



David António Antunes de Pinho Simões Vaz

**DESENVOLVIMENTO DE UMA TÉCNICA DE
REFINAMENTO ADAPTATIVO HIERÁRQUICO
DE MALHAS ESTRUTURADAS EM ANÁLISE
LIMITE**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil

Orientador: Professor Doutor Mário Jorge Vicente da Silva

Júri:

Presidente: Professor Doutor Armando Manuel Sequeira Nunes Antão
Arguente: Professora Doutora Ildi Cismasiu
Vogal: Professor Doutor Mário Jorge Vicente da Silva

“Copyright” David António Antunes de Pinho Simões Vaz, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Não posso deixar de fazer alguns agradecimentos àqueles que me ajudaram a finalizar este trabalho e todo o percurso que, agora, chega ao fim.

Em primeiro sempre o agradecimento devido à minha família. Aos meus pais. Agradeço especialmente neste momento toda a educação que me proporcionaram. Ao meu Pai. À minha Mãe. Às minhas irmãs Ana, Sofia e Mariana. Por tudo. Avós, Madrinha, Tios e Primos.

Um agradecimento especial ao Professor Doutor Mário Silva, principal responsável do bom caminho que seguiu este trabalho. Pela possibilidade oferecida de realizar um trabalho tão interessante, pela constante disponibilidade, paciência e empenho e pelo tempo dispendido. Ainda um agradecimento especial pela atenção e lembrança de me conseguir o suporte fundamental para este trabalho, um laptop, o terceiro e definitivo neste trabalho.

Ao Alvito pela cedência do segundo laptop que deu asas a este trabalho e que foi essencial. À Mariana pela cedência do primeiro, onde tudo teve início.

Ao Pedro por todas as ajudas informáticas e não só, desde as dúvidas de pointers às do processador de texto.

Aos amigos que são a melhor herança destes anos. Filipe, Alvito, Primo, João e Migas.

Resumo

Neste trabalho desenvolveu-se e validou-se uma técnica de refinamento adaptativo hierárquico de malhas estruturadas, em análise limite. Ao código que executa essa técnica chamou-se REMESH. O objectivo é melhorar a eficiência do programa de elementos finitos, SUBLIM3d2.

A técnica de refinamento é marcada pela utilização de nós incompatíveis. A existência destes nós é a base da adaptatividade implementada. Apesar desses nós precisarem de um tratamento específico para não invalidarem a aproximação à solução através de uma formulação de elementos finitos, permitem uma excelente adaptatividade.

Juntamente com os refinamentos, REMESH apresenta uma estimativa inicial da solução das novas malhas, com o fim de melhorar a eficiência do processo de solução.

REMESH é desenvolvida e validada em cooperação com o programa de elementos finitos, SUBLIM3d2, que se baseia no teorema cinemático da análise limite para determinar limites superiores estritos de cargas de colapso. A solução numérica dos problemas é obtida pela interacção entre SUBLIM3d2 e REMESH. O primeiro determina a solução com malhas refinadas no segundo e os refinamentos do REMESH são feitos com base nas soluções do SUBLIM3d2.

A técnica foi desenvolvida unicamente para malhas estruturadas com elementos finitos triangulares de três nós.

Os testes efectuados revelam que REMESH não compromete a qualidade dos resultados obtidos e torna o processo de solução em SUBLIM3d2 muito mais eficiente.

Palavras-chave

Malha de Elementos Finitos

Graus de Liberdade

Compatibilidade

Refinamento Adaptativo

Análise Limite

Abstract

In this work a technique for adaptive refinement of structured meshes in limit analysis was developed and validated. The code to perform this technique was called REMESH. The goal is to improve the efficiency of the finite elements program SUBLIM3d2.

The use of incompatible nodes makes this refinement technique singular. The existence of these nodes is the basis for the adaptive refinement developed. Although these nodes need a specific handling so that the approximation with a finite element formulation does not get invalid, they allow very good adaptivity.

Along with the refined meshes, REMESH presents an initial estimate for the solution in order to increase the efficiency of the solution process.

REMESH is developed and validated in cooperation with the finite element program SUBLIM3d2, which uses the kinematic theorem of limit analysis to find strict upper bounds of collapse loads. The numerical solutions of the problems are launched by the interaction of SUBLIM3d2 and REMESH. The first finds the solution for meshes refined in the second and REMESH refines using data from the SUBLIM3d2 solutions.

The technique was developed uniquely for structured meshes with three nodes triangular finite elements.

The tests show that REMESH makes the solution process in SUBLIM3d2 up to 80% more efficient, without compromising the accuracy of the results.

Keywords

Finite Element Mesh

Degrees of Freedom

Compatibility

Adaptive Refinement

Limite Analysis

Índice

| | |
|---|----------|
| Resumo | i |
| Palavras-chave | i |
| Abstract..... | iii |
| Keywords | iii |
| Símbolos | xv |
| Abreviaturas..... | xvii |
| Termos | xvii |
| Capítulo 1. Introdução | 1 |
| 1.1. Motivação | 1 |
| 1.2. Objectivo | 2 |
| 1.3. Organização | 2 |
| Capítulo 2. Revisão de Conceitos Teóricos..... | 5 |
| 2.1. Plasticidade..... | 6 |
| 2.1.1. Lei de Endurecimento | 7 |
| 2.1.2. Dissipação Plástica..... | 9 |
| 2.1.3. Lei de Fluxo | 9 |
| 2.1.4. Critério de Tresca..... | 10 |
| 2.1.5. Critério de von Mises | 11 |
| 2.2. Análise Limite | 12 |
| 2.3. Formulação do programa SUBLIM3d2..... | 14 |

| | |
|---|-----------|
| Capítulo 3. Definição do Problema | 17 |
| 3.1. Considerações Iniciais | 17 |
| 3.2. Fenómenos de Locking..... | 19 |
| 3.3. Proposta - REMESH..... | 20 |
| 3.3.1. Adaptatividade – Nós Incompatíveis | 20 |
| 3.3.2. Estimativa Inicial..... | 22 |
| Capítulo 4. Implementação..... | 25 |
| 4.1. Técnica de Refinamento | 26 |
| 4.1.1. Geometria das Malhas | 26 |
| 4.1.2. Refinamento Hierárquico | 28 |
| 4.1.3. Critérios de Refinamento | 29 |
| 4.1.4. Nós Incompatíveis..... | 31 |
| 4.2. Estimativa Inicial da Solução | 33 |
| 4.2.1. Campo das dissipações..... | 34 |
| 4.2.2. Campo de velocidades..... | 34 |
| 4.2.3. Forças Nodais | 36 |
| 4.3. Procedimento de Refinamento..... | 40 |
| 4.4. Modo Manual | 41 |
| 4.5. Interação com o SUBLIM3d2..... | 41 |
| 4.5.1. CREMESH..... | 41 |
| Capítulo 5. Validação | 45 |
| 5.1. Problema..... | 45 |

| | | |
|-------------------------------------|---|-----------|
| 5.2. | Testes e Resultados..... | 48 |
| 5.2.1. | Teste – Validar o uso de nós incompatíveis | 50 |
| 5.2.2. | Teste – Validar a passagem dos campos de dados entre malhas | 51 |
| 5.2.3. | Teste – Verificar a eficiência de REMESH..... | 55 |
| 5.2.4. | Teste – Validar as soluções do CREMESH | 57 |
| 5.2.5. | Teste – Verificar o benefício de REMESH para SUBLIM3d2 | 61 |
| 5.2.6. | Teste – Validar os refinamentos simultâneos..... | 71 |
| 5.3. | Considerações Finais | 73 |
| Capítulo 6. Conclusões | | 75 |
| 6.1. | Desenvolvimentos Futuros | 76 |
| | Bibliografia | 79 |

Lista de Figuras

| | |
|--|----|
| Figura 2.1: Comportamento Elasto-plástico dos materiais. | 6 |
| Figura 2.2: Lei de fluxo associado. | 9 |
| Figura 2.3: Região das tensões admissíveis e superfície de cedência pelo critério de Tresca. Adaptado de [16]. | 10 |
| Figura 2.4: Região das tensões admissíveis e superfície de cedência pelo critério de von Mises. Adaptado de [16]. | 11 |
| Figura 3.1: Elementos agrupados em <i>patches</i> (conjuntos de 4 elementos que formam um quadrilátero) para evitar fenómenos de locking. | 20 |
| Figura 3.2: Adaptatividade com nós incompatíveis. | 21 |
| Figura 3.3: Elementos Finitos T3 e T3+. | 22 |
| Figura 4.1: Técnica de refinamento. | 26 |
| Figura 4.2: Ajuste do nó central. | 27 |
| Figura 4.3: Hierarquia de <i>patches</i> e elementos. | 28 |
| Figura 4.4: Níveis de refinamento. | 30 |
| Figura 4.5: Adaptatividade segundo critérios de refinamento. | 31 |
| Figura 4.6: Nós Incompatíveis. | 32 |
| Figura 4.7: Restabelecimento da compatibilidade de dois nós devido ao refinamento dos T3+. | 33 |
| Figura 4.8: Passagem correcta do campo das dissipações. | 34 |
| Figura 4.9: Elemento T3, adaptado de [19]. | 34 |
| Figura 4.10: Passagem correcta do campo das velocidades globais. | 36 |
| Figura 4.11: Passagem do campo das forças nodais (I). | 37 |
| Figura 4.12: Passagem do campo das forças nodais (II). | 37 |

| | |
|--|----|
| Figura 4.13: Passagem correcta do campo das Forças nodais..... | 39 |
| Figura 4.14: Esquema de funcionamento de CREMESH, na determinação automática das soluções usando SUBLIM3d2 e REMESH..... | 42 |
| Figura 5.1: (a) Talude vertical, solo em condições não drenadas; (b) Malha inicial e condições de apoio. Retirado e adaptado de [7]..... | 46 |
| Figura 5.2: Solução inicial (Campo: Dissipação)..... | 47 |
| Figura 5.3: Solução Inicial (Campo: Velocidade)..... | 47 |
| Figura 5.4: Solução Inicial (Campo: Forças Nodais)..... | 47 |
| Figura 5.5: Nós incompatíveis não introduzem GDL efectivos, e são dependentes dos GDL efectivos dos elementos T3+..... | 50 |
| Figura 5.6: Malhas 1, 2 e 3. Dois refinamentos adaptativos executados por REMESH. | 51 |
| Figura 5.7: Passagem do campo de dissipações no refinamento da malha 1 para a malha 2. | 52 |
| Figura 5.8: Passagem do campo de dissipação no refinamento da malha 2 para a malha 3. | 52 |
| Figura 5.9: Passagem do campo de velocidades no refinamento da malha 1 para a malha 2. | 53 |
| Figura 5.10: Passagem do campo de velocidades no refinamento da malha 2 para a malha 3. .. | 53 |
| Figura 5.11: Passagem do campo de forças nodais no refinamento da malha 1 para a malha 2. | 54 |
| Figura 5.12: Passagem do campo de forças nodais no refinamento da malha 2 para a malha 3. | 54 |
| Figura 5.13: Convergência das quatro soluções devidas à interacção CREMESH..... | 58 |
| Figura 5.14: Evolução do campo das dissipações e da adaptatividade ao longo de 6 interacções CREMESH..... | 60 |
| Figura 5.15: Tempo de computação das duas formulações..... | 62 |
| Figura 5.16: Pormenor da figura anterior, focando as malhas iniciais..... | 62 |
| Figura 5.17: Benefício da adaptatividade nas soluções SUBLIM3d2..... | 66 |
| Figura 5.18: Benefício da estimativa inicial nas soluções SUBLIM3d2..... | 68 |

Figura 5.19: Resultado de 4 refinamentos de dois níveis com dissipação inicial de 0.05 em CREMESH. $h=1mm$ 72

Lista de Tabelas

| | |
|---|----|
| Tabela 5.1: Eficiência de REMESH..... | 55 |
| Tabela 5.2: Tempo de cálculo e tempo de tratamento de dados em REMESH..... | 56 |
| Tabela 5.3: Convergência da solução através de interações entre REMESH e SUBLIM3d2... | 57 |
| Tabela 5.4: Eficiência da formulação implementada em Sublim3d2 com o uso de REMESH. . | 64 |
| Tabela 5.5: Benefício da adaptatividade. | 67 |
| Tabela 5.6: Benefício da estimativa inicial. | 69 |
| Tabela 5.7: Soluções CREMESH com refinamentos de um nível e com refinamentos de vários níveis. | 71 |

Símbolos

Critério Adaptatividade – Valor de dissipação plástica para discriminação dos elementos a refinar.

d – Critério inicial de refinamento (em valores de Dissipação) a cada chamada de REMESH.

h – Dimensão dos elementos que constituem a malha de elementos finitos.

h_0 é a dimensão mínima dos elementos na malha inicial.

i – interação entre REMESH e SUBLIM3d2.

l – Níveis de refinamento.

min – minutos.

s – segundos.

T – Tempo.

Tcálculo – Tempo dedicado ao cálculo, excluído o tempo de utilização da estrutura de dados.

% dif. ME – Percentagem da diferença entre T de cada método e T do método ME.

% erro relativo – Percentagem da diferença de λ em relação ao valor $\lambda = 3.7776$ [9].

λ – Parâmetro de carga de colapso.

Δ – Área de um elemento.

Δ_i – Área de um elemento i .

Notação Tensorial:

a – escalar.

\underline{a} – tensor de primeira ordem.

$\underline{\underline{a}}$ – tensor de segunda ordem.

$\underline{\underline{\underline{a}}}$ – tensor de quarta ordem.

\dot{u} – primeira derivada em ordem ao tempo.

Operador “:” – produto contraído entre dois tensores de 2ª ordem.

Operador “tr()” – traço de um tensor de 2ª ordem.

Abreviaturas

GDL – Graus De Liberdade

MEF – Método dos Elementos Finitos.

T3 – Elemento clássico do MEF, triangular, de três nós e deslocamentos lineares definidos pelos três nós.

T3+ – Elemento similar a T3, com nós incompatíveis nas fronteiras, e deslocamentos linearmente dependentes dos vértices, compatíveis.

ME – Solução obtida por uma variante de SUBLIM3d2 em que se provoca uma formulação em que a matriz do sistema governativo é simétrica e esparsa.

MD – Solução obtida pelo SUBLIM3d2, com a sua formulação, em que a matriz do sistema governativo é diagonal.

MD+R – Solução obtida pela interação entre SUBLIM3d2 e REMESH.

Termos

Patch – conjunto de quatro elementos triangulares que formam um quadrilátero.

Malha Estruturada – este termo é utilizado neste texto para designar malhas com uma estrutura composta por *patches*.

Capítulo 1.

Introdução

Neste texto expõe-se o trabalho de pesquisa, desenvolvimento e validação de uma técnica de refinamento adaptativo e hierárquico de malhas estruturadas, em análise limite. Neste capítulo escreve-se sobre o que motivou a sua realização, quais os seus objectivos e como se organiza este documento.

1.1. Motivação

A possibilidade de realização deste trabalho de desenvolvimento surge da frequência do Mestrado Integrado em Engenharia Civil, cujo curriculum compreende a realização de uma tese para obtenção do grau de Mestre. Neste contexto surgiu a possibilidade de escolher como orientador o Professor Mário Jorge Vicente da Silva.

Após a discussão de alguns temas possíveis com o orientador, optou-se pelo que aqui se apresenta. A principal razão para esta escolha foi a possibilidade de desenvolver programas, actividade de particular interesse e gosto. Além disso, o facto de este desenvolvimento estar na linha daquilo que já tinham sido algumas cadeiras sobre o método dos elementos finitos, também trouxe entusiasmo, pois essas tinham sido deixadas com o desejo de vir a contribuir

para o seu desenvolvimento. Acrescenta-se, ainda, que o projecto sugerido e escolhido tinha componentes de inovação, que o tornam mais aliciante. Outro grande interesse, a engenharia civil, também estava presente, pois a aplicação e validação do trabalho desenvolvido é feita no programa de cálculo automático de análise limite *SUBLIM3d2*, tratando problemas concretos dessa área.

A tudo isto acrescenta-se o valor de última pedra que tem este trabalho. Com efeito, marca o fim de um ciclo.

1.2. Objectivo

Propõe-se neste trabalho o desenvolvimento de um código que permita o refinamento adaptativo de malhas estruturadas com elementos finitos triangulares. Adicionalmente, pretende-se que esta aplicação seja capaz de apresentar uma estimativa inicial da solução do problema. O desenvolvimento do código com estas duas ferramentas visa contribuir para a eficiência do programa de elementos finitos *SUBLIM3d2*. Ambiciona-se validar esta nova técnica de refinamento, garantir sua eficiência e torná-la útil para a resolução numérica de problemas de elementos finitos, concretamente em interacção com o programa *SUBLIM3d2*.

1.3. Organização

Este documento seguirá a seguinte estrutura, após o presente capítulo:

Capítulo 2 - Revisão de Conceitos Teóricos. Neste capítulo serão apresentadas as bases teóricas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 3 - Definição do Problema. Após a apresentação das bases teóricas passa-se à definição do problema e descrição do ambiente em que será resolvido. Termina, este capítulo, com a proposta de solução para o problema;

Capítulo 4 - Implementação. Este capítulo foi reservado para apresentar a implementação da solução proposta. Os pormenores do funcionamento do código desenvolvido e todas as opções tomadas são explicados;

Capítulo 5 - Validação. Serve este capítulo para validar a técnica desenvolvida. Apresentam-se e discutem-se os resultados de vários testes realizados com o intuito de mostrar a capacidade do código implementado;

Capítulo 6 - Conclusões. O trabalho termina neste capítulo, em que são apresentados as conclusões de todo o trabalho realizado e alguns desenvolvimentos futuros possíveis na sequência deste trabalho.

Acrescenta-se que o leitor pode encontrar informação sobre o código desenvolvido, incluindo o próprio código, na página <http://mario.dec.fct.unl.pt/remesh>.

Capítulo 2.

Revisão de Conceitos Teóricos

Neste capítulo apresentam-se as bases teóricas que se consideram essenciais para a compreensão do desenvolvimento proposto.

Apesar da índole de desenvolvimento deste trabalho, é necessária a compreensão de alguns conceitos que o sustentam. De facto, a aplicação do código desenvolvido neste trabalho está ligada aos trabalhos de investigação de [16], [17] e [18] e desta forma interessa não só expor as bases teóricas que permitem a concepção deste trabalho, como o enquadramento teórico do problema desses trabalhos.

A determinação directa de cargas de colapso tem várias aplicações na engenharia civil e uma especial aplicabilidade na área de mecânica dos solos, através da implementação de métodos numéricos eficientes para determinar a capacidade resistente de estruturas compostas por materiais que apresentam comportamento plástico.

O estudo das cargas de colapso de uma estrutura ganha especial sentido quando as estruturas apresentam comportamento elasto-plástico com elevada ductilidade. Ora, à determinação de cargas de colapso, para estruturas com comportamento perfeitamente plástico, adequa-se a utilização dos teoremas da análise limite. SUBLIM3d2, o programa de elementos finitos resultante do estudo e desenvolvimento em [18], faz isso mesmo. Utiliza estes teoremas como

base da sua formulação, para determinar cargas de colapso de estruturas. Sendo o enquadramento teórico em que se desenvolve esse programa, o mesmo em que se desenvolve o trabalho aqui apresentado, revêm-se estes temas nas secções seguintes começando pela *plasticidade*, seguindo-se uma breve exposição dos conceitos de *Análise Limite* e, por fim, uma exposição da formulação de SUBLIM3d2.

Nas seguintes secções utiliza-se uma notação tensorial, na qual se utilizam os símbolos e operadores apresentados anteriormente.

2.1. Plasticidade

O comportamento dos materiais pode ser definido através da relação que apresentam entre estado de tensão a que estão sujeitos e o estado de deformação resultante. Assim, os materiais podem ser classificados como elásticos, elasto-plásticos ou elasto-perfeitamente plásticos, entre outros. Estes comportamentos estão representados na Figura 2.1, para um carregamento uniaxial.

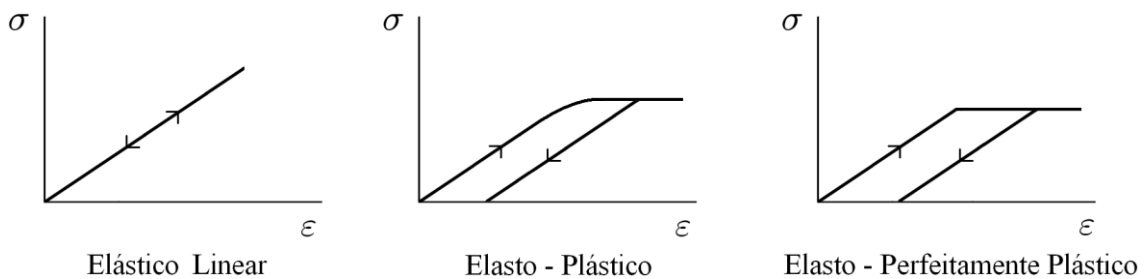


Figura 2.1: Comportamento Elasto-plástico dos materiais.

O comportamento elástico linear, descrito em [1], é simples de definir a partir dos parâmetros de elasticidade, através da lei de *Hooke*. De facto, para qualquer material com um comportamento elástico linear, numa relação unidimensional, o módulo de Young E estabelece a relação entre estado de deformação, ε , e estado de tensão, σ :

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.1)$$

A generalização desta lei, para um corpo tridimensional e carregamento genérico, resulta em:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}} \quad (2.2)$$

Em que

$\underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}}$ é um tensor de quarta ordem que coleciona as propriedades elásticas do material, nomeadamente o módulo de Young, E , e o coeficiente de Poisson, ν .

No entanto, assim que um material dúctil se encontra sujeito a uma carga que o leva a entrar em comportamento plástico, para a chamada *tensão de cedência*, a relação entre o estado de tensão e o estado de deformação altera-se, sendo impossível estabelecer uma relação unívoca entre tensões e deformações. As deformações resultantes desses estados de tensão são permanentes. Ao conjunto dos estados de tensão que caracterizam tensões de cedência, chama-se *superfície de cedência*.

O comportamento plástico de um material, tal como se explica em [3] e [7], considera-se perfeitamente definido para um determinado estado de tensão, quando se conhece: a *superfície de cedência*, ou seja, os estados de tensão para os quais ocorrem deformações plásticas nesse material; a *lei de endurecimento*, pela qual se conhece como varia a superfície de cedência com as deformações plásticas e a *lei de fluxo*, pela qual se conhece a direcção das deformações plásticas.

2.1.1. Lei de Endurecimento

Alguns materiais plásticos têm a capacidade de adaptar a sua superfície de cedência quando esta é atingida pelo estado de tensão a ficam sujeitos. No entanto, isto não significa, sempre, o adiar das deformações plásticas. Assim, o endurecimento pode ser *cinemático*, caso em que a superfície de cedência sofre uma translação sem alterações de forma, ou *isotrópico*, quando a superfície de cedência sofre uma mudança de forma. O endurecimento *misto*, resulta de uma composição dos anteriores.

