



Délcio Eduardo Macaia
Licenciado em Ciências de Engenharia Civil

Identificação experimental das propriedades modais de uma estrutura

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre
em Engenharia Civil - Perfil Estruturas

Orientador: Professora Doutora Ildi Cismaçiu

Júri:

Presidente: Professor Doutor Nuno M. C. Guerra
Arguente: Professor Doutor Filipe Pimentel Amarante dos Santos
Vogal: Professora Doutora Ildi Cismaçiu



Junho de 2017

Identificação experimental das propriedades modais de uma estrutura

“Copyright” Délcio Eduardo Macaia, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Quero agradecer a todas as pessoas que me ajudaram no desenvolvimento deste trabalho, tendo todos à sua maneira contribuído muito com o seu incentivo, com a sua amizade, carinho e devoção ao longo deste percurso.

Quero agradecer em particular a Professora Doutora Ildi Cismasiu pela ajuda que me prestou, estando sempre disposta a ajudar-me, sempre disponível a esclarecer as dúvidas, disponibilizando sempre a base teórica que era preciso, incentivando-me com citações, conselhos sábios, correção dos textos. Sem dúvida não poderia ter uma melhor orientadora, muito obrigado!

Quero agradecer especialmente a toda minha família pelo apoio que sempre me deram ao longo não só desta etapa mas em todas as etapas da minha vida, para que eu consiga atingir sempre com sucesso os meus objetivos.

Um especial agradecimento à minha mãe Visi Jacqueline, à minha irmã Zeny Isabel Klydjeneiro e ao meu irmão Bob Eduardo Macaia, que nunca deixaram de acreditar em mim, sendo eles a minha principal motivação. Não há palavras para descrever aquilo que vocês fazem por mim, tudo que sou devo a vocês. Ao meu pai, Macaia Paulo Klydjeneiro que constituiu toda a estrutura para que esta etapa fosse concluída, a quem devo tudo.

Não posso deixar de agradecer a todos os meus amigos que me acompanharam e ajudaram desde o primeiro dia de faculdade, até a conclusão. Um especial obrigado ao Tando João, André Campos Dias, André Lopes, Cláudia Morais, Diogo Ferreira, Ângelo Tavares, António Sérgio Tavares, Miguel Cordeiro, Hugo Rebelo, Jorge Cruz Filipe dos Santos, Diogo Reis, Neise Pinto, Marco Paviana, Pedro Boto, Jandira Almeida, Leonardo Rodrigues, Professor Luís palma e ao meu grupo de amigos “Pezzados”.

A todos desejo-vos muita sorte e sucesso!!

Dedico este trabalho aos meus sobrinhos Kiese, Kayilu e Jacqueline.

Resumo

Para estudar, avaliar ou modificar o comportamento dinâmico das estruturas de engenharia civil recorre-se à modelos computacionais, em geral modelos modais. Se estiver disponível uma estimativa das propriedades do material, das características geométricas e das condições de apoio é possível definir um modelo analítico através do método dos elementos finitos. No entanto, no caso das estruturas existentes estes modelos nem sempre se encontram corretos. Uma abordagem alternativa para construir o modelo modal é a chamada análise modal experimental, que se baseia na medição das forças ou respostas da estrutura quando excitada artificialmente num ou mais pontos. A identificação dos parâmetros modais das estruturas é uma ferramenta usada para auxiliar a modelação numérica.

Neste trabalho, foi implementado um procedimento de identificação modal para obtenção dos fatores de participação modal, da massa modal e dos modos de vibração a partir das respostas e ação medidas. O método tem por base a identificação de sistemas lineares em espaço de estados com recurso a técnicas de subespaços. O fator de participação modal e a massa modal são estimados através da matriz de transformação de similaridade entre dois modelos de espaço de estados. Visto que o método usa apenas a resposta medida num ponto, as formas modais são obtidas indiretamente, a partir dos fatores de participação modal.

De forma a avaliar o algoritmo de identificação e validar a sua implementação computacional, este é utilizado para a identificação modal de vários modelos com base em dados simulados numericamente e é apresentada uma comparação entre os resultados experimentais e numéricos, em termos de frequências naturais e modos de vibração, fator de participação modal e da massa modal. O mesmo foi ainda aplicado a dados de entrada/saída experimentais de um modelo laboratorial de uma estrutura com três andares excitado na base com recurso à mesa sísmica. Na componente prática criou-se um programa desenvolvido em MATLAB e SIMULINK que permite calcular os parâmetros modais das estruturas.

Palavras chave:

- Vibrações dinâmicas
- Análise modal experimental
- Identificação de sistemas
- Modelo em espaço de estados
- Parâmetros modais

Abstract

In order to study, evaluate or modify the dynamic behavior of civil engineering structures computational models, usually modal models, are currently used. If an estimate is available for the material characteristics, for the geometric properties and for the support conditions, an analytical model can be defined using the finite element method. However, in the case of existing complex structures, these models are not always correct. An alternative approach to obtain the modal model is the so-called experimental modal analysis, which is based on measuring the forces and responses of the structure when artificially excited in one or more points. The identification of the modal parameters of the structures is a useful tool to assist numerical modeling.

In this work, a modal identification procedure able to estimate the modal properties, namely the modal participation factor, the modal mass and modal shapes, from the measured dynamic excitations and structural responses was implemented in Matlab. The method is based on the state space identification of a linear system using subspace identification techniques. The modal participation factor and modal mass are estimated from the similarity transformation matrix between two state space models. As the method uses only the measured response at one point, the modal shapes are derived from the modal participation factors.

In order to evaluate the identification algorithm and to validate the numerical implementation, it is used for the modal identification of various models based on numerically simulated dynamic tests and a comparison between the experimental and numerical results, in terms of natural frequencies, modal shapes, modal participation factor and modal mass, is presented. The algorithm is also used on experimental data to identify the modal parameters of a base excited laboratory model representing a three floor shear building. On the practical component a program was developed in MATLAB and SIMULINK to allow to calculate the modal parameters of structures.

Keywords:

- Dynamic vibrations
- Experimental modal analysis
- Systems identification
- State space model
- Modal Parameters

Índice de Matérias

Copyright	i
Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xiii
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Problemas de vibrações em estruturas	1
1.2 Objetivos da dissertação	2
1.3 Organização da dissertação	2
1.4 O porquê da identificação modal	3
2 Representação e modelação de sistemas dinâmicos	7
2.1 Modelação de Sistemas dinâmicos	7
2.2 Equação de movimento no domínio do tempo	7
2.2.1 Método de Newmark	8
2.2.2 Procedimentos básicos do método de Newmark	8
2.2.3 Passos do método de Newmark	9
2.3 Representação dos sistemas dinâmicos em espaço de estados	10
2.3.1 Definições	10
2.3.2 Forma geral da equação de estado	10
2.3.3 Equação do movimento de um pórtico de três andares em espaço de estados	11
2.4 Modelação no domínio da frequência	12
2.4.1 Função de Transferência	13
2.5 Conversão da função de transferência para espaço de estados	14
2.6 Conceito de Controlabilidade	15
2.7 Conceito de Observabilidade	17

3	Algoritmo de identificação dos parâmetros modais	19
3.1	Identificação dos parâmetros modais	22
3.2	Matriz de transformação	23
3.3	Obtenção do fator de participação modal	26
3.4	Fator de participação modal	26
3.5	Obtenção da massa modal	28
3.6	Obtenção dos modos de vibração	30
3.7	Descrição do algoritmo de identificação dos parâmetros modais	31
4	Aplicação do algoritmo de identificação dos parâmetros modais	33
4.1	Análise modal analítica	33
4.2	Obtenção dos sinais de saída	34
4.3	Aplicação do Algoritmo	35
4.3.1	Pórtico com 3 andares	35
4.3.2	Pórtico com 8 andares	38
4.3.3	Pórtico com 5 andares	41
5	Identificação experimental do fator de participação modal	45
5.1	Configuração do ensaio	45
5.2	Ensaio experimental e resultados da identificação	46
5.3	Obtenção do fator de participação modal	47
6	Conclusões e desenvolvimentos futuros	51
6.1	Conclusões	51
6.2	Desenvolvimentos futuros	52
	Referências bibliográficas	53

Índice de Figuras

1.1	Efeito do sismo nas estruturas de engenharia civil	3
1.2	Vibrações originadas pela ação humana	4
1.3	Função de densidade espectral	5
2.1	Transformação de sistemas reais para soluções matemáticas	7
2.2	Modelação do sistema mecânico	8
2.3	Pórtico de 3 andares	11
3.1	Obtenção do sistema arbitrário através do ident	21
3.2	Impulso	28
4.1	Modos de vibração do pórtico de 3 andares normalizados em relação ao 3º caso	35
4.2	Sinal de entrada e de saída do 1º caso de um pórtico de 3 andares	36
4.3	Função de transferência do 1º andar de um pórtico de 3 andares . .	36
4.4	Modos de vibração do pórtico de 8 andares normalizados em relação ao 5º caso	39
4.5	Sinais de entrada do 5º caso de um pórtico de 5 andares	39
4.6	Função de transferência do 5º andar de um pórtico de 8 andares . .	39
4.7	Modos de vibração do pórtico de 5 andares normalizados em relação ao 5º caso	42
4.8	Sinais de entrada do 5º caso de um pórtico de 5 andares	42
4.9	Função de transferência do 5º andar de um pórtico de 5 andares . .	43
5.1	Ensaio na mesa sísmica para um pórtico de 3 andares	46
5.2	Sinais de entrada referente ao 2º caso experimental	47
5.3	Função de transferência do 3º caso do laboratório	48

Índice de Tabelas

4.1	Frequências teóricas e modos de vibração de um pórtico de 3 andares	33
4.2	Frequências teóricas e modos de vibração de um pórtico de 8 andares	34
4.3	Frequências teóricas e modos de vibração de um pórtico de 5 andares	34
4.4	Sinais de entrada e saída dos 3 casos de um pórtico de 3 andares	34
4.5	Sinais de entrada e saída dos 8 casos para um pórtico de 8 andares	34
4.6	Sinais de entrada e saída dos 5 casos para um pórtico de 5 andares	35
4.7	Modos de Vibração de um pórtico de 3 andares parametrizados em relação ao 3º andar	35
4.8	Sistema arbitrário do 1º caso de um pórtico de 3 andares	36
4.9	Frequência e amortecimento modal para o 1º caso de um pórtico de 3 andares	37
4.10	Sistema típico do 1º caso de um pórtico de 3 andares	37
4.11	Fatores de participação modal do 1º caso de um pórtico de 3 andares	38
4.12	Modos de vibração da estrutura parametrizados em relação ao 1º andar	38
4.13	Modos de vibração de um pórtico de 8 andares normalizados em relação ao quinto andar	38
4.14	Sistema arbitrário do 5º caso de um pórtico de 8 andares	40
4.15	Frequência e amortecimento modal do 5º caso de um pórtico de 8 andares	40
4.16	Sistema típico do 5º caso de um pórtico de 5 andares	40
4.17	Fatores de participação modal do 5º caso de um pórtico de 8 andares	41
4.18	Modos de vibração de um pórtico de 5 andares normalizados em relação ao quinto andar	42
4.19	Sistema arbitrário de um pórtico de 5 andares	43
4.20	Frequências e coeficiente de amortecimento de um pórtico de 5 andares	43
4.21	Sistema típico identificado para um pórtico de 5 andares	44
4.22	Massa modal de um pórtico de 5 andares	44
5.1	Características dos materiais	45
5.2	Resultados analíticos (frequências e modos de vibração) do pórtico de 3 andares do laboratório	46
5.3	Modos de vibração de um pórtico do laboratório normalizados em relação ao 3º andar	47
5.4	Fatores de participação modal do 3º andar do pórtico do laboratório	47

5.5	Sinais de entrada e saída dos varios casos para o pórtico de 3 andares do laboratório	47
5.6	Sistema arbitrário do 3º caso de um pórtico de 3 andares do laboratório	48
5.7	Frequência e amortecimento modal para o 3º caso do pórtico do laboratório de 3 andares	48
5.8	Sistema típico do 3º caso de um pórtico de 3 andares do laboratório	48
5.9	Fatores de participação modal analítico do 3º caso de um pórtico de 3 andares	49

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

Siglas

- FCT Faculdade de Ciências e Tecnologia
UNL Universidade Nova de Lisboa
BFD Método básico no domínio da frequência
FDD Método de decomposição no domínio da frequência
IFFT Transformada inversa de Fourier
SISO “Single-input-single-output”
MIMO “Multiple-input-single-output”
ELU Estados Limites últimos

Letras latinas

- A** matriz de estado
B matriz de entrada do sinal
C matriz de saída
D matriz de transmissão direta do sinal
 $G(s)$ função de transferência
I matriz de identidade
K matriz de rigidez do sistema
M matriz de massa do sistema
C matriz de amortecimento do sistema
Q matriz de observabilidade do sistema
W matriz de controlabilidade do sistema

T matriz de transformação do sistema

t tempo

u(t) vetor de entrada do sinal

x(t) vetor de estado

y(t) vetor de saída

Símbolos

ω frequência em rad/s

ω_i frequência natural do modo de vibração i

ξ coeficiente de amortecimento

ξ_i coeficiente de amortecimento do modo de vibração i

Capítulo 1

Introdução

Imagination is more important than knowledge.
(Albert Einstein)

1.1 Problemas de vibrações em estruturas

Atualmente existe a crescente preocupação por parte da comunidade científica, em relação aos efeitos que as vibrações causam nas estruturas. Esta temática tem vindo a desenvolver-se nos últimos anos, visando reduzir os danos causados pelas forças exteriores que atuam diretamente nas estruturas, como por exemplo, os sismos, ventos fortes, máquinas que originam vibrações consideráveis, entre outras.

A problemática pode ser agrupada em dois domínios distintos, respetivamente os problemas que as vibrações causam a nível estrutural (danos que afetam a integridade estrutural das estruturas) e nos problemas que as vibrações causam ao nível do conforto dos utilizadores. Ambos os aspetos são importantes e estão fortemente relacionados.

Quando se trata dos danos relacionados com a estrutura, está em causa os Estados limites últimos de resistência das estruturas (ELU), sendo a área mais importante para a comunidade científica.

As ações exteriores, como por exemplo, os sismos, podem causar danos irreparáveis ou mesmo levar à rotura e porventura ao colapso das estruturas, originando vários tipos de perdas, humanas e materiais.

A outra problemática está associada aos Estados limite de utilização, que estão relacionados com a satisfação de limites impostos para se controlar as vibrações excessivas. A estrutura é dimensionada para assegurar o conforto

dos utilizadores e o seu normal funcionamento. Todas estas preocupações levam ao desenvolvimento de técnicas de controlo com vista a atenuar as vibrações.

1.2 Objetivos da dissertação

Esta dissertação tem como objetivo a obtenção dos parâmetros modais das estruturas.

