

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



UMA ABORDAGEM COMPARATIVA E  
ANALÍTICA DE DOIS SISTEMAS DE *BONUS*  
*MALUS* EM CABO VERDE:  
O SISTEMA ACTUAL E A PROPOSTA DA  
GARANTIA

Licenciada Eurisanda Venulda Cardoso Tavares Rodrigues  
Orientadora: Professora Doutora Gracinda Guerreiro  
Co-Orientadora: Professora Doutora Lourdes Afonso

MESTRADO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES  
(*Actuariado, Estatística e Investigação Operacional*)

Janeiro 2011



# Agradecimentos

Às minhas orientadoras, a Professora Gracinda Guerreiro e a Professora Lourdes Afonso, pela dedicação, ajuda e disponibilidade que demonstraram ao longo deste trabalho.

À Seguradora Garantia que disponibilizou os dados, sem os quais não seria possível efectuar este trabalho.

Aos meus colegas e amigos, pelo apoio, incentivo e amizade dada ao longo de todos estes anos de faculdade.

À minha família, em especial à minha irmã, pelo apoio incondicional que sempre demonstrou.

Por último, um agradecimento muito especial aos meus pais, que mesmo estando longe, estiveram sempre presentes.



# Resumo

Nesta dissertação pretende-se avaliar o sistema de *bonus malus* de uma Seguradora cabo-verdiana, sob a perspectiva de uma carteira aberta, recorrendo ao Modelo dos Vórtices Estocásticos (Guerreiro (2001), Guerreiro (2008), Guerreiro e Mexia (2008)), isto é, admitindo que há entradas e saídas dos segurados da carteira da seguradora. Na aplicação foram utilizados os dados da seguradora cabo-verdiana Garantia. Para efeitos comparativos avaliou-se também o sistema de *bonus malus* recorrendo ao modelo clássico. Estimou-se, sob ambas as perspectivas, as distribuições limite associadas ao sistema de *bonus malus* da Seguradora Garantia, S.A., bem como as Escalas Óptimas de Prémios propostas por alguns autores (Norberg (1976), Borgan et al. (1981), Gilde & Gilde e Sundt (1989), Andrade e Silva (1991)). Avaliou-se o sistema utilizando as medidas de Lemaire (1995) recorrendo às escalas óptimas obtidas. Dado que o sistema actual utilizado na Seguradora Garantia, S.A. apresenta algumas incoerências do ponto de vista da eficácia da tarificação *a posteriori*, analisou-se e avaliou-se um novo sistema proposto por Osório (2006), conforme sugestão da Seguradora. Com base nos resultados obtidos, foi feita uma análise comparativa entre o sistema actual e o sistema proposto da seguradora Garantia.

**Palavras Chave:** *Bonus Malus*, Modelo Clássico, Vórtices Estocásticos, Distribuição Limite, Escalas Óptimas de Prémios, Medidas de Avaliação.



# Abstract

The purpose of this thesis is to evaluate a *bonus malus* system of a Cape Verdean Insurer, from the perspective of an open portfolio, using the Stochastic Vortices model (Guerreiro (2001), Guerreiro (2008), Guerreiro e Mexia (2008)), i.e, assuming that there are entries and exits of the portfolio. In the application we used data from the Cape Verdean insurer, Garantia, S.A.. For comparative purposes the bonus malus system was also evaluated using the classical model. From both perspectives we estimate the limit distributions of the *bonus malus* system of Garantia Insurance Company, and the optimal scales proposed by some authors (Norberg (1976), Borgan et al. (1981), Gilde e Sundt (1989), Andrade e Silva (1991)). Since the current system used in the Garantia, S.A. insurance company, has some inconsistencies from the efficiency of the *a posteriori* premiums point of view, a new system proposed by Osório (2006) was analyzed and evaluated as suggested by the insurer. Based on these results we present a comparative analysis between the current system and Garantia's proposed system.

**Keywords:** *Bonus Malus*, Classical Model, Stochastic Vortices, Limit Distributions , Optimal Scales of awards, Evaluate Measures.



# Índice

Índice	ix
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Introdução	1
<b>1 Sistemas de <i>Bonus Malus</i></b>	<b>3</b>
1.1 Generalidades	4
1.2 Modelo Clássico - Distribuição Limite	5
1.3 Carteiras Abertas - Modelo Vórtices Estocásticos	6
1.3.1 Matrizes de Transição	7
1.3.2 Fluxos de Entradas nas Populações	7
1.3.3 Distribuição Limite	10
<b>2 Escalas Óptimas de Prémios e Medidas de Avaliação de SBM</b>	<b>15</b>
2.1 Escalas Óptimas de Prémios	15
2.1.1 O Modelo de Norberg	15
2.1.2 O Modelo de Borgan, Hoem & Norberg	17
2.1.3 O Modelo de Gilde & Sundt	18
2.1.4 O Modelo de Andrade e Silva	19
2.2 Medidas de Avaliação	20
2.2.1 O Nível Médio Relativo de Estacionaridade	21
2.2.2 Coeficiente de Variação de Prémios	21
2.2.3 A Elasticidade do Prémio Médio	22
2.2.4 A Elasticidade Transiente	24
<b>3 Aplicação aos dados da seguradora Garantia</b>	<b>25</b>
3.1 Número de Sinistros	25
3.1.1 Processo de Poisson Homogéneo - Carteira Homogénea	25
3.1.2 Processo de Poisson Heterogéneo - Carteira Heterogénea	28
3.2 Sistema <i>Bonus Malus</i> Actual da Garantia	31
3.2.1 Definição	31

---

3.2.2	Distribuição Limite: Carteira Fechada . . . . .	33
3.2.3	Distribuição Limite: Carteira Aberta . . . . .	35
3.2.4	Escalas Óptimas . . . . .	40
3.2.5	Medidas de Avaliação . . . . .	48
3.2.6	Comentários às Escalas Óptimas . . . . .	52
3.3	Sistema de <i>Bonus Malus</i> Alternativo para a Seguradora Garantia . . .	55
3.3.1	Decreto-Lei nº17 de Fevereiro de 2003 . . . . .	55
3.3.2	Críticas e Propostas apresentas por Osório . . . . .	56
3.3.3	Definição do Sistema Alternativo . . . . .	57
3.3.4	Distribuição Limite: Carteira Fechada . . . . .	58
3.3.5	Distribuição Limite: Carteira Aberta . . . . .	59
3.3.6	Escalas Óptimas de Prémios . . . . .	61
3.3.7	Medidas de Avaliação . . . . .	64
3.3.8	Comentários às Escalas Óptimas . . . . .	68
3.4	Comparação dos Dois Sistemas de <i>Bonus Malus</i> . . . . .	69
3.4.1	Sob a Perspectiva da Carteira Fechada . . . . .	70
3.4.2	Sob a Perspectiva da Carteira Aberta . . . . .	71
	<b>Conclusão</b>	<b>75</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>77</b>

# Lista de Figuras

3.1	Evolução do $PM$ - Modelo Fechado: S. Actual . . . . .	35
3.2	Ajustamento assintótico às Entradas no Sistema . . . . .	39
3.3	Evolução do Prémio Médio - Modelo Aberto: S. Actual . . . . .	40
3.4	Evolução do Prémio Médio (Escala de Norberg (1976)): Sistema Actual	42
3.5	Evolução do Prémio Médio (Escala de Borgan et al. (1981)): Sistema Actual . . . . .	45
3.6	Evolução do Prémio Médio em função de $\lambda$ (Escala de Borgan et al. (1981)): Sistema Actual . . . . .	45
3.7	Evolução do Prémio Médio (Escala de Gilde e Sundt (1989)): Sistema Actual . . . . .	47
3.8	Evolução do Prémio Médio (Escala de Andrade e Silva (1991)): Sistema Actual . . . . .	48
3.9	Evolução do prémio médio em função de $\lambda$ (Escala de Andrade e Silva (1991)): Sistema Actual . . . . .	48
3.10	$RSAL$ em função de $\lambda$ : Sistema Actual . . . . .	49
3.11	$CV$ em função de $\lambda$ : Sistema Actual . . . . .	50
3.12	Elasticidade Global em função de $\lambda$ : S. Actual . . . . .	51
3.13	Evolução do Prémio Médio (Modelo Fechado): Sistema Alternativo . .	60
3.14	Evolução do $PM$ no Modelo Aberto: S.Alternativo . . . . .	61
3.15	Evolução do Prémio Médio (Escala de Borgan et al. (1981)): Sistema Alternativo . . . . .	62
3.16	$PM$ em função de $\lambda$ (Escala de Borgan et al. (1981)): S. Alternativo .	63
3.17	$PM$ em função de $\lambda$ - Escala de Gilde e Sundt (1989): S. Alternativo .	64
3.18	$RSAL$ em função de $\lambda$ : Sistema Alternativo . . . . .	65
3.19	$CV$ em função de $\lambda$ : Sistema Alternativo . . . . .	66
3.20	Elasticidade do sistema em função de $\lambda$ : Sistema Alternativo . . . . .	66



# Lista de Tabelas

3.1	Número Observado de Sinistros . . . . .	27
3.2	Teste de Qui-quadrado para a distribuição Poisson . . . . .	27
3.3	Parâmetros da Binomial Negativa . . . . .	30
3.4	Teste do Qui-quadrado para a distribuição Gama . . . . .	31
3.5	Classes do sistema de <i>bonus malus</i> da Garantia . . . . .	32
3.6	Distribuição Limite no Modelo Fechado: S. Actual . . . . .	34
3.7	Probabilidades de Saída: S. Actual . . . . .	36
3.8	Probabilidade de Classificação Inicial: S. Actual . . . . .	37
3.9	Entradas de Novas Apólices . . . . .	38
3.10	Distribuição Limite (Modelo Aberto): S. Actual . . . . .	39
3.11	Escalas Óptimas de Prêmios (Modelo de Norberg (1976)): S. Actual . .	41
3.12	<i>PM</i> , <i>EQM</i> e Medida de Eficiência (Modelo de Norberg (1976)): S. Actual	42
3.13	Distribuição Ponderada: Sistema Actual . . . . .	43
3.14	Escalas Óptimas de Prêmios (Modelo de Borgan et al. (1981)): Sistema Actual . . . . .	44
3.15	<i>PM</i> , <i>EQM</i> e Medida de Eficiência (Modelo de Borgan et al. (1981)): Sistema Actual . . . . .	44
3.16	Escalas Óptimas de Prêmios (Modelo de Gilde e Sundt (1989)): Sistema Actual . . . . .	46
3.17	<i>PM</i> , <i>EQM</i> e Medida de Eficiência (Modelo de Gilde e Sundt (1989)): Sistema Actual . . . . .	46
3.18	Escalas Óptimas de Prêmios (Modelo de Andrade e Silva (1991)): Sis- tema Actual . . . . .	47
3.19	<i>PM</i> , <i>EQM</i> e Medida de Eficiência (Modelo de Andrade e Silva (1991)): Sistema Actual . . . . .	47
3.20	Nível Médio Relativo de Estacionaridade: Sistema Actual . . . . .	49
3.21	Coefficiente de Variação de Prêmios: Sistema Actual . . . . .	50
3.22	A Elasticidade Global do Sistema: Sistema Actual . . . . .	50
3.23	A Elasticidade Transiente (Modelo Fechado): Sistema Actual . . . . .	51
3.24	A Elasticidade Transiente (Modelo Aberto): Sistema Actual . . . . .	52
3.25	Escalas Óptimas em Percentagem (Modelo Fechado): S. Actual . . . . .	53
3.26	Escalas Óptimas em Percentagem (Modelo Aberto): S. Actual . . . . .	54
3.27	Classes do Sistema de <i>bonus</i> alternativo . . . . .	58

3.28	Distribuição Limite e Ponderada no M. Fechado: Sistema Alternativo . . . . .	59
3.29	Probabilidades de Entradas nas Classes: Sistema Alternativo . . . . .	60
3.30	Probabilidades de Saída: Sistema Alternativo . . . . .	60
3.31	Distribuição Limite e Ponderada (M. Aberto): Sistema Alternativo . . . . .	61
3.32	Escala de Norberg (1976), de Borgan et al. (1981), PM, EQM e Medida de Eficiência: S. Alternativo . . . . .	62
3.33	Escala de Gilde e Sundt (1989), de Andrade e Silva (1991), PM, EQM e Medida de Eficiência: S. Alternativo . . . . .	63
3.34	Nível Médio Relativo de Estacionaridade: Sistema Alternativo . . . . .	64
3.35	Coeficiente de Variação: Sistema Alternativo . . . . .	65
3.36	A Elasticidade Global: Sistema Alternativo . . . . .	66
3.37	A Elasticidade Transiente (Modelo Fechado): Sistema Alternativo . . . . .	67
3.38	A Elasticidade Transiente (Modelo Aberto): Sistema Alternativo: . . . . .	67
3.39	Escalas Óptimas em Percentagem (M. Fechado): Sistema Alternativo . . . . .	68
3.40	Escalas Óptimas em Percentagem (Modelo Aberto): Sistema Alternativo . . . . .	69
3.41	Resumo do <i>PM</i> : Modelo Fechado . . . . .	70
3.42	Resumo do <i>RSAL</i> : Modelo Fechado . . . . .	70
3.43	Resumo do <i>CV</i> : Modelo Fechado . . . . .	71
3.44	Resumo da Elasticidade Global: Modelo Fechado . . . . .	71
3.45	Resumo do <i>PM</i> : Modelo Aberto . . . . .	72
3.46	Resumo do <i>RSAL</i> : Modelo Aberto . . . . .	72
3.47	Resumo do <i>CV</i> : Modelo Aberto . . . . .	73
3.48	Resumo da Elasticidade Global: Modelo Aberto . . . . .	73

# Introdução

Os sistemas de *bonus malus* têm como objectivo tarifar o prémio do segurado de acordo com a sua frequência de sinistralidade. Este conceito de tarificação é denominado por tarificação *a posteriori* uma vez que o prémio a atribuir a cada segurado é determinado de acordo com o seu histórico de sinistralidade, ou seja, a seguradora corrige o prémio *a priori* do segurado com base na sua própria frequência de sinistralidade.

Este conceito de tarificação surgiu em meados da década de 50, com a necessidade de tornar a tarificação do prémio mais justa, visto que sem uma tarificação *a posteriori*, os segurados dentro de cada classe de risco continuariam, no futuro, a pagar o mesmo prémio independentemente dos sinistros declarados, o que se traduziria em prémios equivalentes para riscos não homogéneos. Desta forma, através de sistemas de *bonus malus* é possível tarifar os prémios dos segurados individualmente, agravando ou bonificando o prémio de acordo com a sua sinistralidade declarada.

Os seguros do ramo automóvel constituem, na generalidade, a maior parte da carteira dos seguros não vida. Dado que os sistemas de *bonus malus* constituem o principal método de tarificação *a posteriori* neste tipo de seguro, é essencial para as seguradoras possuírem um sistema de *bonus malus* (*SBM*) que seja simultaneamente eficaz e competitivo.

Sendo um elemento importante na actividade seguradora, os *SBM* têm vindo, ao longo dos tempos, a suscitar interesse de muitos autores em estudar e desenvolver modelos que se possam adequar da melhor forma a este conceito de tarificação.

Ao longo deste trabalho serão descritos e aplicados dois modelos que explicam este conceito de tarificação: o modelo clássico, aqui denominado por modelo fechado e o modelo dos vórtices estocásticos, ver por exemplo, Guerreiro e Mexia (2004) e Guerreiro e Mexia (2008), denominado aqui por modelo aberto.

No início, esta dissertação tinha como objectivo a avaliação do sistema de *bonus malus* usado em Cabo Verde, usando para tal os dados da companhia de seguros cabo-verdiana Garantia, SA. No entanto, no decorrer da análise do sistema de *bonus malus* aplicado nesse país, fruto da legislação actualmente em vigor, verificou-se que este sistema apresenta algumas lacunas, apresentando-se como um sistema desequilibrado tanto para a seguradora como para o segurado. Este facto já tinha sido antes verificado por Osório (2006) que, para além de criticar o actual *SBM* aplicado em Cabo Verde, propõe um *SBM* alternativo que poderá ser futuramente utilizado. Considerou-se então que seria mais interessante, para além de avaliar o sistema de *bonus malus* que vigora actualmente nesse país, avaliar um sistema de *bonus malus* que poderá ser usado

futuramente, efectuando, posteriormente, comparações entre estes dois sistemas.

O trabalho está estruturado em 3 capítulos.

No primeiro capítulo é feita uma breve introdução aos sistemas de *bonus malus* (*SBM*) em geral, bem como uma descrição teórica dos modelos fechado e aberto, ver por exemplo, Centeno (2003) e Guerreiro e Mexia (2004).

O segundo capítulo é dividido em duas secções. Na primeira secção são apresentadas as escalas óptimas de prémios determinadas através do modelo de Norberg (1976), modelo de Borgan et al. (1981), modelo de Gilde e Sundt (1989) e do modelo de Andrade e Silva (1991). Na segunda secção são descritas as medidas de avaliação apresentadas por Lemaire (1995).

O terceiro capítulo, o principal deste trabalho, consiste na aplicação dos modelos apresentados nos capítulos anteriores à carteira da Garantia. Para além da aplicação desses modelos é feita uma análise comparativa quer ao nível dos dois sistemas de *bonus malus* que ao nível da perspectiva de carteira aberta e fechada. Este capítulo encontra-se dividido em quatro secções.

A primeira secção consiste na apresentação e aplicação de alguns modelos que se possam ajustar ao fenómeno do número de sinistros, por forma a obter uma distribuição de probabilidade que seja representativa da sinistralidade observada na carteira de Responsabilidade Civil do Ramo Automóvel da Garantia.

Na segunda secção define-se o sistema de *bonus malus* em vigor na Garantia, obtendo-se a distribuição limite usando os modelos aberto e fechado, a partir das quais são determinadas as escalas óptimas de prémios para os dois modelos. Com base nas escalas óptimas serão obtidas as medidas de avaliação propostas por Lemaire (1995), fazendo ainda uma análise comparativa entre os dois modelos.

Na terceira secção é apresentado um novo sistema de *bonus malus* para a Garantia, o qual foi proposto pela mesma Seguradora com base no documento apresentado por Osório (2006). Nesta secção são estimadas as escalas óptimas de prémios bem como as medidas de avaliação correspondentes ao novo sistema, tal como havia sido feito para o sistema actual.

Na quarta secção é realizada uma análise comparativa entre o sistema de *bonus malus* actualmente em vigor e o sistema proposto, evidenciando as diferenças entre eles.

Os resultados apresentados ao longo do terceiro capítulo foram obtidos recorrendo ao software *Mathematica 6.0* da Wolfram.

# Capítulo 1

## Sistemas de *Bonus Malus*

Um dos problemas centrais da actividade seguradora consiste na avaliação eficiente do risco assumido, de forma a determinar o montante a pagar pelo segurado, o qual se convencionou denominar por prémio. Dado que o prémio é uma contrapartida do risco assumido pela seguradora, este terá de ser, simultaneamente, justo para o segurado e “lucrativo” para a seguradora.

Na tarificação, procura-se medir os factores que influenciam o risco, de forma a agrupá-los em classes mais ou menos homogéneas para que, a segurados com características semelhantes sejam atribuídos o mesmo prémio, portanto, cada classe de risco representa um conjunto de características correspondente a um tipo de segurados. No seguro de responsabilidade civil do ramo automóvel, por exemplo, as variáveis mais usadas *a priori* para diferenciar o risco são: a idade do condutor, os anos de carta, a zona de residência, o sexo do condutor, a cilindrada do veículo, o tipo de veículo. Estas variáveis são designadas por variáveis de classificação *a priori*. Há muitas outras variáveis que influenciam o risco, e que no entanto não são incluídas por diversos motivos, por exemplo, algumas porque não são observáveis directamente (a rapidez dos reflexos, o conhecimento do código de estrada, a agressividade ao volante, comportamentos alcoólicos, etc.), outras porque não são politicamente adequados (por exemplo a nacionalidade), outras ainda porque a sua inclusão tornaria o sistema demasiado complexo, etc. A exclusão dessas variáveis gera uma certa heterogeneidade dentro de cada classe de risco que só é notada pela seguradora *a posteriori*, tornando o sistema desigual. Existem muitos estudos, um pouco por toda a parte, que afirmam que essas variáveis tendem a ser as mais importantes, ou seja, o melhor predictor para o número de sinistros futuros não é a idade do condutor, os anos de carta, a cilindrada do veículo, etc., mas sim a sua experiência passada. Surge assim a necessidade de rectificar *a posteriori* o prémio em função da sinistralidade. Existem várias práticas de tarificação *a posteriori*, tais como, “Experience Rating”, “No Claim Discount”, “Sistemas de *Bonus* ou de *Bonus Malus*”. Todas estas práticas de tarificação *a posteriori*, agravam o prémio do segurado caso este declare sinistros - *malus* - e bonificam o prémio caso não declare sinistros - *bonus*.

A introdução destes sistemas de tarificação *a posteriori*, não foi no entanto pacífica na

comunidade actuarial, pois contraria o princípio fundamental da actividade seguradora, que consiste em agrupar os vários riscos em classes mais ou menos homogêneas, de forma a que a seguradora, baseada na lei dos grandes números, assuma a responsabilidade mediante a atribuição de um prémio constante. Com a tarificação *a posteriori*, o prémio é calculado em função da experiência passada de cada segurado, portanto o prémio é uma variável aleatória que não depende do colectivo. Mesmo com estas contradições, o sistema foi muito bem aceite pelo público bem como entidades reguladoras e alargado a muitos países.

Uma das principais vantagens da implementação deste sistema de tarificação consiste no facto de que, a longo prazo, cada segurado pagará o prémio correspondente à sua própria frequência de sinistralidade o que, implicitamente, incentiva a prática de uma condução cautelosa por parte do segurado.

Seguindo Centeno (2003), introduziremos resultados gerais sobre sistemas de *bonus malus* em carteiras fechadas.

## 1.1 Generalidades

O sistema de *bonus malus* é, como sabido, um sistema de tarificação *a posteriori*, em que o prémio, obtido em função do número de sinistros declarados, é agravado ou bonificado consoante o segurado declare ou não sinistros.

Um sistema de *bonus malus* é caracterizado pelas seguintes condições:

1. Os períodos de vigência dos prémios são de igual duração, geralmente um ano;
2. As apólices estão divididas em um número finito de classes  $C_1, \dots, C_s$  em que  $s$  é o número de classes. A apólice mantém-se no mesmo estado durante o período de vigência, geralmente um ano;
3. A classe onde um segurado se encontra no início de cada período depende unicamente da classe onde esteve anteriormente e do número de sinistros declarados nesse mesmo período.

O sistema é definido por três elementos:

1. A escala de prémios  $\mathbf{b} = (b(1), \dots, b(s))^T$ . Apesar desta designação,  $b(i)$  não é o prémio aplicado à classe  $C_i$  mas sim o factor multiplicativo a aplicar ao prémio *a priori* da classe  $C_i$ .
2. A classe de entrada,  $C_{i_0}$ , onde geralmente são colocados todos os novos segurados.
3. A matriz de transição do sistema,  $\mathbf{T}$ , onde se definem as regras de transição de uma classe para outra no início de cada período, conhecido o número de sinistros do período anterior. As regras de transição,  $\mathbf{T}$ , podem ser escritas como uma matriz.

As regras de transição podem ser escritas na forma de transformações  $T_k$ , tal que  $T_k(i) = j$  se o segurado que se encontra na classe  $C_i$  transitar para a classe  $C_j$ , sabendo que declarou  $k$  sinistros. Pode ainda ser escrito na forma matricial  $\mathbf{T}_k = t_{ij}^{(k)}$  onde  $t_{ij}^{(k)} = 1$  se  $T_k(i) = j$  e  $t_{ij}^{(k)} = 0$  caso contrário.

O sistema pode ser representado pelo trio  $(\mathbf{b}, C_{i_0}, \mathbf{T})$ . Este trio, que define o sistema, será denotado por  $\Delta$ . Sendo  $Z_{\Delta, n}$  a v.a. que representa a classe do sistema onde se encontra uma apólice no período  $n$ , o sistema de *bonus malus*  $\Delta$  fornece uma base de tarifação para  $Z_{\Delta, n}$ , dada pela regras de transição  $\mathbf{T}$  e pela classe inicial  $C_{i_0}$ . Uma das principais vantagens do sistema assim definido para as seguradoras, é o facto de não ser necessário guardar a informação dos sinistros declarados pelos segurados nos anos anteriores, isto porque, para sabermos para que classe o segurado se dirige só é necessária a informação do número de sinistros declarados no ano e a classe em que se encontra no ano vigente. Nestas condições, o processo é chamado de processo sem memória, podendo portanto, ser tratado como uma cadeia de Markov. Neste documento considera-se que as cadeias de Markov implícitas no modelo são homogéneas, isto é, a probabilidade de um segurado que se encontra na classe  $i$  dirigir para a classe  $j$  é independente do período de tempo.

Dado  $\lambda$  a frequência de sinistralidade, seja  $\mathbf{P}_{\mathbf{T}, \lambda}$  a matriz de probabilidades de transição do *SBM*. A probabilidade de uma apólice que se encontra na classe  $C_i$  transitar para a classe  $C_j$  num passo é dada por:

$$p_{\mathbf{T}, \lambda}(i, j) = \mathbb{P}[Z_{\Delta, n+1} = j | Z_{\Delta, n} = i, \Lambda = \lambda] \quad i, j = 1, \dots, s.$$

com  $\Lambda$  a v.a. que representa a frequência de sinistralidade.