Um material com um comportamento *plástico perfeito* é caracterizado pela não ocorrência de endurecimento. Dessa forma, a sua superfície de cedência mantém-se inalterada ao longo de toda a história dos carregamentos. Na fase plástica de um comportamento plástico perfeito, não há uma relação unívoca entre o estado de tensão e o estado de deformação. Nessa fase as deformações tornam-se incontroláveis. Contudo, a plastificação de parte do sistema não implica o seu colapso. O colapso da estrutura dá-se quando as deformações na estrutura se tornam incontroláveis. Num comportamento plástico perfeito isto acontece para quando se atinge a superfície de cedência. À região de carregamentos com uma distribuição de tensões equilibrada, que não leva ao colapso chama-se *região dos carregamentos admissíveis*. Uma distribuição de tensões equilibrada respeita as condições de equilíbrio no domínio e nas fronteiras estáticas.

Em análise limite, o comportamento do material é considerado perfeitamente plástico. Refira-se que esta é condição necessária para aplicação dos teoremas da Análise Limite.

Os materiais perfeitamente plásticos podem ser elasto-perfeitamente plásticos ou rígidos-perfeitamente plásticos, sendo que no segundo caso, ao contrário do primeiro, não há lugar a deformações elásticas antes do colapso. Pode, no entanto, demonstrar-se que a região de carregamentos admissíveis é coincidente nos dois casos e as deformações elásticas não influenciam a carga de colapso. Por isso, e sendo a formulação em SUBLIM3d2 desenvolvida em análise limite, considera sempre o comportamento dos materiais como rígido-perfeitamente plástico, [18].

A formulação de SUBLIM3d2 considera válida a hipótese de linearidade geométrica e, conseqüentemente, desprezam-se efeitos de 2ª ordem nas equações de equilíbrio. Dessa forma, faz-se válida a hipótese das pequenas deformações e, com isto, pode estabelecer-se a relação de compatibilidade entre o campo dos deslocamentos e o campo das deformações, através do campo das velocidades e taxa das deformações:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (2.3)$$

A imprevisibilidade das deformações plásticas dentro de um comportamento perfeitamente plástico, significa, para um mesmo valor de carga actuante, correspondente à *tensão de cedência*, uma capacidade incondicionada de deformação. Por isto, é mais adequado definir o comportamento plástico através da *taxa das deformações*.

2.1.2. Dissipação Plástica

A dissipação plástica por unidade de volume, D , é definida pelo estado de tensão e taxa de deformação plástica, $\underline{\underline{\sigma}}$ e $\underline{\underline{\dot{\epsilon}^p}}$, da seguinte forma:

$$D(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\dot{\epsilon}^p}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}^p}} \quad (2.4)$$

O Princípio do Trabalho Plástico Máximo (PTPM), que se assume como válido neste trabalho, permite obter três consequências relevantes, [16]:

- a) a taxa de deformação plástica tem de ser orientada segundo uma normal exterior à superfície de cedência;
- b) a superfície de cedência define obrigatoriamente um espaço das tensões admissíveis convexo;
- c) A dissipação plástica por unidade de volume, D , pode passar a ser expressa como uma função unívoca da taxa de deformação plástica, $D(\underline{\underline{\dot{\epsilon}^p}})$, desde que seja conhecida a função de cedência, $f(\underline{\underline{\sigma}})$.

2.1.3. Lei de Fluxo

Um caso particular da lei de fluxo, ou *lei do escoamento*, é a lei de escoamento associado que implica que o vector deformação plástica seja normal à superfície de cedência, como representado na Figura 2.2. O cumprimento do PTPM faz da lei do escoamento plástico associado um pressuposto da formulação de SUBLIM3d2.

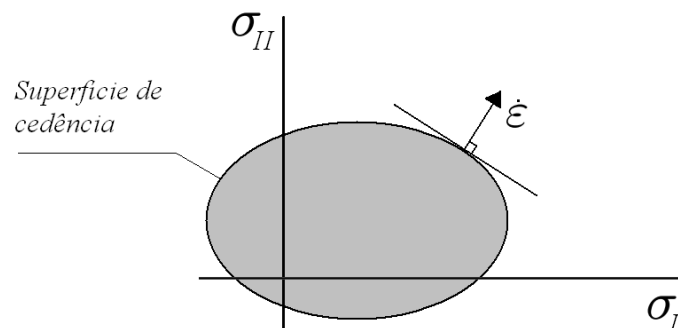


Figura 2.2: Lei de fluxo associado.

2.1.4. Critério de Tresca

O critério de cedência de Tresca representa materiais puramente coesivos. Em geotecnia, adequa-se a solos em situação não drenada e é caracterizado por uma coesão, c , igual à resistência ao corte não drenada do solo. Por vezes este critério é também utilizado para metais, sendo no entanto mais comum, nesses casos, o uso do critério de von Mises.

A Figura 2.3 tem representada a região das tensões admissíveis e superfície de cedência, segundo o critério de Tresca, no espaço das tensões principais, $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$, a que corresponde o espaço das taxas de deformação principal, $(\dot{\varepsilon}_I, \dot{\varepsilon}_{II}, \dot{\varepsilon}_{III})$ e considerando $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$.

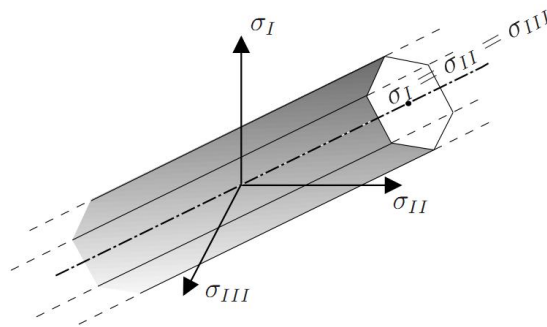


Figura 2.3: Região das tensões admissíveis e superfície de cedência pelo critério de Tresca. Adaptado de [16].

Assim, segundo o critério de Tresca, como em [16], a função de cedência pode ser dada pela expressão seguinte em que c é a resistência ao corte não drenada,

$$f(\sigma) = \sigma_I - \sigma_{III} - 2c \quad (2.5)$$

E, com base nesta função, pode definir-se a dissipação plástica:

$$D(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p}) = c (|\dot{\varepsilon}_I^p| + |\dot{\varepsilon}_{II}^p| + |\dot{\varepsilon}_{III}^p|), \quad \forall \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p} \in C_c \quad (2.6)$$

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p} \in C_c \Leftrightarrow tr(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p}) = 0 \quad (2.7)$$

Para garantir a validade do PTPM e o cumprimento das suas consequências, foi definido o domínio C_c , a que deve pertencer a taxa de deformação plástica.

2.1.5. Critério de von Mises

Para o critério de von Mises a região dos carregamentos admissíveis é representada na Figura 2.4, para o mesmo espaço de tensões e taxa de deformações da figura anterior.

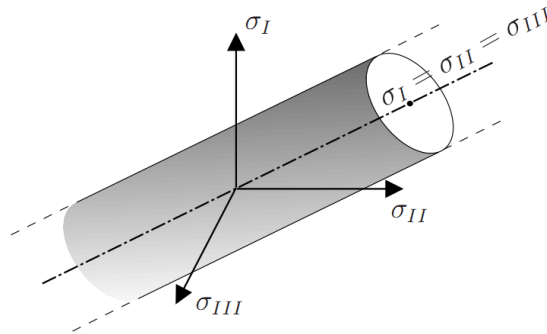


Figura 2.4: Região das tensões admissíveis e superfície de cedência pelo critério de von Mises. Adaptado de [16].

Segundo este critério pode definir-se a função de cedência do seguinte modo, como [16]:

$$f(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{s}}^2)} - k \quad (2.8)$$

Em que k é a tensão de corte de cedência obtida num ensaio de tracção uniaxial.

$\underline{\underline{s}}$ é a parcela deviatórica das tensões, definida como:

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad (2.9)$$

$\underline{\underline{I}}$ representa o tensor identidade de 2ª ordem.

A dissipação plástica fica definida pelas expressões seguintes:

$$D(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}^p}) = k \sqrt{2tr\left(\left(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}^p}\right)^2\right)}, \quad \forall \underline{\underline{\dot{\epsilon}}^p} \in C_c \quad (2.10)$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}^p} \in C_c \Leftrightarrow tr\left(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}^p}\right) = 0 \quad (2.11)$$

Os dois critérios apresentados, Tresca e von Mises, são coincidentes para problemas em Estado Plano de Deformação (EPD), caso do problema que será resolvido no Capítulo 5. Utilizou-se o critério de Tresca.

Apesar de se apresentarem apenas estes dois critérios de cedência, em SUBLIM3d2 existem ainda outros critérios de cedência possíveis como: o critério de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. No entanto, a abordagem destes últimos não interessa no presente trabalho.

2.2. Análise Limite

Para analisar uma estrutura que exiba comportamento elasto-plástico utilizam-se habitualmente duas abordagens distintas, nomeadamente: a análise incremental e a análise limite. A segunda, que mais interessa conhecer neste trabalho, é tratada nesta secção.

A análise limite surge como alternativa à análise incremental. Ambas as abordagens apresentam uma solução aproximada para a carga de colapso da estrutura. O método utilizado pela primeira permite-lhe ainda estabelecer a relação entre as tensões e deformações que acontecem até ao colapso. Os métodos seguidos pela segunda abordagem, não precisam estabelecer essa relação, nem precisam obter os dois campos para conseguir uma solução válida, bastando um deles. Por essa razão, as soluções obtidas através da análise limite não apresentam a relação entre os campos de tensão e deformação.

As cargas de colapso, como explicado anteriormente, são as que correspondem a um estado de tensão que leva à ocorrência de deformações plásticas. Estas, em análise limite, pelo facto de se considerar os materiais com um comportamento plástico perfeito, correspondem a deformações imponderáveis e, por isso, significam um estado de colapso iminente.

Em [6] e [11] demonstra-se que as deformações ocorridas em regime elástico não alteram a carga de colapso de um sistema. Isto significa que um material rígido-perfeitamente plástico tem a mesma região de carregamentos admissíveis que um material elasto-plástico perfeito, se os

dois tiverem o mesmo critério de cedência. A grande diferença entre um material rígido perfeitamente plástico e um material elasto-plástico perfeito é que o primeiro não admite deformações plásticas antes do colapso. Assim, uma vez que o que se passa no domínio elástico não faz qualquer diferença na determinação da carga de colapso, tarefa própria do SUBLIM3d2, esse domínio não é considerado e o material é definido rígido-perfeitamente plástico.

Em regra, para que uma solução obtida através de uma formulação de elementos finitos seja válida, esta deve respeitar as condições de equilíbrio e de compatibilidade do sistema e, também, as condições inerentes às propriedades dos materiais.

Os teoremas da análise limite reflectem diferentes vertentes para determinar cargas de colapso. Cada um deles, o teorema cinemático e o teorema estático, permite ignorar, respectivamente, a condição de equilíbrio ou a condição de compatibilidade, sem invalidar as soluções. Assim, conseguem obter-se soluções estudando apenas o que se passa cinemática ou estaticamente.

Os teoremas agora apresentados só são válidos para materiais com um comportamento plástico perfeito, em que a superfície de cedência não tem endurecimento e quando se verifica o PTPM, ou seja, respeita-se a lei do escoamento associado.

Assim, o *Teorema Estático* diz que um determinado carregamento P , está dentro da região dos carregamentos admissíveis se houver um campo de tensões que equilibre P e não quebre a função de cedência em todo o domínio do meio contínuo. Este teorema permite ignorar a condição de compatibilidade e possibilita obter minorantes da carga de colapso.

O *Teorema Cinemático*, postula que um determinado carregamento P não está dentro da região dos carregamentos admissíveis se for possível definir um campo de velocidades virtual, compatível, para o qual a potência das forças exteriores aplicadas seja superior ou igual à potência total dissipada. Este teorema resulta de ignorar a condição de equilíbrio e permite obter majorantes para a carga de colapso.

Este é o teorema usado na formulação do SUBLIM3d2, para obtenção de cargas de colapso, ou mais precisamente, de majorantes da carga de colapso. As soluções a partir deste teorema nascem do estabelecimento de um campo de velocidades cinematicamente admissível. Este, permite obter o trabalho das forças exteriores e a potência dissipada plasticamente, para um determinado carregamento. O enunciado do teorema determina que quando o primeiro for superior ao segundo ocorre o colapso. No entanto, a desconsideração da condição de equilíbrio, sustento deste teorema, permite que haja inúmeras soluções possíveis que respeitam o seu enunciado. Assim, o melhor majorante da carga de colapso e, portanto, a melhor solução, será a que apresentar a menor diferença entre o trabalho e a potência enunciados. Ou seja, para um dado conjunto de forças, a melhor solução corresponde ao campo de velocidades que minimiza

a diferença entre o trabalho das forças exteriores e a potência dissipada plasticamente e, a esse campo de velocidades, chama-se ótimo.

Assim, o desejo de sustentar SUBLIM3d2 neste teorema, implica a capacidade de determinar campos de velocidade compatíveis, averiguar a qualidade da solução resultante desses e, se necessário, determinar outros, convergentes em direcção à minimização da diferença referida.

Um campo de velocidades compatível é todo aquele que respeita as condições de compatibilidade, $\dot{u} = 0$, na fronteiras cinemática e cujo campo da taxa de deformações, $\dot{\epsilon}$, a ele associado, respeita a regra de escoamento associado.

2.3. Formulação do programa SUBLIM3d2

Nesta secção expõe-se a formulação de elementos finitos concretizada no programa SUBLIM3d2, uma implementação da formulação descrita em [18], “construída” sobre os temas apresentados anteriormente.

Assim, SUBLIM3d2 consistiu no *desenvolvimento e implementação de uma formulação mista de elementos finitos que permita a determinação rigorosa de majorantes de cargas de colapso de sistemas mecânicos caracterizados por um comportamento perfeitamente plástico. Adicionalmente, pretende-se que esta seja suportada teoricamente pelo Teorema Cinemático da Análise Limite.*[16]. Desta forma pode definir-se o programa de elementos finitos SUBLIM3d2.

Ao longo do presente capítulo foram sendo enunciados vários pressupostos que estão na base da formulação concretizada no SUBLIM3d2 e que, agora, se sintetizam.

- Considera-se válida a hipótese das pequenas deformações.
- Os materiais são caracterizados por um comportamento isotrópico.
- A aplicação do carregamento é feita em condições quase estáticas, o que permite desprezar quaisquer efeitos inerciais.
- Todas as deformações inelásticas resultam de uma resposta perfeitamente plástica dos materiais.
- O escoamento plástico obedece à lei do escoamento associada.

O problema da obtenção da carga de colapso com recurso ao teorema cinemático implica, como explicado em 2.2, o estabelecimento de um campo de velocidades admissível. No entanto, a não linearidade do comportamento plástico dos materiais implica a impossibilidade de resolver directamente essa necessidade. Dessa forma, promover uma aproximação ao campo de velocidades cinematicamente admissível é o modo utilizado para solucionar o problema. Com

efeito, em SUBLIM3d2, a validade dessa aproximação é obtida iterativamente, através de dois campos de aproximação diferentes que são forçados a convergir para uma solução comum. As aproximações são independentes apesar de serem ambas uma aproximação do campo de velocidades, sendo uma feita ao nível global e outra ao nível local. Os problemas locais dão-se ao nível dos elementos das malhas e o problema global ao nível da própria malha. Esses dois campos são, cada um por si, insuficientes para se obter uma solução válida, mas a concordância dos dois garante a compatibilidade do campo de velocidades. Os campos são obrigados a convergir, com o uso de *multiplicadores de Lagrange*, através da solução de dois problemas de minimização, repetida e consecutivamente.

A solução final é alcançada quando estes campos coincidem, com uma diferença máxima estipulada, chamada *erro máximo*. Este é o critério adoptado para medir a convergência do método.

A obtenção da solução final através de duas aproximações distintas dá à formulação a designação de *mista*.

Em cada uma das aproximações resolvem-se problemas diferentes. Assim, na aproximação global resolvem-se as incógnitas introduzidas pela linearidade do problema. Na aproximação local são resolvidas as incógnitas devidas à não linearidade do problema. A opção por esta distribuição dos problemas, foi tomada para que a simplicidade do problema linear fosse introduzida no problema global, por si complexo devido à sua dimensão, e a complexidade do problema não linear fosse resolvida em pequenos problemas como são o de cada elemento.

Assim, a cada solução que SUBLIM3d2 procura, para um dado problema, converge numa solução que promove simultaneamente três objectivos: a compatibilidade dos mecanismos escolhidos, a compatibilidade dos problemas local e global e a minimização da dissipação plástica. Este método origina um problema de optimização que é resolvido com uma variante do *algoritmo iterativo de Uzawa*.

A ferramenta de refinamento desenvolvida neste trabalho, chamada REMESH, actua sobre as soluções dadas pelo SUBLIM3d2. Essas soluções são compostas por variáveis primais e duais. As primeiras são os campos local e global das velocidades, que coincidem na solução. As variáveis duais são os multiplicadores de Lagrange.

Sendo SUBLIM3d2, [18], uma evolução da sua primeira versão SUBLIM3d, [16] e [17], vale a pena salientar a principal diferença entre os dois. Assim, a formulação de SUBLIM3d2 faz com que a matriz do sistema governativo seja diagonal não sendo necessária a habitual factorização de Cholesky, descrita em [19].

Capítulo 3.

Definição do Problema

Neste capítulo descreve-se como surge o problema de desenvolvimento do refinamento de malha proposto neste trabalho, a plataforma de base para o seu desenvolvimento (SUBLIM3d2) e as especificidades da mesma.

3.1. Considerações Iniciais

Um dos meios para melhorar as soluções obtidas através de uma formulação de elementos finitos é aumentar os Graus de Liberdade (GDL) que definem a malha de elementos finitos. Esse incremento de GDL pode ser feito de uma forma regular ao longo de toda a malha ou com um critério discriminatório. A primeira hipótese é computacionalmente mais pesada e o seu uso é mais limitado porque precisa de maiores recursos computacionais. A segunda hipótese, desprezando as zonas que não precisam de refinamento, consegue introduzir mais GDL onde estes são úteis e, assim, obter melhores resultados para os mesmos recursos disponíveis. Esta vantagem torna-se especialmente clara quando o problema a tratar não é linear porque aí pesa não só o número de graus de liberdade como a complexidade do problema. Assim, a adaptatividade mostra-se uma ferramenta valiosa, permitindo obter melhores resultados e

poupar recursos computacionais. Não conhecendo à partida a solução dos problemas o modo de estabelecer a adaptatividade deve ser automático. A aplicação da adaptatividade foi já estudada por alguns autores e esses estudos podem encontrar-se em [4], [12],[13],[5] e [2].

O trabalho de investigação de [16], teve como um dos resultados, o desenvolvimento de um programa de cálculo automático pelo método da análise limite denominado SUBLIM3d, acrónimo de Strict Upper Bound LIMit Analyses Code, podendo o leitor encontrar mais informação na página oficial do programa www.dec.fct.unl.pt/projectos/SUBLIM3d. Este programa teve já uma evolução, SUBLIM3d2, descrita em [18], que é a utilizada neste trabalho.

Estas formulações especializaram-se em conseguir uma formulação que se baseia no teorema cinemático da análise limite para determinar limites superiores estritos de cargas de colapso. O desafio desta nova versão do SUBLIM3d era aligeirar o processo de inversão da matriz do sistema governativo da estrutura. Mais concretamente, pretendia-se que a matriz do sistema governativo fosse diagonal, tornando a sua inversão muito simples e, assim, permitindo poupar tempo de processamento em relação às formulações já existentes. Efectivamente, a implementação dessa formulação, através do SUBLIM3d2, veio a conseguir isso mesmo.

A formulação associada ao SUBLIM3d2 revela-se propícia para a introdução de adaptatividade no processo de resolução. De facto, a adaptatividade implica uma interacção entre o código de refinamento e o programa de elementos finitos, o que provoca recomeçar a solução novamente para cada nova malha. Isto, por sua vez, implica a inversão de várias matrizes de rigidez, o que não é penalizador neste caso, pois esta formulação tem esse cálculo muito simplificado.

Em [4], utiliza-se um método para a análise de duas estratégias de refinamento adaptativo de malhas. É esquematizado o processo sugerido para a obtenção da solução numérica do problema, abordagem habitual de todos os refinamentos adaptativos:

Início: Escolha do tipo de funções de elementos finitos para esforços e escoamento plástico e desenho de uma malha inicial para o domínio.

Ciclo:

- 1. Discretização do problema de uma malha inicial de baixo refinamento.*
- 2. Resolução do problema.*
- 3. Dependendo da solução ou dos recursos computacionais disponíveis, parar ou continuar para o passo 4.*
- 4. Aplicar o refinamento de malha e voltar ao passo 2.*

O processo escolhido para o presente trabalho é análogo ao descrito acima e tal como em [4], o presente trabalho centra-se no desenvolvimento e validação de uma nova estratégia para o passo

4. Os restantes passos que completam o ciclo de solução dos problemas serão resolvidos pelo programa desenvolvido em [18], SUBLIM3d2. O passo 3 estabelece a interacção entre os dois.

Neste capítulo expõe-se a definição detalhada de uma estratégia para o passo 4 e o modo como essa se desenvolve em interacção com o SUBLIM3d2 e respeitando as suas especificidades. Começa-se por resumir brevemente o funcionamento desse programa de cálculo, tocando os pontos importantes para este trabalho. No final mostra-se a solução desenhada para responder aos objectivos desejados.

Antes ainda do envolvimento com o SUBLIM3d2 tomou-se a primeira opção. Determinou-se utilizar elementos triangulares de três nós, por trazer simplicidade ao desenvolvimento que tinha o seu foco principal noutros objectivos. Pesou também para esta decisão, o facto de este poder ser um bom ponto de partida para um progresso posterior de adaptação do código a outros tipos de elementos. No entanto, esse progresso envolverá, sempre, mudanças significativas.

3.2. Fenómenos de Locking

A formulação do SUBLIM3d2, quando se utiliza elementos triangulares de três nós, traz consigo a possibilidade de ocorrência de fenómenos de *locking*. O modo de impedir a sua influência nos resultados da formulação implica respeitar algumas condições de geometria para as malhas. Estas, são agora explicadas pelo interesse directo que têm para o desenvolvimento do presente trabalho.

Em [16] pode ler-se o seguinte, que explica as razões do aparecimento deste fenómeno:

O objectivo de obter uma formulação de elementos finitos baseada no estrito cumprimento do Teorema Cinemático força o recurso à utilização de funções de aproximação de grau reduzido, de modo a ser possível respeitar a condição de normalidade do escoamento plástico em todos os pontos do domínio do elemento. (...) A referida condição de normalidade introduz no modelo uma restrição acrescida, reduzindo os seus graus de liberdade efectivos. (...) Deste modo, fenómenos de locking são susceptíveis de ocorrer. O Locking é um problema numérico bem documentado na literatura (...) que algumas formulações de elementos finitos revelam, devido ao qual as soluções obtidas demonstram uma perda significativa de qualidade, resultado de uma rigidez excessiva do modelo. Esta anomalia numérica é muitas vezes originada devido à imposição de condições de incompressibilidade.

Em [16], é também explicado que para os diversos materiais possíveis de utilizar em SUBLIM3d2 este problema não fica excluído, quer sejam coesivos ou friccionais.

A forma apresentada para resolver este efeito, implica estar no caso de problemas de deformação plana e recorrer a uma distribuição específica dos elementos: cada conjunto de 4 elementos deve formar um *patch* e o nó central deve localizar-se na intersecção das diagonais, tal como mostra a Figura 3.1. A possibilidade oferecida de desenvolver este trabalho em cooperação com o SUBLIM3d2 leva a que se trabalhe sobre estas restrições, que em nada impedem os objectivos desejados.

