ISSN 0871-2573

Um Modelo de Crescimento Económico com Externalidades na Utilização de Capital Humano*

Por
Ana Balcão Reis
Janeiro de 1993
Working Paper nº 197

How should a monopolist price a new durable good or technology which is subject to network externalities? In particular, should the monopolist set a low introductory price to attract a "critical mass" of adopters? In this paper, by means of a series of stylized models, we provide intuition as to when and why introductory pricing might occur in the presence of network externalities. Incomplete information about demand, asymmetric information about costs or difficulties in coordination are necessary in order for introductory pricing to occur at a subgame perfect equilibrium.

* Esta é uma versão revista do trabalho final realizado no âmbito do curso de Optimização e Análise Económica II do Programa de Doutoramento e Mestrado em teoria Económica da FEUNL. Agradeço ao Prof. José Dias Coelho pelo incentivo que me deu para a sua publicação. Naturalmente, eventuais erros são da minha responsabilidade.

1.Introdução

No seu artigo de 1988 " On The Mechanics of Economic Development" Lucas defende a importância fundamental do capital humano para o crescimento económico. No principal modelo do artigo, que pode ser entendido como um desenvolvimento do modelo de Solow (1956), Lucas assume uma lei de acumulação do capital humano que "tem a propriedade crucial de um nível de esforço constante permitir uma taxa de crescimento constante do stock de capital humano, independentemente do nível já atingido"[1]. Obtém assim o resultado de que é possível ter crescimento sustentado apenas com a acumulação endógena de capital humano, ao contrário do que acontecia no modelo de Solow onde só havia crescimento sustentado se houvesse, exogenamente, crescimento tecnológico sustentado.

O capital humano no modelo de Lucas tem um efeito interno e um efeito externo, ou seja, o nível de capital humano existente na economia melhora a produtividade de todos os factores de uma forma que não é, na sua totalidade, apropriável individualmente.

Neste trabalho pretendo partir do modelo de Lucas para estudar as implicações da percepção existente de que níveis mais elevados de instrução, aqui traduzida por capital humano, implicam menores externalidades que níveis mais baixos. No limite, o facto de um anafabeto decidir fazer a escola primária tem um efeito externo para a sociedade superior ao efeito externo provocado por um licenciado decidir fazer um mestrado.

2. Modelo

Vou construir um modelo, cujas hipóteses básicas são as de Lucas(1988); supõe-se uma economia fechada, com mercados competitivos, agentes idênticos e racionais, onde se produz apenas um bem que é utilizado para consumo e investimento.

$$(1)\quad Y(t) = L(t)\, c(t) + I(t)$$

onde L(t) é a população em t, c(t) é o consumo per capita em t, I(t) é o investimento em t e Y(t) é o nível de produção no período t, que é função das quantidades utilizadas dos factores de produção capital físico e trabalho. Tal como no modelo de Lucas (1988) a função de produção é descrita por

$$Y(t) = A\ K(t)^{(1-\theta)}(L^*(t))^{\theta} \cdot \text{externalidade}$$

onde A mede a tecnologia que se considera constante, K(t) é o stock de capital físico existente em t e L^* é o factor trabalho que é medido em termos do conteúdo de capital humano, tal como se descreve em seguida.

Não se distingue população de população activa, sendo L(t) o número de trabalhadores existentes no período t e a taxa de crescimento da população, n, é exógena. Define-se h como o nível de capital humano que pode tomar qualquer valor em $\Re^+$. L(h) é o número de trabalhadores com nível de capital humano igual a h. Assim

[1] Lucas(1988) pag39

$L = \int L(h)\, dh$

Cada trabalhador escolhe quanto tempo, u, dedicar à actividade produtiva, e quanto tempo, 1-u, dedicar à acumulação de capital humano, normalizando o tempo total. L^* vai depender dos valores de u e h de cada trabalhador.

A externalidade pretende capturar o efeito que o nível de capital humano existente na economia tem na produtividade de todos os factores. No modelo de Lucas(1988) a externalidade é medida por $(h_a)^\gamma$, onde h_a é o nível médio de capital humano na economia, mas, querendo analisar o efeito de níveis de capital humano mais baixos implicarem uma maior externalidade que níveis de capital humano mais elevados, esta formulação do efeito externo não é adequada. A utilização do valor médio do capital humano implica que a externalidade provocada pela variação no capital humano de um trabalhador é independente do nível inicial de capital humano desse trabalhador.

