

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Faculdade de Economia

DUALIDADE CONJUGADA E QUASE CONJUGADA NAS
TEORIAS DO PRODUTOR E CONSUMIDOR

PARTE II: CONJUGAÇÃO E QUASE CONJUGAÇÃO

Maximiano Reis Pinheiro

Working Paper Nº 42

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
FACULDADE DE ECONOMIA
Campo Grande, 185
1700 LISBOA

Janeiro de 1986

- 1 -

CONTINUED

2.1. FUNÇÕES CONVEXAS E CÔNCAVAS CONJUGADAS

2.1.1. Funções convexas conjugadas: definição e interpretação geométrica

—— Como nota ROCKAFELLAR (1970, p. 102), há duas formas alternativas de caracterizar qualquer curva ou superfície clássica: ou como o lugar geométrico dos seus pontos, isto é, a curva por ela própria, ou então como o envelope das suas tangentes. Esta dualidade de possíveis formas de encarar a mesma curva ou superfície vai levar, no caso da análise convexa, à noção da função conjugada. Com efeito, no corolário 1.1.6.I.1 estabelecemos que um conjunto convexo fechado pode ser encarado como a intersecção de todos os semiespaços fechados que o contêm. Podemos, por isso, encarar o epigrafo de uma função convexa fechada (que é um conjunto convexo fechado) como a intersecção dos semiespaços fechados de $\mathbb{R}^{n+1}$ que o contêm. A seguinte proposição permite fazer a transposição desta linguagem de conjuntos em $\mathbb{R}^{n+1}$ para uma linguagem de funções de $\mathbb{R}^n$

Proposição 2.1.1.I: Seja $f(x)$ uma função convexa fechada de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. Então $f(x)$ é a função supremo por pontos de todas as funções lineares não verticais por ela majoradas. ||

Corolário 2.1.1.I.1: Seja $z(x)$ uma função de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$ e seja $\text{conv } z(x)$ a maior função convexa majorada por $z(x)$. Então $\text{cl}(\text{conv } z)$ é a função supremo por pontos de todas as funções lineares não verticais majoradas por $z(x)$. ||

Seja $f(x)$ uma função convexa fechada (se não for convexa e/ou fechada o que se segue é válido para $\text{cl}(\text{conv } f)$). Entre todas as funções lineares não verticais majoradas por $f(x)$, é óbvio que apenas serão relevantes aquelas que para algum x assumam o mesmo valor que a função f , isto é, aquelas que definam em $\mathbb{R}^{n+1}$ hiperplanos de suporte a $\text{epi } f$. Como determinar as expressões analíticas de tais funções lineares não verticais tangentes a $f(x)$? Seja a função linear não vertical $r = \langle x, x^* \rangle - \beta$, com $x^* \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Podemos reformular a anterior questão: Para um dado x^* e uma dada função convexa de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, como determinar o valor da ordenada

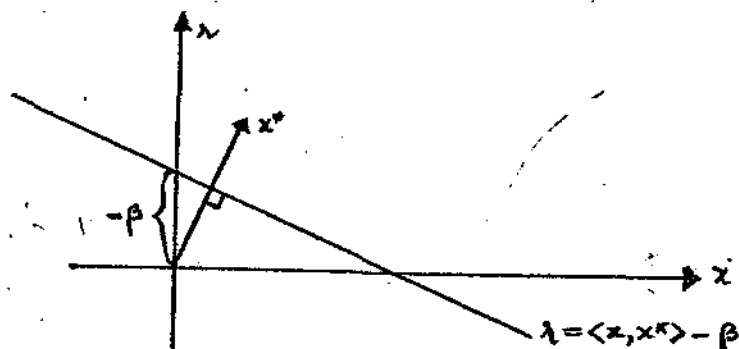


Figura 2.1.1.A: Ilustração de uma função linear não vertical $r = \langle x, x^* \rangle - \beta$

na origem $(-\beta)$ por forma a que a função linear não vertical $r = \langle x, x^* \rangle - \beta$ seja a tangente a $f(x)$?

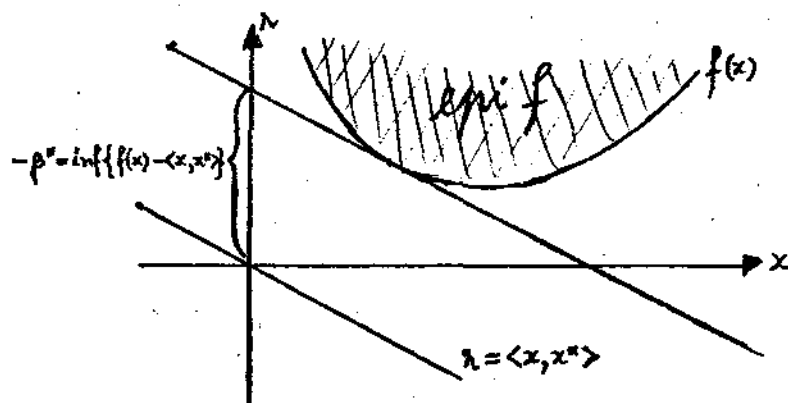


Figura 2.1.1.B.

— A ilustração gráfica apresentada na figura 2.1.1.B mostra-nos claramente a resposta, extensível a $\mathbb{R}^n$. Basta atribuir à ordenada na origem o valor da ínfima distância vertical entre a função $f(x)$ e a função linear que passa pela origem $r = \langle x, x^* \rangle$ (23)

$$-\beta^* = \inf_x \{f(x) - \langle x, x^* \rangle\} \Leftrightarrow \beta^* = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}.$$

Como é óbvio, β^* vai depender de x^* fixado.

Definição: Seja $f(x)$ uma função convexa de $C \subset \mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, com C conjunto convexo. A função conjugada de $f(x)$ é a função:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in C} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}.$$

A função conjugada $f^*(x^*)$ é, portanto, a função que dá, para cada x^* , o simétrico da maior ordenada na origem da função linear não vertical $\langle x, x^* \rangle - \beta$ tangente a $f(x)$.

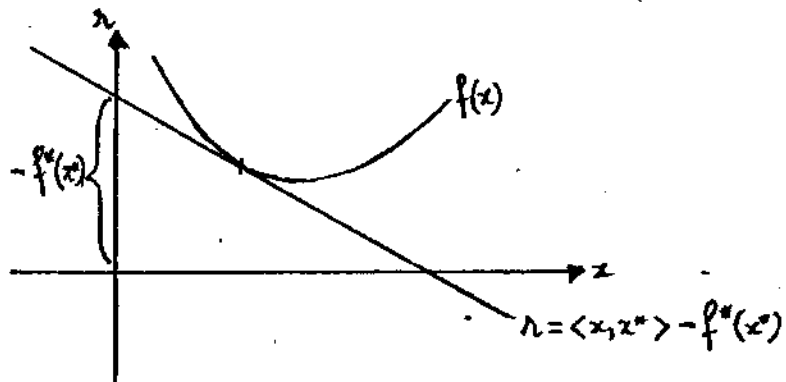
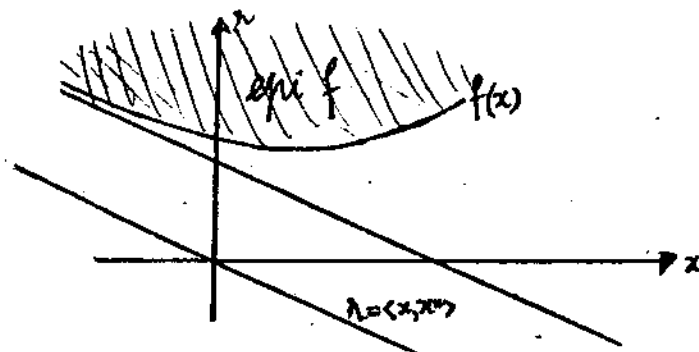


Figura 2.1.1.C: Ilustração da interpretação geométrica de $f^*(x^*)$

(23) - Ínfima e não mínima distância vertical porque podemos deparar com situações do tipo da ilustrada abaixo. Conseguimos assim uma maior generalidade.



2.1.2. Principais propriedades não marginais da conjugada de uma função convexa

—— A proposição que se segue sintetiza as mais importantes propriedades não marginais das funções convexas conjugadas.

Proposição 2.1.2.1: Seja $f(x)$ uma função convexa de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. A sua conjugada $f^*(x^*)$ é uma função convexa fechada, própria sse $f(x)$ é própria. Para além disso, $(cl\ f)^* = f^*$, assim como $f^{**} = cl\ f$.|| Esta proposição estabelece uma relação dual entre uma dada função convexa e as funções lineares não verticais que são por ela majoradas, sumarizadas elegantemente pela função conjugada. A prova disto mesmo consiste em ser possível recuperar a função original, no caso desta ser fechada, a partir da respectiva função conjugada. Mesmo no caso de a função original não ser fechada, recupera-se o mais relevante que é o seu fecho.

—— As funções conjugadas gozam ainda de outras propriedades não marginais para além das que constam da proposição 2.1.2.1. Não as apresentamos porque não nos serão necessárias⁽²⁴⁾.

2.1.3. Conjugação e desigualdade de Fenchel

—— Seja Q o conjunto de pares $(f(x), \varphi(x^*))$ de funções convexas de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$ ⁽²⁵⁾ que respeitam a desigualdade:

$$f(x) + \varphi(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \quad \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$$

(24) - Para outras propriedades veja-se ROCKAFELLAR (1970, p.219 e seguintes).

(25) - A imposição $f, \varphi > -\infty$ destina-se apenas a evitar ambiguidades do tipo $\infty - \infty$.

Muito facilmente podemos constatar que a função $f(x)$ e a sua conjugada constituem um par de funções que pertence a Q e que soluciona o problema de determinação do mais "apertado" par pertencente a Q . Por par mais "apertado" entendemos aquele par (f, ψ) tal que, se se verificar simultaneamente:

$$\hat{f}(x) \leq f(x)$$

$$\hat{\psi}(x^*) \leq \psi(x^*)$$

$$\hat{f}(x) + \hat{\psi}(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \quad \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n,$$

então é porque $\hat{f}=f$ e $\hat{\psi}=\psi$. Ora, partindo de $f(x) + \psi(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$ conclui-se que:

$$(i) \quad f(x) \geq \langle x, x^* \rangle - \psi(x^*), \quad \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f(x) \geq \sup_{x^*} \{ \langle x, x^* \rangle - \psi(x^*) \} = \psi^*(x);$$

e

$$(ii) \quad \psi(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle - f(x), \quad \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \psi(x^*) \geq \sup_x \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \} = f^*(x^*).$$

Assim sendo, e para que a desigualdade $f(x) + \psi^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$ seja respeitada quaisquer que sejam x e $x^* \in \mathbb{R}^n$, teremos que ter necessariamente:

$$f(x) \geq \psi^*(x)$$

$$\psi(x^*) \geq f^*(x^*)$$

Repare-se ainda que, pela definição de conjugada, $f^*(x^*) = \sup_x \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \} \Rightarrow f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \quad \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$, isto é, $(f, f^*) \in Q$. Em suma, concluimos que, dada uma função convexa $f(x)$, a função que com ela forma o par mais "apertado" é precisamente a sua função conjugada. Este facto fornece uma interpretação alternativa possível da conjugação em relação à apresentada na alínea 2.1.1..

——— Proposição 2.1.3.1: Seja $f(x)$ uma função convexa de $\mathbb{R}^n$ em $]-\infty, +\infty]$ e seja $f^*(x^*)$ a sua conjugada. Então: $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle \quad \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$. ||

Corolário 2.1.3.1.1.: Seja $f(x)$ uma função convexa de $\mathbb{R}^n$ em $]-\infty, +\infty]$ e seja $f^*(x^*)$ a sua conjugada. Então: c) $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$. ||
A desigualdade $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$, é usualmente designada por desigualdade de Fenchel para funções convexas conjugadas.

2.1.4. Vectorios conjugados e propriedades marginais das funções convexas conjugadas

——— Definição: Seja $f(x)$ uma função convexa de $\mathbb{R}^n$ em $]-\infty, +\infty]$ e seja $f^*(x^*)$ a sua conjugada. Os vectores $\bar{x}$ e $\bar{x}^*$ são ditos vectores ou pontos conjugados se a desigualdade de Fenchel é respeitada em igualdade para $\bar{x}$ e $\bar{x}^*$; isto é, se $f(\bar{x}) + f^*(\bar{x}^*) = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle$. ||

São fundamentais as seguintes proposições, que estabelecem a relação entre pontos conjugados e subgradiantes duma função convexa e da sua conjugada.

Proposição 2.1.4.1: Seja $f(x)$ uma função convexa própria de $\mathbb{R}^n$ em $]-\infty, +\infty]$ e seja $f^*(x^*)$ a sua conjugada. São equivalentes as 3 seguintes condições:

- (i) $\bar{x}$ e $\bar{x}^*$ são conjugados, isto é, $f(\bar{x}) + f^*(\bar{x}^*) = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle$;
- (ii) $\bar{x}^* \in \partial f(\bar{x})$;
- (iii) $\sup_x \{ \langle x, \bar{x}^* \rangle - f(x) \} = f^*(\bar{x}^*)$ é atingido para $x = \bar{x}$.

Se adicionalmente $f = \text{clf}$, as 2 seguintes condições são equivalentes entre si e equivalentes às anteriores:

$$(iv) \bar{x} \in \partial f^*(\bar{x}^*);$$

$$(v) \sup_{x^*} \{ \langle \bar{x}, x^* \rangle - f^*(x^*) \} = \text{clf}(\bar{x}) = f(\bar{x}) \text{ é atingido para } x^* = \bar{x}^*.$$

Atendendo a que quando uma função convexa é diferenciável num ponto o seu único subgradiente nesse ponto é o respectivo vector gradiente (proposição 1.2.10.IV), no caso de $f(x)$ e $f^*(x^*)$ serem diferenciáveis em $\bar{x}$ e $\bar{x}^*$, (ii) e (iv) virão respectivamente $\bar{x}^* = \nabla f(\bar{x})$ e $\bar{x} = \nabla f^*(\bar{x}^*)$.

— Refira-se a propósito e como curiosidade, que a conjugada $f^*(x^*)$ de uma função $f(x)$ convexa e diferenciável está fortemente relacionada com a sua transformada de Legendre. Com efeito, se $x^* = \nabla f(x)$ definir uma correspondência biunívoca entre x e x^* , poder-se-á explicitar $x = (\nabla f)^{-1}(x^*)$ e substituir na equação de definição de pontos conjugados (pois, pela proposição 2.1.4.I(i) e (ii), $x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$). Disso resultará:

$$f^*(x^*) = \langle (\nabla f)^{-1}(x^*), x^* \rangle - f((\nabla f)^{-1}(x^*)).$$

O membro direito desta expressão é exactamente a expressão da transformada de Legendre da função f . No caso de $x^* = \nabla f(x)$ não definir uma correspondência biunívoca entre x e x^* poderemos, mesmo assim, estabelecer uma formulação fraca da transformação de Legendre por substituição directa de $x^* = \nabla f(x)$ em $f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle$:

$$f^*(\nabla f(x)) = \langle x, \nabla f(x) \rangle - f(x).$$

2.1.5 Conjugadas de funções côncavas e suas propriedades

— Um desenvolvimento similar ao das alíneas anteriores pode ser efectuado para funções côncavas. Tenha-se, contudo, um especial cuidado no encarar da analogia entre conjugadas de funções convexas e concavas, porque a definição de conjugada de uma função côncava não resulta exclusivamente da aplicação da simetria apontada na proposição 1.2.5.I. Há, também, uma mudança de sinal necessária para manter válidas para funções côncavas as propriedades das conjugadas de funções convexas.

— Definição: Seja $g(x)$ uma função côncava de $C\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$ com C convexo. A função conjugada de $g(x)$ é a função

$$g^*(x^*) = \inf_x \{ \langle x, x^* \rangle - g(x) \} \quad ||$$

Proposição 2.1.5.I: Seja $g(x)$ uma função côncava de $C\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, com C convexo. Então:

$$g^*(x^*) = - (-g)^*(-x^*) \quad ||$$

— Graficamente poderemos visualizar $g^*(x^*)$, tal como para a conjugada de uma função convexa, como dando o simétrico das ordenadas na origem das funções lineares não verticais tangentes a $g(x)$.

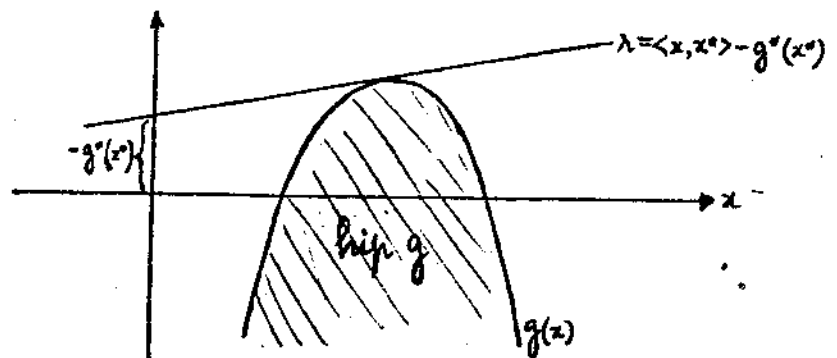


Figura 2.1.5.A: Ilustração da interpretação geométrica de $g^*(x^*)$

— Quanto às propriedades das conjugadas das funções côncavas, elas vêm perfeitamente análogas às estabelecidas para as conjugadas de funções convexas, vindo as desigualdades invertidas e "sup" substituído por "inf".

Proposição 2.1.5.II: Seja $g(x)$ uma função côncava de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. A sua conjugada $g^*(x^*)$ é uma função côncava fechada, própria sse $g(x)$ é própria. Para além disso $(clg)^* = g^*$, assim como $g^{**} = cl\ g$. ||

Proposição 2.1.5.III: Seja $g(x)$ uma função côncava de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty[$ e seja $g^*(x^*)$ a sua conjugada. Então: $g(x) + g^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle, \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$. ||

Corolário 2.1.5.III.1.: Seja $g(x)$ uma função côncava de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty[$ e seja $g^*(x^*)$ a sua conjugada. Então: $clg(x) + g^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle, \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$. ||
A desigualdade $g(x) + g^*(x^*) \leq \langle x, x^* \rangle, \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$, é conhecida por desigualdade de Fenchel para funções côncavas conjugadas.

Definição: Seja $g(x)$ uma função côncava de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$ e seja $g^*(x^*)$ a sua conjugada. Os vectores $\bar{x}$ e $\bar{x}^*$ são ditos vectores ou pontos conjugados se a desigualdade de Fenchel é respeitada em igualdade para $\bar{x}$ e $\bar{x}^*$, isto é, se $g(\bar{x}) + g^*(\bar{x}^*) = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle$. ||

PROPOSIÇÃO 2.1.5.IV: Seja $g(x)$ uma função côncava própria de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty[$ e seja $g^*(x^*)$ a sua conjugada. São equivalentes as 3 seguintes condições:

- (i) $\bar{x}$ e $\bar{x}^*$ são conjugados, isto é, $g(\bar{x}) + g^*(\bar{x}^*) = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle$;
- (ii) $\bar{x}^* \in \partial g(\bar{x})$;
- (iii) $\inf\{\langle x, \bar{x}^* \rangle - g(x)\} = g^*(\bar{x}^*)$ é atingido para $x = \bar{x}$.

Se adicionalmente $g = clg$, as 2 seguintes condições são equivalentes entre si e equivalentes às anteriores:

- (iv) $\bar{x} \in \partial g^*(\bar{x}^*)$;
- (v) $\inf_{x^*} \{\langle \bar{x}, x^* \rangle - g^*(x^*)\} = clg(\bar{x}) = g(\bar{x})$ é atingido para $x^* = \bar{x}^*$. ||

2.1.6. Funções parcialmente conjugadas

—— Finalizamos esta secção 2.1, dedicada à apresentação das relações de conjugação e ao estudo das suas principais propriedades, estendendo esta noção no sentido daquilo que AVRIEL (1976, p.129) designa por conjugação parcial.

—— Suponha-se que $f(x,y)$ é uma função de $\mathbb{R}^{n+m}$ em $[-\infty, +\infty]$. Para cada $y \in \mathbb{R}^m$ admita-se que $f(x,y)$ é convexa. Então a conjugada em x de $f(x,y)$, será dada por $f_x^*(x^*, y) = \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x, y)\}$. Da proposição 2.1.2.I resulta que $f_x^*(x^*, y)$ será uma função convexa fechada em x^* para cada y , bem como $(f_x^*)^* = f$ sse esta for fechada. Igualmente todas as outras propriedades das funções conjugadas se aplicam relativamente às variáveis intervenientes na conjugação. Por isso, quando não houver perigo de ambiguidade, mesmo que se trate de funções conjugadas parcialmente, tornaremos implícito o "parcialmente" e referi-las-emos apenas por funções conjugadas.

2.2. FUNÇÕES SUPORTE DE CONJUNTOS CONVEXOS

2.2.1. Função suporte de um conjunto convexo

———Definição: Função suporte de um conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ é a função: $\delta^*(x^*|C) = \sup_x \{ \langle x, x^* \rangle \mid x \in C \}$ ⁽²⁶⁾. ||

A função suporte de um conjunto convexo traduz, para cada x^* , qual o valor ótimo do problema de determinação do supremo de uma função linear $\langle x, x^* \rangle$ num conjunto convexo C ⁽²⁷⁾. Também os valores ótimos de determinação do ínfimo de uma função linear podem ser traduzidos utilizando o conceito de função suporte, já que

$$\inf \{ \langle x, x^* \rangle \mid x \in C \} = -\sup \{ \langle x, -x^* \rangle \mid x \in C \} = -\delta^*(-x^*|C).$$

———A função suporte de um conjunto convexo C recebe a sua designação do facto de ela sintetizar o conjunto suporte de C , isto é, o conjunto de todos os semiespaços fechados que contêm C . Com efeito, pela definição de função suporte de um conjunto C temos que:

$$\delta^*(x^*|C) \geq \langle x, x^* \rangle, \forall x \in C, x^* \in \mathbb{R}^n,$$

o que significa que se $x \in C$ então:

$$\langle x, x^* \rangle \leq \delta^*(x^*|C), \forall x^* \in \mathbb{R}^n.$$

Logo, para dado x^* , o semiespaço fechado $\{x \mid \langle x, x^* \rangle \leq \delta^*(x^*|C)\}$ contém C . Por outro lado, um semiespaço $\{x \mid \langle x, x^* \rangle \leq \beta\}$ com $\beta < \delta^*(x^*|C)$ não poderá conter C , pois bastará escolher $x^1 \in C$ tal que

$$\beta < \langle x^1, x^* \rangle \leq \delta^*(x^*|C)$$

para que $x^1 \notin \{x \mid \langle x, x^* \rangle \leq \beta\}$. Também os semiespaços $\{x \mid \langle x, x^* \rangle \leq \beta\}$, continuando a supor $\beta < \delta^*(x^*|C)$, não poderão conter C pois será sempre possível obter um vector $x^2 \in C$ tal que tenhamos simultaneamente

(26) - A notação δ^* será esclarecida na próxima alínea.