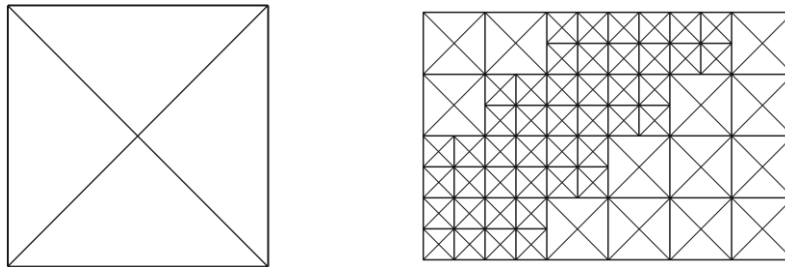


Figura 3.1: Elementos agrupados em *patches* (conjuntos de 4 elementos que formam um quadrilátero) para evitar fenómenos de locking.

3.3. Proposta - REMESH

Sucintamente pode definir-se o problema como: o desenvolvimento de uma aplicação de refinamento adaptativo de malhas estruturadas compostas por elementos triangulares de três nós, formando quadriláteros compostos por conjuntos de quatro elementos. Propõe-se ainda que o refinamento esteja acompanhado de uma estimativa inicial da solução.

A essa aplicação chamou-se REMESH e o modo como se consegue a adaptatividade e a estimativa inicial é apresentado nas secções seguintes.

3.3.1. Adaptatividade – Nós Incompatíveis

A possibilidade de alterar o código fonte de SUBLIM3d2 permite a implementação de um tipo de adaptatividade que, habitualmente, não é utilizado porque implica a adaptação dos programas de elementos finitos que recebem as malhas refinadas. Assim, a resposta à primeira parte do problema será dada com o uso de um refinamento que introduzirá incompatibilidades na malha, permitindo uma adaptatividade muito localizada, sem alteração das coordenadas dos nós existentes. Esta opção implica que haja uma adaptação do SUBLIM3d2 a este tipo de malhas.

Esta técnica resulta na introdução de alguns nós que, por si, não significam uma melhoria na aproximação, mas que tornam a adaptatividade dos restantes muito boa, sem alterar a posição dos nós. Além disso, os nós incompatíveis são uma percentagem reduzida em relação aos compatíveis que permitem acrescentar adaptativamente às malhas.

A adaptatividade implica também que haja um critério discriminatório para determinação dos elementos a refinar. Propõe-se que este critério seja o campo das Dissipações Plásticas. Não significa esta opção que este seja o melhor critério para obter a adaptatividade. Com efeito, considera-se fora do âmbito deste trabalho fazer a investigação de qual o melhor critério aplicável. Contudo, considera-se esse estudo um passo fundamental para o desenvolvimento posterior desta ferramenta. O critério de dissipações permite obter soluções válidas e fazer os testes que se pretende à ferramenta de refinamento desenvolvida.

A Figura 3.2 mostra o refinamento de uma malha grosseira, usando a técnica proposta. Pode ver-se como a introdução dos nós incompatíveis (assinalados na figura) permite um refinamento adaptativo pois a malha não foi refinada uniformemente, ficando uma zona igual ao estado anterior. No entanto, para que seja válida a existência destes nós, estes não podem trazer a introdução de novos graus de liberdade efectivos aos elementos que os recebem nas suas fronteiras, também assinalados na imagem.

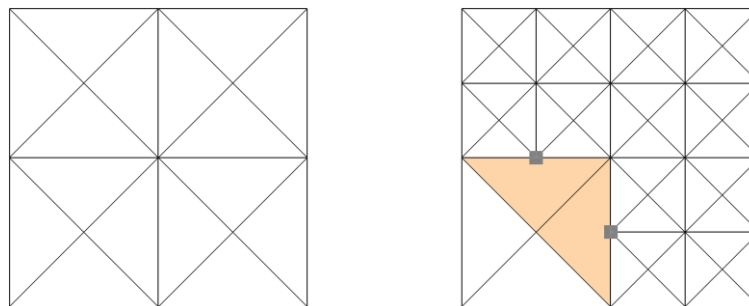


Figura 3.2: Adaptatividade com nós incompatíveis.

Aos elementos finitos triangulares de três nós, com os deslocamentos lineares definidos pelos três nós dos vértices chama-se, como habitualmente, T3. Nas malhas refinadas adaptativamente surge um segundo tipo de elementos. Assim, aos elementos definidos da mesma forma, mas com a possibilidade de receberem nós nas suas arestas, denominou-se T3+. Estes nós são consequência da técnica de refinamento adaptativo proposta. A Figura 3.3 mostra os dois tipos de elementos existentes nas malhas adaptativas.

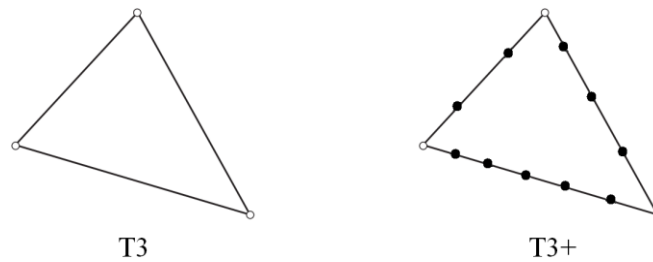


Figura 3.3: Elementos Finitos T3 e T3+.

Nos elementos T3+ só os três nós dos vértices é que conferem GDL efectivos à malha. Os restantes nós, que podem aparecer nas arestas não definem graus de liberdade efectivos. Neste trabalho, para todos os elementos triangulares, o campo de deslocamentos é linear e definido pelos 3 nós vértices. Os restantes nós, que existam nas arestas, têm que respeitar o campo definido pelos três nós vértices. Por isso, a estes nós que aparecem nas arestas dos elementos chama-se *nós incompatíveis* ou *dependentes*. Isto confere a possibilidade de que estes nós sejam em número aleatório em cada aresta.

A existência destes nós permite desenvolver uma técnica de adaptatividade muito precisa, por ser capaz de refinar apenas os elementos necessários, sem precisar de refinar elementos vizinhos para compatibilizar a malha. Esta precisão é obtida através desses nós dependentes que não introduzem GDL efectivos, não melhorando por si a aproximação de elementos finitos, mas que optimizam o número de GDL efectivos acrescentados à malha.

3.3.2. Estimativa Inicial

A *Estimativa Inicial* pretende dar um ponto de partida válido ao programa de elementos finitos que soluciona os problemas. Assim, o programa não parte do zero em busca da solução, mas de um valor mais próximo da solução final, melhorando a sua performance.

Como explicado em 3.1, o método proposto para alcançar a solução final pode implicar outras soluções anteriores à final, num processo interactivo entre o programa de elementos finitos, SUBLIM3d2, e o programa de refinamento, REMESH. As sucessivas soluções pedidas ao SUBLIM3d2, apesar de diferentes, dizem respeito ao mesmo problema representado por malhas progressivamente mais finas. Assim, a solução alcançada na interacção anterior aproxima-se da solução que a cada nova interacção se procura. Se para cada solução dessas, SUBLIM3d2, tiver uma pista para a solução, será certamente mais eficiente do que se partisse sempre para esse problema como se fosse novo.

Desta forma, a estimativa inicial que se propõe é produzida no programa de refinamento, REMESH e baseia-se na solução associada à malha base de cada refinamento. A partir dos

valores da solução associados aos nós e aos elementos, pode produzir-se uma estimativa inicial útil para a solução da malha refinada. Essa estimativa não é mais do que uma passagem desses campos, da malha original, para a malha resultante do refinamento. No entanto, cada campo deve ser passado de modo congruente com o seu teor. Como resultado desta estimativa inicial, a solução da nova malha terá já uma base de partida mais próxima da solução final e que acelerará o processo de solução. Assim, o programa de elementos finitos não parte do zero, mas do ponto para onde tinha apontado na solução da malha anterior.

A adaptatividade do refinamento da malha é executada segundo esses mesmos campos de valores, o que permite que a interacção entre os programas não represente uma mera continuidade no processo. Com efeito, a passagem dos campos permite uma continuidade do processo de convergência da solução e a adaptatividade acelera essa convergência, focando o problema nas zonas críticas.

Os campos que deverão ser passados durante o refinamento são dois: o campo das velocidades nodais e o campo dos multiplicadores de Lagrange, que se denominarão forças nodais. Além desses, passa-se um terceiro, o campo das dissipações, necessário como critério de refinamento.

Os pormenores de implementação dos dois desafios propostos são apresentados no capítulo seguinte, Capítulo 4.

Capítulo 4.

Implementação

No capítulo que agora começa descrevem-se os aspectos relacionados com a implementação numérica do refinamento de malhas, hierárquico e adaptativo, proposto neste trabalho, com especial ênfase no tratamento e consideração dos nós incompatíveis e na produção da estimativa inicial da solução.

O código, que foi desenvolvido em linguagem de programação *Fortran90* [14], pode ser consultado na página <http://mario.dec.fct.unl.pt/remesh>. Nesta página, além do código, o leitor pode conhecer as várias rotinas desenvolvidas, através de breves descrições que as acompanham.

4.1. Técnica de Refinamento

4.1.1. Geometria das Malhas

O refinamento implementado baseia-se em malhas estruturadas de elementos finitos triangulares de três nós, associados em grupos de quatro. Dessa forma, estes grupos de quatro elementos triangulares formam sempre um quadrilátero, e as malhas assim refinadas sempre terão um número de elementos múltiplo de quatro. Cada um desses conjuntos de quatro elementos que formam um quadrilátero é denominado *patch*.

O agrupamento dos elementos triangulares em *patches* definidos por quatro elementos serve para anular a possibilidade de ocorrência de fenômenos de *Locking*, como explicado anteriormente em 3.2.

As estruturas simples da Figura 4.1, ilustram a geometria básica das malhas aqui tratadas.

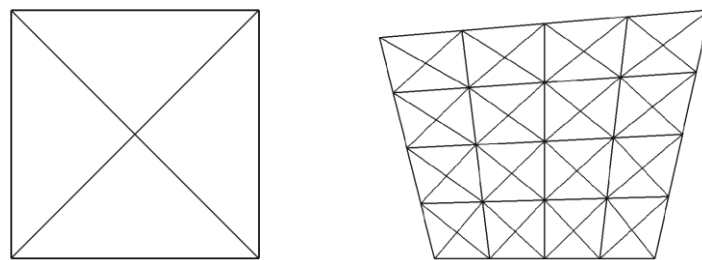


Figura 4.1: Técnica de refinamento.

Os quatro elementos triangulares são sempre definidos pelas diagonais que ligam os cantos opostos do seu quadrilátero e o cruzamento destas linhas define o nó central do *patch*. Este é incidência dos quatro elementos do *patch*.

A cada refinamento de um *patch* corresponde a geração de quatro novos *patches* e, portanto, também quatro novos nós centrais. Estes são definidos, pela intersecção das duas diagonais que ligam os cantos opostos dos quadriláteros.

Nesta técnica, o refinamento da malha não é mais do que o refinamento de um ou vários *patches*, mais concretamente, todos os que tiverem pelo menos um dos seus quatro elementos dentro dos critérios de refinamento, apresentados em 4.1.3.

É importante fazer notar que o nó central de um *patch*, depois de este ser refinado, sofre uma mudança de posição. Esta opção, pode alterar a concentração dos nós em relação à malha inicial e implicar uma alteração na distribuição dos campos característicos das malhas. Concretamente,

pode alterar a área da estrutura que cada elemento define e com isso, alterar a distribuição do campo utilizado como critério de refinamento das malhas. Com efeito, esta opção terá consequências negativas na estimativa produzida e serão tanto mais gravosas quanto mais grosseira for a malha inicial. Contudo, essas consequências têm, por sua vez, um efeito muito reduzido no processo de resolução do problema, pois só são notórias ainda na fase inicial em que a estimativa inicial tem pouco peso na eficiência da solução. Assim, perdendo significado a localização inicial dos nós, optou-se pela simplificação da geometria da malha e do algoritmo de refinamento. As coordenadas dos nós centrais de *patches* refinados são sempre redefinidas para serem a média dos quatro nós de canto que definem o seu quadrilátero, como mostra a Figura 4.2. Esta alteração permite ainda a construção simples dos quatro novos *patches* gerados a partir de um *patch* base refinado. Esses são definidos pelas linhas que unem o anterior nó central, já na sua nova posição, com os quatro pontos no meio das quatro arestas do *patch* base.

A Figura 4.2, permite ainda acrescentar que, sempre que um *patch* é refinado, aquele que era o seu nó central, deixa de o ser e nunca mais naquela malha o voltará a ser, pelo facto de este ser um refinamento hierárquico, como se explica de seguida.

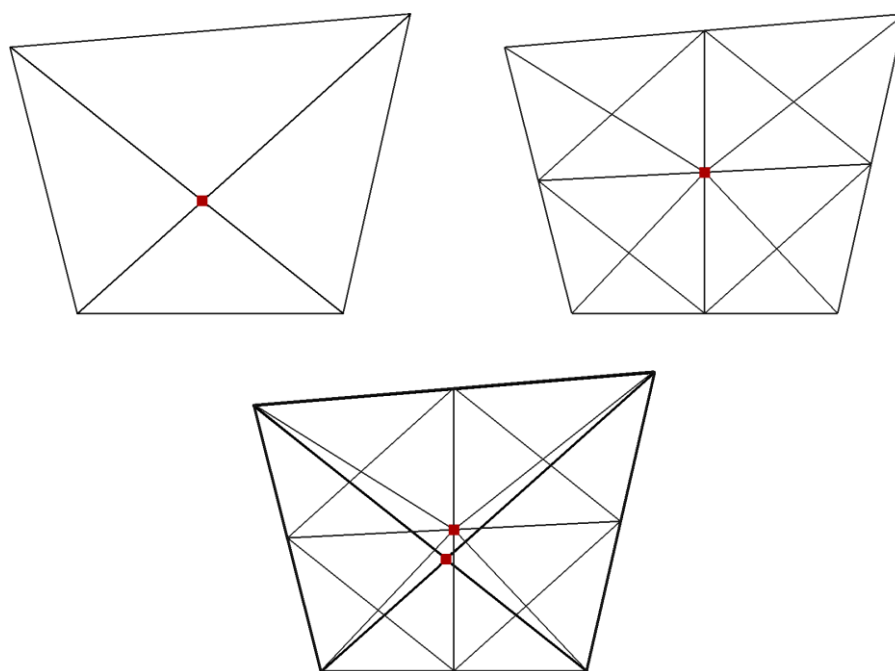


Figura 4.2: Ajuste do nó central.

Refere-se ainda que as condições de apoio iniciais são mantidas durante os refinamentos. Para cada novo nó criado, define-se as condições de apoio que este deve respeitar para que a nova malha se mantenha fiel às condições iniciais do problema. Essas obtêm-se, em cada refinamento, a partir da malha base, sendo que num novo nó são bloqueadas as direcções que também assim estejam, simultaneamente, nos dois nós extremos da aresta em que esse é criado.

4.1.2. Refinamento Hierárquico

Para que as condições de geometria se mantenham, cada elemento nunca poderá achar-se fora de um *patch*, nunca um *patch* poderá ser formado por menos ou mais do que quatro elementos e nunca um quadrilátero o deixa de ser. Para que tal assim se mantenha ao longo dos diversos refinamentos, estes só podem acontecer dentro de cada *patch* e sempre gerando quatro novos *patches*, como pode o leitor ver na Figura 4.3. Fica, assim, assegurado que o *patch* anterior não deixa de formar um quadrilátero e que as restrições de geometria associadas a esta técnica de refinamento se mantêm após o refinamento. De facto, também os novos *patches* podem ser refinados segundo a mesma técnica.

Os *patches* refinados deixam de incluir os seus quatro elementos, pois esses deixam de existir, e passam a incluir quatro *patches*, cada um dos quais com quatro novos elementos. Esses, no entanto, são fruto de uma divisão de cada um dos elementos anteriores. A cada um dos elementos antigos corresponde a geração de quatro novos elementos. A este tipo de refinamento chama-se refinamento hierárquico porque sempre é possível determinar, para cada elemento, o *patch* a que pertence e, por sua vez, o *patch* “mãe” a partir do qual esse foi gerado e, sucessivamente, pode chegar-se até aos *patches* constituidores da malha original. Da mesma forma para os elementos. A hierarquia é, portanto, estabelecida não só pelos *patches*, como também pelos elementos. Na Figura 4.3 estão assinaladas estas hierarquias. A figura mostra três malhas e corresponde a dois refinamentos uniformes de uma estrutura simples inicial com apenas um *patch*, ou seja, um quadrilátero e quatro elementos. Apesar de todos os elementos serem igualmente refinados, assinala-se, a cada nível do refinamento, um dos novos *patches* gerados, colorindo-o, e dentro desse escurece-se o elemento cuja hierarquia se quer salientar. O *patch* e elemento geradores desses estão assinalados circundados a cor.

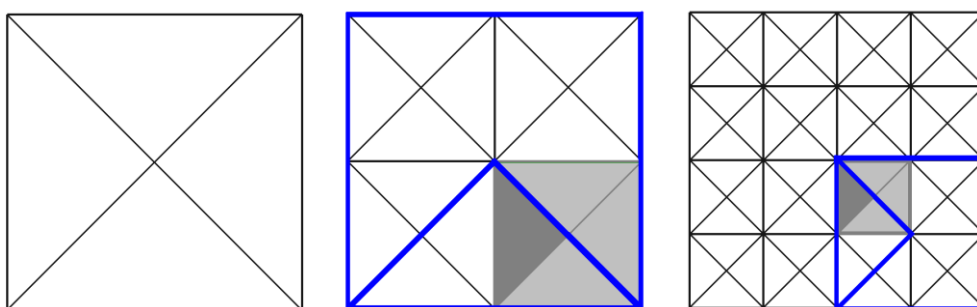


Figura 4.3: Hierarquia de *patches* e elementos.

Salienta-se que ambas as hierarquias são fundamentais. A hierarquia dos *patches* garante a continuidade da geometria necessária das malhas. A hierarquia dos elementos é importante pois permite que a passagem dos campos associados aos elementos seja realizada fielmente, sem a necessidade de qualquer aproximação.

As hierarquias permitem ainda falar de níveis de refinamento. Ao número de degraus da hierarquia que é preciso subir para chegar ao elemento ou *patch* original, a partir de um qualquer elemento, chama-se níveis de refinamento. O máximo nível de refinamento, de entre todos os elementos, é o nível de refinamento da malha.

A cada refinamento de um *patch* corresponde uma redução para metade do h desses elementos. O menor h , de entre todos os elementos, é o h da malha.

4.1.3. Critérios de Refinamento

O critério de refinamento de um elemento, escolhido para a aplicação desenvolvida, foi a dissipação plástica para um determinado carregamento, que apresenta valores entre 0 e 1. O valor de critério é dado como parâmetro de entrada do código de refinamento. Este, é a forma de obter critério de adaptatividade nas malhas, ou seja, com base nos valores de dissipação, discriminando criteriosamente os elementos, pode decidir-se quais refinar, promovendo zonas de maior densidade de elementos finitos.

Apesar de este ser um critério válido, não é certo que seja o melhor para estabelecer o refinamento adaptativo e seria necessário estudar este aspecto com maior rigor. No entanto, este estudo considera-se fora do âmbito deste trabalho e não será abordado. Acrescenta-se que este estudo foi efectuado em [13].

A determinação dos elementos a refinar é feita para cada elemento individualmente. Contudo, nesta técnica de refinamento, a necessidade de refinamento de um elemento implica o refinamento dos quatro elementos pertencentes ao mesmo *patch*, para que se mantenham as restrições geométricas. Ou seja, sempre que dentro de um *patch* pelo menos um elemento cumpra as condições de refinamento, todo o *patch* é refinado, isto é, os quatro elementos são refinados. Desta forma também o número de elementos refinados será sempre um múltiplo de quatro. Assim se assegura a continuidade das condições de geometria dos elementos da malha.

Uma das subrotinas implementadas permite o refinamento das malhas em diferentes níveis, a partir de um valor de critério inicial. Nessa subrotina, o refinamento é feito em tantas fases quantos os níveis desejados e, para cada fase, o critério de refinamento é mais exigente. Na Figura 4.4, pode ver-se um exemplo desta aplicação. A sucessão apresentada resulta de um refinamento de quatro níveis sucessivamente mais exigentes. O primeiro refinamento foi efectuado para *patches* com elementos caracterizados por uma dissipação superior ou igual a zero. No segundo nível, já só os elementos com dissipação superior ou igual a 0.25 sofreram refinamento. No terceiro a exigência subiu para 0.50 e no nível final o critério para refinamento era um mínimo de 0.75 de dissipação.

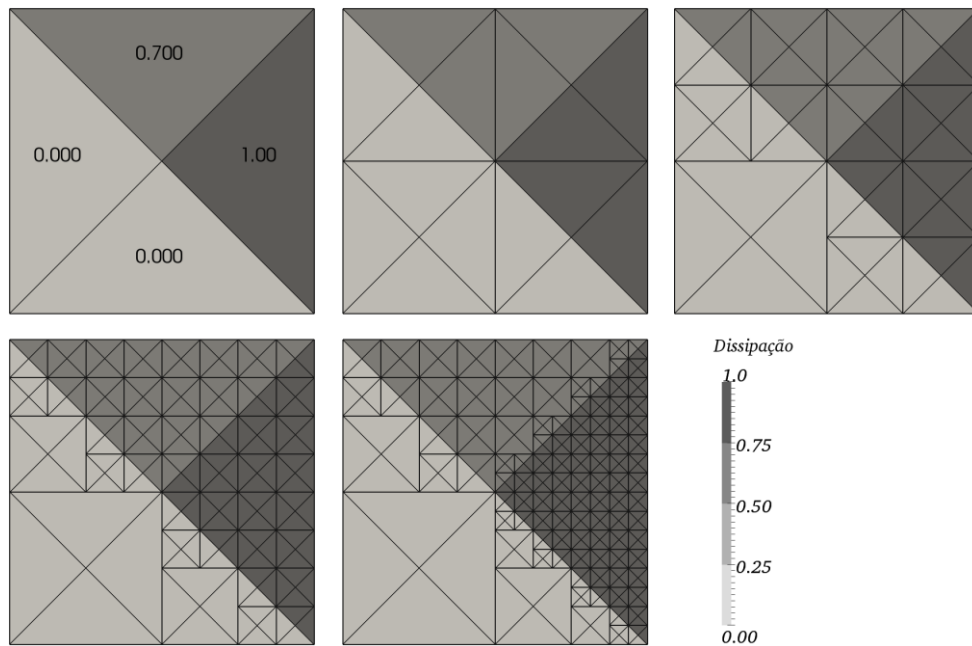


Figura 4.4: Níveis de refinamento.

Esta é a forma de obter adaptatividade de vários níveis apenas com uma chamada do código de refinamento, REMESH. Para estabelecer esta possibilidade tornou-se necessário decidir como iria evoluir este critério ao longo dos níveis de refinamento, uma vez que, apenas o valor de critério inicial era dado como parâmetro de entrada. Assim, definiu-se que a cada nível, i , corresponderia o seguinte critério de refinamento:

$$d_i = d_0 + (L_i - 1) \times \frac{1.0 - d_0}{L} \quad (4.1)$$

Em que:

- d_i critério de refinamento para o nível i
- L_i nível de refinamento i
- d_0 critério de dissipação inicial
- L nível de refinamento final

Esta ferramenta permite, portanto, obter malhas que se adequam, de forma inteligente, aos critérios de refinamento, obtendo-se adaptatividade.