Também a hipótese de que todos os trabalhadores são iguais não pode ser aqui utilizada. Para estudar o efeito pretendido tem que se considerar a existência de, pelo menos, dois níveis de capital humano. Suponha-se, então, que em cada período, uma percentagem, l_1, dos trabalhadores tem nível de capital humano h_1, enquanto os restantes, l_2, têm nível de capital humano h_2, com $h_1 < h_2$. Considera-se que l_1 e l_2 são dados e, claro, $l_1 + l_2 = 1$. A própria dinâmica do modelo pode levar, como se verá, a que h_1 e h_2 tendam a igualar-se. No momento em que $h_1 = h_2$ deixa de fazer sentido distinguir os dois grupos de trabalhadores.

A externalidade é dada por $(l_1h_1)^{\gamma_1}(l_2h_2)^{\gamma_2}$, com $\gamma_1 > \gamma_2$ e L^* vai dividir-se em dois factores consoante o nível de capital humano:

(2) $Y = A\, K^{(1-\theta_1-\theta_2)}(u_1l_1Lh_1)^{\theta_1}(u_2l_2Lh_2)^{\theta_2}(l_1h_1)^{\gamma_1}(l_2h_2)^{\gamma_2}$ [2]

Supondo que a taxa de amortização do capital físico é nula, ou equivalentemente, que Y é a produção líquida, $I(t) = \dot{K}(t)$ [3] e de (1) e (2):

(3) $\dot{K}(t) = A\, K^{(1-\theta_1-\theta_2)}(u_1l_1h_1)^{\theta_1}(u_2l_2h_2)^{\theta_2}L^{\theta_1+\theta_2}(l_1h_1)^{\gamma_1}(l_2h_2)^{\gamma_2} - Lc$

A acumulação de capital humano é, tal como em Lucas(1988), linear no tempo dedicado a esta actividade e no stock existente, sendo esta a hipótese que faz com que um nível de esforço constante, u, permita uma taxa de crescimento constante do stock de capital humano:

(4) $\dot{h}_1 = h_1(t)\, \delta\, (1 - u_1(t))$

(5) $\dot{h}_2 = h_2(t)\, \delta\, (1 - u_2(t))$

É natural que δ não seja igual para h_1 e h_2, mas como o que se pretende é apenas estudar os efeitos de diferentes externalidades, utiliza-se esta formulação mais simples.

---

2 Sempre que seja possível omite-se o parâmetro t por simplicidade.

3 $\dot{x}$ indica a derivada da variável x no tempo.

As preferências são função do consumo per capita e são dadas por:

$$(6)\ U = \int e^{-\rho t}\frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma}-1\right] L(t)\, dt$$

onde ρ é a taxa de desconto intertemporal e σ é o coeficiente de aversão ao risco que , para estas preferências, é constante. O coeficiente de aversão ao risco é o inverso da elasticidade de substituição intertemporal, e num modelo sem incerteza como este, é mais correcto usar esta segunda interpretação do parâmetro

Assim o problema pode formalizar-se como:

$$\underset{c,\,u1,\,u2}{Max}\ U = \int e^{-\rho t}\frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma}-1\right] L(t)\, dt$$

s.a.

$$\dot{K}(t) = A\,K^{(1-\theta_1-\theta_2)}(u_1l_1h_1)^{\theta_1}(u_2l_2h_2)^{\theta_2}L^{\theta_1+\theta_2}(l_1h_1)^{\gamma_1}(l_2h_2)^{\gamma_2} - Lc$$

(I)[4]

$$\dot{h}_1(t) = h_1(t)\,\delta\,(1-u_1(t))$$

$$\dot{h}_2(t) = h_2(t)\,\delta\,(1-u_2(t))$$

$$K(0) = K_0$$

$$h_1(0) = h_{10}$$

$$h_2(0) = h_{20}$$

A solução do problema assim formalizado dar-me-á a trajectória óptima das variáveis de estado K, h_1 e h_2 e das variáveis de controlo c, u_1e u_2.