A distribuição  $Z_{\Delta, n}$  é dada por

$$p_{\Delta, \lambda}^{(n)}(j) = \mathbb{P}(Z_{\Delta, n} = j | \Lambda = \lambda), \quad j = 1, \dots, s. \quad (1.1)$$

que, para além de depender de  $\mathbf{T}$ , depende também da classe inicial  $C_{i_0}$ .

## 1.2 Modelo Clássico - Distribuição Limite

O modelo para o sistema de *bonus malus* baseado nas cadeias de Markov considera que a carteira das apólices é fechada, isto é, não admite entradas nem saídas de apólices no sistema. Esta hipótese é essencial para a aplicação deste modelo.

Se a cadeia de Markov implícita no sistema for irredutível, finita e aperiódica portanto recorrente positiva, ver Centeno (2003), pode-se afirmar então que, para uma dada frequência de sinistralidade  $\lambda$ , a distribuição limite

$$\pi_{\mathbf{T}, \lambda}(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{\Delta, \lambda}^{(n)}(j), \quad j = 1, \dots, s, \quad (1.2)$$

coincide com a distribuição estacionária  $\pi_{\mathbf{T}, \lambda}$ , ou seja, com o vector próprio esquerdo associado ao valor próprio unitário da matriz  $\mathbf{P}_{\mathbf{T}, \lambda}$ . Assim,  $\pi_{\mathbf{T}, \lambda}$  é a solução única não

negativa do sistema de equações:

$$\begin{cases} \pi_{T,\lambda} \cdot P_{T,\lambda} = \pi_{T,\lambda} \\ \sum_{j=1}^s \pi_{T,\lambda}(j) = 1 \end{cases}$$

Portanto, obtém-se assim a distribuição limite para uma determinada frequência de sinistralidade  $\lambda$ .

### 1.3 Carteiras Abertas - Modelo Vórtices Estocásticos

O modelo clássico do sistema de *bonus malus*, assume que a carteira das apólices é fechada, e que existe uma única classe de entrada de novos segurados no sistema. Como é sabido, todos os anos há novas subscrições e anulações de apólices nas seguradoras por diversos motivos, geralmente porque os segurados estão insatisfeitos com o valor do prémio, e abandonam a seguradora à procura de prémios mais baixos ou maiores descontos numa outra seguradora, ou então porque simplesmente deixaram de conduzir, é o caso dos mais idosos, e como não existe um vínculo obrigatório com a seguradora, qualquer segurado pode anular a apólice em qualquer altura. Isto faz com que sejam os restantes segurados que ficam na carteira a suportar os prejuízos causados.

Actualmente existe um certificado de tarifação *online*, onde as seguradoras podem verificar o histórico de sinistros dos novos segurados, por forma a colocá-los nas diferentes classes do sistema. No entanto, por vezes este certificado é ignorado, por forma a não penalizar os novos segurados, por motivos comerciais. Nas situações em que o certificado é respeitado, o segurado entrará na classe de *bonus* correspondente ao seu histórico de sinistralidade podendo, assim, ser colocado em qualquer das classes do sistema. Portanto, actualmente, faz pouco sentido assumir que existe uma única classe de entrada no sistema.

Alguns autores têm-se debruçado sob o estudo do sistema de *bonus malus* sob a perspectiva de uma carteira aberta. Guerreiro (2001) e Guerreiro e Mexia (2004) reformulam o problema do sistema de *bonus malus* baseando-se no modelo teórico apresentado por Mexia (2000), que visa ultrapassar as limitações dos sistemas tradicionais. Centeno e A.Silva (2002) também analisaram o *SBM* numa carteira aberta.

Ao longo desta secção, apresenta-se o modelo reformulado por Guerreiro (2001) e Guerreiro e Mexia (2004), posteriormente desenvolvido por Guerreiro e Mexia (2008). Estes modelos apresentam alternativas de modo a ultrapassar os problemas anteriores referidos e assentam na teoria dos vórtices estocásticos.

Considere-se uma dada população, que admite entradas e saídas, dividida em  $k$  sub-populações, onde as probabilidades de transição entre as sub-populações, num período, correspondem a uma cadeia de Markov homogénea.

Diz-se que se tem um vórtice estocástico nessa população se houver estabilidade nos efectivos que ocupam os estados transientes. O suporte do vórtice é constituído por estados transientes que formam classes de comunicações (será numa dessas classes

que o vórtice se instalará) e os estados recorrentes constituem as saídas do vórtice.

O modelo dos vórtices estocásticos no *SBM*, considera que a cadeia de Markov é constituído por  $s$  estados transientes (as  $s$  classes do sistema) e um estado absorvente que representa o estado de saída do sistema. Portanto, o sistema é constituído por  $s+1$  estados. Considera-se, também, um vector que contém as probabilidades de entrada de novos segurados para as diversas classes do sistema, portanto os novos segurados estão sujeitos a uma classificação inicial, podendo ser colocados em qualquer uma das  $s$  classes do sistema.

### 1.3.1 Matrizes de Transição

Admitindo que o sistema de *bonus malus* é constituído por  $s$  estados transientes e 1 estado recorrente, sejam:

- $\mathbf{K}$  - matriz de dimensão  $s \times s$ , cujos elementos representam as probabilidades de transição entre as classes transientes;
- $\mathbf{q}_1$  - vector coluna, de dimensão  $s \times 1$ , cujos elementos representam as saídas das apólices nas classes transientes.

A matriz de probabilidades de transição, num passo, dadas as regras de transição  $\mathbf{T}$ , será dada por:

$$\mathbf{P}_T = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Como se pode observar, a última linha da matriz representa o estado de saída das apólices.

Considere-se o seguinte lema:

**Lema 1.1.** *A matriz probabilidade de transição em  $n$  passos, será da forma:*

$$\mathbf{P}_{T,n} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^n & \mathbf{q}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

onde  $\mathbf{q}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{K}^j \mathbf{q}_1$ ,  $n \in \mathbb{N}$

*Demonstração.* A prova é facilmente obtida por indução matemática e pode ser consultada em Guerreiro (2001) ou em Guerreiro e Mexia (2004)  $\square$

### 1.3.2 Fluxos de Entradas nas Populações

Sejam  $E_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , o número total de entrada de novos segurados no  $i$ -ésimo ano, variáveis aleatórias independentes, com distribuição Poisson de parâmetro  $\lambda'_i$ , respectivamente, admitindo-se que as entradas se verificam no início de cada ano.

Considere-se que a intensidade de entrada de novos segurados,  $\lambda'_i$ , é dada pela seguinte expressão:

$$\lambda'_i = a + b\theta^i, \quad a, \theta \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

sujeito a  $\lambda'_1 = a + b\theta > 0$  e excluindo os casos em que  $(b, \theta) \in \mathbb{R}^- \times ]1, +\infty[$ .

Para futuras referências, tal como em Guerreiro et al. (2010), será considerado que o espaço de parâmetros  $\Theta$ , corresponde aos possíveis valores de  $a$ ,  $b$  e  $\theta$ , definido por:

$$\Theta = \{(a, b, \theta) : a, \theta \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}, a + b\theta > 0\} \setminus \{(b, \theta) : b \in \mathbb{R}^-, \theta \in ]1, +\infty[ \} \quad (1.6)$$

A equação (1.5), representa o fluxo de entradas dos segurados. Esta pode ser particularizada, considerando as seguintes situações:

- Se  $b = 0$ , o fluxo de novas entradas é constante;
- Se  $a = 0$ , o número de novas entradas evolui em progressão geométrica;
- Se  $a = -b$  e  $\theta = e^{-\delta}$ ,  $\delta > 0$ , obter-se-á um comportamento assintótico com fluxo de entradas crescente;
- Se  $a = b$  e  $\theta = e^{-\delta}$ ,  $\delta > 0$ , obter-se-á um comportamento assintótico com fluxo de entradas decrescente.

Considerando que, no início de cada contrato, os novos segurados estão sujeitos a uma classificação inicial, afim de serem distribuídos nas diferentes classes transientes do sistema, seja  $\mathbf{c}_i$  o vector de classificação inicial para o ano  $i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , com

$$\mathbf{c}_i^T = ( \mathbf{t}_i^T \quad | \quad 0 ) \quad (1.7)$$

onde  $\mathbf{t}_i$  representa o vector de probabilidade inicial de um novo segurado ser colocado nos diferentes estados transientes do sistema.

Observe-se que a última componente de  $\mathbf{c}_i^T$ , indica que a probabilidade de um novo segurado ser colocado no estado de saída é nula.

Considerando que poderão haver alterações nas classificações iniciais de cada ano,  $\mathbf{c}_i$  poderá ser representado por

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_0 + e\gamma^i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (1.8)$$

onde:

- $\mathbf{c}_0$  - o vector estável, de período para período, tal que  $\mathbf{c}_0^T = ( \mathbf{t}_0^T \quad | \quad 0 )$ ;
- $e$  - vector cujas componentes têm soma nula e são inferiores, em módulo, às componentes correspondentes de  $\mathbf{c}_0$ , isto é,  $\sum_{j=1}^s e_j = 0$  e  $|e_j| < |c_{0,j}|$ ,  $j = 1, \dots, s$ ;

- $\gamma$ -escalar, tal que  $0 < \gamma < 1$ .

Seja  $\mathbf{N}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , o vector que contém o número de novos segurados no início do  $i$ -ésimo ano nas várias classes de *bonus* do sistema. Dado que  $E_i \sim \mathcal{P}(\lambda'_i)$  tem-se então que<sup>1</sup> os elementos de  $\mathbf{N}_i$  são variáveis aleatórias independentes, com distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda'_i c_{i,j}$ , com  $c_{i,j}$  as componentes do vector  $\mathbf{c}_i$ . Considere-se  $\lambda'_{i,j} = \lambda'_i c_{i,j}$ .

O teorema seguinte, cuja demonstração pode ser consultada em Guerreiro (2008) ou Guerreiro et al. (2010), é muito importante para a obtenção de alguns resultados mais adiante.

**Teorema 1.1 (Versão Paramétrica do Teorema de Chapman-Kolmogorov).** *Considere-se uma população com  $k$  sub-populações. Seja  $E_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  o número de elementos inicialmente colocados na população no  $i$ -ésimo ano. Admite-se que  $E_i$  tem distribuição  $\mathcal{P}(\lambda'_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  e que estes efectivos são imediatamente classificados (distribuídos pelas sub-populações) segundo o vector de classificação  $\mathbf{c}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Posteriormente, os efectivos serão periodicamente reclassificados, com probabilidades de transição estáveis, que constituem a matriz de transição num passo  $\mathbf{P}$ . Após  $m$  períodos,  $N_{i,m}$  o número de elementos nas sub-populações no  $m$ -ésimo ano, dado que entraram no  $i$ -ésimo ano, terão sido sujeitos a  $m - i$  reclassificações e terá distribuição  $\mathcal{P}(\lambda'_{i,m})$ , com*

$$\lambda'_{i,m} = \lambda'_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{P}^{m-i}. \quad (1.9)$$

Ao fim do  $m$ -ésimo ano, com  $m > i$ , os segurados que entraram no sistema no  $i$ -ésimo ano, foram reclassificados  $m - i$  vezes, portanto, utilizando o teorema anterior, tem-se que o vector dos respectivos efectivos, terão distribuição Poisson de parâmetro  $\lambda'_{i,m} = \lambda'_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{P}^{m-i}$ .

Considerando  $\mathbf{N}_m^{++} = \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_{i,m}$ , ou seja,  $\mathbf{N}_m^{++}$  o número total de segurados no sistema, no início do  $m$ -ésimo ano, dado que já foram contabilizadas as entradas do  $m$ -ésimo ano, tem-se então que  $\mathbf{N}_m^{++} \sim \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}_m^{++})$ , com

$$\boldsymbol{\lambda}_m^{++T} = \sum_{i=1}^m \lambda'_{i,m} = \sum_{i=1}^m \lambda'_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{P}^{m-i}. \quad (1.10)$$

**Proposição 1.1.** *Após  $m - i$  reclassificações, o vector médio do número de segurados nas sub-populações será dado por*

$$\boldsymbol{\lambda}_m^{++T} = \left[ \sum_{i=1}^m \lambda'_i \mathbf{t}_i^T \mathbf{K}^{m-i} \mid \sum_{i=1}^m \lambda'_i \mathbf{t}_i^T \mathbf{q}_{m-i} \right]. \quad (1.11)$$

*Demonstração.* A prova resulta directamente de (1.10), recorrendo a (1.9), (1.3) e (1.4) e pode ser vista em Guerreiro (2008) ou Guerreiro et al. (2010).  $\square$

<sup>1</sup>Este resultado pode ser consultado em Feller (1966).

### 1.3.3 Distribuição Limite

Como foi dito anteriormente, sob a hipótese de existência de vórtices, estes instalar-se-ão nas classes transientes do sistema.

Assim sendo, considerando que  $\lambda_m^+$  é o vector médio do número de segurados nas classes transientes do sistema no  $m$ -ésimo período, tem-se então que

$$\lambda_m^{+T} = \sum_{i=1}^m \lambda'_i t_i^T \mathbf{K}^{m-i}. \quad (1.12)$$

Nesta secção, pretende-se primeiro provar a existência do vórtice nas classes transientes, dado que o fluxo de entrada de novos segurados é dado por  $\lambda'_i = a + b\theta^i$ ,  $(a, b, \theta) \in \Theta$  e, posteriormente, determinar a distribuição limite do sistema.

Em condições genéricas, a matriz de probabilidades de transição das classes transientes poderá ser representada, por (ver Feller (1966)):

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^s \eta_j \alpha_j \beta_j^T \quad (1.13)$$

onde:

- $\eta_j$  - são os valores próprios da matriz  $\mathbf{K}$ , tal que  $|\eta_1| > |\eta_2| > \dots > |\eta_s|$ ;
- $\alpha_j$  são os vectores próprios esquerdos (normalizados) da matriz  $\mathbf{K}$ ;
- $\beta_j$  são os vectores próprios direitos (normalizados) da matriz  $\mathbf{K}$ .

Atendendo ao teorema de *Perron Frobenius* (pode ser consultado em Feller (1966)), se a matriz de probabilidade de transição num passo,  $\mathbf{P}$ , for finita, irreduzível e aperiódica, então tem-se que:

- $|\eta_1| = 1$ ;
- $|\eta_j| < 1$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

Como os vectores próprios à esquerda e à direita correspondentes a diferentes valores próprios são ortogonais, e tendo em conta o resultado (1.13), tem-se que o vector médio dos segurados nas classes transientes, passados  $m$  anos, é dado por:

$$\begin{aligned} \lambda_m^{+T} &= \sum_{i=1}^m \lambda'_i t_i^T \mathbf{K}^{m-i} = \sum_{i=1}^m \lambda'_i t_i^T \sum_{j=1}^s \eta_j^{m-i} \alpha_j \beta_j^T = \\ &= \sum_{j=1}^s \lambda'_i \left( \sum_{i=1}^m g_{i,j} \eta_j^{m-i} \right) \beta_j^T \end{aligned} \quad (1.14)$$

com  $g_{i,j} = \mathbf{t}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

O seguinte lema e o seu corolário podem ser consultados em Guerreiro (2008) e servem para simplificar a análise da existência de vórtices estocásticos nas classes transientes.

**Lema 1.2.** *Se  $\lim_{i \rightarrow +\infty} g_{i,j} = g_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ , e tomando  $d_{i,j} = g_{i,j} - g_j$ , ter-se-á*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=0}^m \lambda'_i d_{i,j} \eta_j^{m-i}}{\sum_{i=1}^m \lambda'_i \eta_j^{m-i}} = 0, j = 1, \dots, s \quad (1.15)$$

**Corolário 1.1.** *Se  $\lim_{i \rightarrow +\infty} d_{i,j} = 0$ , então*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=0}^m \lambda'_i g_{i,j} \eta_j^{m-i}}{\sum_{i=1}^m \lambda'_i \eta_j^{m-i}} = 1. \quad (1.16)$$

Portanto, se  $\lim_{i \rightarrow +\infty} d_{i,j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, s$ , então  $g_{i,j}$  pode ser substituído por  $g_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ , o que simplificará bastante o calculo dos limites para os parâmetros e quocientes dos parâmetros.

Atendendo à definição feita para  $\mathbf{c}_i$  em (1.7) e (1.8), o vector das probabilidades iniciais para os estados transientes, cujo limite será dado por

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbf{t}_i = \lim_{i \rightarrow +\infty} (\mathbf{t}_0 + e^{\gamma^i}) = \mathbf{t}_0$$

dado que  $0 < \gamma < 1$ . Sendo assim, tem-se

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} g_{i,j} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbf{t}_i^T \cdot \boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{t}_0^T \cdot \boldsymbol{\alpha}_j = g_j.$$

Logo, temos que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} d_{i,j} = 0$ , portanto o Lema 1.2 e o seu corolário são verificados.

Conforme referido anteriormente, pretende-se determinar o limite do vector médio dos segurados nas classes transientes, o qual é dado por

$$\boldsymbol{\lambda}_m^+ = \sum_{j=1}^s \left( \sum_{i=1}^m \lambda'_i g_{i,j} \eta_j^{m-i} \right) \boldsymbol{\beta}_j^T$$

Como o Lema 1.2 e o seu corolário são verificados, então pode-se substituir  $g_{i,j}$  por  $g_j$ . Denotando  $\sum_{i=1}^m \lambda'_i g_j \eta_j^{m-i}$  por  $u_{m,j}$ , tem-se então que

$$\begin{aligned} u_{m,j} &= \sum_{i=1}^m \lambda'_i g_j \eta_j^{m-i} = \sum_{i=1}^m (a + b\theta^i) g_j \eta_j^{m-i} = \\ &= a g_j \frac{1 - \eta_j^m}{1 - \eta_j} + b g_j \frac{\theta^m - \eta_j^m}{\theta - \eta_j} \end{aligned} \quad (1.17)$$

com  $\theta \neq \eta_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

Tem-se então que o limite de  $u_{m,j}$ , quando  $m \rightarrow \infty$ , depende de  $\theta$  e será dado por:

- Se  $0 < \theta < 1$ ;

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_{m,j} = \frac{g_j a}{1 - \eta_j}, \quad j = 1, \dots, s, \quad (1.18)$$

dado que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \theta^{m+1} = 0$  e  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \eta_j^{m+1} = 0$ , pois  $|\eta_j| < 1$ .

- Se  $\theta = 1$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_{m,j} = \frac{g_j(a+b)}{1 - \eta_j}, \quad j = 1, \dots, s, \quad (1.19)$$

- Se  $\theta > 1$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{u_{m,j}}{\theta^m} = \frac{g_j b}{\theta - \eta_j}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (1.20)$$

Se  $\theta = \eta_{j'}$ , para algum  $j'$ , ver Guerreiro (2008), tem-se que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_{m,j'} = \frac{g_{j'} a}{1 - \eta_{j'}} \quad (1.21)$$

pois  $|\eta| < 1$ .

Temos portanto, a seguinte proposição (pode ser encontrada em Guerreiro (2008) ou Guerreiro e Mexia (2008)):

**Proposição 1.2.** *Se as intensidades de entrada na população são modeladas por  $\lambda'_i = a + b\theta^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $(a, b, \theta) \in \Theta$  e se  $\lim_{i \rightarrow +\infty} d_{i,j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, s$ , tem-se que*

- Se  $0 < \theta < 1$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\lambda}_m^{+T} = \sum_{j=1}^s \frac{g_j a}{1 - \eta_j} \boldsymbol{\beta}_j^T. \quad (1.22)$$

- Se  $\theta = 1$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\lambda}_m^{+T} = \sum_{j=1}^s \frac{g_j(a+b)}{1 - \eta_j} \boldsymbol{\beta}_j^T. \quad (1.23)$$

- Se  $\theta > 1$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}_m^{+T}}{\theta^m} = \sum_{j=1}^s \frac{g_j b}{1 - \eta_j} \boldsymbol{\beta}_j^T. \quad (1.24)$$

Conclui-se assim que, para  $0 < \theta \leq 1$ , existe limite finito para o vector estimador dos parâmetros, correspondente ao vector médio do número de segurados nas sub-populações. Para  $\theta > 1$ , tem-se que as componentes do vector estimador dos parâmetros, crescem proporcionalmente a  $\theta^m$  para  $+\infty$ .

Portanto, em todos os casos, existem e não são nulos os seguintes limites:

$$\pi_{\infty,j} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_{m,j}^+}{\sum_{j=1}^s \lambda_{m,j}^+}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (1.25)$$

com  $\lambda_{m,j}^+$ ,  $j = 1, \dots, s$  as componentes do vector  $\boldsymbol{\lambda}_m^+$ .

Fica assim provado que, a longo prazo, existe estabilidade da dimensão relativa das classes do sistema, característica da existência de vórtices estocásticos. Considere-se então a seguinte proposição:

**Proposição 1.3.** *Se as intensidades de entradas para a população são modeladas por  $\lambda_i' = a + b\theta^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $(a, b, \theta) \in \Theta$  e se  $\lim_{i \rightarrow \infty} d_{i,j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, s$ , existe um vórtice estocástico na população, com suporte nos estados transientes.*

Para  $0 < \theta \leq 1$ , considerando que as intensidades de entradas na população se comportam da forma  $\lambda_i' = a + b\theta^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , diz-se que se está perante populações estacionárias, isto porque as probabilidades de transição entre as sub-populações são estáveis, e a longo prazo, verifica-se estabilidade das dimensões absolutas e relativas das sub-populações.

Para  $\theta > 1$ , nas mesmas condições, diz-se que se está perante populações maduras, isto porque apenas existe estabilidade das dimensões relativas das sub-populações.

Para efeitos computacionais, serão utilizados resultados conhecidos sobre séries geométricas de matrizes (por exemplo, consultar Guerreiro (2008)), para determinar a expressão de  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\lambda}_m^{+T}$ . Utilizando esses resultados e denotando  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\lambda}_m^{+T}$  por  $\boldsymbol{\lambda}_{\infty}^{+T}$ , tem-se que:

- Para  $0 < \theta < 1$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\infty}^{+T} = a\mathbf{t}_0^T (\mathbf{I} - \mathbf{K})^{-1} \quad (1.26)$$

- Para  $\theta = 1$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\infty}^{+T} = (a + b)\mathbf{t}_0^T (\mathbf{I} - \mathbf{K})^{-1} \quad (1.27)$$

- Para  $\theta > 1$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\infty,\theta}^{+T} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_m^{+T}}{\theta^m} = \frac{1}{\theta} b\mathbf{t}_0^T \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{K}}{\theta} \right)^{-1} \quad (1.28)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de dimensão  $s \times s$ .

O vector limite das dimensões relativas das sub-populações,  $\boldsymbol{\pi}_{\infty}$ , é determinado dividindo cada elemento de  $\boldsymbol{\lambda}_{\infty}^+$  ou  $\boldsymbol{\lambda}_{\infty,\theta}^+$  pela soma de todos os elementos, consoante  $0 < \theta \leq 1$  ou  $\theta > 1$ , ou seja:

- Para  $0 < \theta \leq 1$

$$\pi_{\mathbf{T}}(j) = \frac{\lambda_{\infty}^+(j)}{\sum_{j=1}^s \lambda_{\infty}^+(j)} \quad (1.29)$$

- Para  $\theta > 1$

$$\pi_{\mathbf{T}}(j) = \frac{\lambda_{\infty,\theta}^+(j)}{\sum_{j=1}^s \lambda_{\infty,\theta}^+(j)} \quad (1.30)$$



# Capítulo 2

## Escalas Óptimas de Prémios e Medidas de Avaliação de SBM

### 2.1 Escalas Óptimas de Prémios

Muitos autores, ao longo dos tempos, têm-se debruçado sobre o problema da determinação de prémios a vigorarem em cada classe do sistema de *bonus malus*, uma vez dada a matriz das regras de transição. Os modelos propostos têm como objectivo a determinação de escalas de prémios óptimos por forma a otimizar a carteira das apólices.

Ao longo deste capítulo, com base em Centeno (2003), pretende-se apresentar alguns desses modelos, propostos por alguns autores, e também abordar as medidas de eficiência por forma a comparar diferentes sistemas de *bonus malus*.

#### 2.1.1 O Modelo de Norberg

O modelo apresentado por Norberg (1976) utiliza uma abordagem semelhante à Teoria de Credibilidade.

Sejam  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  o montante das indemnizações agregadas relativas a um segurado no  $n$ -ésimo período de contrato da apólice. Dada a frequência de sinistralidade  $\lambda$ , suponha-se que  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.  $Z_{\Delta,n}$  designa, como anteriormente, uma variável aleatória que representa a classe em que uma apólice genérica se encontra no  $n$ -ésimo período, quando vigora o sistema  $\Delta = (b, T, C_{i_0})$ .

Seja  $b_n(Z_{\Delta,n})$  um estimador do prémio de risco de sinistralidade  $E[S_n|\lambda]$ . A medida de eficiência do prémio  $b_n(Z_{\Delta,n})$ , é a perda quadrática esperada

$$Q_n(\Delta) = E[E[S_n|\lambda] - b_n(Z_{\Delta,n})]^2. \quad (2.1)$$

Estabelece-se como objectivo minimizar a diferença quadrática esperada entre o prémio puro e o prémio estimado para o período  $n$ .

