados são tão díspares e tão escassos que é decerto um abuso pressupor gaussianidade e aplicar um teste paramétrico habitual. Mas "moderar" o valor de $|y_i - x_i|$ através de ponderações $w_i = \frac{1}{|y_i - x_i|}$ também parece ser uma atitude quase terrorista!

Uma abordagem mais moderada, que pesando embora com moderação os valores observados não despreza totalmente a sua magnitude, é substituir cada observação $|y_i - x_i|$ pelo seu *rank* ascendente ou ordem na amostra ordenada crescentemente $r_i = rank(|y_i - x_i|)$. Por outras palavras, x_i está a ser ponderado com o peso $w_i = \frac{r_i}{|y_i - x_i|}$. A estes ranks atribuiem-se ainda os sinais das diferenças $y_i - x_i$.

A <u>estatística de Wilcoxon</u>, W, obtém-se então como segue:

1. Atribuem-se ordens ou *ranks* aos valores absolutos das diferenças das observações originais, $| y_i - x_i |$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
2. Afecta-se à ordem da i-ésima diferença absoluta o sinal de $y_i - x_i$, e denota-se a ordem afectada de sinal por R_i.
3. Calcule a soma W das ordens afectadas de sinais:

$$W = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n .$$

(Uma soma grande e positiva sugere que $\mu_X - \mu_Y > 0$, e uma soma grande negativa sugere que $\mu_X - \mu_Y < 0$.)

Em certas circunstâncias pode ser aconselhável recorrer a outras estatísticas de teste equivalentes. Por exemplo:

a) a soma das ordens afectadas de sinal +, W^+, ou
b) a soma das ordens afectadas de sinal –, W^-, ou ainda
c) W_S, o menor entre $| W^+ |$ e $| W^- |$.

A distribuição de W sob a hipótese nula de ambas as amostras provirem da mesma distribuição é simples de estudar para valores moderados de n (e qualquer bom livro de estatística não paramétrica tem tabelas). Por exemplo para n=3, há 2^3 resultados possíveis, que levam a

W:	-6	-4	-2	0	2	4	6
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(o 0 pode ser obtido como +1+2-3 e como -1-2+3).

Para valores elevados de n, basta recorrer ao teorema limite central para obtermos uma aproximação gaussiana. De facto é fácil determinar média e variância de W sob H_0:

Dada uma amostra de dimensão n de uma distribuição contínua simétrica em torno de 0, se W denotar a soma das ordens afectadas de sinais, então

$$\mu_W = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_W^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

De facto, sob a hipótese nula de identidade distribucional, denotando por R_i a ordem afectada de sinal da i-ésima observação da amostra ordenada (ascendentemente) dos valores absolutos das observações, então

$$P(R_i = +i) = P(R_i = -i) = \frac{1}{2}.$$

Segue-se então que o valor médio de cada um dos R_i é 0, uma vez que

$$E(R_i) = \frac{1}{2}(+i) + \frac{1}{2}(-i) = 0.$$

Como $W = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$, e como o valor médio de uma soma é a soma dos valores médios das parcelas, segue-se que

$$\mu_W = 0.$$

A fim de obtermos a variância de W, comecemos por observar que as ordens afectadas de sinais R_i são variáveis aleatórias independentes, pois que os sinais foram afectados independentemente uns dos outros, conforme foi descrito na Secção 5-2. Nomeadamente, $P(R_i = +i) = \frac{1}{2}$, mesmo no caso de conhecermos os sinais de todas as ordens remanescentes. Consequentemente, uma vez que há independência, podemos usar o facto de a variância de uma soma de variáveis aleatórias independentes ser a soma das variâncias das parcelas.

Assim,

$$\sigma_W^2 = \sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2 + \ldots + \sigma_{R_n}^2.$$

Uma vez que o valor médio de R_i é 0, a sua variância é

$$\sigma_{R_i}^2 = E(R_i^2) - \mu_{R_i}^2 = \left[\frac{1}{2}(+i)^2 + \frac{1}{2}(-i)^2\right] - 0^2 = i^2.$$

Temos então finalmente

$$\sigma_W^2 = \sum \sigma_{R_i}^2 = \sum i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Isto completa a demonstração que, sob a validade da hipótese nula, o valor médio e a variância de W, a soma das ordens afectadas de sinais, são dados pelas expressões indicadas.

Com os dados com que exemplificámos o teste dos sinais:

$sg(y_i - x_i)$:	+	-	-		-	-	-	+	-
$\lvert y_i - x_i \rvert$:	0.7	9.6	3.2	0	9.0	-9.8	1.6	2.7	3.4
r_i:	1	7	4		6	8	2	3	5
R_i:	+1	-7	-4		-6	-8	-2	+3	-5

pelo W = -28.

Como $\left| \frac{(-28+0.5)}{\sqrt{8x9x17/6}} \right| \approx 1.9 < 1.96$, parece não haver razões que justifiquem utilizar o medicamento mais caro, ou mais agressivo para o doente; note-se no entanto que a situação é bem diferente àquela a que tínhamos chegado com o teste dos sinais.

Tratamento de empates no teste de Wilcoxon.

Dois tipos de empates podem surgir na aplicação do teste das ordens afectadas de sinais, de Wilcoxon: diferenças nulas, e observações não nulas empatadas.

Zeros: Os zeros ocorrem quando dois valores emparelhados são iguais, e consequentemente a sua diferença é nula. Recordemos que estamos a aplicar um teste que se destina a investigar se as distribuições têm parâmetros de localização distintos. Diferenças nulas sublinham dois aspectos: discretização e similitude distribucional. Uma vez que os zeros não têm poder discriminante quando o objectivo é testar eventuais diferenças, uma solução que parece razoável é pô-los de parte (procedimento que não é obviamente de seguir caso se esteja a estimar a diferença média). Caso se proceda desta forma, a dimensão da amostra para o teste é diminuída do número de diferenças nulas observadas.

Empates não nulos: Atribuimos ordens intermédias às observações empatadas de $\lvert X - Y \rvert$. Por exemplo, se duas diferenças estiverem empatadas após aquela à que atribuímos o *rank* 4, atribuimos a ambas o *rank* 5.5, média de 5 e 6; se os três valores mais baixos estiverem empatados, atribuimos-lhes *rank* 2 (note que o *rank* é sempre um inteiro ou metade de um inteiro).

No caso de haver muitos empates pode ser necessário corrigir a variância de W. A expressão apropriada é

$$\sigma_W^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \sum \frac{(\tau_i+1)\,\tau_i\,(\tau_i-1)}{12},$$

onde as parcelas da soma correspondem aos conjuntos de empates. Na expressão acima τ_i é o número de observações empatadas no i-ésimo conjunto de empates nas diferenças absolutas. Claro que observações não empatadas podem ser interpretadas como pertencentes a um conjunto de empates para o qual $\tau_i = 1$, e consequentemente não influem na correcção.

Vantagens do emparelhamento.

A discussão que segue evidencia as circunstâncias em que o emparelhamento reduz a variância das diferenças, e consequentemente nos permite aceder a uma estimativa mais exacta de $\mu_X - \mu_Y$.

A variância da diferença X - Y é

$$\sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y,$$

onde ρ é a correlação entre X e Y na população. Quando ρ é grande e positivo, como acontece usualmente com pares emparelhados, a variância da diferença é substanciamente reduzida relativamente ao que acontece quando $\rho = 0$, que é o que acontece quando as amostras são independentes. Assim, considerando $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$, para simplificar a discussão, teremos

$$\sigma_{X-Y}^2 = 2\sigma^2(1-\rho).$$

Para n pares independentes formados a partir de duas amostras de dimensão n, temos

$$\rho = 0 \quad \text{e} \quad \sigma^2_{\bar{X}} = \sigma^2_{\bar{Y}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Consequentemente, decorre de (1) que a variância da diferenças é

$$\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{2\sigma^2}{n} ;$$

e para pares correlacionados, a correspondente variância é

$$\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{2\sigma^2}{n} - \frac{2\rho\,\sigma^2}{n} = \frac{2\sigma^2}{n}(1-\rho) = \frac{2\sigma^2}{k},$$

onde $k = \frac{n}{1-\rho}$. Estas fórmulas mostram que, no que respeita a variância, o efeito da correlação é tornar uma amostra de dimensão n de pares correlacionados equivalente a uma amostra de dimensão $\frac{n}{1-\rho}$ de pares de observações independentes. Assim, por exemplo, no caso de $\rho = \frac{1}{2}$, a variância é igual à produzida por duas amostras, cada uma das quais de dimensão $\frac{n}{\frac{1}{2}} = 2n$. O efeito é o do dobro de pares independentes.

3. Correlação Ordinal.

Uma abordagem alternativa ao estudo de duas amostras correlacionadas consiste em investigar a que ponto estão associadas.

Têm sido propostos inúmeros coeficientes de associação. Vamos apenas abordar o coeficiente de correlação ordinal r_S de Spearman — *que não passa do vulgar coeficiente de correlação empírico r calculado sobre os ranks das observações em lugar de sobre o valor das observações.*

Suponha-se então que dispomos de duas atribuições de ordens aos n elementos de um conjunto, em que a primeira atribuição de ordem ao i-ésimo elemento do conjunto é r_{i1} e a segunda é r_{i2}, e seja $d_i = r_{i1} - r_{i2}$.

A medida de correlação ordinal de Spearman r_S deve satisfazer os três critérios que seguem:

1. r_S deve depender de, ou ser uma função decrescente de $\Sigma\, d_i^2$.