(27) - Se a função linear incluir um termo constante, isto é, se assumir a forma $\langle x, x^* \rangle - \beta$, o valor ótimo será dado por $\delta^*(x^*|C) - \beta$. Note-se ainda que se o conjunto convexo C for fechado e limitado podemos substituir o "sup" por "max".

$\langle x^2, x^* \rangle \leq \delta^*(x^* | C)$ e $\langle x^2, x^* \rangle < \beta$. Em suma, podemos garantir que os únicos semiespaços fechados que contêm C são os semiespaços $\{x | \langle x, x^* \rangle \leq \delta^*(x^* | C)\}$ definidos para cada x^* . Atendendo a que pelo corolário 1.1.6.II. 1 um conjunto convexo fechado é a intersecção de todos os semiespaços fechados que o contêm, está demonstrada a seguinte importante proposição:

Proposição 2.2.1.I: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado. Então:

$$C = \{x | \langle x, x^* \rangle \leq \delta^*(x^* | C), \forall x^* \in \mathbb{R}^n\}. \quad ||$$

Corolário 2.2.1.I.1: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Então:

$$cl C = \{x | \langle x, x^* \rangle \leq \delta^*(x^* | C), \forall x^* \in \mathbb{R}^n\}. \quad ||$$

Corolário 2.2.1.I.2: Sejam $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos. Então

$$cl C_1 \subset cl C_2 \text{ sse } \delta^*(x^* | C_1) \leq \delta^*(x^* | C_2), \forall x^* \in \mathbb{R}^n. \quad ||$$

2.2.2. Função suporte como conjugada da função indicadora

— Seja a função indicadora de um conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$, que definimos na alínea 1.2.3 como a função convexa:

$$\delta(x | C) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C \\ +\infty & \text{se } x \notin C \end{cases}$$

A conjugada desta função indicadora poderá ser obtida fazendo

$$\delta^*(x^* | C) = \sup\{\langle x, x^* \rangle - \delta(x | C)\} = \sup\{\langle x, x^* \rangle | x \in C\}.$$

Proposição 2.2.2.I: Seja um conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$. A função suporte de C é a conjugada da função indicadora deste conjunto. Se C é fechado, então as respectivas funções suporte e indicadora são conjugadas uma da outra. ||

Corolário 2.2.2.I.1: Seja $\delta^*(x^* | C)$ a função suporte de um conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$. Então: $cl C = \{x | [\delta^*(x^* | C)]^* = 0\} (= \{x | cl \delta(x | C) = 0\})$.

Em particular, se C é fechado: $C = \{x | [\delta^*(x^* | C)]^* = 0\} (= \{x | \delta(x | C) = 0\})$. ||

Proposição 2.2.2.II: A função suporte de um conjunto convexo não vazio $C \subset \mathbb{R}^n$ é uma função convexa fechada própria linearmente homogênea. Inversamente, uma função convexa fechada própria e linearmente homogênea é função suporte de algum conjunto convexo fechado não vazio. ||

Proposição 2.2.2.III: Seja $f(x)$ uma função convexa fechada de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. A função suporte de $\{x | f(x) \leq 0\}$ é cl $h^*(x^*)$, em que $h^*(x^*)$ é a função convexa linearmente homogênea gerada por f^* . Dualmente, o fecho da função convexa linearmente homogênea gerada por f é a função suporte do conjunto $\{x^* | f^*(x^*) \leq 0\}$. ||

2.2.3. Cones polares e funções suporte de cones convexos

—— Proposição 2.2.3.I: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo não vazio e fechado. Então a função indicadora $\delta(x|K)$ é uma função convexa própria fechada linearmente homogênea. ||

Sendo $\delta(x|K)$ uma função convexa própria fechada linearmente homogênea, ela é, pela proposição 2.2.2.II, a função suporte de algum conjunto convexo não vazio que representaremos provisoriamente por $\hat{K}$:

$$\delta(x|K) = \delta^*(x|\hat{K})$$

Assim sendo, vem também que $\delta(x^*|\hat{K}) = [\delta^*(x|\hat{K})]^* = \delta^*(x^*|K)$, o que implica que a função indicadora de $\hat{K}$ é linearmente homogênea, pois é idêntica à função suporte de K . A proposição 1.2.4.IV permite concluir que $\hat{K}$ é um cone, para além de ser convexo fechado e não vazio como tínhamos visto mais acima. Pela proposição 2.2.1.I vêm então que $\hat{K} = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq \delta^*(x|\hat{K}), \forall x\} = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq \delta(x|K), \forall x\} = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq 0, \forall x \in K\} = K^0$.

O próximo resultado realça o que acabámos de constatar.

Proposição 2.2.3.II: A função indicadora de um cone convexo fechado não vazio $K \subset \mathbb{R}^n$ é a função suporte do seu cone polar K^0 , o qual é também um cone convexo fechado e não vazio. ||

A anterior proposição pode ser aproveitada para estabelecer uma importante propriedade dos cones polares, com a qual encerraremos esta secção 2.2.

Corolário 2.2.3.II.1: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo fechado não vazio, e seja K^0 o seu cone polar. Então $K^{00} = K$. ||

2.3. FUNÇÕES "GAUGE" E CONJUNTOS POLARES

2.3.1. Funções "gauge" de tipo I de um conjunto convexo e suas propriedades

— Definição: Função "gauge" de tipo I (para maior brevidade, função gauge-I) de um conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ (28), que representaremos por $\gamma_1(x|C)$, é a função convexa linearmente homogênea gerada pela função convexa $f(x) = \delta(x|C) + 1$.

Atendendo à definição, a função gauge-I de um conjunto convexo C será a maior função convexa linearmente homogênea majorada por $\delta(x|C) + 1$, isto é, a função cujo epigrafo é o cone de $\mathbb{R}^{n+1}$ gerado pelo epigrafo de $\delta(x|C) + 1$.

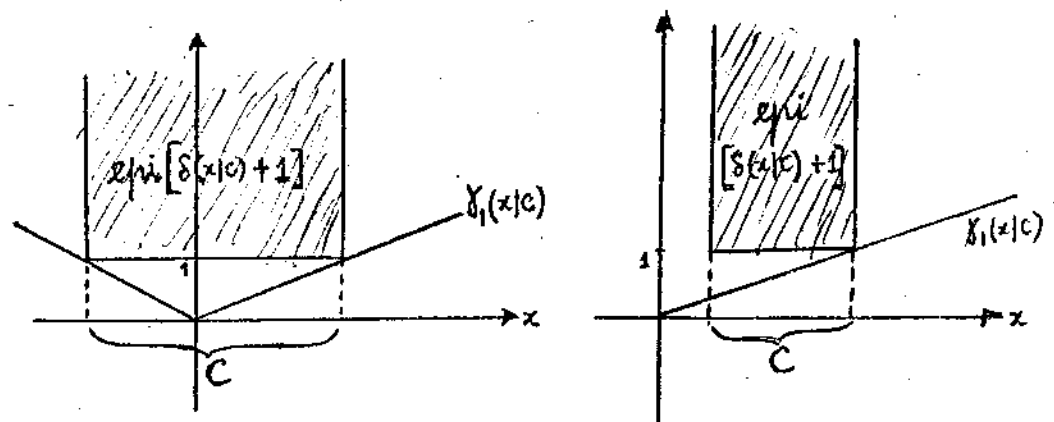


Figura 2.3.1.A: Ilustração de funções gauge-I

— Proposição 2.3.1.1: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Então a função gauge-I de C é dada por: $\gamma_1(x|C) = \inf \{ \lambda > 0, x \in \lambda \cdot C \}$

(28) - ROCKAFELLAR (1970) designa esta função apenas por "gauge". Todavia, como teremos necessidade de distinguir de outra função ligeiramente diferente, acrescentamos a designação "tipo I". Deve ainda ser dito que vamos utilizar o termo inglês "gauge" porque não conhecemos nenhum termo português correspondente. Uma tradução livre possível, e com alguma lógica, seria função calibre.

Corolário 2.3.1.I.1: A função gauge-I de um conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ é uma função convexa linearmente homogênea não negativa, sendo própria sse C é não vazio. ||

Utilizando a proposição 2.3.1.I, podemos estabelecer uma interessante relação entre a função gauge-I e função indicadora.

Corolário 2.3.1.I.2: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo. Então $\gamma_1(x|K) = \delta(x|K)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, isto é, a função gauge-I e a função indicadora de K coincidem. ||

Proposição 2.3.1.II: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado contendo a origem. Então $\gamma_1(x|C)$ é uma função convexa fechada e, para cada $\alpha \geq 0$, $S_{\gamma_1}^{\leq \alpha}(\alpha) = \{x | \gamma_1(x|C) \leq \alpha\} = \alpha C$. Em particular, $S_{\gamma_1}^{\leq 1}(1) = \{x | \gamma_1(x|C) \leq 1\} = C$. ||

2.3.2. Funções polarês de funções gauge -I

— Pelo corolário 2.3.1.I.1 e pela proposição 2.3.1.II, uma função gauge-I de um conjunto C convexo, fechado não vazio e contendo a origem, é uma função convexa própria, fechada e linearmente homogênea. Pela proposição 2.2.2.II, ela é então função suporte de algum conjunto convexo fechado não vazio. O próximo resultado mostra que tal conjunto é precisamente o conjunto polar inferior de C .

Proposição 2.3.2.I: Seja um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo fechado e contendo a origem. Então $\gamma_1(x|C)$ é a função suporte do conjunto convexo fechado que é o conjunto polar inferior de C :

$$C_-^0 = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq 1, \forall x \in C\},$$

isto é, $\gamma_1(x|C) = \delta^*(x|C_-^0)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. ||

Corolário 2.3.2.I.1: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo fechado (o qual contem necessariamente a origem). Então o cone polar de K é o conjunto polar inferior de K : $K^0 = K_-^0$. ||

O corolário 2.3.2.I.1. relaciona estreitamente as noções de cone polar e de conjunto polar inferior de um cone convexo, aparecendo esta última como uma extensão da primeira.

— A proposição que se segue explora a proposição 2.3.2.I, estabelecendo uma relação de simetria entre conjuntos polares inferiores de conjuntos convexos fechados contendo a origem.

Proposição 2.3.2.II: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio. O conjunto polar inferior de C , C_-^0 , é um conjunto convexo fechado contendo a origem. No caso de C ser convexo fechado e contiver a origem, então: (i) $(C_-^0)_-^0 = C$; (ii) a função gauge-I de C é a função suporte de C_-^0 e, dualmente, a função gauge-I de C_-^0 é a função suporte de C . ||

Podemos aprofundar ainda mais esta relação de simetria introduzindo um novo conceito: o de função polar da função gauge-I $\gamma_1(x|C)$.

Definição: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. A função polar da função gauge-I é a função: $\gamma_1^0(x^*|C) = \inf \{ \lambda | \lambda > 0, x^* \in \lambda C_-^0 \}$. ||

Proposição 2.3.2.III: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado e contendo a origem. Então $\gamma_1^0(x^*|C) = \inf \{ \lambda | \lambda > 0, \langle x, x^* \rangle \leq \lambda \gamma_1(x|C), \forall x \in \mathbb{R}^n \}$. ||

Corolário 2.3.2.III.1.: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado e contendo a origem. Então $\gamma_1(x|C) \cdot \gamma_1^0(x^*|C) \geq \langle x, x^* \rangle, \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$. ||

Tendo em conta o anterior corolário, e usando um argumento similar ao desenvolvido na alínea 2.1.3., podemos concluir facilmente que

uma função gauge-I (de um conjunto C convexo fechado não vazio contendo a origem) e a sua função polar constituem o mais "apertado" par de funções $(\gamma_1(x|C), j(x^*))$ respeitador da desigualdade:

$$\gamma_1(x|C) \cdot j(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \quad \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n.$$

——— Proposição 2.3.2.IV: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio, e seja $\gamma_1(x|C)$ a respectiva função gauge-I. Então: $\gamma_1^0(x^*|C)$ é a função gauge-I fechada do conjunto polar inferior de C : $\gamma_1^0(x^*|C) = \gamma_1(x^*|C_-^0)$, $\forall x^* \in \mathbb{R}^n$. Temos ainda que $\gamma_1^{00}(x|C) = [\gamma_1^0(x^*|C)]^0 = \gamma_1(x|(C_-^0)_-^0)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. No caso de C ser também fechado e contiver a origem, $\gamma_1^{00}(x|C) = \gamma_1(x|C)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. ||

Corolário 2.3.2.IV.1: Dois conjuntos convexos fechados contendo a origem são conjuntos polares inferiores um do outro sse as respectivas funções gauge-I são polares uma da outra. ||

Proposição 2.3.2.V: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado contendo a origem. Então $\gamma_1(x|C)$ e $\delta^*(x^*|C)$ são funções gauge-I polares uma da outra, isto é: $\gamma_1^0(x^*|C) = \delta^*(x^*|C)$

$$\text{e} \quad [\delta^*(x^*|C)]^0 = \gamma_1(x|C).$$

Dualmente, também: $\gamma_1^0(x|C_-^0) = \delta^*(x|C_-^0)$

$$\text{e} \quad [\delta^*(x|C_-^0)]^0 = \gamma_1(x^*|C_-^0) \quad . ||$$

2.3.3. Funções "gauge" de tipo II de um conjunto convexo e suas propriedades

——— O estudo que fizemos das funções gauge-I e suas funções po

lares mostrou-se, como vimos nas duas alíneas anteriores, extremamente frutuoso no caso de os conjuntos convexos que as geravam serem fechados e conterem a origem. Vamos agora apresentar uma versão modificada das funções gauge-I, que designaremos por funções "gauge" de tipo II, e em que já não se faz tal exigência de inclusão da origem. Pelo contrário, esta nova versão apenas fará sentido para conjuntos convexos não contendo a origem.

Definição: Função "gauge" de tipo II (para maior brevidade, função gauge-II) de um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ não contendo a origem, que representaremos por $\gamma_2(x|C)$, é a função convexa linearmente homogênea gerada pela função convexa $f(x) = \delta(x|C) - 1$. ||

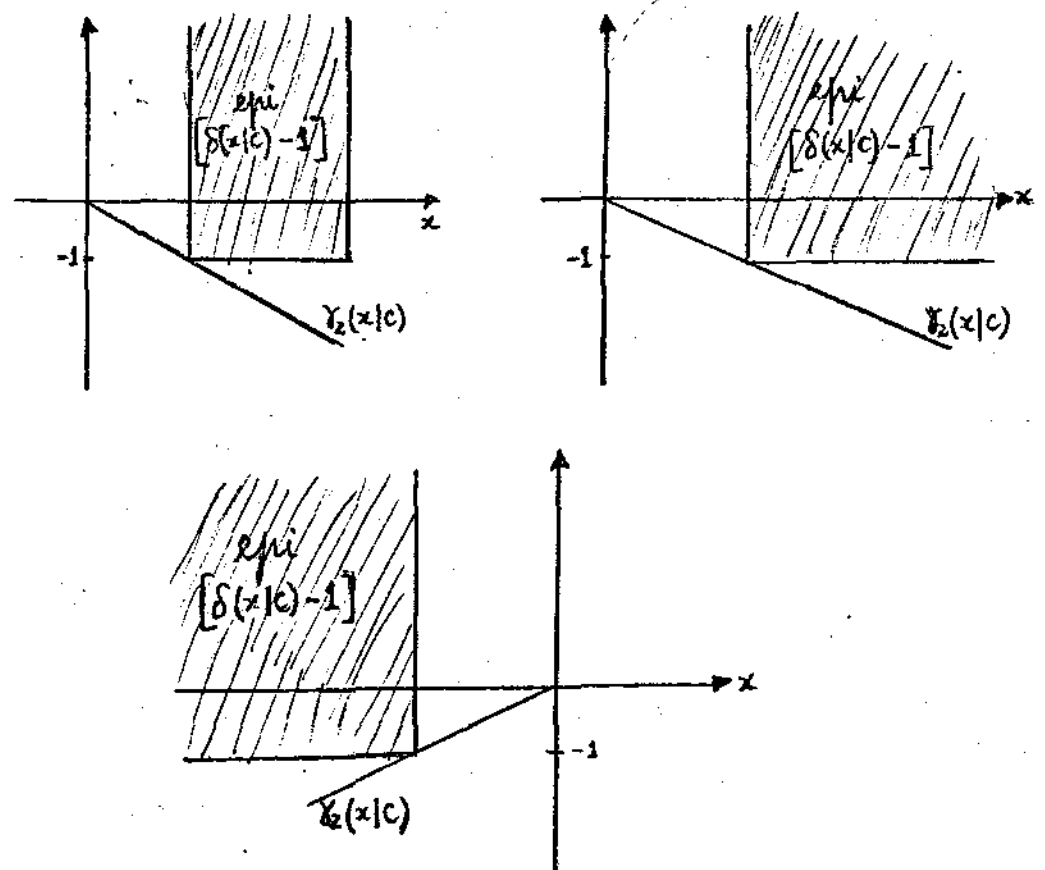


Figura 2.3.3.A: Ilustração de funções gauge-II .

A figura 2.3.3.A permite perceber qual a razão da imposição de $0 \notin C$. Com efeito, se a origem pertencer a C , a função convexa linearmente homogênea gerada por $\delta(x|C)-1$ será a função:

$$\begin{cases} -\infty & \text{para } x \text{ pertencente à projecção sobre } \mathbb{R}^n \text{ do cone gerado por } \text{epi}[\delta(x|C)-1]; \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Proposição 2.3.3.I: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não contendo a origem. Então a função gauge-II de C é dada por: $\gamma_2(x|C) = -\sup\{\lambda \mid \lambda > 0, x \in \lambda C\}$. ||

Corolário 2.3.3.I.1.: A função gauge-II de um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo não contendo a origem é uma função convexa, linearmente homogênea e negativa no seu domínio efectivo $\text{dom } \gamma_2(x|C) = \{x \mid \lambda > 0, x \in \lambda C\}$. $\gamma_2(x|C)$ será própria sse, para além do anterior, C for não vazio e não conter nenhuma semirecta emanada da origem. Em particular, se C for convexo, fechado, não vazio e não conter a origem, a função $\gamma_2(x|C)$ será própria. ||

Proposição 2.3.3.II: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não contendo a origem. Se $C = \emptyset$, então $\gamma_2(x|C)$ é trivialmente fechada. Se $C \neq \emptyset$, então $\gamma_2(x|C)$ não é s.c.i. para $x=0$ e é não fechada. ||

Note-se que a anterior proposição estabelece uma diferença fundamental entre as propriedades das funções gauge-I e gauge-II, pois, contrariamente ao que acontece para as primeiras (ver proposição 2.3.1.II), não existem condições de regularidade sobre o conjunto C que tornem $\gamma_2(x|C)$ uma função fechada (excepto C ser vazio). A próxima proposição dar-nos-á, todavia, a analogia possível com as propriedades das funções gauge-I estabelecidas na proposição 2.3.1.II.

Proposição 2.3.3.III: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, não contendo

a origem e tal que $\lambda_1 C \supset \lambda_2 C$, $\forall 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Então, para cada $\alpha < 0$, $S_{\gamma_2}^{\leq}(\alpha) = \{x \mid \gamma_2(x|C) \leq \alpha\} = -\alpha C$. Em particular, $S_{\gamma_2}^{\leq}(-1) = \{x \mid \gamma_2(x|C) \leq -1\} = C$. Se C for também fechado, então $\gamma_2(x|C)$ é s.c.i. relativamente a $S_{\gamma_2}^{\leq}(0) = \{x \mid \gamma_2(x|C) < 0\}$. ||

Corolário 2.3.3.III.1: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, fechado, não vazio, não contendo a origem, e tal que $\lambda_1 C \supset \lambda_2 C$, $\forall 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Então $cl \gamma_2(x|C) = \gamma_2(x|C)$, $\forall x \in \text{dom } \gamma_2(x|C)$. ||

A consequência mais importante deste último resultado é que, se respeitadas as suas hipóteses, poderemos trabalhar com $cl \gamma_2(x|C)$, que tem a vantagem de ser uma função fechada, tendo a garantia que para os pontos relevantes ($x \in \text{dom } \gamma_2(x|C)$) as duas funções coincidem.

2.3.4 Funções polares de funções gauge-II

— Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, não vazio, não contendo a origem e não contendo nenhuma semirecta emanada da origem. Atendendo ao corolário 2.3.1.I.1, $\gamma_2(x|C)$ será uma função convexa própria linearmente homogênea, pelo que $cl \gamma_2(x|C)$ será o anterior e também fechada. Pela proposição 2.2.2.II, $cl \gamma_2(x|C)$ é então a função suporte de algum conjunto convexo fechado não vazio. O próximo resultado permite concluir que tal conjunto é o simétrico do conjunto polar superior de C . Sublinhe-se a analogia com a proposição 2.3.2.I.

Proposição 2.3.4.I: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, não vazio, não contendo a origem e não contendo nenhuma semirecta emanada da origem. Então $cl \gamma_2(x|C)$ é a função suporte do simétrico do conjunto polar superior de C : $C_+^0 = \{x^* \mid \langle x, x^* \rangle \geq 1, \forall x \in C\}$, isto é, $cl \gamma_2(x|C) = \delta^*(x| -C_+^0)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, se C for convexo, fechado, não vazio e não contendo a origem, o anterior verifica-se. ||

Corolário 2.3.4.I.1: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, fechado, não vazio, não contendo a origem, e tal que $\lambda_1 C \supset \lambda_2 C, \forall 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Então: $\gamma_2(x|C) = \delta^*(x^* | -C_+^0), \forall x \in \text{dom } \gamma_2(x|C).$ ||

Proposição 2.3.4.II: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, fechado, não vazio, não contendo a origem, e tal que $\lambda_1 C \supset \lambda_2 C, \forall 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Então C_+^0 é também convexo, fechado, não vazio, não contendo a origem, e tal que $\lambda_1 C_+^0 \supset \lambda_2 C_+^0, \forall 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Verifica-se também que $(C_+^0)_+^0 = C$ e que $-(-C_+^0)_+^0 = C$. Para além disso, $\text{cl } \gamma_2(x|C)$ é função suporte de $-C_+^0$ e, dualmente, $\text{cl } \gamma_2(x^* | -C_+^0)$ é função suporte de C . ||

Corolário 2.3.4.II.1: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, fechado, não vazio, não contendo a origem, e tal que $\lambda_1 C \supset \lambda_2 C, \forall 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Então: $\gamma_2(x|C) = \delta^*(x | -C_+^0), \forall x \in \text{dom } \gamma_2(x|C)$, e $\gamma_2(x^* | -C_+^0) = \delta^*(x^* | C), \forall x^* \in \text{dom } \gamma_2(x^* | C)$ ||

Introduzindo o conceito de função polar de uma função gauge-II, estaremos em condições de apresentar resultados correspondentes às proposições 2.3.2.III a 2.3.2.V. Com eles completaremos este segundo capítulo dedicado à exposição das relações de conjugação e de alguns seus desenvolvimentos possíveis que aplicaremos nos capítulos 4 e 5.