Com a ajuda das ferramentas Matlab e Simulink elaborou-se um algoritmo de identificação das propriedades modais referentes à massa modal, modos de vibração, fatores de participação modal, às frequências próprias e aos coeficientes de amortecimento.

Esta dissertação foca-se em algoritmos em que é necessário conhecer a excitação exterior e as respostas das estruturas para se calcular os parâmetros modais.

1.3 Organização da dissertação

Esta dissertação está organizada em 5 capítulos. No primeiro capítulo realiza-se uma pequena introdução ao tema, enunciando os objetivos propostos. Aborda-se os aspetos relativos à identificação modal no geral e a própria identificação modal.

O segundo capítulo aborda a problemática referente à identificação dos sistemas dinâmicos, em que são referidos aspetos importantes, relativos à equação do movimento. O facto de se tratar os problemas no domínio do tempo ou das frequências e como se processa a análise modal das estruturas.

No terceiro capítulo, aborda-se a problemática referente à identificação e obtenção dos parâmetros modais de sistemas dinâmicos a partir de um sistema identificado. O algoritmo implementado é validado através da simulação de modelos de espaço de estados ou das funções de transferência.

O quarto capítulo chega-se aos parâmetros modais através do algoritmo apresentado no terceiro capítulo, em pórticos com diferentes graus de liberdade.

No quinto capítulo realizam-se ensaios em laboratório do algoritmo desenvolvido, em um pórtico de três andares.

Finalmente no sexto capítulo referem-se os principais resultados obtidos, a importância e as principais vantagens do algoritmo desenvolvido.

1.4 O porquê da identificação modal

As estruturas de engenharia civil na maioria dos casos são afetadas por ações, como a sísmica (figura 1.1), o tráfego pedonal e rodoviária ou por outro tipo de vibrações introduzidas pela ação humana (figura 1.2). É necessário estudar-se os efeitos dessas ações através das características dinâmicas. Ao observar e estudar os efeitos que as ações têm sobre as estruturas, torna-se possível realizar uma monitorização ao longo do tempo, visto que os métodos de identificação modal possibilitam este tipo de monitorização.



Figura 1.1: Efeito do sismo nas estruturas de engenharia civil

Atualmente devido à evolução das tecnologias de medição, dos meios informáticos e dos métodos de aquisição de dados, levam a uma evolução mais acelerada dos métodos de identificação modal.

Foi na engenharia mecânica onde primeiramente se realizou a identificação modal, através de ensaios, nos quais as forças aplicadas eram controladas, calculando-se as respostas dinâmicas.

Designa-se por identificação modal clássica a análise experimental modal em que se controlam e se medem as forças de excitação e as respostas das estruturas. As técnicas desenvolvidas podem ser aplicadas às estruturas de engenharia civil.

Ao introduzir-se nas estruturas dois sinais distintos, em que somente os sinais de saída são analisados, medidos e controlados, chega-se a um tipo de análise modal que é denominada como “ensaios de medição de



Figura 1.2: Vibrações originadas pela ação humana

vibrações ambiente ou ensaios de medição da resposta das estruturas as ações ambiente” [31].

Ao aplicar os métodos de identificação modal estocástica, em que as entradas não são medidas nem controladas experimentalmente, as forças de excitação não são conhecidas do ponto de vista determinístico.

Atualmente, a identificação estocástica é bastante empregue nos diversos tipos de estruturas de engenharia civil. Os métodos de identificação estocásticos destacam-se em relação aos métodos clássicos, pois nos métodos estocásticos é possível analisar estruturas de grandes dimensões. Nos métodos clássicos existirão sempre várias dificuldades associadas às condições de fronteiras e à aplicação correta das forças de excitação exteriores [29].

Visto que a identificação pode ser realizada apenas através das medições e análise das repostas da estrutura, existem vários métodos que se utilizam para se realizar este tipo de identificação, como por exemplo o método FDD (Frequency Domain Decomposition), o método BFD (Bearing Fault Diagnosis), entre outros.

O método de identificação estocástica BFD, tem como base as ações ambientais assumidas no processo estocástico gaussiano de ruído branco. Neste método, as repostas dos sistemas evidenciados apresentam uma concentração energética na forma de picos das suas frequências e modos de vibração. Posto isto, é possível simular-se o comportamento das estruturas em função das características do modo ressonante da estrutura, em função da frequência própria (ω_n) e do coeficiente de amortecimento (ζ).

Este fator implica que as frequências próprias (ω_n) estejam associadas aos picos das funções de densidade espectral e que os coeficientes de amortecimento (ζ) estejam associados à largura entre dois picos de

frequências próprias consecutivas de ressonância e respectivas funções de densidade espectral da estrutura como mostra a figura 1.3.

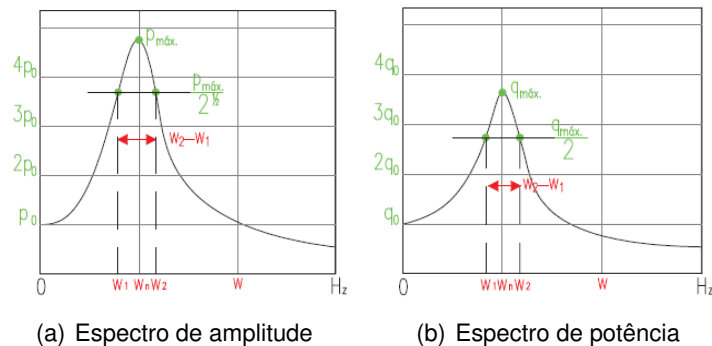


Figura 1.3: Função de densidade espectral [35]

O método BFD não permite identificar modos com frequências próximas e não estima corretamente os amortecimentos modais. O método FDD é a evolução do método BFD pois o método FDD resolve as duas limitações do método BFD apresentadas anteriormente.

Ao longo do tempo foram-se realizando diversos estudos com vista à obtenção dos parâmetros modais das estruturas. Kim e Choi [17], apresentam uma análise estática não linear que permite dimensionar com base na análise “pushover” amortecedores secundários de estruturas através da obtenção do fator de participação modal do modo fundamental da estrutura.

Autores como Park e al [26], propõem um método baseado em análises “pushover”, em que a combinação dos fatores de participação modal, permite prever a resposta inelástica da estrutura quando sobre ela atua um sismo. A determinação da massa modal pode ser utilizada para se determinar a magnitude do fator de participação modal e também é possível estimar-se como é que a excitação submetida na base da estrutura é distribuída para cada modo da estrutura na análise sísmica [27].

Reinoso e Miranda [28], apresentam um método que permite estimar as acelerações laterais em arranha-céus quando o vento atua na estrutura. Estas acelerações são obtidas através da aproximação do comportamento dinâmico da estrutura, com recursos aos modos de vibração, das razões entre os períodos e através dos fatores de participação modal da estrutura.

Bracci [5], apresenta um procedimento simplificado que através do conhecimento do fator de participação modal e dos modos de vibração da estrutura torna possível realizar a monitorização das estruturas de betão (edifícios).

Neste trabalho focam-se os algoritmos de identificação que permitem determinar as frequências, os modos de vibração da estrutura, o fator de participação modal e a massa modal da estrutura. O fator de participação modal de massa permite avaliar a importância de um determinado modo de vibração na resposta de uma estrutura quando submetida à ação sísmica. Os modos com menores fatores de participação de massa são menos prováveis de serem excitados por um movimento na base. É necessário que se estime os fatores de participação modal e dos modos de vibração de modo à que a análise a resposta sísmica seja feita de uma forma correta.

A massa modal é um valor representativo da massa da estrutura correspondente a um modo específico. Este valor é utilizado no dimensionamento de certos tipos de aparelhos de amortecimentos [15].

Por fim, é de salientar que a identificação modal é deveras interessante, visto que reúne temas com origem em diversas áreas como a engenharia mecânica, engenharia civil, engenharia eletrotécnica, engenharia eletrotécnica que se interliga com a engenharia de controlo de sistemas.

Capítulo 2

Representação e modelação de sistemas dinâmicos

2.1 Modelação de Sistemas dinâmicos

Os sistemas mecânicos (sistemas físicos reais) são sistemas que contêm massas ou inércias, amortecimentos e rigidez. Em engenharia civil, a maioria dos sistemas mecânicos podem ser resolvidos recorrendo-se a um número finito de graus de liberdade.

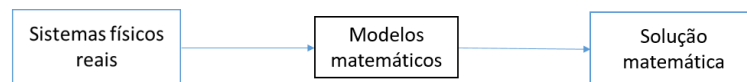


Figura 2.1: Transformação de sistemas reais para soluções matemáticas

Define-se o grau de liberdade como o “*número de movimentos independentes necessários para se definir as configurações deformadas do sistema*” [9].

O modelo matemático representa o sistema idealizado, incluindo todas as hipóteses simplificativas, geralmente representado por equações diferenciais ordinárias independentemente do tipo de sistema. A figura 2.2 mostra a forma mais simples de se idealizar um sistema mecânico, ao considerar-se um sistema com um grau de liberdade [32].

2.2 Equação de movimento no domínio do tempo

A equação (2.1) expressa o equilíbrio dinâmico do sistema mecânico representado na figura 2.2

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (2.1)$$

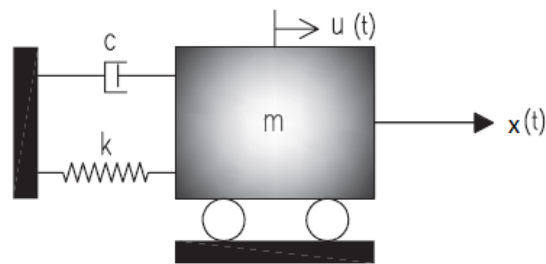


Figura 2.2: Modelação do sistema mecânico

Existem várias formas de se resolver esta equação diferencial.

- Integral de Duhamel
- Transformada de Fourier
- Integração numérica (Métodos Incrementais no tempo)
- Espaço de estados, no domínio do tempo

Dentro a integração numérica os métodos mais usuais são:

- Interpolação linear da excitação
- Lei da variação da aceleração (ex: Método de Newmark)
- Diferenças Finitas

2.2.1 Método de Newmark

Dos métodos de integração acima indicados apresenta-se de seguida o método de Newmark, visto que foi implementado na aplicação numérica desenvolvida neste trabalho. Este método permite obter a solução para problemas de estruturas dinâmicas, aplicando-se a estruturas com vários graus de liberdade e para qualquer tipo de relação entre força aplicada e a resposta pretendida.

2.2.2 Procedimentos básicos do método de Newmark

No ano de 1959 N.M. Newmark desenvolveu uma série de métodos incrementais no tempo baseados nas seguintes equações

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + (fs)_{i+1} = p_{i+1} \quad (2.2)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1 - \gamma)]\ddot{u} + [\gamma\Delta t]\ddot{u}_{i+1} \quad (2.3)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (\Delta t)\ddot{u}_i + [(0.5 - \beta)(\Delta t)^2]\ddot{u} + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{u}_{i+1} \quad (2.4)$$

Os parâmetros β e γ definem a variação de aceleração que incide sobre o sistema relativamente ao passo de tempo que é introduzido inicialmente. Estes dois parâmetros também determinam a precisão e a estabilidade do método. A escolha natural destes parâmetros é γ igual a 1/2 e β entre 1/6 e 1/4, satisfazendo assim as condições de estabilidade e precisão do método. As equações (2.3) e (2.4) combinadas com a equação (2.2), no final de cada passo de tempo, são os passos básicos do método, gera-se u_{i+1} , \dot{u}_{i+1} e \ddot{u}_{i+1} para um passo de tempo $i + 1$; sendo que é possível conhecer-se u_i , \dot{u}_i e \ddot{u}_i no tempo i .

2.2.3 Passos do método de Newmark

Método de aceleração média $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$

Método de aceleração linear $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/6$

1. Condições iniciais

(a) $\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - cu_0 - ku_0}{m}$

(b) Escolher Δt

(c) $\hat{k} = k \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m$

(d) $a = \frac{1}{\beta \Delta t} m + \frac{\gamma}{\beta} c; b = \frac{1}{2\beta} m + \Delta t (\frac{\gamma}{2\beta} - 1) c$

2. Cálculos para cada passo de tempo, i

(a) $\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + a \dot{u}_i + b \ddot{u}_i$

(b) $\Delta u_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}}$

(c) $\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t (1 - \frac{\gamma}{2\beta}) \ddot{u}_i$

(d) $\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i$

(e) $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i, \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i, \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i$

3. Repetir o processo no passo de tempo seguinte [9]

O método de Newmark é um método geral que pode ser aplicado a sistemas com múltiplos graus de liberdades, lineares e não lineares.

É um método exato quando o incremento da força é linear, tornando-se um método numericamente muito eficaz, pelo facto de as fórmulas que o regem serem obtidas a partir da equação do movimento.

O método de Newmark estabiliza se $\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}}$, para $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$ se $\frac{\Delta t}{T_n} < \infty$. O método deve garantir convergência, a estabilidade e a exatidão da solução [9].

2.3 Representação dos sistemas dinâmicos em espaço de estados

As equações de equilíbrio dinâmico podem ser reescritas em outro sistema com mais equações diferenciais mas de grau inferior. Tal possibilita obter a resolução da equação por processos matemáticos mais simples. Esta formulação é conhecida como espaço de estados.

A formulação de sistemas dinâmicos segundo a Teoria de Espaço é bastante geral e muito utilizada. O sistema contém variáveis de entrada e variáveis de saída.

2.3.1 Definições

Variáveis de entrada $u(t)_1, u(t)_2, u(t)_3, \dots, u(t)_n$, representam a excitação exterior que é aplicada a estrutura.

Variáveis de Saída $y(t)_1, y(t)_2, y(t)_3, \dots, y(t)_n$ representam a resposta do sistema face a ações acima mencionadas, podendo estas ser medidas.

As variáveis de estado representam o conjunto de variáveis que é possível conhecer os valores em determinado instante de t_0 . É possível prever a evolução de qualquer intervalo de tempo posterior a t_0 $[t_0, t]$, à custa dos valores de entrada ao longo do intervalo.

Chama-se vetor de estado o vetor $x(t)$ que é constituído pelas n variáveis de estado necessárias para definir o sistema. Sendo espaço n -dimensional em que os eixos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ estão em correspondência com as n variáveis de estado, a que se denomina de espaço de estados.

2.3.2 Forma geral da equação de estado

As variáveis podem ser colocadas em vetores originando as seguintes equações

$$\dot{u} = f(x, u, t) \quad (2.5)$$

$$y(t) = h(x, u, t) \quad (2.6)$$

Como o presente trabalho trata de sistemas lineares Invariantes no tempo, as equações (2.5) e (2.6) não dependem do tempo. Desta forma, estas podem ser reescritas em espaço de estados da seguinte forma [25]

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (2.7)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (2.8)$$

Sendo \mathbf{A} a matriz de estado de dimensões $[n \times n]$, que contém as características do sistema, neste caso a massa, o amortecimento e a rigidez. A matriz \mathbf{B} é a matriz de entrada de dimensões $[n \times r]$, que representa as forças exteriores do sistema e a forma como as forças são introduzidas no sistema.