A qualidade da adaptatividade implementada é definida, em primeiro lugar, pela qualidade da aproximação do campo das dissipações usado para escolher os elementos a refinar e, em segundo lugar, e só quando for utilizada essa possibilidade, pela apropriação da equação anterior. A qualidade desta decisão é testada e discutida posteriormente em 5.2.

Na Figura 4.5, mostra-se um outro exemplo desta aplicação. O refinamento torna-se gradualmente mais fino conforme critérios de dissipação resultando num detalhe maior onde o estudo do colapso da estrutura exige maior qualidade e quantidade de dados. O exemplo mostrado é o de um problema geotécnico e será usado como validação desta técnica, no Capítulo 5.

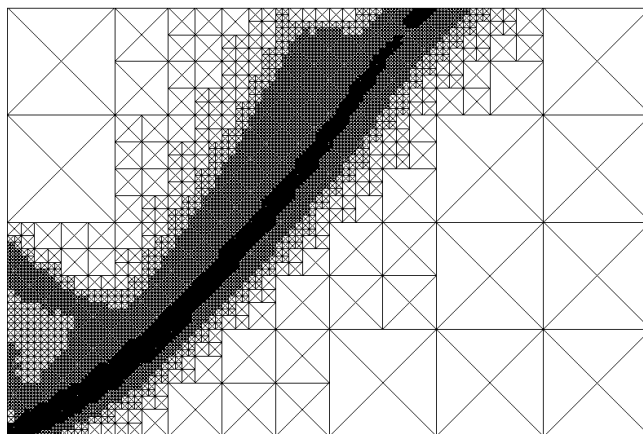


Figura 4.5: Adaptatividade segundo critérios de refinamento.

As Figuras 4.4 e 4.5 mostram a adaptatividade conseguida pela técnica de refinamento implementada e mostram, também, que esta é conseguida com recurso a nós incompatíveis. Estes são um caso particular, chave desta técnica e explicam-se na secção seguinte.

Acrescenta-se que os campos de dissipação da malha base de um refinamento, que permitem decidir as zonas de actuação, são sempre consequência de uma solução do SUBLIM3d2 para essa malha base. Ou seja, o funcionamento do REMESH só atinge o seu potencial máximo quando utilizado dentro desse programa.

4.1.4. Nós Incompatíveis

A implementação da capacidade adaptativa produziu-se através da introdução de nós incompatíveis na malha. A evolução do aparecimento destes nós ao longo de refinamentos adaptativos pode ser observada na Figura 4.6.

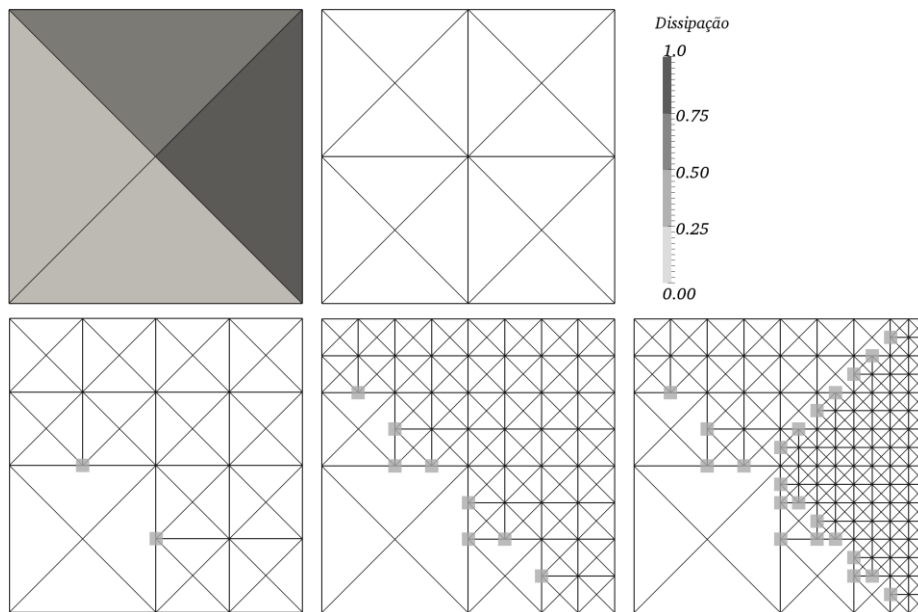


Figura 4.6: Nós Incompatíveis.

Note-se como a sucessão de refinamentos adaptativos corresponderá habitualmente a um aumento do número de nós incompatíveis, não só em toda a malha, como em alguns dos elementos $T3+$, que recebem esses nós. Estes nós incompatíveis não contribuem para o aumento dos Graus De Liberdade (GDL) efectivos da malha porque não podem introduzir libertações nos elementos triangulares de três nós, $T3+$, que os “recebem” nas suas fronteiras. Pelo contrário, têm que sujeitar-se aos deslocamentos definidos pelos três nós dos vértices desses elementos. No entanto, a cada nó incompatível introduzido correspondem vários compatíveis, e se os primeiros não aumentam a quantidade de dados da malha, permitem a criação de vários dos outros que contribuem para a melhoria da aproximação. Esses são, além disso, não mais do que os necessários, devido à possibilidade de implementar os incompatíveis. De facto, se tal não fosse possível ter-se-ia uma adaptatividade de menor precisão. Portanto, os nós incompatíveis não podendo aumentar os GDL efectivos da malha, têm o fim exclusivo de conseguir uma adaptatividade simples e de grande qualidade.

A introdução destes nós nas malhas obriga necessariamente à existência de um tratamento diferente daquele que é dado aos outros, pelo que tornou-se necessário assinalá-los sempre que surgiam e desmarcá-los sempre que o deixavam de ser. Este último caso acontece, sempre que se restabelecer compatibilidade através do refinamento do elemento em relação ao qual são incompatíveis, chamado $T3+$. A Figura 4.7 exemplifica este caso. Os dois nós incompatíveis assinalados deixam de o ser após o refinamento dos elementos a que pertenciam enquanto incompatíveis.

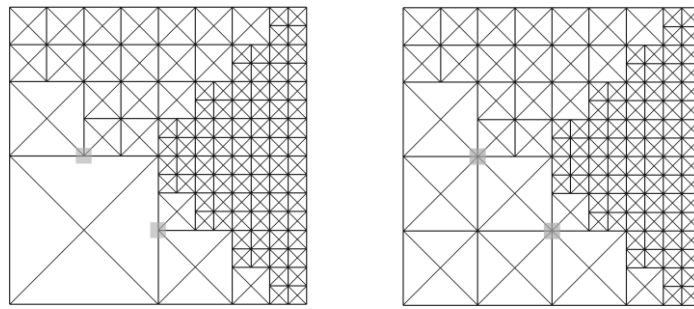


Figura 4.7: Restabelecimento da compatibilidade de dois nós devido ao refinamento dos T3+.

Apesar de estes nós terem um tratamento diferente, a capacidade de adaptação do SUBLIM3d2, permite que não tragam qualquer penalização à eficiência desse programa.

No código REMESH era necessário garantir que a passagem dos campos nodais era feita correctamente também para estes nós e, especialmente, garantir que estes não permitissem graus de liberdade efectivos que, de facto, não podiam definir correctamente. Para tal, garantiu-se sempre a sua dependência dos nós compatíveis mais próximos e que, só esses definem os graus de liberdade efectivos da malha. Os incompatíveis, seus dependentes, devem respeitar esses graus de liberdade efectivos sem os aumentar ou reduzir. Esta garantia é testada na secção 5.2.1.

4.2. Estimativa Inicial da Solução

Esta secção explica a implementação da segunda parte do código desenvolvida: a determinação de uma estimativa inicial da solução final, passada ao programa de elementos finitos juntamente com o refinamento de malha pretendido, com o intuito melhorar o desempenho desse programa na procura da solução final do problema.

Como explicado em 3.3.2, a estimativa inicial mais não é do que a passagem da solução do SUBLIM3d2 referente à malha base, para a malha refinada a partir dessa. De facto, essa solução é já mais próxima da solução para a nova malha do que a inexistência de qualquer pista. O SUBLIM3d2 poderá, então, centrar-se especialmente nas zonas mais refinadas, considerando as restantes com uma solução já adequada.

Os campos que caracterizam as malhas das soluções de SUBLIM3d2 são: as velocidades globais dos nós, as velocidades locais dos nós e as forças nodais. Os campos global e local das velocidades coincidem na solução do SUBLIM3d2. Trata-se, agora, cada um destes campos, descrevendo como é feita a passagem de cada um, desde as malhas base para as refinadas. Acrescenta-se, ainda, o campo da dissipação plástica dos elementos que é utilizado como critério de refinamento e que também é passado entre malhas refinadas.

4.2.1. Campo das dissipações

O campo das dissipações é definido constante para cada elemento. A passagem deste campo é feita segundo a hierarquia dos elementos. Ou seja, os quatro elementos criados por cada elemento refinado recebem o mesmo valor de dissipação que o seu elemento base. Assim, o campo das dissipações deve manter-se após qualquer refinamento de REMESH. A Figura 4.8 exemplifica, em dois refinamentos diferentes a partir da mesma malha base, como devem manter-se esses campos. A malha base é a primeira da figura.

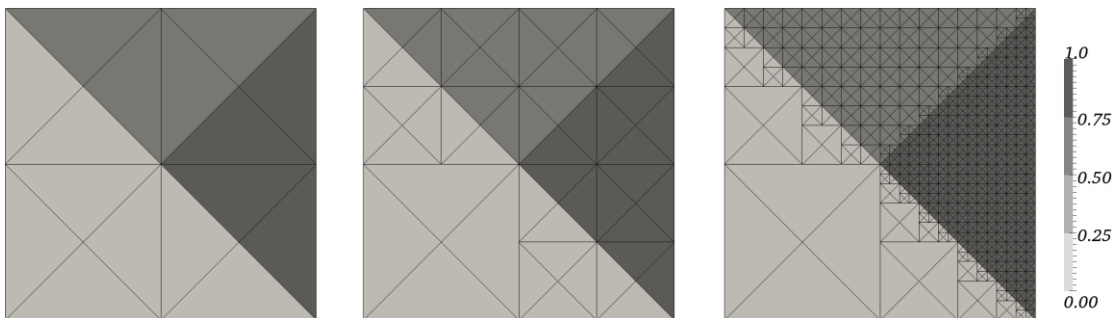


Figura 4.8: Passagem correcta do campo das dissipações.

4.2.2. Campo de velocidades

O campo das velocidades é definido para cada elemento, linearmente, a partir das velocidades, (\dot{u}_x, \dot{u}_y) , dos três nós dos vértices do elemento, nas duas direcções, x e y , do seguinte modo e tal como em [19], em que i, j, m representam cada um dos três nós:

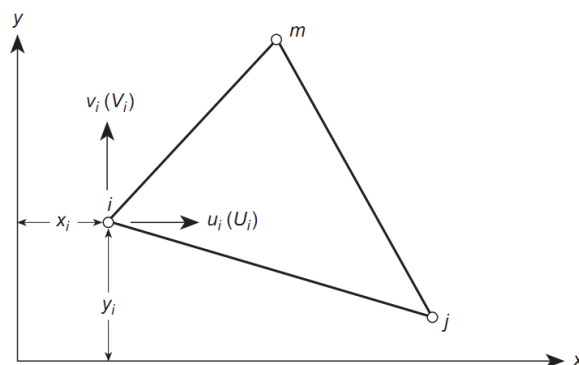


Figura 4.9: Elemento T3, adaptado de [19].

As velocidades (\dot{u}_x, \dot{u}_y) , dentro do elemento podem ser definidas para cada ponto de coordenadas (x, y) , por dois polinómios lineares:

$$\dot{u}_x = a_1 + a_2x + a_3y \quad (4.2)$$

$$\dot{u}_y = a_4 + a_5x + a_6y \quad (4.3)$$

Conhecendo os 6 valores de velocidade associados aos três nós vértices do elemento e as suas coordenadas, os valores a_μ ($\mu = 1, 2, \dots, 6$) são facilmente determinados num conjunto de três equações, obtendo-se genericamente:

$$\dot{u}_x^{(i)} = \alpha_1 + \alpha_2x_i + \alpha_3y_i \quad (4.4)$$

$$\dot{u}_x^{(j)} = \alpha_1 + \alpha_2x_j + \alpha_3y_j \quad (4.5)$$

$$\dot{u}_x^{(m)} = \alpha_1 + \alpha_2x_m + \alpha_3y_m \quad (4.6)$$

Em que $\dot{u}_x^{(k)}$ e $\dot{u}_y^{(k)}$ são as velocidades nodais, segundo x e y , em qualquer nó k .

Definindo a função de forma associada a um nó k , como:

$$L^{(k)} = \frac{1}{2\Delta} (\alpha_k + \beta_k \cdot x_k + \gamma_k \cdot y_k) \quad (4.7)$$

Faz-se notar como característica destas funções de forma que tomam o valor de 1 nos nós a que dizem respeito e zero nos restantes.

Na equação anterior, Δ é a área do elemento e

$$\alpha_i = x_j y_m - x_m y_j \quad (4.8)$$

$$\beta_i = y_j - y_m \quad (4.9)$$

$$\gamma_i = x_m - x_j \quad (4.10)$$

Os restantes α , β e γ são obtidos permutando os índices das expressões 4.8, 4.9 e 4.10.

Obtém-se o campo das velocidades para cada elemento:

$$\dot{u}_x = \sum_{k=\{i,j,m\}} L^{(k)} \cdot \dot{u}_x^{(k)} \quad (4.11)$$

$$\dot{u}_y = \sum_{k=\{i,j,m\}} L^{(k)} \cdot \dot{u}_y^{(k)} \quad (4.12)$$

A partir das duas expressões anteriores, 4.11 e 4.12, determina-se o campo das velocidades para qualquer ponto dentro do domínio definido por esse elemento. Dessa forma, a partir desse campo, determina-se a velocidade dos novos nós, resultantes de um refinamento.

Como resultado de um refinamento, espera-se que a passagem do campo de velocidades da malha base para a malha gerada não o altere, ou seja, após o desempenho de REMESH o campo inicial não deve sofrer alterações, como exemplifica a Figura 4.10. Esta mostra dois resultados de diferentes refinamentos da mesma malha base, a primeira.

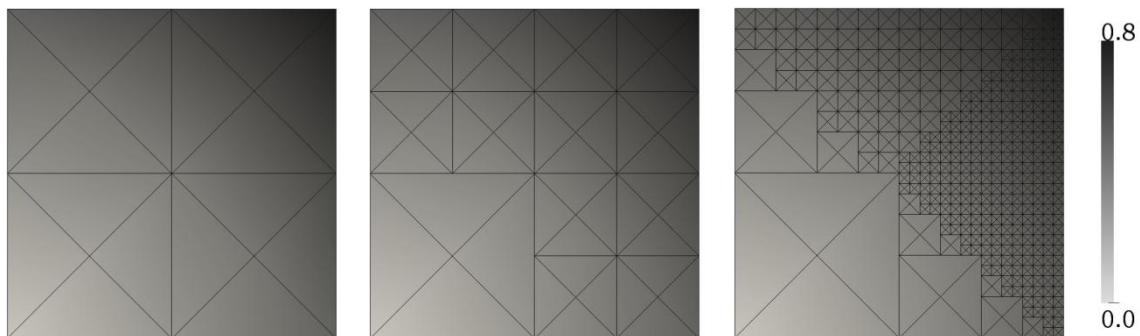


Figura 4.10: Passagem correcta do campo das velocidades globais.

A passagem deste campo é sempre feita a partir dos nós dos vértices, pelo que, é igual para elementos T3 e T3+.

4.2.3. Forças Nodais

Os multiplicadores de Lagrange, que compatibilizam os dois campos de velocidade, global e local, e de que se falou na secção 2.3 são, neste trabalho, tratados por Forças Nodais.

A passagem dos valores das forças nodais, F , é efectuada com o recurso a forças de massa, b . Em cada elemento a ser refinado, e para cada direcção, x , y , as forças nodais são transformadas em forças de massa. Estas encontram-se distribuídas no domínio dos elementos e assume-se que a distribuição é linear. Assim, podem ser passados aos novos elementos criados, tal como é passado o campo das velocidades, explicado na secção 4.2.2. Este campo de b , pode, por sua vez, ser novamente transformado em forças nodais para os novos elementos. As Figuras 4.11 e 4.12 esquematizam este processo. Os elementos são identificados por B no caso dos elementos base e por R no caso dos elementos refinados, novos.

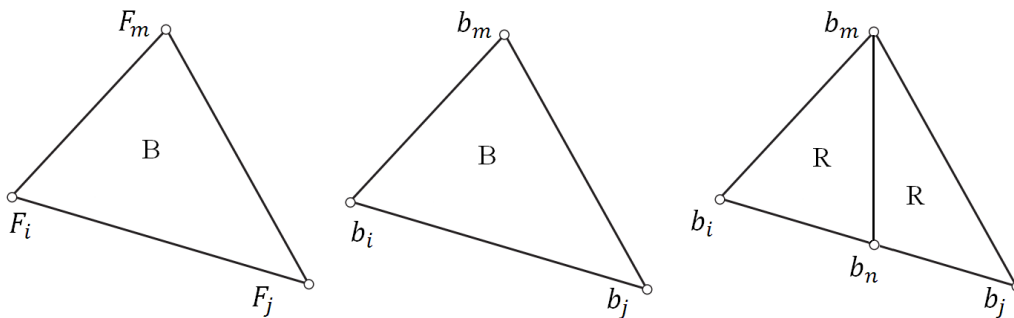


Figura 4.11: Passagem do campo das forças nodais (I).

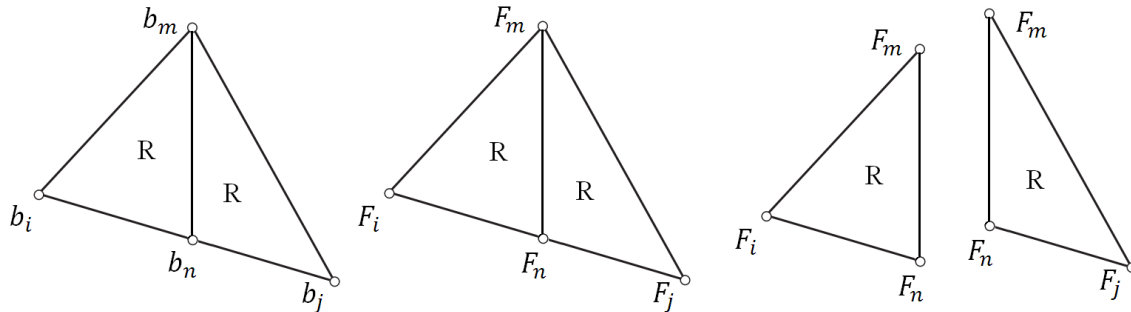


Figura 4.12: Passagem do campo das forças nodais (II).

Atendendo ao processo escolhido tem-se para cada direcção x , y :

$$F_k = \int N_k \cdot \left(\sum_q b_q \cdot N_q \right) d\Delta \quad (4.13)$$

Com $k = q = i, j, m$;

Como os novos nós coincidem sempre com o centro geométrico das arestas em que são introduzidos.

$$N_i^{ij} = N_i^{im} = \frac{1}{2}; \quad N_i^{jm} = 0 \quad (4.14)$$

E, portanto,

$$F_i = \Delta \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b_i + b_j}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b_i + b_m}{2} \right) \quad (4.15)$$

$$F_j = \Delta \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b_i + b_j}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b_j + b_m}{2} \right) \quad (4.16)$$

$$F_m = \Delta \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b_m + b_j}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b_i + b_m}{2} \right) \quad (4.17)$$

Chega-se, então, ao seguinte sistema que permite a transformação das forças nodais de um elemento, numa direcção, em forças de massa e vice-versa. Δ representa a área do elemento.

$$F_i = \Delta \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (2b_i + b_j + b_m) \quad (4.18)$$

$$F_j = \Delta \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (b_i + 2b_j + b_m) \quad (4.19)$$

$$F_m = \Delta \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (b_i + b_j + 2b_m) \quad (4.20)$$

Assim sendo, o primeiro passo, transformar as forças nodais em equivalentes b , é executado apenas uma vez para cada elemento base refinado e pode ser obtido por:

$$b_i = \frac{3}{\Delta_B} (3F_i - F_j - F_m) \quad (4.21)$$

$$b_j = \frac{3}{\Delta_B} (3F_j - F_i - F_m) \quad (4.22)$$

$$b_m = \frac{3}{\Delta_B} (3F_m - F_i - F_j) \quad (4.23)$$

O segundo passo, executado para cada novo elemento refinado, pode ser obtido pelo seguinte sistema para cada direcção de um dos novos elementos:

$$F_i = \Delta_R \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (2b_i + b_m + b_n) \quad (4.24)$$

$$F_m = \Delta_R \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (b_i + 2b_m + b_n) \quad (4.25)$$

$$F_n = \Delta_R \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (b_i + b_m + 2b_n) \quad (4.26)$$

As expressões anteriores permitem concluir que, em relação ao campo das forças nodais, espera-se que este sofra um decréscimo de valor nos elementos refinados, como mostra o exemplo da Figura 4.13. Assim se garante uma válida passagem do campo destas forças.

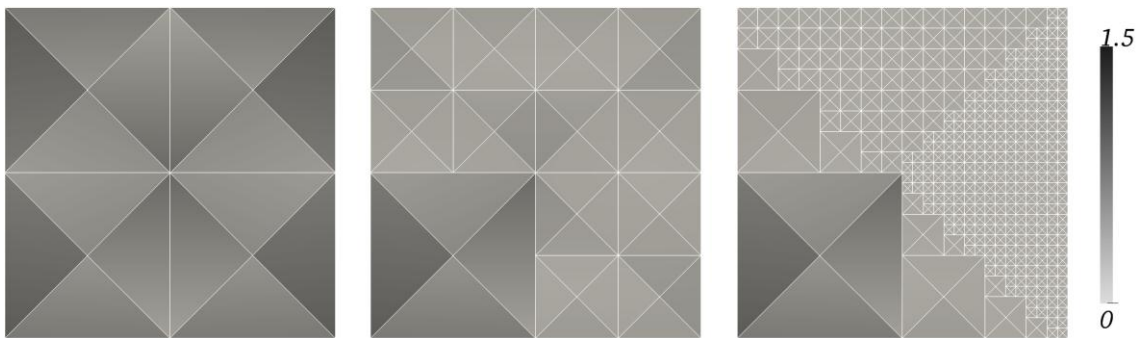


Figura 4.13: Passagem correcta do campo das Forças nodais.

4.3. Procedimento de Refinamento

Nesta secção descreve-se o procedimento de REMESH, que faz o refinamento dos *patches*, um por um.