2. r_S deve tomar o valor 1 quando houver concordância total nas ordenações, isto é quando $\Sigma\, d_i^2 = 0$.

3. r_S deve tomar o valor -1 quando houver discordância total nas duas ordenações, isto é, neste caso, quando $\Sigma\, d_i^2 = M$ for máximo.

(A decisão de basear a definição da correlação em $\Sigma\, d_i^2$ é uma escolha fundamental. Mas no que refere a escolha do seu domínio de variação, de -1 a $+1$, é apenas questão de convenção, que muitos coeficientes de correlação satisfazem.)

A fim de satisfazer estas condições, consideremos uma função linear de $\Sigma\, d_i^2$:

$$r_S = A + B \sum d_i^2$$

com A e B a determinar. Se $r_S = 1$ quando $\Sigma\, d_i^2 = 0$, então

$$1 = A + 0 \quad \text{e} \quad A = 1.$$

Se $\sum d_i^2 = M$, o valor máximo que pode assumir, e $r_S = -1$. Assim

$$-1 = 1 + BM \quad \text{e} \quad B = -2/M.$$

Para completarmos a dedução da expressão é apenas necessário agora obter a expressão de M, o máximo de $\Sigma\, d_i^2$, que ocorre quando há oposição completa na atribuição das ordens. Assumimos sem demonstração que o máximo de $\sum d_i^2$ corresponde de facto ao caso em que as atribuições de ordens são completamente o reverso uma da outra.

Tratamos os casos n par, ficando o caso n ímpar como exercício.

Seja então $n = 2m$, onde m é um inteiro positivo. No caso de oposição total na atribuição de ordens, estas aparecem como abaixo se regista:

x_i :	1	2 ...	m−1	m	m+1	m+2 ...	2m−1	2m
y_i :	2m	2m −1 ...	m+2	m+1	m	m−1 ...	2	1
d_i :	-(2m− 1)	-(2m−3) ...	−3	−1	1	3 ...	2m−3	2m−1

Consequentemenete

$$M = \Sigma d_i^2 = 2\,[1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2m-1)^2]\,.$$

A soma dentro do parêntesis recto é a diferença entre a soma dos quadrados de todos os naturais de 1 a $2m-1$ e a soma dos quadrados dos pares de 2 a $2m-2$:

$$\frac{M}{2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2m-1)^2 - [\,2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2m-2)^2]$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2m-1)^2 - 4\,[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (m-1)^2]$$

$$= \tfrac{1}{6}(2m-1)(2m)(4m-1) - 4(\tfrac{1}{6})(m-1)(m)(2m-1)$$

$$= \tfrac{1}{6}(2m-1)(2m)(2m+1).$$

Temos então

$$\frac{M}{2} = \tfrac{1}{6}(n-1)(n)(n+1).$$

Segue-se que

$$B = \frac{-2}{M} = \frac{-6}{n(n^2-1)}, \quad \text{e} \quad r_S = 1 - \frac{6\,\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)}.$$

A discussão precedente leva à definição abaixo:

Quando há duas atribuições de ordens aos n elementos de um conjunto, em que a primeira atribuição de ordem ao i-ésimo elemento do conjunto é r_{i1} e a segunda é r_{i2}, denotando $d_i = r_{i1} - r_{i2}$, o <u>coeficiente de correlação ordinal de Spearman</u> é

$$r_S = 1 - \frac{6\,\Sigma\, d_i^2}{n(n^2-1)}\,.$$

(As modificações necessárias no caso de haver observações empatadas podem ser encontradas em Siegel e Castellan,1988, p. 239.)

Claro que na interpretação da correlação ordinal tem que haver as mesmas cautelas que na interpretação do coeficiente de correlação — em particular evitar o pecado mortal de confundir correlação e causalidade.

Sob hipótese nula de independência na atribuição das ordens, tem distribuição aproximadamente gaussiana com valor média e variância

$$\mu_{r_S} = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(r_S) = \frac{1}{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Um exemplo: num estudo muito curioso sobre inserção social e resistência a influência e pressão social, solicitava-se a um indivíduo que participasse de uma experiência destinada a identificar as duas formas iguais (triângulos, estrelas, caras, letras, etc.) num gráfico com oito semelhantes, dando-se-lhe à partida 2.000$00 para isso; cada vez que identificasse incorrectamente as duas formas iguais perdia 250$00. A identificação era feita numa sala em que estavam outos 11 participantes. Mas estes faziam parte da equipa de estudo, e davam respostas erradas na tentativa de influenciar o único participante genuíno. Assim, este ficava dividido entre a sua opção correcta, e a opção incorrecta da maioria — o que aliado à perspectiva de perder dinheiro levava alguns participantes genuínos a ceder por diversas ocasiões à influência dos outros.

Os valores obtidos com 6 indivíduos foram:

	índice de inserção social		nº respostas erradas	
i	x_i	r_{1i}	y_i	r_{2i}
1	98	1	1	2
2	93	2	0	1
3	87	3	2	3
4	74	4	4	5
5	66	5	6	6
6	62	6	3	4

Consequentemente $r_S = 1 - \frac{6\mathrm{x}8}{6\mathrm{x}35} \approx 0.77$ (Note-se que como $\sqrt{6\text{-}1}$ x $0.77 \approx 1.72 <$ 1.96, não se rejeita a hipótese nula; mas também, com tão poucos dadas, não se podia esperar muito).

4. Teste de Aleatoriedade de Friedman.

A extensão da correlação ordinal a m amostras é simples. Uma vez que dispomos de $\frac{m(m-1)}{2}$ pares de amostras e podemos calcular a correlação ordinal de Spearman para cada par, e obter a partir daí a correleção ordinal média. É porém mais simples recorrer à expressão que se deduz (com algum trabalho, mas sem qualquer dificuldade especial):

Se os mesmos I items são ordenados m vezes, e se a soma das ordens atribuídas ao i-ésimo item é R_i, $i = 1, 2, \ldots, I$, então a correlação ordinal média entre os $\frac{m\,(m-1)}{2}$ pares de ordenações é

$$r_S \text{ médio} = \frac{12\,\Sigma R_i^2}{m(m-1)\,I\,(I^2-1)} - \frac{1}{I-1}\left[\frac{2(2I+1)}{m-1} + 3(I+1)\right].$$

Com base na expressão acima, podemos definir a estatística de Friedman. Dadas m ordenações de I items, a estatística de Friedman é

$$\chi^2_{(r)} = \frac{12}{mI\,(I+1)} \sum R_i^2 - 3m(I+1),$$

onde R_i é a soma das m ordens atribuídas ao i-ésimo item, $i = 1, 2, \ldots, I$.

O índice (r) no $\chi^2_{(r)}$ chama a atenção para o facto de estarmos a trabalhar com correlação ordinal, e nada tem a ver com número de graus de liberdade.

No caso de as ordenações serem aleatórias, então a estatística $\chi^2_{(r)}$ de Friedman, para valores elevados de m e de I, tem distribuição aproximadamente de um qui-quadrado com $I-1$ graus de liberdade.

A ideia motivadora por detrás da estatística de Friedman é que, condicional à validade da hipótese nula, qualquer dos R_i tem distribuição aproximadamente normal com valor médio conhecido $\frac{m\,(I+1)}{2}$ e variância conhecida $\frac{m(I^2-1)}{12}$. Consequentemente a variável aleatória

$$\frac{R_i - m\,(I+1)/2}{\sqrt{m\,(I^2-1)/12}}$$

tem distribuição aproximadamente normal standard, e o seu quadrado tem distribuição aproximadamente de um qui-quadrado com 1 grau de liberdade. A soma destes quadrados para todos os items teria então uma distribuição aproximada de um qui-quadrado com I graus de liberdade, se não fosse a existência de uma ligação funcional entre os R_i's, que advém do facto de $\Sigma R_i = \frac{mI(I+1)}{2}$. Esta restrição reduz o número de graus de liberdade a I - 1.

Outra forma de perspectivar a fórmula de Friedman é: Considere a soma dos quadrados dos desvios da soma das ordens em relação à média. Esta soma é

$$T = \sum \left(R_i - \frac{m(I+1)}{2}\right)^2 .$$

Observe-se que quando há concordância perfeita entre os juízes, e todos eles atribuem a mesma ordenação aos items, esta soma toma o maior valor possível. Mas por outro lado, caso todos os R_i fossem iguais T tomaria o valor 0. Sob a hipótese de aleatoriedade, o valor esperado de T é $\frac{mI(I-1)(I+1)}{12}$. Por conseguinte, a fim de obter uma estatística com valor médio I - 1 — pois como atrás indicámos a distribuição assintótica deve ser um qui-quadrado com este número de graus de liberdade, e consequentemente este valor médio —, dividimos T por $\frac{mI(I+1)}{12}$.

C. S. Lewis relata a frequência com que foram efectuados seis tipos de operações cirúrgicas opcionais em 10 regiões do Kansas durante um certo período. As frequências regionais foram ordenadas de menor para maior no que respeita a cada um dos tipos de operação, e as ordens atribuídas encontram-se registadas na tabela que segue:

Ordens das frequências de operações cirúrgicas em 10 regiões do Kansas

	Região										
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	
Amígdalas e adenóides	4	1	5	6	9	8	10	7	3	2	
Apêndice	4	1	5	8	10	7	9	6	3	2	
Hérnia	3	2	5	9	8	6	10	7	4	1	
Hemorróidas	4	1	2	7	5	9	8	10	6	3	Vesícula
4	2	7	6	10	9	8	5	3	1		
Veias varicosas	2	3	7	6	5	9	8	4	10	1	
	21	10	31	42	47	48	53	39	29	10	

m = 6, I = 10

Assim

$$r_S \text{ médio} = \frac{12\sum R_i^2}{m(m-1)I(I^2-1)} - \frac{1}{I-1}\left[\frac{2(2I+1)}{m-1} + 3(I+1)\right]$$

$$= \frac{12(13050)}{6(5)10(99)} - \frac{1}{9}\left[\frac{42}{5} + 3(11)\right] = 0.67$$

O valor da estatística de Friedman é 39.27, nitidamente excessivo para um qui--quadrado com 9 graus de liberdade (recorde que o valor médio é 9 e o desvio padrão $\sqrt{18}$). Consequentemente rejeitamos a hipótese nula de aleatoriedade.