Dado que a distribuição de  $Z_{\Delta,n}$  depende, para além dos elementos referidos, do parâmetro  $\lambda$ , ter-se-á:

$$\begin{aligned} Q_n(\Delta) &= \int_0^\infty [E[S_n|\lambda] - b_n(Z_{\Delta,n})]^2 \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^s [E(S_n|\lambda) - b(j)]^2 p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda). \end{aligned} \quad (2.2)$$

**Teorema 2.1.** *Para qualquer  $b_n(Z_{\Delta,n})$ , baseado em  $Z_{\Delta,n}$ , tem-se que*

$$Q_n(\Delta) \geq E[V[E(S_n|\lambda)|Z_{\Delta,n}]] \quad (2.3)$$

com a igualdade a verificar-se se e só se

$$\mathbb{P}[b_n(Z_{\Delta,n}) = \mu_n(Z_{\Delta,n})] = 1,$$

com

$$\mu_n(Z_{\Delta,n}) = E[E[S_n|\lambda]|Z_{\Delta,n}]. \quad (2.4)$$

O Teorema 2.1, cuja demonstração pode ser consultada em Centeno (2003), demonstra que  $\mu_n(Z_{\Delta,n})$  é o estimador que minimiza a perda quadrática esperada.

O estimador  $\mu_n(Z_{\Delta,n})$  é o prémio de credibilidade para o período  $n$ , baseada na classe de *bonus* nesse período,  $Z_{\Delta,n}$ . Na terminologia Bayesiana,  $Q_n(\Delta)$  é proporcional ao risco do estimador  $b_n(Z_{\Delta,n})$  para  $E[S_n|\lambda]$ , quando se usa a função da perda quadrática e  $\mu_n(Z_{\Delta,n})$  o correspondente estimador de Bayes. Note-se que

$$E[\mu_n(Z_{\Delta,n})] = E[E[S_n|\lambda]] = E[S_n],$$

o que implica que, em média, o prémio de credibilidade iguala as indemnizações esperadas.

À partida, podia afirmar-se que a determinação do prémio óptimo a aplicar em cada classe de *bonus* seria obtido por aplicação do teorema anterior portanto, seria  $E[E(S_n|\lambda)|Z_{\Delta,n} = j]$ ,  $j = 1, \dots, s$ , que depende de  $n$ , mas como já foi referido na Secção 1.1, a cadeia de Markov implícita no sistema de *bonus malus* é homogénea, portanto o prémio é independente de  $n$ , o que é contraditório.

Sejam dois sistemas de *bonus malus*  $\Delta$  e  $\tilde{\Delta}$ . Se  $Q_n(\Delta) < Q_n(\tilde{\Delta})$ , para todo  $n$ , então obviamente que  $\Delta$  é preferível a  $\tilde{\Delta}$ . Dado que esta situação nem sempre acontece tem-se, em geral,  $Q_n(\Delta) < Q_n(\tilde{\Delta})$  para alguns valores de  $n$  e  $Q_n(\Delta) > Q_n(\tilde{\Delta})$  para outros valores de  $n$ . Norberg (1976) propõe que se minimize, para determinação da escala óptima de prémios, o valor limite de  $Q_n(\Delta)$  quando  $n$  tende para infinito, ou seja,

$$Q_0(\Delta) = E [[E(S|\lambda) - b(Z_T)]^2] \quad (2.5)$$

onde  $S$  designa uma variável aleatória identicamente distribuída a  $S_n$ .

Dado que o prémio de credibilidade é determinado pela minimização de  $Q_0(\Delta)$ , então basta derivar  $Q_0(\Delta)$  em ordem a  $b_T(j)$ ,  $j = 1, \dots, s$  e, igualando a zero, ter-se-á então

$$b_T(j) = \frac{\int_0^\infty E(S|\lambda)\pi_{T,\lambda}(j)dU(\lambda)}{\pi_T(j)}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (2.6)$$

Note-se que, se considerar que  $S_n$  depende apenas de  $\lambda$  através da distribuição do número de sinistros e considerar o valor esperado de cada indemnização uma unidade monetária, tem-se então que (2.6) é equivalente a

$$b_T(j) = \frac{\int_0^\infty \lambda\pi_{T,\lambda}(j)dU(\lambda)}{\pi_T(j)}. \quad (2.7)$$

Encontrada a escala optima do sistema, há que avaliar a sua eficiência.

**Teorema 2.2.** *Sejam  $\Delta$  e  $\tilde{\Delta}$  dois sistemas de bonus com regras de transição  $T$  e  $\tilde{T}$  respectivamente e com escalas de prémios óptimos calculados de acordo com a fórmula (2.7).  $T$  é mais eficiente que  $\tilde{T}$  ou seja  $Q_0(\Delta) < Q_0(\tilde{\Delta})$  se e só se  $e(T) > e(\tilde{T})$ , com*

$$e(T) = E[b_T^2(Z_T)] = \sum_{j=1}^s b_T^2(j)\pi_T(j). \quad (2.8)$$

*Demonstração.* Pode ser consultada em Centeno (2003). □

O valor da eficiência de um sistema de *bonus malus*, só por si não tem nenhum significado, este critério serve para comparar a eficiência de dois sistemas de *bonus malus* diferentes.

Este modelo não garante que, dado que as classes de *bonus* sejam ordenadas por ordem crescente de propensão de sinistralidade, a escala óptima de prémio obtida seja crescente. Outra inconveniência deste modelo, é o facto de analisar o problema a que se propõe recorrendo exclusivamente à distribuição estacionária, e como se sabe, a cadeia de Markov pode convergir lentamente para a estacionaridade.

### 2.1.2 O Modelo de Borgan, Hoem & Norberg

O modelo apresentado por Borgan et al. (1981) é uma generalização do modelo de Norberg (1976), onde se considera a introdução de um sistema de ponderadores  $\{w_n; n = 0, 1, \dots\}$ , onde  $w_n$  representa o peso a atribuir ao período  $n$  e  $w_0$  o peso a atribuir à distribuição estacionária. Como seria de esperar, a soma de todos os ponderadores é um. Nota-se que, se  $w_n = 0$  e  $w_0 = 1$  obtém-se o modelo anterior.

Tal como no modelo anterior, pretende-se minimizar a perda quadrática esperada:

$$Q(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n Q_n(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^\infty \sum_{j=1}^s [E(S_n|\lambda) - b(j)]^2 p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) \quad (2.9)$$

com  $p_{\Delta,\lambda}^{(0)}(j) = \pi_{T,\lambda}(j)$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

Derivando  $Q(\Delta)$  e igualando a zero, obtém-se que a escala de prémios ótimos:

$$b_B(j) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} E(S_n|\lambda) p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda)}{p_{\Delta}(j)} \quad (2.10)$$

onde

$$p_{\Delta}(j) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda). \quad (2.11)$$

O critério de eficiência para este modelo, será dado por:

$$e(\Delta) = \sum_{j=1}^s [b_B(j)]^2 p_{\Delta}(j) \quad (2.12)$$

O teorema anterior pode ser generalizado usando este critério de eficiência.

Tal como o modelo anterior, este também não garante que, dado que as classes foram definidas por ordem crescente de propensão à sinistralidade, a escala de prémios obtidos seja crescente.

### 2.1.3 O Modelo de Gilde & Sundt

O modelo apresentado por Gilde e Sundt (1989) também denominado por Escala Linear, visa resolver os problemas dos modelos anteriores. A escala de prémios é linearizada de forma a que esta seja dada por ordem crescente de gravidade de sinistralidade, garantindo assim que as irregularidades dos modelos anteriores sejam resolvidos e obtendo-se uma escala regular.

A escala de prémios linear, proposta por Gilde e Sundt (1989) de modo a minimizar (2.1) é dada por

$$b(j) = a + jb, \quad j = 1, \dots, s. \quad (2.13)$$

Dado que se pretende resolver o problema de minimização de (2.9), nota-se que

$$\begin{aligned} Q_n(\Delta) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n Q_n(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^s [E(S_n|\lambda) - b(j)]^2 p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s E^2(S_n|\lambda) p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s (b(j))^2 p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda) \\ &- 2 \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^s E(S_n|\lambda) b(j) p_{\Delta,\lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda). \end{aligned}$$

Simplificando a expressão anterior, obtém-se:

$$Q(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} E^2(S_n|\lambda) dU(\lambda) + \sum_{j=1}^s (a + bj)^2 p_{\Delta}(j) - 2 \sum_{j=1}^s (a + jb) b_B(j) p_{\Delta}(j). \quad (2.14)$$

Note-se que o primeiro termo do segundo membro é independente da escala de prêmios escolhida, e os restantes termos, quando se escolhe a escala de *Bayes*, o simétrico a  $e(\Delta)$ , ficando assim generalizado o Teorema 2.2.

O problema central do modelo proposto por Gilde e Sundt (1989) é a determinação dos parâmetros  $a$  e  $b$  de modo a minimizar  $Q(\Delta)$ . Sendo assim, derivando a expressão 2.14 em ordem a  $a$  e  $b$  e igualando-as a zero, tem-se que

$$\begin{cases} b_L = \frac{\sum_{j=1}^s j b_B(j) p_{\Delta}(j) - \sum_{j=1}^s j p_{\Delta}(j) \sum_{j=1}^s b_B(j) p_{\Delta}(j)}{\sum_{j=1}^s j^2 p_{\Delta}(j) - (\sum_{j=1}^s j p_{\Delta}(j))^2} \\ a_L = \sum_{j=1}^s b_B(j) p_{\Delta}(j) - b_L \sum_{j=1}^s j p_{\Delta}(j) \end{cases} \quad (2.15)$$

A escala obtida pelo modelo de Gilde e Sundt (1989) vem assim, resolver os problemas de monotonia e irregularidades dos modelos anteriores. No entanto, nalguns casos raros, a escala linear obtida não é admissível, porque a escala de prêmios nas classes bonificadas é negativa.

A medida de eficiência proposta pelos autores para medir a perda ocorrida por se escolher a escala linear em vez de escala de *Bayes*, é dada pelo quociente entre o erro quadrático médio associado à escala linear e o erro quadrático médio associado à escala de *Bayes*.

#### 2.1.4 O Modelo de Andrade e Silva

O modelo apresentado por Andrade e Silva (1991), também denominado por Escala Geométrica, é outra alternativa para superar as lacunas do modelo de Norberg (1976). Andrade e Silva (1991) propõe, tal como o modelo anterior, que se minimize (2.14) sob a restrição de que

$$b(j) = a \cdot b^j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.16)$$

ou seja, pretende-se determinar  $a$  e  $b$  de modo a minimizar

$$Q(\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \int_0^{\infty} E^2(S_n|\lambda) dU(\lambda) + \sum_{j=1}^s (a \cdot b^j)^2 p_{\Delta}(j) - 2 \sum_{j=1}^s (a \cdot b^j) b_B(j) p_{\Delta}(j). \quad (2.17)$$

Portanto, derivando (2.17) em ordem a  $a$  e  $b$  e igualando a zero, obtém-se:

$$a_G = \frac{\sum_{j=1}^s b_G^j b_B(j) p_{\Delta}(j)}{\sum_{j=1}^s b_G^{2j} p_{\Delta}(j)}. \quad (2.18)$$

e

$$a_G \left[ a_G \sum_{j=1}^s j b_G^{2j-1} p_\Delta(j) - \sum_{j=1}^s j b_G^{j-1} b_B(j) p_\Delta(j) \right] = 0 \quad (2.19)$$

expressão esta que se pode simplificar, substituindo a expressão de  $a_G$ , e tendo em conta os valores admissíveis para  $a_G$  e  $b_G$ , obtendo-se a seguinte equação

$$\sum_{j=1}^s b_G^j b_B(j) \sum_{j=1}^s j b_G^{2j} p_\Delta(j) = \sum_{j=1}^s j b_G^j b_B(j) p_\Delta(j) \sum_{j=1}^s b_G^{2j} p_\Delta(j). \quad (2.20)$$

Embora o autor não prove a existência de uma solução única de  $b_G$  na equação (2.20), em todos os exemplos que determinou a solução numérica desta equação, mostrou existir uma e uma só solução admissível para  $b_G$ . O ponto de estacionaridade que se obtiver será certamente um minimizante, já que  $\partial Q(\Delta)/\partial b < 0$  em  $b = 1$  e os valores admissíveis supõem  $b_G > 1$ . Tal como referido pelo autor, apesar das lacunas que o modelo origina, é importante referir que, em termos práticos, as soluções admissíveis situam-se num intervalo relativamente estreito<sup>1</sup>, o que torna possível um estudo cuidadoso deste intervalo por forma a verificar a unicidade da solução, em cada situação concreta.

A medida de eficiência desta escala para medir a eficiência do modelo é semelhante à definida na escala linear, ou seja, é o quociente entre o erro quadrático médio associado à escala geométrica e o erro quadrático médio associado à escala de *Bayes*.

## 2.2 Medidas de Avaliação

Lemaire (1995) propõe várias medidas de avaliação e comparação de sistemas de *bonus malus*. Estas medidas devem ser utilizadas para análise comparativa de diferentes sistemas e não apenas para avaliar um único sistema.

Os sistemas de *bonus malus* podem ser avaliados sob a perspectiva de um segurado ou seguradora. Os resultados obtidos em ambas as perspectivas serão muito diferentes, visto que nem sempre os segurados declaram todos os sinistros, portanto a distribuição da probabilidade observada do número de sinistros é diferente em ambos os casos, consequentemente, o resultado das medidas de avaliação em ambas as perspectivas diferem.

Ao longo deste capítulo serão descritos algumas medidas de avaliação de sistemas de *bonus malus* propostas por Lemaire (1995), para uma dada frequência de sinistralidade, sob a perspectiva da seguradora.

---

<sup>1</sup> $b_G$  deve situar-se entre 1 e um valor que, embora dependente do número de classes do sistema e das regras de transição, terá certamente um máximo absoluto inferior a 3.

### 2.2.1 O Nível Médio Relativo de Estacionaridade

O nível médio relativo de estacionaridade designado por  $RSAL^2$  mede o nível de aglomeração das apólices no sistema de *bonus*, em condições de estacionaridade. O valor de  $RSAL$  encontra-se entre 0 e 1. Um valor baixo de  $RSAL$  indica que existe uma grande aglomeração de apólices nas classes mais baixas do sistema enquanto que, um valor alto indica uma melhor distribuição das apólices no sistema. O valor ideal para  $RSAL$  seria aproximadamente 0.5 mas, no entanto, dificilmente um sistema de *bonus malus* atinge esse valor.

O nível médio relativo de estacionaridade, para uma dada frequência de sinistralidade  $\lambda$  será dado por:

$$RSAL_\lambda = \frac{PM_\lambda(Z_T) - \text{Prémio Máximo}}{\text{Prémio Máximo} - \text{Prémio Mínimo}} \quad (2.21)$$

onde

$$PM_\lambda(Z_T) = \sum_{j=1}^s b(j)\pi_{T,\lambda}(j) \quad (2.22)$$

é o prêmio médio em condições de estacionaridade para uma dada frequência de sinistralidade  $\lambda$ .

O nível médio relativo de estacionaridade para uma apólice retirada ao acaso de uma carteira de apólices, ou seja, considerando a distribuição estrutura, é dada por:

$$RSAL = \frac{PM(Z_T) - \text{Prémio Mínimo}}{\text{Prémio Máximo} - \text{Prémio Mínimo}} \quad (2.23)$$

onde

$$PM(Z_T) = \sum_{j=1}^s b(j)\pi_T(j) \quad (2.24)$$

é o prêmio médio em condições de estacionaridade.

Tem que se ter atenção ao tirar conclusões do resultado obtido utilizando este critério, visto que os resultados são em função do prêmio máximo e como se sabe, poucas apólices se encontram na classe mais agravada do sistema.

### 2.2.2 Coeficiente de Variação de Prêmios

Na tarifação *a priori*, assume-se que o risco de ocorrência de um sinistro é aleatório e os riscos são agrupados em classes mais ou menos homogêneas, de modo a que segurados com características semelhantes paguem o mesmo prêmio. O prêmio é, assim, uma variável fixa e portanto a transferência do risco do segurado para a seguradora é total, levando a uma variação de prêmios nula.

O risco de ocorrência de um sinistro varia de segurado para segurado e ano após ano. O prêmio é o resultado dos sinistros declarados e é uma variável aleatória portanto, a

---

<sup>2</sup>Relative Stationary Average Level.

sua variabilidade não é nula.

Pode-se provar (ver Bowers et al. (1986)), que um segurado, sem um contrato de seguro, está exposto a um processo de perda com coeficiente de variação de 6,4. Dado que na ausência da tarificação *a posteriori* o coeficiente de variação é nulo, pode concluir-se então que, com a tarificação *a posteriori* o coeficiente de variação varia entre 0 e 6,4.

O coeficiente de variação dos prémios (designado por  $CV$ ) é definido como o quociente dos desvios padrões dos prémios e o prémio médio, ambos calculados em condições de estacionaridade.

O coeficiente de variação dos prémios, para uma dada frequência de sinistralidade  $\lambda$ , é dado por:

$$CV_\lambda = \frac{\left[ \sum_{j=1}^s b^2(j) \pi_{T,\lambda}(j) - PM_\lambda^2(Z_\Delta) \right]^{1/2}}{PM_\lambda(Z_\Delta)}. \quad (2.25)$$

O coeficiente de variação de prémios, para uma apólice retirada ao acaso, ou seja, considerando a distribuição de estrutura, é dado por:

$$CV = \frac{\left( \sum_{j=1}^s b^2(j) \pi_T(j) - PM^2(Z_\Delta) \right)^{1/2}}{PM(Z_\Delta)}. \quad (2.26)$$

### 2.2.3 A Elasticidade do Prémio Médio

Um dos objectivos da implementação do sistema de *bonus malus* é garantir que os “bons” segurados (aqueles que não declaram sinistros) paguem um prémio baixo e que os “maus” segurados paguem prémios elevados, contribuindo assim, para uma condução mais cautelosa. Sendo assim, o sistema tem que responder a alterações da frequência de sinistralidade de modo a garantir uma tarificação justa.

A elasticidade do prémio médio, em condições de estacionaridade, mede a resposta do sistema de *bonus malus* dado que ocorreu uma alteração na frequência de sinistralidade. Este conceito foi primeiro desenvolvido por Loimaranta (1972) e posteriormente por Lemaire (1995).

Num sistema de *bonus* razoável, o prémio de cada segurado depende da sua frequência de sinistralidade  $\lambda$  e idealmente essa dependência devia ser linear. Um sistema de *bonus malus* diz-se perfeitamente elástico se, dado que ocorreu um aumento relativo na frequência de sinistralidade, ocorre o mesmo aumento relativo no prémio do segurado.

A elasticidade do sistema, para uma dada frequência de sinistralidade  $\lambda$  será dada por

$$\eta(\lambda) = \frac{dPM_\lambda(Z_T)/PM_\lambda(Z_T)}{d\lambda/\lambda} = \frac{d \ln PM_\lambda(Z_T)}{d \ln \lambda} \quad (2.27)$$

onde  $PM_\lambda(Z_T)$  é o prémio médio em condições de estacionaridade, dada a frequência de sinistralidade  $\lambda$ .

Os valores possíveis de  $\eta(\lambda)$  podem ser interpretados da seguinte forma:

- $\eta(\lambda) < 0$  não faz sentido, do ponto de vista prático, visto que, com um aumento na frequência de sinistralidade ter-se-ia uma diminuição no prêmio;
- $0 < \eta(\lambda) < 1$  é o caso mais habitual, onde os aumentos nos prêmios são inferiores aos aumentos na frequência de sinistralidade;
- $\eta(\lambda) > 1$  ter-se-ia que o aumento dos prêmios é superior ao aumento da frequência de sinistralidade. Esta situação não é aconselhável visto que provocaria o abandono de segurados pois ser-lhes-ia desfavorável;
- $\eta(\lambda) = 1$  é a situação onde o sistema é considerado perfeitamente elástico. Do ponto de vista comercial também não é aconselhado pois é pouco competitivo.

É possível demonstrar que a elasticidade não atinge o valor 1 para todo o valor de  $\lambda$ , portanto não é perfeitamente elástica, dado que:

- $\eta(0) = 0$
- Quando  $\lambda$  tende para infinito o prêmio médio tende para  $\max b(i)_{i=1,\dots,s}$  que é finito, portanto:

$$\frac{d \ln PM_\lambda(Z_\Delta)}{d \ln \lambda} = 0.$$

Conclui-se então que a elasticidade parte de zero, descreve uma curva no quadrante positivo, e volta a aproximar-se novamente de zero, quando  $\lambda$  tende para infinito.

Lemaire (1995) introduziu o conceito de elasticidade global, que é obtida através do valor do esperado da elasticidade, dada a distribuição estrutural, ou seja:

$$\eta = \int_0^\infty \eta(\lambda) dU(\lambda). \quad (2.28)$$

Caso se opte pela discretização da distribuição estrutural, há que ter em conta, ver Centeno (2003), que o cálculo da elasticidade é obtida através

$$\frac{dPM(Z_\Delta)}{d\lambda} = \sum_{j=1}^s \frac{d\pi_{\mathbf{T},\lambda}(j)}{d\lambda} b(j).$$

Recorrendo ao sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\pi_{\mathbf{T},\lambda}}{d\lambda} = \frac{d\pi_{\mathbf{T},\lambda}}{d\lambda} \mathbf{P}_{\mathbf{T},\lambda} + \pi_{\mathbf{T},\lambda} \frac{d\mathbf{P}_{\mathbf{T},\lambda}}{d\lambda} \\ \sum_{j=1}^s \frac{d\pi_{\mathbf{T},\lambda}(j)}{d\lambda} = 0 \end{array} \right.$$

ou seja,

$$\frac{d\pi_{\mathbf{T},\lambda}(j)}{d\lambda} = \pi_{\mathbf{T},\lambda} \mathbf{B}_{\mathbf{T},\lambda} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{T},\lambda})^{-1},$$

onde  $\mathbf{A}_{\mathbf{T},\lambda}$  é uma matriz cujas  $s - 1$  primeiras colunas correspondem às colunas da matriz  $\mathbf{P}_{\mathbf{T},\lambda}$  e a última coluna toma o valor -1, à excepção do último que toma valor 0 e  $\mathbf{B}_{\mathbf{T},\lambda}$  é uma matriz cujas colunas são as da matriz  $d\mathbf{P}_{\mathbf{T},\lambda}/d\lambda$ , à excepção da última coluna, cujos elementos tomam valor 0.

### 2.2.4 A Elasticidade Transiente

Outro conceito de elasticidade é introduzido por Lemaire (1995), designado por elasticidade transiente, onde o autor aborda o problema do ponto de vista económico, introduzindo uma taxa de desconto  $0 < \beta < 1$ , a partir do qual se calcula  $V_\lambda(j)$ , o valor esperado actualizado a pagar em horizonte infinito, por uma apólice que se encontra na classe  $C_j$ , no presente período, para uma dada frequência de sinistralidade  $\lambda$ , através de:

$$V_\lambda(j) = b(j) + \beta \sum_{l=1}^s \mathbf{P}_{\mathbf{T},\lambda}(j, l) V_\lambda(l), \quad j = 1, \dots, s. \quad (2.29)$$

Recorrendo ao princípio da contracção, Lemaire (1995) prova que o sistema de equações tem uma única solução. A elasticidade do valor esperado actualizado dos pagamentos futuros em relação à frequência de sinistralidade, para uma apólice que se encontra na classe  $C_j$ , é:

$$\mu_\lambda(j) = \frac{\frac{dV_\lambda(j)}{d\lambda}}{V_\lambda(j)}. \quad (2.30)$$

Considerando a distribuição de estrutura, a elasticidade transiente do sistema relativa a um segurado que se situa na classe  $C_j$ , é:

$$\mu(j) = \int_0^\infty \mu_\lambda(j) dU(\lambda). \quad (2.31)$$

## Capítulo 3

# Aplicação aos dados da seguradora Garantia

Ao longo deste capítulo serão aplicados os métodos e modelos apresentados nos capítulos anteriores usando, para tal, os dados reais relativos à carteira de apólices do seguro de responsabilidade civil da seguradora Garantia. Para a obtenção dos resultados será utilizado o software *Mathematica 6.0* da Wolfram. Com base nas análises e resultados obtidos, serão feitos os respectivos comentários e conclusões.

Dado que o sistema de *bonus malus* que vigora actualmente em Cabo Verde apresenta algumas lacunas, como se pode verificar na Sub-Secção 3.3.2, procedeu-se então à avaliação de um sistema de *bonus malus* proposto por Osório (2006) e à análise comparativa entre os dois sistemas.

### 3.1 Número de Sinistros

No *SBM* que vigora em Cabo Verde, bem como na generalidade dos países e seguradoras, a tarifação *a posteriori* é feita exclusivamente com base no número de sinistros declarados. Poder-se-á assim considerar o montante esperado associado a cada sinistro como sendo unitário e, portanto, o prémio puro de cada segurado, será dado pela sua própria frequência esperada de sinistralidade.