A matriz de saída \mathbf{C} de dimensões $[m \times n]$, representa como as variáveis de saída são extraídas do sistema. A matriz de transmissão direta \mathbf{D} de dimensões $[m \times r]$, representa o comportamento do sistema, como as variáveis entram e saem do sistema.

2.3.3 Equação do movimento de um pórtico de três andares em espaço de estados

O comportamento da estrutura será determinado através da posição da estrutura em cada intervalo de tempo.

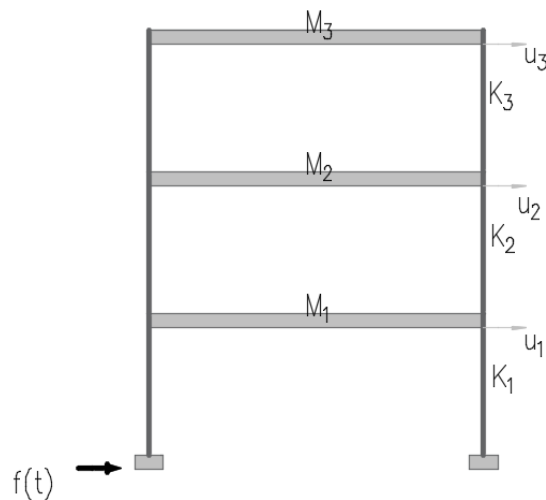


Figura 2.3: Pórtico de 3 andares

Tomando como exemplo de estudo um pórtico no plano de três andares rígidos, representado na figura 2.3, a ordem do sistema é de seis, diretamente proporcional ao número de variáveis de estado.

$$\dot{x} = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (2.9)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (2.10)$$

12CAPÍTULO 2. REPRESENTAÇÃO E MODELAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

O vetor de estado, $x(t)$, contém as coordenadas generalizadas e as suas derivadas

$$x(t) = [x_{f_1}(t) \quad x_{f_2}(t) \quad x_{f_3}(t) \quad \dot{x}_{f_1}(t) \quad \dot{x}_{f_2}(t) \quad \dot{x}_{f_3}(t)]^T$$

O vetor de saída, $y(t)$ contém as variáveis de saída. As grandezas medidas; podem ser deslocamentos, velocidades e acelerações. O vetor apresenta-se da seguinte forma

$$y(t) = [\ddot{x}_{f_1}(t) \quad \ddot{x}_{f_2}(t) \quad \ddot{x}_{f_3}(t)]^T$$

Desta forma, a passagem da equação do movimento para a forma de espaço de estado é feita da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}\ddot{x}(t) + \mathbf{C}\dot{x}(t) + \mathbf{K}x(t) = F(t)$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\ddot{x}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{x}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}x(t) = \mathbf{M}^{-1}F(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{x}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}x(t) = \mathbf{M}^{-1}F(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{x}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}x(t) + \mathbf{M}^{-1}F(t)$$

sendo que

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{M}_s^{-1}F(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.4 Modelação no domínio da frequência

A resposta da estrutura é descrita em funções de transferência.

O sistema é modelada através da função de transferência, pela função de transferência tem-se a possibilidade de se conhecer as frequências dos sinais e as relações existentes entre as amplitudes dos sinais de entrada e dos sinais de saída.

A função de transferência, $H(s)$, de um sistema dinâmico linear invariante no tempo relaciona as transformadas de Laplace dos sinais de entrada, $Y(s)$ e de saída, $U(s)$ da equação 2.13

$$H(s) = Y(s)/U(s) \quad (2.13)$$

As formas mais conhecidas para se representar as respostas FRF (função de resposta em frequências), são aquelas que usam o diagrama de Bode, o diagrama de Nichols e o diagrama de Nyquist.

A função FRF pode ser determinada com o uso da transformada de Laplace ou recorrendo à transformada de Fourier. A utilização de uma abordagem ou de outra depende muito do tipo de força que atua na estrutura. A transformada de Fourier é a particularização da Transformada de Laplace ao eixo $s = j\omega$ [24]. Em que ω representa a frequência da excitação.

2.4.1 Função de Transferência

As funções de transferências são utilizadas para caracterizar a relação entre os sinais de entrada e sinais de saída de sistemas lineares invariantes no tempo no domínio de Laplace.

O sistema linear invariante no tempo pode ser representado em função de transferência representada pela equação (2.14).

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (2.14)$$

sendo que $y(t)$ representa a saída do sistema e $u(t)$ a entrada. Admitindo condições iniciais nulas obtém-se a função de transferência $G(s)$, equação (2.15) através das transformadas de Laplace de ambos os membros da equação (2.14).

A equação (2.15) representa a função de transferência quando se tem somente uma entrada e uma saída.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.15)$$

A ordem do sistema é dada pela maior potência de “ s ” que se encontra no denominador. A função de transferência $G(s)$ não transmite qualquer informação referente às características físicas do sistema, existindo então “ n ” possibilidades para se relacionar as entradas e saídas do sistema [25].

Tal implica que dois sistemas distintos podem ser representados pela mesma função de transferência.

Os números reais ou complexos que anulam o denominador da equação (2.15) denominam-se como os pólos e os números reais ou complexos que anulam o numerador denominam-se por zeros.

É possível representar a função de transferência da seguinte forma:

$$G(s) = \hat{K} \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (2.16)$$

quando $m < n$, em que “ \hat{K} ” é uma constante, p_1, p_2, \dots, p_n e z_1, z_2, \dots, z_n são os polos e os zeros da função de transferência respectivamente.

Contudo, há que ter em atenção que em Engenharia civil a grande parte das estruturas apresentam sistemas MIMO (Multiple Output, Multiple Input). Para estes sistemas, a função de transferência passa a ser tratada sob a forma matricial, sendo possível relacionar cada par de sinais de saída e entrada matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \cdots \\ U_r(s) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.5 Conversão da função de transferência para espaço de estados

Considere-se um sistema representado pela função de transferência do terceiro grau representada pela equação (2.18)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} \quad (2.18)$$

$$(s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3)Y(s) = b_0U(s) \quad (2.19)$$

Para sistemas em que não se têm as derivadas nas entradas do sistema, a variável “ y ” representa as “ n ” variáveis de estado do sistema e para as suas “ $n - 1$ ” primeiras derivadas, neste caso as duas primeiras derivadas por se tratar de uma função de transferência do terceiro grau [25]:

$$x_1(t) = y(t) \quad (2.20)$$

$$X_1(s) = Y(s) \quad (2.21)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t) \quad (2.22)$$

$$X_2(s) = sY(s) \quad (2.23)$$

$$x_3(t) = \ddot{y}(t) \quad (2.24)$$

$$X_3(s) = s^2Y(s) \quad (2.25)$$

com isso

$$sX_1(s) = X_2(s) = sY(s) \quad (2.26)$$

$$sX_2(s) = X_3(s) = s^2Y(s) \quad (2.27)$$

$$sX_3(s) = s^3Y(s) = -a_1s^2Y(s) - a_2sY(s) - a_3Y(s) + b_0u \quad (2.28)$$

$$sX_3(s) = -a_1s^2X_3(s) - a_2sX_2(s) - a_3X_1(s) + b_0u \quad (2.29)$$

se pode escrever na forma matricial as equações da seguinte forma

$$sQ(s) = \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}U(s) == \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} X(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} U(s) \quad (2.30)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}X(s) + \mathbf{D}U(s) = [1 \ 0 \ 0] X(s) + 0 \cdot U(s) \quad (2.31)$$

O Matlab contém uma ferramenta “tf2ss” “Transfer function to state space”, que transforma sistemas escritos sob a forma de função de transferência em sistemas escritos sob a forma de espaço de estados. As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} , podem ser escritas na “forma companheira” (forma canónica) diretamente da função de transferência, onde o polinómio característico no denominador é mónico, isto é, tem o coeficiente do termo de mais alto grau (s^n) igual a 1. A forma companheira é também chamada de “forma controlável” pois os sistemas nesta forma são sempre controláveis.

2.6 Conceito de Controlabilidade

Um sistema é controlável se for possível transferir a ação de controlo $u(t)$ de um estado inicial $x(t_0)$ para um estado final $x(t_f)$, partindo do princípio que a ação $u(t)$ não foi restringida [34]. O controlo é feito através da matriz de controlo \mathbf{W} , que depende da matriz de estado \mathbf{A} e da matriz de entrada \mathbf{B} [25].

A matriz de controlabilidade \mathbf{W} é dada pela equação 2.32.

$$\mathbf{W} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2.32)$$

“Um sistema, ou o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , é controlável em $x(t_0)$, se existir um sinal de entrada $u(t)$, seccionalmente contínuo, que conduza o sistema para um estado final arbitrário $x(t_f)$ num intervalo de tempo finito $\Delta t = t_f - t_0 > 0$. Se o estado inicial $x(t_0)$ for igualmente arbitrário o par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) é denominado completamente controlável.”[25].

Forma canônica de controlabilidade

No domínio da frequências, a função de transferência $G(s)$ é apresentada pela equação (2.33), [25]

$$G(s) = \frac{b_r + s^r + b_{r-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.33)$$

decompõe-se a função (2.33) em duas funções de transferência

$$F(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{D(s)} \quad (2.34)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = N(s) \quad (2.35)$$

sendo que $N(s)$, corresponde ao numerador de $G(s)$ e $D(s)$ ao denominador, com isso observa-se que

$$Z(s) = \frac{U(s)}{D(s)} \quad (2.36)$$

e

$$Y(s) = N(s)Z(s) \quad (2.37)$$

pelo que

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Z(s) = U(s) \quad (2.38)$$

$$(b_r + b_{r-1}s^{r-1} + \dots + b_1s + b_0)Z(s) = Y(s) \quad (2.39)$$

quando se exprime a equação (2.38) através de variáveis de fase assumindo $x_1 = z, \dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n$ e pelo fator de

$$y(t) = b_r \frac{d^r}{dt^r} z(t) + b_{r-1} \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} z(t) + \dots + b_1 dz(t) + b_0 z(t) \quad (2.40)$$

tem-se finalmente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.41)$$

$$y(t) = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_r \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + 0u(t) \quad (2.42)$$

Esta realização em espaço de estados chama-se a forma canónica de controlabilidade.

2.7 Conceito de Observabilidade

Um sistema é observável, se durante um intervalo finito $[t_0, t_f]$, for possível determinar-se qualquer estado inicial $x(t_0)$ a partir das medições do sinal de saída $y(t_f)$.

O sistema é completamente observável quando se consegue observar todos os estados do sistema dinâmico. O controlo é feito através da matriz de controlo Q que depende da matriz de estado A e da matriz de saída C [25].

A matriz de observabilidade é definida da seguinte forma, equação 2.43.

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ C(A^{n-1}) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Diz-se que um sistema é representado segundo a formulação de espaço de estados quando é completamente observável se e só se a matriz Q tiver característica “ n ”.

Forma Canónica de Observabilidade

Considere-se o sistema representado pela função de transferência (2.15), com “ $m = n$ ”. Multiplicando-se os polinómios associados ao numerador de $G(s)$, designados por $N(s)$ e ao denominador $D(s)$, por s^{-n} e fazendo-se a multiplicação cruzada, tem-se [25]

$$(1 + a_{n-1}s^{-1} + a_{n-2}s^{-2} + \dots + a_1s^{-(n-1)} + a_0s^{-n})Y(s) = U(s)(b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \dots + b_1s^{-(n-1)} + b_0s^{-n})$$

18CAPÍTULO 2. REPRESENTAÇÃO E MODELAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

Aplicando o operador da transformada de Laplace inverso e ao mesmo tempo integrando-se, obtém-se:

$$y(t) = b_n u(t) + \int_0^t b_{n-1} u(\tau) - a_{n-1} y(\tau) d(\tau)$$

$$+ \int \int_0^t b_{n-2} u(\tau) - a_{n-2} y(\tau) d(\tau) d(\tau) + \int_0^t \dots \int_0^t b_0 u(\tau) - a_0 y(\tau) d(\tau) \dots d(\tau)$$

$$x_1(t) = \int_0^t (b_0 u(\tau) - a_0 y(\tau)) d(\tau) \quad (2.44)$$

$$x_2(t) = \int_0^t b_1 u(\tau) - a_1 y(\tau) + x_1(\tau) d(\tau) \quad (2.45)$$

⋮

$$x_n(t) = \int_0^t b_{n-1} u(\tau) - a_{n-1} y(\tau) + x_{n-1}(\tau) d(\tau) \quad (2.46)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \quad (2.47)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u(t) \quad (2.48)$$

As equações (2.47) e (2.48) representam os sistemas em espaço de estados na forma canónica de observabilidade.

Capítulo 3

Algoritmo de identificação dos parâmetros modais

Os parâmetros modais podem ser obtidos resolvendo os problemas diretamente, ou seja, com recurso às matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento.

No presente capítulo, pretende-se obter os parâmetros modais de sistemas dinâmicos a partir do espaço de estados identificado. Serão apresentados os procedimentos de cálculo necessários para se obter os parâmetros modais.

É possível resolver os problemas de identificação de sistemas quando se tem os problemas nas seguintes formas: dado um número elevado de entradas e um número elevado de saídas (sistemas MIMO) ou somente uma entrada e uma saída (sistemas SISO). Gera-se um sistema composto pelas matrizes A , B , C e D arbitrárias e sem características físicas específicas [13].

O método de identificação de sistemas lineares em espaço estados recorre a algoritmos que necessitam dos sinais de entrada e das respostas das estruturas. Este método surgiu por volta dos anos 90, e baseia-se na junção de três teorias de sistemas, a teoria Geométrica, a teoria Numérica e a teoria de Álgebra Linear.

Apresentam-se, seguidamente os conceitos gerais da identificação de sistemas que a grande maioria dos algoritmos de identificação de sistemas se baseia. Existem dois passos básicos que estão em todos os sistemas de identificação:

1. Faz-se uma projeção oblíqua de um certo número de sub-espacos que são gerados a partir dos dados iniciais, para que desta forma seja possível estimar a forma mais estendida da matriz de observabilidade

$$Q_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}$$

ou estimar os estados de um sistema \tilde{X}_i desconhecido (sistema aleatório).

A projeção dos sub-espacos predefinidos pela matriz de Hankel é um dos elementos chaves contidos nos algoritmos de sub-espacos na identificação de sistemas. Pela matriz de Hankel obtém-se uma previsão das saídas do sistema. Sendo a primeira matriz $U_{0|i-1}$, contendo os elementos de entrada do sistema

$$U_{0|i-1} = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & \cdots & u_{i+j-2} \end{bmatrix},$$

E a segunda, a matriz $Y_{0|i-1}$ contém os futuros elementos de saída do sistema

$$Y_{0|i-1} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{i-1} & y_i & \cdots & y_{i+j-2} \end{bmatrix},$$

Para se obter os sub-espacos é necessário estimar o sistema \tilde{X}_i da sequência de X_i e chegar a matriz completa de observabilidade Q_i [37].