Definição: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não contendo a origem. A função polar da função gauge-II é a função:

$$\gamma_2^0(x^* | C) = - \sup \{ \lambda | \lambda > 0, x^* \in \lambda \cdot C_+^0 \} \quad ||$$

Proposição 2.3.4.III: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, não vazio, não contendo a origem, e não contendo nenhuma semirecta emanada da origem. Então: $\gamma_2(x|C) = - \sup \{ \lambda | \lambda > 0, \langle x, x^* \rangle \geq -\lambda \text{cl } \gamma_2(x|C), \forall x \in \mathbb{R}^n \}$.

Em particular, o anterior verifica-se se C é convexo, fechado, não vazio e não contendo a origem.||

Corolário 2.3.4.III.1: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, não vazio, não contendo a origem, e não contendo nenhuma semirecta emanada da origem. Então: $\gamma_2(x|C) \cdot \gamma_2^0(x^*|C) \leq \langle x, x^* \rangle, \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$. Em particular, esta mesma desigualdade verifica-se se C for convexo, fechado, não vazio, e não contendo a origem.||

O anterior corolário implica que podemos interpretar o par formado por uma função gauge-II e a sua polar como o menos "apertado" par respeitador da desigualdade $\gamma_2(x|C) \cdot \gamma_2^0(x^*|C) \leq \langle x, x^* \rangle, \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$. Para tal confirmarmos bastará mais uma vez desenvolver um argumento similar ao da alínea 2.1.3..

Proposição 2.3.4.IV: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio e não contendo a origem, e seja $\gamma_2(x|C)$ a respectiva função gauge-II. Então $\gamma_2^0(x|C)$ é a função gauge-II do conjunto polar superior de C : $\gamma_2^0(x^*|C) = \gamma_2(x^*|C_+^0), \forall x^* \in \mathbb{R}^n$. Temos ainda que $\gamma_2^{00}(x|C) = [\gamma_2^0(x^*|C)]^0 = \gamma_2(x|(C_+^0)_+^0), \forall x \in \mathbb{R}^n$. No caso de C ser também fechado e $\lambda_1 C \supset \lambda_2 C, \forall 0 < \lambda_1 < \lambda_2, \gamma_2^{00}(x|C) = \gamma_2(x|C), \forall x \in \mathbb{R}^n$.||

Corolário 2.3.4.IV.1: Sejam dois conjuntos $C, D \subset \mathbb{R}^n$ convexos, fechados, não vazios, não contendo a origem, e tais que $\lambda_1 C \supset \lambda_2 C$ e $\lambda_1 D \supset \lambda_2 D, \forall 0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Então C e D são conjuntos polares superiores um do outro sse as respectivas funções gauge-II são polares uma da outra.||

Proposição 2.3.4.V: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, fechado, não vazio, não contendo a origem, e tal que $\lambda_1 C \supset \lambda_2 C, \forall 0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Então:

$$cl \gamma_2^0(x^*|C) = \delta^*(x^*|-C)$$

e

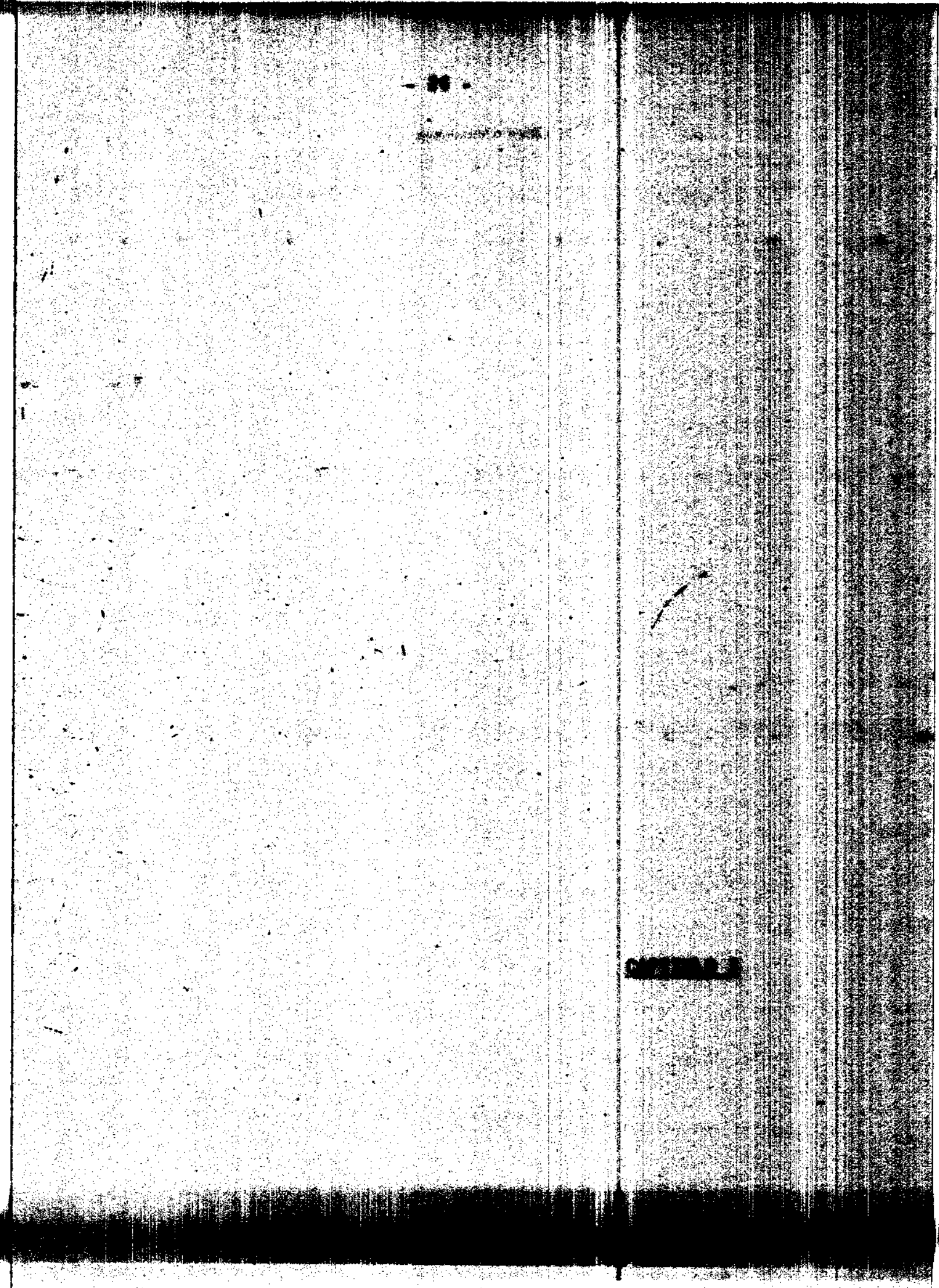
$$[\delta^*(x^*|-C)]^0 = cl \gamma_2(x|C).$$

Dualmente, também:

$$cl \gamma_2^0(x|C_+^0) = \delta^*(x|-C_+^0)$$

e

$$[\delta^*(x|-C_+^0)]^0 = cl \gamma_2(x^*|C_+^0). ||$$



3.1. FUNÇÕES QUASE-CONVEXAS E QUASE-CÔNCAVAS QUASE-CONJUGADAS

3.1.1. Funções quase-convexas e quase-côncavas

— No capítulo 1, proposições 1.2.2.III e 1.2.5.V, referimos que uma das propriedades das funções convexas(côncavas) é a convexidade dos seus conjuntos de nível inferior(superior). Todavia, como então também notamos, nem todas as funções com conjuntos de nível inferior(superior) todos convexas são funções convexas(côncavas). A figura 3.1.1.A ilustra este facto.

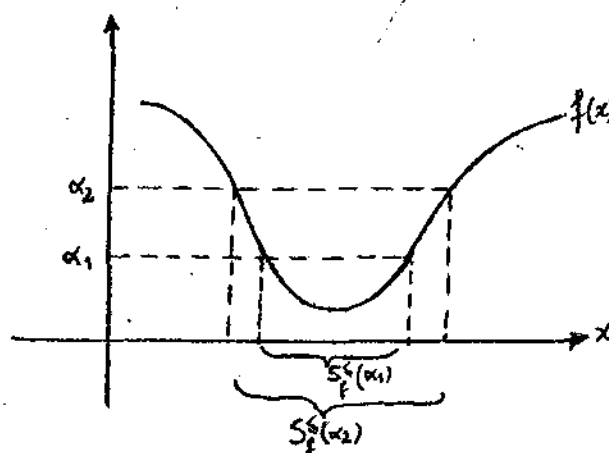


Figura 3.1.1.A: Ilustração de uma função não convexa com conjuntos de nível inferior todos convexas.

— Definição: Uma ^{função} $f(x)$ de $C \subset \mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, com C convexo, é quase-convexa em C se os seus conjuntos de nível inferior $S_f^<(\alpha) = \{x | f(x) < \alpha, x \in C\}$ são convexas para todo $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. ||

Definição: Uma função $g(x)$ de $C \subset \mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, com C convexo, é quase-côncava em C se os seus conjuntos de nível superior $S_g^>(\alpha) = \{x | g(x) > \alpha, x \in C\}$ são convexas para todo $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. ||

Os conceitos de funções quase-convexas e quase-côncavas podem ser encarados, portanto, como a extensão natural dos conceitos de funções convexas e côncavas, no sentido de incluir as funções que gozam da propriedade de terem conjuntos de nível inferior ou superior todos convexas.

— Proposição 3.1.1.I: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções de $C \subset \mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, com C conjunto convexo. A função $g(x)$ é quase-côncava em C sse $-g(x)$ é quase-convexa em C . Também $f(x)$ é quase-convexa em C sse $-f(x)$ é quase-côncava em C . ||

Proposição 3.1.1.II: Seja $f(x)$ uma função de $C \subset \mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, com C convexo. Então f é quase-convexa em C sse os conjuntos de nível $S_f^{\leq}(\alpha) = \{x | f(x) \leq \alpha, x \in C\}$ são conjuntos convexas para todo o $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. ||

Corolário 3.1.1.II.1: Seja $g(x)$ uma função de $C \subset \mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, com C convexo. Então g é quase-côncava em C sse os conjuntos de nível $S_g^{\geq}(\alpha) = \{x | g(x) \geq \alpha, x \in C\}$ são conjuntos convexas para todo o $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. ||

Proposição 3.1.1.III: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, e seja $f(x)$ uma função de C em $[-\infty, +\infty]$, quase-convexa e homogênea de grau 0. Os conjuntos de nível $S_f^{\leq}(\alpha) = \{x | f(x) \leq \alpha, x \in C\}$ e $S_f^{<}(\alpha) = \{x | f(x) < \alpha, x \in C\}$ são cones convexas para todo o $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. ||

Corolário 3.1.1.III.1: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e seja $g(x)$ uma função de C em $[-\infty, +\infty]$, quase-côncava e homogênea de grau 0. Os conjuntos de nível $S_g^{\geq}(\alpha) = \{x | g(x) \geq \alpha, x \in C\}$ e $S_g^{>}(\alpha) = \{x | g(x) > \alpha, x \in C\}$ são cones convexas para todo o $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. ||

Proposição 3.1.1.IV: Seja $f(x)$ uma função de $C \subset \mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, com C convexo. Então $f(x)$ é quase-convexa sse, para qualquer $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] \leq \max \{f(x^1), f(x^2)\}, \forall x^1, x^2 \in C. ||$$

Corolário 3.1.1.IV.1: Seja $g(x)$ uma função de $C \subset \mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, com C convexo. Então $g(x)$ é uma função quase-côncava sse, para qualquer $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$g[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] \geq \min \{g(x^1), g(x^2)\}, \forall x^1, x^2 \in C. ||$$

Frequentemente, a proposição 3.1.1.IV e o corolário 3.1.1.IV.1, que estabelecem condições necessárias e suficientes de quase-convexidade e quase-concavidade, são utilizados como definições destes conceitos.

Proposição 3.1.1.V: Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ de $C \subset \mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, com C conjunto convexo. Se $f(x)$ é uma função convexa em C , então também é uma função quase-convexa em C . Se $g(x)$ é uma função côncava em C , então também é uma função quase-côncava em C . ||

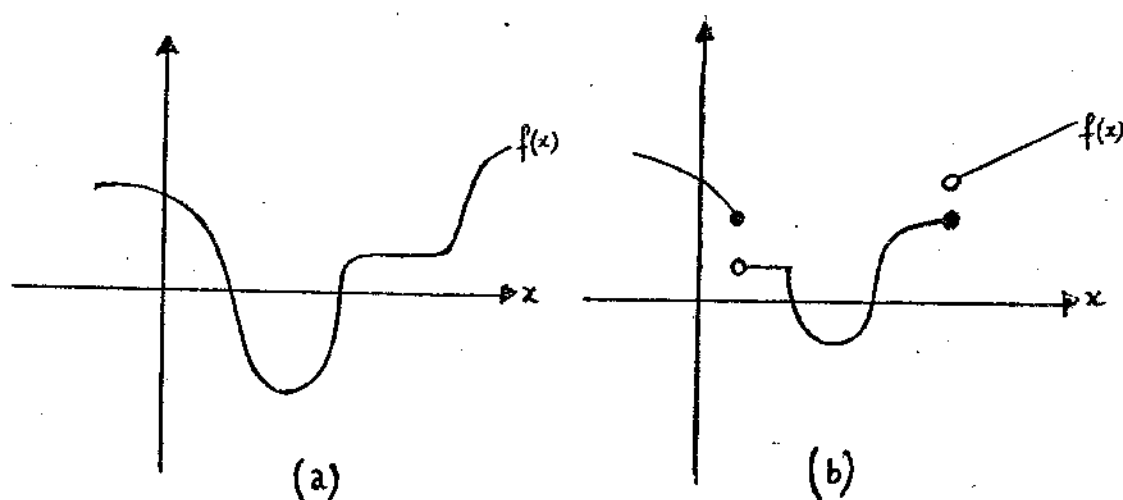


Figura 3.1.1.B: Ilustração de funções quase-convexas não convexas

— A figura 3.1.1.(b) serve para alertar para o facto de não

ser normalmente possível fazer a transposição para funções quase-convexas e quase-côncavas de muitos resultados estabelecidos na secção 2.1. para funções convexas e côncavas. Com efeito, e por exemplo, uma função quase-convexa: (i) pode não ser contínua no interior relativo do seu domínio; (ii) ^{pode} possuir mínimos locais não necessariamente globais; etc; etc.... Por brevidade, não iremos desenvolver as propriedades das funções quase-convexas e quase-côncavas senão na medida do que precisaremos para o que se seguirá. Pela mesma razão também não focaremos toda a miríade de conceitos que aparecem usualmente relacionados com os de funções quase-convexas e quase-côncavas, correspondendo a outras extensões possíveis da noção de função convexa ou côncava. (29)

3.1.2. Extensão a $\mathbb{R}^n$ de uma função quase-convexa ou quase-côncava/
funções quase-convexas e quase-côncavas homogêneas de grau 0

Nas alíneas 1.2.2. e 1.2.3. mostramos como é possível fazer a extensão a $\mathbb{R}^n$ de qualquer função convexa definida num conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$, bastando para tal atribuir à função o "valor" $+\infty$ para cada $x \notin C$. Com esta extensão são preservadas, quer a convexidade da função, quer a sua "propriacidade" (isto é, se a função original é própria, a sua extensão a $\mathbb{R}^n$ continua a sê-lo). Para funções quase-convexas, contudo, a extensão " $+\infty$ ", embora preservando a quase-convexidade, já não permite manter outras características relevantes para a nossa análise. Em sua substituição vamos adoptar a extensão " $\sup \{f(x) | x \in C\}$ ", que também preserva a quase-convexidade (como se confirma facilmente pela proposição 3.1.1.IV) e não

(29) - Veja-se, por exemplo, BAZARAA e SHETTY (1979), AVRIEL (1976) e DIEWERT, AVRIEL e ZANG (1981):

tem os inconvenientes da extensão "+∞". Para funções quase-côncavas $g(x)$ a extensão a adoptar será " $\inf\{g(x) | x \in C\}$ ", o que se compreende pelo corolário 3.1.1.IV.1.

—— Definição: Seja $f(x)$ uma função quase-convexa de R^n em $[-\infty, +\infty]$ ⁽³⁰⁾. A função $h_f(x, \mu)$ de R^{n+1} em $[-\infty, +\infty]$ dada por:

$$h_f(x, \mu) = \begin{cases} f(x/\mu) & (\mu > 0) \\ \sup f(x) & (\mu \leq 0) \end{cases}$$

é designada por função quase-convexa homogênea de grau 0 associada a $f(x)$. ||

Definição: Seja $g(x)$ uma função quase-côncava de R^n em $[-\infty, +\infty]$. A função $h_g(x, \mu)$ de R^{n+1} em $[-\infty, +\infty]$ dada por:

$$h_g(x, \mu) = \begin{cases} g(x/\mu) & (\mu > 0) \\ \inf g(x) & (\mu \leq 0) \end{cases}$$

é designada por função quase-côncava homogênea de grau 0 associada a $g(x)$. ||

Proposição 3.1.2.1: Seja $h_f(x, \mu)$ a função quase-convexa homogênea de grau 0 associada à função quase-convexa $f(x)$ de R^n em $[-\infty, +\infty]$. Então, e como a sua própria designação indica, $h_f(x, \mu)$ é uma função de R^{n+1} em $[-\infty, +\infty]$, quase-convexa e homogênea de grau 0 em (x, μ) . Para além disso, $f(x)$ é recuperável a partir de $h_f(x, \mu)$ fazendo $\mu=1$, isto é, $f(x)=h_f(x, 1)$. ||

(30) - Se $f(x)$ está definida em $C \subset R^n$ considere-se a sua extensão a R^n , conforme acabado de indicar:

$$\begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C \\ \sup\{f(x) | x \in C\} & \text{se } x \notin C \end{cases}$$

Corolário 3.1.2.I.1: Seja $h_g(x, \mu)$ a função quase-côncava homogênea de grau 0 associada à função quase-côncava $g(x)$ de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. Então, e como a sua própria designação indica, $h_g(x, \mu)$ é uma função de $\mathbb{R}^{n+1}$ em $[-\infty, +\infty]$, quase-côncava e homogênea de grau 0 em (x, μ) . Para além disso, $g(x)$ é recuperável a partir de $h_g(x, \mu)$ fazendo $\mu=1$, isto é, $g(x)=h_g(x, 1)$. ||

A proposição 3.1.2.I. e o corolário 3.1.2.I.1 assumem extrema importância para a nossa análise, na medida em que tornam possível, sem perda de generalidade, restringir o estudo das funções quase-convexas (quase-côncavas) a funções quase-convexas (quase-côncavas) que sejam homogêneas de grau 0. Isto porque, como estabelecem os anteriores resultados, para qualquer função quase-convexa (quase-côncava) em $\mathbb{R}^n$, existe uma função quase-convexa (quase-côncava) homogênea de grau 0 em $\mathbb{R}^{n+1}$ que goza da propriedade de podermos, sempre que o desejarmos, recuperar a função quase-convexa (quase-côncava) original. Foi esta precisamente a lógica do raciocínio de PASSY e PRISMAN (1984), que conseguiram estabelecer para funções quase-convexas homogêneas de grau 0 uma extensão da relação de conjugação que apresentámos na secção 2.1.. Esta extensão, a que chamaram de quase-conjugação, tem como grande vantagem, em relação a outras extensões ensaiadas por outros autores, o ser simétrica em determinadas circunstâncias. Antes, porém, de a apresentarmos e estudarmos, torna-se necessário introduzir e explorar alguns novos conceitos. É o que faremos nas três próximas alíneas.

3.1.3. Conjuntos "evenly" convexos

—— Definição: Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é "evenly" convexo (para maior

brevidade: ec)⁽³¹⁾ se pode ser separado fortemente de qualquer vector pertencente ao seu complementar, isto é, se para cada $y \notin E$ existe um hiperplano que separa fortemente y e E .||

Proposição 3.1.3.I: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado ou relativamente aberto. Então C é ec .||

Proposição 3.1.3.II: Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto ec . Então E é a intersecção de todos os semiespaços abertos que o contêm.||

Corolário 3.1.3.II.1: Qualquer conjunto ec de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.||

Proposição 3.1.3.III: Intersecção de conjuntos ec é ainda um conjunto ec .||

Proposição 3.1.3.IV: Seja um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$. Se E é ec , então μE também é ec , $\forall \mu \in \mathbb{R}$.||

A proposição 3.1.3.I e o corolário 3.1.3.II.1 permitem relacionar os conceitos de conjunto convexo e conjunto ec . Eles estabelecem que um conjunto ec é necessariamente convexo, e que se um conjunto convexo é fechado ou relativamente aberto então também é ec . Todavia, um conjunto convexo simultaneamente não fechado e não relativamente aberto pode não ser ec . A figura 3.1.3.A fornece uma ilustração disto mesmo, convindo notar que o ponto $y \notin C$ não pode ser fortemente separado de C .

(30)- Mais uma vez usamos o termo inglês por não conhecermos um termo português já adoptado. Uma tradução livre possível será "equilibradamente convexo".

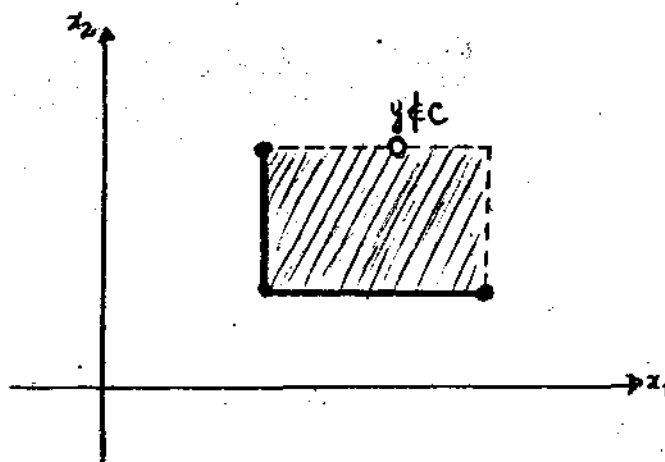


Figura 3.1.3.A: Ilustração de um conjunto convexo não ec.

Na análise das relações de quase-conjugação que iremos estudar, o papel dos conjuntos ec é correspondente ao papel dos conjuntos fechados na análise conjugada do capítulo 2. Note-se, a propósito, que a condição de regularidade "conjunto ec" é menos exigente que a de "conjunto convexo fechado", pois, como vimos, um conjunto convexo fechado é ec, mas existem conjuntos convexos não fechados que são ec. (nomeadamente os relativamente abertos).