Ao longo desta secção serão descritos alguns modelos que permitem ajustar uma distribuição ao número de sinistros que um segurado pode declarar à seguradora numa anuidade, ou seja, uma distribuição que seja significativa para representar a frequência de sinistralidade anual.

#### 3.1.1 Processo de Poisson Homogéneo - Carteira Homogénea

Neste modelo, considera-se que o número de sinistros declarados segue a distribuição de Poisson de parâmetro constante,  $\lambda$ , isto é, considera-se que o comportamento dos segurados dentro de cada classe de risco é homogéneo, pelo que, a ocorrência de um sinistro é meramente fruto do acaso. Caso este modelo seja aceite, a tarifação *a posteriori*

será desnecessária visto não existir heterogeneidade no comportamento dos segurados dentro de cada classe de risco.

**Definição 3.1.** *Seja  $N(t)$  o número de sinistros relativos a um determinado risco, ocorridos no intervalo de tempo  $]0, t]$  com  $t > 0$  e  $N(0) = 0$ . Diz-se que  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  é um processo de Poisson homogêneo de intensidade  $\lambda$ , se verificar as seguintes condições:*

1. *O processo tem incrementos independentes;*
2. *O processo tem incrementos estacionários;*
3. *Para qualquer  $h \rightarrow 0$ ,  $\mathbb{P}[N(h) = 1] = \lambda h + o(h)$ ; <sup>1</sup>;*
4. *Para qualquer  $h \rightarrow 0$ ,  $\mathbb{P}[N(h) > 1] = o(h)$ .*

A primeira condição indica que o número de sinistros ocorridos em dois intervalos de tempo disjuntos são independentes, isto é, dado  $t_1 < t_2 < t_3$  então  $N(t_2) - N(t_1)$  é independente de  $N(t_3) - N(t_2)$ .

A segunda condição exige que a distribuição de  $N(t+h) - N(t)$  seja independente de  $t$ , ou seja, depende unicamente da sua amplitude  $h$ .

A terceira propriedade “traduz” que a probabilidade de ocorrer um sinistro num pequeno intervalo de tempo  $]t, t+h[$  é aproximadamente proporcional à duração do intervalo.

A quarta condição “traduz” que a probabilidade de ocorrer dois ou mais sinistros num pequeno intervalo de tempo é aproximadamente nula.

**Teorema 3.1.** *Se  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  é um processo de Poisson de intensidade  $\lambda$ , então a variável aleatória  $N(t)$  segue a distribuição de Poisson de média e variância  $\lambda t$  com  $t > 0$ , ou seja*

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

*Demonstração.* A demonstração deste teorema pode ser consultada, por exemplo, em Centeno (2003). □

Neste secção considera-se que o período de tempo é unitário, ou seja,  $t = 1$  e  $\lambda$  é constante ao longo do tempo, ou seja, considera-se que não há melhoria na condução do segurado.

### Os dados de seguradora Garantia

Os dados fornecidos pela seguradora Garantia, correspondem aos dados relativos aos sinistros declarados da carteira de responsabilidade civil do ramo automóvel do ano 2009.

---

<sup>1</sup>Uma função  $f$  diz-se um infinitésimo com  $h$  e representa-se por  $o(h)$  quando  $\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(h)}{h} = 0$ .

A Tabela 3.1 contém a distribuição observada do número de sinistros participados em 2009. Analisando os dados verifica-se que a maior parte dos segurados não declararam sinistros, sendo que a média e a variância observadas dos sinistros são, respectivamente,  $\bar{x} = 0,147553733$  e  $s^2 = 0,200597848$ . Dado que a variância é maior do que a média, pode-se suspeitar que a distribuição Poisson não será a melhor distribuição para ajustar ao número de sinistros participados.

Tabela 3.1: Número Observado de Sinistros

Número de Sinistros	Número de Apólices
0	12469
1	1363
2	229
3	66
$\geq 4$	17
Total	15619

### Ajustamento

A estimativa de máxima verosimilhança para o parâmetro da distribuição de Poisson é dado por  $\hat{\lambda} = \bar{x} = 0,147553733$ . Utilizando o teste de Qui-quadrado de Pearson para testar o ajustamento ao número de sinistros, considerando um nível de significância de 5%, obteve-se:

Tabela 3.2: Teste de Qui-quadrado para a distribuição Poisson

$k$	$n_k$	$p_k$	$np_k$	$X_{obs}^2$
0	12469	0,86281600	12201,67	5,79
1	1363	0,12731173	1800,70	106,40
2	229	0,00939266	132,85	69,59
$\geq 3$	83	0,00047953	6,78	856,49
Total	14144	1	14144	1038,236

Uma vez que o valor observado da estatística do teste de qui-quadrado,  $X_{obs}^2 = 1038,236 > X_2^2 = 5,991465$ , conclui-se, com um nível de confiança de 95%, que o processo de Poisson homogêneo não se ajusta aos dados, ou seja, os dados não revelam existir homogeneidade no comportamento dos segurados. Justifica-se, assim, a introdução de um sistema de *bonus malus* como ferramenta de tarifação *a posteriori*.

Dado que se rejeitou a hipótese de que o número de sinistros seguia a distribuição Poisson, há que ajustar uma distribuição que reflecta melhor a heterogeneidade dos

segurados dentro de cada classe de risco, nomeadamente um modelo em que a variância seja superior à média. Neste caso, a tarificação do prémio *a posteriori* é perfeitamente justificável.

### 3.1.2 Processo de Poisson Heterogéneo - Carteira Heterogénea

Enquanto que no processo de Poisson homogéneo se verifica que o número de sinistros segue a distribuição de Poisson de parâmetro constante,  $\lambda$ , o processo de Poisson heterogéneo considera que o número de sinistros,  $N(t)$ , segue a distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , em que  $\lambda$  é o resultado de uma variável aleatória não negativa  $\Lambda$ . Considere-se que a função distribuição de  $\Lambda$  é dada por

$$U(\lambda) = \mathbb{P}[\Lambda \leq \lambda]. \quad (3.1)$$

A variável aleatória  $\Lambda$  é designada por variável de estrutura e  $U(\lambda)$  a distribuição de estrutura.

**Definição 3.2.** *O processo de contagem incondicional,  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ , tal que:*

1.  $N(0) = 0$

- 2.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N(t+s) - N(s) = k] &= \int_0^\infty \mathbb{P}[N(t+s) - N(s) = k | \lambda] dU(\lambda) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda) \end{aligned} \quad (3.2)$$

*é designado por processo de Poisson Misto.*

De (3.2) conclui-se que o processo de Poisson Misto tem incrementos estacionários e portanto,

$$p_k(t) = \mathbb{P}[N(t) = k] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda) \quad (3.3)$$

ou seja,  $N(t)$  tem distribuição Poisson Mista. Geralmente, assume-se que  $\Lambda$  é uma variável aleatória contínua. As distribuições estruturas mais usadas na modelação do número de sinistros, ver Lemaire (1995), são a distribuição Gama e a distribuição Inversa Gaussiana. Outras soluções podem no entanto ser estudadas e aplicadas, ver Grandell (1997).

O processo Poisson Misto não tem incrementos independentes, visto que, dado

$t_0 < t_1 < t_2$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}[N(t_1) - N(t_0) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2] = \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}[N(t_1) - N(t_0) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 | \lambda] dU(\lambda) = \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}[N(t_1) - N(t_0) = k_1 | \lambda] \mathbb{P}[N(t_2) - N(t_1) = k_2 | \lambda] dU(\lambda) \neq \\
&\neq \int_0^\infty \mathbb{P}[N(t_1) - N(t_0) = k_1 | \lambda] dU(\lambda) \int_0^\infty \mathbb{P}[N(t_2) - N(t_1) = k_2 | \lambda] dU(\lambda) = \\
&= \mathbb{P}[N(t_1) - N(t_0) = k_1] \mathbb{P}[N(t_2) - N(t_1) = k_2].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

A média e a variância da distribuição Poisson mista são dadas por

$$E[N(t)] = tE[\Lambda] \tag{3.5}$$

e

$$V[N(t)] = tE[\Lambda] + t^2V[\Lambda^2]. \tag{3.6}$$

Como se pode verificar, a variância é superior à média, portanto este modelo reflecte melhor a heterogeneidade do comportamento dos segurados.

### O modelo Poisson-Gama

A distribuição Poisson-Gama é das mais utilizadas para reflectir o comportamento heterogéneo na condução dos segurados de uma carteira de apólices do seguro automóvel das seguradoras. É obtida quando se verifica que o parâmetro  $\Lambda$  se ajusta a uma distribuição Gama.

Sendo assim, admitindo que  $\Lambda$  segue a distribuição Gama de parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , a função densidade de  $\Lambda$  é dada por

$$u(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1}, \quad \lambda > 0, \alpha > 0 \text{ e } \beta > 0. \tag{3.7}$$

O parâmetro  $\alpha$  é o parâmetro de forma e  $\beta$  o parâmetro de escala.

Portanto, a distribuição do número de sinistros,  $p_k$ , ver Lemaire (1995), é dada por

$$\begin{aligned}
p_k &= \int_0^\infty p_k(\lambda) u(\lambda) d\lambda \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1} dU(\lambda).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Calculando a expressão (3.8), obtém-se

$$p_k = \binom{\alpha + k - 1}{k} \left( \frac{\beta}{\beta + t} \right)^\alpha \left( \frac{t}{\beta + t} \right)^k, \quad (3.9)$$

ou seja, é equivalente a dizer que a distribuição do número de sinistros,  $p_k$ , segue uma distribuição Binomial Negativa, de parâmetros  $\alpha$  e  $p$  com  $p = \frac{\beta}{t+\beta}$ .

A média e a variância do número de sinistros obtidos pela distribuição Binomial Negativa, para  $t = 1$ , são dadas por

$$E[N] = \frac{\alpha}{\beta} \quad (3.10)$$

e

$$V[N] = \frac{\alpha}{\beta} \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right). \quad (3.11)$$

Como se pode verificar, a variância é superior à média, como era de esperar.

Utilizando o método da máxima verosimilhança para a estimação dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  tem-se

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{\alpha}}{\bar{x}} \quad (3.12)$$

e  $\hat{\alpha}$  é solução da equação

$$\sum_{k=0}^m n_k \left( \frac{1}{\alpha} + \dots + \frac{1}{\alpha + k - 1} \right) = \sum_{k=0}^m n_k \ln \left( 1 + \frac{\bar{x}}{\alpha} \right). \quad (3.13)$$

### O ajustamento

As estimativas dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $p$  da distribuição Binomial Negativa, utilizando o método da máxima verosimilhança, apresentam-se na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Parâmetros da Binomial Negativa

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{p}$
0,408207	2,7665	0,734501527

Observando a Tabela 3.4 verifica-se que o valor observado da estatística do teste de Qui-quadrado de Pearson é dado por  $X_{obs}^2 = 5,183430005 < \chi_2^2 = 5,991465$ , o que equivale a um  $p\text{-value} \simeq 0,075$  concluindo-se, portanto, que a distribuição Binomial Negativa se ajusta aos dados observados do número de sinistros, para um nível de significância de 5%.

Tabela 3.4: Teste do Qui-quadrado para a distribuição Gama

$k$	$n_k$	$p_k$	$n_{p_k}$	$X_{obs}^2$
0	12469	0,881567199	12468,89	0,00001034
1	1363	0,095681848	1353,32	0,06918057
2	229	0,017843048	252,37	2,164477955
3	66	0,003791031	53,62	2,85816623
$\geq 4$	17	0,001116873	15,80	0,091604216
Total	14144	1	14144	5,183430005

## 3.2 Sistema *Bonus Malus* Actual da Garantia

O sistema de *bonus malus* para o Seguro Automóvel de Responsabilidade Civil que actualmente vigora nessa Seguradora é regido pelo Decreto Lei nº17-2003.

### 3.2.1 Definição

O sistema de *bonus malus* utilizado nesta seguradora, para o seguro de responsabilidade civil automóvel, é caracterizado pelas seguintes regras de transição:

- As apólices com 1, 2, 3 ou 4 sinistros declarados numa anuidade sofrem, na anuidade seguinte, um agravamento de 15%, 30%, 45% ou 100%, respectivamente, sobre o prémio *a priori*. O prémio das apólices com 5 ou mais sinistros declarados numa anuidade é analisado caso a caso. As apólices que se encontrem 2 anos consecutivos sem participar sinistros beneficiarão de um desconto de 30% sobre o prémio *a priori*.

Por uma questão de simplificação, neste trabalho, consideraremos que as apólices com 5 ou mais sinistros declarados numa anuidade, terão um agravamento de 100% do prémio *a priori*.

Tendo em conta as características do *SBM* já definidas e considerando o desdobramento das classes de forma a garantir que o *SBM* é representado por uma cadeia de Markov, ver Centeno (2003) ou Centeno e A.Silva (2002), as classes do sistema de *bonus malus* da seguradora Garantia, que correspondem aos estados da cadeia de Markov, são definidas na Tabela 3.5.

O estado  $i_1$  indica que o segurado se encontra na Classe  $i$  pelo primeiro ano, enquanto que,  $i_2$  indica que o segurado se encontra na Classe  $i$  pelo segundo ano consecutivo, com  $i = 2, \dots, 6$ .

O vector dos prémios é dado por

$$\mathbf{b}^T = (70 \ 100 \ 100 \ 115 \ 115 \ 130 \ 130 \ 145 \ 145 \ 200 \ 200). \quad (3.14)$$

Tabela 3.5: Classes do sistema de *bonus malus* da Garantia

Classe	Desconto vs. Agravamento
1	30% Desconto
2 <sub>2</sub>	0% Desconto
2 <sub>1</sub>	0% Desconto
3 <sub>2</sub>	15% Agravamento
3 <sub>1</sub>	15 % Agravamento
4 <sub>2</sub>	30 % Agravamento
4 <sub>1</sub>	30 % Agravamento
5 <sub>2</sub>	45 % Agravamento
5 <sub>1</sub>	45 % Agravamento
6 <sub>2</sub>	100 % Agravamento
6 <sub>1</sub>	100 % Agravamento

A matriz das regras de transições,  $\mathbf{T}$ , é definida por:

$$\mathbf{T} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2_2 & 2_1 & 3_2 & 3_1 & 4_2 & 4_1 & 5_2 & 5_1 & 6_2 & 6_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2_2 \\ 2_1 \\ 3_2 \\ 3_1 \\ 4_2 \\ 4_1 \\ 5_2 \\ 5_1 \\ 6_2 \\ 6_1 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccccccc} \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & \{0\} & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & \{1\} & \{0\} & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & \{0\} & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ \{0\} & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & - & \{4, 5, \dots\} \\ - & - & - & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3\} & \{0\} & \{4, 5, \dots\} \end{array} \right]. \end{matrix}$$

Tendo em conta a matriz das regras de transição  $\mathbf{T}$ , a matriz probabilidade de transição para o modelo clássico, considerando uma determinada frequência de sinistralidade  $\lambda$ , é dada por:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{T}, \lambda} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2_2 & 2_1 & 3_2 & 3_1 & 4_2 & 4_1 & 5_2 & 5_1 & 6_2 & 6_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2_2 \\ 2_1 \\ 3_2 \\ 3_1 \\ 4_2 \\ 4_1 \\ 5_2 \\ 5_1 \\ 6_2 \\ 6_1 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccccccc} p_0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & p^\bullet \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & p^\bullet \\ 0 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & p^\bullet \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & p^\bullet \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & p^\bullet \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & p^\bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & p^\bullet \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & p^\bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & p_0 & p_3 & 0 & p^\bullet \\ p_0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & p^\bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & p_3 & p_0 & p^\bullet \end{array} \right]. \end{matrix}$$

$$\text{onde } p_k = \mathbb{P}[N = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{e} \quad p^\bullet = 1 - \sum_{k=0}^3 p_k.$$

O sistema assim definido pode ser considerado como uma cadeia de Markov. Analisando a matriz das regras de transição, conclui-se que não se trata de uma cadeia de Markov irredutível, isto porque a classe 2<sub>1</sub>, que representa a classe de entrada, não é atingida a partir de nenhuma das outras classes, e a classe 2<sub>2</sub> só é atingida a partir

da classe  $2_1$ . É, portanto, uma cadeia de Markov com duas classes de comunicação:  $C_1 = \{2_1, 2_2\}$  e  $C_2 = \{1, 3_1, 3_2, 4_1, 4_2, 5_1, 5_2, 6_1, 6_2\}$ .

É relevante alertar desde já que as regras de transição, assim definidas, prejudicam a actividade da Seguradora.

Note-se que, por exemplo, para um segurado que se encontre na classe com 100% de agravamento revela-se ser mais vantajoso participar um sinistro na anuidade seguinte do que não participar nenhum. Sob o ponto de vista da Seguradora, isto implica o pagamento de mais uma indemnização, bem como a redução do prémio ao segurado na anuidade seguinte.

As regras de transição utilizadas não reflectem um *SBM* justo e equitativo para nenhuma das partes, bem como fomentam a participação de sinistros de modo a diminuir o agravamento do prémio. Isto contradiz o princípio subjacente aos *SBM*.

No que se segue, efectuar-se-á uma análise ao *SBM* actual da seguradora Garantia, com as regras estabelecidas pelo Decreto-Lei nº17/2003, sob a perspectiva clássica (considerando que a carteira é fechada) e recorrendo ao modelo dos Vórtices Estocásticos (onde se considera que a carteira é aberta).

Ressalva-se no entanto, desde já, que se considera o modelo aberto como “melhor” representativo da realidade.

### 3.2.2 Distribuição Limite: Carteira Fechada

Como já foi referido anteriormente, a cadeia de Markov implícita no modelo clássico não é uma cadeia irreduzível. O conjunto das classes de *bonus*  $2_1$  e  $2_2$  formam uma classe de comunicação transiente e as restantes classes formam uma classe de comunicação de estados recorrentes positivos e aperiódicos. Trocando as linhas e colunas, ver Centeno (2003), a matriz de probabilidade de transição entre as classes pode ser escrita na forma

$$\mathbf{P}_{T,\lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{1,(T,\lambda)} & \mathbf{P}_{3,(T,\lambda)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{2,(T,\lambda)} \end{pmatrix}$$

onde a matriz  $\mathbf{P}_{1,(T,\lambda)}$  é a matriz de probabilidade de transição entre as classes de *bonus*  $2_1$  e  $2_2$  (estados transientes),  $\mathbf{P}_{2,(T,\lambda)}$  a matriz de probabilidade entre as classes de *bonus*  $\{1, 3_1, 3_2, 4_1, 4_2, 5_1, 5_2, 6_1, 6_2\}$ ,  $\mathbf{P}_{3,(T,\lambda)}$  a matriz de probabilidade de transição das classes de *bonus*  $2_1$  e  $2_2$  para as restantes classes de *bonus*. A matriz de probabilidade de transição  $\mathbf{P}_{2,(T,\lambda)}$  é uma matriz de estados recorrentes positivos e aperiódicos, ou seja, forma uma classe irreduzível, portanto a distribuição limite coincide com a distribuição estacionária, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{2,(T,\lambda)}^{(n)}(i, j) = \pi_{2,(T,\lambda)}(j), \quad j \in C_2$$

com  $\pi_{2,(T,\lambda)}(j) \geq 0$ ,  $\forall j \in C_2$ ,  $\sum \pi_{2,(T,\lambda)}(j) = 1$  e  $\pi_{2,(T,\lambda)} = \pi_{2,(T,\lambda)} \mathbf{P}_{2,(T,\lambda)}$ . Portanto, cada linha da matriz  $\mathbf{P}_{2,(T,\lambda)}^{(n)}$  tende para o vector próprio esquerdo associado ao valor próprio 1 da matriz  $\mathbf{P}_{2,(T,\lambda)}$ .

Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{\mathbf{T},\lambda}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{P}_{1,(\mathbf{T},\lambda)}\mathbf{P}_{3,(\mathbf{T},\lambda)} + \mathbf{P}_{3,(\mathbf{T},\lambda)}\mathbf{P}_{2,(\mathbf{T},\lambda)}) \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{2,(\mathbf{T},\lambda)}^{(n-2)} \\ \mathbf{0} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{2,(\mathbf{T},\lambda)}^{(n)} \end{pmatrix}$$

então, quando  $n$  tende para infinito,  $\mathbf{P}_{\mathbf{T},\lambda}^{(n)}$  tende para uma matriz com as linhas todas iguais e da forma  $\boldsymbol{\pi}_{(\mathbf{T},\lambda)} = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}_{2,(\mathbf{T},\lambda)}]$ .

Assim, para determinar a distribuição limite para um segurado retirado ao acaso da carteira das apólices basta considerar a distribuição de estrutura, e a distribuição vem dada por:

$$\pi_{\mathbf{T}}(j) = \int_0^{\infty} \pi_{(\mathbf{T},\lambda)}(j) dU(\lambda) \quad , \quad j \in C_1 \cup C_2. \quad (3.15)$$

Para a obtenção da distribuição limite, recorreu-se a métodos numéricos, ou seja, recorreu-se à discretização da distribuição de estrutura, obtendo-se assim uma distribuição aproximada e discreta, utilizando o método de arredondamento à unidade mais próxima.

Assim, adaptando (3.15) ao caso discreto, a distribuição limite será dada através de:

$$\pi_{\mathbf{T}}(j) = \sum_{\lambda} \pi_{(\mathbf{T},\lambda)}(j) \mathbf{u}_{\lambda}^d, \quad j \in C_1 \cup C_2 \quad (3.16)$$

sendo  $\mathbf{u}_{\lambda}^d$  o vector das probabilidades da distribuição Gama discretizada para  $\lambda = 0.01, 0.02, \dots, 1$ . Note-se que, tendo  $\Lambda$  distribuição Gama, com os parâmetros indicados na Tabela 3.3, tem-se  $\mathbb{P}[\Lambda \leq 1] = 0.9865$ .

A Tabela 3.6 contém a distribuição limite para um segurado retirado ao acaso da carteira de apólices.

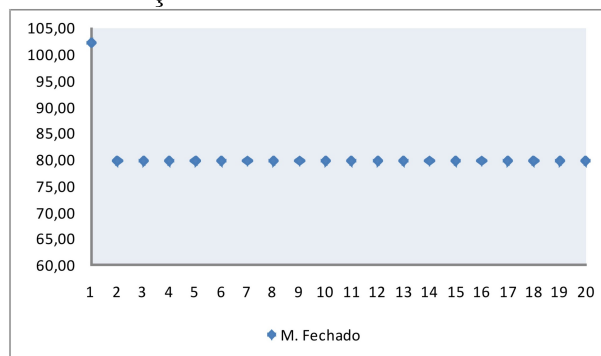
Tabela 3.6: Distribuição Limite no Modelo Fechado: S. Actual

$j$	$\pi_{\mathbf{T}}(j)$
1	0,798011255
2 <sub>2</sub>	0
2 <sub>1</sub>	0
3 <sub>2</sub>	0,07082971
3 <sub>1</sub>	0,097618052
4 <sub>2</sub>	0,010238994
4 <sub>1</sub>	0,017347817
5 <sub>2</sub>	0,001666328
5 <sub>1</sub>	0,003280762
6 <sub>2</sub>	0,000314383
6 <sub>1</sub>	0,000692698
Total	1

A partir da distribuição limite estima-se que, por exemplo, a longo prazo, 79,8% das apólices da carteira se encontrarão na classe bonificada do sistema (Classe 1) e apenas 0,0693% se encontrarão na classe mais agravada do sistema (Classe 6<sub>1</sub>).

Analisando a distribuição limite obtida estima-se que, na estacionaridade, existirá uma grande aglomeração de apólices na classe bonificada do sistema, sendo que a probabilidade de uma apólice se encontrar numa das classes agravadas é muito reduzida. O prémio médio, em condições de estacionaridade, corresponde a 79,74% do prémio *a priori*.

Figura 3.1: Evolução do  $PM$  - Modelo Fechado: S. Actual



A figura 3.1 ilustra a evolução do prémio médio de um novo segurado retirado ao acaso da carteira de apólices nos próximos 20 anos. Analisando o gráfico, verifica-se que o prémio médio está próximo da estacionaridade logo no segundo ano, facto este devido à rapidez de convergência da cadeia de Markov para a estacionaridade.

### 3.2.3 Distribuição Limite: Carteira Aberta

Sob a perspectiva de uma carteira aberta a matriz probabilidade de transição é, como vimos na Sub-secção 1.3.1, dada por (1.3):

$$P_T = \begin{pmatrix} K & \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Nesta perspectiva, há que ter em conta as probabilidades de anulação das apólices.

Considerando  $q_1(j)$ ,  $j \in C_1 \cup C_2$ , a probabilidade condicionada de um segurado abandonar a seguradora, dado que se encontra na classe  $j$  do sistema, para uma dada frequência de sinistralidade  $\lambda$ , estas probabilidades podem ser estimadas recorrendo aos dados da Seguradora, tendo em conta que

$$q_1(j) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) q_{1,k,\lambda}(j), \quad j \in C_1 \cup C_2. \quad (3.17)$$

onde  $p_k(\lambda)$  representa a probabilidade de um segurado, com uma dada frequência de sinistralidade  $\lambda$ , declarar  $k$  sinistros numa anuidade e  $q_{1,k,\lambda}$  a probabilidade condi-

cionada de um segurado abandonar a Seguradora, sabendo que se encontra na classe  $j$  e declarou  $k$  sinistros nessa anuidade, para um determinado  $\lambda$ .