A matriz Q_i pode ser recuperada a partir das matrizes $Y_{0|i-1}$ e $U_{0|i-1}$. Têm-se então duas classes de algoritmos. A primeira classe de algoritmos utiliza os estados estimados \tilde{X}_i na forma de vetores singulares para se chegar as matrizes do espaco de estado final. O N4SID (Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems) [37], e CVA (Canonical variate analysis in identification) [19], são alguns dos algoritmos que seguem esta metodologia.

A outra classe de algoritmos utiliza a matriz completa de observabilidade Q_i para se chegar as matrizes do espaco de estado final. O MOESP (Multivariable Subspace Identification) [40], IV-4SID, e basic-4SID [13] são os alguns dos algoritmos que seguem esta metodologia.

2. O segundo passo consiste em recuperar a matriz de observabilidade completa, dividir a matriz em sub-matrizes e assim estimar-se os

estados, conseqüentemente às matrizes **A**, **B**, **C** e **D**.

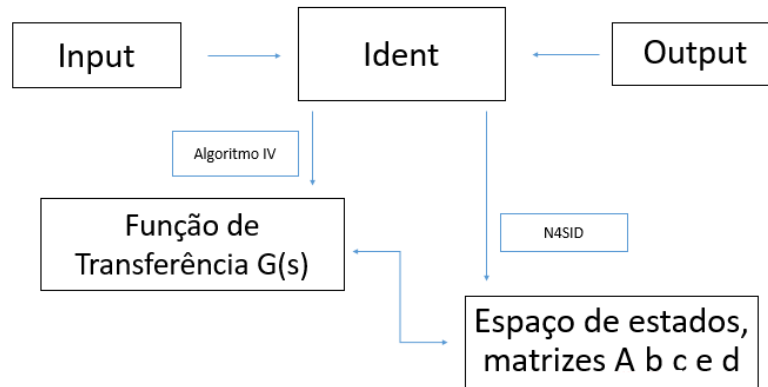


Figura 3.1: Obtenção do sistema arbitrário através do ident

Neste trabalho o algoritmo N4SID foi utilizado para identificar o sistema em espaço de estados e o algoritmo IV (variável instrumental) foi utilizado para identificar a função de transferência do sistema como mostra a figura 3.1. Ambos algoritmos encontram-se disponível na ferramenta “ident” do Matlab.

Utilizou-se a ferramenta “ident”, onde se introduziu o sinal de entrada “ u ” e o sinal de saída y_i , obtendo-se o espaço de estados representado nas equações (3.1) e (3.2).

Um fator preponderante a ter em atenção diz respeito à normalização dos modos ou seja, para calcular os parâmetros modais relativos ao andar (n) é necessário normalizar-se os modos de vibração em relação ao modo (n).

Dado que o algoritmo N4SID considera os sinais de entrada e os sinais de saída, existem “ n ” possibilidades de se conectar os dois sinais, indicando que as matrizes \bar{A} , \bar{b} , \bar{c} e \bar{d} têm valores arbitrários. A estas matrizes deu-se o nome de matrizes arbitrárias [15].

$$\dot{\bar{z}} = \bar{A}\bar{z} + \bar{b}u \quad (3.1)$$

$$y = \bar{c}\bar{z} + \bar{d}u \quad (3.2)$$

Onde \bar{z} representa as variáveis de estado e as matrizes \bar{A} , \bar{b} , \bar{c} e \bar{d} são as matrizes obtidas através do sistema de identificação. Estas matrizes não contêm qualquer significado físico. Isso implica que dois sistemas distintos podem ter exatamente a mesma representação em espaço de estados.

3.1 Identificação dos parâmetros modais

Neste secção será feita a validação dos algoritmos. O algoritmo de extração dos parâmetros dinâmicos têm como base o artigo “Modal Parameters Estimation of Building Structures from Vibration Test Data Using Observability Measurement”, desenvolvido pelos autores, Jae-Seung Hwang, Hongjin Kim e Bong-Ho Cho. Os parâmetros modais da estrutura podem ser obtidos pela análise da matriz de observabilidade e de controlabilidade.

Neste trabalho o foco principal incide sobre a massa modal e o fator de participação modal. O algoritmo permite, desde que não se altere a base do algoritmo obter os dois parâmetros modais.

Utilizando-se a matriz de observabilidade, é possível transformar um espaço de estados arbitrário obtido pelo sistema de identificação num espaço de estados típico com significado físico.

Os parâmetros modais podem ser obtidos baseando-se na matriz de transformação dos dois sistemas, arbitrário e típico.

Considera-se um sistema representado no espaço de estados, equação (3.3), em que

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -PM \end{bmatrix} P(t), \quad z = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

PM_p é o parâmetro modal, $\mathbf{0}$ é a matriz de zeros e \mathbf{I} é a matriz identidade do tipo $[n \times n]$, x é o vetor dos deslocamentos de tamanho $[n \times 1]$ e $P(t)$ é o vetor que representa a força exterior do tipo $[n \times 1]$.

A equação do movimento pode ser escrita segundo as coordenadas modais que por sua vez também pode ser transformada em equações em espaço de estados contínuas, no domínio do tempo sem se perderem as características físicas, o sistema (3.3), pode ser diretamente escrito em coordenadas modais. Obtém-se os pólos através de $|\Lambda_i I - A| = 0$

$$\dot{\bar{z}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ [\omega^2] & [2\xi_i \omega_i] \end{bmatrix} \bar{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ -PM \end{bmatrix} P(t)_i, \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde η é vetor dos deslocamentos generalizado em espaço de estados, sendo que

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$[2\xi_i\omega_i] = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

PM_p é vetor de tamanho $[n \times 1]$ que contém os n valores dos parâmetros modais.

Onde ω_i , ξ_i , PM_p , representam a frequência modal, o amortecimento modal, o parâmetro modal.

O conjunto de matrizes \bar{A} , \bar{b} , \bar{c} e \bar{d} , presente nas equações (3.1) e (3.2), obtido pelo Ident apresenta valores arbitrários sem significado físico. O sistema arbitrário pode ser transformado num sistema típico com significado físico presente na equação (3.3).

A equação (3.3) representa o sistema típico em espaço de estados no espaço físico, enquanto que a equação (3.4) representa o sistema típico em espaço de estados em componentes modais.

3.2 Matriz de transformação

É possível fazer uma transformação linear das variáveis de estado sem que os pólos do sistema sejam afetados. Esta transformação permite estabelecer uma relação entre o sistema típico e o sistema arbitrário. Se a matriz T transformar a variável de estado na equação (3.1) para variável de estado z , equação (3.3) a relação é dada pela seguinte equação

$$z = T\bar{z} \quad (3.7)$$

Substituindo-se nas equações (3.1) e (3.2) obtém-se

$$\dot{z} = T^{-1}AT\bar{z} + T^{-1}bu \quad (3.8)$$

$$y = cT\bar{z} + du \quad (3.9)$$

em que,

$$TA = \bar{A}T \quad (3.10)$$

$$Tb = \bar{b} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}}\mathbf{T} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}} \quad (3.13)$$

Ao multiplicar-se a equação (3.10) por \mathbf{b} obtém-se

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{b}} \quad (3.14)$$

Se a equação (3.10) for multiplicando sucessivamente por $\mathbf{A}\mathbf{b}$ obtém-se

$$\mathbf{T}\mathbf{A}^2\mathbf{b} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{b}} \quad (3.15)$$

naturalmente que se se for multiplicando a equação (3.10) por $\mathbf{A}^2\mathbf{b}, \mathbf{A}^3\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{2n-1}\mathbf{b}$ resulta a seguinte relação

$$\mathbf{T} [\mathbf{b} \quad \mathbf{b}\mathbf{A} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{2n-1}\mathbf{b}] = [\bar{\mathbf{b}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{b}} \quad \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{b}} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{A}}^{2n-1}\bar{\mathbf{b}}] \quad (3.16)$$

A equação (3.16) pode ser simplificada utilizando-se a matriz de controlabilidade em espaço de estados [7],

$$\mathbf{T}\mathbf{W} = \bar{\mathbf{W}} \quad (3.17)$$

onde \mathbf{w} e $\bar{\mathbf{w}}$ representam a matriz de controlabilidade do sistema típico e do sistema arbitrário respetivamente.

Se as equações (3.10) e (3.12) forem multiplicadas $\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}, \dots, \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}^{2n-1}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{2n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}^{2n-1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

A equação (3.18) pode ser reescrita, utilizando-se a matriz de observabilidade em espaço de estados como

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{Q}} \quad (3.19)$$

onde \mathbf{Q} e $\bar{\mathbf{Q}}$ representam a matriz de observabilidade do sistema típico e do sistema arbitrário respetivamente.

Através das equações (3.17) e (3.19) definem a matriz de observabilidade que é dada por

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \bar{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{R} \\ \mathbf{T} = \bar{\mathbf{Q}}^{-1}\mathbf{Q} \end{cases} \quad (3.20)$$

A matriz de transformação é a mesma, independentemente se for obtida a partir das matrizes de observabilidade ou das de controlabilidade, pelo que se pode estabelecer a seguinte relação:

$$\mathbf{Q}\mathbf{W} = \bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{W}} \quad (3.21)$$

A relação presente na equação (3.21) não é só válida para sistemas arbitrários e típicos mas também para dois sistemas arbitrários em espaço de estados. Isto é, essa relação deve manter-se entre dois modelos de estado definidos em dois espaço de estados diferentes.

Portanto, pode notar-se que uma transformação pode ser realizada para um espaço de estado diferente, sem perder qualquer informação.

As frequências e os coeficientes de amortecimentos também são obtidos por meio equações (3.1) e (3.2), através das matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{c}}$.

Como tal, a equação (3.21) pode ser reescrita utilizando as matrizes simétricas de dimensão $[2n \times 2n]$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}\mathbf{b} & \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}\mathbf{A}^{2n-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{c}\mathbf{A}^2\mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}\mathbf{A}^{2n}\mathbf{b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{2n-1}\mathbf{b} & \mathbf{c}\mathbf{A}^{2n}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}\mathbf{A}^{4n-2}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{b}} & \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{b}} & \dots & \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}^{2n-1}\bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{b}} & \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{b}} & \dots & \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}^{2n}\bar{\mathbf{b}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}^{2n-1}\bar{\mathbf{b}} & \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}^{2n}\bar{\mathbf{b}} & \dots & \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}^{4n-2}\bar{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Tomando as primeiras colunas, parâmetro modal pode ser calculado comparando as primeiras colunas da equação (3.22)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}\mathbf{b} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{2n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{b}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{A}}^{2n-1}\bar{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

A equação (3.23) simplifica-se utilizando-se as matrizes de observabilidade obtendo-se a equação

$$\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{Q}\mathbf{b} \quad (3.24)$$

Os primeiros n valores da matriz coluna \mathbf{b} são zeros, e equação (3.24) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times 1} \\ -\mathbf{P}\mathbf{M}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_1 \\ \bar{\mathbf{Q}}_2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{b}} \quad (3.25)$$

em que $Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, \dots$ e Q_{22} são sub-matrizes da matriz Q de dimensões $[n \times n]$. \bar{Q}_1 e \bar{Q}_2 são sub-matrizes de \bar{Q} com dimensão $[n \times 1]$.

$$PM_p = Q_{22}^{-1} \bar{Q}_2 \bar{b} \quad (3.26)$$

$$PM_p = b = T \cdot \bar{b} \quad (3.27)$$

Conclui-se que o parâmetro modal é dado pelas equação (3.26).

3.3 Obtenção do fator de participação modal

Para se calcular o fator de participação modal ou a massa modal a que ter em conta os seguintes passos

1. Considera-se um sistema SISO. O sinal de entrada u para se obter o fator de participação modal é um sismo que atua na base da estrutura e o sinal de saída é uma resposta y_i . Para se obter a massa modal o sinal de entrada passa a ser um impulso e o sinal de saída é uma resposta da estrutura (y_i).
2. Se se pretender obter o fator de participação do piso n é necessário utilizar-se a resposta do piso n . No caso da massa modal, assume-se que a resposta y_i é medida no mesmo local onde se aplica o impulso.
3. Na equação (3.3) substitui-se (PM) por $(-\{\Gamma\})$ se se pretender obter o fator de participação modal, originado a equação 3.30. Caso se pretenda obter a massa modal substitui-se (PM) por $\left[\frac{1}{M_i}\right]$, originando a equação (3.38).

3.4 Fator de participação modal

Tendo como base as condições acima enunciadas, a equação do movimento em coordenadas modais quando sujeita a uma excitação exterior (sismo) é dada por

$$M_i \ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 M_i \eta_i = \phi_{ki} L_n \{1\} \ddot{u}_g = L_n \{1\} \ddot{u}_g \quad (3.28)$$

em que ϕ_{ki} ($i = 1, \dots, n$) é o valor do elemento k do sinal de entrada na posição i do vetor modal. O \ddot{u}_g é a aceleração sísmica, ou seja, o sinal de entrada, L_n é o fator modal da excitação sísmica por andar e $\{1\}$ é o vetor de influência. O ϕ_{ki} presente na equação (3.28), assume-se como sendo 1. O sinal de saída pode ser simplesmente expresso como

$$\ddot{u}_p = [\phi_{p1} \quad \phi_{p2} \quad \cdots \quad \phi_{pn}] \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_i \\ \ddot{\eta}_i \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_i \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

em que ϕ_{pi} ($i = 1, \dots, n$) é o valor do elemento (p_i) do modo de vibração (i) que se assume que é 1 por estar parametrizado, \ddot{u}_u é a aceleração sísmica. As equações (3.28) e (3.29) podem ser escritas de outra forma, representando assim o espaço de estado típico

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ [\omega^2] & [2\xi_i\omega_i] \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\{\Gamma_i\} \end{bmatrix} \mathbf{L}_n \{\mathbf{1}\} \ddot{u}_g \quad (3.30)$$

$$y = \ddot{u}_g = \begin{bmatrix} -\omega^2 & \cdots & -\omega_n^2 & -2\xi_i\omega_i & \cdots & -2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \\ \dot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_m \end{bmatrix} - [\Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_n] \quad (3.31)$$

É possível calcular o fator de participação modal diretamente da equação (3.31) através da matriz d quando se trata de um sistema de um grau de liberdade. Contudo, quando se trata de um sistema com múltiplos graus de liberdade irá calcular-se o fator de participação modal através da matriz b . O fator de participação modal de um sistema de vários graus de liberdade é obtido equação (3.21).