5. Teste de Mann-Whitney.

Considerem-se duas amostras $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\underset{\sim}{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ provenientes de distribuições com a mesma forma, e sem perda de generalidade suponha-se $m \leq n$. Com base nestas duas amostras queremos testar a hipótese de as duas amostras provirem de populações com a mesma localização (uma noção vaga que neste momento não importa esclarecer).

No que segue, vamos exemplificar com a duração, em minutos, do efeito de dois anestésicos (na dose recomendada pelo laboratório quando o efeito pretendido é obter analgesia durante 12 minutos) em estudo em doentes submetidos a pequena cirurgia dentária:

$$\underset{\sim}{x} = (14.7, 29.1, 47.3, 15.7, 11.4)$$

$$\underset{\sim}{y} = (12.9, 51.6, 19.7, 13.6)$$

Pressupondo gaussianidade dos dados, e homogeneidade das variâncias, a solução clássica corresponde a reduzir $\bar{x} - \bar{y}$; de facto, sob validade da hipótese nula, $\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}}$ tem distribuição t de Student com m+n-2 graus de liberdade.

No entanto, em muitas situações correntes, não há qualquer razão para pressupor a gaussianidade dos dados. Iglewicz (1981) recomenda o recurso consistente a um teste sobre a forma gaussiana. Chama mesmo a atenção para o facto de uma grande percentagem das colecções de dados com que na prática se trabalha terem um número de observações periféricas que não parece compatível com a hipótese de forma gaussiana.

Assim, se não tivermos qualquer razão para nos situarmos naquela moldura clássica, parece mais prudente não o fazermos. Por exemplo, no caso das amostras acima, parece razoável não atender grandemente à magnitude das observações (não só pela sua escassez como também pela grande dispersão), e "pesar" cada dado por $\frac{r_i}{z_i}$, onde r_i denota o *rank* ascendente ou ordem de z_i na amostra combinada, onde obviamente z_i denota o elemento genérico da amostra global.

A ideia de usar os *ranks* na amostra combinada parece razoável. Sob validade da hipótese nula de homogeneidade de localização, qualquer observação z_i tem igual probabilidade de ocupar qualquer posição na amostra global ordenada (pelo que observamos desde já que, sob H_0, $E(r(z_i)) = \frac{m+n+1}{2}$; por simplicidade, passamos a denotar $N=m+n$).

Por outro lado se, sem perda de generalidade, a segunda amostra $\underset{\sim}{y}$ for extraída de uma distribuição que é uma translacção para a direita da distribuição de que foi extraída a amostra $\underset{\sim}{x}$, é provável que os *ranks* mais elevados estejam atribuídos aos elementos desta segunda amostra.

Tudo isto se deve reflectir na estatística

$$T = \sum_{i=1}^{m} r(y_i).$$

No nosso exemplo, os *ranks* dos x_i's na amostra combinada são (4, 7, 8, 5, 1), e os ranks dos y_i's são (2, 9, 6, 3), pelo que o valor observado da estatística de teste é T = 20

Para valores razoavelmente pequenos de m e de n, a distribuição exacta de T sob H_0 é fácil de calcular (e muitas vezes basta discriminar o que se passa com observações numa cauda extrema). Por exemplo, com n=3 e m=2, as ordenações possíveis e os correspondentes valores de T são, sob a hipótese nula

x x x y y	9
x x y x y	8
x x y y x	7
x y x x y	7
x y x y x	6
x y y x x	5
y x x x y	6
y x x y x	5
y x y x x	4
y y x x x	3

Consequentemente

T:	3	4	5	6	7	8	9
	.1	.1	.2	.2	.2	.1	.1

pelo que se optarmos por rejeitar H_0 no caso $T \geq 9$, versus a alternativa H_1: a distribuição de $\underset{\sim}{y}$ situa-se à direita da de $\underset{\sim}{x}$, o erro de 1ª espécie é $\alpha = .1$.

No nosso exemplo, n=5 e m=4, pelo que há, sob H_0, $\binom{9}{5} = 126$ ordenações igualmente prováveis. O valor observado de T = 20 situa-se muito aquém dos 7 valores na cauda direita extrema com probabilidade 0.05, pelo que não há qualquer razão para rejeitar H_0.

Claro que no caso de m e n serem valores elevados o problema tem que ser abordado de outra forma, pois torna-se incomportável calcular a distribuição exacta de T (e evidentemente as tabelas de Mann-Whitney que existem consideram apenas valores moderados de m e n). Felizmente T é uma soma de v. a. i. i. d. com variância finita (argumentos combinatórios standard levam a $var(r(y_i)) = \frac{n(N+1)}{12}$), pelo que o teorema limite central nos permite aproximar $\frac{T - E(T)}{\sigma_T}$ por Z gaussiana standard.

Decorre do atrás dito que $E(T) = m\frac{N+1}{2}$, e $var(T) = m\frac{n(N+1)}{12}$; apenas resta notar que no caso de haver grupos g_i com τ_i dados empatados, há que considerar uma correcção para a variância (ver detalhes em Mosteller e Rourke (1993) ou em Siegel e Castellan (1988). A expressão para a variância corrigida é

$$var(T) = m\frac{n(N+1)}{12} - \frac{mn}{12N(N-1)} \sum_{i=1}^{r}(\tau_i-1)\tau_i(\tau_i+1),$$

onde r=número de grupos g_i com τ_i observações empatadas (às quais, como habitualmente, se atribui o *rank* médio, como referimos a propósito do teste de Wilcoxon).

6. Teste de Kruskal-Wallis.

A extensão a k amostras independentes da metodologia que usámos anteriormente é bastante evidente.

No caso de 2 amostras, $T = \sum_{i=1}^{m} r(y_i)$, devidamente centrado e reduzido, tem distribuição aproximada gaussiana standard; obviamente o mesmo se passa com a versão centrada e reduzida de $T^* = \sum_{i=1}^{m} r(x_i)$. Por outro lado $T+T^*= \frac{N(N+1)}{2}$, pelo que a soma T^2+T^{*2} tem distribuição de χ^2 com 1 grau de liberdade.

Se procedêssemos analogamente com a soma dos *ranks* na amostra combinada correspondentes a cada subamostra, chegaríamos obviamente a um χ^2 com (k-1) graus de liberdade.

O modo de proceder é um pouco diferente, mas leva a aproximação idêntica.

Começamos por calcular $R_i = \sum_{j=1}^{n_i} r(x_{ij})$, a soma dos *ranks* na amostra global correspondentes à i-ésima subamostra, e comparamo-la com o "*rank* médio" global $\frac{N+1}{2}$, onde $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$. A estatística

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \left(R_i - \frac{N+1}{2}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - \frac{N(N+1)^2}{4}$$

tem valor médio $\frac{(k-1)N(N+1)}{12}$. Assim a estatística de Kruskal-Wallis

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

tem valor médio k-1.

Consequentemente, pelo que atrás vimos, H tem uma distribuição aproximada de χ^2 com k-1 graus de liberdade.

Da forma como procedemos, é óbvio que estivémos a fazer uma análise da variância simples sobre *ranks* em vez de sobre as observações.

Temos assim uma alternativa não-paramétrica para testar a hipótese nula de igual localização de várias subamostras, que em nada exige o pressuposto de gaussianidade. Como também vimos, é simples extensão do teste de Mann-Whitney.

Um exemplo: Experimentam-se 4 tipos de tratamento em vinte doentes com cancer do mesmo tipo e no mesmo estádio de desenvolvimento, e o registo do progresso da doença é utilizado para comparar os tratamentos. Os doentes são divididos ao acaso em quatro grupos de cinco doentes, a cada grupo é administrado um tratamento diferente, e o tempo de sobrevivência em anos de cada um dos doentes registado.

Tipo de tratamento	Nº de anos de sobrevivência				
A	14.2	10.6	9.4	5.6	2.4
B	12.8	12.3	6.4	6.1	1.6
C	11.5	10.1	5.1	5.0	4.8
D	14.9	13.7	8.5	7.7	5.9

Começamos por atribuir ordens às 20 observações:

14.9	14.2	13.7	12.8	12.3	11.5	10.6	10.1	9.4	8.5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	D	B	B	C	A	C	A	D

7.7	6.4	6.1	5.9	5.6	5.1	5.0	4.8	2.4	1.6
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	B	D	A	C	C	C	A	B

Temos então

$$R_1 = 2 + 7 + 9 + 15 + 19 = 52; \qquad R_2 = 4 + 5 + 12 + 13 + 20 = 54;$$
$$R_3 = 6 + 8 + 16 + 17 + 18 = 65; \qquad R_4 = 1 + 3 + 10 + 11 + 14 = 39;$$

Assim $\Sigma R_i^2 = 52^2 + 54^2 + 65^2 + 39^2 = 11\ 366$, e como todos os n_i são iguais

$$H = \frac{12}{(20)(21)} \cdot \frac{11\ 366}{5} - 3(21) = 1.9 .$$

Uma vez que H pode ser aproximada por uma variável aleatória de qui-quadrado com $4 - 1 = 3$ graus de liberdade, da consulta da tabela do qui-quadrado obtemos

$$P(H \geq 1.9) = 0.60, \quad \text{aproximadamente.}$$

Há assim escassa evidência de diferenças dos efeitos dos tratamentos no que respeita tempo de sobrevivência.