Sendo assim, a matriz  $\mathbf{K}$  deverá ser construída por forma que a soma de todos os elementos de cada linha da matriz  $\mathbf{P}_{\mathbf{T}}$  seja igual a 1. Os elementos da matriz  $\mathbf{K}$  deverão reflectir as probabilidades de transição entre classes, para os segurados que não abandonam a seguradora. Desta forma, de acordo com (1.1), ter-se-á:

$$\begin{aligned} k(i, j) &= p_{\mathbf{T}, \lambda}(i, j)(1 - q_1(i)) = \\ &= \mathbb{P}[Z_{\Delta, n+1} = j \mid Z_{\Delta, n} = i, \Lambda = \lambda](1 - q_1(i)), \quad i, j \in C_1 \cup C_2. \end{aligned}$$

A matriz de probabilidades de transição nas classes transientes do sistema garante assim que um segurado, de acordo com as regras de transição  $\mathbf{T}$ , transite da classe  $i$  para classe  $j$ , caso não abandone a Seguradora, e a soma de todos os elementos de cada linha da matriz de probabilidades de transição  $\mathbf{P}_{\mathbf{T}}$  seja 1.

Os dados disponíveis para determinar as probabilidades de saída referem-se apenas aos últimos 3 anos, o que consideramos insuficiente. A estimação das probabilidades de saída foram determinadas, considerando-as independentes de  $\lambda$  e  $k$  e com base na informação disponível obtiveram-se as estimativas indicadas na Tabela 3.7.

Analisando a Tabela 3.7 verifica-se que a probabilidade de saída nas classes bonificadas do sistema é inferior às das classes agravadas, como seria expectável. A probabilidade de saída aumenta com o agravamento a aplicar ao prémio *a priori*. Note-se que, nas classes com 100% de agravamento, a taxa de anulação é elevadíssima.

Tabela 3.7: Probabilidades de Saída: S. Actual

j	1	2 <sub>2</sub>	2 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	3 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>
$q_1(j)$	0,225662	0,375650	0,959238	0,375834	0,376023	0,387312
j	4 <sub>1</sub>	5 <sub>2</sub>	5 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>1</sub>	
$q_1(j)$	0,388300	0,448052	0,441228	0,916667	0,958333	

A taxa de anulação da Classe 2<sub>1</sub> (Classe de Entrada) é surpreendentemente elevada. No entanto, este facto é facilmente explicável à luz da realidade e da legislação de Cabo Verde: enquanto um veículo se encontra para venda no stand de vendas, é obrigatória a contratação de um seguro de responsabilidade civil automóvel para aquele veículo. Quando o veículo é vendido, o stand anula a apólice e será contratada uma nova em nome do novo proprietário. Esta situação justifica que a taxa de anulação na primeira anuidade (note-se que, de acordo com as regras de transição, um segurado só se mantém na Classe 2<sub>1</sub> por uma anuidade e não pode lá retornar) seja extremamente elevada.

Para a determinação da distribuição limite, há ainda que estimar as intensidades de entradas e as probabilidades de classificação inicial para as várias classes do sistema.

### • Probabilidades de Classificação Inicial

Como já foi referido anteriormente, a probabilidade de classificação inicial é um elemento importante neste modelo e permite ter em conta que o segurado está inicialmente sujeito a uma classificação para poder ser colocado numa das classes do sistema.

Devido à insuficiência de informação sobre as entradas no sistema (os dados disponíveis referem-se apenas a 3 anos), vai considerar-se a hipótese do vector das probabilidades de classificação inicial,  $\mathbf{c}_i$ , ser constante de ano para ano, ou seja, considerar-se-á  $\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_0$ . As estimativas para  $c_{0,j}$ ,  $j \in C_1 \cup C_2$ , ilustram-se na Tabela 3.8.

Analisando a Tabela 3.8, verifica-se que os novos segurados nem sempre entram para a classe de entrada, o que reflecte que os segurados possam ser sujeitos a uma classificação inicial que determina a classe de *bonus* onde estes são inseridos. Este facto pode ser justificado, provavelmente, pelo uso do certificado de tarificação ou pelo facto de o mercado segurador, em Cabo Verde, não ser muito concorrencial. Note-se que, na realidade, os novos segurados podem não ser inseridos na classe de entrada por diversos motivos.

Tabela 3.8: Probabilidade de Classificação Inicial: S. Actual

j	1	2 <sub>2</sub>	2 <sub>1</sub>	3 <sub>2</sub>	3 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>
$c_{0,j}$	0,0870938	0,0156453	0,887001	0,00413185	0,00413185	0,000835655
j	4 <sub>1</sub>	5 <sub>2</sub>	5 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>1</sub>	
$c_{0,j}$	0,000742804	0,000139276	0,0000464253	0,000139276	0,0000928505	

### • As Entradas no Sistema

O número de novas entradas de apólices no sistema, do ano 1999 a 2009, pode consultar-se na Tabela 3.9.

O ano de 1998 foi retirado do estudo, porque, segundo a informação da seguradora Garantia, foi um ano em que houve bastantes migrações de apólices, o que inflaciona o valor indicado na Tabela 3.9, que não corresponderá apenas ao número de novas apólices vendidas nesse ano.

Pretende-se ajustar um modelo para o fluxo de novas entradas no sistema. Considerou-se um modelo em que o comportamento da evolução das novas apólices é assintótico. Trata-se do modelo que parece ser mais plausível ajustar pois adequa-se à realidade do mercado segurador: a seguradora tem como objectivo o crescimento do seu negócio, o que ajustar-se-á, aos dados de entradas de novas apólices com modelo de forma  $\lambda_i = \tau(1 - e^{-\delta i})$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\tau > 0$ ,  $\delta > 0$ .

Tabela 3.9: Entradas de Novas Apólices

Ano	N.º de Novas Apólices
1998	8678
1999	2949
2000	2851
2001	2240
2002	2771
2003	3423
2004	4306
2005	4753
2006	5239
2007	6903
2008	7449
2009	7188

O estimador de máxima verosimilhança para  $\tau$ , ver Guerreiro (2008) ou Guerreiro et al. (2010), será dado por

$$\hat{\tau} = \frac{N_{\bullet,\bullet}}{\sum_{i=1}^m (1 - e^{-\hat{\delta}i})} \quad (3.18)$$

e  $\hat{\delta}$ , estimador de máxima verosimilhança para  $\delta$ , será dado pela solução da equação

$$-\frac{N_{\bullet,\bullet}}{\sum_{i=1}^m (1 - e^{-\delta i})} \sum_{i=1}^m i e^{-\delta i} + \sum_{i=1}^m \frac{i e^{-\delta i}}{1 - e^{-\delta i}} N_{i,\bullet} = 0 \quad (3.19)$$

com

$$\begin{cases} N_{\bullet,j} = \sum_{i=1}^m N_{i,j} \\ N_{i,\bullet} = \sum_{j=1}^s N_{i,j} \\ N_{\bullet,\bullet} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^s N_{i,j}, \end{cases} \quad (3.20)$$

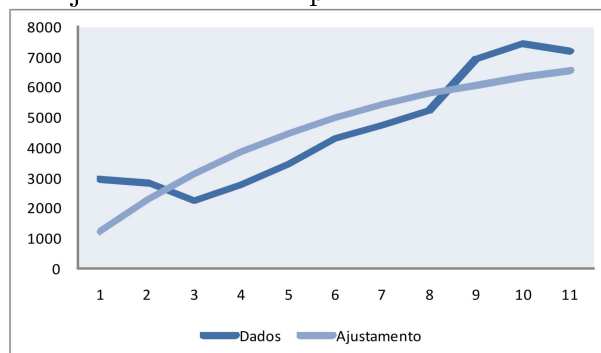
Estimando os parâmetros, obteve-se  $\hat{\tau} = 7736$  e  $\hat{\delta} = 0,171864944$ , o que se traduzirá em:

$$\hat{\lambda}_i = 7736(1 - e^{-0,171864944i}), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (3.21)$$

Para o ajustamento efectuado, obteve-se  $R^2 = 0,71019519$  e o gráfico pode ser analisado na Figura 3.2.

Analisando a Figura 3.2 verifica-se que, a qualidade do ajustamento não é a melhor, no entanto, considerou-se que seria um modelo adequado, visto que nos últimos 2 anos

Figura 3.2: Ajustamento assintótico às Entradas no Sistema



há uma estabilização do número de novas entradas no sistema.

Da equação (3.21) infere-se que relativamente à modelação original de  $\lambda_i = a + b\theta^i$ ,  $(a, b, \theta) \in \Theta$ ,  $i \in \mathbb{N}$  tem-se que

$$\hat{a} = -\hat{b} = 7736$$

e

$$\hat{\theta} = e^{-\hat{\delta}} = e^{-0,171864944} = 0,842092895,$$

verificando-se portanto  $0 < \theta < 1$ , ou seja, garante-se a existência de um vórtice estocástico no *SBM*, o que traduz na existência de uma distribuição limite, que poderá facilmente ser obtida a partir de (1.25), recorrendo a (1.22) ou (1.26).

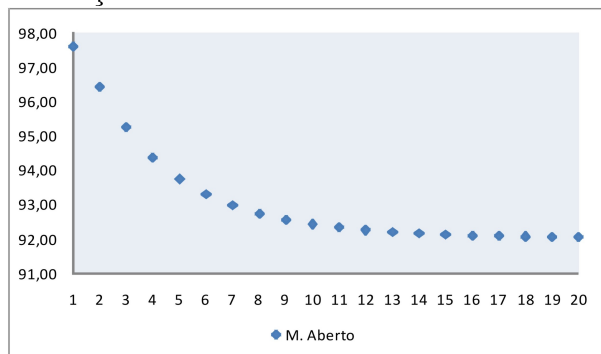
Tabela 3.10: Distribuição Limite (Modelo Aberto): S. Actual

$j$	$\pi_{\mathbf{T}}^{\diamond}$
1	0,30109513
2 <sub>2</sub>	0,03246473
2 <sub>1</sub>	0,60845080
3 <sub>2</sub>	0,01745643
3 <sub>1</sub>	0,03113396
4 <sub>2</sub>	0,00258391
4 <sub>1</sub>	0,00522388
5 <sub>2</sub>	0,00035883
5 <sub>1</sub>	0,00089045
6 <sub>2</sub>	0,00010125
6 <sub>1</sub>	0,00024063
Total	1

A Tabela 3.10 contém a distribuição limite para um segurado retirado ao acaso da carteira de apólices. Analisando a distribuição limite obtida, verifica-se que existe uma

grande aglomeração de apólices na classe de entrada (Classe 2<sub>1</sub>). O prémio médio, em condições de estacionaridade, é 92,02% do prémio de entrada.

Figura 3.3: Evolução do Prémio Médio - Modelo Aberto: S. Actual



A Figura 3.3 ilustra a evolução do prémio médio de um novo segurado retirado ao acaso, no decorrer dos próximos 20 anos, em percentagem do prémio de entrada.

Analisando a Figura 3.3, verifica-se que o prémio médio diminui ao longo dos anos, só estabilizando a partir do 15º ano. Ao fim de 20 anos, o prémio médio encontra-se próximo do valor em condições de estacionaridade, embora esta só seja efectivamente atingida após 47 anuidades.

A distribuição limite obtida através deste modelo é significativamente diferente da obtida pelo modelo clássico. Enquanto que no modelo vórtices estocásticos, na estacionaridade, existirá uma grande aglomeração de apólices na classe de entrada, no modelo clássico, a maior concentração de apólices será na classe bonificada. Em ambos os modelos, verifica-se que a maior parte das apólices encontrar-se-ão nas classes não agravadas (Classe 1 e Classe 2<sub>1</sub>), sendo que, no modelo vórtices estocásticos a concentração de apólices nas classes não agravadas será ainda maior. Este facto é reflexo das elevadas probabilidades de saída nas classes mais agravadas, que não são tidas em conta no modelo tradicional. Verifica-se ainda que, em ambos os modelos, a probabilidade de, na estacionaridade, uma apólice se encontrar na classe com o mesmo agravamento pelo segundo ano consecutivo diminui. Este facto pode justificar-se pelas actuais regras de transição, visto que é mais vantajoso para o segurado não continuar na classe com o mesmo agravamento pelo segundo ano consecutivo.

### 3.2.4 Escalas Óptimas

#### O Modelo de Norberg

A escala óptima de prémios, obtida através do modelo de Norberg (1976), apresentado na Sub-seccção 2.1.1, é dada por:

$$b_{\mathbf{T}}(j) = \frac{\int_0^{\infty} \lambda \pi_{\mathbf{T},\lambda}(j) dU(\lambda)}{\pi_{\mathbf{T}}(j)}, \quad j \in C_1 \cup C_2. \quad (3.22)$$

Note-se que a escala de Norberg (1976) estimará o prémio óptimo a aplicar a cada classe, sem ter em conta que, devido ao desdobramento das classes que foi necessário efectuar, os prémios das classes  $j_1$  e  $j_2, j = 2, \dots, 6$  deverão ser iguais.

Para que a escala de prémios obtida através deste modelo respeite a definição do *SBM* utilizado nesta seguradora, e seguindo a sugestão de Centeno e A.Silva (2002), a escala de Norberg (1976) sob a restrição da igualdade de prémios em classes desdobradas é dada por:

$$b_{\mathbf{T}}^*(j) = \frac{\sum_{l=1}^2 b_{\mathbf{T}}(j_l) \pi_{\mathbf{T}}(j_l)}{\sum_{l=1}^2 \pi_{\mathbf{T}}(j_l)}, \quad j = 2, \dots, 6, \quad \text{e } b_{\mathbf{T}}^*(1) = b_{\mathbf{T}}(1). \quad (3.23)$$

Utilizando as distribuições limite obtidas nas Tabelas 3.6 e 3.10, as escalas óptimas de prémios para o modelo fechado e aberto, podem ser consultadas na Tabela 3.11.

Tabela 3.11: Escalas Óptimas de Prémios (Modelo de Norberg (1976)): S. Actual

$b_{\mathbf{T}}(j)$	Modelo Fechado	Modelo Aberto
1	0,0887578	0,1000462
2	-	0,1503899
3	0,3275414	0,2883487
4	0,5379843	0,4590678
5	0,6882512	0,6193805
6	0,7985527	0,5392828

Analisando as escalas de prémios obtidas, verifica-se que nas classes não agravadas (Classes 1 e 2) o prémio no modelo fechado é inferior ao prémio no modelo aberto, enquanto que nas classes agravadas (da Classe 3 à Classe 6) o prémio no modelo fechado é superior ao prémio no modelo aberto. Verifica-se ainda que no modelo aberto a escala obtida não cresce de acordo com a propensão à sinistralidade; há uma quebra do prémio na classe mais agravada (Classe 6). Este facto deve-se, possivelmente, às actuais regras de transição do sistema e às probabilidades de saída.

Note-se que, uma vez que  $\pi_{\mathbf{T}}(2_1) = \pi_{\mathbf{T}}(2_2) = 0$ , a expressão (3.23) não permitirá estimar o prémio da Classe 2 no modelo fechado.

Como o custo médio de um sinistro é considerado unitário, o prémio a cobrar corresponde apenas à frequência de sinistralidade de cada classe. Assim, sendo a Classe 2 a classe de entrada poder-se-á optar por usar como estimativa de  $b_{\mathbf{T}}(2)$ , a frequência de sinistralidade média da carteira, ou seja  $b_{\mathbf{T}}(2) = \hat{\lambda} = 0,1475536$ . Outra sugestão, mais adequada do nosso ponto de vista, será a estimação da escala óptima de prémios recorrendo ao modelo de Borgan et al. (1981), conforme se fará adiante.

Na Tabela 3.12 podem ser consultados o prémio médio em condições de estacionaridade, o erro quadrático médio e a medida de eficiência para os dois modelos.

O prémio médio em condições de estacionaridade no modelo aberto é ligeiramente superior ao modelo fechado, isto deve-se ao facto de, no modelo fechado se estimar

Tabela 3.12:  $PM$ ,  $EQM$  e Medida de Eficiência (Modelo de Norberg (1976)): S. Actual

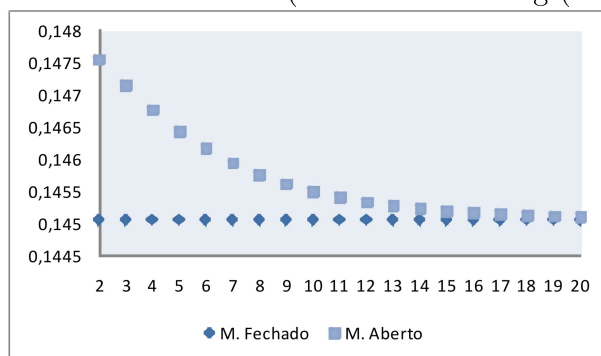
	Modelo Fechado	Modelo Aberto
$PM$	0,1450537	0,1450641
$EQM$	0,0284196	0,039989
$e(\Delta)$	0,0353283	0,0237736

existir mais segurados na classe bonificada do sistema a longo prazo.

As medidas apresentadas na Tabela 3.12 não devem ser comparadas entre si, uma vez que deverão apenas ser utilizadas para comparar a eficiência de diferentes escalas óptimas calculadas para o mesmo  $SBM$ , utilizando os mesmos pressupostos. Serão, portanto, úteis nas comparações feitas adiante após a estimação de outras escalas óptimas sob cada uma das perspectivas.

Na Figura 3.4 pode ser analisada a evolução do prémio médio de um novo segurado retirado ao acaso da carteira de apólices, para os próximos 20 anos.

Figura 3.4: Evolução do Prémio Médio (Escala de Norberg (1976)): Sistema Actual



Analisando a Figura 3.4 verifica-se que o prémio médio, no modelo fechado, estabiliza logo no 2º ano, ficando-se muito próximo da estacionaridade. No modelo aberto, o prémio médio vai diminuindo no decorrer dos anos, e estabiliza a partir do 15º ano, sendo que o prémio médio, passados 20 anos, encontra-se muito próximo da estacionaridade. No primeiro ano, o prémio médio de um novo segurado no modelo fechado e aberto são respectivamente, 0,174121617 e 0,147809733. Optou-se por não ilustrar o prémio médio no primeiro ano porque, o prémio obtido no modelo fechado nesse ano é significativamente superior aos outros prémios obtidos, o que não permitia analisar de forma clara a evolução dos prémios nos anos seguintes.

### O Modelo de Borgan, Hoem & Norberg

Seguindo a sugestão apresentada por Centeno e A.Silva (2002), considerou-se fixo um conjunto de 20 ponderadores para o modelo aberto e dado que no modelo fechado o

prémio médio estabiliza logo no 2º ano, ficando muito próximo do prémio de estacionaridade, considerou-se apenas um conjunto de 4 ponderadores, ambos os conjuntos determinados através do sistema de equações:

$$\begin{cases} w_n = \frac{w_{n-1}}{1+i} \\ \sum_{n=1}^{\#n} w_n = 1 \end{cases}$$

onde  $\#n$  corresponde ao número de ponderadores a considerar e  $i$  permite estabelecer a relação entre os ponderadores para cada ano.

Em relação ao peso a atribuir à estacionaridade, optou-se por não determinar nenhum valor *a priori*, deixando que o peso seja atribuído pela convergência para a estacionaridade do próprio sistema. Caso o sistema não atinja a estacionaridade, considera-se que o peso a atribuir à estacionaridade deve ser nulo. Na resolução do sistema, considerou-se  $i$ , fixo, igual a 5%, conforme utilizado pelos mesmos autores.

Considerando o desdobramento das classes de *bonus*, a escala de Borgan et al. (1981), ver novamente Centeno e A.Silva (2002), será dada por:

$$b_B^*(j) = \frac{\sum_{l=1}^2 b_B(j_l) \mathbf{p}_\Delta(j_l)}{\sum_{l=1}^2 \mathbf{p}_\Delta(j_l)}, \quad j = 2, \dots, 6 \quad \text{e} \quad b_B^*(1) = b_B(1) \quad (3.24)$$

onde

$$b_B(j) = \frac{\sum_{n=1}^{\#n} w_n \int_0^\infty E(S_n | \lambda) p_{\Delta, \lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda)}{\mathbf{p}_\Delta(j)}, \quad j \in C_1 \cup C_2 \quad (3.25)$$

e

$$p_\Delta(j) = \sum_{n=1}^{\#n} w_n \int_0^\infty p_{\Delta, \lambda}^{(n)}(j) dU(\lambda), \quad j \in C_1 \cup C_2. \quad (3.26)$$

Tabela 3.13: Distribuição Ponderada: Sistema Actual

$p_\Delta(j_l)$	M. Fechado	M. Aberto
1	0,583679239	0,244504904
2 <sub>2</sub>	0,236637652	0,033292566
2 <sub>1</sub>	0	0,67540069
3 <sub>2</sub>	0,051806075	0,013808968
3 <sub>1</sub>	0,097618052	0,025190387
4 <sub>2</sub>	0,007488978	0,002145408
4 <sub>1</sub>	0,017347817	0,004308124
5 <sub>2</sub>	0,001218781	0,000300518
5 <sub>1</sub>	0,003280762	0,000724087
6 <sub>2</sub>	0,000229945	0,000110806
6 <sub>1</sub>	0,000692698	0,000213544

A expressão (3.26) é designada por distribuição ponderada e os resultados obtidos para cada um dos conjuntos podem ser consultadas na Tabela 3.13.

Analisando a Tabela 3.13 e comparando com as distribuições limite obtidas nas Tabelas 3.6 e 3.10, verifica-se que, no modelo fechado, as maiores diferenças residem nas Classes 1 e 2<sub>2</sub>, este facto justifica-se porque na distribuição ponderada consideram-se os primeiros anos, e nesses anos haverá apólices na Classe 2<sub>1</sub>. No modelo aberto, verifica-se que a distribuição ponderada não difere significativamente da distribuição obtida na estacionaridade, embora se verifique, na distribuição ponderada, uma menor concentração de segurados na classe de maior desconto.

As escalas de prémios, para o modelo fechado e para o modelo aberto, podem ser consultadas na Tabela 3.14.

Tabela 3.14: Escalas Óptimas de Prémios (Modelo de Borgan et al. (1981)): Sistema Actual

$b_B(j)$	Modelo Fechado	Modelo Aberto
1	0,088757783	0,106395257
2	0,110796061	0,147164092
3	0,332433523	0,285157328
4	0,543493243	0,443642861
5	0,692777682	0,602904515
6	0,801668149	0,442534192

Analisando a Tabela 3.14 verifica-se que, a escala de prémios obtida no modelo fechado é inferior à do modelo aberto nas classes não agravadas (Classe 1 e 2), sendo que nas restantes classes a escala no modelo aberto é menor do que no modelo fechado. A escala obtida no modelo aberto não cresce de acordo com a propensão à sinistralidade, há uma enorme quebra na Classe 6, tal como com o modelo de Norberg (1976). O prémio médio em condições de estacionaridade para os modelos fechado e aberto é, respectivamente, 0,1460552 e 0,1445791.

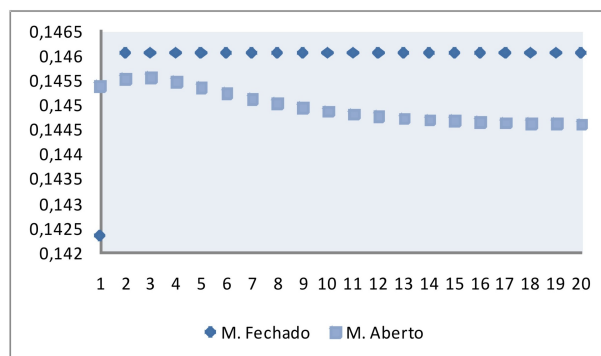
Tabela 3.15:  $PM$ ,  $EQM$  e Medida de Eficiência (Modelo de Borgan et al. (1981)): Sistema Actual

	Modelo Fechado	Modelo Aberto
$PM$	0,145053651	0,145053651
$EQM$	0,0296428	0,0633834
$e(\Delta)$	0,0341052	0,0229935

Na Tabela 3.15 podem ser observados o prémio médio em condições de não estacionaridade, o erro quadrático médio e a medida de eficiência para os dois modelos.

Todas estas medidas foram calculadas em condições de não estacionaridade, ou seja, recorrendo à distribuição ponderada. Verifica-se que o prémio médio, em condições de não estacionaridade, entre os dois modelos é muito semelhante.

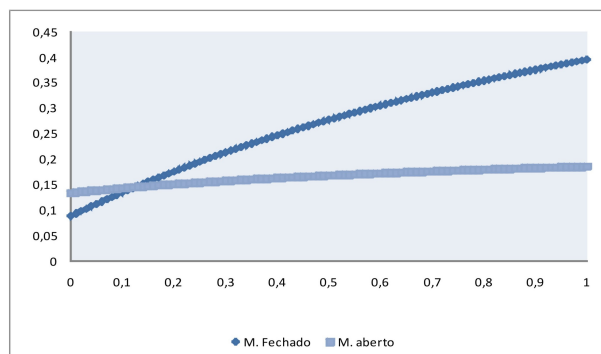
Figura 3.5: Evolução do Prémio Médio (Escala de Borgan et al. (1981)): Sistema Actual



A Figura 3.5 ilustra a evolução do prémio médio de um novo segurado para os dois modelos, ao longo de 20 anos. Analisando a figura verifica-se que, no primeiro ano, o prémio médio no modelo fechado é significativamente inferior ao dos anos seguintes e aos do modelo aberto enquanto que, nos anos seguintes, o prémio médio no modelo aberto é inferior ao modelo fechado. Isto deve-se, novamente, ao facto de, no modelo fechado, se estimar existirem apólices nas classes de maior agravamento, que teriam a pagar prémios elevados devido à elevada sinistralidade, o que não corresponde à realidade pois esses segurados tendem a anular a apólice com elevadas probabilidades, conforme visto na Tabela 3.7 Tal como nas outras escalas, no modelo fechado o prémio estabiliza no 2º ano enquanto que, no modelo aberto, o prémio estabiliza passados 15 anos.