Através das equações (3.30) e (3.31) é possível conhecer-se as matrizes A e c , obtêm-se assim a matriz de observabilidade (Q_i) do sistema.

$$\bar{Q}\bar{b} = Qb \quad (3.32)$$

Os primeiros n valores da matriz coluna b são zeros. A equação (3.46) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times 1} \\ \Gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix} \bar{b} \quad (3.33)$$

em que Q_{11} , Q_{12} , Q_{21} , \cdots e Q_{22} são sub-matrizes da matriz Q de dimensão $[n \times n]$. \bar{Q}_1 e \bar{Q}_2 são sub-matrizes de \bar{Q} de dimensão $[n \times 1]$.

$$\{\Gamma_n\} = Q_{22}^{-1} \bar{Q}_2 \bar{b} \quad (3.34)$$

$$\{\Gamma_n\}_p = \mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{b}} \quad (3.35)$$

O fator de participação modal (Γ_n) é dado pelas equações (3.48) e (3.49).

A partir do momento em que se obtém o sistema arbitrário presente nas equações (3.1) e (3.2), construído através do sinal de entrada u e do sinal de saída y do teste de vibração, as correspondentes matrizes de observabilidade (\mathbf{Q}) e de controlabilidade (\mathbf{R}) podem ser obtidas.

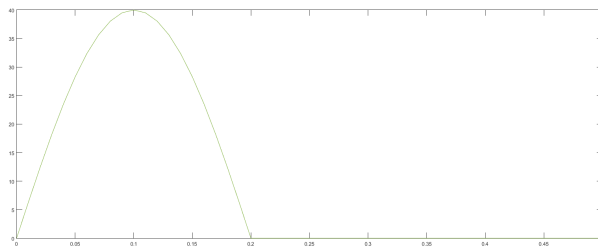


Figura 3.2: Impulso

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -m^{-1}k_0 & -m^{-1}c_0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} F, z = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

3.5 Obtenção da massa modal

A equação do movimento altera-se pois a excitação exterior passa a ser um impulso representado pela força (F) presente na equação (3.37).

$$\mathbf{M}\ddot{u} + \mathbf{C}\dot{u} + \mathbf{K}u = F \quad (3.37)$$

em que m , c , e k continuam a ser as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respetivamente de tamanho $n \times n$.

A equação do movimento pode ser escrita em coordenadas modais, segundo as componentes modais que, por sua vez também, pode ser transformada em equações de espaço de estados contínuas no domínio do tempo sem se perderem as características físicas representadas na equação (3.37).

$$\dot{\bar{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ [\omega^2] & [2\xi_i\omega_i] \end{bmatrix} \bar{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ (\frac{1}{M_i}) \end{bmatrix} F_i, \bar{z} = \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

O vetor contém η os deslocamentos generalizados em espaço de estados e a matriz $[\frac{1}{M_i}]$ define-se:

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\left[\frac{1}{M_i} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{M_n} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_n \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$[2\xi_i\omega_i] = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Baseando-se nas condições enunciadas, a equação do movimento quando um impulso atua na estrutura é dada por

$$M_i\ddot{\eta}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2 M_i\eta_i = \phi_{ki}F_0\delta_0 = F_0\delta(t) \quad (3.43)$$

em que ϕ_{ki} ($i = 1, \dots, n$) é o valor do elemento k do sinal de entrada na posição i do vetor modal. O F_0 é o impulso, ou seja, o sinal de entrada, $\delta(t)$ é a função delta de Dirac.

Por fim, obtém-se o sistema em espaço de estados representado pelas equações (3.44) e (3.45)

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ [\omega^2] & [2\xi_i\omega_i] \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{M} \end{bmatrix} F_0\delta(t) \quad (3.44)$$

$$y = \begin{bmatrix} -\omega^2 & \cdots & -\omega_n^2 & -2\xi_i\omega_i & \cdots & -2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \\ \dot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_n \end{bmatrix} - \left[\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} + \cdots + \frac{1}{M_n} \right] \quad (3.45)$$

Através das equações (3.44) e (3.45) é possível conhecer-se as matrizes A e c , as matrizes necessárias para e obter a matriz de observabilidade (Q_i)

do sistema.

$$\bar{Q}\bar{b} = Qb \quad (3.46)$$

Os primeiros n valores da matriz coluna b são zeros. A equação (3.46) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{n \times 1} \\ \frac{1}{M_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix} \bar{b} \quad (3.47)$$

em que Q_{11} , Q_{12} , Q_{21} , \dots e Q_{22} são sub-matrizes da matriz Q de dimensão $[n \times n]$. \bar{Q}_1 e \bar{Q}_2 são sub-matrizes de \bar{Q} de dimensão $[n \times 1]$.

$$\left\{ \frac{1}{M_i} \right\} = Q_{22}^{-1} \bar{Q}_2 \bar{b} \quad (3.48)$$

$$\left\{ \frac{1}{M_i} \right\}_p = b = T \cdot \bar{b} \quad (3.49)$$

O valor inverso da massa modal ($\frac{1}{M}$) é dado pelas equações (3.48) e (3.49).

3.6 Obtenção dos modos de vibração

Os modos de vibração podem ser obtidos diretamente a partir dos fatores de participação modal com base na relação entre os dois fatores. As relações entre os modos de vibração e o fator de participação pode ser deduzidas através das seguintes considerações

$$\{\Gamma_i\}_j = \frac{(\phi_i)_j^T M \{1\}}{(\phi_i)_j^T M (\phi_i)_j} \quad (3.50)$$

em que $\{\Gamma_i\}_j$ (fator de participação modal) é dado através dos modos de vibração (ϕ) e da matriz de massa da estrutura (M).

$(\phi_i)_j$ é o modo de vibração i normalizado em relação ao andar k . Sendo $(\phi_i)_k$ é o modo de vibração i normalizado em relação ao andar k ou seja $(\phi_i)_k$ relaciona-se com $(\phi_i)_j$ como é demonstrado na equação (3.52) [15]

$$(\phi_i)_k = \frac{(\phi_i)_j}{(\phi_{ki})_j} \quad (3.51)$$

Sendo " k " o elemento " i " do fator de participação modal normalizado em relação ao andar " j " o fator de participação modal pode ser obtido pela equação (3.52)

$$(\phi_{ki})_j = \frac{\{\Gamma_i\}_k}{\{\Gamma_i\}_j} \quad (3.52)$$

em que $\{\Gamma_i\}_k$ é obtido a partir do modo de vibração “ i ” normalizado em relação em relação ao andar “ i ” do elemento “ k ”.

$$\{\Gamma_i\}_p = \frac{1}{(\phi_{ki})} \frac{(\phi_i)_k^T M \{1\}}{(\phi_i)_k^T M (\phi_i)_k} = \frac{1}{(\phi_{ki})_j} \{\Gamma_i\}_k \quad (3.53)$$

assim, sendo “ k ” o elemento “ i ” do fator de participação modal normalizado em relação ao piso “ j ” pode ser obtido pela equação (3.52). Desta forma os modos de vibração podem ser obtidos a partir do fator de participação modal, através da equações (3.54)

$$(\phi_i)_k = \frac{(\phi_i)_j}{(\phi_{ki})_j} \quad (3.54)$$

onde $(\phi_i)_j$ é o modo de vibração i normalizado em relação ao andar k . Sendo $(\phi_i)_k$ o modo de vibração i normalizado em relação ao andar k , ou seja, $(\phi_i)_k$ relaciona-se com $(\phi_i)_j$ como é demonstrado na equação (3.18) [15].

3.7 Descrição do algoritmo de identificação dos parâmetros modais

Os algoritmos aqui descritos foram implementados em ambiente Matlab no âmbito desta dissertação. No âmbito da dissertação foi desenvolvida uma aplicação em ambiente Matlab [MPI (Modal Parameters Identification)] que permite extrair de forma automática os parâmetros modais a partir dos dados obtidos em ensaios dinâmicos. O algoritmo implementado é composto essencialmente pelos seguintes passos:

1. Obtenção das repostas (simuladas ou medidas) de uma estrutura conhecida.
2. Utilizar a função “Ident” para obter o sistema arbitrário, escrito sob a forma de função de transferência $G(s)$, equação 2.15.
3. Transformar o sistema arbitrário escrito em função de transferência num sistema arbitrário escrito em espaço de estados $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$, equações 3.1 e 3.2.
4. Obter as características dinâmicas, frequência (ω_i) e amortecimento (ξ_i) identificados.
5. As frequências e os amortecimento são usados para construir o sistema típico, (A, b, c, d) , equação 3.3.
6. Dos dois sistemas típico e arbitrário construir as respectivas matrizes de observabilidades, Q, \bar{Q} respetivamente

7. Obter a matriz de transformação através da seguinte equação, $\mathbf{T} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}}$
8. Da relação entre a matriz \mathbf{b} e a matriz $\bar{\mathbf{b}}$, a massa modal e fator de participação modal é dado por, $\left\{ \frac{1}{M_i} \right\}_p = \mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{b}}$ e $\{\Gamma_n\}_p = \mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{b}}$, respectivamente.

Capítulo 4

Aplicação do algoritmo de identificação dos parâmetros modais

Foram considerados três modelos numéricos na validação do algoritmo correspondentes a três edifícios com andares rígidos com 3, 8 e 5 andares.

Os ensaios analíticos realizados no pórtico de 8 andares servem para testar a capacidade (robustez do algoritmo) para um caso mais complexo.

4.1 Análise modal analítica

Para simulação numérica um pórtico de 3 andares, a massa, amortecimento, e a rigidez de cada andar são 22.758 kg , $6.50 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$, e $3,764 \text{ N}/\text{m}$, respetivamente.

No caso da simulação numérica de um pórtico de 8 andares, a massa, o amortecimento, e a rigidez de cada andar são 416.840 kg , $100 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$, e $227.270 \text{ N}/\text{m}$, respetivamente.

Para um pórtico de 5 andares, a massa, amortecimento, e a rigidez de cada andar são 416.840 kg , $100 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$, e $454.550 \text{ N}/\text{m}$, respetivamente.

Resolvendo o problema de valores e vetores próprios para as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} dos modelos numéricos, chegou-se aos seguintes resultados apresentados nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, para os pórticos de três, oito e cinco andares, respetivamente.

Tabela 4.1: Frequências teóricas e modos de vibração de um pórtico de 3 andares

Modos	1º andar	2º andar	3º andar	ω_i (rad/s)
ψ_1	0.591	0.737	0.328	5.723
ψ_2	-0.737	0.328	0.591	16.036
ψ_3	0.328	-0.591	0.737	23.173

Tabela 4.2: Frequências teóricas e modos de vibração de um pórtico de 8 andares

Andar	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ω_i (rad/s)
1°	0.089	-0.255	0.387	0.466	0.483	0.434	0.326	0.175	2.857
2°	0.175	-0.434	0.466	0.255	-0.089	-0.387	-0.483	-0.326	8.467
3°	0.255	-0.483	0.175	-0.326	-0.466	-0.089	0.387	0.434	13.764
4°	0.326	-0.387	-0.255	-0.434	0.175	0.466	-0.089	-0.483	18.561
5°	0.381	-0.175	-0.483	0.089	0.434	-0.326	-0.255	0.466	22.697
6°	0.434	0.089	-0.326	0.483	-0.255	-0.175	0.466	-0.387	26.041
7°	0.466	0.326	0.089	0.175	-0.387	0.483	-0.434	0.255	28.499
8°	0.483	0.466	0.434	-0.387	0.326	-0.255	0.175	-0.089	29.999

Tabela 4.3: Frequências teóricas e modos de vibração de um pórtico de 5 andares

Andar	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ω_i (rad/s)
1°	0.326	-0.548	-0.596	0.455	0.169	0.701
2°	-0.548	-0.455	-0.169	0.596	0.326	2.048
3°	0.596	-0.169	0.548	0.326	0.455	3.228
4°	-0.455	-0.596	0.326	-0.169	0.548	4.147
5°	0.169	0.326	-0.455	-0.548	0.596	4.730

4.2 Obtenção dos sinais de saída

As tabelas 4.4, 4.5 e 4.6 apresentam as simulações realizadas para cada pórtico. O sinal de entrada (input) pode ser um sinal qualquer (ruído branco), ou seja nesta fase não é necessário especificar o sinal de entrada. Depois da obtenção das características modais serão obtidas as respostas simuladas de um ensaio SISO. Os sinais de resposta foram obtidos usando o método numérico de Newmark, Com recurso ao método de Newmark.

Tabela 4.4: Sinais de entrada e saída dos 3 casos de um pórtico de 3 andares

Caso	input	output
1	Input	Aceleração do 1° andar
2	Input	Aceleração do 2° andar
3	Input	Aceleração do 3° andar

Tabela 4.5: Sinais de entrada e saída dos 8 casos para um pórtico de 8 andares

Caso	input	output
1	Input	Aceleração do 1° andar
2	Input	Aceleração do 2° andar
3	Input	Aceleração do 3° andar
4	Input	Aceleração do 4° andar
5	Input	Aceleração do 5° andar
6	Input	Aceleração do 6° andar
7	Input	Aceleração do 7° andar
8	Input	Aceleração do 8° andar

Tabela 4.6: Sinais de entrada e saída dos 5 casos para um pórtico de 5 andares

Caso	input	output
1	Input	Aceleração do 1º andar
2	Input	Aceleração do 2º andar
3	Input	Aceleração do 3º andar
4	Input	Aceleração do 4º andar
5	Input	Aceleração do 5º andar

4.3 Aplicação do Algoritmo

4.3.1 Pórtico com 3 andares

A obtenção do parâmetro modal (fator de participação modal) de um pórtico de 3 andares necessita que se siga os passos descritos na secção 3.7. Para obter-se os sinais de saída de um determinado andar é necessário normalizar-se os modos de vibração de acordo com respetivo andar como mostra a figura 4.1 e a tabela 4.7.

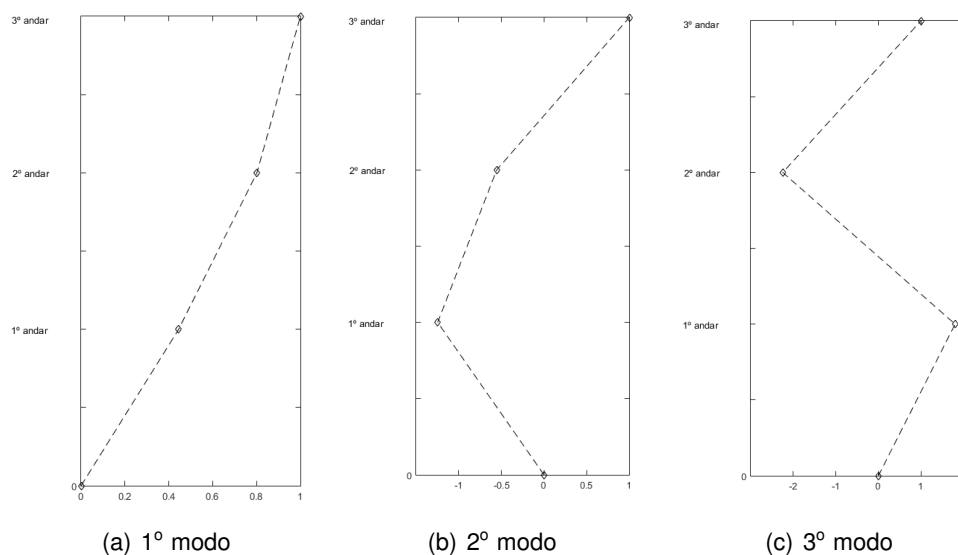


Figura 4.1: Modos de vibração do pórtico de 3 andares normalizados em relação ao 3º caso

Tabela 4.7: Modos de Vibração de um pórtico de 3 andares parametrizados em relação ao 3º andar

Andar	ψ_1	ψ_2	ψ_3
1º	0.445	-1.247	1.802
2º	0.801	-0.555	-2.247
3º	1	1	1

1. Para o pórtico de 3 andares, o sismo de Northridge é o sinal de entrada e a aceleração do primeiro andar como sinal de saída, apresentado na figura 4.2.