7. Observações Finais.

Não nos foi possível abordar senão uma parte ínfima de técnicas não-paramétricas nesta breve resenha. Mosteller e Rourke (1993) é um excelente texto elementar e introdutório, com inúmeros exemplos resolvidos, e Siegel e Castellan (1988) aborda de forma notavelmente didáctica muitas questões de aplicação frequente nesta área, caminhando do estudo de uma amostra (testes de ajustamento, testes de aleatoriedade, testes de simetria, testes de contaminação, etc.), para o de duas amostras — abordando separadamente amostras correlacionadas e independentes, e dedicando largo espaço à discussão de tabelas de contingência que nem sequer aflorei — e para a extensão a k amostras, de novo separando o caso de amostras independentes e amostras correlacionadas. Ambos são excelente referência, e contêm um riquíssimo apêndice com tabelas (no caso de Mosteller e Rourke, existe também um conjunto de apêndices que sumarizam o essencial de cálculo de probabilidades).

Na abordagem paramétrica, excelente quando os pressuposto são válidos, pelo menos aproximativamente, a abordagem à construção de testes de hipóteses é porventura mais padronizada. A área não-paramétrica, como espero ter transmitido, é o reino da imaginação criadora, em que face a cada situação se inventa a abordagem adequada.

Por exemplo, se quisermos investigar a simetria de uma população, vamos contar os ternos direitos e os ternos esquerdo da amostra (isto é observar se a média está à direita ou à esquerda da mediana); se quisermos investigar se duas amostras centradas provêm de populações com a mesma escala, usamos uma variante do teste de Mann-Whitney, atribuindo ranks alternadamente na cauda esquerda e na cauda direita — é o teste de Siegel--Tukey.

Assim, cada situação sugere a estatística apropriada. É de notar que o capítulo final de Mosteller e Rourke (1993) se intitula "Concepção de um Teste Estatístico Pessoal".

Referências:

Berkson, (1980). Minimum Chi-Square, not Maximum Likelihood!", *Annals of Statistics*, **8**, p. 57-87.

Iglewicz, B. (1991). "Estimadores Robustos de Escala e Intervalos de Confiança para a Localização", in Hoaglin, D., Mosteller, F. e Tukey, J. (eds.) *Análise Exploratória de Dados" Técnicas Robustas — um Guia*, cap. XII. Salamandra, Lisboa.

Mosteller, F. e Rourke, R. E. K (1993). *Estatísticas Firmes*. Salamandra, Lisboa.

Siegel, S. and Castellan, N. J. (1988). *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*. McGraw-Hill, New York.

Probabilidades cumulativas unilaterais para a estatística *T*, de Mann-Whitney.

A amostra *A* tem *m* observações, a amostra *B* tem *n* observações, e *T* denota a soma das ordens de *B*.

As entradas da tabela com 5 dígitos reprsentam $10^4 P(T \le l)$ e $10^4 P(T \ge u)$, onde (l,u) é o par que antecede a probabilidade.

Para $n = 1$ e $n = 2$, ver as fórmulas (1a), (1b), (2a) e (2b) na Secção 3-4.

Exemplo. Para $m = 7$ e $n = 3$, encontre o valor de *T* que origina um nível de significância o mais próximo possível, e superior a 0.05.

Solução. Consultando a coluna correspondente a 0.05 para $m = 7$ e $n = 3$, encontramos $P(T \le 9) = P(T \ge 24) = 0.0583$. Consequentemente, para um teste unilateral à direita, 24 é o valor pretendido de *T*. Se se considerasse a região de rejeição constituída por valores $T \le 9$ ou $T \ge 24$ o teste seria bilateral com nível $2(0.0583) = 0.1166$.

$n = 3$	Níveis de probabilidade mais próximos de							
m	0.10		0.05		0.025		0.005	
3	(7, 14)	1000	(6, 15)	0500				
	(7, 17)	0571	(6, 18)	0286				
4	(8, 16)	1143	(7, 17)	0571	$\overline{(6, 18)}$	0286		
	(8, 19)	0714	(7, 20)	0357	(6, 21)	0179		
5	(9, 18)	1250	(8, 19)	0714	(7, 20)	0357		
	(9, 21)	0833	(8, 22)	0476	(7, 23)	0238		
6	(10, 20)	1310	(9, 21)	0833	(8, 22)	0476	$\overline{(6, 24)}$	0119
	(10, 23)	0917	(8, 25)	0333	(7, 26)	0167		
7	(11, 22)	1333	(9, 24)	0583	(8, 25)	0333	$\overline{(6, 27)}$	0083
	(11, 25)	0970	(9, 27)	0424	(8, 28)	0242		
8	(12, 24)	1394	(10, 26)	0667	(9, 27)	0424	$\overline{(6, 30)}$	0061

$n = 4$								
m								
	(12, 24)	0571	(11, 25)	0286	(10, 26)	0143		
4	(13, 23)	1000	(12, 24)	0571	(11, 25)	0286	$\overline{(10, 26)}$	0143
	(14, 22)	1714						
	(14, 26)	0952	(12, 28)	0317	(11, 29)	0159		
5	(15, 25)	1429	(13, 27)	0556	(12, 28)	0317	$\overline{(10, 30)}$	0079
	(15, 29)	0857	(13, 31)	0333	(12, 32)	0190	(10, 34)	0048
6	(16, 28)	1286	(14, 30)	0571	(13, 31)	0333	(11, 33)	0095
	(16, 32)	0818	(14, 34)	0364	(13, 35)	0212	(10, 38)	0030
7	(17, 31)	1152	(15, 33)	0545	(14, 34)	0364	(11, 37)	0061
	(17, 35)	0768	(15, 37)	0364	(14, 38)	0242	(11, 41)	0040
8	(18, 34)	1071	(16, 36)	0545	(15, 37)	0364	(12, 40)	0081

$n = 5$	Níveis de probabilidade mais próximos de							
m	0.10		0.05		0.025		0.005	
5	(20, 35)	0754	(19, 36)	0476	(17, 38)	0159	(15, 40)	0040
	(21, 34)	1111	(20, 35)	0754	(18, 37)	0278	(16, 39)	0079
6	(22, 38)	0887	(20, 40)	0411	(18 42)	0152	(16, 44)	0043
	(23, 37)	1234	(21, 39)	0628	(19, 41)	0260	(17, 43)	0087
7	(23, 42)	0745	(21, 44)	0366	(20, 45)	0240	(16, 49)	0025
	(24, 41)	1010	(22, 43)	0530	(21, 44)	0366	(17, 48)	0051
8	(25, 45)	0855	(23, 47)	0466	(21, 49)	0225	(17, 53)	0031
	(26, 44)	1111	(24, 46)	0637	(22, 48)	0326	(18, 52)	0054

$n = 6$								
m								
6	(30, 48)	0898	(28, 50)	0465	(26, 52)	0206	(23, 55)	0043
	(31, 47)	1201	(29, 49)	0660	(27, 51)	0325	(24, 54)	0076
7	(32, 52)	0903	(29, 55)	0367	(27, 57)	0175	(24, 60)	0041
	(33, 51)	1171	(30, 54)	0507	(28, 56)	0256	(25, 59)	0070
8	(34, 56)	0906	(31, 59)	0406	(29, 61)	0213	(25, 65)	0040
	(35, 55)	1142	(32, 58)	0539	(30, 60)	0296	(26, 64)	0063

$n = 7$								
m								
7	(41, 64)	0825	(39, 66)	0487	(36, 69)	0189	(32, 73)	0035
	(42, 63)	1043	(40, 65)	0641	(37, 68)	0265	(33, 72)	0055
8	(44, 68)	0946	(41, 71)	0469	(38, 74)	0200	(34, 78)	0047
	(45, 67)	1159	(42, 70)	0603	(39, 73)	0270	(35, 77)	0070

$n = 8$								
m								
8	(55, 81)	0974	(51, 85)	0415	(49, 87)	0249	(43, 93)	0035
	(56, 80)	1172	(52, 84)	0524	(50, 86)	0325	(44, 92)	0052

Valor médio e desvio padrão da estatística T, de Mann-Whitney.

$$\mu_T = n(m + n + 1)/2$$

$$\sigma_T = \sqrt{mn(m + n + 1)/12}$$

As amostras A e B têm m e n observações, respectivamente, e $m \geq n$.