Devido à existência de externalidades, a trajectória óptima não vai coincidir com a trajectória de equilíbrio competitivo em que a economia se vai situar quando não houver intervenções exógenas. Para definir a trajectória de equilíbrio competitivo considera-se que cada agente toma $(l_1h_1)^{\gamma_1}(l_2h_2)^{\gamma_2}$ como um dado exógeno quando toma as suas decisões de consumo e afectação do tempo. Assim, a trajectória de equilíbrio competitivo é a solução de um problema de optimização idêntico ao anterior, mas onde $(l_1h_1)^{\gamma_1}(l_2h_2)^{\gamma_2}$ é considerado constante, quando h_1 e h_2 assim obtidos coincidem com os valores para h_1 e h_2 que foram tomados como dados em $(l_1h_1)^{\gamma_1}(l_2h_2)^{\gamma_2}$.

A função Hamiltoneana é dada por:

$$H(c,u_1,u_2,K,h_1,h_2,\lambda,v_1,v_2,t) = \frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma}-1\right]L(t) + \lambda\left[AK^{(1-\theta_1-\theta_2)}(u_1l_1h_1)^{\theta_1}(u_2l_2h_2)^{\theta_2}\right.$$
$$\left.L^{\theta_1+\theta_2}(l_1h_1)^{\gamma_1}(l_2h_2)^{\gamma_2}-Lc\right]+v_1\left[h_1\delta(1-u_1)\right]+v_2\left[h_2\delta(1-u_2)\right]$$

---

[4]Esta formalização do problema esquece as restrições de sinal:
$c\geq 0$; $K\geq 0$; $h_1\geq 0$; $h_2\geq 0$; $u_1\geq 0$; $u_2\geq 0$ e ainda $u_1\leq 1$ e $u_2\leq 1$
Supõe-se, implicitamente que estas restrições não são activas. A formulação geral do problema é apresentada em anexo.

onde λ é o preço sombra do stock de capital fisíco e v_1 e v_2 são, respectivamente, os preços sombra dos stocks de capital humano h_1 e h_2.

A função Hamiltoneana representa a contribuição total para a utilidade medida em termos correntes; é a soma da contribuição directa dada pela utilidade instantânea com a contribuição indirecta devida à influência das decisões correntes de consumo e afectação do tempo, na utilidade futura.

Segundo o Princípio do Óptimo de Pontryagin as condições necessárias para a solução óptima do problema (I) são as seguintes.

(i) $\underset{c,\,u1,\,u2}{\mathrm{Max}}\ H$

$$(7)\quad \frac{dH}{dc} = 0 \Leftrightarrow Lc^{-\sigma} - L\lambda = 0 \Leftrightarrow c^{-\sigma} = \lambda \Leftrightarrow \hat{\lambda} = -\sigma\,\hat{c}$$ [5]

$$(8)\quad \frac{dH}{du_1} = 0 \Leftrightarrow \lambda\ Pmg_{u1} - v_1\delta\ h_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda\ Pmg_{u1} = v_1\delta\ h_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda\theta_1 A\ K^{(1-\theta_1-\theta_2)}(u_1l_1h_1)^{\theta_1-1}(u_2l_2h_2)^{\theta_2}L^{\theta_1+\theta_2}(l_1h_1)^{\gamma_1+1}(l_2h_2)^{\gamma_2} = v_1\delta\ h_1$$

$$(9)\quad \frac{dH}{du_2} = 0 \Leftrightarrow \lambda\ Pmg_{u2} = v_2\delta\ h_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda\theta_2 A\ K^{(1-\theta_1-\theta_2)}(u_1l_1h_1)^{\theta_1}(u_2l_2h_2)^{\theta_2-1}L^{\theta_1+\theta_2}(l_1h_1)^{\gamma_1}(l_2h_2)^{\gamma_2+1} = v_2\delta\ h_2$$

Em (7) exige-se que, em cada período, os bens sejam afectados de modo a que o seu valor marginal seja idêntico nas suas duas utilizações alternativas, consumo corrente ou investimento que determina o consumo futuro. Em (8) e (9) exige-se que, em cada período, o tempo dos trabalhadores com, respectivamente, h_1 e h_2, seja afectado de modo a que o seu valor marginal seja o mesmo nas duas utilizações alternativas, produção corrente ou acumulação de capital humano que permitirá aumentar a produção futura. Nestas condições tem-se sempre em conta a contribuição directa e a contribuição indirecta da variável em causa para a utilidade.