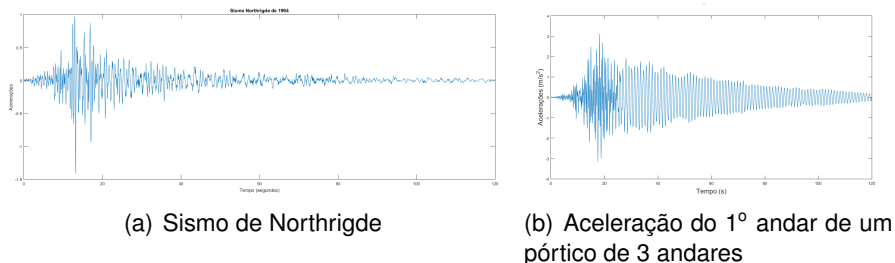


Figura 4.2: Sinais de entrada do 1º caso de um pórtico de 3 andares

2. A função de transferência obtida com recurso a função "ident" é apresentada na figura 4.3.

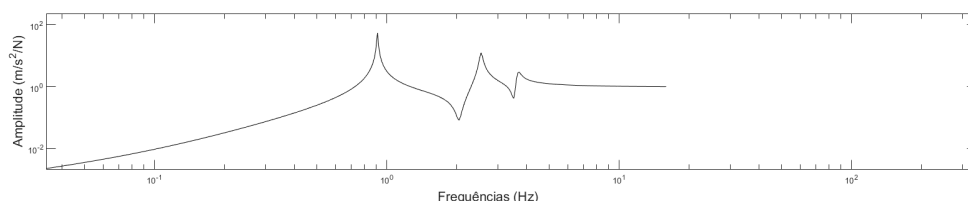


Figura 4.3: Função de transferência do 1º andar de um pórtico de 3 andares

3. As matrizes do sistema arbitrário em espaço de estados encontram-se apresentadas na tabela 4.8.

Tabela 4.8: Sistema arbitrário do 1º caso de um pórtico de 3 andares

A	-1.4069	-815.9005	-553.4873	$-1.6022 \cdot 10^5$	$-2.2888 \cdot 10^4$	$-4.4033 \cdot 10^6$
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0
b^T	1	0	0	0	0	0
\bar{c}	1.8880	160.8200	$1.0630 \cdot 10^3$	$7.8549 \cdot 10^4$	$6.6292 \cdot 10^4$	$4.3436 \cdot 10^6$
\bar{d}	0					

4. As características modais dinâmicas obtidas através do sistema arbitrário em espaço de estados encontram-se na tabela 4.9
5. A partir da frequência e do amortecimento constrói-se o sistema típico, tabela 4.10

Tabela 4.9: Frequência e amortecimento modal para o 1º caso de um pórtico de 3 andares

Andar	Análise modal direta				Algoritmo (ensaio experimental)		
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	$\omega_i(\text{rad/s})$	$\omega_i(\text{rad/s})$	Erro (%)	$\zeta_i(\%)$
1º	0.591	0.737	0.328	0.910	0.910	0.010	0.500
2º	-0.737	0.328	0.591	2.552	2.541	0.431	1.380
3º	0.328	-0.591	0.737	3.682	3.656	0.706	1.980

Tabela 4.10: Sistema típico do 1º caso de um pórtico de 3 andares

A	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1
	-32.723	0	0	-0.057	0	0
	0	-255.005	0	0	-0.441	0
	0	0	-527.695	0	0	-0.908
c	32.722	255.005	527.695	-0.057	-0.441	-0.908

6. Através do sistema típico e do sistema arbitrário obtém-se as matrizes de observabilidade. As matrizes de observabilidade do sistemas típico e do sistema arbitrário (devido o seu tamanho) foram subdivididas da seguinte forma

$$\bar{Q} = Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}$$

em que cada sub-matriz tem dimensão $[3 \times 3]$. As sub-matrizes encontram-se representadas pelas equações (4.1) e (4.2)

$$\bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1.88 & 160.820 & 1.063 \cdot 10^3 \\ 158.167 & -477.417 & 7.750 \cdot 10^4 \\ -699.943 & -5.154 \cdot 10^4 & -3.237 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 32.723 & 255.005 & 527.695 \\ 1.868 & 112.575 & 479.338 \\ -1.070 \cdot 10^3 & -6.507 \cdot 10^4 & -2.789 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

7. Tendo-se obtido as matrizes de observabilidade dos dois sistemas dos respectivos casos, é possível determinarem-se as respectivas matrizes de transformação "T", representada pela definição, equação dos (3.10).
8. Finalmente, através da matriz de transformação de cada caso, é possível a obtenção dos parâmetros modais dos respectivos casos. Com o fator de participação é possível definir-se os modos de vibração da estrutura, como se mostra na equação (3.17). Os modos de vibração parametrizados em relação ao terceiro andar encontram-se representados na tabela (4.12).

Tabela 4.11: Fatores de participação modal do 1º caso de um pórtico de 3 andares

Modos	Fator de participação modal		
	Análise modal direta	Algoritmo (ensaio experimental)	Erro (%)
1º	0.543	0.541	0.358
2º	0.978	0.337	3.438
3º	1.222	0.100	12.438

Tabela 4.12: Modos de vibração da estrutura parametrizados em relação ao 1º andar

Andar	ψ_1	ψ_2	ψ_3
1º	1	1	1
2º	1.801	0.445	-1.247
3º	2.247	-0.802	0.555

4.3.2 Pórtico com 8 andares

O segundo caso de estudo foi escolhido para testar a robustez do algoritmo e a avaliar a sua capacidade para resolver problemas mais complexos.

Para se obter o parâmetro modal (fator de participação modal) de um pórtico de 8 andares é necessário seguir-se os passos do algoritmo descritos na secção 3.7. Para obter-se os sinais de saída de um determinado andar é necessário normalizar-se os modos de vibração de acordo com respetivo andar como mostra a figura 4.4 e a tabela 4.13.

Tabela 4.13: Modos de vibração de um pórtico de 8 andares normalizados em relação ao quinto andar

Andar	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8
1º	0.203	1.457	-0.801	5.234	1.112	-1.328	-1.279	0.375
2º	0.452	2.478	-0.965	2.864	-0.205	1.184	1.891	-0.700
3º	0.659	2.756	-0.362	-3.666	-1.074	0.272	-1.515	0.903
4º	0.844	2.209	0.528	-4.871	0.403	-1.427	0.349	1.035
5º	1	1	1	1	1	1	1	1
6º	1.121	-0.508	0.676	5.419	-0.588	0.536	-1.827	-0.829
7º	1.205	-1.864	-0.184	1.965	-0.891	-1.478	1.700	0.547
8º	1.247	-2.662	-0.899	-4.343	0.752	0.781	-0.682	-0.191

1. Para o pórtico de 8 andares, o sismo de Northridge é o sinal de entrada e a aceleração do quinto andar como sinal de saída, apresentado na figura 4.5.
2. A função de transferência obtida com recurso a função "ident" é apresentada na figura 4.6.
3. As matrizes do sistema arbitrário em espaço de estados encontram-se apresentadas na tabela 4.14.

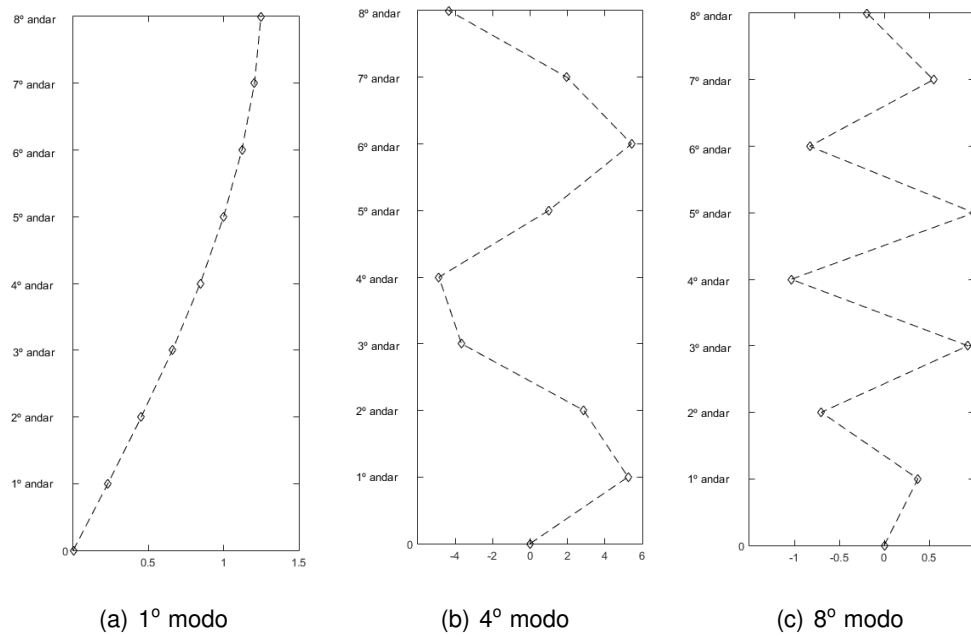


Figura 4.4: Modos de vibração do pórtico de 8 andares normalizados em relação ao 5º caso

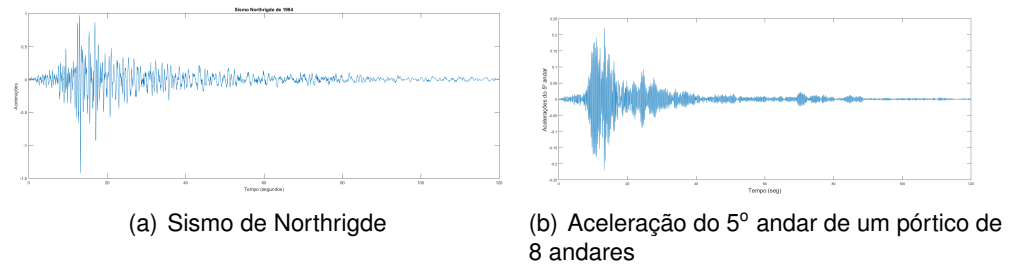


Figura 4.5: Sinais de entrada do 5º caso de um pórtico de 8 andares

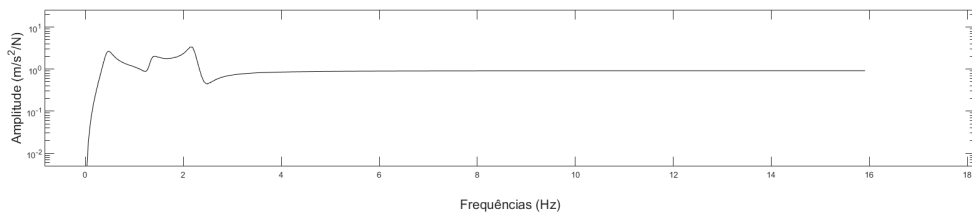


Figura 4.6: Função de transferência do 5º andar de um pórtico de 8 andares

4. As características modais dinâmicas obtidas através do sistema arbitrário em espaço de estados encontram-se na tabela 4.15

Tabela 4.14: Sistema arbitrário do 5º caso de um pórtico de 8 andares

A	-8.475	$-3.550 \cdot 10^3$	$-2.621 \cdot 10^4$	$-5.099 \cdot 10^6$	$-3.216 \cdot 10^7$	$-3.794 \cdot 10^9$	$-1.991 \cdot 10^{10}$	$1.555 \cdot 10^{12}$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0
b^T	1	0	0	0	0	0	0	0
\bar{c}	0.751	-19.348	$2.580 \cdot 10^3$	$-6.331 \cdot 10^4$	$3.639 \cdot 10^6$	$-7.972 \cdot 10^7$	$2.731 \cdot 10^9$	$-4.741 \cdot 10^{10}$
\bar{d}	-0.918							

Tabela 4.15: Frequência e amortecimento modal do 5º caso de um pórtico de 8 andares

Andar	Análise modal direta	Algoritmo (ensaio experimental)		
	$\omega_i(\text{rad/s})$	$\omega_i(\text{rad/s})$	Erro (%)	$\zeta_i(\%)$
1º	0.454	0.455	0.210	0.500
2º	1.349	1.349	0.000	1.380
3º	2.197	2.197	0.000	1.980
4º	2.971	2.971	0.000	0.500
5º	3.643	3.643	0.000	1.380
6º	4.191	4.191	0.000	1.980
7º	4.597	4.597	0.000	1.380
8º	4.846	4.846	0.000	1.980

5. A partir da frequência e do amortecimento constrói-se o sistema típico, tabela 4.16

Tabela 4.16: Sistema típico do 5º caso de um pórtico de 5 andares

A_{21}	-8.167	0	0	0	0	0	0	0
	0	71.697	0	0	0	0	0	0
	0	0	-189.463	0	0	0	0	0
	0	0	0	-344.518	0	0	0	0
	0	0	0	0	-515.185	0	0	0
	0	0	0	0	0	-678.170	0	0
	0	0	0	0	0	0	-812.238	0
	0	0	0	0	0	0	0	-899.959
c_{11}	8.167	71.697	189.463	344.518	515.185	678.170	812.238	899.959

6. Através do sistema típico e do sistema arbitrário obtém-se as matrizes de observabilidade. As matrizes do sistema referente ao 5º de um pórtico de 8 andares, encontram-se subdivididas (devido ao seu tamanho) da seguinte forma, em que \bar{A}_{11} , \bar{A}_{12} , \bar{A}_{21} , \bar{A}_{22} de dimensões $[5 \times 5]$, \bar{b}_{11} e \bar{b}_{12} de dimensão $[1 \times 5]$, \bar{c}_{11} e \bar{c}_{12} de dimensões $[1 \times 5]$ e \bar{d} de dimensão $[1 \times 1]$.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = [\bar{b}_{11} \quad \bar{b}_{12}]$$

$$\bar{c} = [\bar{c}_{11} \quad \bar{c}_{12}]$$

e

$$\bar{d} = [\bar{d}_{11}]$$

7. Tendo-se obtido as matrizes de observabilidade dos dois sistemas dos respectivos casos, é possível determinarem-se as respectivas matrizes de transformação "T", representada pela definição, equação dos (3.10).
8. Finalmente, através da matriz de transformação de cada caso, é possível a obtenção do fator de participação modal dos respectivos casos.