A Figura 3.6 ilustra o prémio médio, em condições de não estacionaridade, em função de  $\lambda$  para os modelos fechado e o aberto.

Figura 3.6: Evolução do Prémio Médio em função de  $\lambda$  (Escala de Borgan et al. (1981)): Sistema Actual



No modelo aberto, o acréscimo do Prémio Médio, para valores mais elevados da

frequência de sinistralidade, é menos acentuado do que no modelo fechado, o que é uma consequência das elevadas probabilidades de saída nas classes mais agravadas.

### O Modelo de Gilde & Sundt

Com base na escala de Borgan et al. (1981), ilustrada na Tabela 3.14, a escala linear, obtida pelo modelo de Gilde e Sundt (1989), pode ser consultada na Tabela 3.16.

Tabela 3.16: Escalas Óptimas de Prémios (Modelo de Gilde e Sundt (1989)): Sistema Actual

$b^L(j)$	Modelo Fechado	Modelo Aberto
1	0,069024128	0,087153011
2	0,189208447	0,158479182
3	0,309392765	0,229805352
4	0,429577084	0,301131523
5	0,549761402	0,372457693
6	0,669945721	0,443783864

Analisando a escala de prémios obtida verifica-se que os prémios, no modelo aberto, são inferiores aos do modelo fechado, à excepção da Classe 1. Pode ainda notar-se que a introdução das restrições propostas por Gilde e Sundt (1989), corrige a diminuição de prémio que ocorria da Classe 5 para a Classe 6, na escala óptima proposta por Borgan et al. (1981).

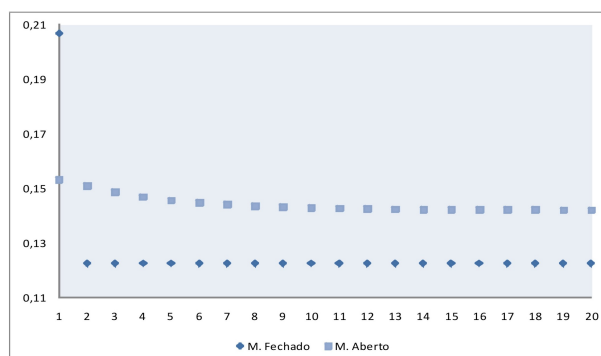
Na Tabela 3.17 apresenta-se o prémio médio e o erro quadrático médio, calculados em condições de não estacionaridade, tal como na escala de Borgan et al. (1981). A medida de eficiência é dada pelo rácio entre os erros quadráticos médios do modelo de Gilde e Sundt (1989) e de Borgan et al. (1981). No modelo fechado o rácio é superior a 1, o que indica que há uma perda de eficiência por se adoptar a escala linear, enquanto que, no modelo aberto há um ganho de eficiência, visto que o rácio é inferior a 1.

Tabela 3.17:  $PM$ ,  $EQM$  e Medida de Eficiência (Modelo de Gilde e Sundt (1989)): Sistema Actual

	Modelo Fechado	Modelo Aberto
$PM$	0,141768063	0,141716556
$EQM$	0,0318347	0,0412407
$\frac{EQM(L)}{EQM(B)}$	1,07394	0,650654588

A Figura 3.7 ilustra a evolução do prémio de um novo segurado ao longo de 20 anos.

Figura 3.7: Evolução do Prémio Médio (Escala de Gilde e Sundt (1989)): Sistema Actual



### O Modelo de Andrade e Silva

Com base na escala de Borgan et al. (1981), ilustrada na Tabela 3.14, a escala geométrica, obtida pelo modelo de Andrade e Silva (1991), pode ser consultada na Tabela 3.18.

Tabela 3.18: Escalas Óptimas de Prémios (Modelo de Andrade e Silva (1991)): Sistema Actual

$b^G(j)$	Modelo Fechado	Modelo Aberto
1	0,0927904	0,097833988
2	0,159473075	0,153220325
3	0,274076431	0,239962293
4	0,471038072	0,37581112
5	0,809543763	0,588567463
6	1,391312388	0,921770644

Analisando a escala obtida, verifica-se que os prémios do modelo fechado são superiores aos do modelo aberto, excepto na Classe 1.

Tabela 3.19:  $PM$ ,  $EQM$  e Medida de Eficiência (Modelo de Andrade e Silva (1991)): Sistema Actual

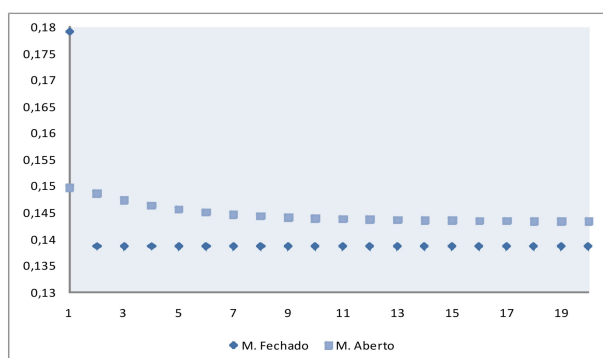
	Modelo Fechado	Modelo Aberto
$PM$	0,149476134	0,14519281
$EQM$	0,0312344	0,0409824
$\frac{EQM(G)}{EQM(B)}$	1,05369	0,646579388

A Tabela 3.19 contém o prémio médio e o erro quadrático médio, calculados em

condições de não estacionaridade. Analisando esta tabela, verifica-se que o prémio médio estimado no modelo fechado é superior ao estimado pelo modelo aberto. O rácio entre o erro quadrático médio da escala de Borgan et al. (1981) e a escala geométrica no modelo fechado é superior a 1, portanto, há uma perda de eficiência ao considerar a escala geométrica, enquanto que no modelo aberto há um ganho de eficiência ao adoptar esta escala.

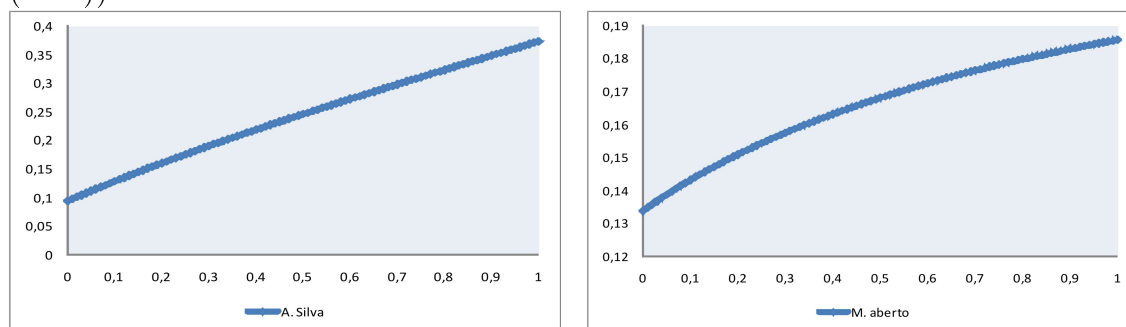
A Figura 3.8 ilustra a evolução do prémio de um novo segurado ao longo de 20 anos.

Figura 3.8: Evolução do Prémio Médio (Escala de Andrade e Silva (1991)): Sistema Actual



A Figura 3.9 ilustra o prémio médio, em condições de não estacionaridade, em função de  $\lambda$ , para os modelos fechado e aberto.

Figura 3.9: Evolução do prémio médio em função de  $\lambda$  (Escala de Andrade e Silva (1991)): Sistema Actual



### 3.2.5 Medidas de Avaliação

Nesta secção serão determinadas as medidas de avaliação enunciadas no Capítulo 2, utilizando as escalas óptimas de prémios, a escala actual e as distribuições limite e ponderadas determinadas nas secções anteriores.

### Nível Médio Relativo de Estacionaridade

Na Tabela 3.20 pode ser observado o Nível Médio Relativo de Estacionaridade obtido para um segurado retirado ao acaso da carteira de apólices.

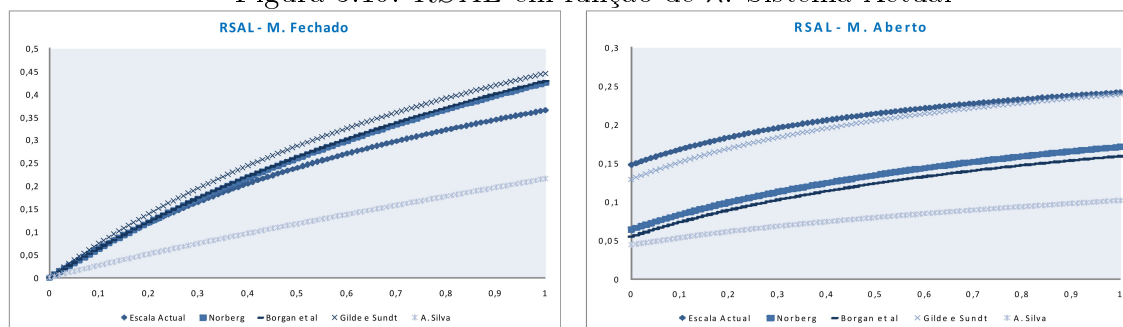
Tabela 3.20: Nível Médio Relativo de Estacionaridade: Sistema Actual

<i>RSAL</i>	Modelo Fechado	Modelo Aberto
Escala Actual	0,0749024	0,169389549
Norberg	0,0793129	0,0866838
Borgan et al	0,0789663	0,0778604
Gilde & Sundt	0,126522	0,162355
A. Silva	0,043654	0,0574787

Analisando a Tabela 3.20 verifica-se que, em qualquer um dos modelos e para qualquer uma das escalas, o *RSAL* é muito baixo, o que indica existir uma grande aglomeração de segurados nas classes mais baixas do sistema. Este facto deve-se, essencialmente, à pouca severidade das regras de transição bem como à sua incoerência. Verifica-se ainda que o *RSAL*, no modelo aberto, é superior ao modelo fechado, à excepção da escala de Borgan et al. (1981), onde a diferença é pouco significativa.

A Figura 3.10 ilustra a evolução de *RSAL*, em função de  $\lambda$ , para os dois modelos.

Figura 3.10: *RSAL* em função de  $\lambda$ : Sistema Actual



### Coefficiente de Variação

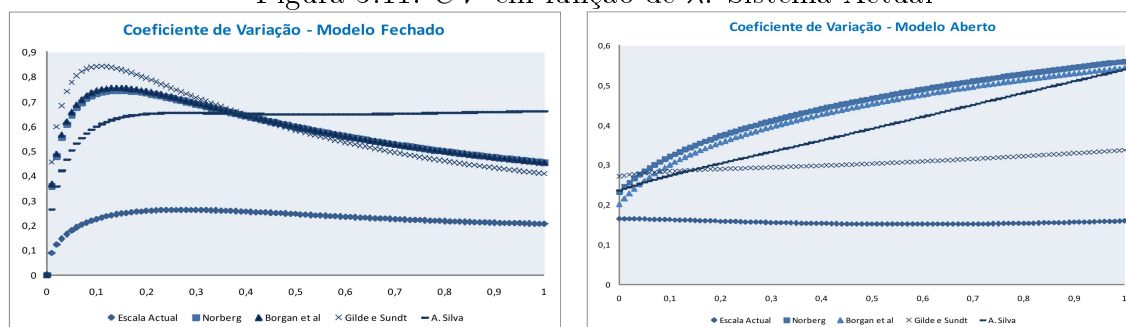
A Tabela 3.21 contém o Coeficiente de Variação de Prémios, para todas as escalas, para um segurado retirado ao acaso da carteira de apólices.

Analisando a Tabela 3.21 verifica-se que a variação do prémio médio, em qualquer um dos modelos, para qualquer uma das escalas, é muito baixa. No entanto, verifica-se que, existe maior variabilidade no modelo fechado, o que pode ser justificado, pelo facto de o modelo não assumir saídas de apólices do sistema.

Tabela 3.21: Coeficiente de Variação de Prêmios: Sistema Actual

$CV$	Modelo Fechado	Modelo Aberto
Escala Actual	0,247812	0,165246
Norberg	0,824049	0,360181
Borgan et al	0,787987	0,304660
Gilde & Sundt	0,718852	0,264023
Andrade e Silva	0,674681	0,282683

A Figura 3.11 ilustra a evolução do coeficiente de variação do prémio em função da frequência de sinistralidade.

Figura 3.11:  $CV$  em função de  $\lambda$ : Sistema Actual

### A Elasticidade do Prémio

A elasticidade global do prémio médio, em condições de estacionaridade, como já foi referido anteriormente, mede a resposta do sistema a uma alteração na frequência esperada de sinistralidade.

A Tabela 3.22 contém a Elasticidade Global do sistema para um segurado retirado ao acaso da carteira de apólices.

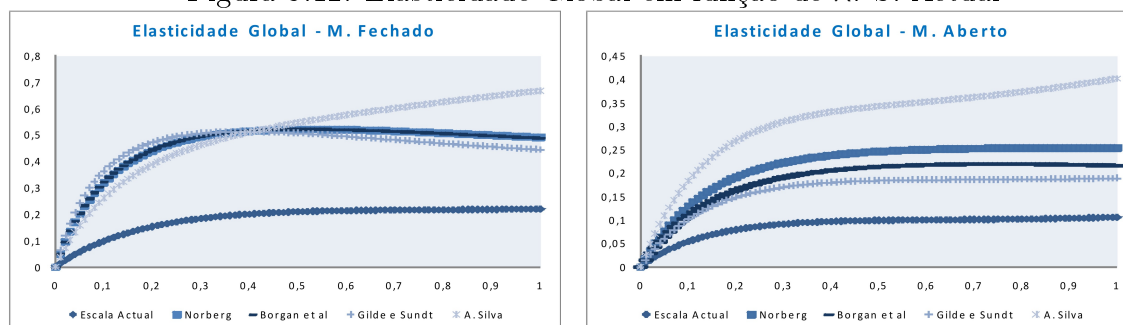
Tabela 3.22: A Elasticidade Global do Sistema: Sistema Actual

$\eta$	Modelo Fechado	Modelo Aberto
Escala Actual	0,0841543	0,0434694
Norberg	0,247268	0,106372
Borgan et al	0,249358	0,0908652
Gilde & Sundt	0,268346	0,0819105
A. Silva	0,225005	0,150244

Em qualquer um dos modelos, para qualquer uma das escalas, verifica-se que, a elasticidade global do sistema é baixa, sendo que a elasticidade do sistema quando

avaliada segundo o modelo fechado é superior a do modelo aberto. Isto justifica-se pelo facto do modelo fechado não considerar as saídas de apólices no sistema.

Figura 3.12: Elasticidade Global em função de  $\lambda$ : S. Actual



## A Elasticidade Transiente

Como já foi referido na Sub-secção 2.2.4, a elasticidade transiente mede a elasticidade do valor esperado actualizado dos pagamentos futuros, em relação à frequência de sinistralidade. Dado que a frequência de sinistralidade nas classes com índice 1 e 2 são distintas, optou-se por analisar a elasticidade transiente para as 11 classes do sistema.

Considerando uma taxa de desconto  $\beta = 0,97$ , a elasticidade transiente para os modelos fechado e aberto podem ser consultadas nas Tabelas 3.23 e 3.24, respectivamente.

Tabela 3.23: A Elasticidade Transiente (Modelo Fechado): Sistema Actual

j	E. Actual	Norberg	Borgan et al	Gilde e Sundt	A. Silva
1	0,0814962	0,241854	0,243923	0,262734	0,219858
2 <sub>2</sub>	0,0806586	0,239209	0,24292	0,255654	0,217133
2 <sub>1</sub>	0,0790951	0,236204	0,241769	0,248033	0,213951
3 <sub>2</sub>	0,0802463	0,231502	0,233324	0,248998	0,212622
3 <sub>1</sub>	0,0779273	0,220387	0,22199	0,234873	0,204465
4 <sub>2</sub>	0,0798383	0,223167	0,224945	0,242725	0,205337
4 <sub>1</sub>	0,0767804	0,204256	0,205815	0,222997	0,18985
5 <sub>2</sub>	0,0794345	0,217614	0,219413	0,236799	0,194022
5 <sub>1</sub>	0,075654	0,194007	0,195628	0,212207	0,168669
6 <sub>2</sub>	0,0779888	0,213728	0,215564	0,23119	0,17745
6 <sub>1</sub>	0,0716893	0,187054	0,188753	0,202344	0,14043

Analisando a elasticidade do modelo fechado, verifica-se que a escala actual apresenta valores para a elasticidade transiente inferiores em todas as classes quando comparado com as outras escalas, enquanto que a escala linear de Gilde e Sundt (1989) apresenta valores para a elasticidade transiente superiores aos outros modelos.

Tabela 3.24: A Elasticidade Transiente (Modelo Aberto): Sistema Actual

j	E. Actual	Norberg	Borgan et al	Gilde e Sundt	A. Silva
1	0,005782	0,131888	0,0828018	0,070790	0,077703
2 <sub>2</sub>	0,004862	0,111051	0,072435	0,056229	0,065296
2 <sub>1</sub>	0,001109	0,019617	0,013470	0,007942	0,010871
3 <sub>2</sub>	0,004609	0,081110	0,056579	0,048227	0,055072
3 <sub>1</sub>	0,003449	0,053367	0,039069	0,031864	0,040058
4 <sub>2</sub>	0,004347	0,061132	0,044787	0,041820	0,043818
4 <sub>1</sub>	0,000936	0,026192	0,019003	0,020281	0,019947
5 <sub>2</sub>	0,003941	0,048680	0,034811	0,034931	0,031231
5 <sub>1</sub>	0,00102137	0,0141372	0,00719533	0,012221	0,003384
6 <sub>2</sub>	0,000796	0,008739	0,009827	0,006763	0,004271
6 <sub>1</sub>	0,001390	0,000855	0,003168	0,001383	-0,000800

Sob a perspectiva do modelo aberto, verifica-se que a escala actual apresenta valores para a elasticidade transiente inferiores em todas as classes, à excepção da classe 6<sub>1</sub> enquanto que, da Classe 1 à Classe 5<sub>1</sub>, a escala de Norberg (1976) apresenta valores para a elasticidade transiente superior às outras escalas, e na classe mais agravada (Classe 6<sub>2</sub> e Classe 6<sub>1</sub>) a elasticidade transiente é maior para a escala de Borgan et al. (1981).

Comparando o modelo fechado com o aberto, verifica-se que a elasticidade transiente no modelo fechado apresenta valores bastantes superiores, em todas as classes. Este facto deve-se, novamente, às elevadas probabilidades de saída nas classes mais agravadas o que se traduzirá, naturalmente, num valor inferior para o valor esperado, actualizado, dos pagamentos futuros, quando comparado com o modelo fechado, onde estas probabilidades não são tidas em conta.

### 3.2.6 Comentários às Escalas Óptimas

Dado que os dois modelos são construídos sob pressupostos diferentes, serão feitas análises comparativas entre as escalas obtidas no modelo fechado e, posteriormente, entre as obtidas no modelo aberto.

#### Modelo Fechado

As escalas óptimas de prémios obtida através do modelo de Norberg (1976) e do modelo de Borgan et al. (1981) (Tabelas 3.11 e 3.14), apresentam valores muito semelhantes. Este resultado é expectável, visto que, como já foi referido anteriormente, o modelo de Borgan et al. (1981) é uma generalização do modelo de Norberg (1976). O que diferencia estes dois modelos é o facto do modelo de Norberg (1976) estimar uma escala que considera óptima para a estacionaridade segundo as regras de transição do

sistema. Dado que com as actuais regras de transição do *SBM* da Garantia, o sistema atinge a estacionaridade logo no segundo ano, pelo que a estacionaridade terá um peso elevado na determinação da escala de Borgan et al. (1981), portanto é natural que os prémios sejam semelhantes.

A escala linear, obtida através do modelo de Gilde e Sundt (1989) (Tabela 3.16) revela-se ser a menos severa para os segurados que declarem muitos sinistros, isto porque, em comparação com as restantes escalas estimadas, esta é a que apresenta prémios significativamente mais baixos para as classes mais agravadas do sistema.

A escala geométrica, obtida através do modelo de Andrade e Silva (1991) (Tabela 3.18), é a escala mais severa, isto porque apresenta um prémio significativamente superior nas classes mais agravadas, em comparação com as outras escalas.

Em relação ao erro quadrático médio, verifica-se que a escala de Norberg (1976) é a que apresenta um *EQM* inferior, mas essa diferença não é significativa em comparação com as outras escalas. Comparando a eficiência da escala de Norberg (1976) com a escala de Borgan et al. (1981), verifica-se que a escala de Norberg (1976) é mais eficiente, no entanto essa diferença não é significativa. Tendo em conta a medida da perda de eficiência, verifica-se que há uma perda de eficiência ao adoptar a escala linear ou geométrica, no entanto essa perda não é significativa, principalmente se se considerar a escala geométrica.

Em relação às medidas de avaliação propostas por Lemaire (1995), verifica-se que a escala linear é a que apresenta valores superiores em todas as medidas, à excepção do coeficiente de variação dos prémios. Relativamente ao *RSAL* o valor obtido pela escala linear, deve-se essencialmente ao facto desta escala apresentar um prémio máximo significativamente inferior às restantes escalas.

Tabela 3.25: Escalas Óptimas em Percentagem (Modelo Fechado): S. Actual

$j$	Norberg	Borgan et al	Gilde e Sundt	A. Silva
1	60,15%	80,11%	36,48%	58,19%
2	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	221,98%	300,04%	163,52%	171,86%
4	364,60%	490,53%	227,04%	295,37%
5	466,44%	625,27%	290,56%	507,64%
6	541,20%	723,55%	354,08%	872,44%

A Tabela 3.25 contém as escalas óptimas de prémios em percentagem do prémio de entrada. As escalas de Norberg (1976) e Borgan et al. (1981) são mais contidas nos descontos a aplicar, e para as classes agravadas, essas duas escalas são bastantes severas no prémio a aplicar. Note-se que, por exemplo, na escala de Borgan et al. (1981) basta que o segurado declare 1 sinistro, para ver o seu prémio agravar em 200%. A escala linear é a que apresenta prémios mais baixos em termos de agravamento, mas por outro lado, apresenta um prémio muito baixo caso o segurado não declare sinistros

por dois anos consecutivos.

Do ponto de vista comercial, nenhuma das escalas obtidas parece ser aconselhável, dado que a variação dos prémios entre as classes consecutivas é bastante elevada. As escalas obtidas são fruto das regras de transição pouco coerentes e ilustram que a escala actual está afastada do que seria óptimo.

### Modelo Aberto

As escalas de Norberg (1976) e Borgan et al. (1981) obtidas a partir do modelo aberto (Tabelas 3.11 e 3.14) não são aconselháveis, em ambas as escalas há uma quebra no prémio da classe mais agravada.

A escala linear é a escala menos severa, enquanto que a escala geométrica é a que penaliza mais os “maus” condutores.

A escala de Norberg (1976) é a que apresenta um *EQM* inferior, no entanto bastante semelhante à escala linear e à escala geométrica, sendo que a escala de Borgan et al. (1981) é a que apresenta um *EQM* mais elevado. Em relação à eficiência, a escala de Norberg (1976) é mais eficiente que a escala de Borgan et al. (1981). Em termos da medida de perda de eficiência, há um ganho significativo de eficiência ao adoptar a escala linear ou geométrica.

Em termos de medidas de avaliação propostas por Lemaire (1995), a escala linear é a que apresenta um *RSAL* mais elevado e a escala de Norberg (1976) é a que apresenta o coeficiente de variação mais elevado, no entanto, a diferença em relação às outras escalas não é significativa. Em termos da elasticidade global, a escala geométrica é a que torna o sistema mais elástico.

Tabela 3.26: Escalas Óptimas em Percentagem (Modelo Aberto): S. Actual

$j$	Norberg	Borgan et al	Gilde e Sundt	A. Silva
1	66,52%	72,30%	54,99%	63,85%
2	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	191,73%	193,77%	145,01%	156,61%
4	305,25%	301,46%	190,01%	245,27%
5	411,85%	409,68%	235,02%	384,13%
6	358,59%	300,71%	280,03%	601,60%

A Tabela 3.26 contém as escalas óptimas de prémios em percentagem do prémio definido *a priori*. Analisando a escala obtida em função do prémio de entrada (Classe 2), verifica-se a escala de Gilde e Sundt (1989), em comparação com as outras escalas, é a mais adequada, visto que as escalas de Norberg (1976) e Borgan et al. (1981) não apresentam um prémio que aumenta à medida que aumenta a frequência de sinistralidade e a escala de Andrade e Silva (1991) é bastante penalizante nas classes mais agravadas, o que poderá traduzir-se num maior número de segurados a abandonar a seguradora.