1. Leitura dos parâmetros de entrada (ID da Malha e ID do elemento a refinar).
2. Determinação do nó central do *patch* a que pertence o elemento. [permite saber os quatro elementos implicados no refinamento]. Determinação das novas coordenadas do nó central. [Este deixa de ser um nó central no final do refinamento]
3. Percorrer as 4 células do *patch*, para:
 - i. Definir os novos nós da malha (coordenadas e GDL).
 - ii. Verificar se os novos nós já existem na malha, noutra *patch*.
 - iii. Definir os 16 novos elementos (incidências).
 - iv. Determinar o campo de velocidades e aplicá-lo aos novos nó.
 - v. Determinar o campo das forças nodais e aplicá-lo aos novos nós.
4. Transferência dos valores de Dissipação e Material dos elementos antigos do *patch* para os novos.
5. Desactivar os 4 elementos que deixam de existir.
6. Para cada nó afectado com o refinamento, correcção das listas: “Elementos a que pertence” e “Nós próximos”.
 - i. Acrescentar os novos elementos a que passam a pertencer os nós.
 - ii. Apagar os elementos a que deixam de pertencer.
 - iii. Acrescentar os nós que passam a ser próximos.
 - iv. Apagar os nós que deixam de ser próximos.
7. Correcção dos GDL dos nós afectados com o refinamento, ou seja, nós incompatíveis e, portanto, dependentes, que passam a ser compatíveis.
8. Actualizar os dados na estrutura de dados.

A cada refinamento de malha corresponde a repetição deste procedimento tantas vezes quantos os *patches* que devem ser refinados.

4.4. Modo Manual

O código desenvolvido conta ainda com um modo de utilização não automático, com uma plataforma de utilização manual. Foi neste modo que se começou a desenvolver esta aplicação e este acabou por ser conservado. A sua utilidade está na possibilidade de observar e controlar o processo de refinamento de forma mais precisa. Tem, além disso, algumas funcionalidades extra disponíveis, que permitem o tratamento de malhas e uso de ficheiros VTK (Visualization ToolKit) [10].

4.5. Interacção com o SUBLIM3d2

Explica-se agora como interagem os dois programas, na determinação automática das soluções. À interface que automatiza esta interacção entre os programas SUBLIM3d2 e REMESH chamou-se CREMESH.

4.5.1. CREMESH

A Figura 4.14 mostra esquematicamente este processo utilizado para obter soluções, usando SUBLIM3d2 e REMESH.

O processo de solução começa sempre com uma malha de partida, preferencialmente grosseira. Para essa malha determina-se uma solução com o SUBLIM3d2. Aqui entra em acção CREMESH. Com base nessa solução, começa um determinado número de *etapas de solução*. Em cada etapa, o REMESH refina a malha e prepara uma estimativa inicial que servirá ao SUBLIM3d2 como ponto de partida para nova solução. Com esta, o SUBLIM3d2 chega a uma nova solução. Se esta solução não for a solução final, começa uma nova etapa de solução. REMESH lê novamente a solução anterior de SUBLIM3d2 e com base nessa, refina, segundo os critérios determinados e elabora uma nova estimativa. A nova malha e estimativa associada, são mais uma vez passadas ao SUBLIM3d2 para que este resolva novamente o problema. Assim acontece sucessivamente enquanto não se esgotarem os critérios de termo das etapas.

O único critério de termo do processo estabelecido foi o número de etapas desejadas. Este número corresponde ao número de refinamentos que acontecerão e igualmente ao número de soluções solicitadas ao SUBLIM3d2 para as malhas refinadas em REMESH. A solução da última etapa é a solução final do problema.

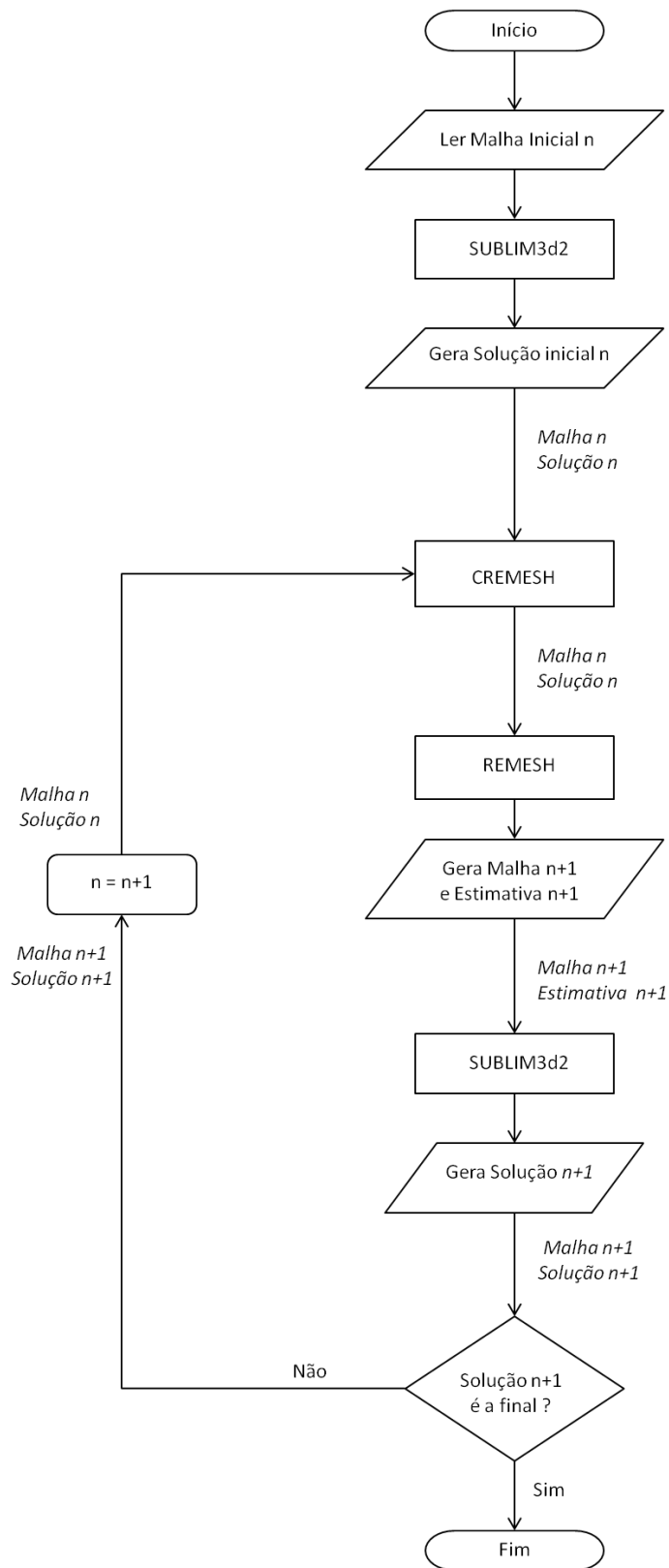


Figura 4.14: Esquema de funcionamento de CREMESH, na determinação automática das soluções usando SUBLIM3d2 e REMESH.

A chamada da interface CREMESH é efectuada com o comando:

$$\text{cremesh } n1 \ n2 \ -dx.x \ -ly \ nome$$

em que:

nome é o nome do ficheiro a ser tratado pela interface CREMESH.

n1 é o número da versão base do ficheiro *nome*. Esta deve existir duas vezes em formatos diferentes. A primeira com a geometria da malha e a segunda com os campos associados à malha (um ficheiro em formato VTK), ou seja, a solução do SUBLIM3d2 para essa malha.

n2 é o número da última versão da malha que deve ser refinada no REMESH e depois resolvida no SUBLIM3d2. Essa solução é a final, a apresentar pela interface, para a estrutura em *nome*. *n2-n1+1* é o número de etapas de solução e, portanto, o número de intervenções tanto de REMESH como do SUBLIM3d2 durante a execução do CREMESH.

-dx.x é o modo de definição do critério de refinamento (*x.x*) para o primeiro nível em cada intervenção de REMESH, em que *x.x* é um real.

-ly é o modo de indicar quantos níveis (*y*) de refinamento serão efectuados em cada intervenção do REMESH. *y* é um inteiro.

Como exemplo, suponha-se que se pretende obter a solução para uma estrutura cuja malha inicial está definida no ficheiro *teste~0000*. Os dados dos campos de velocidades, globais e locais, forças nodais e dissipação, relativos a essa malha, são fruto de uma solução do SUBLIM3d2 para essa malha e devem estar num ficheiro *teste~0000.vtk*. Esta solução é obtida sem estimativa inicial.

A seguinte chamada de CREMESH:

$$\text{cremesh } 0 \ 2 \ -d0.1 \ -l1 \ teste$$

Tem os seguintes efeitos:

1. Início da primeira etapa. CREMESH chama REMESH para refinar a malha em *teste~0000*. Os elementos dessa malha com uma dissipação superior ou igual a *0.1* são refinados *1* vez (segundo os parâmetros definidos em *-d0.1* e *-l1*). Os valores dos campos são transferidos da malha base para a malha refinada. A nova malha é guardada num novo ficheiro *teste~0001* e os valores dos campos, obtidos a partir de *teste~0000.vtk*, são guardados em *teste~0001.vtk*.

2. CREMESH chama novamente SUBLIM3d2 para determinar a solução da nova malha em *teste~0001*. A geometria da malha é lida em *teste~0001* e a estimativa inicial em *teste~0001.vtk*. A solução da nova malha, com a carga de colapso do sistema, é guardada no ficheiro *teste~0001.sol*. O ficheiro *teste~0001*, com a geometria da malha, permanece inalterado. O ficheiro *teste~0001.vtk* é alterado, ficando com os dados dos campos de valores correspondentes à nova solução. Fim da primeira etapa.
3. Início da segunda etapa. Novamente CREMESH chama REMESH para refinar a malha em *teste~0001*, tal como no ponto 1, com o mesmo processo e critérios de refinamento. REMESH produz uma nova malha e respectiva estimativa inicial que ficam nos ficheiros *teste~0002* e *teste~0002.vtk*, respectivamente.
4. CREMESH chama novamente SUBLIM3d2 para resolver a malha *teste~0002*, da mesma forma que em 2. É produzido o ficheiro de solução *teste~0002.sol* e alterado o ficheiros de dados dos campos, *teste~0002.vtk*.
5. Início da terceira e última etapa. Repete-se a chamada de REMESH que produz uma nova malha *teste~0003* e estimativa inicial *teste~0003.vtk*.
6. Finalmente, o SUBLIM3d2 é chamado para determinar a solução final, através da malha *teste~0003*, com a estimativa inicial *teste~0003.vtk*. Essa solução fica em *teste~0003.sol*. Fim da terceira e última etapa de solução.

A cada intervenção do SUBLIM3d2 chega-se a uma solução do problema, com um erro máximo definido dentro do ficheiro de base. A essa solução corresponde um campo de valores associado à malha apresentada. Espera-se, portanto, em cada intervenção do SUBLIM3d2 que os campos de valores se alterem e a malha se mantenha. Ao contrário, espera-se em cada intervenção do REMESH o refinamento da malha segundo os critérios de refinamento e a continuidade dos campo de valores, segundo as regras explicadas em 4.2.

A cada etapa do CREMESH, são escritos novos ficheiros VTK. Alternativamente, a programação pode ser feita no sentido de ser escrito um novo ficheiro VTK a cada interacção entre o REMESH e o SUBLIM3d2.

Os ficheiros VTK podem ser lidos através do programa ParaView (v.3.10.0), [8]. O ParaView, Parallel Visualization Application, é um programa “open-source”, para visualização e análise de conjuntos de dados científicos. O formato de ficheiros VTK em simbiose com ParaView foram largamente utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho porque juntos oferecem um esquema consistente de representação de dados. As imagens apresentadas neste trabalho relativas a malhas, são produzidas no ParaView.

Salienta-se, também, que a capacidade para leitura de formatos VTK por parte do SUBLIM3d2 permite, ainda, que alguns dados sejam comunicados entre o REMESH e o SUBLIM3d2 através deste formato.

Capítulo 5.

Validação

Neste capítulo expõe-se a resolução de um problema de engenharia civil com o objectivo de validar a técnica de refinamento desenvolvida e apresentada detalhadamente no capítulo anterior. Exploram-se as suas capacidades e limites, através da resolução de um problema em interacção com o programa de elementos finitos SUBLIM3d2. Além da validação da técnica faz-se ainda um estudo da eficiência do processo. O capítulo começa por apresentar o problema escolhido para validar a técnica, seguindo-se depois os vários testes realizados e a análise dos resultados.

5.1. Problema

O problema de validação escolhido é o da determinação da carga de colapso de um maciço em talude vertical com altura H , em critério de Tresca, sujeito exclusivamente à acção da gravidade, em estado plano de deformação. Este é um problema clássico, estudado por vários autores, como Pastor em [15] e outros, [12], [13].

Decidiu-se estabelecer, de modo heurístico, o valor do parâmetro que avalia a convergência da solução, o erro máximo, em 1×10^{-4} . Na Figura 5.1 (a) representa-se a estrutura do problema e a malha inicial na Figura 5.1 (b).

Apesar de este ser um problema em que a solução exacta é ainda desconhecida, tem actualmente as fronteiras da solução numérica bastante definidas. De facto, em 2000, Pastor[15], definiu novas fronteiras para a altura limite do talude:

$$3.7603 \frac{c}{\gamma} \leq H \leq 3.7859 \frac{c}{\gamma}$$

Em que c é a coesão do solo e γ o peso por unidade de volume do solo.

Posteriormente estes valores foram superados e, actualmente, os limites estão fixados, [9] em:

$$3.7752 \frac{c}{\gamma} \leq H \leq 3.7776 \frac{c}{\gamma}$$

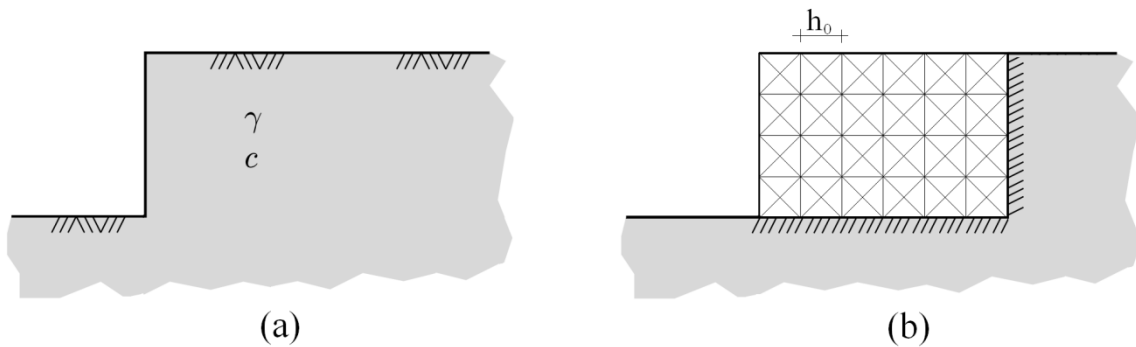


Figura 5.1: (a) Talude vertical, solo em condições não drenadas; (b) Malha inicial e condições de apoio. Retirado e adaptado de [7].

Durante este capítulo os resultados serão apresentados, não para H , mas para $H\gamma/c$. A estes valores chama-se *parâmetro de carga de colapso* e representa-se λ . Assim, os valores definidos em [9] são:

$$3.7752 \leq \lambda \leq 3.7776$$

Uma vez que a formulação de SUBLIM3d2 é baseada no teorema cinemático da análise limite, determina limites superiores estritos de cargas de colapso, pelo que, os valores obtidos nos testes devem tender para o limite superior estabelecido por Pastor, 3.7776.

A aplicação do SUBLIM3d2 sobre a malha inicial, Figura 5.1 (b), apresentada gera a solução inicial do problema, base para todos os testes aos códigos REMESH e CREMESH que se seguirão. Esta solução é, naturalmente, obtida sem estimativa inicial uma vez que não há

solução prévia a esta. A solução obtida tem os seus resultados reflectidos nas figuras 5.2, 5.3 e 5.4.

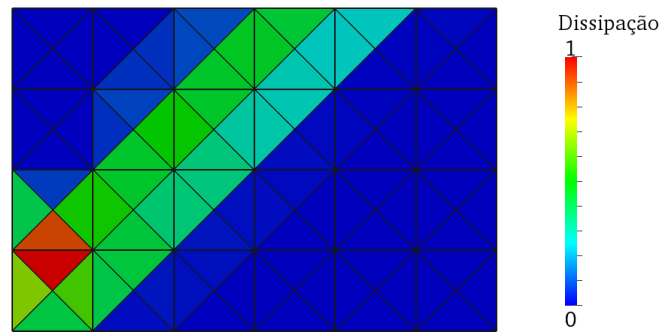


Figura 5.2: Solução inicial (Campo: Dissipação)

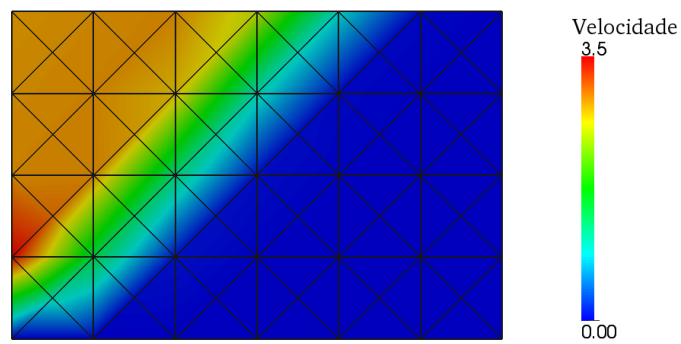


Figura 5.3: Solução Inicial (Campo: Velocidade)

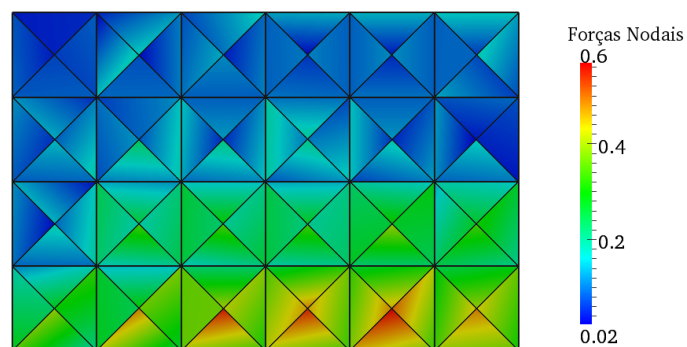


Figura 5.4: Solução Inicial (Campo: Forças Nodais)

5.2. Testes e Resultados

Antes de passar à apresentação dos testes, refere-se que estes foram realizados num processador Intel® Core™ 2 Duo CPU T7250 @ 2.00 GHz, numa máquina virtual Ubuntu 10.04 com 1024 MB de RAM, a correr sobre um sistema operativo Windows XP.

Os testes realizados, cujos resultados agora se apresentam, pretendem, primeiramente, validar a técnica de refinamento desenvolvida, REMESH, confirmando que esse código garante o correcto uso dos nós incompatíveis e a correcta passagem dos campos de valores que acompanham as malhas. Ainda em relação a REMESH, verifica-se a eficiência do código. Parte-se, depois, para a avaliação da interacção REMESH-SUBLIM3d2, automatizada por CREMESH: avalia-se a convergência dos resultados de diferentes métodos possíveis em CREMESH. Dessa forma pretende-se garantir a robustez do código, assegurando a convergência da solução para a grande maioria das utilizações possíveis. De seguida exploram-se as vantagens das características do refinamento, separadamente e em conjunto. Paralelamente, estuda-se a influência da ferramenta na eficiência do processo de solução. Para isso, as soluções obtidas por CREMESH são comparadas a soluções obtidas sem a sua utilização. A prova final aos ganhos obtidos com REMESH é efectuada comparando os resultados obtidos com a formulação do SUBLIM3d2, em que a matriz do sistema governativo é diagonal, [18], e usando as ferramentas de REMESH, com os resultados de variante da formulação de SUBLIM3d2, com a matriz do sistema governativo simétrica e esparsa.

Os diversos métodos utilizados na obtenção das soluções são determinados pela utilização ou pela não utilização das diversas ferramentas disponíveis. Assim, os diferentes métodos são identificados por uma composição de caracteres, a partir dos seguintes:

ME – Solução obtida por uma variante de SUBLIM3d2 em que se provoca uma formulação em que a matriz do sistema governativo é simétrica e esparsa. Neste método as malhas são regulares pois não há adaptatividade.

MD – Solução obtida pelo SUBLIM3d2, com a sua formulação, em que a matriz do sistema governativo é diagonal.

MD+R - Soluções obtidas através da formulação com matriz do sistema governativo diagonal, com utilização de REMESH. Esta é a formulação que corresponde a SUBLIM3d2, detalhada em [18]. Neste método as malhas são não regulares porque o seu refinamento é adaptativo. As soluções beneficiam de uma estimativa inicial.

d – Critério inicial de refinamento (em valores de Dissipação) a cada chamada de REMESH.

Os testes realizados apresentam-se nas secções seguintes do texto e são listados de seguida:

1. Teste – Validar o uso de nós incompatíveis. [secção 5.2.1, página 50]

Objectivo: verificar que os nós incompatíveis não introduzem GDL efectivos na malha.

2. Teste – Validar a passagem dos campos de dados entre malhas. [secção 5.2.2, página 51]

Objectivo: Verificar que REMESH faz a passagem dos campos de dados da forma que se pretende, descrita em 4.2.

3. Teste – Verificar a eficiência de REMESH. [secção 5.2.3, página 55]

Objectivo: Verificar a eficiência de REMESH.

4. Teste – Validar as soluções do CREMESH. [secção 5.2.4, página 57]

Objectivo: Verificar a validade das soluções obtidas por SUBLIM3d2 a partir da interacção com REMESH.

5. Teste – Verificar o benefício de REMESH para SUBLIM3d2. [secção 5.2.5, página 61]

Objectivo: Confirmar que as ferramentas produzidas em REMESH (adaptatividade e estimativa inicial) são um benefício para a eficiência de SUBLIM3d2.

6. Teste – Validar os refinamentos simultâneos. [secção 5.2.6, página 71]

Objectivo: Verificar a validade e consequências para a solução da utilização de refinamentos simultâneos.

5.2.1. Teste – Validar o uso de nós incompatíveis

Objectivo: verificar que os nós incompatíveis não introduzem GDL efectivos na malha.

Este teste consiste em verificar, após o refinamento adaptativo de uma malha e passagem do campo das velocidades, que os nós incompatíveis respeitam os GDL dos nós compatíveis mais próximos, ou seja, que a sua existência não introduz GDL efectivos nos elementos T3+ que os recebem nas suas fronteiras.

A Figura 5.5 mostra a aplicação do campo das velocidades à malha refinada adaptativamente a partir da malha original. Esta figura permite observar como os nós incompatíveis (assinalados a cinzento claro) se mantêm fiéis às restrições dos elementos T3+ a que pertencem (assinalados a cinzento escuro), tornando o código válido a esse respeito. Repare o leitor que apenas alguns nós incompatíveis e respectivos elementos são assinalados, pois são os que permitem observar o que se pretende. Assim, pode confirmar-se que os nós incompatíveis não introduzem GDL efectivos na malha da estrutura.