Tabela 4.17: Fatores de participação modal do 5º caso de um pórtico de 8 andares

Andar	Análise modal direta		Algoritmo (ensaio experimental)	
	ψ_i		Erro (%)	
1º	-0.533		-0.531	0.187
2º	-0.134		-0.135	0.746
3º	0.219		0.219	0.000
4º	0.001		0.001	0.000
5º	0.002		0.002	0.000
6º	0.002		0.002	0.000
7º	0.000		0.000	0.000
8º	0.000		0.000	0.000

4.3.3 Pórtico com 5 andares

A obtenção do parâmetro modal (massa modal) de um pórtico de 5 andares é necessário seguir-se os passos do algoritmo descritos na secção 3.7. Para obter-se os sinais de saída de um determinado andar é necessário normalizar-se os modos de vibração de acordo com respectivo andar como mostra a figura 4.7 e a tabela 4.18

1. O sismo de Northridge é o sinal de entrada e a aceleração do quinto andar como sinal de saída, apresentado na figura 4.8.
2. A função de transferência obtida com recurso a função "ident" é apresentada na figura 4.9.
3. As matrizes do sistema arbitrário em espaço de estados encontram-se apresentadas na tabela 4.19.

42CAPÍTULO 4. APLICAÇÃO DO ALGORITMO DE IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS

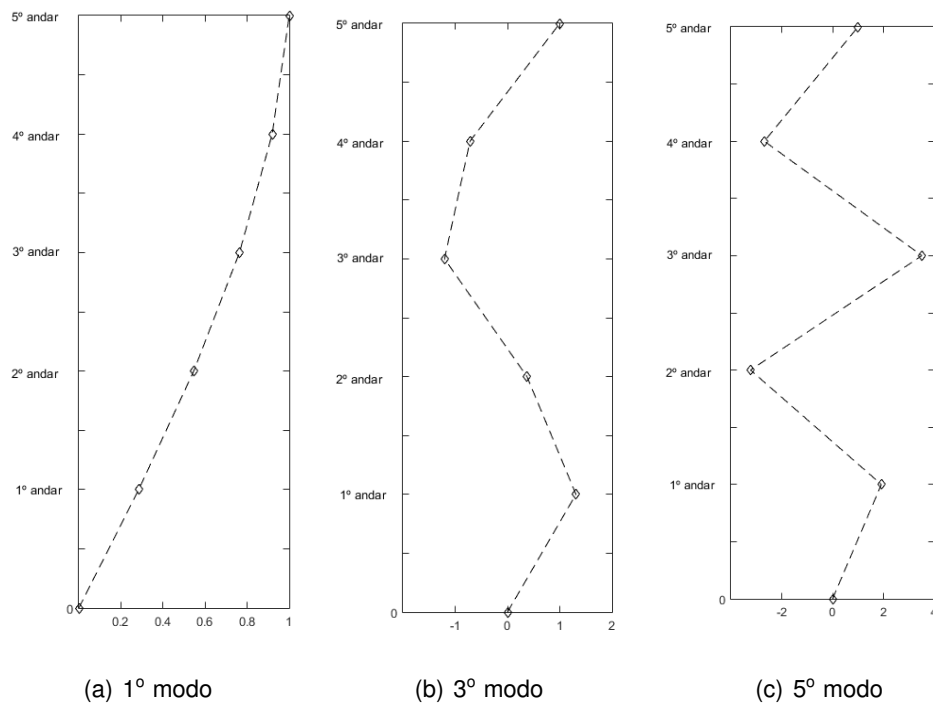


Figura 4.7: Modos de vibração do pórtico de 8 andares normalizados em relação ao 5º caso

Tabela 4.18: Modos de vibração de um pórtico de 5 andares normalizados em relação ao quinto andar

Andar	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo
1º	0.284	-0.830	1.309	-1.682	1.919
2º	0.546	-1.088	0.372	1.397	-3.228
3º	0.763	-0.594	-1.203	0.521	3.513
4º	0.919	0.309	-0.715	-1.830	-2.682
5º	1	1	1	1	1

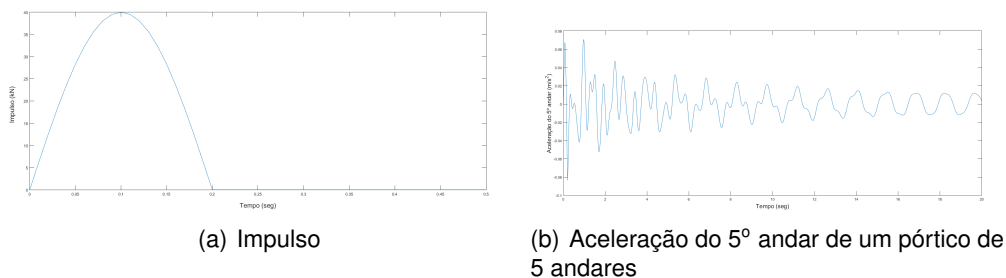


Figura 4.8: Sinais de entrada do 5º caso de um pórtico de 5 andares

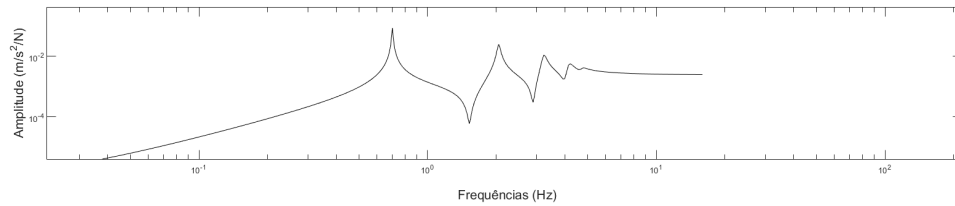


Figura 4.9: Função de transferência do 5º andar de um pórtico de 5 andares

Tabela 4.19: Sistema arbitrário de um pórtico de 5 andares

A_{11}	-4.855	$-2.155 \cdot 10^3$	$-7.219 \cdot 10^3$	$-1.602 \cdot 10^6$	$-3.235 \cdot 10^6$
	1	0	0	0	0
	0	1	0	0	0
	0	0	1	0	0
	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
\bar{b}_{11}^T	1	0	0	0	0
\bar{c}_{11}	0.004	0.581	9.052	964.193	$5.733 \cdot 10^3$
\bar{d}_{11}	0.002				

Tabela 4.20: Frequências e coeficiente de amortecimento de um pórtico de 5 andares

Modos	Análise modal direta		Algoritmo (análise numerica)		
	ω_i (hz)		ω_i (hz)	Erro (%)	ζ_i (%)
1º	0.701		0.701	0.000	0.500
2º	2.048		2.047	0.048	1.460
3º	3.228		3.224	0.123	2.300
4º	4.147		4.138	0.217	2.940
5º	4.730		4.175	11.736	3.340

4. As características modais dinâmicas obtidas através do sistema arbitrário em espaço de estados encontram-se na tabela 4.15
5. A partir da frequência e do amortecimento constrói-se o sistema típico, tabela 4.21
6. Através do sistema típico e do sistema arbitrário obtém-se as matrizes de observabilidade. As matrizes de observabilidade do sistemas típico e do sistema arbitrário (devido o seu tamanho) foram subdivididas da seguinte forma

Tabela 4.21: Sistema típico identificado para um pórtico de 5 andares

A_{21}	-19.4	0	0	0	0
	0	-165.3	0	0	0
	0	0	-410.1	0	0
	0	0	0	-675.1	0
	0	0	0	0	-877.0
c_{11}	19.4	165.3	410.1	675.3	877.0

$$\bar{Q} = Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{51} & Q_{52} & Q_{53} & Q_{54} & Q_{55} \end{bmatrix}$$

em que cada sub-matriz é do tipo $[2 \times 2]$. As matrizes de observabilidade do sistema típico e do sistema arbitrário encontram-se representadas pelas equações (4.3) e (4.4).

$$\bar{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 0.004 & 0.581 \\ 0.561 & 0.159 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$Q_{21} = \begin{bmatrix} 19.431 & 165.370 \\ 0.856 & 61.968 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

7. Tendo-se obtido as matrizes de observabilidade dos dois sistemas dos respectivos casos, é possível determinarem-se as respectivas matrizes de transformação "T", representada pela definição, equação dos (3.10).

8. Finalmente, através da matriz de transformação de cada caso, é possível a obtenção da massa modal dos respectivos casos.

A massa modal de um pórtico de 5 andares referente ao 5º caso encontra-se apresentada na tabela 4.22.

Tabela 4.22: Massa modal de um pórtico de 5 andares

Modos	Análise modal direta	Algoritmo (análise numérica)	
	Massa modal (ton)	Massa modal (ton)	Erro (%)
1º	$1.170 \cdot 10^3$	$1.171 \cdot 10^3$	0.085
2º	$1.385 \cdot 10^3$	$1.401 \cdot 10^3$	1.115
3º	$2.006 \cdot 10^3$	$2.066 \cdot 10^3$	0.000
4º	$3.921 \cdot 10^3$	$4.115 \cdot 10^3$	4.947
5º	$14.442 \cdot 10^3$	$15.378 \cdot 10^3$	6.481

Capítulo 5

Identificação experimental do fator de participação modal

No presente capítulo será abordado um ensaio dinâmico de modelo laboratorial de uma estrutura porticada com três andares. O objetivo de ensaio é de aplicar o método de identificação dos parâmetros modais, frequências, fatores de amortecimento, modos de vibração e fator de participação modal, numa situação laboratorial. É apresentada a configuração experimental realizada e os resultados obtidos no processo de identificação.

5.1 Configuração do ensaio

O ensaio decorreu em ambiente laboratorial, o pórtico encontrava-se rigidamente ligado a mesa sísmica como ilustrado na figura 5.1.

O pórtico em estudo, contém pilares materializados por chapas metálicas de aço, com dimensões de $500 \times 108 \times 2.2 \text{ mm}$ e massa de 876 g , para os dois primeiros andares, e pilares em alumínio, com dimensões de $500 \times 108 \times 2.0 \text{ mm}$ e massa de 248 g para o último andar.

As lajes dos andares são materializadas por placas em material acrílico com dimensões de $305 \times 108 \times 12 \text{ mm}$. A massa dos andares, incluindo o sistema de ligação aos pilares e aos aparelhos de monitorização é de 539 g , 547 g , 539 g , 715 g , 625 g para o P0, P1, P2 e P3 respetivamente. A medição do sinal de entrada é feita através do acelerômetro localizado na base vibratória.

Tabela 5.1: Características dos materiais

	Aço	Alumínio
E(GPa)	210	70
$\rho \text{ (KN/m}^3\text{)}$	72.31	22.52

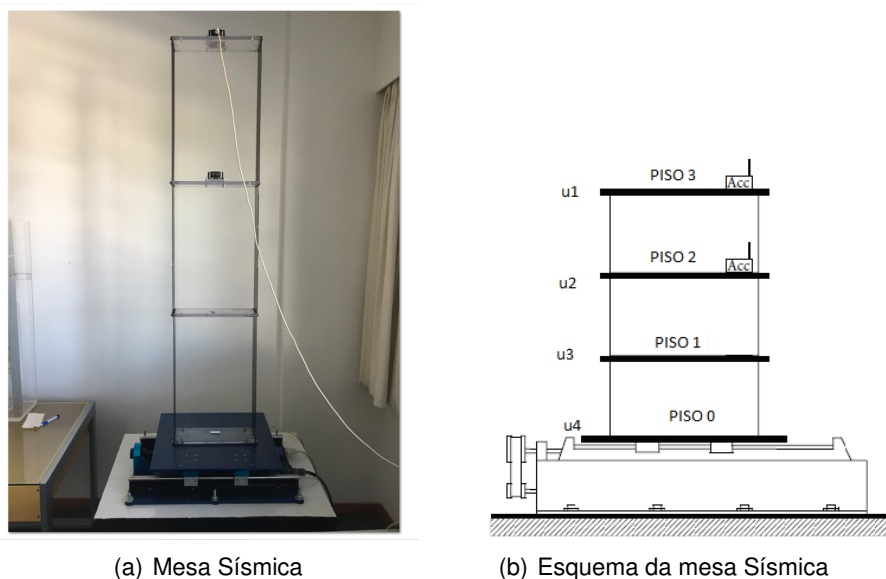


Figura 5.1: Ensaio na mesa sísmica para um pórtico de 3 andares

Para medir a resposta foram utilizados acelerômetros posicionados no segundo e terceiro andar, figura 5.1.

5.2 Ensaio experimental e resultados da identificação

Neste capítulo foi feita uma análise numérica modal e realizou-se um ensaio de vibrações para caracterizar experimentalmente os parâmetros modais da resposta de um modelo estrutural laboratorial. Realizou-se a identificação dos parâmetros modais pelo método direto, os primeiros resultados apresentam-se nas tabelas 5.2 e 5.3

Tabela 5.2: Resultados analíticos (frequências e modos de vibração) do pórtico de 3 andares do laboratório

Andar	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	$\omega_i(rad/s)$
P3	-0.960	0.196	-0.087	-0.276	3.963
P2	-0.089	-0.607	0.896	-0.519	8.414
P1	0.141	-0.425	-0.4188	-0.650	13.945
P0	0.224	0.641	0.116	-0.479	0.001

A estrutura foi submetida à vários sinais entre os quais os sismos de Northridge e do Kobe. A ação e resposta foram medidas com recurso a acelerômetros. As medições foram medidas durante um 20 segundos.

Tabela 5.3: Modos de vibração de um pórtico do laboratório normalizados em relação ao 3º andar

Andar	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
P3	1	1	1	1
P2	-0.629	1.458	-2.140	0.798
P1	-0.6785	-0.462	0.208	0.425
P0	1.584	-1.508	-0.278	0.737

Tabela 5.4: Fatores de participação modal do 3º andar do pórtico do laboratório

Andar	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
P3	-0.451	0.266	0.147	0.001

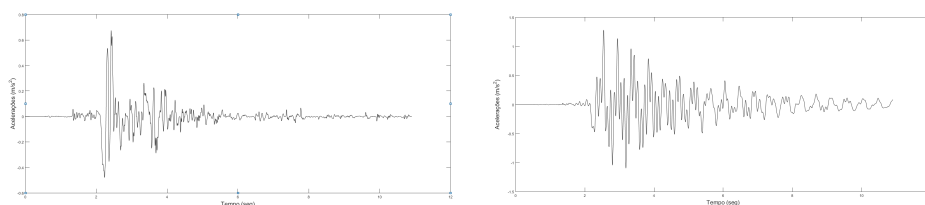
Tabela 5.5: Sinais de entrada e saída dos varios casos para o pórtico de 3 andares do laboratório

Caso	input	output
1	input	Aceleração do 1º andar
2	input	Aceleração do 2º andar
3	input	Aceleração do 3º andar

Em ambiente laboratorial realizou-se inúmeros ensaios visto que o input é variável entre os quais os casos presentes na tabela 5.5. Contudo, serão apenas apresentados os resultados relativos ao 1º caso.