### 3.3 Sistema de *Bonus Malus* Alternativo para a Seguradora Garantia

O seguro obrigatório de responsabilidade civil, em Cabo Verde, é regido pelo Decreto-Lei n.º17/2003 de 10 de Fevereiro e Legislação Complementar.

Osório (2006) apresentou uma proposta alternativa ao actual *SBM*, onde recomenda melhores opções, nomeadamente ao nível das regras de transição, visto que o sistema que vigora actualmente apresenta algumas lacunas, conforme se refere na Sub-secção 3.3.2.

Esta secção pretende apresentar e analisar a proposta de Osório (2006), avaliando o *SBM* proposto do ponto de vista das medidas de avaliação propostas por Lemaire (1995), bem como estimar as escalas óptimas de prémios associadas a este conjunto de regras de transição.

No que se segue, apresenta-se o Decreto-lei pelo qual é regido o sistema de *bonus malus* em Cabo Verde.

#### 3.3.1 Decreto-Lei n.º17 de Fevereiro de 2003

##### Artigo n.º17 Sistema de *Bonus Malus*

A apólice uniforme do seguro obrigatório de responsabilidade civil automóvel deverá conter uma cláusula de redução ou agravamento do prémio simples, por ausência ou não de sinistralidade, nas condições estabelecidas pelo Banco de Cabo Verde.

1. O sistema bonificado visa premiar os condutores sem sinistros da sua responsabilidade, atribuindo-lhes uma redução no prémio.
2. O Banco de Cabo Verde, através do Aviso n.º5/98 sobre Apólice Uniforme do Seguro Obrigatório de Responsabilidade Civil Automóvel, instituiu o sistema de agravamento e bonificação por sinistralidade.
3. Para o sistema de *bonus* e agravamentos por sinistro, apenas serão de considerar os sinistros que tenham dado lugar ao pagamento de indemnização ou à constituição de uma provisão, desde que, neste último caso, a seguradora tenha assumido a responsabilidade perante terceiros.
4. Em caso de constituição de provisão, a seguradora poderá suspender a atribuição de *bonus* durante o período de dois anos, devendo, findo esse prazo, o mesmo ser devolvido e reposta a situação tarifária sem prejuízo para o segurado, caso a seguradora não tenha, entretanto, assumido a responsabilidade perante terceiros, cfr. n.º3 do art. 17º do aviso.
5. A bonificação é aplicável ao prémio simples acrescido de todos os sobreprémios aplicáveis.

6. Por ausência de sinistro o segurado terá direito à redução de 30% no prémio simples quando em duas anuidades consecutivas, não se verifica (i) ocorrência de sinistro que tenha dado lugar ao pagamento de qualquer indemnização (ii) ou a ocorrência de sinistro que dê lugar à constituição de provisão, desde que a seguradora tenha, expressamente, aceite a responsabilidade perante terceiros.
7. Obtendo o segurado uma bonificação por ausência de sinistralidade durante duas anuidades consecutivas, esta não é acumulável a outra bonificação pela manutenção dessa não sinistralidade nos subseqüentes 2 anos e seguintes.
8. Os contratos com sinistros serão, no vencimento seguinte à ocorrência do facto, obrigatoriamente sujeito aos seguintes agravamentos mínimos no prémio: (i) 15% em contratos com 1 sinistro, (ii) 30% em contratos com 2 sinistros, (iii) 45% em contratos com 3 sinistros, (iv) 100% em contratos com 4 sinistros, (v) contratos com mais de 4 sinistro o agravamento é feito caso a caso. Estes agravamentos serão retirados no primeiro processamento de prémio com direito a *bonus*. Significa que o condutor que tenha tido um sinistro não só perde o *bonus* de 30% que lhe tinha sido atribuído, como vê agravado, de imediato, o seu prémio em 15%.
9. É vedado o agravamento do prémio por sinistralidade, quer haja ou não lugar ao pagamento de indemnização, sempre que (i) o veículo implicado tenha sido objecto de furto ou roubo, regulamente comunicado à autoridade policiais, tendo o acidente tenha sido devido a facto não imputável ao segurado, revestindo-se de características de caso de força maior, (iii) o acidente tenha sido exclusivamente devido a facto imputável à vítima ou a terceiros.
10. No caso de transferências de contratos entre seguradoras os agravamentos e bonificações a aplicar são mantidos, reforçando o legislador o princípio de que o alvo da medida é unicamente o condutor habitual e não o veículo. Por outro lado, o acidente causado por condutor em veículo de que não tenha a condução efectiva penaliza o condutor titular do veículo, como se deste se tratasse. É o caso do proprietário dar de empréstimo o seu veículo a um amigo que lhe irá fazer determinada tarefa a título gratuito.

### 3.3.2 Críticas e Propostas apresentas por Osório

Cada um dos pontos a seguir referenciados, foram ressaltados por Osório (2006).

- Temos reservas sobre a “justeza” das soluções preconizadas pelo legislador, porquanto verificamos que este regime não distingue o caso de uma apólice com nove anos sem sinistro (que com o primeiro sinistro perde a bonificação e é agravado automaticamente em 15%) da apólice com um ano sem sinistro, que terá o mesmo agravamento de 15% com o primeiro sinistro.

- Defendemos que na determinação do escalão de Bonus/Agravamento deveria atender-se ao histórico de bonus-agravamento da apólice, e não apenas o número de sinistros da anuidade e o número de anos sem sinistros. Outra crítica prende-se com os casos de perda total em que a apólice é anulada. Com a efectivação de um novo contrato, a nova apólice inicia-se sem agravamento porque se trata de um novo contrato. Questiona-se até que ponto não deveria a apólice iniciar com agravamento.
- Para resolver as lacunas apresentadas, sugerimos a implementação de um esquema de Agravamento/Bonificação que funcione da seguinte forma:
  - Funcione de forma linear utilizando o conceito de Escalão;
  - Escalão é um valor numérico inteiro ( $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots$ );
    - \* Valor negativo  $\Rightarrow$  bonificação
    - \* Valor positivo  $\Rightarrow$  agravamento
    - \* 0  $\Rightarrow$  Situação Normal
  - Cada apólice tem um e um só Escalão por anuidade, não sendo associado a um risco em particular;
  - Determina o nível de risco dos condutores habituais duma apólice e não necessariamente do titular. Desta forma, se o titular tiver várias apólices, somente a apólice com sinistro é agravada;
  - Determinada a percentagem de Agravamento/Bonificação sobre o prémio simples através duma tabela de correspondência;
  - No fim de cada anuidade da apólice o Escalão é determinado da seguinte forma:
    - \* Se não tiver sinistro com culpa na anuidade:
      - Novo Escalão = Escalão Anterior -1 (bonificação)
    - \* Se tiver  $n$  sinistros com culpa na anuidade:
      - Novo Escalão = Escalão Anterior +  $\alpha n$  (agravamento) ( $n$  = número de sinistros durante a anuidade) ( $\alpha$  = peso do sinistro na determinação do Escalão)
  - Devemos pensar na determinação de  $\alpha$ . Por exemplo:
    - \* Se considerarmos  $\alpha = 1$ , o sinistro tem o mesmo peso do número de anos sem sinistro na determinação do Escalão;
    - \* Se considerarmos  $\alpha = 2$ , o sinistro tem o dobro do peso do número de anos sem sinistro na determinação do Escalão;

### 3.3.3 Definição do Sistema Alternativo

Da proposta acima apresentada, com as devidas adaptações, analisaremos o sistema alternativo, definido da seguinte forma:

- O peso à atribuir a cada sinistro na determinação da classe é dado por  $\alpha = 1$ ;
- O conceito Escalão é substituído por Classe, onde é definida por ordem crescente de propensão à sinistralidade, sendo que no total serão 6 e a entrada no sistema far-se-á, geralmente, pela Classe 2;
- Regra de Transição: Por cada ano sem sinistro, descida de uma classe, e por cada sinistro com responsabilidade, mesmo parcial, subida de uma classe.

As classes do sistemas de *bonus* serão definidas na Tabela 3.27:

Tabela 3.27: Classes do Sistema de *bonus* alternativo

Classe	Desconto/Agravamento
1	30% Desconto
2	0%Desconto
3	15% Agravamento
4	30% Agravamento
5	45% Agravamento
6	100% Agravamento

O que equivale a um vector de prémios de

$$\bar{\mathbf{b}}^T = (70 \ 100 \ 115 \ 130 \ 145 \ 200). \quad (3.27)$$

Com as definições acima, tem-se que a matriz das regras de transições,  $\bar{\mathbf{T}}$ , é dada por:

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} \{0\} & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4\} & \{5, 6, \dots\} \\ \{0\} & - & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{4, 5, \dots\} \\ - & \{0\} & - & \{1\} & \{2\} & \{3, 4, \dots\} \\ - & - & \{0\} & - & \{1\} & \{2, 3, \dots\} \\ - & - & - & \{0\} & - & \{1, 2, \dots\} \\ - & - & - & - & \{0\} & \{1, 2, \dots\} \end{array} \right] \end{matrix}.$$

O sistema assim definido é representado por uma cadeia de Markov, sem que seja necessário efectuar alterações.

### 3.3.4 Distribuição Limite: Carteira Fechada

A matriz de probabilidades de transição para o sistema de *bonus malus* definido na secção anterior é dado por:

$$P_{\bar{T}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 1 - \sum_{i=0}^4 p_i \\ p_0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & 1 - \sum_{i=0}^3 p_i \\ 0 & p_0 & 0 & p_1 & p_2 & 1 - \sum_{i=0}^2 p_i \\ 0 & 0 & p_0 & 0 & p_1 & 1 - \sum_{i=0}^1 p_i \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 1 - p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 1 - p_0 \end{array} \right]. \end{matrix}$$

Analisando a matriz de probabilidades de transição, conclui-se que a cadeia de Markov implícita no modelo é irreduzível, isto é, todas as classes comunicam entre si. A cadeia é finita e aperiódica, portanto, é recorrente positiva, pelo que a distribuição limite coincidirá com a distribuição estacionária.

Tabela 3.28: Distribuição Limite e Ponderada no M. Fechado: Sistema Alternativo

$j$	Distribuição Limite	Distribuição Ponderada
1	0,821755254	0,82931180403
2	0,076300539	0,07690259147
3	0,031834588	0,0376074097
4	0,021949243	0,0208495609
5	0,021369141	0,0165064900
6	0,026791236	0,0188221449
Total	1	1

A Tabela 3.28 contém as distribuições limite e ponderada para um segurado retirado ao acaso da carteira de apólices. Para as duas distribuições obtidas verifica-se que existirá uma grande aglomeração de apólices na classe bonificada do sistema (Classe 1). O prémio médio em condições de estacionaridade e não estacionaridade é, respectivamente, 80,12% e 78,96% do prémio de entrada.

Analisando a Figura 3.13, onde ilustra a evolução do prémio de um novo segurado, verifica-se que o prémio médio oscila nos 3 primeiros anos, sendo que no 1º ano o prémio médio é mais baixo que nos restantes anos. A partir do 3º ano o prémio vai aumentando, sendo que estabiliza a partir do 15º ano, no entanto não atinge a estacionaridade nesses 20 anos.

### 3.3.5 Distribuição Limite: Carteira Aberta

A Tabela 3.29 contém o vector de probabilidades de um novo segurado ser colocado numa das  $s$  classes do sistema. Foi estimado de acordo com os dados da carteira, de forma análoga ao outro modelo (modelo que vigora actualmente na seguradora Garantia).

Figura 3.13: Evolução do Prémio Médio (Modelo Fechado): Sistema Alternativo

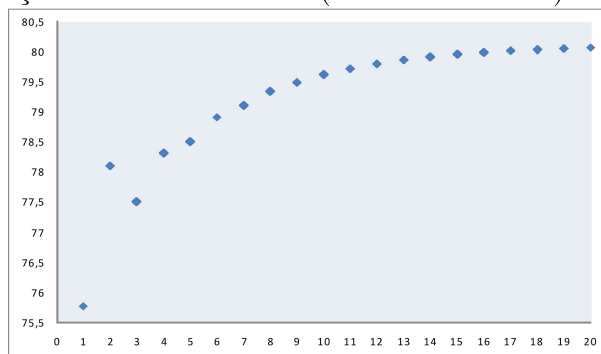


Tabela 3.29: Probabilidades de Entradas nas Classes: Sistema Alternativo

$j$	1	2	3	4	5	6
$c_0(j)$	0,10643118	0,883351056	0,008229692	0,001571964	0,000184937	0,000231171

Analisando a Tabela 3.29 verifica-se que a maior parte dos segurados entraram para a classe de entrada (Classe 2), portanto, geralmente a classe de entrada é respeitada pela Seguradora. Verifica-se ainda, que a probabilidade de um novo segurado ser colocado nas classes agravadas do sistema é bastante baixa. Isto pode dever-se ao facto de as seguradoras não exigirem a apresentação do certificado de tarifação ou ainda por questões comerciais.

A Tabela 3.30 contém a estimativa do vector de probabilidades de saída de um segurado para cada uma das 6 classes do sistema.

Tabela 3.30: Probabilidades de Saída: Sistema Alternativo

$j$	1	2	3	4	5	6
$q_0(j)$	0,259188839	0,959237602	0,375928553	0,387808271	0,444520983	0,9375

Analisando a Tabela 3.30 verifica-se que a probabilidade de saída na classe de entrada é enorme (Classe 2), questão esta já anteriormente justificada pela legislação de Cabo Verde. No entanto verifica-se que, à excepção da Classe 2, a probabilidade de saída de um segurado do sistema é maior à medida que aumentam os agravamentos a aplicar ao prémio, sendo que a probabilidade de um segurado abandonar a Seguradora, sabendo que está na classe mais agravada (Classe 6), é muito elevada.

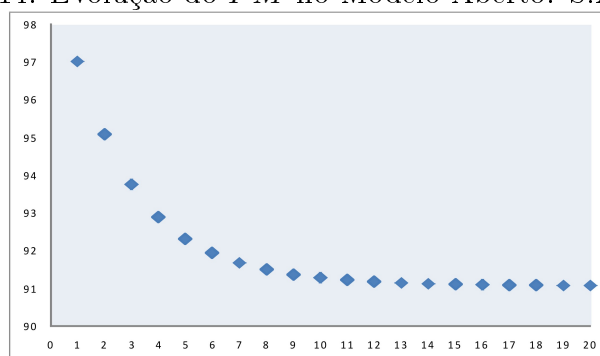
A Tabela 3.31 contém as distribuições limite e ponderada de um segurado retirado ao acaso do sistema estar em uma das 6 classes do sistema. Analisando os resultados obtidos em ambas as distribuições verifica-se que, a maior parte das apólices se encon-

Tabela 3.31: Distribuição Limite e Ponderada (M. Aberto): Sistema Alternativo

$j$	Distribuição Limite	Distribuição Ponderada
1	0,3125561	0,2683245
2	0,6686178	0,7138979
3	0,0129901	0,0125851
4	0,0038550	0,0035225
5	0,0011946	0,0010093
6	0,0007865	0,0006606
Total	1	1

trarão na classe de entrada (Classe 2) e a probabilidade de uma apólice se encontrar nas classes agravadas é muito baixa. O prêmio médio, em condições de estacionaridade e não estacionaridade é, respectivamente, 91,05% e 92,33%, do prêmio definido *a priori*.

Analisando a Figura 3.14, verifica-se que o prêmio médio vai diminuindo ao longo dos anos, estabilizando ao fim dos 15<sup>o</sup> ano, não atingindo, no entanto, a estacionaridade ao longo desses 20 anos.

Figura 3.14: Evolução do  $PM$  no Modelo Aberto: S.Alternativo

Comparando a distribuição limite obtida entre os dois modelos estudados, verifica-se que, enquanto que o modelo fechado estima que existirá uma grande aglomeração de apólices na classe bonificada do sistema, no modelo aberto existirá uma grande aglomeração de apólices na classe de entrada do sistema, tal como acontece actualmente na carteira da Garantia, S.A. Isto justifica-se porque o modelo aberto considera as entradas e saídas de apólices no sistema. Em ambos os modelos estima-se que a maior parte dos segurados se encontrarão nas classes não agravadas do sistema.

### 3.3.6 Escalas Óptimas de Prémios

A Tabela 3.32 contém as escalas de Norberg (1976) e Borgan et al. (1981), bem como algumas medidas, associadas a cada uma das escalas.

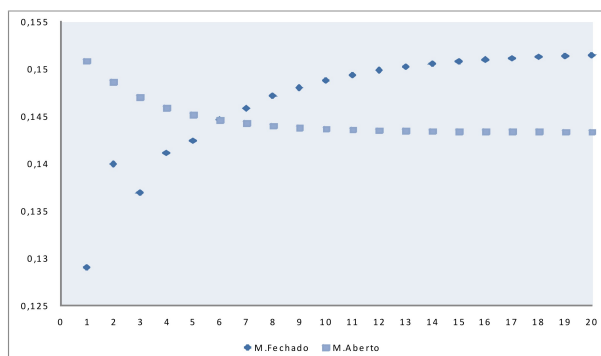
Tabela 3.32: Escala de Norberg (1976), de Borgan et al. (1981), PM, EQM e Medida de Eficiência: S. Alternativo

Classe	Escala de Norberg		Escala de Borgan et al	
	M. Fechado	M. Aberto	M. Fechado	M. Aberto
1	0,082147	0,103488	0,088038	0,109491
2	0,246089	0,158765	0,264092	0,153971
3	0,396151	0,288241	0,403133	0,271511
4	0,533096	0,417534	0,539450	0,394398
5	0,658199	0,578049	0,659828	0,559420
6	0,761240	0,779872	0,766862	0,581111
<i>PM</i>	0,145054	0,145157	0,145054	0,145054
$e(\Delta)$	0,046183	0,022734	0,042226	0,022156
<i>EQM</i>	0,028420	0,039989	0,021522	0,041592

Analisando a escala de Norberg (1976) obtida, verifica-se que na classe bonificada (Classe 1) e na classe mais agravada (Classe 6) o prémio no modelo fechado é inferior ao aberto, enquanto que nas outras classes (da Classe 2 à Classe 5) o prémio no modelo aberto é inferior. Isto deve-se ao facto de o modelo fechado não considerar as probabilidades de saída dos segurados e, como tal, prevê uma maior aglomeração de segurados nas classes mais baixas do que as estimativas obtidas sob a perspectiva de uma carteira aberta.

Para a obtenção da escala de Borgan et al. (1981), considerou-se um conjunto de 20 ponderadores, definido tal como o sistema actual. Analisando a escala de Borgan et al. (1981), verifica-se que a escala obtida através do modelo fechado é superior à obtida através do modelo aberto, à excepção da Classe 1. O prémio médio em condições de estacionaridade, para os modelos fechado e aberto é 0,151815111 e 0,143342626, respectivamente.

Figura 3.15: Evolução do Prémio Médio (Escala de Borgan et al. (1981)): Sistema Alternativo

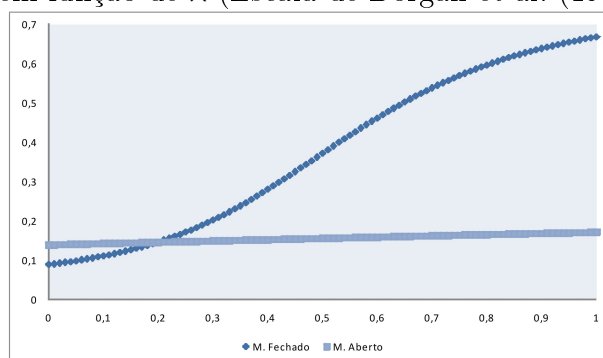


A Figura 3.15 ilustra a evolução do prêmio médio de um novo segurado ao longo de 20 anos, usando a escala de Borgan et al. (1981), para os modelos aberto e fechado.

Analisando a Figura 3.15 verifica-se que, nos primeiros 6 anos, o prêmio médio no modelo fechado é significativamente inferior ao modelo aberto, sendo que nos restantes anos, o prêmio médio no modelo aberto é inferior ao modelo fechado. Enquanto que no modelo fechado o prêmio vai aumentando ao longo dos anos até atingir a estacionaridade, no modelo aberto o prêmio vai diminuindo até atingir a estacionaridade. Em qualquer um desses modelos, o prêmio médio no final dos 20 anos estará próximo do prêmio em condições de estacionaridade.

A Figura 3.16 ilustra a evolução do prêmio médio em condições de não estacionaridade, em função de  $\lambda$ , para a escala de Borgan et al. (1981).

Figura 3.16:  $PM$  em função de  $\lambda$  (Escala de Borgan et al. (1981)): S. Alternativo



A Tabela 3.33 contém as escalas de Gilde e Sundt (1989) e Andrade e Silva (1991), com o prêmio médio, o erro quadrático médio e a medida de eficiência, associado a cada uma das escalas.

Tabela 3.33: Escala de Gilde e Sundt (1989), de Andrade e Silva (1991),  $PM$ ,  $EQM$  e Medida de Eficiência: S. Alternativo

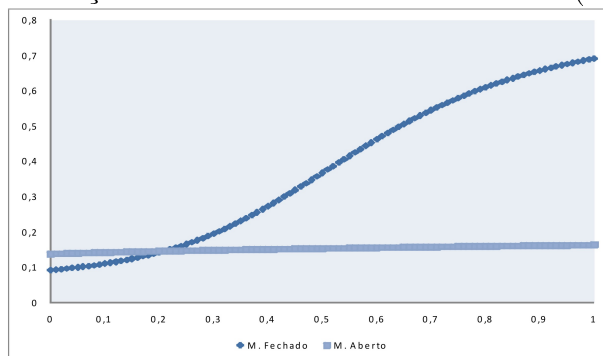
Classe	Escala de Gilde & Sundt		Escala de Andrade e Silva	
	M. Fechado	M. Aberto	M. Fechado	M. Aberto
1	0,090925	0,099748	0,113847	0,106437
2	0,235344	0,159599	0,171787	0,156155
3	0,379764	0,219449	0,259214	0,229097
4	0,524183	0,279300	0,391136	0,336111
5	0,668602	0,339151	0,590195	0,493111
6	0,813022	0,399002	0,890561	0,723448
$PM$	0,145054	0,145054	0,152033	0,145099
$e(\Delta)$	1,006375	1,004801	1,130712	1,001402
$EQM$	0,021659	0,041792	0,024335	0,041650

Analisando a escala linear obtida pelo modelo de Gilde e Sundt (1989), verifica-se que a escala de prêmios no modelo fechado é significativamente superior ao modelo aberto, à exceção da Classe 1. O prêmio médio nos dois modelos são muito semelhantes. Analisando a medida da eficiência verifica-se que há uma perda de eficiência ao adoptar a escala linear para ambos os modelos.

Analisando a escala geométrica obtida através do modelo de Andrade e Silva (1991), verifica-se que a escala de prêmios no modelo fechado é superior à escala no modelo aberto em todas as classes. Analisando o prêmio médio em condições de não estacionaridade, obtida com esta escala, verifica-se que o prêmio no modelo fechado é superior ao modelo aberto. Há uma perda de eficiência ao adoptar a escala geométrica para ambos os modelos.

A Figura 3.17 ilustra a evolução do prêmio médio em condições de não estacionaridade, em função de  $\lambda$ , com a escala de Gilde e Sundt (1989).

Figura 3.17:  $PM$  em função de  $\lambda$  - Escala de Gilde e Sundt (1989): S. Alternativo



### 3.3.7 Medidas de Avaliação

#### O Nível Médio Relativo de Estacionaridade

Tabela 3.34: Nível Médio Relativo de Estacionaridade: Sistema Alternativo

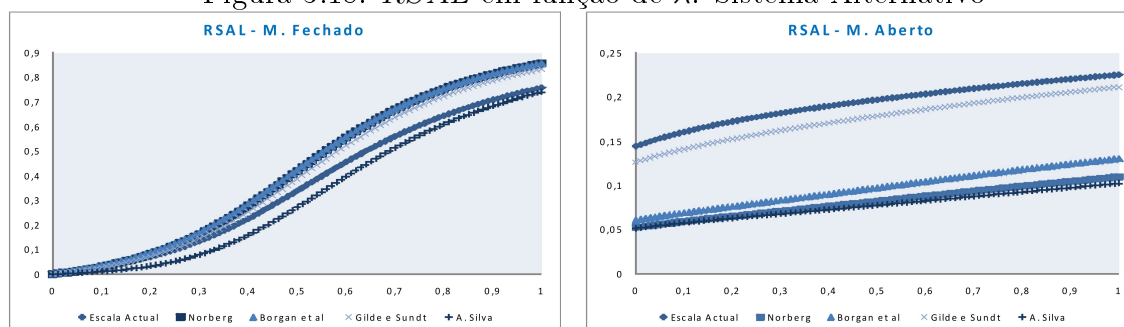
$RSAL$	Modelo Fechado	Modelo Aberto
Escala Alternativa	0,0778775	0,1619160
Norberg	0,0926331	0,0614522
Borgan et al	0,0839921	0,0754054
Gilde & Sundt	0,0749606	0,151395
A.Silva	0,0491685	0,0626312

Analisando a Tabela 3.34, que contém o nível médio relativo de estacionaridade, verifica-se que para qualquer uma das escalas, e para qualquer um dos modelos, o nível

médio relativo de estacionaridade é muito baixo, o que indica existir uma grande aglomeração de apólices nas classes mais baixas do sistema em condições de estacionaridade.