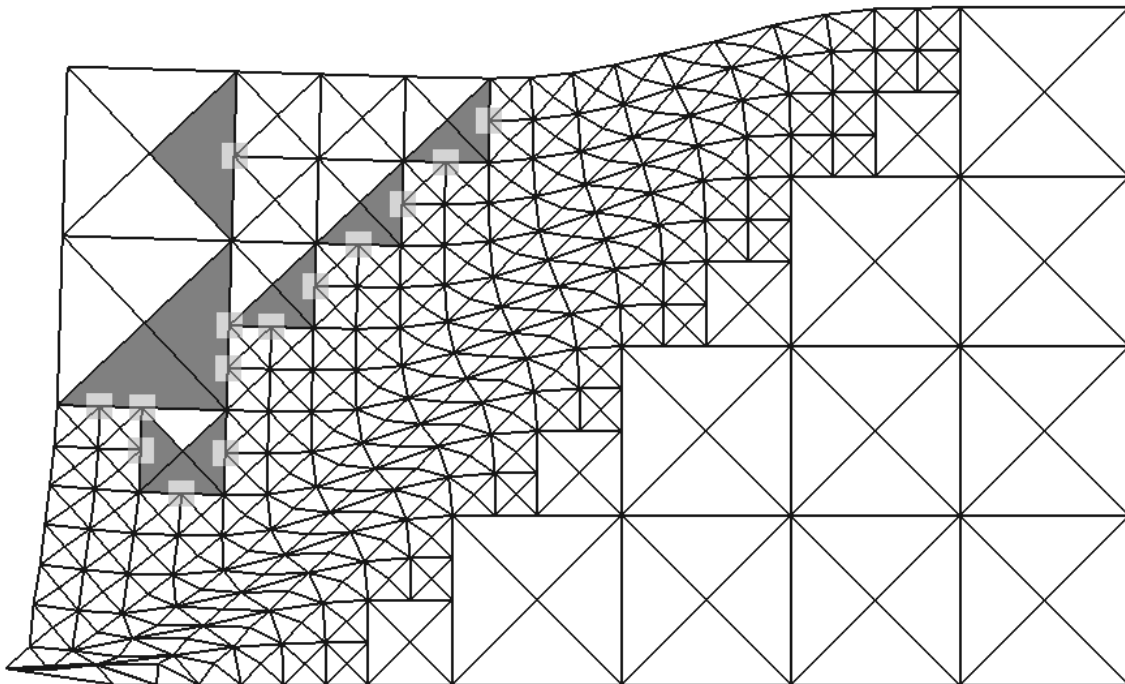


Figura 5.5: Nós incompatíveis não introduzem GDL efectivos, e são dependentes dos GDL efectivos dos elementos T3+.

5.2.2. Teste – Validar a passagem dos campos de dados entre malhas

Objectivo: Verificar que REMESH faz a passagem dos campos de dados da forma que se pretende, descrita em 4.2.

A validação pretendida com este teste consegue-se verificando a passagem de cada campo, de uma malha base para uma criada a partir dessa. Para cada campo fez-se esse teste para dois refinamentos diferentes. Para ser possível a validação, o campo das dissipações e o das velocidades deve manter-se a cada refinamento. O campo das forças nodais deve diminuir, mas apenas nas zonas refinadas.

Apresenta-se como exemplo de demonstração, a passagem dos campos de dados associados à malha inicial ao longo de duas interacções CREMESH, ou seja duas execuções do código REMESH, intercaladas por uma nova solução do SUBLIM3d2. As malhas resultantes dos refinamentos são mostradas na Figura 5.6. À malha 1 estão associados os campos da solução inicial, apresentados em 5.1. A partir desses dados, é executado o REMESH com ordens para efectuar 1 nível de refinamento para elementos com dissipação superior a 0.005. Após este refinamento efectua-se o primeiro teste à passagem dos campos por parte do REMESH. De seguida, a nova malha, 2, é resolvida pelo SUBLIM3d2. Os novos dados associados à malha 2 permitem nova execução REMESH com os mesmos parâmetros, e a passagem de campos deste segundo refinamento põe, novamente, a passagem de campos do REMESH à prova.

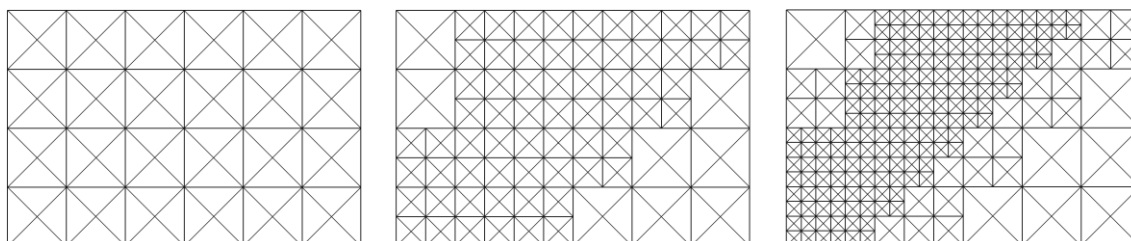


Figura 5.6: Malhas 1, 2 e 3. Dois refinamentos adaptativos executados por REMESH.

Apresentam-se os resultados obtidos nas seguintes secções, para cada campo: Dissipação, Velocidade e Forças nodais.

A. DISSIPACÃO

Este é o campo de critério para execução do refinamento e deve manter-se depois de cada execução do REMESH. Os elementos que não sofrem refinamento não devem mudar o seu valor de dissipação e os elementos refinados devem passar o mesmo valor de dissipação para os seus elementos “filhos”. As Figuras 5.7 e 5.8 mostram como o campo das dissipações se manteve em relação ao campo da malha base em cada uma das vezes que o REMESH foi executado.

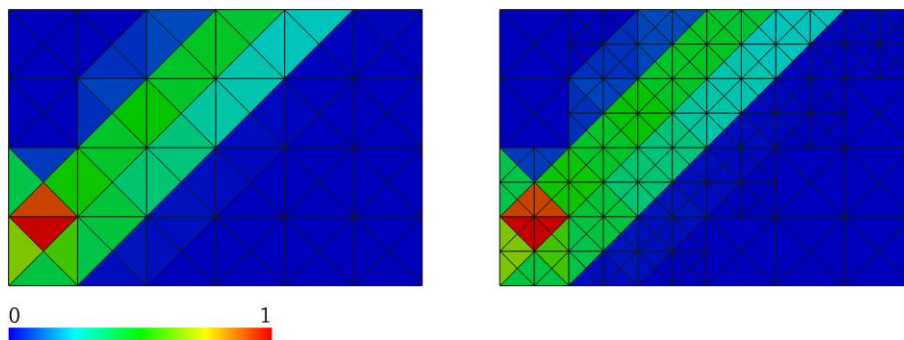


Figura 5.7: Passagem do campo de dissipações no refinamento da malha 1 para a malha 2.

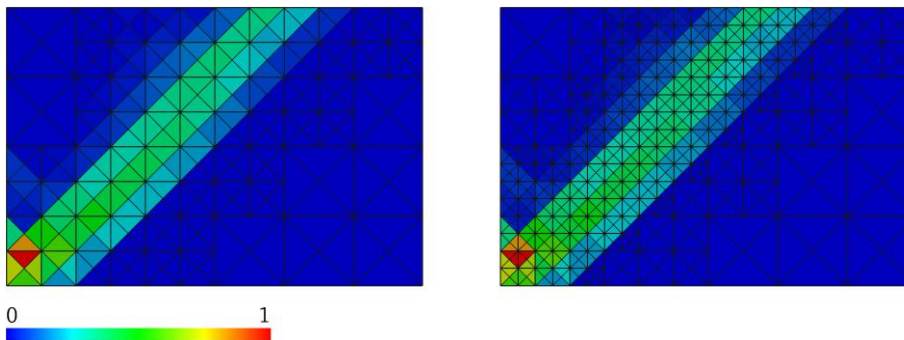


Figura 5.8: Passagem do campo de dissipação no refinamento da malha 2 para a malha 3.

B. VELOCIDADE

O campo das velocidades também deve manter-se apesar da aplicação do código REMESH. As figuras 5.9 e 5.10, mostram igualmente como o REMESH passou os campos de velocidade eficazmente sempre que foi chamado.

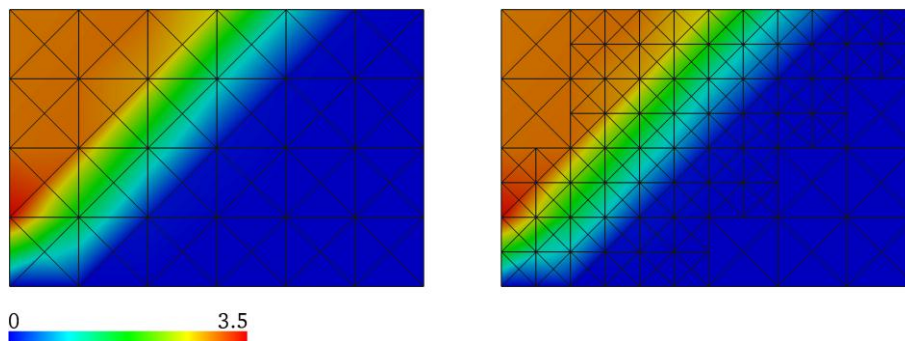


Figura 5.9: Passagem do campo de velocidades no refinamento da malha 1 para a malha 2.

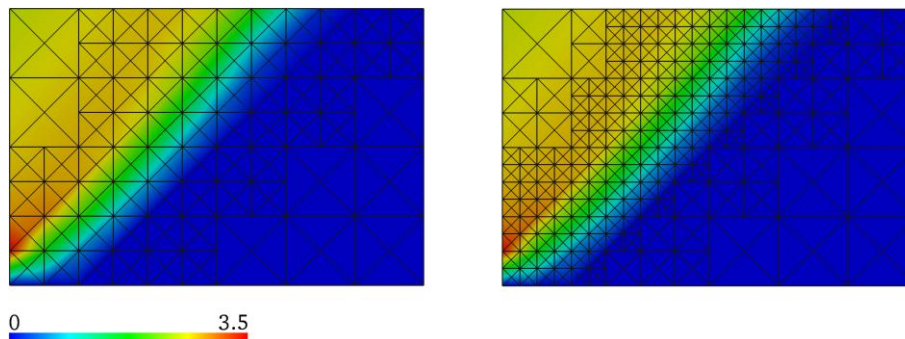


Figura 5.10: Passagem do campo de velocidades no refinamento da malha 2 para a malha 3.

C. FORÇAS NODAIS

Nas figuras 5.11 e 5.12, pode observar-se como o campo das forças nodais é definido para cada elemento e como os elementos que não sofrem refinamento não têm o seu campo alterado. Ao contrário os elementos procedentes de refinamento, recebem o campo das forças nodais dos seus elementos geradores e distribuem-no, como explicado em 4.2.3. Resulta, portanto um campo mais baixo nas zonas refinadas.

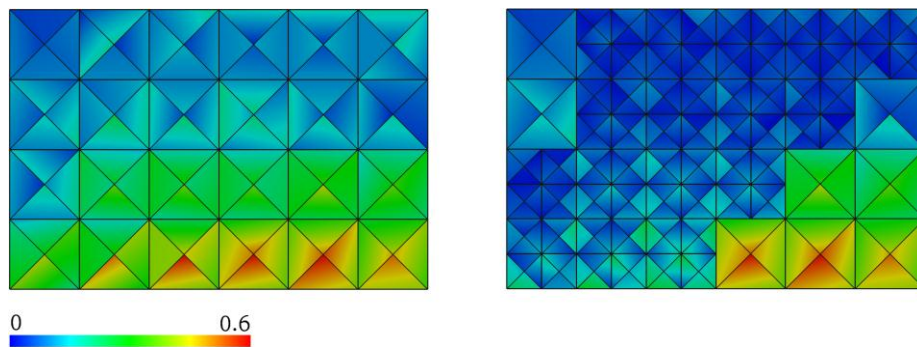


Figura 5.11: Passagem do campo de forças nodais no refinamento da malha 1 para a malha 2.

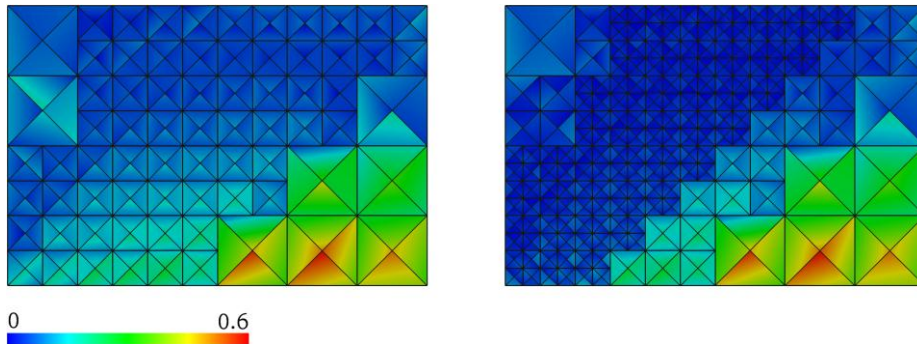


Figura 5.12: Passagem do campo de forças nodais no refinamento da malha 2 para a malha 3.

Após verificada a eficácia do código REMESH, passa-se, no teste seguinte, à verificação da sua eficiência.

5.2.3. Teste – Verificar a eficiência de REMESH

Objectivo: Verificar a eficiência de REMESH.

Os refinamentos executados em REMESH podem ser adaptativos ou regulares. Os refinamentos adaptativos envolvem o tratamento de nós incompatíveis. O tratamento de um nó incompatível é mais desfavorável para o tempo de computação do que o tratamento de um nó compatível. Assim, o estudo foi feito com refinamentos adaptativos, para que os testes fossem os mais penalizadores.

Os valores de Tempo (T) apresentados na Tabela 5.1, são referentes a todo o processo de refinamento, ou seja, definição dos novos nós e elementos, desactivação dos elementos que deixam de existir, passagem dos dados e campos, dos nós (velocidade, forças nodais, etc) e dos elementos (dissipação, material, etc) e ainda a edição da estrutura de dados, incluindo a introdução de novos dados, retirando os que deixam de fazer parte e a alterando os que foram afectados.

Tabela 5.1: Eficiência de REMESH.

| Nós Iniciais | Elementos Iniciais | Nós Finais | Elementos Finais | Patches Refinados | h | T (s) | T / patch (s) |
|--------------|--------------------|------------|------------------|-------------------|--------------|--------|---------------|
| 59 | 96 | 213 | 384 | 24 | $h_0/2$ | 0.06 | 0.0023 |
| 59 | 96 | 302 | 540 | 37 | $h_0/2^2$ | 0.04 | 0.0012 |
| 59 | 96 | 471 | 852 | 63 | $h_0/2^3$ | 0.11 | 0.0017 |
| 59 | 96 | 958 | 1 764 | 139 | $h_0/2^4$ | 0.04 | 0.0003 |
| 59 | 96 | 2 261 | 4 272 | 348 | $h_0/2^5$ | 0.18 | 0.0005 |
| 59 | 96 | 6 227 | 12 024 | 994 | $h_0/2^6$ | 0.34 | 0.0003 |
| 59 | 96 | 20 244 | 39 744 | 3 304 | $h_0/2^7$ | 1.22 | 0.0004 |
| 59 | 96 | 74 622 | 147 840 | 12 312 | $h_0/2^8$ | 5.90 | 0.0005 |
| 59 | 96 | 277 851 | 553 164 | 46 089 | $h_0/2^9$ | 44.90 | 0.0010 |
| 59 | 96 | 1 082 557 | 2 160 252 | 180 013 | $h_0/2^{10}$ | 669.55 | 0.0037 |

O tempo por *patch* (T/Patch) é apresentado na Tabela 5.1 pois permite perceber a influência que a estrutura de dados pode estar a ter na eficiência do processo. Com efeito, para que se possa verificar a eficiência do código, o primeiro passo seria o tempo de processamento associado ao refinamento de um *patch* não se alterar significativamente, ao contrário do que acontece aqui. Contudo, T inclui o de tratamento da estrutura de dados, pelo que uma investigação mais detalhada deve ser efectuada. Na Tabela 5.2, pode observar-se com mais detalhe a distribuição deste tempo.

Tabela 5.2: Tempo de cálculo e tempo de tratamento de dados em REMESH.

| T (s) | T / <i>Patch</i> (s) | % T em Tratamento de Dados | % T em Cálculo | TCálculo (s) | TCálculo / <i>Patch</i> (s) |
|----------|----------------------|----------------------------|----------------|--------------|-----------------------------|
| 0.0560 | 0.0023 | 45.0 | 55.0 | 0.0308 | 0.0012 |
| 0.0440 | 0.0012 | 86.0 | 14.0 | 0.0061 | 0.0002 |
| 0.1070 | 0.0017 | 85.4 | 14.6 | 0.0156 | 0.0003 |
| 0.0380 | 0.0003 | 57.1 | 42.9 | 0.0163 | 0.0001 |
| 0.1770 | 0.0005 | 84.2 | 15.8 | 0.0279 | 0.0001 |
| 0.3380 | 0.0003 | 70.4 | 29.6 | 0.1000 | 0.0001 |
| 1.2150 | 0.0004 | 78.7 | 21.3 | 0.2588 | 0.0001 |
| 5.8920 | 0.0005 | 83.4 | 16.6 | 0.9780 | 0.0001 |
| 44.9030 | 0.0010 | 90.3 | 9.7 | 4.3555 | 0.0001 |
| 669.5480 | 0.0037 | 97.1 | 2.9 | 19.4168 | 0.0001 |

As Tabelas 5.1 e 5.2 permitem, então, perceber como o funcionamento do código é eficiente, pois não depende do número de elementos da malha ou do número de elementos a refinar em cada utilização de REMESH. Pode também notar-se que, como era esperado, o tratamento da estrutura de dados pode ser um entrave à eficiência do código para refinamentos com um elevado número de elementos. Com efeito, o seu tratamento torna-se mais moroso com o aumento do número de refinamentos a efectuar.

5.2.4. Teste – Validar as soluções do CREMESH

Objectivo: Verificar a validade das soluções obtidas por SUBLIM3d2 em interacção com REMESH.

Este teste assume grande importância, pois permite garantir a convergência das soluções obtidas com recurso a REMESH, fruto deste trabalho.

Na Tabela 5.3, mostram-se as soluções do SUBLIM3d2 para diferentes utilizações da interface CREMESH. O efeito visual das barras nesta tabela pretende mostrar em cada método como evoluem os valores de λ quando diminui h . h_0 é a dimensão dos elementos na malha inicial definida na Figura 5.1(b).

Tabela 5.3: Convergência da solução através de interacções entre REMESH e SUBLIM3d2.

| Interacção | h | λ (Método) | | | | |
|------------|-----------|---------------------|-----------------|----------------|----------------|---------------|
| | | MD+R d 0.001 | MD+R d 0.005 | MD+R d 0.01 | MD+R d 0.05 | MD+R d 0.5 |
| 0 | h_0 | 4.4138 | 4.4138 | 4.4138 | 4.4138 | 4.4138 |
| 1 | $h_0/4$ | 4.0966 | 4.0993 | 4.0982 | 4.0973 | 4.1792 |
| 2 | $h_0/8$ | 3.9250 | 3.9472 | 3.9298 | 3.9353 | 4.0531 |
| 3 | $h_0/16$ | 3.8699 | 3.8534 | 3.8559 | 3.8655 | 3.9715 |
| 4 | $h_0/32$ | 3.8226 | 3.8176 | 3.8195 | 3.8298 | 3.9487 |
| 5 | $h_0/64$ | 3.8134 | 3.8073 | 3.8028 | 3.8195 | 3.9460 |
| 6 | $h_0/128$ | 3.8040 | 3.7951 | 3.8048 | 3.8139 | 3.9382 |

Os resultados observados na Tabela 5.3 mostram convergência na direcção da solução exacta para diferentes aplicações da interface na resolução do mesmo problema, pelo que se pode concluir que a eficácia da interacção SUBLIM3d2-REMESH está assegurada. Efectivamente, para as malhas adaptativas, progressivamente mais finas, e com estimativa inicial, as soluções do problema em estudo diminuem como é expectável numa formulação de limite superior da análise limite. Verifica-se ainda que as soluções se revelam sucessivamente mais próximas do valor majorante definido em [9], 3.7776, ficando a menos de 0.5% desse valor, em alguns dos casos.

A convergência que se nota nos valores da Tabela 5.3 significa que a cada etapa CREMESH, a amplitude da solução é diminuída. De facto, a cada solução para uma malha do problema, o

SUBLIM3d2 converge em direção a um intervalo da solução, diminuindo progressivamente a amplitude desse intervalo. A Figura 5.13 mostra este processo para cada uma das primeiras quatro malhas resolvidas pelo método MD+R com $d=0.05$. Nessa mesma imagem pode ver-se que a diferença entre soluções consecutivas vai diminuindo. Isto acontece porque a primeira solução do mecanismo é ainda bastante grosseira. Portanto, quando se procura a segunda solução, que tem como estimativa inicial a primeira, há ainda muito para melhorar no mecanismo. Conforme se avança nas sucessivas soluções, aquilo que há para melhorar é cada vez menos, em relação à solução anterior. Ao mesmo tempo, torna-se cada vez mais difícil obter melhores aproximações porque isso vai exigindo chegar a detalhes cada vez mais pequenos, precisando de uma maior discretização.

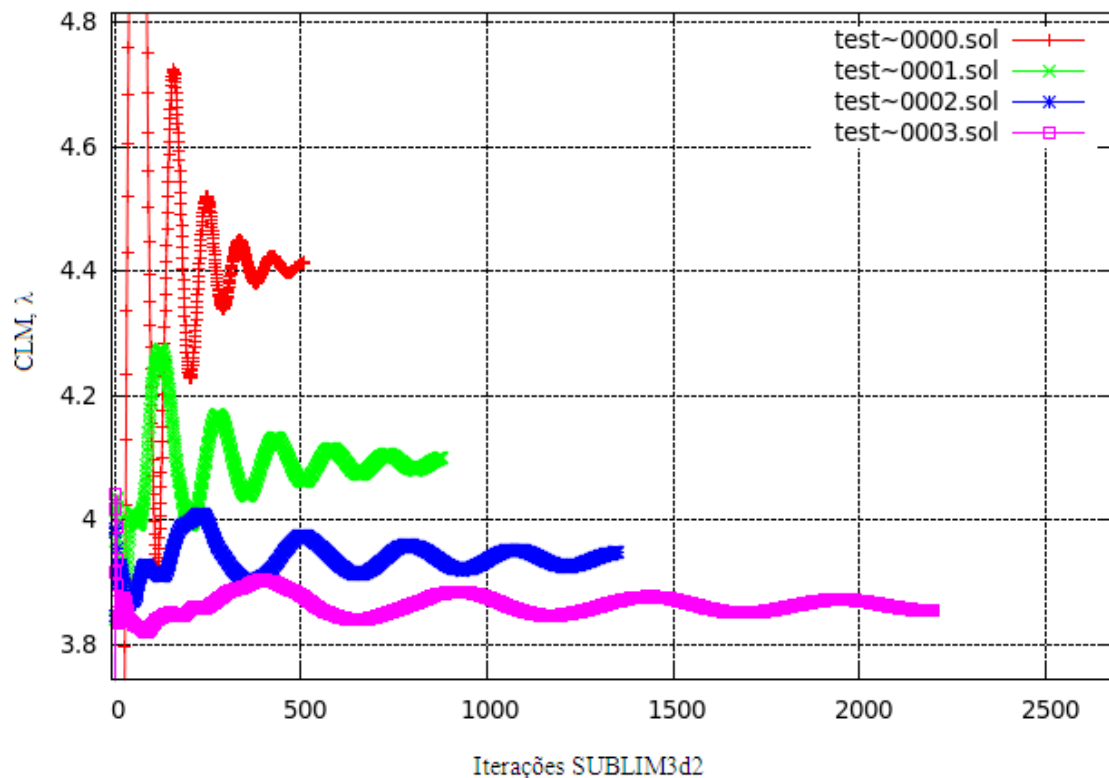


Figura 5.13: Convergência das quatro soluções devidas à interação CREMESH.