Exemplo. Se $m = 5$ e $n = 4$, a tabela mostra-nos que $\mu_T = 20.0$ e $\sigma_T = 4.08$.

m	n	μ_T	σ_T
1	1	1.5	0.50
2	1	2.0	0.82
	2	5.0	1.29
3	1	2.5	1.12
	2	6.0	1.73
	3	10.5	2.29
4	1	3.0	1.41
	2	7.0	2.16
	3	12.0	2.83
	4	18.0	3.46
5	1	3.5	1.71
	2	8.0	2.58
	3	13.5	3.35
	4	20.0	4.08
	5	27.5	4.79
6	1	4.0	2.00
	2	9.0	3.00
	3	15.0	3.87
	4	22.0	4.69
	5	30.0	5.48
	6	39.0	6.24
7	1	4.5	2.29
	2	10.0	3.42
	3	16.5	4.39
	4	24.0	5.29
	5	32.5	6.16
	6	42.0	7.00
	7	52.5	7.83
8	1	5.0	2.58
	2	11.0	3.83
	3	18.0	4.90
	4	26.0	5.89
	5	35.0	6.83
	6	45.0	7.75
	7	56.0	8.64
	8	68.0	9.52
9	1	5.5	2.87
	2	12.0	4.24
	3	19.5	5.41
	4	28.0	6.48
	5	37.5	7.50
	6	48.0	8.49
	7	59.5	9.45
	8	72.0	10.39
	9	85.5	11.32
10	1	6.0	3.16
	2	13.0	4.65
	3	21.0	5.92
	4	30.0	7.07
	5	40.0	8.16
	6	51.0	9.22
	7	63.0	10.25
	8	76.0	11.25
	9	90.0	12.25
	10	105.0	13.23
11	1	6.5	3.45
	2	14.0	5.07
	3	22.5	6.42
	4	32.0	7.66
11	5	42.5	8.83
	6	54.0	9.95
	7	66.5	11.04
	8	80.0	12.11
	9	94.5	13.16
	10	110.0	14.20
	11	126.5	15.23
12	1	7.0	3.74
	2	15.0	5.48
	3	24.0	6.93
	4	34.0	8.25
	5	45.0	9.49
	6	57.0	10.68
	7	70.0	11.83
	8	84.0	12.96
	9	99.0	14.07
	10	115.0	15.17
	11	132.0	16.25
	12	150.0	17.32
13	1	7.5	4.03
	2	16.0	5.89
	3	25.5	7.43
	4	36.0	8.83
	5	47.5	10.14
	6	60.0	11.40
	7	73.5	12.62
	8	88.0	13.81
	9	103.5	14.97
	10	120.0	16.12
	11	137.5	17.26
	12	156.0	18.38
	13	175.5	19.50
14	1	8.0	4.32
	2	17.0	6.30
	3	27.0	7.94
	4	38.0	9.42
	5	50.0	10.80
	6	63.0	12.12
	7	77.0	13.4
	8	92.0	14.65
	9	108.0	15.87
	10	125.0	17.08
	11	143.0	18.27
	12	162.0	19.44
	13	182.0	20.61
	14	203.0	21.76
15	1	8.5	4.61
	2	18.0	6.71
	3	28.5	8.44
	4	40.0	10.00
	5	52.5	11.46
	6	66.6	12.85
	7	80.5	14.19
	8	96.0	15.49
	9	112.5	16.77
	10	130.0	18.03
	11	148.5	19.27
	12	168.0	20.49
	13	188.5	21.71
	14	210.0	22.91
	15	232.5	24.11

Probabilidades para as estatísticas W e W_S de Wilcoxon, das ordens afectadas de sinais

W = soma de todas as ordens
W_S = menor de entre a soma das ordens com sinal positivo e a soma das ordens com sinal negativo, desprezando os sinais.

Para qualquer linha, $2P(W \geq b) = P(W_S \leq a)$.

As probabilidades indicadas na tabela são as mais próximas dos níveis 0.01, 0.025, 0.05, e 0.10.

Exemplos.

Teste unilateral. Para $n = 6$ e $w = 13$, $P(W \geq 13) = 0.109$.
Teste bilateral. Para $n = 6$ e $w_S = 4$, $P(W_S \leq 4) = 0.219$.

Teste unilateral. Para $n = 9$ e $w = 25$, $P(W \geq 25)$ está entre 0.049 e 0.102. Interpolação linear dá-nos $P(W \geq 25) = 0.084$.

n	a	$P(W_S \leq a)$ bilateral para o menor valor absoluto	b	$P(W \geq b)$ unilateral para a soma total de ordens
1	0	1.	1	0.500
2	0	0.500	3	0.250
3	0	0.250	6	0.125
4	0	0.125	10	0.062
	1	0.250	8	0.125
5	0	0.062	15	0.031
	1	0.125	13	0.062
	2	0.188	11	0.094
6	0	0.031	21	0.016
	1	0.062	19	0.031
	2	0.094	17	0.047
	4	0.219	13	0.109
7	0	0.016	28	0.008
	2	0.047	24	0.023
	4	0.109	20	0.055
	6	0.219	16	0.109
8	2	0.023	32	0.012
	4	0.055	28	0.027
	6	0.109	24	0.055
	8	0.195	20	0.098
9	3	0.020	39	0.010
	6	0.055	33	0.027
	8	0.098	29	0.049
	11	0.203	23	0.102
10	5	0.020	45	0.010
	8	0.049	39	0.024
	11	0.105	33	0.053
	14	0.193	27	0.097
11	7	0.019	52	0.0009
	11	0.054	44	0.027
	14	0.102	38	0.051
	18	0.206	30	0.013
12	10	0.021	58	0.010
	14	0.052	50	0.026
	17	0.092	44	0.046
13	13	0.021	65	0.011
	17	0.048	57	0.024
	21	0.094	49	0.047
	26	0.191	39	0.095
14	16	0.020	73	0.010
	21	0.049	63	0.025
	26	0.104	53	0.052
	31	0.194	43	0.097
15	20	0.022	80	0.011
	25	0.048	70	0.024
	30	0.095	60	0.047
	37	0.208	46	0.104
16	24	0.021	88	0.011
	30	0.051	76	0.025
	36	0.105	64	0.052
	42	0.193	52	0.096
17	28	0.020	97	0.010
	35	0.051	83	0.025
	41	0.098	71	0.049
	49	0.207	55	0.103
18	33	0.021	105	0.010
	40	0.048	91	0.024
	47	0.099	77	0.049
	55	0.196	61	0.098
19	38	0.020	114	0.010
	46	0.049	98	0.025
	54	0.104	82	0.052
	62	0.196	66	0.098
20	43	0.019	124	0.010
	52	0.048	106	0.024
	60	0.097	90	0.049
	70	0.202	70	0.101

Desvio padrão da estatística W, de Wilcoxon

W = soma das ordens.

$$\sigma_W = \sqrt{n(n+1)(2n+1)/6} \qquad (\mu_W = 0)$$

Exemplo. Para 8 observações emparelhadas, $\sigma_W = 14.28$

n	σ_W	n	σ_W	n	σ_W	n	σ_W
1	1.00	14	31.86	27	83.25	40	148.80
2	2.24	15	35.21	28	87.83	41	154.34
3	3.74	16	38.68	29	92.49	42	159.95
4	5.48	17	42.25	30	97.24	43	165.63
5	7.42	18	45.92	31	102.06	44	171.38
6	9.54	19	49.70	32	106.96	45	177.19
7	11.83	20	53.57	33	111.93	46	183.06
8	14.28	21	57.54	34	116.98	47	189.00
9	16.88	22	61.60	35	122.11	48	195.00
10	19.62	23	65.76	36	127.30	49	201.06
11	22.49	24	70.00	37	132.57	50	207.18
12	25.50	25	74.33	38	137.91		
13	28.62	26	78.75	39	143.32		

Probabilidades para D, a soma dos quadrados das diferenças das ordens, e valores dos coeficientes de correlação ordinal, R_S

A variável aleatória D assume valores $\sum d^2$, e a variável aleatória R_S assume valores r_S.

A tabela lista as probabilidades mais próximas dos níveis unilaterais 0.025, 0.05, e 0.10.

Exemplos. Se $n = 6$ e $\sum d^2 = 8$, tem-se $r_S = 0.771$, $P(D \leq 8) = P(R_S \geq 0.771) = 0.051$.

Se $n = 7$ e $r_S = -0.571$, $P(R_S \leq -0.571) = 0.100$.

	r_S. positivo			r_S. negativo		
n	$\sum d^2$	r_S	$P(D \leq \sum d^2) = P(R_S \geq r_S)$	$\sum d^2$	r_S	$P(D \leq \sum d^2) = P(R_S \geq r_S)$
2	0	1	0.500	2	−1	0.500
3	0	1	0.167	8	−1	0.167
4	0	1	0.042	18	−0.8	0.167
	2	0.8	0.167	20	−1	0.042
5	0	1	0.008	34	−0.7	0.117
	2	0.9	0.042	38	−0.9	0.042
	6	0.7	0.117	40	−1	0.008
6	6	0.829	0.029	58	−0.657	0.088
	8	0.771	0.051	62	−0.771	0.051
	12	0.657	0.088	64	−0.771	0.051
7	12	0.786	0.024	88	−0.571	0.100
	18	0.679	0.055	94	−0.679	0.055
	24	0.571	0.100	100	−0.786	0.024
8	22	0.738	0.023	128	−0.524	0.098
	30	0.643	0.048	138	−0.643	0.048
	40	0.524	0.098	146	−0.738	0.023
9	38	0.683	0.025	178	−0.483	0.097
	48	0.600	0.048	192	−0.600	0.048
	62	0.483	0.097	202	−0.683	0.025
10	58	0.648	0.024	238	−0.442	0.102
	72	0.564	0.048	258	−0.564	0.048
	92	0.442	0.102	272	−0.648	0.024
11	86	0.609	0.026	312	−0.418	0.102
	104	0.527	0.050	336	−0.527	0.050
	128	0.418	0.102	354	−0.609	0.026

Probabilidades para a estatística H, de Kruskal-Wallis: três ou quatro categorias

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{C} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

P é a probabilidade de H assumir um valor igual ou superior ao correspondente valor tabelado.

São dados os valores de $\sum \frac{R_i^2}{n_i}$ e h para as probabilidades mais próximas de 0.99, 0.95, 0.90, 0.75, 0.50, 0.25, 0.10, 0.05, e 0.01.