3.1.4. Cones "evenly" convexos e respectivos cones polares

Definição: Um cone ec é um cone que é conjunto ec. ||

Proposição 3.1.4.I: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ e seja $K = \{(x, \mu) | \mu > 0, x \in \mu C\}$. Então C é um conjunto ec de $\mathbb{R}^n$ sse K é um conjunto ec de $\mathbb{R}^{n+1}$. ||

Proposição 3.1.4.II: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone ec tal que $0 \notin K$. Então K é a intersecção de espaços abertos gerados por hiperplanos que passam na origem e que o contêm. ||

—— Definição: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo tal que $0 \notin K$. O cone "evenly" polar de K é o conjunto, $K^{e0} = \{x^* | \langle x, x^* \rangle < 0, \forall x \in K\}$. ||
 Realce-se a diferença entre as noções de cone polar e de cone "evenly" polar de um cone convexo K . Geometricamente, enquanto o cone polar inclui todos os vectores x^* tais que $\cos(x, x^*) \leq 0, \forall x \in K$, o cone "evenly" polar apenas inclui os vectores x^* que verificam estritamente a anterior desigualdade.

Proposição 3.1.4.III: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo tal que $0 \notin K$. Então: (i) $K^0 = c|K^{e0}$; (ii) K^{e0} é um cone ec não contendo a origem; (iii) $(K^{e0})^{e0} = K$ sse K é ec. ||

3.1.5. Funções "evenly" quase-convexas ou "evenly" quase-côncavas

—— Definição: Seja $f(x)$ uma função de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. $f(x)$ é "evenly" quase-convexa (para maior brevidade: eqconv) se os conjuntos de nível inferior $S_f^{\leq}(\alpha) = \{x | f(x) \leq \alpha\}$ são conjuntos ec para todo o $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. $f(x)$ é estritamente eqconv se os conjuntos $S_f^<(\alpha) = \{x | f(x) < \alpha\}$ são ec para todo o $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. ||

Definição: Seja $g(x)$ uma função de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. $g(x)$ é "evenly" quase-côncava (para maior brevidade: eqconc) se os conjuntos de nível superior $S_g^{\geq}(\alpha) = \{x | g(x) \geq \alpha\}$ são conjuntos ec para todo o $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. $g(x)$ é estritamente eqconc se os conjuntos $S_g^>(\alpha) = \{x | g(x) > \alpha\}$ são ec para todo o $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. ||

Proposição 3.1.5.I: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. $f(x)$ é (estritamente) eqconv sse $-f(x)$ é (estritamente) eqconc. $g(x)$ é (estritamente) eqconc sse $-g(x)$ é (estritamente) eqconv. ||

Proposição 3.1.5.II: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$.

Então: (i) f estritamente eqconv $\Rightarrow f$ eqconv; (ii) g estritamente eqconc $\Rightarrow g$ eqconc . ||

Proposição 3.1.5.III: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$.

Então: (i) f eqconv $\Rightarrow f$ quase-convexa; (ii) g eqconc $\Rightarrow g$ quase-côncava. ||

O inverso do estabelecido na anterior proposição nem sempre é verdadeiro. Significa isto que a imposição do termo "evenly" impõe uma condição de regularidade à função quase-convexa (quase-côncava). O papel desta condição de regularidade vai corresponder na análise da quase-conjugação à condição de fecho das funções convexas e concavas na análise da conjugação do capítulo 2. A condição de "evenly" quase-convexidade ("evenly" quase-concavidade) é, porém, menos exigente que a semicontinuidade inferior (superior) de funções convexas (côncavas), pois não exige que os conjuntos de nível sejam fechados, mas apenas ec.

Proposição 3.1.5.IV: Seja $f(x)$ uma função de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. Então:

(i) f é semicontínua superior e quase-convexa $\Rightarrow f$ é estritamente eqconv; (ii) f é semicontínua inferior e quase-convexa $\Rightarrow f$ é eqconv. ||

Corolário 3.1.5.IV.1: Seja $g(x)$ uma função de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. Então:

(i) g é semicontínua inferior e quase-côncava $\Rightarrow g$ é estritamente eqconc; (ii) g é semicontínua superior e quase-côncava $\Rightarrow g$ é eqconc. ||

Proposição 3.1.5.V: Seja $f(x)$ uma função quase-convexa de $\mathbb{R}^n$ em

$[\infty, +\infty]$, e seja $h_f(x, \mu)$ a função homogênea de grau 0 por ela gerada.

Então f é (estritamente) eqconv sse h_f é (estritamente) eqconv. ||

Corolário 3.1.5.V.1: Seja $g(x)$ uma função quase-côncava de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, e seja $h_g(x, \mu)$ a função homogênea de grau 0 por ela gerada. Então g é (estritamente) eqconc sse h_g é (estritamente) eqconc. ||

Na secção 1.2., alínea 1.2.2. (alínea 1.2.4.), definimos função convexa (côncava) própria como uma função convexa (côncava) com epigrafo (hipografo) não vazio, nem contendo linhas verticais. Vamos agora definir uma condição de regularidade para funções quase-convexas e quase-concâvas homogêneas de grau 0 a qual vai corresponder um papel semelhante ao da propriacidade das funções convexas e concâvas. Justifica-se assim que, embora diferentes, designemos também por propriacidade as seguintes condições de regularidade das funções quase-convexas e quase-côncavas homogêneas de grau 0.

Definição: Seja $h(x)$ uma função quase-convexa homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. $h(x)$ é dita própria se para cada $\alpha < \sup h$ tivermos $0 \notin S_h^{\leq}(\alpha)$, isto é, se $h(0) = \sup h(x)$. ||

Definição: Seja $h(x)$ uma função quase-côncava homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. $h(x)$ é dita própria se para cada $\alpha > \inf h$ tivermos $0 \notin S_h^{\geq}(\alpha)$, isto é, se $h(0) = \inf h(x)$. ||

Proposição 3.1.5.VI: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, respectivamente quase-convexa e quase-côncava. Então as funções homogêneas de grau 0 geradas por f e g são próprias. ||

Definição: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. A função peqconv $h(x)$ é a maior função eqconv homogênea de grau 0

própria majorada por $h(x)$. Analogamente, a função $\text{peqconc } h(x)$ é a menor função eqconc homogênea de grau 0 própria minorada por $h(x)$. ||

3.1.6. Funções quase-conjugadas de funções quase-convexas homogêneas de grau 0.

—— A relação de quase-conjugação que vamos apresentar e estudar deve-se, conforme já apontamos no final da alínea 3.1.2., a PASSY e PRISMAN (1984). Como também já então referimos, ela é aplicável apenas a funções homogêneas de grau 0, o que, contudo, não é restritivo em análise quase-convexa, pois é sempre possível definir uma função homogênea de grau 0 associada a cada função quase-convexa ou quase-côncava.

Definição: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. A sua função quase-conjugada quase-convexa é a função $h^*(x^*)$ dada por: $h^*(x^*) = -\inf\{h(x) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\}$. ||

A próxima proposição corresponde, para a análise quase-conjugada, à proposição 2.1.2.I obtida para a análise conjugada. Nela se formulará uma relação de simetria entre os elementos da família das funções quase-convexas homogêneas de grau 0 (e, conseqüentemente, de todas as funções quase-convexas, via funções homogêneas de grau 0 a elas associadas).

Proposição 3.1.6.I: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, e seja $h^*(x^*)$ a respectiva quase-conjugada quase-convexa. Então: (i) $h^*(x^*)$ é uma função eqconv homogênea de grau 0 própria; (ii) $h^{**}(x) = (h^*(x^*))^* = \text{peqconv } h$ e $h^{**} = h$ sse h é uma

função eqconv homogênea de grau 0 própria. ||

Proposição 3.1.6.II: Seja $h(x)$ uma função eqconv homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. Então: (i) $[S_h^<(\alpha)]^{e0} = S_{h^*}^<(-\alpha)$;
(ii) $[S_{h^*}^<(\alpha)]^{e0} = S_h^<(-\alpha)$. ||

Esta proposição permite interpretar geometricamente a quase-conjugação quase-convexa em termos de "evenly" polaridade dos conjuntos de nível, mostrando que uma função eqconv homogênea de grau 0 admite uma dualidade de formas de representação:

- (i) ou pelos conjuntos de nível $S_h^<(\alpha)$ (que são cones ec);
- (ii) ou pelos cones "evenly" polares destes conjuntos de nível, que são os conjuntos de nível da função conjugada.

— Uma outra interpretação possível da quase-conjugação quase-convexa pode ser perspectivada por semelhança com a conjugação convexa da secção 2.1.. Seja W o conjunto de todos os pares $(h(x), q(x^*))$ de funções homogêneas de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$ satisfazendo:

$$\langle x, x^* \rangle \geq 0 \Rightarrow h_1(x) + q(x^*) \geq 0, \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$$

Obtem-se da anterior implicação que:

$$h(x) \geq - \inf \{ q(x^*) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0 \} = q^*(x^*)$$

e

$$q(x) \geq - \inf \{ h(x^*) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0 \} = h^*(x^*).$$

Consequentemente $h(x)$ e $h^*(x^*)$ podem ser interpretadas como formando o par mais "apertado" de funções homogêneas de grau 0 que respeita a implicação mais acima. Repare-se na semelhança com a interpretação da conjugação convexa que fornecemos na alínea 2.1.3..

3.1.7. Funções quase-conjugadas de funções quase-côncavas homogêneas de grau 0

—— Definição: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. A sua função quase-conjugada quase-côncava é a função $h^*(x^*)$ dada por: $h^*(x^*) = -\sup\{h(x) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\}$. ||

Proposição 3.1.7.I: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 eqconv. Então: $h^*(x^*) = -[-h(x)]^*(x^*)$. ||

Proposição 3.1.7.II: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$ e $h^*(x^*)$ a sua função quase-conjugada quase-côncava.

Então: (i) $h^*(x^*)$ é uma função eqconc homogênea de grau 0 própria;

(ii) $h^{**}(x) = (h^*(x^*))^* = \text{peqconc } h$ e $h^{**} = h$ sse h é uma função eqconc homogênea de grau 0 própria. ||

Proposição 3.1.7.III: Seja $h(x)$ uma função eqconc homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. Então: (i) $[S_h^>(\alpha)]^{e0} = S_{h^*}^>(-\alpha)$; (ii) $[S_{h^*}^>(\alpha)]^{e0} = S_h^>(-\alpha)$. ||

3.1.8. Subgradiantes de funções quase-convexas e quase-côncavas homogêneas de grau 0.

—— Na secção 1.2., alínea 1.2.10., apresentámos para funções convexas (côncavas) o conceito de subgradiente num ponto, e mostrámos que ele pode ser encarado como definindo um hiperplano de suporte ao epigrafo (hipografo) da função nesse ponto. Apresentemos agora o conceito correspondente para funções quase-convexas e quase-côncavas homogêneas de grau 0.

Definição: Seja $h(x)$ uma função quase-convexa homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. $\bar{x}^*$ é um subgradiente de h no ponto $\bar{x}$ se, simultaneamente: (i) $\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0$; (ii) $\langle x, \bar{x}^* \rangle < 0, \forall x \in S_h^<(h(\bar{x}))$. ||

Definição: Seja $h(x)$ uma função quase-côncava homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. $\bar{x}^*$ é um subgradiente de h no ponto $\bar{x}$ se, simultaneamente: (i) $\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0$; (ii) $\langle x, \bar{x}^* \rangle > 0, \forall x \in S_h^>(h(\bar{x}))$. ||

Proposição 3.1.8.I: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 e quase-convexa (quase-côncava) de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. Se $\bar{x}^*$ é um subgradiente de h no ponto $\bar{x}$, então o hiperplano $\langle x, \bar{x}^* \rangle = 0$ separa fortemente $\bar{x}$ do conjunto de nível $S_h^<(h(\bar{x}))$ ($S_h^>(h(\bar{x}))$). ||

Definição: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 quase-convexa (quase-côncava) de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. Por subdiferencial de h no ponto $\bar{x}$, $\partial h(\bar{x})$, entende-se o conjunto de todos os subgradientes da função h no ponto $\bar{x}$. ||

Entre muitas outras possíveis de apresentar, são de destacar as seguintes propriedades do subdiferencial de uma função homogênea de grau 0 quase-convexa ou quase-côncava:

Proposição 3.1.8.II: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 quase-convexa de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, e seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Então (i) $\partial h(\bar{x})$ é um cone ec; (ii) $0 \in \partial h(\bar{x}) \Rightarrow h(\bar{x}) = \inf h(x)$; (iii) $h(x)$ própria e s.c.s. $\Rightarrow \Rightarrow \partial h(x) \neq \emptyset, \forall x \in \mathbb{R}^n$; (iv) $h(x)$ própria e diferenciável em $\text{rint dom } h \Rightarrow \partial h(x) \neq \emptyset, \forall x \in \text{rint dom } h$. ||

Corolário 3.1.8.II.1: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 quase-côncava de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$, e seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Então: (i) $\partial h(\bar{x})$ é um cone ec; (ii) $0 \in \partial h(\bar{x}) \Rightarrow h(\bar{x}) = \sup h(x)$; (iii) $h(x)$ própria e

s.c.i., $\Rightarrow \partial h(x) \neq \emptyset, \forall x \in \mathbb{R}^n$; (iv) $h(x)$ própria e diferenciável em $\text{rint dom } h \Rightarrow \partial h(x) \neq \emptyset, \forall x \in \text{rint dom } h$. ||

3.1.9. Propriedades marginais das funções quase-conjugadas

— Os conceitos de subgradiente e subdiferencial de funções quase-convexas e quase-côncavas homogêneas de grau 0 permitem estabelecer importantes propriedades marginais das respectivas funções quase-conjugadas.⁽³²⁾

Proposição 3.1.9.I: Seja $h(x)$ uma função quase-convexa homogênea de grau 0 de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\bar{x}^* \in \partial h(\bar{x})$;
- (ii) $h(\bar{x}) = \inf \{h(x) \mid \langle x, \bar{x}^* \rangle \geq 0\}$ e $\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0$;
- (iii) $h(\bar{x}) + h^*(\bar{x}^*) = 0$ e $\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0$

Se $h(\bar{x}) = \text{peqconv } h(\bar{x})$, então também são equivalentes às anteriores, e equivalentes entre si, as seguintes condições:

- (i*) $\bar{x} \in \partial h^*(\bar{x}^*)$;
- (ii*) $h^*(\bar{x}^*) = \inf \{h^*(x^*) \mid \langle \bar{x}, x^* \rangle \geq 0\}$ e $\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0$. ||

Corolário 3.1.9.I.1: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 quase-concava de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\bar{x}^* \in \partial h(\bar{x})$;
- (ii) $h(\bar{x}) = \sup \{h(\bar{x}) \mid \langle x, \bar{x}^* \rangle \geq 0\}$ e $\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0$;
- (iii) $h(\bar{x}) + h^*(\bar{x}^*) = 0$ e $\langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0$.

(32) - Note-se a semelhança com as proposições 2.1.4.I, e 2.1.5.IV..

Se $h(\bar{x}) = \text{peqconc } h(\bar{x})$, então também são equivalentes às anteriores, e equivalentes entre si, as seguintes condições:

$$(i^*) \quad \bar{x} \in \partial h^*(\bar{x}^*);$$

$$(ii^*) \quad h^*(\bar{x}^*) = \sup \{ h^*(x^*) \mid \langle \bar{x}, x^* \rangle \geq 0 \} \text{ e } \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0. \quad ||$$

Corolário 3.1.9.1.2: Seja $h(x)$ uma função homogênea de grau 0 quase-convexa (quase-côncava) e diferenciável em x .

Então se $\nabla h(x) \neq 0$ temos que para cada $x^* \in \partial h(x)$ existe um escalar $\alpha \neq 0$ tal que $x^* = \alpha \cdot \nabla h(x)$.⁽³³⁾ ||

— Ao terminarmos esta capítulo, uma palavra para notar que a relação entre transformação de Legendre e conjugação, que referimos no final da alínea 2.1.4., é igualmente verificada para a quase-conjugação. Para pormenores, irrelevantes para os nossos objectivos, veja-se PASSY e PRISMAN (1984, p. 143 e seg.).

(33) - Este corolário pode ser estabelecido numa formulação mais forte, em que se mostre que $\nabla h(x) \in \partial h(x)$ e, consequentemente, pela definição de subgradiente, que se $\nabla h(x) \neq 0$ teremos $\partial h(x) = \{x^* \mid \exists \alpha > 0: x^* = \alpha \nabla h(x)\}$. Tal exigiria, contudo, recurso a resultados que não apresentamos. Como não necessitaremos desta formulação mais forte, dispensamo-nos de a apresentar.

ANEXOS

(Demonstrações)

SECÇÃO 2.1.

— Dem. da proposição 2.1.1.I: Se $f(x)$ é uma função convexa imprópria, para ser fechada teria que ser identicamente $-\infty$ (pela definição de fecho de uma função convexa), pelo que a proposição será trivial neste caso (pois a função linear não vertical $r = -\infty$ seria a única função linear majorada por $f(x)$). Se $f(x)$ é uma função convexa fechada própria, então o seu epigrafo é um conjunto convexo fechado (proposição 1.2.7.I). Pelo corolário 1.1.6.II.1, ele pode ser então encarado como a intersecção de todos os semi-espacos fechados que o contêm. Porém devido à própria definição de epigrafo, é óbvio que não haverá semiespaços inferiores que o contêmham (1). Logo, $\text{epi } f(x)$ pode ser encarado como a intersecção de todos os semiespaços fechados (gerados por hiperplanos ^{não} verticais) que o contêm. Se conseguirmos mostrar que $\text{epi } f(x)$ é a intersecção apenas de todos os semiespaços superiores fechados (gerados por hiperplanos não verticais) que o contêm, estará demonstrada a proposição (pois, pela proposição 1.2.6.I, a cada hiperplano não vertical em $\mathbb{R}^{n+1}$ corresponde uma função linear não vertical em $\mathbb{R}^n$). Quer isto dizer que para provar a proposição teremos apenas que mostrar que a intersecção dos semiespaços superiores

(1) - Por semiespaço inferior de $\mathbb{R}^{n+1}$ entende-se qualquer semiespaço que possa ser encarado como o hipografo de alguma função linear não vertical de $\mathbb{R}^n$. Analogamente por semiespaço superior de $\mathbb{R}^{n+1}$ entende-se qualquer semiespaço que possa ser encarado como o epigrafo de alguma função linear não vertical de $\mathbb{R}^n$.

fechados que contêm $\text{epi } f(x)$ é idêntica à intersecção conjunta dos semiespaços superiores fechados e dos semiespaços gerados por hiperplanos verticais que contêm $\text{epi } f$.

Suponha-se então que o semiespaço fechado

$$V = \{(x, r) \mid \langle (x, r), (b, 0) \rangle \leq \beta\} = \{(x, r) \mid \langle x, b \rangle \leq \beta\}$$

contém $\text{epi } f$. Note-se que V é gerado por um hiperplano vertical em $\mathbb{R}^{n+1}$ pois o coeficiente de r é nulo. Note-se também que não é restritivo considerarmos o sentido da desigualdade como $\leq$, pois se fosse $\geq$ poderíamos sempre multiplicar a inequação por -1 .

Seja qualquer $(x_0, r_0) \notin V$. Bastará então demonstrar que existe sempre uma função linear não vertical majorada por $f(x)$ tal que (x_0, r_0) não pertence ao seu epigrafo. Por outras palavras, bastará mostrar que existe uma função linear não vertical $l(x)$ tal que $l(x) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, e ainda tal que $r_0 < l(x_0)$.

Como $f(x)$ é própria (já que analisámos mais atrás a possibilidade de ser imprópria), $f > -\infty$ pelo que existirá necessariamente pelo menos um hiperplano não vertical cujo semiespaço superior fechado contém $\text{epi } f(x)$, ou seja, existirá pelo menos uma função $l_1(x)$ tal que $\text{epi } l_1(x) \supset \text{epi } f(x) \Leftrightarrow l_1(x) \leq f(x)$. Façamos $l_2(x) = \langle x, b \rangle - \beta$ tal que possamos escrever $V = \{(x, r) \mid l_2(x) \leq 0\}$. Então, para cada $x \in \text{dom } f$ virá que:

$$l_1(x) \leq f(x) \Rightarrow l_1(x) + \lambda l_2(x) \leq f(x), \quad \forall \lambda \geq 0$$

Ora, se fixarmos $\lambda \geq 0$ e definirmos $l(x) = l_1(x) + \lambda l_2(x)$ vem, como pretendíamos $l(x) \leq f(x)$. Para além disso, e como por construção $l_2(x_0) > 0$ (porque $(x_0, r_0) \notin V$), basta fixarmos λ suficientemente grande para que $l(x_0) = l_1(x_0) + \lambda l_2(x_0) > r_0$ como desejado. $\parallel$

Dem. do corolário 2.1.1.I.1.: $cl(conv Z)$ é a maior função convexa fechada majorada por $Z(x)$. O resultado é imediato pela proposição 2.1.1.I se se mostrar que qualquer função linear não vertical majorada por $Z(x)$ é também majorada por $cl(conv Z)$. Admitamos que não, isto é, admitamos que existe uma função linear não vertical $l(x) = \langle x, x^* \rangle - \beta$ majorada por $Z(x)$ e não majorada por $cl(conv Z)$. Seja $\bar{x}$ tal que $cl(conv Z(\bar{x})) < l(\bar{x}) \leq Z(\bar{x})$. Então, pelas proposições 1.2.2.IV e 1.2.7.IV, $\sup \{ l(x); cl(conv Z(x)) \}$ ($\geq cl(conv Z)$) é convexa fechada e, pelo menos para $\bar{x}$, é estritamente maior que $cl(conv Z)$. Sendo óbvio que $\sup \{ l(x); cl(conv Z(x)) \}$ é majorada por $Z(x)$, então $cl(conv Z)$ não poderia ser a maior função convexa fechada majorada por $f(x)$, o que contradiz a definição. ||

Dem. da proposição 2.1.2.I: Atendendo à definição de conjugada de uma função convexa, é imediato que $f^*(x^*)$ pode ser encarada como a função supremo por pontos das funções lineares não verticais em x^* :

$$r = \langle x, x^* \rangle - f(x).$$

Como as funções lineares são funções convexas (proposição 1.2.6.II), e como uma função supremo por pontos de funções convexas é convexa (pro. 1.2.2.IV), conclui-se que $f^*(x^*)$ é uma função convexa. Para além disso, e porque os epígrafos das funções lineares não verticais são semiespaços fechados, estas são funções s.c.i. (pela proposição 1.2.7.I). Consequentemente, a função $f^*(x^*)$, que é a respectiva função supremo por pontos, é também s.c.i. (pro. 1.2.7.IV). Se $f^*(x^*)$ é própria, tal significa que é fechada. Se $f^*(x^*)$ não é própria, será fechada se for, ou a função constante $+\infty$, ou a função cons

tante $-\infty$. Ora, temos que (pela definição de f^*):

$$(i) f(x) = +\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f^*(x^*) = -\infty, \forall x^* \in \mathbb{R}^n ;$$

$$(ii) \exists x \in \mathbb{R}^n : f(x) = -\infty \Rightarrow f^*(x^*) = +\infty, \forall x^* \in \mathbb{R}^n ;$$

$$(iii) \begin{cases} f(x) > -\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists x^* \in \mathbb{R}^n : f^*(x^*) < +\infty \\ \exists x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty \Rightarrow f^*(x^*) > -\infty, \forall x^* \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Em síntese, $f^*(x^*)$ é própria sse $f(x)$ é própria, e se $f^*(x^*)$ imprópria, então é a função constante $+\infty$ ou $-\infty$ (o que completa a prova de que f^* é fechada).