5.3 Obtenção do fator de participação modal

1. O sismo de Northridge é o sinal de entrada e a aceleração do quinto andar como sinal de saída, apresentado na figura 5.2.



(a) Aceleração de base, sismo de Northridge (b) Aceleração do 3º andar, sismo de Northridge

Figura 5.2: Sinais de entrada referente ao 2º caso experimental

2. A função de transferência obtida com recurso a função "ident" é apresentada na figura 5.3.
3. As matrizes do sistema arbitrário em espaço de estados encontram-se apresentadas na tabela 5.6.

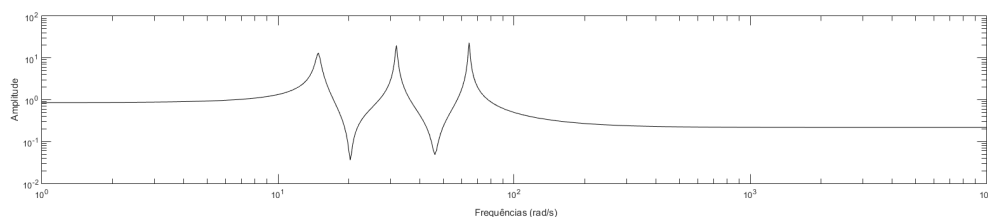


Figura 5.3: Função de transferência do caso 3º caso do laboratório

Tabela 5.6: Sistema arbitrário do 3º caso de um pórtico de 3 andares do laboratório

A	-1.933	-5.385×10^3	-6.306×10^3	-5.320×10^6	-3.100×10^6	-9.188×10^8
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0
b^T	1	0	0	0	0	0
\bar{c}	14.178	-1.542×10^3	3.921×10^4	3.267×10^6	1.459×10^7	9.829×10^8
\bar{d}	0					

4. As características modais dinâmicas obtidas através do sistema arbitrário em espaço de estados encontram-se na tabela 5.7

Tabela 5.7: Frequência e amortecimento modal para o 3º caso do pórtico do laboratório de 3 andares

Andar	Análise modal direta					Algoritmo (ensaio experimental)		
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	$\omega_i(rad/s)$	$\omega_i(rad/s)$	$\zeta_i(\%)$	Erro (%)
1º	-0.960	0.196	-0.087	-0.276	3.963	2.538	1.970	35.952
2º	0.089	-0.607	0.896	-0.519	8.414	5.048	0.820	40.004
3º	0.141	-0.425	-0.418	-0.650	13.945	10.263	0.820	26.004
4º	0.224	0.641	0.116	-0.479	0.001	0.004	0.001	3.000

5. A partir da frequência e do amortecimento constrói-se o sistema típico, tabela 5.8

Tabela 5.8: Sistema típico do 3º caso de um pórtico de 3 andares do laboratório

A	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1
	-219.601	0	0	-0.583	0	0
	0	-1.006×10^3	0	0	-0.519	0
	0	0	-4.158×10^3	0	0	-0.830
c	219.601	-1.006×10^3	-4.158×10^3	-0.583	-0.519	-0.830

6. Através do sistema típico e do sistema arbitrário obtém-se as matrizes

de observabilidade. As matrizes de observabilidade do sistemas típico e do sistema arbitrário (devido o seu tamanho) foram subdivididas da seguinte forma

$$\bar{Q} = Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}$$

em que cada sub-matriz tem dimensão $[3 \times 3]$. As matrizes de observabilidade do sistema típico e do sistema arbitrário encontram-se representadas nas equações (5.1) e (5.2).

$$Q = \begin{bmatrix} 219.601 & 1.006 \cdot 10^3 & 4.158 \cdot 10^3 \\ 128.170 & 522.640 & 3.452 \cdot 10^3 \\ -4.829 \cdot 10^4 & -1.012 \cdot 10^6 & -1.729 \cdot 10^7 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 14.178 & 1.542 \cdot 10^3 & 3.921 \cdot 10^4 \\ 1.515 \cdot 10^3 & -3.714 \cdot 10^4 & 3.178 \cdot 10^6 \\ -4.007 \cdot 10^4 & -4.982 \cdot 10^6 & -7.039 \cdot 10^7 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

7. Tendo-se obtido as matrizes de observabilidade dos dois sistemas dos respetivos casos, é possível determinarem-se as respetivas matrizes de transformação "T", representada pela definição, equação dos (3.10).

8. Por fim a tabela 5.9 contém o fator de participação modal do pórtico referente ao terceiro caso.

Tabela 5.9: Fatores de participação modal analítico do 3º caso de um pórtico de 3 andares

Modos	Fator de participação modal		
	Análise modal direta	Algoritmo (ensaio experimental)	Erro (%)
1º	-0.451	-0.496	9.997
2º	-0.266	-0.293	10.0150
3º	0.147	0.144	2.240
4º	0.001	0.000	1.000

Verifica-se que os resultados obtidos são satisfatórios e que as diferenças devem-se a vários fatores. Tais como, as ligações das lajes com os pilares que são materializadas através de parafusos deixam de simular uma ligação rígida devido ao desgaste; na análise modal considerou-se simplificações estruturais devido ao estado da mesa sísmica.

Capítulo 6

Conclusões e desenvolvimentos futuros

6.1 Conclusões

A presente dissertação abordou a problemática das vibrações em estruturas de engenharia civil. Desenvolveu-se um algoritmo de identificação dos parâmetros modais de estruturas sujeitas à ações sísmicas e o do impulso (pórtico de 5 andares). O algoritmo requer a identificação de dois sistemas em espaço de estados: um sistema aleatório e outro sistema típico, em que o sistema típico contém as características físicas da estrutura e o sistema aleatório.

Neste trabalho, realizou-se simulações numéricas em três pórticos distintos, de 3, 5 e 8 andares, que representam três edifícios. Para os pórticos de 3 e 8 andares efetuaram-se as análises numéricas com vista à obtenção dos fatores de participação modal, sendo possível através destes, definir-se os modos de vibração da estrutura. Para o pórtico de 5 andares realizaram-se as simulações numéricas com vista, a obtenção da massa modal dos respetivo andares da estrutura.

O fator de participação modal, modos de vibração e massa modal foram obtidos recorrendo a um algoritmo que permite obter os referidos parâmetros modais, apenas com a introdução do sinal de entrada e da resposta da estrutura.

Nos pórticos de 3 e 8 andares, os resultados mostram que os fatores de participação modal e os modos de vibração obtidos pela análise da resposta, comparados com os resultados obtidos pelo método analítico (com recurso à matriz de massa, matriz de rigidez e à matriz de amortecimento) são praticamente iguais, verificando-se a grande precisão do algoritmo.

A eficácia do algoritmo também é verificada recorrendo-se às respostas obtidas experimentalmente na mesa sísmica. No laboratório apenas é

possível ensaiar-se um pórtico de 2,3 e talvez 4 andares, os resultados experimentais com recurso à reposta e solicitação da estrutura foram obtidos em laboratório, para o pórtico de 3 andares. Ao analisarem-se estes resultados, chega-se facilmente à conclusão de que os resultados da análise numérica e experimental são satisfatórios.

A partir da análise numérica e experimental chega-se à conclusão que o algoritmo permite obter os parâmetros modais da estrutura, sem ter o conhecimento da matriz de massa, rigidez e de amortecimento. Contudo, é também demonstrado que os parâmetros modais de um determinado andar de uma estrutura podem ser obtidos sem ter-se o conhecimento das respostas dos restantes andares. Tal característica torna possível aplicar-se e testar-se as vibrações num número elevado de andares, especialmente nos edifícios em que as medições dos parâmetros modais de cada andar não é realístico.

6.2 Desenvolvimentos futuros

Finalizado o trabalho desta dissertação, apresenta-se alguns pontos de possível interesse para trabalhos futuros, relacionados com o tema desenvolvido.

- Validar os ensaios experimentais do capítulo 5 com vista a obtenção da massa modal da estrutura.
- Aplicar o algoritmo desenvolvido em outro tipo de estruturas

Referências bibliográficas

- [1] Adams, DE e RJ Allemang: *A new derivation of the frequency response function matrix for vibrating non-linear systems*. Journal of Sound and Vibration, 227(5):1083–1108, 1999.
- [2] Aström, Karl Johan e Richard M Murray: *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. Princeton University Press, 2010.
- [3] Bendat, Julius S e Allan G Piersol: *Engineering applications of correlation and spectral analysis*. New York, Wiley-Interscience, 1980. 315 p., 1980.
- [4] Box, George Edward P e Gwilym M Jenkins: *Time series analysis: forecasting and control, 1976*. ISBN: 0-8162-1104-3, 1970.
- [5] Bracci, Joseph M: *Simplified seismic evaluation of structures using adaptive pushover analysis*. Em *Computational Methods, Seismic Protection, Hybrid Testing and Resilience in Earthquake Engineering*, páginas 77–96. Springer, 2015.
- [6] Caetano, Elsa de Sá: *Identificação experimental de parâmetros dinâmicos em sistemas estruturais, Tese de Mestrado*. 2012.
- [7] Chen, CT: *Linear system theory and design: Oxford University Press*. New York, USA, 1999.
- [8] Cho, Bong Ho, Ji Seong Jo, Seok Jun Joo e Hongjin Kim: *Dynamic Parameter Identification of Secondary Mass Dampers Based on Full-Scale Tests*. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 27(3):218–230, 2012.
- [9] Chopra, Anil K *et al.*: *Dynamics of structures*, volume 3. Prentice Hall New Jersey, 1995.
- [10] Cois, O, Alain Oustaloup, Thierry Poinot e J L Battaglia: *Fractional state variable filter for system identification by fractional model*. Em *European Control Conference (ECC), 2001*, páginas 2481–2486. IEEE, 2001.
- [11] Esfandiari, Ramin S e Hung V Vu: *Dynamic systems*. McGraw-Hill, 1997.
- [12] Ewins, DJ: *Basics and state-of-the-art of modal testing*. Sadhana, 25(3):207–220, 2000.
- [13] Favoreel, Wouter, Bart De Moor e Peter Van Overschee: *Subspace state space system identification for industrial processes*. Journal of process control, 10(2):149–155, 2000.

- [14] Guerreiro, Mauro Alexandre Janeiro: *Identificação de dano estrutural com base em análise modal*, Universidade Nova de Lisboa - Faculdade de Ciências e Tecnologias, 2014.
- [15] Hwang, Jae Seung, Hongjin Kim e Bong Ho Cho: *Modal parameters estimation of building structures from vibration test data using observability measurement*. Shock and Vibration, 2015, 2015.
- [16] Kailath, Thomas: *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [17] Kim, Jinkoo e Hyunhoon Choi: *Displacement-based design of supplemental dampers for seismic retrofit of a framed structure*. Journal of structural engineering, 132(6):873–883, 2006.
- [18] Langhaar, Henry L: *Energy methods in applied mechanics*. Courier Dover Publications, 2016.
- [19] Larimore, Wallace E: *Canonical variate analysis in identification, filtering, and adaptive control*. Em *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*, páginas 596–604. IEEE, 1990.
- [20] Ljung, Lennart: *System identification*. Wiley Online Library, 1999.
- [21] Malti, Rachid, Stéphane Victor, Alain Oustaloup e Hugues Garnier: *An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional model identification*. IFAC Proceedings Volumes, 41(2):14379–14384, 2008.
- [22] Mendes, Paulo e Sérgio Oliveira: *Análise dinâmica de estruturas: utilização integrada de modelos de identificação modal e modelos de elementos finitos*. LNEC: Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 2008.
- [23] Moor, Bart LR de: *Mathematical concepts and techniques for modelling of static and dynamic systems*. 1988.
- [24] Moutinho, Carlos Manuel Ramos: *Controlo de vibrações em estruturas de engenharia civil*. Tese de Doutoramento, Universidade do Porto, 2007.
- [25] Ogata, Katsuhiko e Yanjuan Yang: *Modern control engineering*. 1970.
- [26] Park, Hong Gun, Taesung Eom e Hyerin Lee: *Factored modal combination for evaluation of earthquake load profiles*. Journal of Structural Engineering, 133(7):956–968, 2007.
- [27] Paz, Mario e William Leigh: *Uniform Building Code 1997 Dynamic Method*. Em *Structural Dynamics*, páginas 731–755. Springer, 2004.
- [28] Reinoso, E e E Miranda: *Estimation of floor acceleration demands in high-rise buildings during earthquakes*. The structural design of tall and special buildings, 14(2):107–130, 2005.
- [29] Rodrigues, Jorge Manuel Vieira Borges Lourenço *et al.*: *Identificação modal estocástica: métodos de análise e aplicações em estruturas de engenharia civil*. 2012.

- [30] Rodrigues, Leonardo Filipe Guilherme: *Estudo de estratégias de controlo activo de vibrações para um edifício de dois andares*, Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, 2011.
- [31] Santos, Luís Oliveira: *Monitoramento e Ensaio de Pontes*. Em VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, 2014.
- [32] Santos, Rodrigo Borges: *Controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs)*. Tese de Doutorado, 2008.
- [33] Stutts, Daniel S: *Analytical Mechanics—Lagrange's Equation and its Application*, 2010.
- [34] Tewari, Ashish: *Modern control design*. NY: John Wiley & sons, 2002.
- [35] Valentim, Nilton Leonardo: *Análise do comportamento dinâmico em pontes pedonais*. 2012.
- [36] Van Der Veen, A J, ED F Deprettere e A Lee Swindlehurst: *Subspace-based signal analysis using singular value decomposition*. Proceedings of the IEEE, 81(9):1277–1308, 1993.
- [37] Van Overschee, Peter e Bart De Moor: *N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems*. Automatica, 30(1):75–93, 1994.
- [38] Van Overschee, Peter e Bart De Moor: *Continuous-time frequency domain subspace system identification*. Signal Processing, 52(2):179–194, 1996.
- [39] Van Overschee, Peter e BL De Moor: *Subspace identification for linear systems: Theory-Implementation-Applications*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [40] Verhaegen, Michel e Patrick Dewilde: *Subspace model identification part 1. The output-error state-space model identification class of algorithms*. International journal of control, 56(5):1187–1210, 1992.
- [41] Young, Peter: *Parameter estimation for continuous-time modelsâa survey*. Automatica, 17(1):23–39, 1981.
- [42] Young, Peter: *The captain toolbox for matlab*. IFAC Proceedings Volumes, 39(1):909–914, 2006.