(ii) equações de movimento

$$(3)\quad \dot{K}(t) = A\ K^{(1-\theta_1-\theta_2)}(u_1l_1h_1)^{\theta_1}(u_2l_2h_2)^{\theta_2}L^{\theta_1+\theta_2}(l_1h_1)^{\gamma_1}(l_2h_2)^{\gamma_2} - Lc$$

$$(4)\quad \dot{h}_1(t) = h_1(t)\ \delta\ (1-u_1(t)) \Leftrightarrow \hat{h}_1 = \delta\ (1-u_1)$$

$$(5)\quad \dot{h}_2(t) = h_2(t)\ \delta\ (1-u_2(t)) \Leftrightarrow \hat{h}_2 = \delta\ (1-u_2)$$

(iii) equações de co-estado:

$$(10)\quad \dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{dH}{dK} \Leftrightarrow \dot{\lambda} = \rho\lambda - \lambda\ Pmg_K \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\lambda} = \rho - (1-\theta_1-\theta_2)A\ K^{(-\theta_1-\theta_2)}(u_1l_1h_1)^{\theta_1}(u_2l_2h_2)^{\theta_2}L^{\theta_1+\theta_2}(l_1h_1)^{\gamma_1}(l_2h_2)^{\gamma_2}$$

[5] $\hat{x}$ indica a taxa de crescimento da variável x

$$(11)\quad \dot{v}_1 = \rho v_1 - \frac{dH}{dh_1} \Leftrightarrow \dot{v}_1 = v_1(\rho - \delta\,(1 - u_1)) - \lambda\ Pmg_{h1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{v}_1 = v_1(\rho-\delta(1-u_1)) - \lambda(\theta_1+\gamma_1)AK^{(1-\theta_1-\theta_2)}(u_1 l_1 h_1)^{\theta_1}(u_2 l_2 h_2)^{\theta_2}L^{\theta_1+\theta_2}l_1^{\gamma_1}h_1^{\gamma_1-1}(l_2h_2)^{\gamma_2}$$

$$(12)\quad \dot{v}_2 = \rho v_2 - \frac{dH}{dh_2} \Leftrightarrow \dot{v}_2 = v_2(\rho - \delta\,(1 - u_2)) - \lambda\ Pmg_{h2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{v}_2 = v_2(\rho-\delta(1-u_2)) - \lambda(\theta_2+\gamma_2)AK^{(1-\theta_1-\theta_2)}(u_1 l_1 h_1)^{\theta_1}(u_2 l_2 h_2)^{\theta_2}L^{\theta_1+\theta_2}(l_1h_1)^{\gamma_1}l_2^{\gamma_2}h_2^{\gamma_2-1}$$

Em (10) exige-se que a taxa de crescimento do preço sombra do capital físico seja igual à taxa de desconto intertemporal menos a Pmg_K, que mede a contribuição do stock de capital existente para a taxa de crescimento desse mesmo stock. Em (11) exige-se que a taxa de crescimento do preço sombra de h_1 seja igual à taxa de desconto intertemporal menos a contribuição do stock existente, h_1, para a taxa de crescimento deste stock e menos a contribuição do stock existente, h_1, para a taxa de crescimento do stock de capital físico, avaliada em termos do preço sombra de K. (12) é a condição equivalente para h_2.

Pelo Teorema de Mangasarian, dado que as funções U, $\dot{h}_1$ e $\dot{h}_2$ são concâvas nas variáveis de estado e nas variáveis de controlo, e que se supõe que a função $\dot{K}$ também é concâva nas mesmas variáveis, as condições seguintes em conjunto com as condições (3) a (5) e (7) a (12) formam condições suficientes para definir a solução óptima.

$$\lim_{t} e^{-\rho t}\lambda(t) = 0$$

$$\lim_{t} e^{-\rho t} v_1(t) = 0$$

$$\lim_{t} e^{-\rho t} v_2(t) = 0$$

Na solução do problema que define a trajectória de equilíbrio competitivo apenas as condições (11) e (12) vêm alteradas, sendo substituidas respectivamente por:

$$(13)\quad \dot{v}_1 = v_1(\rho-\delta(1-u_1)) - \lambda\theta_1 AK^{(1-\theta_1-\theta_2)}(u_1 l_1 h_1)^{\theta_1}(u_2 l_2 h_2)^{\theta_2}L^{\theta_1+\theta_2}l_1^{\gamma_1}h_1^{\gamma_1-1}(l_2h_2)^{\gamma_2}$$

$$(14)\quad \dot{v}_2 = v_2(\rho-\delta(1-u_2)) - \lambda\theta_2 AK^{(1-\theta_1-\theta_2)}(u_1 l_1 h_1)^{\theta_1}(u_2 l_2 h_2)^{\theta_2}L^{\theta_1+\theta_2}(l_1h_1)^{\gamma_1}l_2^{\gamma_2}h_2^{\gamma_2-1}$$

dado que cada agente, individualmente, ao calcular a Pmg_h, não considera o efeito de variações do seu nível de capital humano, h, no termo $(lh)^{\gamma}$.