Que $(clf)^* = f^*$ é imediato pela definição de conjugada e pelo corolário 2.1.1.1.1.

Finalmente, mostremos que $clf = f^{**}$. Sendo f^* uma função convexa, $f^{**} = (f^*)^* = \sup \{ \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*) \}$. Mas pelo que vimos na alínea 2.1.1., para cada x^* a expressão analítica da função linear não vertical $r = \langle x, x^* \rangle - \beta$ tangente a $clf(x)$ para algum x é $r = \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)$. Consequentemente $f^{**} = clf$. ||

——— Dem. da proposição 2.1.3.1: Seja f uma função convexa. Por definição: $f^*(x^*) = \sup_x \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \}$, $\forall x^* \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle - f(x)$, $\forall x, x^* \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$, $\forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$. ||

——— Dem. do corolário 2.1.3.1.1: Pela proposição 2.1.2.1 temos que $f^*(x^*) = (clf)^*(x^*)$. Consequentemente, $f^*(x^*) = \sup \{ \langle x, x^* \rangle - clf(x) \}$, $\forall x^* \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle - clf(x)$, $\forall x, x^* \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow clf(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$, $\forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$. ||

Dem. da proposição 2.1.4.I: Seja (ii): $\bar{x}^* \in \partial f(\bar{x})$. Pela definição de subgradiente de uma função convexa vem, equivalentemente,

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \bar{x}^*, x - \bar{x} \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\Leftrightarrow \langle \bar{x}^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}) \geq \langle \bar{x}^*, x \rangle - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f^*(\bar{x}^*) = \sup \{ \langle x, \bar{x}^* \rangle - f(x) \}$ é atingido para $x = \bar{x}$. Mostramos que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Mostremos agora que (iii) $\Rightarrow$ (i):

$$\sup \{ \langle \bar{x}^*, x \rangle - f(x) \} \text{ atingido para } x = \bar{x} \quad (\text{iii})$$

$$\Leftrightarrow \langle \bar{x}^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}) \geq \langle \bar{x}^*, x \rangle - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \sup_x \{ \langle \bar{x}^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}) \} \geq \sup_x \{ \langle \bar{x}^*, x \rangle - f(x) \}$$

$$\Leftrightarrow \langle \bar{x}^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}) \geq f^*(\bar{x}^*) \Leftrightarrow f(\bar{x}) + f^*(\bar{x}^*) \leq \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle.$$

Mas pela proposição 2.1.3.I (desigualdade de Fenchel): $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Então $f(\bar{x}) + f^*(\bar{x}^*) = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle$, isto é, (iii) $\Rightarrow$ (i).

Mostremos igualmente que (i) $\Rightarrow$ (iii):

$$f(\bar{x}) + f^*(\bar{x}^*) = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle$$

$$\Leftrightarrow f^*(\bar{x}^*) = \langle \bar{x}^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}) \Leftrightarrow \sup \{ \langle x, \bar{x}^* \rangle - f(x) \} = \langle \bar{x}^*, \bar{x} \rangle - f(\bar{x}),$$

o que significa que o supremo é atingido para $x = \bar{x}$. Está demonstrado que (i) $\Rightarrow$ (iii).

Para mostrar que (iv) $\Leftrightarrow$ (v), o raciocínio é perfeitamente similar ao que fizemos para mostrar que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Para finalizar, demonstremos que (iii) $\Leftrightarrow$ (v). De (v) vem que:

$$\sup_{x^*} \{ \langle \bar{x}, x^* \rangle - f^*(x^*) \} = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - f^*(\bar{x}^*)$$

$$\Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - f^*(\bar{x}^*) \geq \langle \bar{x}, x^* \rangle - f^*(x^*), \quad \forall x^* \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \sup_{x^*} \{ \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - f^*(\bar{x}^*) \} \geq \sup_{x^*} \{ \langle \bar{x}, x^* \rangle - f^*(x^*) \}, \quad \forall x^* \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - f^*(\bar{x}^*) \geq f^{**}(\bar{x}) = f(\bar{x}) \quad (\text{porque, por hipótese, } cl f = f)$$

$$\Leftrightarrow f(\bar{x}) + f^*(\bar{x}^*) \leq \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle.$$

Atendendo a que $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle$, $\forall x, x^* \in \mathbb{R}^n$ (prop. 2.1.3.I) vem que

$$f(\bar{x}) + f^*(\bar{x}^*) = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle$$

Mostramos que (v) $\Rightarrow$ (iii). Resta demonstrar que (iii) $\Rightarrow$ (v):

$$f(\bar{x}) + f^*(\bar{x}^*) = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle \Leftrightarrow f(\bar{x}) = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - f^*(\bar{x}^*)$$

$\Leftrightarrow$ (pela proposição 2.1.2.I e tendo em conta que $cl f = f$):

$$f^{**}(\bar{x}) = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - f^*(\bar{x}^*)$$

$\Leftrightarrow \sup_{x^*} \{ \langle \bar{x}, x^* \rangle - f^*(x^*) \} = \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle - f^*(\bar{x}^*)$, isto é, o anterior supremo é atingido para $x^* = \bar{x}^*$. $\parallel$

Dem. da proposição 2.1.5.I: $g^*(x^*) = \inf_x \{ \langle x, x^* \rangle - g(x) \} = -\sup_x \{ \langle x, -x^* \rangle - (-g(x)) \}$. Como $-g(x)$ é uma função convexa (prop. 1.2.5.I), vem então, pela definição de conjugada de uma função convexa:

$$g^*(x^*) = -(-g)^*(-x^*). \quad \parallel$$

——— Dem. da proposição 2.1.5.II: Perfeitamente similar à demonstração da proposição 2.1.2.I, desde que se faça a necessária transposição de conceitos e resultados de modo a referi-los a funções côncavas. ||

——— Dem. da proposição 2.1.5.III: Similar à demonstração da proposição 2.1.3.I, partindo da definição de função côncava conjugada. ||

——— Dem. do corolário 2.1.5.III.1: Similar à demonstração do corolário 2.1.3.I.1, mas referenciada à definição de função côncava conjugada e à proposição 2.1.5.III. ||

——— Dem. da proposição 2.1.5.IV: Perfeitamente similar à demonstração da proposição 2.1.4.I, desde que se faça a necessária transposição de conceitos e resultados. ||

SECÇÃO 2.2

- Dem. da proposição 2.2.1.I: Está demonstrado no texto que antecede a proposição.||
- Dem. do corolário 2.2.1.I.1: Imediato a partir da proposição 2.2.1.I, tendo em conta que, por definição, clC é o mais pequeno conjunto fechado que contém C .||
- Dem. do corolário 2.2.1.I.2: $clC_1 \subset clC_2 \Leftrightarrow (x \in clC_1 \Rightarrow x \in clC_2) \Leftrightarrow \{ \text{pela proposição 2.2.1.I} \} (\langle x, x^* \rangle \leq \delta^*(x^*|C_1), \forall x^* \Rightarrow \langle x, x^* \rangle \leq \delta^*(x^*|C_2), \forall x^*) \Leftrightarrow \delta^*(x^*|C_1) \leq \delta^*(x^*|C_2), \forall x^*. ||$
- Dem. da proposição 2.2.2.I: A 1ª parte da proposição está demonstrada no texto que a antecede. A 2ª parte resulta directamente da 1ª parte e da proposição 2.1.2.I.
- Dem. do corolário 2.2.2.I.1: Imediato atendendo à definição de função indicadora e à proposição 2.2.2.I.
- Dem. da proposição 2.2.2.II: Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio. Como $\delta^*(x^*|C)$ é a função conjugada de $\delta(x|C)$ (prop. 2.2.2.I), é por isso uma função convexa fechada, própria sse $\delta(x|C)$ é própria (prop. 2.1.2.I). Ora, $\delta(x|C)$ é própria pois C é não vazio (prop. 1.2.3.I). Quanto a $\delta^*(x^*|C)$ ser linearmente homogênea, isso resulta directamente da definição: $\delta^*(\lambda x^*|C) = \sup \{ \langle x, \lambda x^* \rangle | x \in C \} = \lambda \sup \{ \langle x, x^* \rangle | x \in C \} = \lambda \delta^*(x^*|C)$. Resta então demonstrar que qualquer função convexa própria fechada e linearmente homogênea pode ser encarada como função suporte de um conjunto convexo não vazio. Tal equivale a mostrar que a conjugada de uma função $f(x)$ convexa própria fechada linearmente homogênea é uma função indicadora de um conjunto convexo não vazio fechado (pois pela proposição 2.2.2.I a função indicadora e a função conjugada de um conjunto convexo fechado são conjugadas uma da outra). Por outras palavras, temos que mostrar que a conjugada $f^*(x^*)$ de qualquer função convexa própria fe-

chada linearmente homogênea apenas assume os "valores" 0 e $+\infty$ e tem domínio efectivo convexo fechado não vazio. Este último facto resulta directamente de ser a conjugada de uma função convexa própria (prop. 2.1.2.I). Falta então mostrar que $f^*(x^*)$ não pode ser diferente de 0 ou $+\infty$. Ora, para qualquer função convexa temos que, ^{para} $\lambda > 0$:

$$(\lambda f)^*(x^*) = \sup_x \{ \langle x, x^* \rangle - \lambda f(x) \} = \lambda \sup_x \{ \langle x, x^*/\lambda \rangle - f(x) \} = \lambda f^*(x^*/\lambda).$$

Mas como f é por hipótese linearmente homogênea, teremos que ter também, $\forall \lambda > 0$:

$$\begin{aligned} (\lambda f)^*(x^*) &= \sup_x \{ \langle x, x^* \rangle - \lambda f(x) \} = \sup_x \{ \langle x, x^* \rangle - f(\lambda x) \} = \\ &= \sup_x \{ \langle \lambda x, x^*/\lambda \rangle - f(\lambda x) \} = f^*(x^*/\lambda). \end{aligned}$$

Reunindo os dois resultados:

$$\lambda f^*(x^*/\lambda) = f^*(x^*/\lambda), \quad \forall \lambda > 0$$

Mas o anterior verificar-se-á sse f^* assumir apenas os "valores" 0 ou $+\infty$. Está demonstrado. ||

— Dem. da proposição 2.2.2.III: Sendo cl $h^*(x^*)$ o fecho da função convexa linearmente homogênea gerada por $f^*(x^*)$, temos que:

(i) é uma função convexa fechada linearmente homogênea por definição;

(ii) é também própria já que f^* é uma função própria (porque f é própria por hipótese - proposição 2.1.2.I)

Logo, pela proposição 2.2.2.II, cl $h^*(x^*)$ é a função suporte de algum conjunto convexo fechado dado por:

$$\begin{aligned}
 & \{x \mid \langle x, x^* \rangle \leq c \mid h^*(x^*), \forall x^* \in \mathbb{R}^n\} && (\text{prop. 2.2.1.I}) \\
 = & \{x \mid \langle x, x^* \rangle \leq c \mid \inf \{(f^* \lambda)(x^*) \mid \lambda > 0\}, \forall x^* \in \mathbb{R}^n\} && (\text{prop. 1.2.4.V}) \\
 = & \{x \mid \langle x, x^* \rangle \leq c \mid (f^* \lambda)(x^*), \forall x^* \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0\} \\
 = & \{x \mid \langle x, x^* \rangle - \lambda f^*(x^*/\lambda) \leq 0, \forall x^* \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0\} && (\text{pela definição de multiplicação escalar direita, tendo em conta que } f^* \text{ é fechada}) \\
 = & \{x \mid \lambda \sup_{x^*} \{\langle x, x^*/\lambda \rangle - f^*(x^*/\lambda)\} \leq 0, \forall \lambda > 0\} \\
 = & \{x \mid \lambda f(x) \leq 0, \forall \lambda > 0\}. && (\text{pela definição de conjugada, tendo em conta que } f \text{ é fechada}) \\
 = & \{x \mid f(x) \leq 0\}.
 \end{aligned}$$

Está provada a 1ª parte da proposição. Para demonstrar a 2ª parte o argumento a utilizar é perfeitamente similar. ||

— Dem. da proposição 2.2.3.I: Seja $\delta(x|K)$ a função indicadora de um cone convexo não vazio e fechado $K \subset \mathbb{R}^n$. Pela proposição 1.2.3.I, $\delta(x|K)$ é convexa própria. Os conjuntos de nível $S_{\delta}^{\leq}(\alpha) = \{x \mid \delta(x|K) \leq \alpha\}$ são iguais a: (i) $\mathbb{R}^n$ se $\alpha = +\infty$; (ii) K se $0 \leq \alpha < +\infty$; (iii) $\emptyset$ se $\alpha < 0$. Como são todos conjuntos fechados, a função $\delta(x|K)$ é s.c.i. (prop. 1.2.7.I), pelo que, por ser convexa própria, é fechada. Finalmente, porque K é um cone convexo, $\delta(x|K)$ é linearmente homogênea (prop. 1.2.4.VI). ||

— Dem. da proposição 2.2.3.II: Está no texto que antecede a proposição. ||

— Dem. do corolário 2.2.3.II.1: Pela proposição 2.2.3.II:

$$(i) \quad \delta(x|K) = \delta^*(x|K^0)$$

e

$$(ii) \quad \delta(x^*|K^0) = \delta^*(x^*|K^{00})$$

Porque K^0 é convexo fechado (prop. 2.2.3.II), então $\delta(x^*|K^0)$ é fechada, pelo que fica de (i): $\delta^*(x^*|K) = [\delta^*(x|K^0)]^* =$ (prop. 2.1.2.I) $\delta(x^*|K^0)$.

Reunindo esta última igualdade com (ii) obtemos:

$$\delta^*(x^*|K) = \delta^*(x^*|K^{00}) \Leftrightarrow K = K^{00} \quad ||$$

SECÇÃO 2.3

— Dem. da proposição 2.3.1.I: Por definição, $\gamma_1(x|C)$ é a função convexa linearmente homogênea gerada por $f(x) = \delta(x|C) + 1$. Logo, pela proposição 1.2.4.V: $\gamma_1(x|C) = \inf\{(f\lambda)(x) \mid \lambda > 0\} =$ (pela definição de multiplicação escalar direita) $= \inf\{\lambda \delta(\frac{x}{\lambda} | C) + \lambda \mid \lambda > 0\} =$
 $= \inf\{\delta(x|\lambda C) + \lambda \mid \lambda > 0\} = \inf\{\lambda \mid \lambda > 0, x \in \lambda C\}.$ //

— Dem. do corolário 2.3.1.I.1: Imediato pela definição e pela proposição 2.3.1.I. //

— Dem do corolário 2.3.1.I.2: Pela proposição 2.3.1.I temos que $\gamma_1(x|K) = \inf\{\lambda \mid \lambda > 0, x \in \lambda K\} = \inf\{\lambda + \delta(x|\lambda K) \mid \lambda > 0\}$
 Como K é um cone, então $\lambda K = K$, $\forall \lambda > 0$, pelo que:

$$\begin{aligned} \gamma_1(x|K) &= \inf\{\lambda + \delta(x|K) \mid \lambda > 0\} = \\ &= \delta(x|K) + \inf\{\lambda \mid \lambda > 0\} = \delta(x|K). \end{aligned}$$

— Dem da proposição 2.3.1.II: Pelo corolário 2.3.1.I.1., se C é convexo e contém a origem, então $\gamma_1(x|C)$ é convexa própria. Pela definição de função convexa fechada, $\gamma_1(x|C)$ será então convexa fechada se for s.c.i.. Pela proposição 1.2.7.I será s.c.i. sse todos os seus conjuntos $S_{\gamma_1}^{\leq}(\alpha) = \{x \mid \gamma_1(x|C) \leq \alpha\}$ forem fechados. Ora, se $\alpha < 0$ vem que $S_{\gamma_1}^{\leq}(\alpha) = \emptyset$, pois a função $\gamma_1(x|C)$ é não negativa (corolário 2.3.1.I.1). Consequentemente os conjuntos de nível vêm trivialmente fechados para $\alpha < 0$. Precisamos então de mostrar que também o são para qualquer $\alpha \geq 0$, e que $S_{\gamma_1}^{\leq}(\alpha) = \alpha C$, $\forall \alpha > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Comece-se por notar que: } S_{\gamma_1}^{\leq}(\alpha) &= \{x \mid \gamma_1(x|C) \leq \alpha\} = (\text{pela prop. 2.3.1.I}) = \\ &= \{x \mid \inf\{\delta(x|\lambda C) + \lambda \mid \lambda > 0\} \leq \alpha\} = \{x \mid \exists (0 < \lambda \leq \alpha \vee \lambda \rightarrow 0^+): x \in \lambda C\} = \\ &= \bigcup_{(0 < \lambda \leq \alpha \vee \lambda \rightarrow 0^+)} \lambda C = \{0\} \cup \left(\bigcup_{0 < \lambda \leq \alpha} \lambda C\right). \end{aligned} \quad \dots (A)$$

Como C é convexo e contém a origem é possível de mostrar que $\lambda C \subset \alpha C$, $\forall 0 < \lambda \leq \alpha$. Seja um dado $0 < \lambda \leq \alpha$ e seja um qualquer $x \in \lambda C \Leftrightarrow x/\lambda \in C$. Como C é convexo e contém a origem, vem que:

$$(1-\mu) \cdot 0 + \mu \cdot \frac{x}{\lambda} \in C, \forall 0 \leq \mu \leq 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\lambda}{\mu} C, \forall 0 < \mu \leq 1.$$

Já que $0 < \lambda \leq \alpha$, existe necessariamente um $0 < \mu \leq 1$ tal que $\alpha = \lambda/\mu$, o que significa que para dado $0 < \lambda \leq \alpha$:

$$x \in \lambda C \Rightarrow x \in \frac{\lambda}{\mu} C, \forall 0 < \mu \leq 1 \Rightarrow x \in \alpha C$$

ou seja, $\lambda C \subset \alpha C$, $\forall 0 < \lambda \leq \alpha$. Sendo assim, virá de (A) que para $\alpha > 0$:

$$S_{\gamma_1}^{\leq}(\alpha) = \{0\} \cup (\alpha C)$$

Como C contém a origem, então αC ($\alpha > 0$) também conterá, donde para $\alpha > 0$: $S_{\gamma_1}^{\leq}(\alpha) = \alpha C$.

Como C é fechado por hipótese, a proposição 1.1.5:IV permite concluir que $S_{\gamma_1}^{\leq}(\alpha) = \alpha C$ também são fechados. ||

— Dem da proposição 2.3.2.I: Pela definição e pelo corolário 2.3.1.I.1, como C é um conjunto convexo não vazio, $\gamma_1(x|C)$ é convexa própria e linearmente homogênea. Pela proposição 2.3.1.II, como C é fechado, $\gamma_1(x|C)$ é também fechada. Ora, uma função convexa própria fechada linearmente homogênea é função suporte de algum conjunto convexo fechado não vazio. Mas, por definição, $\gamma_1(x|C)$ é a função convexa linearmente homogênea gerada por $f(x) = \delta(x|C) + 1$. Logo, pela proposição 2.2.2.III, e já que $\gamma_1(x|C)$ é fechada porque C contém a origem, temos que $\gamma_1(x|C)$ é função suporte do conjunto:

$$\begin{aligned} & \{x^* | [\delta(x|C) + 1]^*(x^*) \leq 0\} \\ &= \{x^* | \delta^*(x^*|C) - 1 \leq 0\} \text{ (pela definição de função conjugada)} \\ &= \{x^* | \delta^*(x^*|C) \leq 1\} \\ &= \{x^* | \sup \{ \langle x, x^* \rangle | x \in C \} \leq 1\} \\ &= \{x^* | \sup_{x \in C} \langle x, x^* \rangle \leq 1, \forall x \in C\} = C_-^0 \quad . || \end{aligned}$$

— Dem. do corolário 2.3.2.I.1: Pela proposição 2.3.2.I, $\gamma_1(x|K)$ é a função suporte de K_-^0 . Logo, pela proposição 2.2.1.I:

$$K_-^0 = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq \gamma_1(x|K), \forall x \in R^n\}$$

Mas pelo corolário 2.3.1.I.2 temos $\gamma_1(x|K) = \delta(x|K)$, donde:

$$K_-^0 = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq \delta(x|K), \forall x \in R^n\} = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq 0, \forall x \in K\} = K^0. ||$$

— Dem. da proposição 2.3.2.II: Vamos fazer esta demonstração em várias etapas:

1) Sendo $C_-^0 = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq 1, \forall x \in C\} = \bigcap_{x \in C} \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq 1\}$, se C é não vazio, C_-^0 é a intersecção de semiespaços fechados. Como os semiespaços são conjuntos convexos (prop. 1.1.3.II), as proposições 1.1.1.I e 1.1.5.III permitem concluir que C_-^0 é convexo fechado. Que C_-^0 contem a origem, é imediato pela definição, pois fazendo $x^*=0$ vem $\langle x, 0 \rangle \leq 1$ qualquer que seja $x \in R^n$ (e, por isso, $\forall x \in C$). Está demonstrado que se C é não vazio, então C_-^0 é convexo fechado contendo a origem.

$$\begin{aligned} 2) (C_-^0)_-^0 &= \{x | \langle x, x^* \rangle \leq 1, \forall x^* \in C_-^0\} = \{x | \sup \{\langle x, x^* \rangle | x^* \in C_-^0\} \leq 1\} = \\ &= \{x | \delta^*(x|C_-^0) \leq 1\} \\ &= \{x | \gamma_1(x|C) \leq 1\} \quad (\text{pela proposição 2.3.2.I, pois } C \text{ é convexo,} \\ &\quad \text{fechado e contem a origem}) \\ &= C \quad (\text{pela proposição 2.3.1.II, pois } C \text{ é conv.} \\ &\quad \text{fechado e } 0 \in C) \end{aligned}$$

Está demonstrado que $(C_-^0)_-^0 = C$ quando C é convexo fechado e contem a origem.

3) $\gamma_1(x|C) = \delta^*(x|C_-^0)$ se C é convexo fechado contendo a origem já está demonstrado pela proposição 2.3.2.I.

4) Pela proposição 2.3.2.I (ou por (3)), $\gamma_1(x^*|C_-^0) = \delta^*(x^*|(C_-^0)_-^0)$ pois se C é convexo fechado, então C_-^0 é convexo fechado contendo a origem (por (1)).

Como por 2) temos que $(C_-^0)_-^0 = C$ fica $\gamma_1(x^*|C_-^0) = \delta^*(x^*|C), \forall x^* \in R^n$.