Exemplo. Se $N = 12$, $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, $n_3 = 3$, e $\sum \frac{R_i^2}{n_i} = 580.2$, tem-se $h = 5.63$ e $P(H \geq 5.63) = 0.050$.

Valores não tabelados podem ser obtidos por interpolação linear.

Estatística de Kruskal-Wallis: três categorias

N	n_1	n_2	n_3	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P
4	2	1	1	25.5	0.30	1.
				28.0	1.80	0.833
				29.5	2.70	0.500
5	3	1	1	46.3	0.53	1.
				47.0	0.80	0.800
				50.3	2.13	0.700
				53.0	3.20	0.300
5	2	2	1	45.0	0	1.
				46.0	0.40	0.933
				46.5	0.60	0.867
				48.5	1.40	0.733
				50.0	2.00	0.600
				51.0	2.40	0.467
				52.5	3.00	0.333
				54.0	3.60	0.200
6	4	1	1	74.0	0.14	1.
				76.2	0.79	0.933
				77.0	1.00	0.800
				82.2	2.50	0.467
				86.0	3.57	0.200
6	3	2	1	73.8	0.10	1.
				74.3	0.24	0.933
				75.0	0.43	0.900
				77.8	1.24	0.700
				81.0	2.14	0.533
				84.3	3.10	0.267
				88.5	4.29	0.100
6	2	2	2	73.5	0	1.
				74.5	0.29	0.933
				76.5	0.86	0.800
				80.5	2.00	0.533
				86.5	3.71	0.200
				89.5	4.57	0.067
7	5	1	1	113.2	0.26	1.
				114.0	0.43	0.905
				117.2	1.11	0.762
				122.8	2.31	0.524
				125.2	2.83	0.333
				130.0	3.86	0.143

N	n_1	n_2	n_3	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P
7	4	2	1	112.0	0	1.
				113.2	0.27	0.933
				113.5	0.32	0.895
				117.0	1.07	0.743
				121.5	2.04	0.495
				125.5	2.89	0.267
				130.8	4.02	0.114
				134.5	4.82	0.057
7	3	3	1	112.7	0.14	0.986
				113.3	0.29	0.957
				114.7	0.57	0.871
				117.3	1.14	0.743
				121.3	2.00	0.514
				126.7	3.14	0.243
				133.3	4.57	0.100
				136.0	5.14	0.043
7	3	2	2	112.0	0	1.
				112.8	0.18	0.971
				113.0	0.21	0.895
				115.3	0.71	0.743
				119.5	1.61	0.524
				128.0	3.43	0.248
				132.8	4.46	0.105
				134.0	4.71	0.048
				137.0	5.36	0.029
8	6	1	1	162.5	0.08	1.
				164.7	0.44	0.964
				165.2	0.53	0.893
				170.0	1.33	0.714
				174.5	2.08	0.500
				180.7	3.11	0.250
				186.5	4.08	0.107
8	5	2	1	162.3	0.05	1.
				163.2	0.20	0.940
				164.7	0.45	0.905
				168.0	1.00	0.750
				173.5	1.92	0.488
				178.8	2.80	0.286
				187.2	4.20	0.095
				192.0	5.00	0.048
				193.5	5.25	0.036
8	4	3	1	162.3	0.06	1.
				163.2	0.21	0.950
				164.6	0.43	0.900
				167.2	0.88	0.743
				173.0	1.83	0.514
				178.6	2.76	0.229
				186.3	4.06	0.093
				193.2	5.21	0.050
				197.0	5.83	0.021
8	4	2	2	162.0	0	1.
				162.8	0.12	0.971
				164.0	0.33	0.890
				166.0	0.67	0.757
				172.8	1.79	0.514
				180.8	3.12	0.248
				188.8	4.46	0.100
				192.8	5.12	0.052
				198.0	6.00	0.014
8	3	3	2	162.2	0.03	1.
				163.3	0.22	0.946
				163.5	0.25	0.896
				166.2	0.69	0.757
				172.8	1.81	0.511
				180.8	3.14	0.243
				189.3	4.56	0.100
				192.8	5.14	0.061
				199.5	6.25	0.011
9	7	1	1	226.1	0.15	1.
				227.0	0.27	0.944
				229.6	0.61	0.917
				233.0	1.07	0.750
				241.6	2.21	0.500
				245.6	2.74	0.306
				257.0	4.27	0.083
9	6	2	1	225.7	0.09	0.984
				226.2	0.16	0.960
				227.7	0.36	0.889
				231.2	0.82	0.730
				238.5	1.80	0.500
				247.2	2.96	0.230
				256.5	4.20	0.095
				261.2	4.82	0.048
				267.0	5.60	0.024

N	n_1	n_2	n_3	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P
9	5	3	1	225.5	0.07	0.992
				226.3	0.18	0.952
				227.5	0.34	0.889
				231.1	0.82	0.750
				238.3	1.78	0.488
				246.3	2.84	0.258
				255.1	4.02	0.095
				261.5	4.87	0.052
				273.0	6.40	0.012
9	5	2	2	225.7	0.09	0.984
				226.0	0.13	0.937
				226.8	0.24	0.913
				230.8	0.77	0.759
				237.7	1.69	0.495
				248.5	3.13	0.254
				257.8	4.37	0.090
				262.8	5.04	0.056
				274.0	6.53	0.008
9	4	4	1	225.5	0.07	0.987
				226.2	0.17	0.968
				227.2	0.30	0.911
				231.5	0.87	0.759
				238.2	1.77	0.498
				245.2	2.70	0.260
				255.5	4.07	0.102
				262.2	4.97	0.048
				275.0	6.67	0.010
9	4	3	2	225.6	0.08	0.987
				225.8	0.11	0.944
				227.1	0.28	0.902
				230.2	0.70	0.756
				237.1	1.61	0.502
				248.2	3.10	0.251
				258.3	4.44	0.102
				265.5	5.40	0.051
				272.2	6.30	0.011
9	3	3	3	225.7	0.09	0.993
				227.0	0.27	0.929
				227.7	0.36	0.879
				231.0	0.80	0.721
				237.7	1.69	0.511
				249.0	3.20	0.254
				259.7	4.62	0.100
				267.0	5.60	0.050
				273.7	6.49	0.011
10	8	1	1	303.0	0.05	1.
				305.5	0.33	0.933
				307.0	0.49	0.889
				313.0	1.15	0.733
				321.1	2.03	0.489
				329.5	2.95	0.244
				343.0	4.42	0.067
10	7	2	1	302.8	0.03	1.
				305.1	0.28	0.939
				305.3	0.30	0.900
				310.8	0.90	0.744
				319.0	1.80	0.494
				328.5	2.84	0.244
				341.0	4.20	0.100
				345.6	4.71	0.050
				356.5	5.89	0.017
10	6	3	1	303.0	0.05	0.983
				304.2	0.18	0.952
				305.5	0.33	0.921
				309.7	0.78	0.752
				318.8	1.78	0.502
				329.5	2.95	0.255
				338.3	3.91	0.095
				347.0	4.85	0.050
				362.8	6.58	0.012

N	n_1	n_2	n_3	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P	N	n_1	n_2	n_3	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P
10	6	2	2	303.2	0.07	0.984	10	4	3	3	302.9	0.05	0.984
				303.5	0.11	0.946					304.0	0.16	0.941
				305.2	0.29	0.911					305.6	0.34	0.895
				309.2	0.73	0.743					308.9	0.70	0.764
				318.5	1.75	0.500					317.3	1.62	0.497
				330.2	3.02	0.244					329.6	2.95	0.253
				343.2	4.44	0.108					345.6	4.70	0.101
				348.5	5.02	0.051					355.0	5.73	0.050
				362.5	6.55	0.011					364.3	6.75	0.010
10	5	4	1	303.0	0.06	0.983	11	9	1	1	397.1	0.10	1.
				304.2	0.19	0.952					400.4	0.40	0.945
				305.2	0.29	0.906					401.1	0.46	0.909
				310.0	0.82	0.762					407.8	1.07	0.745
				318.8	1.78	0.498					416.4	1.86	0.509
				329.0	2.90	0.251					426.4	2.77	0.255
				338.8	3.96	0.102					437.1	3.74	0.127
				347.0	4.86	0.056					446.0	4.55	0.055
				365.2	6.84	0.011	11	8	2	1	396.6	0.06	0.990
10	5	3	2	303.1	0.07	0.981					397.5	0.14	0.958
				303.7	0.13	0.951					400.1	0.38	0.901
				305.0	0.28	0.901					406.1	0.92	0.739
				309.0	0.71	0.743					415.6	1.78	0.501
				317.3	1.61	0.502					426.6	2.78	0.251
				329.8	2.98	0.252					440.1	4.01	0.093
				343.7	4.49	0.101					446.6	4.60	0.053
				350.6	5.25	0.049					463.5	6.14	0.012
10	4	4	2	303.0	0.05	0.988	11	7	3	1	396.5	0.04	0.994
				304.2	0.19	0.940					397.9	0.17	0.955
				305.0	0.27	0.893					400.3	0.39	0.903
				309.2	0.74	0.757					405.9	0.90	0.765
				317.5	1.64	0.510					415.1	1.74	0.503
				330.5	3.05	0.239					427.9	2.90	0.230
				344.2	4.55	0.098					438.3	3.84	0.105
				350.5	5.24	0.052					450.5	4.95	0.047
				365.5	6.87	0.011					469.1	6.65	0.011