A Figura 3.18 ilustra a evolução do *RSAL* em função de  $\lambda$ . Analisando, verifica-se que a evolução do *RSAL* entre os dois modelos é muito diferente. Nos dois modelos, o *RSAL* aumenta com a frequência de sinistralidade obtendo-se, no entanto, valores bastante inferiores no modelo aberto, para valores mais elevados da frequência de sinistralidade. Isto deve-se, novamente, às elevadas taxas de anulação nas classes mais elevadas.

Figura 3.18: *RSAL* em função de  $\lambda$ : Sistema Alternativo



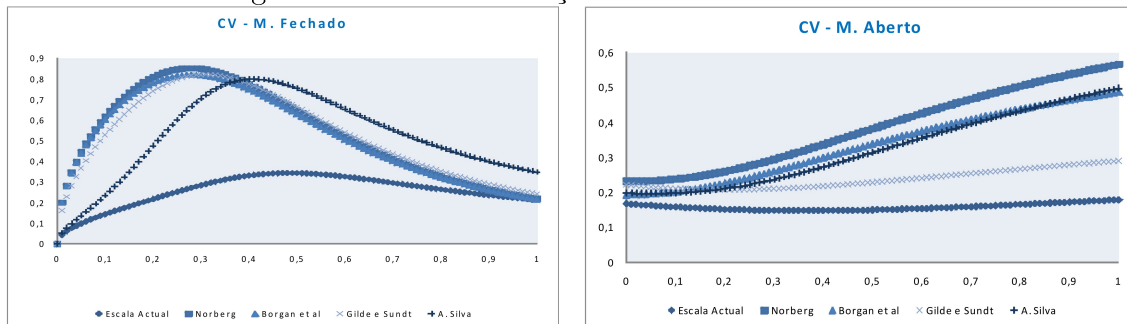
### Coefficiente de Variação

Na Tabela 3.35 pode ser consultado o Coeficiente de Variação dos prémios para os modelos fechado e aberto.

Tabela 3.35: Coeficiente de Variação: Sistema Alternativo

<i>CV</i>	Modelo Fechado	Modelo Aberto
Escala Alternativa	0,326084	0,161509
Norberg	1,09313	0,283664
Borgan et al	1,00343	0,230232
Gilde&Sundt	1,00018	0,20860
A.Silva	0,839716	0,223227

Analisando a Tabela 3.35 e a Figura 3.19 verifica-se que, para qualquer uma das escalas, existe maior variabilidade do prémio no modelo fechado, para valores mais baixos da frequência de sinistralidade.

Figura 3.19: CV em função de  $\lambda$ : Sistema Alternativo

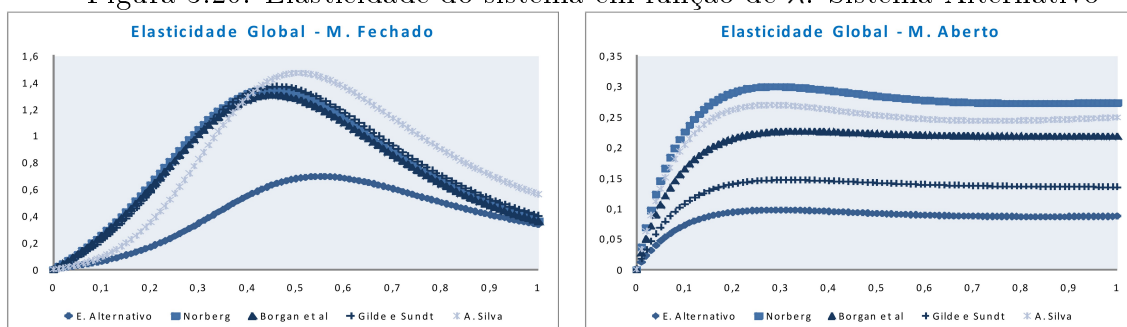
### A Elasticidade Global do Sistema

A Tabela 3.36 contém a Elasticidade Global do sistema para os modelos aberto e fechado.

Tabela 3.36: A Elasticidade Global: Sistema Alternativo

$\eta$	Modelo Fechado	Modelo Aberto
Escala Alternativa	0,126145	0,0511696
Norberg	0,333726	0,159845
Borgan et al	0,323491	0,11915
Gilge e Sundt	0,318705	0,0774873
A. Silva	0,261606	0,144198

Analisando os valores da elasticidade global do sistema, verifica-se que para qualquer uma das escalas, a elasticidade global obtida no modelo fechado é superior à obtida no modelo aberto.

Figura 3.20: Elasticidade do sistema em função de  $\lambda$ : Sistema Alternativo

Analisando a Figura 3.20 verifica-se que, para determinados níveis de frequência de sinistralidade, a elasticidade do sistema no modelo fechado, para as escalas ótimas, atinge valores superior a 1, ou seja, para essas frequências de sinistralidade, usando as

escalas obtidas, obter-se-ia que o aumento relativo do prémio seria superior ao aumento relativo da frequência de sinistralidade.

### A Elasticidade Transiente

Nas Tabelas 3.37 e 3.38 podem ser consultadas a elasticidade transiente para os modelos fechado e aberto, respectivamente..

Tabela 3.37: A Elasticidade Transiente (Modelo Fechado): Sistema Alternativo

$j$	E. Alternativa	Norberg	Borgan et al	Gilde e Sundt	Andrade e Silva
1	0,115689	0,315519	0,242437403	0,300213669	0,305703896
2	0,116636	0,31072	0,244488265	0,297381619	0,300864131
3	0,117446	0,300343	0,245882011	0,289921393	0,291369763
4	0,117597	0,28522	0,24381873	0,277586659	0,277367997
5	0,116633	0,266314	0,235018002	0,260627174	0,259778575
6	0,1121	0,244656	0,216112646	0,239351861	0,239217963

Analisando a Tabela 3.37, verifica-se que a escala alternativa proposta por Osório (2006) apresenta valores para a elasticidade transiente inferiores às outras escalas para todas as classes, enquanto que, a escala de Norberg (1976) apresenta valores superiores em relação às outras escalas, para todas as classes.

Tabela 3.38: A Elasticidade Transiente (Modelo Aberto): Sistema Alternativo:

$j$	E. Alternativa	Norberg	Borgan et al	Gilde& Sundt	Andrade e Silva
1	-0,0451058	-0,0022256	-0,0151046	-0,0235553	-0,0169217
2	-0,0019380	0,0077510	0,0054989	0,0020681	0,0045978
3	0,0448157	0,0878674	0,0822520	0,0603011	0,0856779
4	0,0261759	0,0588800	0,0519581	0,0363904	0,0628166
5	0,0018351	0,0213778	0,0108587	0,0043913	0,0268656
6	-0,0015047	0,0000768	-0,0019832	-0,0020243	0,0007859

Analisando a Tabela 3.38 verifica-se que a escala alternativa é a que apresenta valores para a elasticidade transiente inferiores às outras escalas, enquanto que, da Classe 1 à Classe 3, a escala de Norberg (1976) é a que apresenta valores superiores, e nas restantes classes (da Classe 4 à Classe 6) a escala geométrica é a que apresenta valores para a elasticidade transiente superiores em relação às outras escalas. Nota-se que, algumas classes apresentam a elasticidade transiente negativa. Isto indicia que um aumento na frequência de sinistralidade não se traduz num aumento do valor actual dos pagamentos futuros, devido ao facto de os segurados poderem abandonar a carteira.

Comparando as elasticidades obtidas entre os dois modelos, verifica-se novamente que o modelo fechado estima valores superiores para a elasticidade transiente, uma vez que não tem em consideração as probabilidades de anulação por classe, o que nalgumas classes, ver Tabela 3.30, são bastantes elevadas.

### 3.3.8 Comentários às Escalas Óptimas

Tal como na Secção 3.2.6, pretende-se analisar e comparar as escalas óptimas dentro de cada um dos modelos.

#### Modelo Fechado

Analisando as escalas de Norberg (1976) e Borgan et al. (1981) (Tabela 3.32), verifica-se que os prémios entre os dois modelos são bastantes semelhantes. A escala de Gilde e Sundt (1989) (Tabela 3.33) não difere muito dessas duas escalas. Nas classes intermédias (da Classe 2 à Classe 5), a escala de Andrade e Silva (1991) (Tabela 3.33) apresenta prémios inferiores em relação às outras escalas e, na classe mais agravada, é a mais penalizante.

Em termos de medidas de eficiência, a escala de Norberg (1976) revela-se a mais eficiente, no entanto, a diferença em relação às outras escalas não é significativa. Há uma perda de eficiência ao adoptar a escala linear ou geométrica, sendo que essa perda é mais significativa na escala geométrica.

Tabela 3.39: Escalas Óptimas em Percentagem (M. Fechado): Sistema Alternativo

j	Norberg	Borgan et al	Gilde & Sundt	Andrade e Silva
1	33,38%	33,34%	38,63%	66,27%
2	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	160,98%	152,65%	161,37%	150,89%
4	216,63%	204,27%	222,73%	227,69%
5	267,46%	249,85%	284,10%	343,56%
6	309,34%	290,38%	345,46%	518,41%

No que se refere às medidas de avaliação propostas por Lemaire (1995), a escala de Borgan et al. (1981) é a que apresenta um *RSAL* e *CV* mais elevado. A escala de Norberg (1976) traduzir-se-á o sistema mais elástico.

#### Modelo Aberto

Analisando as escalas óptimas obtidas usando o modelo aberto, verifica-se que o prémio médio na escala de Norberg (1976) é ligeiramente superior às outras escalas e os prémios médios obtidos nas outras escalas são bastantes semelhantes.

Relativamente ao *EQM*, verifica-se que todas as escalas apresentam um *EQM* semelhante. A eficiência nas escalas de Norberg (1976) e a Borgan et al. (1981) apresentam um valor semelhante. Há uma perda de eficiência ao adoptar a escala linear ou geométrica, no entanto essa perda não é significativa, e será preferível a utilizar uma escala cujos agravamentos não evoluem de acordo com o risco que o segurado representa para a seguradora.

Em relação à medida de avaliação, verifica-se que a escala linear é a que apresenta um *RSAL* superior em relação às outras escalas, enquanto que a escala de Borgan et al. (1981) é a que apresenta um coeficiente de variação superior e é a escala que torna o sistema mais elástico.

A Tabela 3.40 contém as escalas óptimas de prémios em percentagem do prémio de entrada, considerando o montante associado a cada sinistro unitário.

Tabela 3.40: Escalas Óptimas em Percentagem (Modelo Aberto): Sistema Alternativo

j	Norberg	Borgan et al	Gilde & Sundt	Andrade e Silva
1	65,16%	71,10%	62,98%	68,35%
2	100%	100%	100%	100%
3	181,63%	176,38%	137,02%	146,31%
4	263,08%	256,18%	174,04%	214,05%
5	362,60%	362,95%	211,06%	313,17%
6	356,18%	341,66%	248,07%	458,19%

Analisando a Tabela 3.40, verifica-se que para qualquer uma das escalas, o prémio a aplicar à Classe 1 não difere significativamente entre elas. A escala de Gilde e Sundt (1989) é a escala mais aconselhável em comparação com as restantes escalas, porque nas escalas de Norberg (1976) e Borgan et al. (1981) o prémio a aplicar não aumenta com o aumento da frequência de sinistralidade, e a escala de Andrade e Silva (1991) apresenta prémios bastante elevados, o que sugere ser pouco viável do ponto de um posto de vista comercial.

### 3.4 Comparação dos Dois Sistemas de *Bonus Malus*

Nesta secção serão feitas análises comparativas entre os dois sistemas estudados anteriormente. Para tal, serão utilizadas as medidas de avaliação propostas por Lemaire (1995). Com base nos resultados já obtidos serão apresentadas as respectivas conclusões.

As comparações serão feitas separadamente para os modelos fechado e aberto.

### 3.4.1 Sob a Perspectiva da Carteira Fechada

A Tabela 3.41 contém os prémios médios para cada uma das escalas referenciadas nas secções anteriores.

Notamos que a escala Actual/Alternativa se refere aos descontos/agravamentos a aplicar ao prémio *a priori* utilizada pela Seguradora Garantia representando, portanto, a percentagem do prémio *a priori* que o segurado deverá pagar, enquanto que as escalas óptimas propostas pelos diversos autores, se referem ao valor estimado para a frequência de sinistralidade de cada classe, considerando o custo médio de um sinistro como a unidade monetária. Assim, em termos de Prémio Médio, as escalas actual e óptimas não são directamente comparáveis.

Tabela 3.41: Resumo do *PM*: Modelo Fechado

Escalas	Prémio Médio	
	Sistema Actual	Sistema Alternativo
Actual / Alternativa	79,73731028	80,1241
Norberg	0,145053651	0,145054
Borgan et all	0,145053651	0,145053651
Gilde e Sundt	0,145053651	0,145053651
A. Silva	0,14519281	0,152033486

O prémio médio é bastante semelhante para os dois sistemas analisados, sendo que no sistema alternativo é ligeiramente superior, para todas as escalas estudadas. No sistema actual, o prémio médio estabiliza no 2º ano, o mesmo não acontece com o sistema alternativo, estabilizando no 15º ano.

A Tabela 3.42 contém um resumo do *RSAL* obtido através do modelo fechado, para os dois sistemas de *bonus malus* estudados, determinado nas secções anteriores.

Tabela 3.42: Resumo do *RSAL*: Modelo Fechado

Escalas	RSAL	
	Sistema Actual	Sistema Alternativo
Actual / Alternativa	0,0749024	0,0778775
Norberg	0,0793129	0,0926331
Borgan et al	0,0803712	0,0939526
Gilde & Sundt	0,0888959	0,085050
A. Silva	0,0352905	0,0593823

Comparando os *RSAL* obtidos nos dois sistemas, esta medida indica que usando as escalas óptimas, à excepção da escala de Gilde e Sundt (1989), as apólices encontrar-se-iam melhor distribuídas no sistema alternativo.

A Tabela 3.43 contém um resumo do *CV* obtido através do modelo fechado, para os dois sistemas de *bonus malus* estudados, determinado nas secções anteriores.

Tabela 3.43: Resumo do *CV*: Modelo Fechado

Escalas	Coeficiente de Variação	
	Sistema Actual	Sistema Alternativo
Actual/ Alternativa	0,247812	0,326084
Norberg	0,824049	1,093130
Borgan et al	0,787987	1,000343
Gilde & Sundt	0,718852	1,000180
A. Silva	0,674681	0,839716

Comparando os coeficientes de variação obtidos para os dois sistemas, verifica-se que o sistema alternativo apresenta um *CV* superior ao sistema actual, ou seja, existe maior variabilidade do prémio no sistema alternativo.

A Tabela 3.44 contém um resumo da Elasticidade Global obtido através do modelo fechado, para os dois sistemas de *bonus malus* estudados, determinado nas secções anteriores.

Tabela 3.44: Resumo da Elasticidade Global: Modelo Fechado

Escalas	Elasticidade Global	
	Sistema Actual	Sistema Alternativo
Actual / Alternativa	0,084154	0,126145
Norberg	0,247268	0,333726
Borgan et al	0,249358	0,323491
Gilde & Sundt	0,268346	0,318705
A. Silva	0,225005	0,261606

Analisando a Tabela 3.44 verifica-se que o sistema alternativo é mais elástico que o sistema actual, portanto, responderá melhor a alterações de sinistralidade. Esta era uma situação expectável uma vez que as regras de transição actuais permitem que o aumento da sinistralidade se traduza numa diminuição do prémio. O facto de se corrigir esta situação traduzir-se-á, naturalmente, num sistema mais elástico.

### 3.4.2 Sob a Perspectiva da Carteira Aberta

A Tabela 3.45 contém um resumo do *PM* obtido através do modelo aberto, para os dois sistemas de *bonus malus* estudados, determinado nas secções anteriores.

Analisando as escalas óptimas de prémios obtidas nos dois sistemas, verifica-se que nas classes não agravadas, o sistema alternativo apresenta prémios mais elevados,

Tabela 3.45: Resumo do *PM*: Modelo Aberto

Escalas	Prémio Médio	
	Sistema Actual	Sistema Alternativo
Actual / Alternativa	92,020641	91,049100
Norberg	0,145064	0,145157
Borgan et al	0,145054	0,145054
Gilde e Sundt	0,141717	0,145054
A. Silva	0,145193	0,145099

enquanto que, nas classes agravadas do sistema, o sistema actual é mais severo. No entanto, verifica-se que os prémios médios obtidos nos dois sistemas são bastantes semelhantes.

A Tabela 3.46 contém um resumo do *RSAL* obtido através do modelo aberto, para os dois sistemas de *bonus malus* estudados, obtidas nas secções anteriores.

Tabela 3.46: Resumo do *RSAL*: Modelo Aberto

Escalas	RSAL	
	Sistema Actual	Sistema Alternativo
Actual / Alternativo	0,169390	0,161916
Norberg	0,086684	0,061452
Borgan et al	0,778604	0,754054
Gilde & Sundt	0,162355	0,151395
A. Silva	0,057479	0,062631

Analisando os *RSAL* dos dois sistemas, verifica-se que usando as escalas actual e alternativa, o *RSAL* dos dois modelos é semelhante, isto justifica-se pelo facto de, os descontos e agravamentos aplicados nos dois modelos ser o mesmo, o que os diferencia são as regras de transição. Usando as outras escalas, verifica-se que o *RSAL* no sistema actual é superior no sistema alternativo, excepto quando se considera a escala de Andrade e Silva (1991), o que se justifica pelo facto de no sistema actual as escalas óptimas apresentarem um prémio superior na classe mais agravada.

A Tabela 3.47 contém um resumo do coeficiente de variação obtido através do modelo aberto, para os dois sistemas de *bonus malus* estudados, obtidas nas secções anteriores.

Analisando o coeficiente de variação dos prémios obtido nos dois sistemas, verifica-se que para a escala actual e a escala alternativa, a variação dos prémios é bastante semelhante, enquanto que para as escalas óptimas, o prémio médio no sistema actual é ligeiramente mais variável que o sistema alternativo.

Tabela 3.47: Resumo do *CV*: Modelo Aberto

Escalas	Coeficiente de Variação	
	Sistema Actual	Sistema Alternativo
Actual Alternativo	0,165246	0,161509
Norberg	0,360181	0,283664
Borgan et al	0,304660	0,230232
Gilde & Sundt	0,264023	0,208600
A. Silva	0,282683	0,223227

A Tabela 3.48 contém um resumo da elasticidade global dos sistemas obtido através do modelo aberto, determinado nas secções anteriores.

Tabela 3.48: Resumo da Elasticidade Global: Modelo Aberto

Escalas	Elasticidade do Sistema	
	Sistema Actual	Sistema Alternativo
Actual Alternativo	0,043469	0,051170
Norberg	0,106372	0,159845
Borgan et al	0,090865	0,119150
Gilde & Sundt	0,081911	0,077487
A. Silva	0,150244	0,144198

Analisando as elasticidades dos sistemas, verifica-se que o sistema alternativo é mais elástico, excepto quando se consideram as escalas de Gilde e Sundt (1989) e Andrade e Silva (1991). Esta era uma situação expectável, dado que no sistema actual o aumento da sinistralidade traduz-se numa diminuição do prémio.

Relativamente aos dois sistemas de *bonus malus* estudados, o que os diferencia são as regras de transição entre as classes de *bonus*. Como já foi referido anteriormente, as actuais regras apresentam incoerências, e neste sentido, o sistema alternativo resolve alguns dos problemas do actual sistema, dado que é um sistema mais eficiente e equilibrado.



# Conclusão

O objectivo do presente estudo foi avaliar o sistema de *bonus malus* (*SBM*) da seguradora cabo-verdiana Garantia, Companhia de Seguros de Cabo Verde S.A., quer sob a perspectiva de uma carteira fechada, utilizando a metodologia clássica, quer sob a perspectiva de uma carteira aberta, recorrendo ao Modelo dos Vórtices Estocásticos (Guerreiro (2001), Guerreiro (2008) ou Guerreiro e Mexia (2008), por exemplo). Nesta última perspectiva admite-se que há entradas e saídas dos segurados da carteira da seguradora, tornando-se assim mais realista.

Estimaram-se, sob ambas as perspectivas, as distribuições limites associadas ao *SBM* da Garantia, bem como as Escalas Óptimas de Prémios propostas por alguns autores (Norberg (1976), Borgan et al. (1981), Gilde e Sundt (1989), Andrade e Silva (1991)). Avaliou-se o sistema utilizando as medidas de Lemaire (1995) (nível médio relativo de estacionaridade, coeficiente de variação dos prémios, elasticidade do prémio médio e elasticidade transiente).

Uma vez que o *SBM* em vigor na Garantia não é um sistema eficiente avaliou-se também de forma comparativa uma alteração ao *SBM* proposta por Osório (2006).

Da análise efectuada aos sistemas de *bonus malus* estudados, usando os dados da Garantia, a principal conclusão é que as regras de transição entre as classes de bonus do sistema actual são contraditórias. Estas regras não reflectem um sistema de bonus malus justo e fomentam a declaração de sinistros de modo a reduzir o agravamento do prémio. Como já foi referido, para um segurado que se encontre na classe com 100% de agravamento revela-se ser mais vantajoso participar um sinistro na anuidade seguinte do que não participar nenhum. Sob o ponto de vista da Seguradora, isto implica o pagamento de mais uma indemnização, bem como a redução do prémio ao segurado na anuidade seguinte. Para resolver estes problemas, o sistema de bonus malus alternativo apresentado por Osório (2006) poderia ser uma boa alternativa no futuro, visto que em termos de transição entre esses dois sistemas não causaria grandes transtornos, dado que os descontos e agravamentos continuariam a ser os mesmos, mudando apenas as regras de transição entre as classes, e contribuiria para um sistema de *bonus malus* mais justo e eficiente do ponto de vista da seguradora. Espera-se que este trabalho possa contribuir para a alteração da legislação, nomeadamente o Decreto-Lei nº 17/2003, que estabelece o actual *SBM*, por forma a definir um *SBM* mais equilibrado.

Alguns aspectos não foram analisados no decorrer deste trabalho, podendo ser estudados em trabalhos futuros, nomeadamente, o cálculo do nível de retenção óptimo induzido pela sede de bónus, uma vez que o sistema actual induz em muito este fenó-

meno e a realização de mais testes estatísticos no modelo dos vórtices estocásticos. Note-se que, para a boa aplicação de alguns destes testes seria necessária a obtenção de informação com um maior horizonte temporal e mais detalhada, por parte da seguradora, relativamente aos movimentos de carteira. A ausência desta informação impossibilitou a análise com mais rigor estas questões. Na eventualidade de obtenção de dados e, sob a hipótese de verificação das condições necessárias, ver Guerreiro et al. (2010), ressalta-se que é possível obter intervalos de confiança para a distribuição limite do modelo aberto, o que se traduziria em intervalos de confiança para as escalas óptimas de prémios, o que por sua vez transmite alguma informação estatística aquando da fixação da escala comercial a adoptar.

# Bibliografia

- Andrade e Silva, J. (1991). *Estruturas Tarifárias nos Ramos Reais da Indústria Seguradora - Uma aplicação ao sector automóvel em Portugal*. Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa.
- Borgan, O., Hoem, J., e Norberg, R. (1981). A non asymptotic criterion for the evaluation of automobile bonus malus. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 165–178.
- Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., e Nesbitt, J. (1986). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries.
- Centeno, L. e A.Silva, J. (2002). Optimal bonus scales under path-dependent bonus rules. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2:129–136.
- Centeno, M. (2003). *Teoria de Risco na Actividade seguradora*. Celta Editora.
- Feller, W. (1966). *An Introduction to Probability Theory and its applications*, 2<sup>nd</sup> Edition. John Wiley and Sons, Inc.
- Gilde, V. e Sundt, B. (1989). On bonus systems with credibility scales. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2:13–22.
- Grandell, J. (1997). *Mixed Poisson Processes*. Chapman & Hall.
- Guerreiro, G. (2001). *Uma Abordagem Alternativa para Bonus Malus*. Tese de mestrado, Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa.
- Guerreiro, G. (2008). *Populações Sujeitas a Reclassificações Periódicas*. Tese de doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.
- Guerreiro, G. e Mexia, J. (2004). An alternative approach to bonus malus. *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics*, 24(2):197–213.
- Guerreiro, G. e Mexia, J. (2008). Stochastic vortices in periodically reclassified populations. *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics*, 28(2):209–227.

- 
- Guerreiro, G., Mexia, J., e Miguens, M. (2010). A model for open populations subject to periodical re-classifications. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 4(2):303–321.
- Lemaire, J. (1995). *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Kluwer Academic Publishers.
- Loimaranta, K. (1972). Some asymptotic properties of bonus malus. *Astin Bulletin*, 6:233–245.
- Mexia, J. (2000). *Vórtices Estocásticos de Parâmetro Discreto*. PhD thesis, Comunicação nos III Colóquios Actuariais FCT-UNL.
- Norberg, R. (1976). A credibility theory for automobile bonus malus. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 92–107.
- Osório, V. (2006). *O Seguro Obrigatório de Responsabilidade Civil Automóvel*. Instituto da Biblioteca e do Livro.