— Dem da proposição 2.3.2.III: Pela proposição 2.3.2.I (ou 2.3.2.II), $\gamma_1(x|C)$ é a função suporte de C_-^0 . Pela proposição 2.2.1.I vem que:

$$C_-^0 = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq \gamma_1(x|C), \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

Pela definição de $\gamma_1^0(x^*|C)$ ficamos então com:

$$\begin{aligned} \gamma_1^0(x^*|C) &= \inf\{\lambda | \lambda > 0, x^* \in \lambda C_-^0\} = \inf\{\lambda | \lambda > 0, \frac{x^*}{\lambda} \in C_-^0\} \\ &= \inf\{\lambda | \lambda > 0, \langle x, \frac{x^*}{\lambda} \rangle \leq \gamma_1(x|C), \forall x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \inf\{\lambda | \lambda > 0, \langle x, x^* \rangle \leq \lambda \gamma_1(x|C), \forall x \in \mathbb{R}^n\}. \parallel \end{aligned}$$

— Dem do corolário 2.3.2.III.1: Imediato a partir da proposição 2.3.2.III. $\parallel$

— Dem da proposição 2.3.2.IV: Que $\gamma_1^0(x^*|C)$ é a função gauge-I do conjunto C_-^0 é imediato pela definição de γ_1^0 e pela proposição 2.3.1.I. Que é fechada, conclui-se pela proposição 2.3.1.II, atendendo a que C_-^0 é um conjunto convexo fechado contendo a origem (prop. 2.3.2.II). Falta então mostrar que se C for também fechado e contenha a origem, então a polar da polar de $\gamma_1(x|C)$ é ela própria.

Pela definição: $\gamma_1^0(x^*|C) = \gamma_1(x^*|C_-^0)$. Logo, também pela definição,

$$[\gamma_1^0(x^*|C)]^0 = \gamma_1^0(x|C_-^0) = \gamma_1(x|(C_-^0)_-)$$

Mas se C for convexo fechado e contiver a origem, a proposição 2.3.2.II permite concluir que $(C_-^0)_- = C$, pelo que nesta situação $\gamma_1^{00} = (\gamma_1^0)^0 = \gamma_1$. $\parallel$

— Dem do corolário 2.3.2.IV:1: Sejam dois conjuntos $C, D \subset \mathbb{R}^n$ convexos fechados e contendo a origem. Admita-se que estes conjuntos são polares um do outro, isto é, $C = D_-^0$ e $D = C_-^0$. Então:

$$\begin{cases} \gamma_1(x|C) = \gamma_1(x|D_-^0) = (\text{pela definição da polar}) \gamma_1^0(x|D) \\ \gamma_1(x^*|D) = \gamma_1(x^*|C_-^0) = (\text{pela definição da polar}) \gamma_1^0(x^*|C) \end{cases}$$

Admitamos agora inversamente que as funções gauge-I de C e D são gauges-I polares um da outra, isto é, que:

$$\begin{cases} \gamma_1(x|C) = \gamma_1^0(x|D) \\ \gamma_1(x^*|D) = \gamma_1^0(x^*|C) \end{cases}$$

Pela proposição 2.3.2.IV temos que $\gamma_1^0(x^*|C) = \gamma_1(x^*|C_-^0)$ e que

$$\gamma_1^0(x|D) = \gamma_1(x|D_-^0). \text{ Substituindo, vem:}$$

$$\begin{cases} \gamma_1(x|C) = \gamma_1(x|D_-^0) \\ \gamma_1(x^*|D) = \gamma_1(x^*|C_-^0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = D_-^0 \\ D = C_-^0 \end{cases} . ||$$

— Dem. da proposição 2.3.2.V: Imediata pela definição de função polar e pelas proposições 2.3.2.II e 2.3.2.IV. ||

— Dem. da proposição 2.3.3.I: Por definição, $\gamma_1(x|C)$ é função convexa linearmente homogênea gerada por $f(x) = \delta(x|C) - 1$. Logo, pela proposição 1.2.4.V:

$$\begin{aligned} \gamma_2(x|C) &= \inf\{(f\lambda)(x) \mid \lambda > 0\} = (\text{pela definição de multiplicação es-} \\ &\text{calar direita}) = \inf\{\lambda \delta(\frac{x}{\lambda}|C) - \lambda \mid \lambda > 0\} = \inf\{\delta(x|\lambda C) - \lambda \mid \lambda > 0\} = \inf\{-\lambda \mid \lambda > \\ &> 0, x \in \lambda C\} = -\sup\{\lambda \mid \lambda > 0, x \in \lambda C\} . || \end{aligned}$$

— Dem. do corolário 2.3.3.1.1: A 1ª afirmação do corolário é imediata pela definição e pela proposição 2.3.3.I. Quanto à demonstração da 2ª afirmação ela é feita em 3 etapas: 1) Demonstrando que se $C = \emptyset$ então $\gamma_2(x|C)$ é imprópria; 2) Demonstrando depois que se C é não vazio e contem semirectas emanadas da origem, $\gamma_2(x|C)$ é também imprópria; 3) Finalmente, mostrando que se C é não vazio e não contem semirectas emanadas da origem, então $\gamma_2(x|C)$ é própria.

1) Se $C = \emptyset$, $\gamma_2(x|C) = -\sup\{\lambda \mid \lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in \emptyset\} = +\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, se $C = \emptyset$ a respectiva função γ_2 é a função constante $+\infty$ (imprópria).

2) Se $C \neq \emptyset$ e contiver semirectas emanadas da origem, seja x^1 um vector pertencente a uma dessas semirectas. Então $x^1 \in \lambda C, \forall \lambda > 0$, pelo que teremos $\gamma_2(x^1|C) = -\sup\{\lambda | \lambda > 0, x^1 \in \lambda C\} = -\infty$. $\gamma_2(x|C)$ é portanto imprópria se assim fôr.

3) Finalmente, se $C \neq \emptyset$ e não contiver nenhuma semirecta emanada da origem, então:

(i) Porque $C \neq \emptyset$, temos $\text{dom } \gamma_2(x|C) = \{x | \exists \lambda > 0, x \in \lambda C\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n$:
 $\gamma_2(x|C) < +\infty$;

(ii) Porque C não contém nenhuma semirecta emanada da origem,
 $\sup\{\lambda | \lambda > 0, x \in \lambda C\} < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \gamma_2(x|C) > -\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Reunindo (i) e (ii), temos que $\gamma_2(x|C)$ é própria nesta última situação. Note-se ainda que se C fôr fechado e não contiver a origem, então não conterá nenhuma semirecta emanada da origem. Com efeito, se C é fechado e não contém a origem, existe por definição um $\varepsilon > 0$ para o qual $E_\varepsilon(0) \cap C = \emptyset$. Consequentemente, C não poderá conter nenhuma semirecta emanada da origem. Compreende-se assim que C ser convexo, fechado e não conter a origem, implica que C é convexo, não vazio, não contendo a origem e não contendo nenhuma semirecta emanada da origem. $\gamma_2(x|C)$ será, por isso, uma função convexa própria nesta situação. //

— Dem. da proposição 2.3.3.II: Pela proposição 2.3.3.I vem que:

$$\gamma_2(x|C) = -\sup\{\lambda | \lambda > 0, x \in \lambda C\}$$

Como $0 \notin C$ então $\{\lambda | \lambda > 0, 0 \in \lambda C\} = \emptyset$, donde $\gamma_2(0|C) = -\sup \emptyset = +\infty$.

Seja agora $C \neq \emptyset$ e $\bar{x} \in C$, e seja a sucessão $\{x^i\}$ convergente para 0 e formada por vectores pertencentes à mesma semirecta emanada da origem a que pertence $\bar{x}$ (isto é, x^i tais que $x^i = \lambda_i \bar{x}$ para algum $\lambda_i > 0$). Então o limite de $\gamma_2(x^i|C)$ para a anterior sucessão é menor

que $+\infty$, pois $\sup\{\lambda \mid \lambda > 0, x \in \lambda C\} > 0$. Consequentemente, $\gamma_2(x|C)$ não é s.c.i. em $x=0$.

Se $\gamma_2(x|C)$ é própria, o anterior implica que não é fechada. Se $\gamma_2(x|C)$ não é própria pelo corolário 2.3.3.I.1, é porque ocorre uma das seguintes situações:

1) $C=\emptyset$. Neste caso, $\gamma_2(x|C) = +\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$ (ver dem. corol. 2.3.3.I.1), pelo que $\gamma_2(x|C)$ é fechada.

2) $C \neq \emptyset$ e contem alguma semirecta emanada da origem. Neste caso, $\exists x \in \mathbb{R}^n: \gamma_2(x|C) = -\infty$ (ver dem. corol. 2.3.3.I.1.). Assim sendo, nesta situação γ_2 só será fechada se for a função constante $-\infty$. Mas mostramos acima que $\gamma_2(0|C) = +\infty$, pelo que $\gamma_2(x|C)$ não é fechada. ||

— Dem. da proposição 2.3.3.III: Comece-se por notar que:

$$S_{\gamma_2}^{\leq}(\alpha) = \{x \mid \gamma_2(x|C) \leq \alpha\} = (\text{pela proposição 2.3.3.I}) = \{x \mid -\sup\{\lambda \mid \lambda > 0, x \in \lambda C\} \leq \alpha\} = \{x \mid \sup\{\lambda - \delta(x|\lambda C) \mid \lambda > 0\} \geq -\alpha\} = \{x \mid \exists \lambda > 0: \lambda \geq -\alpha \wedge x \in \lambda C\}.$$

Para $\alpha < 0$ temos então:

$S_{\gamma_2}^{\leq}(\alpha) = \{x \mid \exists \lambda > 0: x \in \lambda C\} = \bigcup_{(0 < -\alpha \leq \lambda)} \lambda C$. Como $\lambda_1 C \supset \lambda_2 C, \forall 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$, fica como queríamos mostrar que $S_{\gamma_2}^{\leq}(\alpha) = -\alpha C, \forall \alpha < 0$. Se C for fechado, então $S_{\gamma_2}^{\leq}(\alpha) = -\alpha C$ é também fechado para qualquer $\alpha < 0$ (prop. 1.1.5.IV). Pelo corolário 1.2.7.I.1, temos que $\gamma_2(x|C)$ é s.c.i. relativamente a $S_{\gamma_2}^{\leq}(\theta)$ com $\theta < 0$ e tão pequeno quanto queiramos em valor absoluto. Consequentemente, $\gamma_2(x|C)$ é s.c.i. relativamente a $S_{\gamma_2}^{\leq}(0)$. ||

— Dem. do corolário 2.3.3.III.1.: Pelo corolário 2.3.3.I.1, $\gamma_2(x|C)$ é convexa própria. Pela definição de função fechada, o seu fecho será a sua envolvente s.c.i.. Ora, pela proposição 2.3.3.III, $\gamma_2(x|C)$ é s.c.i. relativamente a $S_{\gamma_2}^{\leq}(0)$. Para além disso, pelo co-

rolário 2.3.3.I.1., $\gamma_2(x|C)$ é negativa em $\text{dom } \gamma_2(x|C)$ (sendo $+\infty$ para $x \notin \text{dom } \gamma_2(x|C)$). Consequentemente, $\gamma_2(x|C)$ é s.c.i. relativamente ao seu domínio efectivo, pelo que $\gamma_2(x|C) = \text{cl } \gamma_2(x|C)$, $\forall x \in \text{dom } \gamma_2(x|C)$. ||

— Dem. da proposição 2.3.4.I: Se C respeitar as hipóteses apontadas, $\gamma_2(x|C)$ é uma função convexa própria linearmente homogênea (corol. 2.3.3.I.1), pelo que $\text{cl } \gamma_2(x|C)$ é uma função convexa própria fechada linearmente homogênea. Pela proposição 2.2.2.II, $\text{cl } \gamma_2(x|C)$ é então a função suporte de algum conjunto convexo fechado não vazio. Mas, por definição, $\gamma_2(x|C)$ é a função convexa linearmente homogênea gerada por $f(x) = \delta(x|C) - 1$. Logo, pela proposição 2.2.2.III, $\text{cl } \gamma_2(x|C)$ é a função suporte do conjunto:

$$\begin{aligned} & \{x^* | [\delta(x|C) - 1]^*(x^*) \leq 0\} \\ &= \{x^* | \delta^*(x^*|C) + 1 \leq 0\} \quad (\text{pela definição de conjugada}) \\ &= \{x^* | \delta^*(x^*|C) \leq -1\} \\ &= \{x^* | \sup \{ \langle x, x^* \rangle | x \in C \} \leq -1 \} \\ &= \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq -1, \forall x \in C\} \\ &= \{-x^* | \langle x, -x^* \rangle \leq -1, \forall x \in C\} \\ &= \{-x^* | \langle x, x^* \rangle \geq 1, \forall x \in C\} = -C_+^0. \quad || \end{aligned}$$

— Dem. do corolário 2.3.4.I.1: Imediato pela proposição 2.3.4.I e pelo corolário 2.3.3.III.1. ||

— Dem. da proposição 2.3.4.II: Vamos fazer esta demonstração em várias etapas:

1) Se C respeitar as hipóteses apontadas, $\gamma_2(x|C)$ é uma função convexa própria linearmente homogênea (corolário 2.3.3.I.1.) pelo que $\text{cl } \gamma_2(x|C)$, além do anterior é também fechada. Pela proposição 2.2.2.II, $\text{cl } \gamma_2(x|C)$ é então a função suporte de algum conjunto conve-

xo fechado não vazio. Pela proposição 2.3.4.I concluímos que tal conjunto é $-C_+^0$. Consequentemente $-C_+^0$ é um conjunto convexo fechado e não vazio. As proposições 1.1.1.III e 1.1.5.IV permitem confirmar que C_+^0 é então convexo, fechado e não vazio.

2) Pela definição $C_+^0 = \{x \mid \langle x, x^* \rangle \geq 1, \forall x^* \in C\}$. Logo $0 \notin C_+^0$, pois $\langle x, 0 \rangle < 1, \forall x \in R^n$.

3) Repare-se ainda que, para $\lambda_2 > 0$, temos: $\langle x, x^*/\lambda_2 \rangle \geq 1, \forall x \in C \Rightarrow \langle x, x^*/\lambda_1 \rangle \geq 1, \forall x \in C, 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Consequentemente, $\lambda_1 C_+^0 \supset \lambda_2 C_+^0, \forall 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$.

$$\begin{aligned} 4) (C_+^0)_+^0 &= \{x \mid \langle x, x^* \rangle \geq 1, \forall x^* \in C_+^0\} = \{x \mid \langle x, x^* \rangle \leq -1, \forall -x^* \in -C_+^0\} = \\ &= \{x \mid \sup\{\langle x, -x^* \rangle \mid -x^* \in -C_+^0\} \leq -1\} = \\ &= \{x \mid \delta^*(x \mid -C_+^0) \leq -1\} \\ &= \{x \mid cl \chi_2(x \mid C) \leq -1\} \quad (\text{pela prop. 2.3.4.I}) \\ &= C \quad (\text{pela prop. 2.3.3.I}) \end{aligned}$$

$$5) (-C)_+^0 = \{x^* \mid \langle x, x^* \rangle \geq 1, \forall x \in -C\} = -\{-x^* \mid \langle -x, -x^* \rangle \geq 1, \forall -x \in C\} = -C_+^0.$$

Então $-(-C_+^0)_+^0 = [-(-C_+^0)]_+^0 = (C_+^0)_+^0 = C$.

6) Que $cl \chi_2(x \mid C) = \delta^*(x \mid -C_+^0)$ já foi estabelecido na proposição 2.3.4.I.

7) Finalmente, pela proposição 2.3.4.I vem ainda que

$$\chi_2(x^* \mid -C_+^0) = \delta^*(x^* \mid -(-C_+^0)_+^0)$$

(repare-se que por (1) a (4), $-C_+^0$ satisfaz as hipóteses da proposição 2.3.4.I). Como por (5) temos que $-(-C_+^0)_+^0 = C$, fica:

$$\chi_2(x^* \mid -C_+^0) = \delta^*(x^* \mid C). \parallel$$

— Dem. do corolário 2.3.4.II.1.: Imediata pela proposição 2.3.4.II e corolário 2.3.3.III.1. $\parallel$

— Dem. da proposição 2.3.4.III: Pela proposição 2.3.4.I, $cl \chi_2(x|C)$ é a função suporte de $-C_+^0$. Pela proposição 2.2.1.I fica portanto:

$$-C_+^0 = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq cl \chi_2(x|C), \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\Leftrightarrow C_+^0 = \{-x^* | \langle x, -x^* \rangle \geq -cl \chi_2(x|C), \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\Leftrightarrow C_+^0 = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \geq -cl \chi_2(x|C), \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

Pela definição de χ_2^0 vem então:

$$\begin{aligned} \chi_2^0(x^*|C) &= -\sup\{\lambda | \lambda > 0, x^* \in C_+^0\} = \\ &= -\sup\{\lambda | \lambda > 0, \langle x, x^*/\lambda \rangle \geq -cl \chi_2(x|C), \forall x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= -\sup\{\lambda | \lambda > 0, \langle x, x^* \rangle \geq -\lambda cl \chi_2(x|C), \forall x \in \mathbb{R}^n\}. \parallel \end{aligned}$$

— Dem. do corolário 2.3.4.III.1.: Imediato pela proposição 2.3.4.III. $\parallel$

— Dem da proposição 2.3.4.IV: Que $\chi_2^0(x|C)$ é a função gauge-II de C_+^0 é imediato pela proposição 2.3.3.I, atendendo a que por definição C_+^0 é um conjunto convexo (porque é a intersecção de semi-espacos) e não contem a origem (ver nota de pē de página nº 15 na alínea 1.1.7). Tendo em conta o anterior, e já que $\chi_2^0(x^*|C) = \chi_2(x^*|C_+^0)$, vem ("polarizando" ambos os membros):

$$\chi_2^{00}(x|C) = \chi_2^0(x|(C_+^0)) = \chi_2(x|(C_+^0)_+^0)$$

Mas se C fôr convexo, não vazio, não contendo a origem, fechado, e $\lambda_1 C \supset \lambda_2 C, \forall 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$, vem que $(C_+^0)_+^0 = C$ (prop. 2.3.4.II), pelo que

$$\chi_2^{00}(x|C) = \chi_2(x|C). \parallel$$

— Dem. do corolário 2.3.4.IV.1: Perfeitamente similar à demonstração do corolário 2.3.2.IV.1, substituindo conjuntos polares inferiores por superiores, e substituindo também a referência à proposição 2.3.2.IV por uma referência à proposição 2.3.4.IV. ||

duma função gauge II

— Dem. da proposição 2.3.4.V: Imediata pela definição de polar/e pelas proposições 2.3.4.II e 2.3.4.IV. ||

SECÇÃO 3.1

— Dem. da proposição 3.1.1.I: Imediata a partir das definições. ||

— Dem. da proposição 3.1.1.II: Começemos por mostrar que se os conjuntos $S_f^{\leq}(\alpha)$ são todos convexos, então f é quase-convexa. Para tal basta atender a que $S_f^{\leq}(\beta) = \bigcap_{\alpha > \beta} S_f^{\leq}(\alpha)$. Se os conjuntos $S_f^{\leq}(\alpha)$ são todos convexos, a proposição 1.1.1.I permite concluir que os conjuntos $S_f^{\leq}(\beta)$ são também convexos, pelo que f é quase-convexa.

Demonstraremos agora que se f é quase-convexa, isto é, se os conjuntos $S_f^{\leq}(\beta)$ são convexos, também o são os conjuntos $S_f^{\leq}(\alpha)$. Sejam $x^1, x^2 \in S_f^{\leq}(\alpha)$. Existe então necessariamente algum $\beta < \alpha$ tal que também $x^1, x^2 \in S_f^{\leq}(\beta)$. Como $S_f^{\leq}(\beta)$ é convexo então igualmente $(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in S_f^{\leq}(\beta)$, $\forall 0 \leq \lambda \leq 1$. Como por construção $S_f^{\leq}(\beta) \subset S_f^{\leq}(\alpha)$, vem também:

$$(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in S_f^{\leq}(\alpha).$$

E isto quaisquer que sejam $x^1, x^2 \in S_f^{\leq}(\alpha)$ e qualquer que seja α . Tal significa que os conjuntos $S_f^{\leq}(\alpha)$ são todos convexos. ||

— Dem. do corolário 3.1.1.II.1.: Decorre directamente das proposições 3.1.1.II e 3.1.1.I. ||

— Dem. da proposição 3.1.1.III: Que são convexos é imediato pela definição e pela proposição 3.1.1.II. Resta então demonstrar que são cones, isto é, que são fechados na multiplicação por escalar positivo. Seja x tal que $x \in S_f^{\leq}(\alpha)$, isto é tal que $f(x) \leq \alpha$. Mas como $f(x)$ é homogênea de grau 0, então também $f(\lambda x) \leq \alpha \forall \lambda > 0$, pelo que $S_f^{\leq}(\alpha)$ é um cone. Raciocínio idêntico se pode fazer para $S_f^{\leq}(\alpha)$. ||

— Dem. do corolário 3.1.1.III.1: Decorre directamente das proposições 3.1.1.III e 3.1.1.I. ||

— Dem. da proposição 3.1.1.IV: Começemos por mostrar que f é quase-convexa, isto é, $S_f^{\leq}(\alpha)$ convexos implica a expressão da proposição. Admitindo sem perda de generalidade, que $f(x^2) \geq f(x^1)$. Então teremos que:

$$x^1, x^2 \in S_f^{\leq}(f(x^2)) = \{x \mid f(x) \leq f(x^2)\}$$

Como por definição estes conjuntos de nível são convexos, então também, para qualquer $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in S_f^{\leq}(f(x^2)) \Leftrightarrow f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] \leq f(x^2).$$

Já que fizemos $f(x^2) \geq f(x^1)$, podemos escrever equivalentemente:

$$f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] \leq \max\{f(x^1), f(x^2)\}. \quad \dots (A)$$

Resta pois mostrar que a anterior expressão implica por sua vez a convexidade dos conjuntos $S_f^{\leq}(\alpha)$. Seja um qualquer α tal que: $\alpha \geq \max\{f(x^1), f(x^2)\}$. De (A) vem que $f[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2] \leq \alpha$, donde temos necessária e simultaneamente:

$$x^1, x^2 \in S_f^{\leq}(\alpha) \text{ e } (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in S_f^{\leq}(\alpha).$$

Como o anterior é válido quaisquer que sejam $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \geq \max\{f(x^1), f(x^2)\}$, os conjuntos $S_f^{\leq}(\alpha)$ são todos convexos, ou seja, f é quase-convexa. ||

— Dem. do corolário 3.1.1.IV.1: Decorre directamente das proposições 3.1.1.IV e 3.1.1.I. ||

— Dem. da proposição 3.1.1.V: Decorre directamente das definições de funções quase-convexa e quase-côncava, e das proposições 1.2.2.III e 1.2.5.V. ||

Dem. da proposição 3.1.2.I: Pela definição, é imediato que $h_f(x, 1) = f(x/1) = f(x)$. Passemos então a mostrar que h_f é homogênea de grau 0 em (x, μ) . Com efeito, para $\lambda > 0$ temos:

$$h_f(\lambda x, \lambda \mu) = \begin{cases} f\left(\frac{\lambda x}{\lambda \mu}\right) & (\lambda \mu > 0) \\ \sup f(\lambda x) & (\lambda \mu \leq 0) \end{cases} = \begin{cases} f(x/\mu) & (\mu > 0) \\ \sup f & (\mu \leq 0) \end{cases} = h_f(x, \mu).$$

Resta, portanto, demonstrar que h_f é quase-convexa. Pela definição, h_f é quase-convexa se tem todos os conjuntos de nível $S_h^{\leq}(\alpha)$ convexos. Ora se $\alpha \geq \sup f$ vem $S_h^{\leq}(\alpha) = \mathbb{R}^n$ (que é trivialmente convexo). No caso de $\alpha < \sup f$, virá (pela definição de h_f):

$$S_h^{\leq}(\alpha) = \{(x, \mu) \mid \mu > 0, f(x/\mu) \leq \alpha\} = \{(x, \mu) \mid \mu > 0, \frac{x}{\mu} \in S_f^{\leq}(\alpha)\}.$$

Sejam quaisquer (x^1, μ^1) e (x^2, μ^2) que pertençam a $S_h^{\leq}(\alpha)$, ou seja, tais que $\mu^1 > 0$, $\mu^2 > 0$, $x^1/\mu^1 \in S_f^{\leq}(\alpha)$ e $x^2/\mu^2 \in S_f^{\leq}(\alpha)$. Então, também:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x^1 \in (1-\lambda)\mu^1 \cdot S_f^{\leq}(\alpha) \\ \lambda x^2 \in \lambda\mu^2 \cdot S_f^{\leq}(\alpha) \end{cases}$$

e, consequentemente:

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 &\in [(1-\lambda)\mu^1 + \lambda\mu^2] \cdot S_f^{\leq}(\alpha) \\ \Leftrightarrow \frac{(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2}{(1-\lambda)\mu^1 + \lambda\mu^2} &\in S_f^{\leq}(\alpha) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2; (1-\lambda)\mu^1 + \lambda\mu^2] \in S_h^{\leq}(\alpha)$$

pelo que $S_h^{\leq}(\alpha)$ é convexo. Como o anterior é válido para qualquer $\alpha < \sup f$, e como para $\alpha \geq \sup f$ temos $S_h^{\leq}(\alpha) = \mathbb{R}^n$, a função h_f é quase-convexa. //

Dem. do corolário 3.1.2.I.1: Decorre directamente das proposições 3.1.2.I e 3.1.1.1. //

— Dem. da proposição 3.1.3.I: Que um conjunto convexo fechado $\bar{e}$ ec $\bar{e}$ imediato pela proposição 1.1.6.II. Falta demonstrar que um conjunto relativamente aberto também $\bar{e}$ ec. Para isso teremos que mostrar que qualquer $y \notin C$ pode ser fortemente separado de C no caso de $\bar{e}$ este ser relativamente aberto. Vamos considerar duas possibilidades de localização para o ponto $y \notin C$:

1) $y \notin clC$. Como por definição $C \subset clC$, a proposição 1.1.6.II permite concluir que y e C são fortemente separáveis.