Os dados apresentados na Tabela 5.3 mostram também que os métodos cujas soluções mais se aproximam do majorante definido em [9], $\lambda = 3.7776$, são os que têm os critérios de refinamento mais próximos de zero. Assim, pode concluir-se que o critério da dissipação deve ser usado para discriminar os elementos com dissipação muito baixa. Esses representam zonas da malha com uma contribuição praticamente nula para o mecanismo e por isso não precisam ser mais refinadas.

As imagens seguintes, da Figura 5.14, mostram a evolução do campo das dissipações e dos refinamentos de REMESH ao longo das diversas interações entre SUBLIM3d2 e REMESH. Pode ver-se como a adaptatividade se vai ajustando aos novos campos de dissipação produzidos pelas soluções do SUBLIM3d2. Ao mesmo tempo, SUBLIM3d2 vai obtendo cada vez soluções mais precisas, o que leva a que o campo das dissipações seja muito mais definido. Por isto, tanto o campo desses valores como a consequente adaptatividade se vão aproximando do mecanismo de colapso.

Os testes seguintes estudam mais pormenorizadamente a convergência das soluções para as diferentes utilizações possíveis de REMESH, com e sem estimativa inicial ou adaptatividade de nós dependentes.

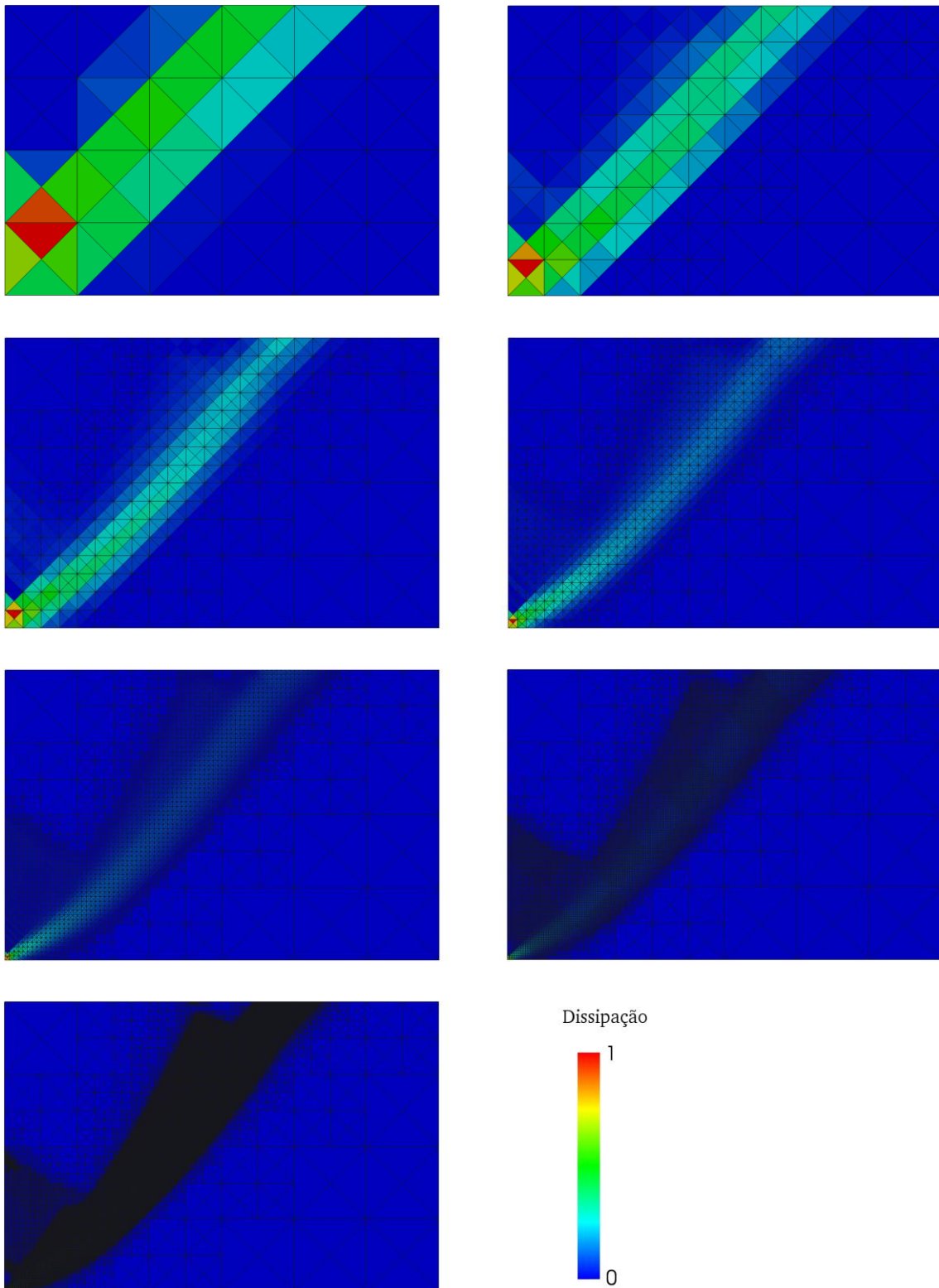


Figura 5.14: Evolução do campo das dissipações e da adaptatividade ao longo de 6 interações CREMESH.

5.2.5. Teste – Verificar o benefício de REMESH para SUBLIM3d2

Objectivo: Confirmar que as ferramentas produzidas em REMESH (adaptatividade e estimativa inicial) são um benefício para a eficiência de SUBLIM3d2.

O benefício de REMESH para a eficiência de SUBLIM3d2 só pode ser avaliado através da sua utilização dentro desse programa. REMESH será tanto mais útil quanto mais eficiente tornar SUBLIM3d2. SUBLIM3d2, como referido anteriormente em 2.3, utiliza uma formulação de elementos finitos em que a matriz do sistema governativo é diagonal. O que se pretende com REMESH é tornar esta formulação mais eficiente do que uma formulação em que essa matriz é simétrica e esparsa.

Com os resultados positivos deste teste mostra-se como a facilidade para implementar adaptatividade nesta formulação a torna muito eficiente. A utilidade desta formulação fica também demonstrada. Com efeito, consegue evitar o uso da factorização de Cholesky sem comprometer a qualidade dos resultados ou a eficiência da solução.

Assim sendo, interessa resolver o problema apresentado em 5.1 através das duas formulações e comparar os resultados. A Tabela 5.4 condensa alguns resultados obtidos com as duas formulações, para malhas com diferentes graus de refinamento, h .

O gráfico da Figura 5.15 resume os dados dessa tabela e mostra que conforme as malhas se tornam mais finas, as soluções MD+R, obtidas através da formulação de SUBLIM3d2 com uso de REMESH, são cada vez mais eficientes relativamente às soluções obtidas através da formulação com matriz simétrica e esparsa, ME. O gráfico da Figura 5.16 é um pormenor da Figura 5.15 para mostrar mais detalhadamente os dados das malhas iniciais.

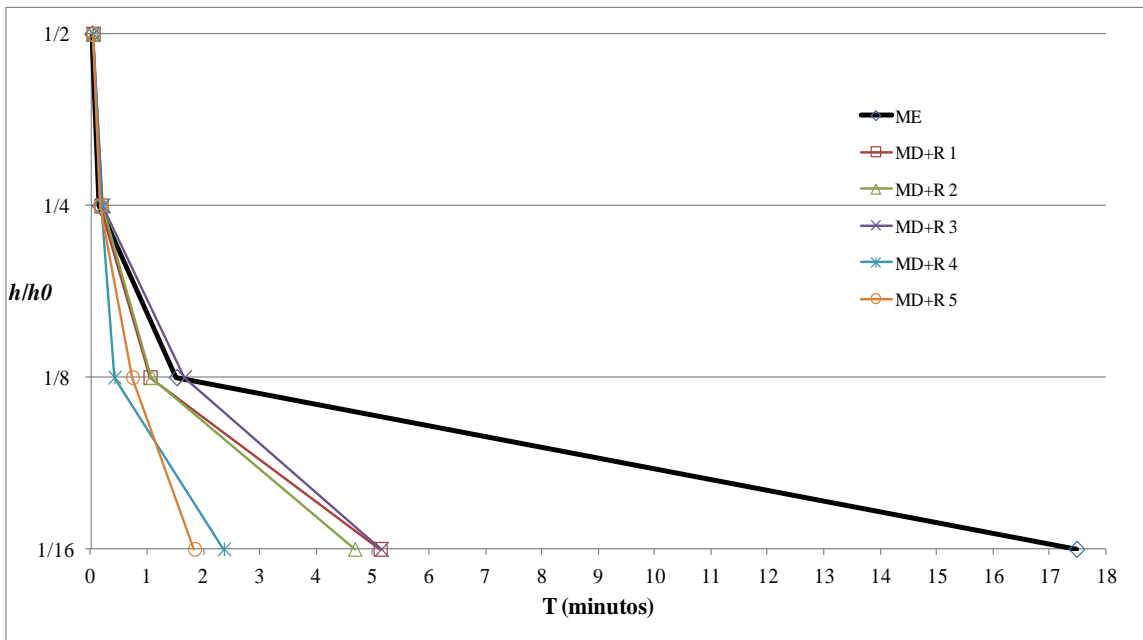


Figura 5.15: Tempo de computação das duas formulações.

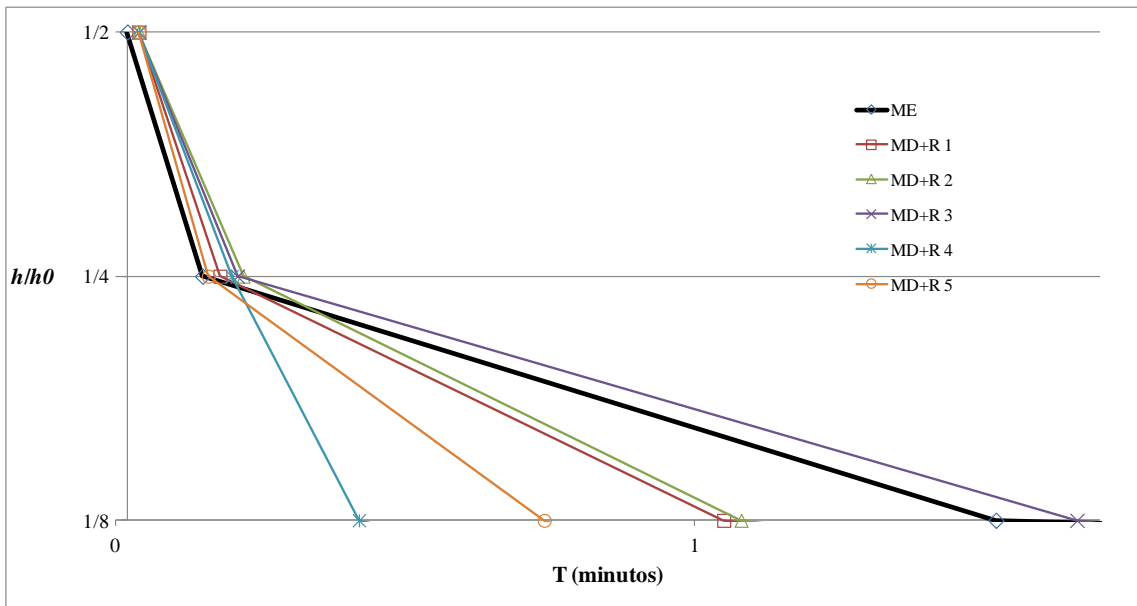


Figura 5.16: Pormenor da figura anterior, focando as malhas iniciais.

Na Tabela 5.4 e no gráfico acima, para cada grau de refinamento h , é apresentada uma solução ME e cinco soluções diferentes MD+R. A diferença entre estas cinco soluções está no critério de refinamento adaptativo utilizado. Diferentes critérios de refinamento geram diferentes malhas de elementos finitos.

Os resultados da Tabela 5.4 permitem perceber que esta superioridade conseguida na eficiência de SUBLIM3d2 não acontece à custa de uma redução da qualidade dos resultados. De facto, para cada grau de refinamento h , as soluções λ estão igualmente próximas do melhor valor conhecido para a solução deste problema, *% erro relativo*. O melhor valor obtido está fixado em $\lambda = 3.7776$ [9].

Com os resultados obtidos, mostra-se como o funcionamento de SUBLIM3d2 com REMESH, MD+R, é mais eficiente do que a formulação com matriz do sistema governativo simétrica e esparsa, ME. No problema aqui resolvido, o incremento de eficiência chegou a valores próximos de 90% e tendência crescente com o aumento do grau de refinamento. Os melhores ganhos percentuais obtidos foram sombreados a cor na tabela. Estes valores foram obtidos para malhas que garantiam uma qualidade da solução apenas a 1% do resultado de Pastor.

Assim, pode confirmar-se, para este problema, uma excelente contribuição de REMESH, de forma a desenvolver as potencialidades de SUBLIM3d2.

Tabela 5.4: Eficiência da formulação implementada em Sublim3d2 com o uso de REMESH.

| h | Formulação | | Critério Adaptatividade | λ | % erro relativo | T (min) | % dif. ME |
|----------|------------|---|----------------------------|-----------|--------------------|---------|-------------|
| $h_0/2$ | ME | | - | 4.0894 | 8 | 0.02 | - |
| | MD+R | 1 | 0.001 | 4.0966 | 8 | 0.04 | 181% |
| | | 2 | 0.005 | 4.0993 | 8 | 0.04 | 180% |
| | | 3 | 0.010 | 4.0982 | 8 | 0.04 | 165% |
| | | 4 | 0.050 | 4.0973 | 8 | 0.04 | 156% |
| | | 5 | 0.100 | 4.0910 | 8 | 0.04 | 143% |
| $h_0/4$ | ME | | - | 3.9369 | 4 | 0.15 | - |
| | MD+R | 1 | 0.001 | 3.9250 | 4 | 0.18 | 21% |
| | | 2 | 0.005 | 3.9472 | 4 | 0.22 | 48% |
| | | 3 | 0.010 | 3.9298 | 4 | 0.21 | 43% |
| | | 4 | 0.050 | 3.9353 | 4 | 0.20 | 38% |
| | | 5 | 0.100 | 3.9398 | 4 | 0.16 | 8% |
| $h_0/8$ | ME | | - | 3.8605 | 2 | 1.52 | - |
| | MD+R | 1 | 0.001 | 3.8699 | 2 | 1.05 | -30% |
| | | 2 | 0.005 | 3.8534 | 2 | 1.08 | -28% |
| | | 3 | 0.010 | 3.8559 | 2 | 1.66 | 9% |
| | | 4 | 0.050 | 3.8655 | 2 | 0.42 | -72% |
| | | 5 | 0.100 | 3.8703 | 2 | 0.74 | -51% |
| $h_0/16$ | ME | | - | 3.8210 | 1 | 17.48 | - |
| | MD+R | 1 | 0.001 | 3.8168 | 1 | 5.13 | -70% |
| | | 2 | 0.005 | 3.8309 | 1 | 4.68 | -73% |
| | | 3 | 0.010 | 3.8195 | 1 | 5.15 | -70% |
| | | 4 | 0.050 | 3.8315 | 1 | 2.36 | -86% |
| | | 5 | 0.100 | 3.8414 | 1 | 1.84 | -89% |

A resolução deste problema mostrou como a formulação SUBLIM3d2 tem ainda a vantagem de reduzir os recursos computacionais necessários para a solução dos problemas. De facto, para os recursos utilizados no desenvolvimento destes testes, descritos em 5.2, não foi possível obter soluções para malhas mais finas através da formulação ME, por impossibilidade de alocar mais memória. Ao contrário, SUBLIM3d2 permite uma melhor exploração dos recursos disponível. Com efeito, na Tabela 5.3 podem ver-se alguns resultados para malhas mais finas do mesmo problema. Esta característica representa também a capacidade de obter resultados mais precisos.

Deve o leitor notar que o tempo de processamento apresentado, T, refere-se unicamente ao tempo de computação do SUBLIM3d2. Não se inclui os tempos de computação de REMESH porque para os refinamentos que foram necessários, os tempos de computação de REMESH são insignificantes quando comparados com o tempo de cálculo da solução.

Para os resultados obtidos através de MD+R, T diz respeito não só ao tempo necessário para resolver essa malha, mas também ao acumulado de todas as soluções anteriores. De facto, neste método cada solução utiliza as soluções anteriores para estabelecer a adaptatividade e estimativa inicial. Assim, o tempo de solução de cada malha deve incluir o tempo de solução de todas as anteriores.

Uma vez demonstrada a eficiência da formulação de SUBLIM3d2 com utilização de REMESH interessa perceber como funciona cada uma das ferramentas implementadas e como essas melhoram a eficiência de SUBLIM3d2. Para tal, apresentam-se nas próximas secções os resultados da solução do mesmo problema de 5.1, através de outros métodos.

No primeiro, que serve de base de comparação para os seguintes, utiliza-se SUBLIM3d2 sem adaptatividade nem estimativa inicial (MD).

No segundo, que serve para mostrar como a adaptatividade implementada influencia as soluções, utiliza-se SUBLIM3d2 com adaptatividade e sem estimativa inicial (MD+A).

Por fim, no terceiro testa-se os benefícios da estimativa inicial utilizando SUBLIM3d2 sem adaptatividade e com estimativa inicial (MD+E).

BENEFÍCIO DA ADAPTATIVIDADE

A Figura 5.17, abaixo, mostra a evolução das iterações de SUBLIM3d2 para obter a solução de três malhas distintas. A primeira é a malha inicial apresentada em 5.1, chamada Base. A segunda é consequência de um refinamento uniforme da primeira e, posteriormente, foi resolvida no SUBLIM3d2. A essa chamou-se MD, pois foi resolvida com a formulação de SUBLIM3d2 em que a matriz do sistema governativo é diagonal. A terceira foi refinada adaptativamente em REMESH e solucionada em SUBLIM3d2. Chamou-se MD+A, pois foi resolvida com a mesma formulação mas a partir de uma malha refinada adaptativamente. As malhas dos dois métodos, apesar de diferentes, têm o mesmo grau de refinamento, $h_0/2$.

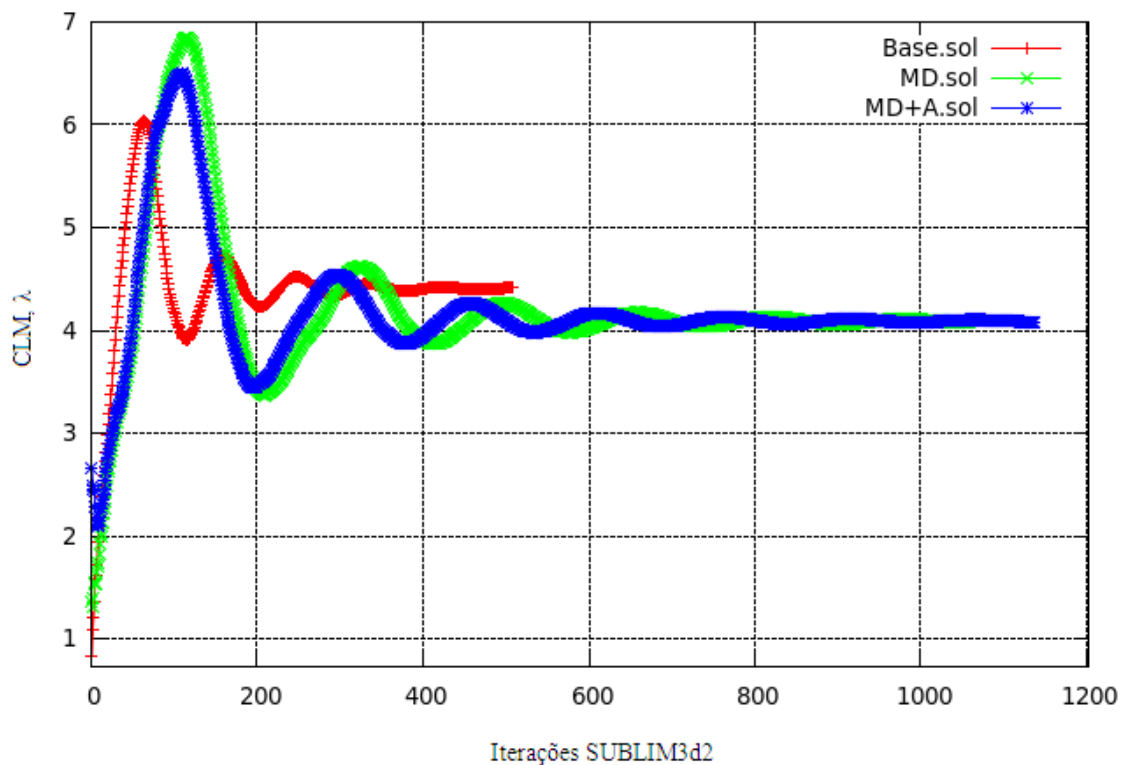


Figura 5.17: Benefício da adaptatividade nas soluções SUBLIM3d2.

Aquilo que a figura acima nos dá a perceber é que SUBLIM3d2 chegou à mesma solução, seguindo um caminho muito semelhante, para os dois métodos: MD e MD+A.

Na Tabela 5.5 pode observar-se a mesma comparação entre soluções MD e MD+A, para as mesmas malhas e para outras com maiores graus de refinamento. Os valores desta tabela mostram então qual a vantagem da adaptatividade. De facto, o melhor benefício da adaptatividade conseguida em REMESH é para SUBLIM3d2 o tempo que a formulação despense a determinar cada iteração, cada nó do gráfico da Figura 5.17.

Refere-se que nenhuma das soluções beneficiou de estimativa inicial.

Tabela 5.5: Benefício da adaptatividade.

| h | Formulação | Elementos | λ | % erro relativo | T (min) | Iterações SUBLIM3d2 | T / Iterações SUBLIM3d2 (s) |
|----------|------------|-----------|-----------|-----------------|--------------|---------------------|-----------------------------|
| $h_0/2$ | MD | 384 | 4.0742 | 8 | 0.05 | 1059 | 0.003 |
| | MD+A | 288 | 4.0815 | 8 | 0.05 | 1137 | 0.002 |
| $h_0/4$ | MD | 1536 | 3.9205 | 4 | 0.46 | 2530 | 0.011 |
| | MD+A | 804 | 3.9447 | 4 | 0.30 | 2845 | 0.006 |
| $h_0/8$ | MD | 6144 | 3.8526 | 2 | 4.24 | 5514 | 0.046 |
| | MD+A | 2532 | 3.8622 | 2 | 3.53 | 10636 | 0.020 |
| $h_0/16$ | MD | 24576 | 3.8106 | 1 | 49.82 | 16197 | 0.185 |
| | MD+A | 8160 | 3.8313 | 1 | 39.91 | 35886 | 0.067 |

Com o aumento do grau de refinamento das malhas utilizadas para conseguir as soluções, aumenta também a diferença do $T / \text{Iterações SUBLIM3d2}$ entre as soluções com malhas uniformes, MD e as soluções com malhas adaptativas, MD+A. Ao mesmo tempo, esta diferença tem cada vez mais peso no tempo total de computação porque as iterações SUBLIM3d2 também vão aumentando. E apesar de aumentarem mais para as malhas adaptativas, conclui-se que a adaptatividade implementada com REMESH torna a formulação de SUBLIM3d2 mais eficiente.