Interessa agora definir as "balanced growth solutions" para onde se espera que o sistema convirja, por analogia com os modelos semelhantes de Uzawa(1965) e Romer(1986). Nesta solução teremos $\hat{c}, \hat{K}, \hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{v}_1, \hat{v}_2$, u_1 e u_2 constantes.

De (10) e (7) tem-se que: $\quad Pmg_K = \rho - \hat{\lambda} = \rho + \sigma\hat{c}$

que, na solução procurada, é constante por definição. Daqui pode obter-se:

$$AP_k = \frac{Y}{K} = \frac{Pmg_k}{1-\theta_1-\theta_2} = \frac{\rho+\sigma\hat{c}}{1-\theta_1-\theta_2}$$

E de (1) vem que:

$$AP_k = \frac{Lc}{K} + \hat{K}$$

Como AP_k é constante então $\hat{K} = \hat{Y}$, e $\frac{Lc}{K}$ tem que ser constante donde $\hat{K} = \hat{Y} = n + \hat{c}$.

Pode, também, obter-se a expressão da taxa de poupança:

$$s = \frac{\dot{K}}{Y} = \frac{(1-\theta_1-\theta_2)(n+\hat{c})}{\rho+\sigma\hat{c}}$$

Tal como seria de esperar a taxa de poupança depende negativamente da taxa de desconto ρ e positivamente da elasticidade de substituição intertemporal $1/\sigma$. Quanto mais os agentes descontam o consumo futuro relativamente ao consumo presente, menos interessados estão em poupar.

Para obter $\hat{c}$ volto a utilizar o resultado de que a Pmg_k é constante, o que implica que $\widehat{Pmg}_k = 0$ e, recorrendo à expressão da Pmg_k obtém-se:

$$(15) \qquad \hat{c} = \frac{\theta_1+\gamma_1}{\theta_1+\theta_2}\hat{h}_1 + \frac{\theta_2+\gamma_2}{\theta_1+\theta_2}\hat{h}_2$$

É o crescimento do stock de capital humano, quer no seu nível mais alto, quer no seu nível mais baixo, que é o motor de crescimento da economia.

Preciso agora das soluções para $\hat{h}_1$ e $\hat{h}_2$. De (8) vem

$$\hat{v}_1 + \hat{h}_1 = \hat{\lambda} + \widehat{Pmg}_{u1} \Leftrightarrow \hat{v}_1 = n + (1-\theta_1-\theta_2-\sigma)\hat{c} + (\theta_1+\gamma_1-1)\hat{h}_1 + (\theta_2+\gamma_2)\hat{h}_2$$

e substituindo aqui a expressão (15) obtém-se uma condição para $\hat{v}_1$

$$(16) \quad \hat{v}_1 = n + \left[\frac{(1-\sigma)(\theta_1+\gamma_1)}{\theta_1+\theta_2} - 1\right]\hat{h}_1 + \frac{(1-\sigma)(\theta_2+\gamma_2)}{\theta_1+\theta_2}\hat{h}_2$$

De (9) e (15) obtém-se a expressão correspondente para $\hat{v}_2$. Por outro lado, considerando por agora a trajectória óptima, de (11) e (8) vem:

$$\hat{v}_1 = \rho - \delta(1-u_1) - h_1\delta\frac{Pmg_{h1}}{Pmg_{u1}} \Leftrightarrow \hat{v}_1 = \rho - \delta - \frac{\gamma_1}{\theta_1}\delta u_1$$

substituindo u_1 de acordo com (4) obtém-se:

$$(17) \quad \hat{v}_1 = \rho - \delta\left(1+\frac{\gamma_1}{\theta_1}\right) + \frac{\gamma_1}{\theta_1}\hat{h}_1$$

De (12), (9) e (5) obtém-se a expressão correspondente para $\hat{v}_2$.

$$(18)\quad \hat{v}_2 = \rho - \delta\left(1+\frac{\gamma_2}{\theta_2}\right) + \frac{\gamma_2}{\theta_2}\hat{h}_2$$