2) $y \in frC$. Se $y \in frC$, pela proposição 1.1.5.IX vem que $y \in \text{rint } C = C$ (porque C $\bar{e}$ relativamente aberto). Precisamos então de mostrar que se $C = \text{rint } C$ então $y \in frC$ e C são fortemente separáveis. Atendendo a que $y \in frC \Rightarrow y \notin C$, e pela proposição 1.1.7.I, existe pelo menos um hiperplano de suporte a clC no ponto y , isto $\bar{e}$, existe um hiperplano $H = \{x \mid \langle x - y, b \rangle = 0\}$ tal que:

$$\langle x - y, b \rangle \geq 0, \forall x \in clC$$

(Note-se que esta última condição inclui a possibilidade de existir um hiperplano de suporte $\langle x - y, a \rangle = 0$ tal que $\langle x - y, a \rangle \leq 0, \forall x \in clC$, para o que basta multiplicar por -1 e fazer $b = -a$). Como C $\bar{e}$ relativamente aberto, e por definição, o anterior implica:

$$\langle x - y, b \rangle > 0, \forall x \in C \Leftrightarrow \langle x, b \rangle > \langle y, b \rangle, \forall x \in C$$

(Isto porque por construção um hiperplano de suporte não pode interceptar o interior relativo). Da última expressão, e fazendo por exemplo $\langle y, b \rangle = \beta$, vem:
$$\begin{cases} \langle x, b \rangle > \beta, \forall x \in C \\ \langle y, b \rangle = \beta \end{cases}$$

Portanto, quer seja $y \notin clC$, quer seja $y \in frC$, $\bar{e}$ possível separar fortemente y e C . Mas $C = \text{rint } C$, pelo que as únicas possibilidades

de y não pertencer a C são as duas referidas. ||

— Dem. da proposição 3.1.3.II: É óbvio que E está contido na intersecção dos semiespaços abertos que o contêm. Quanto a provar que a intersecção dos semiespaços está contida em E , vamos proceder por absurdo (à semelhança do que fizemos no corolário 1.1.6.II.1). Suponha-se que existe um vector y pertencente à intersecção de todos os semiespaços abertos que contêm E , e que não pertence a E . Mas se E é ec, e como $y \notin E$, existe por definição um hiperplano que separa fortemente y e E , isto é, um hiperplano $H = \{x \mid \langle x, b \rangle = \beta\}$ tal que: $\langle y, b \rangle = \beta$ e $\langle x, b \rangle > \beta$, $\forall x \in E$.

Como $\langle x, b \rangle > \beta$ define um semiespaço aberto que contém E e que não contém y , é contrariada a suposição mais acima. ||

— Dem. do corolário 3.1.3.II.1: Pela proposição 3.1.3.II um conjunto ec é a intersecção de conjuntos convexos (que são os semiespaços abertos que o contêm), pelo que é convexo (proposição 1.1.1.I). ||

— Dem. da proposição 3.1.3.III: Seja y um qualquer vector não pertencente a $\bigcap_{i \in I} C_i$. Se assim acontece é porque existe algum $i \in I$ tal que $y \notin C_i$. Por definição existe então um hiperplano que separa fortemente y e esse C_i . Logo, e necessariamente, esse hiperplano separa também fortemente y e $\bigcap_{i \in I} C_i$. $\bigcap_{i \in I} C_i$ é, portanto, um conjunto ec. ||

— Dem. da proposição 3.1.3.IV: Se E é ec, então existe, para qualquer $y \notin E$, um hiperplano que separe fortemente y e E :

$$\left. \begin{aligned} \langle y, x^* \rangle &= \beta \\ \langle x, x^* \rangle &< \beta, \quad \forall x \in E \end{aligned} \right\} \dots (A)$$

Seja agora $\mu > 0$. Multiplicando por μ as duas anteriores condições fica:

$$\begin{aligned} \langle \mu y, x^* \rangle &= \beta \mu \\ \langle \mu x, x^* \rangle &> \beta \mu, \quad \forall \mu x \in \mu E \end{aligned}$$

(note-se que $y \notin E \Rightarrow \mu y \notin \mu E$), ou seja, μE é ec com $\mu > 0$. Para $\mu < 0$, vem, multiplicando (A) por μ :

$$\begin{aligned} \langle \mu y, x^* \rangle &= \beta \mu \\ \langle \mu x, x^* \rangle &> \beta \mu, \quad \forall \mu x \in \mu E \end{aligned}$$

pelo que μE é ec também neste caso. Finalmente, para $\mu = 0$, vem $E \neq \{0\}$, que é um conjunto fechado. Pela proposição 3.1.3.I, $0.E$ é ec. ||

— Dem. da proposição 3.1.4.I: Designemos por A o conjunto dos semiespaços abertos que contêm C . Como estes semiespaços serão do tipo $\{x \mid \langle x, x^* \rangle + \mu^* > 0\}$ (se forem do tipo $\langle x, b \rangle + \alpha < 0$ multiplique-se por -1 e faça-se $x^* = -b$ e $\mu^* = -\alpha$), podemos escrever $A = \{(x^*, \mu^*) \mid \langle x, x^* \rangle + \mu^* > 0, \forall x \in C\}$. Se C é ec, e pela proposição 3.1.3.II, vem que $C = \bigcap_{(x^*, \mu^*) \in A} \{x \mid \langle x, x^* \rangle + \mu^* > 0\}$. Então:

$$\begin{aligned} K &= \{(x, \mu) \mid \mu > 0, x \in \mu C\} = \{(x, \mu) \mid \mu > 0\} \cap \{(x, \mu) \mid \frac{x}{\mu} \in C\} = \\ &= \{(x, \mu) \mid \mu > 0\} \cap \bigcap_{(x^*, \mu^*) \in A} \{(x, \mu) \mid \langle \frac{x}{\mu}, x^* \rangle + \mu^* > 0\} = \\ &= \{(x, \mu) \mid \mu > 0\} \cap \bigcap_{(x^*, \mu^*) \in A} \{(x, \mu) \mid \langle (x, \mu), (x^*, \mu^*) \rangle > 0\} \end{aligned}$$

Ora, $\{(x, \mu) \mid \mu > 0\}$ e $\{(x, \mu) \mid \langle (x, \mu), (x^*, \mu^*) \rangle > 0\}$ são semiespaços abertos. Pela proposição 3.1.3.I são conjuntos ec, já que são convexos e relativamente abertos (pois são abertos - proposição 1.1.5. XI). Logo, pela proposição 3.1.3.III, K é um conjunto ec.

Mostremos agora que se K é ec, C também o é. Se K é ec, então, para dado $\mu > 0$, se $(y, \mu) \notin K$ é possível separar fortemente (y, μ) e K , isto é, existe um hiperplano tal que:

$$\langle (y, \mu), (x^*, \mu^*) \rangle = \beta$$

e

$$\langle (x, \mu), (x^*, \mu^*) \rangle < \beta, \quad \forall (x, \mu) \in K.$$

Equivalentemente, dado que μ é fixo e fazendo $\beta^* = \beta - \mu\mu^*$:

$$\langle y, x^* \rangle = \beta^*$$

e

$$\langle x, x^* \rangle < \beta^*, \quad \forall x \in \mu C,$$

ou seja, μC é ec. Pela proposição 3.1.3.IV, vem então que $C = \frac{1}{\mu} \cdot C$ é ec. ||

— Dem. da proposição 3.1.4.II: Seja $z \notin K$. Como K é ec, existe um hiperplano (v_1^*, β_1) tal que:

$$\langle z, v_1^* \rangle = \beta_1 \quad \dots (A1)$$

e

$$\langle v, v_1^* \rangle < \beta_1, \quad \forall v \in K \quad \dots (A2)$$

Mas como K é um cone, então se $v \in K$ e se $\langle v, v_1^* \rangle < \beta_1$, também $\lambda v \in K, \forall \lambda > 0$, e $\langle \lambda v, v_1^* \rangle < \beta_1, \forall \lambda > 0$. Como consequência:

$$\langle v, v_1^* \rangle < \beta_1 / \lambda, \quad \forall v \in K, \lambda > 0$$

O anterior implica que necessariamente $\beta_1 > 0$ e que:

$$\langle v, v_1^* \rangle \leq 0, \quad \forall v \in K \quad \dots (A3)$$

Em particular, para $z=0$ (que por hipótese não pertence a K), vem

que existe um v_2^* tal que:

$$\langle 0, v_2^* \rangle = 0 \text{ e } \langle v, v_2^* \rangle < 0, \forall v \in K \quad \dots (B)$$

O que temos que mostrar é que, qualquer que seja $z \notin K$, existe um semiespaço aberto que contém K e é gerado por um hiperplano que passa na origem. Com efeito, se tal acontecer, estará demonstrado que K é a intersecção de semiespaços abertos gerados por hiperplanos que passam pela origem (o que se confirma através de um raciocínio do tipo do efectuado na demonstração da proposição 3.1. 3.II). Continue a ser $z \notin K$. Em (A3) vimos que necessariamente $\beta_1 > 0$. Se $\beta_1 = 0$ está demonstrado pois nesta situação, por (A1) e (A2):

$$\begin{aligned} &\langle z, v_1^* \rangle = 0 \\ &\text{e} \\ &\langle v, v_1^* \rangle < 0, \forall v \in K. \end{aligned}$$

Se $\beta_1 > 0$ faça-se: $\langle z, v_2^* \rangle = \varepsilon \quad \dots (C)$

Se $\varepsilon > 0$ está demonstrado, já que se assim fôr temos (por (B)):

$$\begin{aligned} &\langle z, v_2^* \rangle = \varepsilon > 0 \\ &\text{e} \\ &\langle v, v_2^* \rangle < 0, \forall v \in K. \end{aligned}$$

Finalmente, se $\varepsilon < 0$, o hiperplano $\langle v, v_1^* + (\beta_1/|\varepsilon|)v_2^* \rangle = 0$ passa pela origem e separa fortemente z e K :

$$\begin{aligned} &\langle z, v_1^* + (\beta_1/|\varepsilon|)v_2^* \rangle = \langle z, v_1^* \rangle + (\beta_1/|\varepsilon|) \cdot \langle z, v_2^* \rangle = (\text{por (A1) e (C)}) = 0 \\ &\text{e} \\ &\langle v, v_1^* + (\beta_1/|\varepsilon|)v_2^* \rangle = \langle v, v_1^* \rangle + (\beta_1/|\varepsilon|) \cdot \langle v, v_2^* \rangle = (\text{por (A3) e (B)}) < 0, \forall v \in K. \end{aligned}$$

— Dem. da proposição 3.1.4.III: (i) Por definição, $K^0 = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq 0, \forall x \in K\} = \bigcap_{x \in K} \{x^* | \langle x, x^* \rangle \leq 0\}$. Como é a intersecção de conjuntos fechados, K^0 é um conjunto fechado (prop. 1.1.5.III), isto é, $K^0 = \text{cl } K^0$. Ora, comparando as definições de K^0 e K^{e0} , é então imediato que para qualquer $x^* \in K^0$ temos:

$$K^{eo} \cap E_\varepsilon(x^*) \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$$

pelo que $K^0 = cl K^{eo}$.

(ii) Pela definição $K^{eo} = \{x^* | \langle x, x^* \rangle < 0, \forall x \in K\} = \bigcap_{x \in K} \{x^* | \langle x, x^* \rangle < 0\}$, isto é, K^{eo} é uma intersecção de semiespaços abertos. Como os semiespaços abertos são conjuntos convexos relativamente abertos (pois um conjunto aberto é relativamente aberto - prop. 1.1.5.XI), então são ec. (prop. 3.1.3.I.) Logo a sua intersecção, que é K^{eo} , é ec (prop. 3.1.3.III). Para além disso K^{eo} é fechado na multiplicação por escalar positivo, pelo que é um cone.

(iii) $(K^{eo})^{eo} = \{x | \langle x, x^* \rangle < 0, \forall x^* \in K^{eo}\} = \bigcap_{x^* \in K^{eo}} \{x | \langle x, x^* \rangle < 0\}$ (A)
Mas $K^{eo} = \{x^* | \langle x, x^* \rangle < 0, \forall x \in K\}$, isto é, atendendo a (A), $(K^{eo})^{eo}$ pode ser encarado como a intersecção dos semiespaços abertos que contêm K e que são gerados por hiperplanos que passam pela origem. Mas pela proposição 3.1.4. (ii), vem que tal é igual a K desde que $0 \notin K$ e K seja um cone ec. Logo, $(K^{eo})^{eo} = K$. ||

— Dem. da proposição 3.1.5.I: Imediata pelas definições. ||

— Dem. da proposição 3.1.5.II: Se f é estritamente eqconv os conjuntos $S_f^\leq(\alpha)$ são ec. Mas, para todo o $[-\infty, +\infty]$:

$$S_f^\leq(\beta) = \bigcap_{\alpha > \beta} S_f^\leq(\alpha)$$

Logo, pela proposição 3.1.3.III, $S_f^\leq(\beta)$ é também ec, pelo que f é eqconv. A demonstração para função eqconc é similar. ||

— Dem. da proposição 3.1.5.III: Imediato atendendo às definições de função eqconv(eqconc) e quase-convexa (quase-côncava), e atendendo também ao corolário 3.1.3.II.1. ||

— Dem. da proposição 3.1.5.IV: (i) Se f é s.c.s. então os seus conjuntos de nível $S_f^{\geq}(\alpha)$ são todos fechados (prop. 1.2.7.VI). Consequentemente, os seus complementares $S_f^{<}(\alpha)$ são abertos. Como um conjunto aberto é relativamente aberto (prop. 1.1.5.XI), vem que $S_f^{<}(\alpha)$ são todos relativamente abertos. Como são também convexos (prop. 3.1.1.II), concluímos que são ec (prop. 3.1.3.I), ou seja, que f é estritamente eqconv.

(ii) Se f é s.c.i. então os conjuntos $S_f^{\leq}(\alpha)$ são todos fechados (prop. 1.2.7.I). Como são também convexos (porque f é quase-convexa), a proposição 3.1.3.I permite concluir que são ec, pelo que f é eqconv. ||

— Dem. do corolário 3.1.5.IV.1: Decorre directamente da proposição 3.1.5.IV e da simetria entre por um lado funções quase-convexas e quase-côncavas (prop. 3.1.1.I) e por outro ^{lado} funções eqconv e eqconc. ||

— Dem. da proposição 3.1.5.V: Comece-se por notar que

$$\{(x, \mu) \mid \mu > 0, \frac{x}{\mu} \in S_f^{<}(\alpha)\} = \{(x, \mu) \mid \mu > 0, f(\frac{x}{\mu}) < \alpha\}$$

Logo, pela definição de h_f temos:

$$S_h^{<}(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} & \text{se } \alpha \geq \sup f \\ \{(x, \mu) \mid \mu > 0, \frac{x}{\mu} \in S_f^{<}(\alpha)\} & \text{se } \alpha < \sup f \end{cases}$$

$\mathbb{R}^{n+1}$ é trivialmente ec. Assim sendo, e pela proposição 3.1.4.I, $S_h^{<}(\alpha)$ são ec para todo o $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ sse $S_f^{<}(\alpha)$ são ec para todo o $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. Por outras palavras, f é eqconv sse h_f é eqconv. O mesmo raciocínio, mas com $S_f^{<}(\alpha)$ e $S_h^{<}(\alpha)$ pode ser feito para mostrar que f é estritamente eqconv sse h_f é estritamente eqconv. ||

— Dem. do corolário 3.1.5.V.1: Decorre directamente da proposição 3.1.5.V atendendo à proposição 3.1.5.I. ||

— Dem. da proposição 3.1.5.VI: Vamos demonstrar para a função homogênea de grau 0 gerada pela função quase-convexa f . A demonstração para a função homogênea de grau 0 gerada pela função quase-côncava g é similar. Seja então:

$$h_f(x, \mu) = \begin{cases} f(x/\mu) & (\mu > 0) \\ \sup f & (\mu \leq 0) \end{cases}$$

Ora, $\sup h_f = \sup f$ e $h_f(0,0) = \sup f$, pelo que se f é própria temos h_f também própria. ||

— Dem. da proposição 3.1.6.I: (i) Pela definição, $h^*(x^*)$ é uma função homogênea de grau 0. Com efeito, $\forall \lambda > 0$:

$$h^*(\lambda x^*) = -\inf\{h(x) \mid \langle x, \lambda x^* \rangle \geq 0\} = -\inf\{h(x) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\} = h^*(x^*)$$

Mostremos agora que $h^*(x^*)$ é eqconv. Para isso, e pela definição de função eqconv é necessário mostrar que os conjuntos de nível $S_{h^*}^{\leq}(\alpha)$ são todos ec. Ora,

$$\begin{aligned} S_{h^*}^{\leq}(\alpha) &= \{x^*, h^*(x^*) \leq \alpha\} = \{x^* \mid -\inf\{h(x) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\} \leq \alpha\} = \\ &= \{x^* \mid h(x) \geq -\alpha, \forall x \in \{x \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\}\} = \\ &= \{x^* \mid h(x) < -\alpha \Rightarrow x \notin \{x \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\}\} = \\ &= \{x^* \mid h(x) < -\alpha \Rightarrow x \in \{x \mid \langle x, x^* \rangle < 0\}\} = \\ &= \bigcap_{\{x \mid h(x) < -\alpha\}} \{x^* \mid \langle x, x^* \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

$S_{h^*}^{\leq}(\alpha)$ é então uma intersecção de semiespaços abertos, que são (prop. 1.1.3.II e 1.1.5.XI) conjuntos ec. Pela proposição 3.1.3.III, os conjuntos $S_{h^*}^{\leq}(\alpha)$ são ec, pelo que $h^*(x^*)$ é eqconv.

Mostremos ainda que $h^*(x^*)$ é própria. Repare-se para isso que:

$$h^*(0) = -\inf\{h(x) \mid \langle 0, x \rangle \geq 0\} = -\inf h(x) \quad \dots (A)$$

Ora, $\sup h^*(x^*) = \sup \{-\inf\{h(x) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\}\} = -\inf\{\inf\{h(x) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\}\} =$
 $= -\inf h(x) = (\text{por (A)}) = h^*(0).$

Podemos concluir pelo anterior que $h^*(x^*)$ é uma função eqconv homogênea de grau 0 própria.