N	n_1	n_2	n_3	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P
11	7	2	2	396.6	0.06	0.990
				397.0	0.09	0.958
				398.6	0.24	0.895
				403.3	0.66	0.746
				413.6	1.60	0.509
				429.8	3.07	0.251
				445.8	4.53	0.099
				452.6	5.14	0.044
				468.6	6.60	0.011
11	6	4	1	396.4	0.04	0.993
				397.7	0.15	0.955
				399.9	0.36	0.895
				405.9	0.90	0.757
				415.2	1.75	0.499
				426.7	2.79	0.254
				440.4	4.04	0.094
				450.4	4.95	0.047
				473.9	7.08	0.010
11	6	3	2	396.5	0.05	0.992
				397.5	0.14	0.951
				398.7	0.24	0.900
				403.5	0.68	0.747
				414.0	1.64	0.496
				428.0	2.91	0.253
				446.0	4.55	0.101
				453.5	5.23	0.052
				472.7	6.97	0.009
11	5	5	1	396.4	0.04	0.994
				398.0	0.18	0.944
				400.4	0.40	0.885
				406.0	0.91	0.752
				415.2	1.75	0.493
				428.0	2.91	0.242
				440.4	4.04	0.105
				450.0	4.91	0.053
				476.4	7.31	0.009
11	5	4	2	396.4	0.04	0.992
				397.6	0.14	0.952
				398.8	0.25	0.902
				402.8	0.62	0.749
				413.5	1.59	0.499
				428.0	2.91	0.249
				445.7	4.52	0.101
				454.0	5.27	0.051
				474.3	7.12	0.010
11	5	3	3	396.5	0.05	0.994
				397.9	0.17	0.948
				398.7	0.24	0.902
				403.5	0.68	0.765
				412.8	1.53	0.505
				428.7	2.97	0.242
				445.9	4.53	0.097
				456.7	5.52	0.051
				472.8	6.98	0.011
11	4	4	3	396.5	0.05	0.993
				397.6	0.14	0.959
				399.6	0.33	0.890
				403.3	0.67	0.742
				413.0	1.55	0.503
				428.2	2.93	0.250
				446.0	4.55	0.099
				457.3	5.58	0.051
				474.6	7.14	0.010
12	10	1	1	509.6	0.20	0.985
				509.9	0.22	0.955
				513.9	0.53	0.909
				521.1	1.08	0.742
				531.5	1.88	0.500
				544.4	2.88	0.273
				557.6	3.89	0.106
				567.5	4.65	0.046

N	n_1	n_2	n_3	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P
12	9	2	1	507.8	0.06	0.985
				509.5	0.19	0.958
				511.3	0.33	0.894
				517.8	0.83	0.748
				531.1	1.85	0.491
				545.5	2.96	0.248
				557.8	3.91	0.100
				569.9	4.84	0.048
				589.5	6.35	0.009
12	8	3	1	507.5	0.04	0.989
				509.8	0.22	0.946
				511.1	0.32	0.902
				517.5	0.80	0.746
				529.8	1.76	0.508
				544.1	2.86	0.256
				559.1	4.01	0.099
				570.5	4.88	0.048
				595.5	6.80	0.009
12	8	2	2	507.6	0.05	0.990
				508.5	0.12	0.952
				509.6	0.20	0.911
				516.6	0.74	0.757
				529.0	1.69	0.494
				546.6	3.05	0.251
				565.0	4.46	0.101
				572.6	5.05	0.053
				591.6	6.51	0.010
12	7	4	1	507.5	0.04	0.989
				509.5	0.20	0.947
				511.2	0.33	0.897
				517.6	0.81	0.754
				529.8	1.76	0.505
				543.5	2.81	0.260
				559.2	4.02	0.103
				571.3	4.95	0.052
				597.8	6.99	0.010
12	7	3	2	507.6	0.05	0.987
				508.3	0.10	0.954
				510.0	0.23	0.902
				516.0	0.69	0.752
				527.3	1.56	0.494
				546.0	3.00	0.251
				566.0	4.54	0.101
				576.5	5.34	0.050
				595.0	6.84	0.010
12	6	5	1	507.5	0.04	0.990
				509.5	0.19	0.950
				511.2	0.32	0.900
				518.0	0.84	0.752
				529.9	1.76	0.505
				543.3	2.79	0.263
				558.0	3.92	0.104
				569.9	4.84	0.051
				598.0	7.00	0.010
12	6	4	2	507.4	0.03	0.993
				508.7	0.13	0.951
				510.0	0.23	0.909
				516.4	0.72	0.743
				528.4	1.65	0.502
				546.0	3.00	0.252
				565.4	4.49	0.100
				575.4	5.26	0.050
				602.4	7.34	0.010
12	6	3	3	507.3	0.03	0.990
				508.5	0.12	0.962
				510.7	0.28	0.888
				516.0	0.69	0.761
				526.7	1.51	0.503
				545.8	2.99	0.249
				566.7	4.59	0.098
				580.0	5.62	0.050
				600.5	7.19	0.010

N	n_1	n_2	n_3	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P
12	5	5	2	507.6	0.05	0.988
				509.2	0.17	0.947
				510.3	0.25	0.896
				516.0	0.69	0.749
				528.4	1.65	0.496
				546.3	3.02	0.243
				565.6	4.51	0.100
				575.2	5.25	0.051
				601.5	7.27	0.010
12	5	4	3	507.4	0.03	0.990
				508.5	0.12	0.953
				510.3	0.26	0.900
				515.4	0.64	0.754
				526.6	1.51	0.495
				545.3	2.95	0.251
				566.1	4.55	0.099
				580.2	5.63	0.050
				603.8	7.44	0.010
12	4	4	4	507.5	0.04	0.994
				509.0	0.15	0.941
				510.5	0.27	0.913
				516.5	0.73	0.746
				526.5	1.50	0.510
				545.0	2.92	0.252
				567.5	4.65	0.097
				581.0	5.69	0.049
				605.0	7.54	0.011
13	11	1	1	638.1	0.07	1.
				641.4	0.29	0.962
				642.8	0.38	0.910
				654.5	1.15	0.744
				666.5	1.94	0.500
				682.8	3.02	0.231
				698.1	4.03	0.090
				709.0	4.75	0.038
13	10	2	1	637.6	0.04	0.993
				639.4	0.16	0.946
				641.6	0.30	0.904
				649.4	0.82	0.751
				664.9	1.84	0.513
				680.5	2.87	0.247
				697.6	4.00	0.105
				710.4	4.84	0.049
				734.5	6.43	0.009
13	9	3	1	638.1	0.07	0.987
				639.4	0.16	0.950
				642.3	0.35	0.894
				649.0	0.79	0.754
				664.8	1.83	0.496
				680.3	2.86	0.247
				698.8	4.07	0.099
				710.8	4.86	0.052
				737.0	6.59	0.010
13	9	2	2	637.6	0.04	0.993
				639.4	0.16	0.944
				640.5	0.23	0.905
				646.8	0.64	0.755
				661.1	1.59	0.497
				684.9	3.16	0.248
				704.3	4.44	0.101
				714.0	5.08	0.051
				738.4	6.69	0.011
13	8	4	1	638.1	0.07	0.987
				639.1	0.14	0.951
				642.0	0.33	0.901
				649.5	0.82	0.748
				664.2	1.80	0.502
				679.4	2.79	0.255
				698.2	4.04	0.099
				712.2	4.96	0.050
				742.5	6.96	0.010
13	8	3	2	637.5	0.03	0.995
				639.0	0.13	0.947
				641.0	0.26	0.896
				647.0	0.66	0.752
				660.5	1.55	0.500
				682.8	3.02	0.253
				704.5	4.45	0.101
				717.6	5.32	0.050
				743.0	6.99	0.010

N	n_1	n_2	n_3	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P	N	n_1	n_2	n_3	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P
13	7	5	1	638.1	0.08	0.988	13	6	5	2	637.7	0.04	0.986
				638.9	0.13	0.954					639.4	0.16	0.942
				641.8	0.32	0.904					640.3	0.22	0.903
				649.3	0.81	0.749					646.7	0.64	0.751
				664.2	1.79	0.500					660.5	1.55	0.499
				679.3	2.79	0.251					682.7	3.01	0.250
				698.2	4.04	0.098					704.9	4.47	0.100
				712.8	5.00	0.051					717.7	5.32	0.051
				742.9	6.99	0.010					747.7	7.30	0.010
13	7	4	2	637.6	0.04	0.986	13	6	4	3	637.5	0.03	0.988
				638.6	0.11	0.949					638.8	0.12	0.950
				640.5	0.23	0.899					640.8	0.25	0.907
				646.6	0.63	0.753					646.9	0.65	0.748
				660.5	1.55	0.502					660.2	1.53	0.499
				682.3	2.99	0.251					680.9	2.90	0.251
				706.0	4.55	0.100					706.8	4.60	0.100
				718.3	5.36	0.051					722.0	5.60	0.050
				748.0	7.32	0.010					750.2	7.47	0.010
13	7	3	3	637.5	0.03	0.996	13	5	5	3	637.5	0.04	0.989
				638.9	0.13	0.948					638.7	0.11	0.951
				641.3	0.28	0.895					640.6	0.24	0.902
				648.0	0.72	0.747					647.0	0.66	0.751
				660.0	1.51	0.498					659.9	1.51	0.497
				681.6	2.94	0.249					681.5	2.94	0.246
				705.6	4.52	0.101					705.9	4.55	0.100
				722.0	5.60	0.050					722.3	5.63	0.051
				746.6	7.23	0.010					751.4	7.54	0.010
13	6	6	1	638.2	0.08	0.987	13	5	4	4	637.4	0.03	0.996
				640.0	0.20	0.946					638.8	0.12	0.952
				642.2	0.34	0.897					640.4	0.23	0.903
				649.0	0.79	0.744					646.7	0.64	0.745
				664.2	1.79	0.504					660.2	1.53	0.501
				679.0	2.77	0.256					681.2	2.92	0.249
				697.7	4.00	0.098					707.0	4.62	0.100
				710.7	4.86	0.051					722.2	5.62	0.050
				744.2	7.07	0.010					754.7	7.76	0.009