De (8) e (9) tem-se que $\hat{v}_1 + \hat{h}_1 = \hat{v}_2 + \hat{h}_2$; substituindo aqui as expressões (17) e (18):

$$(19)\quad \hat{h}_2 = \frac{(\theta_1+\gamma_1)\theta_2}{(\theta_2+\gamma_2)\theta_1}\hat{h}_1 + \frac{\theta_2\delta}{\theta_2+\gamma_2}\left(\frac{\gamma_2}{\theta_2} - \frac{\gamma_1}{\theta_1}\right)$$

a relação entre $\hat{h}_1$ e $\hat{h}_2$, na trajectória óptima depende, assim, da relação entre $\frac{\gamma_1}{\theta_1}$ e $\frac{\gamma_2}{\theta_2}$. θ_i mede a contribuição de h_i para a produção que é apropriável em termos individuais; esta contribuição é proporcional a u_i e, portanto, quanto maior θ_i maior o custo de oportunidade em termos de produção corrente de afectar tempo à acumulação de h_i. γ_i mede a contribuição de h_i para a produção, que não é apropriável em termos individuais; esta contribuição depende do nível de capital humano existente na economia, é portanto independente de u_i. Assim, olhando apenas para os efeitos externos o melhor é fazer u_i o mais pequeno possível, dado que isso não diminui a externalidade corrente mas, aumentando $\hat{h}_i$, aumenta a externalidade futura. Deve notar-se, portanto, que não basta dizer que $\gamma_1 > \gamma_2$ para poder concluir que a solução óptima é $\hat{h}_1 > \hat{h}_2$; também devem ser tidos em conta os parâmetros θ_1 e θ_2. E mesmo que $\theta_1 = \theta_2$ não é necessáriamente verdade que a solução óptima seja $\hat{h}_1 > \hat{h}_2$.

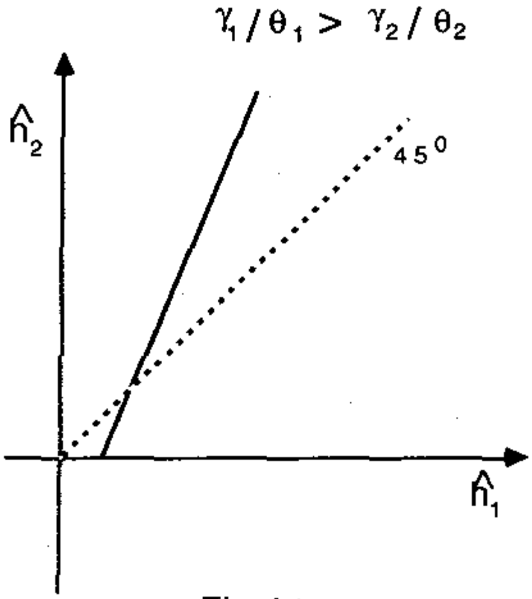

Fig 1a)

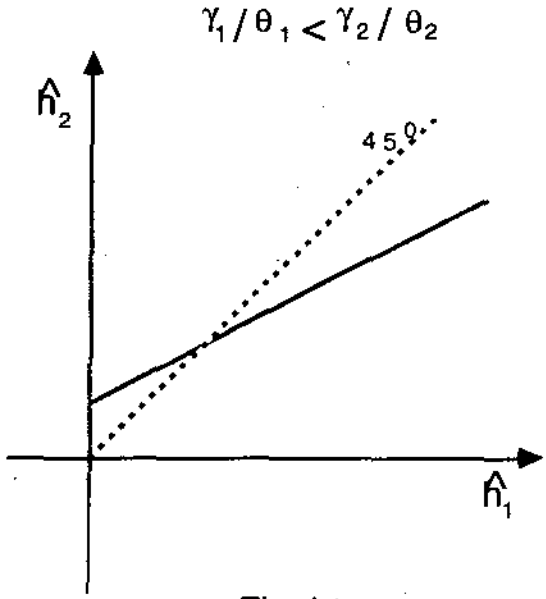

Fig 1b)

Para $\frac{\gamma_1}{\theta_1} > \frac{\gamma_2}{\theta_2}$ a relação entre $\hat{h}_1$ e $\hat{h}_2$ é descrita, no espaço $(\hat{h}_1, \hat{h}_2)$ por uma recta com declive maior que um e abcissa na origem positiva. Na solução óptima, para $\hat{h}_1$ e $\hat{h}_2$ baixos, $\hat{h}_1 > \hat{h}_2$ e há convergência do stock de capital humano dos dois grupos de trabalhadores. Para valores elevados de $\hat{h}_1$ e $\hat{h}_2$. $\hat{h}_1 < \hat{h}_2$ e há divergência do stock de capital humano dos dois grupos. A restrição de que $u_i \leq 1$ implica que $\hat{h}_i \geq 0$ sempre.