(ii) Passemos a mostrar que $h^{**} = h$ sse h é eqconv homogênea de grau 0 eqconv própria. Em primeiro lugar, constataremos que h^{**} é eqconv homogênea de grau 0 própria, já que $h^{**} = (h^*)^*$ e, por (i), a função quase-conjugada quase-convexa de uma função homogênea de grau 0 goza das referidas propriedades. Constate-se também que

$$\begin{aligned} h^{**}(x) &= (h^*)^*(x) = -\inf\{h^*(x^*) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\} = -\inf_{\langle x, x^* \rangle \geq 0} \left[-\inf_{\langle v, x^* \rangle \geq 0} h(v) \right] = \\ &= \sup_{\langle x, x^* \rangle \geq 0} \left[\inf_{\langle v, x^* \rangle \geq 0} h(v) \right] \leq \sup_{\langle x, x^* \rangle \geq 0} \left[\inf h(v) \right] = \\ &= \inf_v h(v) \leq h(x) \end{aligned}$$

Em síntese: $h^{**}(x) \leq h(x) \quad \dots (B)$

Passe a assumir-se que h é eqconv homogênea de grau 0 própria. Assuma-se também que $h(x) = \alpha \leq \sup h = h(0)$. Então $x \notin S_h^{\leq}(\beta)$ para $\beta < \alpha$. Em consequência, e porque $S_h^{\leq}(\beta)$ é um cone ec (prop. 3.1.1.III) e porque $0 \notin S_h^{\leq}(\beta)$ (já que h é própria), pela proposição 3.1.4.II existirá um hiperplano com vector normal $x^*(\beta)$ tal que (com $\beta < \alpha$):

$$\langle x, x^*(\beta) \rangle \geq 0 \quad \dots (C1)$$

e

$$\langle v, x^*(\beta) \rangle < 0, \forall v \in S_h^{\leq}(\beta) \quad \dots (C2)$$

Deste modo temos que:

$$\inf\{h(v) \mid \langle v, x^* \rangle \geq 0\} \geq \beta \quad \dots (D)$$

Ora, como vimos mais acima:

$$h^{**}(x) = \sup_{\langle x, x^* \rangle \geq 0} \left[\inf_{\langle v, x^* \rangle \geq 0} h(v) \right]$$

pelo que vem de (D).

$$h^{**}(x) \geq \beta, \forall x \notin S_h^{\leq}(\beta)$$

$$\Leftrightarrow h^{**}(x) \geq \beta, \forall \beta < h(x) < \sup h$$

$$\Leftrightarrow h^{**}(x) \geq h(x), \forall h(x) < \sup h \quad \dots (E)$$

Reunindo (B) e (E) fica

$$h^{**}(x) = h(x), \forall h(x) < \sup h$$

Mas como por (B) temos $h^{**} \leq h$, $\forall x$, fica $\sup h^{**} = \sup h$, e logo:

$$h^{**}(x) = h(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \dots (F)$$

Resta demonstrar que $h^{**} = \text{peqconv } h$. De (B) temos que $h^{**} \leq h$. Como $h^{**} = (h^*)^*$, e por (i), ficamos a saber que h^{**} é eqconv homogênea de grau 0 própria. O que temos, portanto, que mostrar é que não existe nenhuma função h_1 eqconv homogênea de grau 0 própria tal que:

$$h^{**} < h_1 \leq h \quad \dots (G)$$

Vamos provar por absurdo. Assumamos que existe uma tal função h_1 . Pela definição de quase-conjugada quase-convexa vem que:

$$h_1 \geq h_2 \Rightarrow h_2^* \geq h_1^*$$

Consequentemente de (G), obtemos:

$$(h^{**})^{**} < h_1^{**} \leq h^{**}$$

Mas como (por (i)) h^{**} é eqconv homogênea de grau 0 própria, então (por (F)):

$$(h^{**})^{**} = h^{**}, \text{ pelo que fica:}$$

$$h^{**} < h_1 \leq h^{**}$$

o que é um absurdo. ||

— Dem. da proposição 3.1.6.II: Comece-se por notar que, pela proposição 3.1.1.III, $S_h^<(\alpha)$, $S_h^<(\alpha)$ e $S_{h^*}^<(\alpha)$ ^{$S_h^<(\alpha)$} são cones (e ec.). Faz por isso sentido falarmos dos cones "evenly" polares destes cones.

$$\begin{aligned} (i) [S_h^<(\alpha)]^{e0} &= \{x^* | \langle x, x^* \rangle < 0, \forall x \in S_h^<(\alpha)\} = \{x^* | \langle x, x^* \rangle \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq \alpha\} = \\ &= \{x^* | \inf\{h(x) | \langle x, x^* \rangle \geq 0\} \geq \alpha\} = S_{h^*}^<(-\alpha). \end{aligned}$$

(ii) Perfeitamente similar a (i), tendo em conta que, pela proposição 3.1.6.I, $h^{**} = h$. ||

— Dem. da proposição 3.1.7.I: Se $h(x)$ é homogênea de grau 0, a sua quase-conjugada quase-convexa é $h^*(x^*) = -\inf\{h(x) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\}$, bem como a quase-conjugada quase-côncava da sua simétrica é:

$$(-h)^*(x^*) = -\sup\{-h(x) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\} = \inf\{h(x) \mid \langle x, x^* \rangle \geq 0\} = -h^*(x^*). \parallel$$

— Dem. da proposição 3.1.7.II: Decorre directamente das proposições 3.1.6.I e 3.1.7.I, atendendo à proposição 3.1.5.I. $\parallel$

— Dem. da proposição 3.1.7.III: Decorre directamente das proposições 3.1.6.II e 3.1.7.I. $\parallel$

— Dem. da proposição 3.1.8.I: Imediata pela definição. $\parallel$

— Dem. da proposição 3.1.8.II: (i) Pela definição $\bar{x}^* \in \partial h(\bar{x})$ se

$$\begin{cases} \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0 \\ \langle x, \bar{x}^* \rangle < 0, \forall x \in S_h^<(h(\bar{x})) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0 \\ \bar{x}^* \in \bigcap_{x \in S_h^<(h(\bar{x}))} \{x^* \mid \langle x, x^* \rangle < 0\} \end{cases}$$

Como cada $\{x^* \mid \langle x, x^* \rangle < 0\}$ é um conjunto ec, então $\partial h(\bar{x})$ é também um conjunto ec (prop. 3.1.3.III). Que é fechado na multiplicação por escalar positivo também é fácil de confirmar pela definição.

$$(ii) \quad 0 \in \partial h(\bar{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \bar{x}, 0 \rangle = 0 \\ \langle x, 0 \rangle < 0, \forall x \in S_h^<(h(\bar{x})) \end{cases}$$

Como a anterior condição é impossível se $S_h^<(h(\bar{x})) \neq \emptyset$, vem que $0 \in h(\bar{x}) \Rightarrow \inf h = h(\bar{x})$.

(iii) Se h é s.c.s., então a proposição 3.1.5.IV permite garantir que h é estritamente eqconv, isto é, os conjuntos $S_h^<(\alpha)$ são todos ec. Consequentemente, e como $\bar{x} \notin S_h^<(h(\bar{x}))$, existirá um hiperplano que separa fortemente $\bar{x}$ e $S_h^<(h(\bar{x}))$. Mas, para além de ser ec, o conjunto $S_h^<(h(\bar{x}))$ é um cone (prop. 3.1.1.III). Temos também que $0 \notin S_h^<(h(\bar{x}))$ porque h é própria. Logo, pela proposi-

ção 3.1.4.II, podemos garantir que pelo menos um dos hiperplanos que separa fortemente $\bar{x}$ e $S_h^<(h(\bar{x}))$ passa pela origem, isto é, podemos garantir que existe pelo menos um x^* tal que:

$$\langle \bar{x}, x^* \rangle = 0$$

e

$$\langle x, x^* \rangle < 0, \forall x \in S_h^<(h(\bar{x})).$$

Por outras palavras, existe pelo menos um vector x^* pertencente a $\partial h(\bar{x})$.

(iv) Se h é diferenciável em $\text{rint} \text{ dom } h$, então, pela definição de função diferenciável e pela proposição 1.2.8.I, é imediato que h é contínua em $\text{rint} \text{ dom } h$. Sendo contínua é, obviamente, s.c.s. em $\text{rint} \text{ dom } h$. Construa-se:

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in \text{rint} \text{ dom } h \\ \sup h & \text{se } x \notin \text{rint} \text{ dom } h \end{cases}$$

É óbvio que $h(\bar{x})$ é s.c.s. em $\mathbb{R}^n$. Como h é própria, vem que $\bar{h}$ também o é (pois $h(0) = \sup h = \sup \bar{h} = \bar{h}(0)$). Consequentemente, e por (iii), $\partial \bar{h}(x) \neq \emptyset, \forall x \in \text{rint} \text{ dom } h$. Resta então demonstrar que, para $x \in \text{rint} \text{ dom } h$, temos que: $x^* \in \partial \bar{h}(x) \Leftrightarrow x^* \in \partial h(x)$.

Ora, $x^* \in \partial \bar{h}(x)$ sse $\begin{cases} \langle x, x^* \rangle = 0 \\ \langle v, x^* \rangle < 0, \forall v \in S_{\bar{h}}^<(\bar{h}(x)) \end{cases}$.

Mas para $x \in \text{rint} \text{ dom } h$ temos que $h(x) = \bar{h}(x)$, pelo que o anterior equivale a:

$$\begin{cases} \langle x, x^* \rangle = 0 \\ \langle v, x^* \rangle < 0, \forall v \in S_h^<(h(x)) \end{cases} \Leftrightarrow x^* \in \partial h(x). \parallel$$

Dem. do corolário 3.1.8.II.1: decorre directamente das proposições 3.1.8.II e 3.1.1.1. ||

Dem. da proposição 3.1.9.I: Vamos apresentar a demonstração em 3 etapas: 1) $[(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)]$; 2) $[(i^*) \Leftrightarrow (ii^*)]$; 3) $[(i^*) \Leftrightarrow (iii)]$.

1) Por definição, $\bar{x}^* \in \partial h(\bar{x})$ (que é (i)) $\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0 \\ h(x) \geq h(\bar{x}) \text{ se } \langle x, \bar{x}^* \rangle \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(\bar{x}) = \inf \{ h(x) \mid \langle x, \bar{x}^* \rangle \geq 0 \} \text{ e } \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0 \quad (\text{que é (ii)})$

$\Leftrightarrow h(\bar{x}) = -h^*(\bar{x}^*) \text{ e } \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0 \Leftrightarrow h(\bar{x}) + h^*(\bar{x}^*) = 0 \text{ e } \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0 \text{ (que é (iii))}.$

Está demonstrado que $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$

2) A demonstração de $(i^*) \Leftrightarrow (ii^*)$ é perfeitamente similar à de que $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

3) Demonstraremos finalmente que $(i^*) \Leftrightarrow (iii)$. Como $h(\bar{x}) = \text{peqconv } h(\bar{x})$ vem que $h^{**}(\bar{x}) = \text{peqconv } h(\bar{x}) = h(\bar{x})$, pelo que, equivalente a (iii),

vem: $-h^{**}(\bar{x}) + h^*(\bar{x}^*) = 0 \quad \text{e } \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0$

$\Leftrightarrow h^*(\bar{x}^*) + (h^*)^*(\bar{x}) = 0 \quad \text{e } \langle \bar{x}, \bar{x}^* \rangle = 0$

$\Leftrightarrow (\text{por (i)}) \quad \bar{x} \in \partial h^*(\bar{x}^*). \parallel$

— Dem. do corolário 3.1.9.I.1: Decorre directamente das proposições 3.1.9.I e 3.1.7.I, bem como das definições de subgradientes e de funções quase-conjugadas. $\parallel$

— Dem. do corolário 3.1.9.I.2: Vamos mostrar para h função quase-convexa. Para h quase-concava é similar.

Seja um qualquer $x^* \in \partial h(x)$. Pela proposição 3.1.9.I(ii) vem:

$$h(x) = \inf \{ h(v) \mid \langle v, x^* \rangle \geq 0 \}. \quad \dots (A)$$

Seja ainda um qualquer x^1 tal que:

$$\langle x^1, x^* \rangle = 0 \quad \dots (B)$$

Defina-se a função $\varphi(\varepsilon) = h(x + \varepsilon x^1)$. Devido a (A) e (B), φ atinge o seu mínimo para $\varepsilon = 0$. Como φ é diferenciável (porque h o é), vem (porque é condição necessária de mínimo livre):

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon}(0) = 0 \Leftrightarrow \langle \nabla h(x + 0 \cdot x^1), x^1 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \nabla h(x), x^1 \rangle = 0, \forall x^1 \in \{x \mid \langle x, x^* \rangle = 0\} \quad \dots (C)$$

Por (B) e (C) vem então: $\nabla h(x) = \beta x^*$... (D)

Nota-se que se $\nabla h(x) \neq 0$, o anterior implica que $x^* \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Assim sendo, podemos escrever, equivalentemente a (D):

$$x^* = \frac{1}{\beta} \nabla h(x) \Leftrightarrow x^* = \alpha \cdot \nabla h(x) \quad \text{com } \alpha = 1/\beta \neq 0. ||$$

ÍNDICE

Pág.

PARTE I : FUNDAMENTOS DE ANÁLISE CONVEXA

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 1

1.1. Conjuntos convexos/Fundamentos de topologia de conjuntos convexos	5
1.1.1. Conjuntos convexos e envolvente convexa	
1.1.2. Conjuntos afins e subespaços	
1.1.3. Hiperplanos e semiespaços	
1.1.4. Cones convexos e respectivos cones polares	
1.1.5. Fundamentos de topologia de conjuntos convexos em $\mathbb{R}^n$	
1.1.6. Alguns resultados de separação de conjuntos convexos	
1.1.7. Conjuntos suporte, conjuntos polares e hiperplanos e semiespaços de suporte	
1.2. Funções convexas e côncavas	19
1.2.1. Introdução	
1.2.2. Funções convexas: definição e algumas propriedades	
1.2.3. Função indicadora de um conjunto convexo	
1.2.4. Funções convexas linearmente homogêneas	
1.2.5. Funções côncavas	
1.2.6. Funções lineares não verticais	
1.2.7. Funções semicontínuas/funções convexas e côncavas fechadas	
1.2.8. Funções contínuas/propriedades das funções convexas e côncavas contínuas	
1.2.9. Funções diferenciáveis/propriedades das funções convexas e côncavas diferenciáveis	
1.2.10. Subdiferenciabilidade de funções convexas e côncavas	

PARTE II : CONJUGAÇÃO E QUASE - CONJUGAÇÃO

CAPÍTULO 2

2.1. Funções convexas e côncavas conjugadas	45
2.1.1. Funções convexas conjugadas: definição e interpretação geométrica	

.../...

2.1.2.	Principais propriedades não marginais da conjugada de uma função convexa	
2.1.3.	Conjugação e desigualdade de Fenchel	
2.1.4.	Vectores conjugados e propriedades marginais das funções convexas conjugadas	
2.1.5.	Conjugadas de funções côncavas e suas propriedades	
2.1.6.	Funções parcialmente conjugadas	
2.2.	<u>Funções suporte de conjuntos convexos</u>	55
2.2.1.	Função suporte de um conjunto convexo	
2.2.2.	Função suporte como conjugada da função indicadora	
2.2.3.	Cones polares e funções suporte de cones convexos	
2.3.	<u>Funções "gauge" e conjuntos polares</u>	59
2.3.1.	Funções "gauge" de tipo I de um conjunto convexo e suas propriedades	
2.3.2.	Funções polares de funções gauge-I	
2.3.3.	Função "gauge" de tipo II de um conjunto convexo e suas propriedades	
2.3.4.	Funções polares de funções gauge-II	

CAPÍTULO 3

3.1.	<u>Funções quase-convexas e quase-côncavas quase-conjugadas</u>	69
3.1.1.	Funções quase-convexas e quase-côncavas	
3.1.2.	Extensão a $\mathbb{R}^n$ de uma função quase-convexa ou quase-côncava/funções quase-convexas e quase-côncavas homogêneas de grau 0	
3.1.3.	Conjuntos "evenly" convexos	
3.1.4.	Cones "evenly" convexos e respectivos cones polares.	
3.1.5.	Funções "evenly" quase-convexas ou "evenly" quase-côncavas	
3.1.6.	Funções quase-conjugadas de funções quase-convexas homogêneas de grau 0	

.../...

- 3.1.7. Funções quase-conjugadas de funções quase-côncavas homogêneas de grau 0
- 3.1.8. Subgradiantes de funções quase-convexas e quase-côncavas homogêneas de grau 0
- 3.1.9. Propriedades marginais das funções quase-conjugadas

PARTE III : APLICAÇÃO AS TEORIAS DO PRODUTOR E CONSUMIDOR

CAPÍTULO 4

- 4.1. Função lucro como função suporte do conjunto de possibilidades de produção 87
 - 4.1.1. Hipóteses sobre a tecnologia da empresa
 - 4.1.2. Função lucro como função suporte do conjunto de possibilidades de produção/principais propriedades não marginais da função lucro
 - 4.1.3. Recuperação do conjunto de possibilidades de produção a partir da função lucro
 - 4.1.4. Propriedades marginais da função lucro/lema de Hotteling
- 4.2. Função lucro e função de produção clássica: caso uniprodução 93
 - 4.2.1. Caso uniprodução: o conceito clássico de função de produção e suas propriedades
 - 4.2.2. Função lucro normalizada como conjugada da função de produção
 - 4.2.3. Recuperação da função de produção a partir da função lucro normalizada
 - 4.2.4. Principais propriedades marginais da função lucro normalizada/lema de Hotteling
- 4.3. Função lucro e função de produção generalizada de Jorgenson e Lau: multiprodução 98
 - 4.3.1. Generalização do conceito clássico de função de produção
 - 4.3.2. Função lucro normalizada como conjugada da função de produção generalizada

- 4.3.3. Recuperação da função de produção generalizada a partir da função lucro normalizada
- 4.3.4. Propriedades marginais da função lucro normalizada/lema de Hotteling
- 4.4. Função lucro e função gauge-I do conjunto de possibilidades de produção 102
 - 4.4.1. Função gauge-I do conjunto de possibilidades de produção
 - 4.4.2. A função lucro e a função gauge-I do conjunto de possibilidades de produção como funções gauge-I polares/obtenção de uma a partir da outra
 - 4.4.3. Propriedades marginais da função lucro/lema de Hotteling

CAPITULO 5

- 5.1. Função custo como função suporte dos "Input Requirement Sets" 106
 - 5.1.1. "Input Requirement Sets"
 - 5.1.2. Função custo como função suporte dos IRS
 - 5.1.3. Recuperação dos IRS a partir da função custo
 - 5.1.4. Propriedades marginais da função custo/lema de Shephard
 - 5.1.5. Uma hipótese adicional de "free disposal" de inputs/monotonia não decrescente em y da função custo
 - 5.1.6. Uniprodução: dualidade função de produção clássica/função custo
- 5.2. Função custo e função distância de Shephard 112
 - 5.2.1. Função distância de Shephard
 - 5.2.2. Função distância e função custo como gauge-II polares

CAPITULO 6

- 6.1. Dualidade entre funções de utilidade directa e indirecta 118

- 6.1.1. Introdução: analogia formal entre as teorias do produtor e consumidor
- 6.1.2. Função de utilidade indirecta como quase-conjugada da função homogênea de grau 0 associada à função utilidade directa
- 6.1.3. Recuperação da função de utilidade directa a partir da função de utilidade indirecta
- 6.1.4. Propriedades marginais da função de utilidade indirecta/identidade de Roy
- 6.1.5. Dualidade função utilidade indirecta /função custo

CONCLUSÃO

BIBLIOGRAFIA

- AUBIN, J.P. (1984) L'analyse Non Linéaire et Ses Motivations Economiques, Masson, Paris.
- AVRIEL, M. (1976) Nonlinear Programming - Analysis and Methods, Prentice-Hall, New-Jersey.
- BAZARAA, M. S. e SHETTY, C.M. (1979) Nonlinear Programming - Theory and Algorithms, J. Wiley and Sons, New York.
- BERGE, C. e GOUILLA-HOURI, A. (1962) Programmes, Jeux et Réseaux de Transport, Dunod, Paris.
- BLACKORBY, C., PRIMONT, D. e RUSSEL, R.R. (1978) Duality, Separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications, North-Holland, Amsterdam, New York-Oxford.
- CORNWALL, R.R. (1984) Introduction to the Use of General Equilibrium Analysis, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.
- DIEWERT, W.E. (1974) "Applications of Duality Theory" in INTRILIGATOR, M.D. e KENDRICK, D.A. (eds) Frontiers of Quantitative Economics, vol.II, North-Holland, Amsterdam - New York - Oxford.
- DIEWERT, W.E., AVRIEL, M. e ZANG, I (1981) "Nine Kinds of Quasi concavity and concavity", Journal of Economic Theory, 25, pp. 397-420.
- DIEWERT, W. E. (1982) "Duality Approaches to Microeconomic Theory", in ARROW, K.J. e INTRILIGATOR, M.D. (eds) Handbook of Mathematical Economics, vol. II, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.
- EICHHORN, W., HENN, R., OPITZ, O. e SHEPHARD, R.W. (Eds) (1973) Production Theory, Proceedings of an International Seminar Held at The University of Karlsruhe, May-July, Springer-Verlag.

- HANOCH, G. (1978) "Symmetric Duality and Polar Functions", in FUSS M. e McFADDEN (Eds) Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications, Vol I, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.
- JACOBSEN, S.E. (1970) "Production Correspondences", Econometrica, vol 38, nº 5, Sept.
- JORGENSEN, D.W. e LAU, L.J. (1974) "The Duality of Technology and Economic Behaviour", The Review of Economic Studies vol 41. nº 126. April.
- LAU, L. J. (1978) "Applications of Profit Functions" in FUSS, M. e McFADDEN, D. (Eds) op. cit..
- LUENBERGER, D. G. (1969) Optimization by Space Vector Methods, J. Wiley and Sons, New-York.
- McFADDEN, D. (1978a) "Duality of Production, Cost and Profit Functions in FUSS, M. e McFADDEN, D. (Eds), op. cit..
- McFADDEN, D. (1978b) "Convex Analysis", in FUSS, M. e McFADDEN, D. op. cit..
- PASSY, U. e PRISMAN, E.Z. (1984) "Conjugacy in Quasi-Convex Programming", Math. Programming, 30, pp. 121-146.
- PINHEIRO, M.R. (1984) Conjugação e Dualidade em Programação Convexa Coleção de Working Papers da Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.
- PINHEIRO, M.R. (1985) Dualidade Conjugada em Programação Matemática Convexa, Coleção de Working Papers da Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.
- ROCKAFELLAR, R.T. (1964) "Duality Theorems for Convex Functions", Bull Amer. Math. Soc., 70, pp. 189-192.
- ROCKAFELLAR, R.T. (1967) "Conjugates and Legendre Transforms of Convex Functions", Canad. J. Math., 19, pp. 200-205.

- ROCKAFELLAR, R.T. (1968) "Duality in Nonlinear Programming" in Mathematics of Decision Sciences, Part II, Lectures in Applied Mathematics, vol II, Amer. Math. Soc. pp. 401-422.
- ROCKAFELLAR, R.T. (1969) "Convex Functions and Duality in Optimization-Problems and Dynamics" in KUHN, H. W. e SZEGÖ, G.P. (Eds) Mathematical Systems Theory and Economics I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York.
- ROCKAFELLAR, R.T. (1970) Convex Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.
- ROCKAFELLAR, R.T. (1981) The Theory of Subgradients and Its Applications to Problems of Optimization. Convex and Nonconvex Functions, Heldermann-Verlag, Berlin.
- SAMUELSON, P. (1953) "Prices of Factores and Goods in General Equilibrium", The Review of Economic Studies, 21, 1-20.
- SHEPHARD, R.W. (1953) Cost and Production Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J..
- SHEPHARD, R.W. (1970) Theory of Cost and Production Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J..
- UZAWA, H. (1964) "Duality Principles in the Theory of Cost and Production ", International Economic Review, vol 5, n. 2 May.
- VARIAN, H.R. (1978) Microeconomic Analysis, W.W. Norton & C., New York.
- WEYMARK, J. A. (1980) "Duality Results in Demand Theory", European Economic Review, 14, pp. 377-395.