N	n_1	n_2	n_3	n_4	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P
5	2	1	1	1	47.0	0.80	1.
					50.5	2.20	0.900
					53.0	3.20	0.700
					54.5	3.80	0.400
6	3	1	1	1	77.0	1.38	0.900
					78.3	1.38	0.900
					82.3	2.52	0.800
					86.3	3.67	0.500
					89.0	4.43	0.200
6	2	2	1	1	74.0	0.14	1.
					76.5	0.86	0.956
					78.0	1.29	0.911
					82.0	2.43	0.711
					86.0	3.57	0.467
					88.5	4.29	0.267
					90.0	4.71	0.133
7	4	1	1	1	114.0	0.43	1.
					117.2	1.12	0.971
					119.0	1.50	0.914
					121.2	1.98	0.771
					126.0	3.00	0.543
					131.2	4.12	0.286
					135.0	4.93	0.114
7	3	2	1	1	113.5	0.32	0.981
					114.8	0.61	0.962
					117.5	1.18	0.886
					121.5	2.04	0.743
					126.8	3.18	0.476
					131.5	4.18	0.210
					136.0	5.14	0.086
					137.5	5.46	0.057
7	2	2	2	1	113.0	0.21	0.990
					114.5	0.54	0.952
					116.0	0.86	0.895
					121.0	1.93	0.752
					126.5	3.11	0.476
					133.0	4.50	0.257
					135.5	5.04	0.124
					138.5	5.68	0.038
8	5	1	1	1	165.2	0.53	1.
					166.8	0.80	0.964
					170.8	1.47	0.893
					174.8	2.13	0.750
					180.8	3.13	0.536
					186.8	4.13	0.286
					194.0	5.33	0.071
8	4	2	1	1	163.2	0.21	0.993
					166.0	0.67	0.945
					169.2	1.21	0.900
					173.5	1.92	0.748
					179.2	2.88	0.502
					187.2	4.21	0.243
					193.5	5.25	0.090
					197.0	5.83	0.043
					198.5	6.08	0.029
8	3	3	1	1	164.7	0.44	0.989
					166.7	0.78	0.946
					168.0	1.00	0.896
					173.3	1.89	0.771
					180.7	3.11	0.489
					186.7	4.11	0.289
					194.0	5.33	0.096
					197.3	5.89	0.064
					200.0	6.33	0.021
8	3	2	2	1	163.3	0.22	0.988
					165.0	0.50	0.955
					166.8	0.81	0.900
					172.8	1.81	0.760
					179.3	2.89	0.500
					187.5	4.25	0.255
					194.3	5.39	0.110
					196.8	5.81	0.057
					201.0	6.50	0.014

N	n_1	n_2	n_3	n_4	$\sum \frac{R_i^2}{n_i}$	h	P
8	2	2	2	2	163.0	0.17	0.990
					165.0	0.50	0.952
					167.0	0.83	0.886
					171.0	1.50	0.771
					180.0	3.00	0.495
					189.0	4.50	0.267
					195.0	5.50	0.114
					199.0	6.17	0.038
					202.0	6.67	0.010
9	6	1	1	1	230.2	0.69	0.988
					231.7	0.89	0.940
					234.2	1.22	0.905
					241.7	2.22	0.738
					247.5	3.00	0.488
					255.5	4.07	0.250
					261.7	4.89	0.119
					267.5	5.67	0.048
9	5	2	1	1	226.5	0.20	0.992
					230.2	0.69	0.943
					232.2	0.96	0.903
					239.3	1.91	0.746
					246.2	2.83	0.499
					255.3	4.04	0.258
					263.3	5.11	0.106
					268.2	5.76	0.056
					274.5	6.60	0.016
9	4	3	1	1	227.0	0.27	0.990
					230.2	0.70	0.950
					232.2	0.97	0.907
					238.3	1.78	0.744
					246.3	2.84	0.506
					255.6	4.08	0.250
					263.0	5.07	0.095
					271.3	6.18	0.049
					278.0	7.07	0.010
9	4	2	2	1	226.0	0.13	0.990
					228.5	0.47	0.952
					231.2	0.47	0.952
					237.8	1.70	0.755
					246.0	2.80	0.511
					256.5	4.20	0.252
					266.5	5.53	0.098
					270.0	6.00	0.057
					277.5	7.00	0.010
9	3	3	2	1	226.3	0.18	0.992
					229.7	0.62	0.950
					231.2	0.82	0.901
					237.7	1.69	0.753
					246.3	2.84	0.500
					256.3	4.18	0.250
					267.2	5.62	0.101
					271.2	6.16	0.056
					277.8	7.04	0.011
9	3	2	2	2	226.0	0.13	0.987
					228.0	0.40	0.948
					230.5	0.73	0.900
					236.6	1.51	0.749
					246.0	2.80	0.506
					257.8	4.38	0.248
					267.3	5.64	0.100
					272.5	6.33	0.048
					278.5	7.13	0.008

Probabilidades para a estatística $\chi^2_{(r)}$ de Friedman

$$\chi^2_r = \frac{12}{mI(I+1)} \sum R_i^2 - 3m(I+1),$$

onde R_i é a soma das m ordens atribuídas ao item i, $i = 1, 2, ..., I$. Na tabela χ^2 denota um valor da variável aleatória $\chi^2_{(r)}$. São ainda dados na tabela os valores de $P(\chi^2_{(r)} \geq \chi^2)$ para os níveis 0.01, 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75, e 0.95, e para $I = 3$ e $I = 4$.

Exemplo. Se $I = 4$, $m = 5$, e $\chi^2 = 4.20$, tem-se $P(\chi^2_{(r)} \geq 4.20) = 0.266$. Para valores de χ^2 entre os tabeladas use-se interpolação linear.

$I = 3$

m	χ^2	P
2	0.	1.
	1.00	0.833
	3.00	0.500
	4.00	0.167
3	0.67	0.944
	2.00	0.528
	4.67	0.194
	6.00	0.028
4	0.50	0.931
	1.50	0.653
	2.00	0.431
	3.50	0.273
	4.50	0.125
	6.50	0.042
	8.00	0.005
5	0.40	0.954
	1.20	0.691
	1.60	0.522
	3.60	0.182
	5.20	0.093
	6.40	0.039
	8.40	0.008
6	0.33	0.956
	1.00	0.740
	2.33	0.430
	3.00	0.252
	5.33	0.072
	6.33	0.052
	9.00	0.008

m	χ^2	P
7	0.29	0.964
	0.86	0.768
	2.00	0.486
	3.43	0.237
	4.57	0.112
	6.00	0.051
	8.86	0.008
8	0.25	0.967
	0.75	0.794
	1.75	0.531
	3.25	0.236
	4.75	0.120
	6.25	0.047
	9.00	0.010
9	0.22	0.971
	0.67	0.814
	1.56	0.569
	2.89	0.278
	4.67	0.107
	6.22	0.048
	8.67	0.010
10	0.20	0.974
	0.80	0.710
	1.80	0.436
	3.20	0.222
	5.00	0.092
	6.20	0.046
	8.60	0.012

m	χ^2	P
11	0.18	0.976
	0.73	0.732
	1.64	0.470
	2.91	0.256
	4.91	0.100
	6.54	0.043
	8.91	0.011
12	0.17	0.978
	0.67	0.751
	1.50	0.500
	3.17	0.249
	4.67	0.108
	6.17	0.050
	8.67	0.011
13	0.15	0.980
	0.62	0.767
	1.38	0.527
	2.92	0.278
	4.77	0.098
	6.00	0.050
	8.67	0.012
14	0.14	0.981
	0.57	0.781
	1.71	0.489
	3.00	0.242
	5.14	0.089
	6.14	0.049
	9.00	0.010

m	χ^2	P
15	0.13	0.982
	0.93	0.711
	1.60	0.513
	2.80	0.267
	4.93	0.096
	6.40	0.047
	8.93	0.010

$I = 4$					
m	χ^2	P	m	χ^2	P
2	0.60	0.958	8	0.45	0.957
	1.80	0.792		1.35	0.754
	3.00	0.542		2.55	0.500
	4.80	0.208		4.20	0.247
	6.00	0.042		6.30	0.098
				7.65	0.049
3	0.60	0.958		10.35	0.010
	1.80	0.727			
	2.60	0.524			
	4.20	0.293			
	6.60	0.075			
	7.00	0.054			
	8.20	0.017			
4	0.60	0.930			
	1.50	0.753			
	2.70	0.513			
	4.50	0.237			
	6.00	0.106			
	7.50	0.054			
	9.30	0.011			
5	0.60	0.944			
	1.32	0.769			
	2.52	0.520			
	4.20	0.266			
	6.12	0.102			
	7.80	0.049			
	9.96	0.009			
6	0.40	0.952			
	1.40	0.779			
	2.60	0.517			
	4.20	0.259			
	6.20	0.109			
	7.60	0.043			
	10.20	0.010			
7	0.43	0.964			
	1.46	0.754			
	2.49	0.533			
	4.37	0.239			
	6.26	0.101			
	7.63	0.051			
	10.37	0.009			