Os resultados mostrados em λ e % erro relativo mostram como a adaptatividade implementada não prejudica a qualidade dos resultados. Apesar de que isto não prova a qualidade relativa do critério de adaptatividade implementado, deixa patente a sua validade.

BENEFÍCIO DA ESTIMATIVA INICIAL

A Figura 5.18, abaixo, mostra como as soluções obtidas em SUBLIM3d2 beneficiam com a utilização da estimativa inicial produzida por REMES. Mais uma vez, mostra-se a evolução das iterações de SUBLIM3d2 na obtenção da solução de três malhas distintas. A primeira é a malha inicial apresentada em 5.1, chamada Base. A segunda e terceira malhas, MD e MD+E, são ambas fruto de um refinamento uniforme da malha Base. Ou seja, as malhas destas duas soluções são iguais com grau de refinamento $h_0/2$. Contudo, a acompanhar a malha de MD+E, REMESH há uma estimativa inicial da solução. Essa estimativa inicial é conseguida por REMESH a partir da solução de SUBLIM3d2 da malha Base. As soluções MD e MD+E são obtidas através da formulação de SUBLIM3d2 em que a matriz do sistema governativo é diagonal.

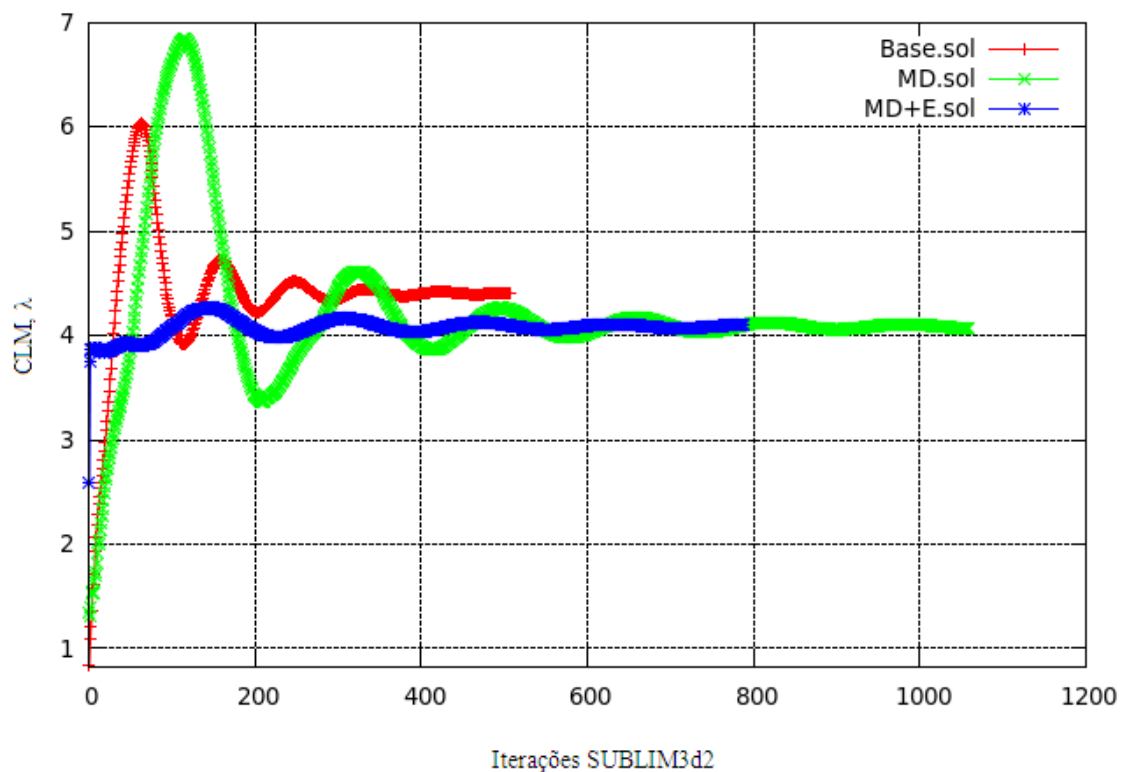


Figura 5.18: Benefício da estimativa inicial nas soluções SUBLIM3d2.

Para solucionar o problema da malha em MD+E, SUBLIM3d2 tem uma pista fornecida pela estimativa inicial. O gráfico da figura acima mostra os benefícios dessa estimativa para a solução SUBLIM3d2. De facto, a solução que utiliza a estimativa inicial, MD+E, começa num valor muito mais próximo da solução final. Ao contrário, MD começa o processo de solução sem qualquer pista, tal como tinha começado para resolver a malha inicial, Base. O

desconhecimento total da solução, em MD, leva SUBLIM3d2 a começar a procurar soluções num intervalo de valores muito maior do que quando tem essa pista, a estimativa inicial.

Assim, pode concluir-se que o efeito da estimativa inicial no processo de solução do SUBLIM3d2 é o de reduzir o número de iterações SUBLIM3d2 necessárias para chegar ao erro máximo desejado. A Tabela 5.6 confirma e complementa esta conclusão. Aí podem ver-se os valores associados às soluções do gráfico anterior e de outros testes idênticos para malhas consecutivamente mais finas.

Tabela 5.6: Benefício da estimativa inicial.

| h | Elementos | Formulação | λ | % erro relativo | T (min) | Iterações SUBLIM3d2 | T / Iterações SUBLIM3d2 (s) |
|----------|-----------|------------|-----------|-----------------|---------|---------------------|-----------------------------|
| $h_0/2$ | 384 | MD | 4.0742 | 8 | 0.05 | 1059 | 0.003 |
| | | MD+E | 4.1036 | 8 | 0.04 | 789 | 0.003 |
| $h_0/4$ | 1536 | MD | 3.9205 | 4 | 0.46 | 2530 | 0.011 |
| | | MD+E | 3.9232 | 4 | 0.27 | 1384 | 0.012 |
| $h_0/8$ | 6144 | MD | 3.8526 | 2 | 4.24 | 5514 | 0.046 |
| | | MD+E | 3.9022 | 3 | 1.72 | 2382 | 0.043 |
| $h_0/16$ | 24576 | MD | 3.8106 | 1 | 49.82 | 16197 | 0.185 |
| | | MD+E | 4.0326 | 7 | 5.18 | 1638 | 0.190 |

Pode ver-se como o tempo por iteração SUBLIM3d2 é igual nos dois métodos. Mas o número de iterações SUBLIM3d2 é menor quando há estimativa inicial. Esta redução é progressivamente mais notória conforme aumenta o grau de refinamento da malha. Como consequência destes dois aspectos, verifica-se que o tempo total de computação é reduzido pela existência de estimativa inicial. Conclui-se que a estimativa inicial melhora a eficiência de SUBLIM3d2.

Faz-se notar que os valores de λ pioraram para as malhas mais finas. Este facto deve-se a que a estimativa inicial utilizada para todas as malhas neste método era bastante grosseira. Ou seja, é mais adequada às malhas mais grossas e menos adequada às malhas mais finas, correspondendo nesse caso a uma má estimativa inicial. No entanto não deixa de produzir o efeito desejado de diminuir o número de iterações SUBLIM3d2 necessárias para obter a solução. Aquando do funcionamento pleno entre REMESH e SUBLIM3d2 isto não será um problema porque a estimativa inicial é actualizada a cada etapa de solução. Aí a estimativa para cada malha é apurada pelo REMESH a partir da solução da malha anterior, pelo que será sempre adequada a cada nova malha. Nesse caso, consegue-se o efeito desejado na eficiência de SUBLIM3d2, sem comprometer a qualidade dos resultados.

As duas ferramentas implementadas mostraram, individualmente, capacidade para melhorar a eficiência da solução. Contudo, nenhuma, isoladamente, se mostra suficiente, para fazer com que o SUBLIM3d2 seja mais eficiente do que as formulações aqui representadas por ME, com matriz do sistema governativo esparsa e diagonal. No entanto, o facto de cada uma ter um modo diferente de acelerar o processo de solução faz com que o funcionamento das duas em simultâneo traga grandes vantagens à eficiência de SUBLIM3d2. Essas vantagens foram mostradas no início desta secção, 5.2.5.

5.2.6. Teste – Validar os refinamentos simultâneos

Objectivo: Verificar a validade e consequências para a solução da utilização de refinamentos simultâneos.

Todos os testes apresentados até este ponto, sempre que utilizaram REMESH para refinar as malhas, fizeram-no com apenas um nível de refinamento em cada execução do código. Assim, serve este teste para testar a ferramenta complementar desenvolvida em REMESH, que é a possibilidade de gerar uma malha adaptativa de vários níveis a partir de uma só solução do SUBLIM3d2. Para verificar a qualidade dessa ferramenta, comparam-se as soluções obtidas anteriormente na interacção CREMESH, com refinamentos de um nível e critério de refinamento inicial de dissipação plástica fixado em 0.05.

A Tabela 5.7 mostra os valores do método de referência neste teste, MD+R (d 0.05) em comparação com os valores obtidos a partir de métodos com as mesmas características, mas utilizando vários níveis de refinamento, L, em cada utilização de REMESH, nas interacções CREMESH. A comparação é feita entre soluções de malhas com um número de elementos idêntico.

Tabela 5.7: Soluções CREMESH com refinamentos de um nível e com refinamentos de vários níveis.

| T3 e T3+ | i | L | λ | h | % erro relativo | T (min) |
|----------|---|---|-----------|-----------|-----------------|---------|
| 240 | 1 | 1 | 4.0973 | $h_0/2$ | 8 | 0.0 |
| 348 | 1 | 2 | 3.9817 | $h_0/4$ | 5 | 0.1 |
| 684 | 2 | 1 | 3.9353 | $h_0/4$ | 4 | 0.2 |
| 708 | 1 | 3 | 3.9530 | $h_0/8$ | 4 | 0.3 |
| 1788 | 3 | 1 | 3.8655 | $h_0/8$ | 2 | 0.4 |
| 1092 | 2 | 2 | 3.8549 | $h_0/16$ | 2 | 0.5 |
| 1452 | 1 | 4 | 3.8929 | $h_0/16$ | 3 | 0.5 |
| 4656 | 4 | 1 | 3.8315 | $h_0/16$ | 1 | 2.4 |
| 5016 | 4 | 2 | 3.8529 | $h_0/256$ | 2 | 3.6 |
| 4416 | 2 | 4 | 3.8733 | $h_0/64$ | 2 | 2.3 |

Pode ver-se, na Tabela 5.7, como a utilização de vários níveis de refinamento pode ter benefícios iniciais na qualidade da solução, pois aumenta mais rapidamente o número de elementos ao longo das interacções de CREMESH, identificadas com i. Além disso, devido ao modo como evolui o critério de dissipação ao longo dos vários níveis de refinamento, explicado em 4.1.3, esta ferramenta permite um aumento do número de elementos especialmente focado nas zonas críticas, o que implica uma redução do h nessas zonas, em menos interacções.

No entanto, rapidamente essas vantagens perdem valor. De facto, com o aumento do refinamento das malhas, e consequente aumento do número de elementos, deixa de se observar um efeito positivo na solução das malhas refinadas em vários níveis por interacção. De facto, a aproximação perde eficácia e pode ver-se como os melhores valores de λ estão associados às soluções com mais interacções CREMESH e menos níveis de refinamento por solução. Além da perda de eficácia, verifica-se também uma perda de eficiência, provavelmente devido ao modo como evolui o critério de refinamento ao longo dos níveis. De facto, este promove uma concentração excessiva de elementos nas zonas mais críticas provocando um desequilíbrio na distribuição dos elementos. Um exemplo disso está espelhado na Figura 5.19. Este excesso de refinamento nas zonas críticas é, não só em relação às restantes zonas da malha, mas também globalmente excessivo em relação ao refinamento necessário para o problema.

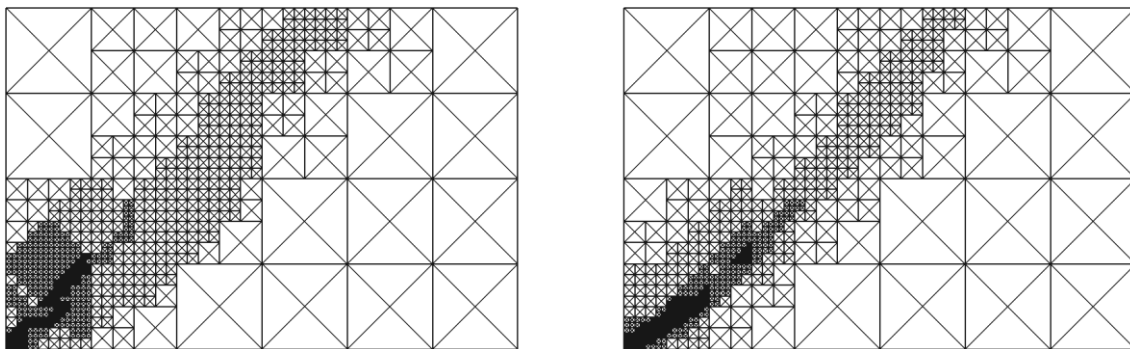


Figura 5.19: Resultado de 4 refinamentos de dois níveis com dissipação inicial de 0.05 em CREMESH. $h=1mm$.

Assim, pode concluir-se que, para esta ferramenta ter um bom desempenho deve ser usada apenas sobre boas soluções, para que não se cometam erros de refinamentos em zonas desnecessárias, consequência de uma solução inicial fraca. Esta é uma consequência mais grave, aquando do uso desta ferramenta, porque promove um aumento mais rápido dos elementos. Também o método sugerido em 4.1.3, para evolução do critério de refinamento nesta ferramenta, deverá fazer incrementos mais suaves do critério. Dessa forma poderá obter refinamentos mais equilibrados e adequados à malha, evitando que ao fim de poucos refinamentos haja já zonas excessivamente finas e outras ainda muito grosseiras, quando ambas precisam de refinamentos idênticos.

Pode concluir-se que o melhor funcionamento da interacção CREMESH é obtido com o recurso aos refinamentos de apenas um nível em cada execução de REMESH, pois assim se obtém um adaptatividade mais precisa e eficiente.

5.3. Considerações Finais

Os resultados da secção anterior demonstram que, efectivamente, a melhor aplicação de REMESH desenvolvida obtém-se numa interacção constante com o programa de elementos finitos SUBLIM3d2. De facto, o REMESH pode ser útil ao SUBLIM3d2 especialmente para melhorar a sua eficiência, mas essa utilidade será tanto melhor quanto mais informação o REMESH receber do SUBLIM3d2, oferecendo, por sua vez, um refinamento adaptativo mais adequado e acompanhado de uma melhor estimativa inicial da solução.

Conclui-se que o compromisso entre os programas de refinamento e de solução traz os bons resultados. Com a ferramenta desenvolvida, a formulação em SUBLIM3d2 pode alcançar melhorias de eficiência de, pelo menos, 80% relativamente a uma abordagem sem refinamentos adaptativo, ou seja, com malhas regulares.

Capítulo 6.

Conclusões

O objectivo deste trabalho foi o desenvolvimento de um código que possibilitasse o refinamento adaptativo de malhas estruturadas, para utilização com o programa SUBLIM3d2 de elementos finitos.

A materialização do objectivo foi executada dentro do enquadramento do SUBLIM3d2, porque o refinamento adaptativo era pretendido para potenciar a eficiência da formulação em SUBLIM3d2. Essa formulação baseada no teorema cinemático da análise limite para determinar limites superiores estritos de cargas de colapso, muito eficiente na inversão da matriz do sistema governativo, procurava melhorar a eficiência no processo para alcançar a solução. Nesse sentido, devido à possibilidade e facilidade de adaptação da formulação decidiu-se implementar adaptatividade recorrendo a nós incompatíveis. Estes permitiram fixar a criação de novos GDL efectivos nas malhas de forma muito precisa, através de um critério de discriminação dos elementos a refinar. O facto de que os próprios nós incompatíveis não contribuem para o aumento dos GDL efectivos, mas apenas para a criação de outros compatíveis dentro de uma adaptatividade muito boa, não inviabilizou a eficácia desta técnica. À aplicação desenvolvida chamou-se REMESH.

À adaptatividade juntou-se, ainda, o desenvolvimento de outra capacidade para esta aplicação com o intuito de melhorar a sua interacção com o programa SUBLIM3d2. Nesse sentido, foi

desenvolvida a possibilidade de produzir uma estimativa inicial da solução para cada nova malha refinada por REMESH, determinada a partir da solução do SUBLIM3d2 para a malha base do refinamento. Assim, conseguiu-se que a interacção não representasse para o SUBLIM3d2 um recomeço em cada ciclo, mas um processo contínuo em direcção à solução.

A técnica desenvolvida e a sua interacção com SUBLIM3d2 foram validadas pelos primeiros testes executados. O funcionamento do código REMESH foi validado e a interacção dessa com o SUBLIM3d2 mostrou convergência para a solução, na grande maioria das utilizações testadas. Os testes efectuados à utilização interactiva dos dois programas, revelaram ganhos de eficiência para o SUBLIM3d2 que resultam numa redução dos tempos de computação e que podem chegar a 80%, em relação a outras formulações. Estes resultados positivos, que significam o cumprimento do objectivo inicial, foram conseguidos sem prejudicar a qualidade dos resultados. Com efeito, os resultados da eficiência computacional descritos são relativos a soluções que se aproximaram da melhor solução existente para o problema resolvido, ficando a menos de 0.5% desse mesmo recorde.

O código foi desenvolvido para um tipo de malhas bastante determinado. Com efeito, está apta a ser executada para malhas estruturadas, definidas por elementos triangulares de três nós, agrupados em *patches* de quatro elementos. No entanto, o modo como foi efectuado o desenvolvimento deste código deixa-a como uma excelente base para o seu desenvolvimento, pois permite fáceis adaptações para outros tipos de malhas.

6.1. Desenvolvimentos Futuros

Pretende-se, finalmente, expor alguns desenvolvimentos possíveis na sequência do trabalho desenvolvido, apresentado neste texto.

Directamente relacionado com o trabalho desenvolvido, um campo de possível aperfeiçoamento é o da estrutura de dados. De facto, tem um efeito negativo no tempo de execução do código, crescente com o tamanho da malha, ao contrário do tempo de cálculo associado aos refinamentos. Embora esse efeito seja esperado, é útil averiguar a possibilidade de melhorar a performance da estrutura de dados.

REMESH, pelo facto de ser pioneira, pode ser aperfeiçoada especialmente no que respeita à abstracção implementada em cada subrotina. De facto, alguns aspectos estão limitados a casos específicos e podem por isso ser desenvolvidos de modo alargar o campo de aplicabilidade do código. Exemplos disso são: o critério discriminatório que distingue os elementos e promove a adaptatividade e que está limitado ao campo das dissipações. Da mesma forma, o tipo de elementos tratados está limitado a elementos triangulares de três nós. Refere-se ainda, a

subrotina que faz a passagem de campos de valores associados a malhas, pois esta está limitada aos campos apresentados neste texto.

O funcionamento da interface CREMESH à qual compete a interacção dos programas SUBLIM3d2 e REMESH pode ser alvo de melhorias em alguns aspectos. Primeiramente, alargar os critérios de fim da interacção, pode ser uma ferramenta interessante que trará maior automatismo à interface na determinação da solução final. De facto, neste momento é necessário introduzir como parâmetro de entrada quantas interacções devem acontecer entre os programas, mas o ideal seria haver outro critério para determinar o momento adequado para o fim da interacção.

O benefício do tipo de adaptatividade, obtida através de nós incompatíveis, só poderá ser verificado com a implementação da mesma estratégia de refinamento, mas forçando a compatibilidade de todos os nós. Será, por isso, uma adaptatividade não tão perfeita, mas em que todos os nós são válidos e, portanto, todos serão um contributo para a qualidade da aproximação. A partir do código de REMESH esta implementação já terá um bom ponto de partida, pelo que, este estudo é bastante viável.

Finalmente, a paralelização na execução dos programas é um assunto interessante a estudar e desenvolver no SUBLIM3d2. De facto a formulação deste programa de elementos finitos torna a sua execução bastante apta a ser introduzida num processo de paralelização, especialmente no cálculo da inversa da matriz do sistema governativo. Nesta formulação essa matriz é simétrica o que significa que a divisão dessa tarefa não traz quaisquer problemas pois cada parte da matriz pode ser invertida sem o conhecimento do resto do processo.

Bibliografia

- [1] E. R. de Arantes e Oliveira: *Elementos de teoria da elasticidade*. IST Press, 1999.
- [2] L. Borges, N. Zouain, C. Costa, e R. Feijóo: *An adaptive approach to limit analysis*. International Journal of Solids and Structures, vol. 38, pp. 1707-1720, 2001.
- [3] J. Chakrabarty: *Theory of Plasticity*. New York. McGraw-Hill, 1987.
- [4] E. Christiansen e O. S. Pedersen: *Automatic mesh refinement in limit analysis*. Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 50, pp. 1331-1346, 2001.
- [5] H. Ciria, J. Peraire, e J. Bonet: *Mesh adaptive computation of upper and lower bounds in limit analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 75, pp. 899-944, January 2008.
- [6] R. O. Davis e A. P. S. Selvadurai: *Plasticity and Geomechanics*. Press syndicate of the University of Cambridge, 2002.
- [7] N. M. C. Guerra: *Análise de Estruturas Geotécnicas*. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Textos de Apoio da Unidade Curricular: Fundações e Taludes, 2008-2009.
- [8] A. Henderson: *The Paraview Guide*. Kitware, Inc., 2008.
- [9] Z. Kammoun, F. Pastor, H. Smaoui, e J. Pastor: *Large Static problem in numerical limit analysis: A decomposition approach*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. 34, no. 18, pp. 1960-1980, 2010.
- [10] Inc. Kitware: *VTK User's guide*, 11th ed. Kitware, Inc., 2010.
- [11] J. Lubliner: *Plasticity Theory*. Berkeley, Califórnia. Macmillan Publishing Company, 1990.
- [12] A. V. Lyamin, K. Krabbenhoft, W.S. Sloan, e M. Hjjaj: *An adaptive algorithm for upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields* in European Congress on

Computacional Methods in Applied Sciences and Engineering, Jyvaskyla, Finland, 2004.

- [13] A. V. Lyamin, S. W. Sloan, K. Krabbenhoft, e M. Hjjaj: *Lower bound limit analysis with adaptive remeshing*. International Journal For Numerical Methods in Engineering, vol. 63, pp. 1961-1974, Maio 2005.
- [14] M. Metcalf e J. Reis: *Fortran 90/95 Explained*, 2nd ed. New York. Oxford University Press Inc, 1999.
- [15] J. Pastor, T-H. Thai, e P. Francescato: *New Bounds for the Height Limit of a Vertical Slope*. Internacional Journal for Numerical and Analytical methods in Geomechanics, vol. 24, pp. 165-182, 2000.
- [16] M. Vicente da Silva: *Implementação Numérica Tridimensional do Teorema Cinemático da Análise Limite*. Lisboa. Universidade Nova de Lisboa - Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2009, Tese de Doutoramento.
- [17] M. Vicente da Silva e A. N. Antão: *A non-linear programming method approach for upper bound limit analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 72, pp. 1192-1218, 2007.
- [18] M. Vicente da Silva e A. N. Antão: *A novel Augmented Lagrangian approach for Limit Analysis computations*. Aceite para publicação em International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- [19] O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor: *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, 2000, vol. 1: The Basis.