Por outro lado das expressões (16) e (17) vem:

$$\left[\frac{(1-\sigma)(\theta_1+\gamma_1)}{\theta_1+\theta_2} - \left(1+\frac{\gamma_1}{\theta_1}\right)\right]\hat{h}_1 + \frac{(1-\sigma)(\theta_2+\gamma_2)}{\theta_1+\theta_2}\hat{h}_2 = \rho - n - \delta\left(1+\frac{\gamma_1}{\theta_1}\right)$$

e substituindo pela expressão (19) obtém-se finalmente a taxa de crescimento de $\hat{h}_1$, na trajectória óptima, apenas em função dos parâmetros do modelo:

$$(20) \quad \hat{h}_1^* = \left[1 + (1-\sigma)\frac{\theta_1\theta_2}{(\theta_1+\theta_2)(\theta_1+\gamma_1)}\left(\frac{\gamma_2}{\theta_2} - \frac{\gamma_1}{\theta_1}\right)\right]\frac{\delta}{\sigma} - \frac{(\rho-n)\theta_1}{\sigma(\theta_1+\gamma_1)}$$

Olhando agora para a trajectória de equilíbrio competitivo, de (13) e (8) vem

$$(21) \quad \hat{v}_1 = \rho - \delta$$

como (14) e (9) implicam idêntica expressão para $\hat{v}_2$, $\hat{v}_1 = \hat{v}_2$. Dado que, como se viu acima, $\hat{v}_1 + \hat{h}_1 = \hat{v}_2 + \hat{h}_2$, tem-se que na trajectória de equilíbrio competitivo $\hat{h}_1 = \hat{h}_2$, o que acontece por os agentes individualmente não terem em conta o efeito externo que é diferente para os dois níveis de capital humano. Assim na solução de equilíbrio competitivo mantém-se a diferença no nível de capital humano dos dois grupos de trabalhadores.

A condição (16) também é válida na trajectória de equilíbrio competitivo, e em conjunto com a condição (21) dá-me a taxa de crescimento de h_1, na trajectória de equilíbrio competitivo, em função dos parâmentros do modelo:

$$(22) \quad \hat{h}_1^E = \frac{(\rho-\delta-n)(\theta_1+\theta_2)}{\gamma_1+\gamma_2-\sigma(\theta_1+\theta_2+\gamma_1+\gamma_2)}$$

Para aproximar $\hat{h}_1^E$ e $\hat{h}_2^E$ dos seus valores óptimos pode justificar-se a utilização de subsídios à educação mas deve notar-se que não é indiferente subsidiar h_1 ou h_2 e que a política óptima depende de θ_1, θ_2, γ_1 e γ_2.

Substituindo as expressões para a taxa de crescimento de h_1 em (15) obtenho a taxa de crescimento do consumo per capita na trajectória óptima e na trajectória de equilíbrio competitivo, respectivamente

$$(23) \quad \hat{c}^* = \frac{\delta(\theta_1+\theta_2+\gamma_1+\gamma_2)-(\rho-n)(\theta_1+\theta_2)}{\sigma(\theta_1+\theta_2)}$$

$$(24) \quad \hat{c}^E = \frac{(\rho-n-\delta)(\theta_1+\theta_2+\gamma_1+\gamma_2)}{\gamma_1+\gamma_2-\sigma(\theta_1+\theta_2+\gamma_1+\gamma_2)} = \frac{\delta(\theta_1+\theta_2+\gamma_1+\gamma_2)-(\rho-n)(\theta_1+\theta_2)-(\rho-n)(\gamma_1+\gamma_2)}{\sigma(\theta_1+\theta_2)+(\sigma-1)(\gamma_1+\gamma_2)}$$

Estas soluções foram determinadas supondo que as restrições de $u_1 \geq 0$ e $u_2 \geq 0$ não são activas; estas restrições implicam que $\hat{h}_1 \leq \delta$ e $\hat{h}_2 \leq \delta$. Para que estas condições sejam satisfeitas, na trajectória óptima e na trajectória de equilíbrio, tem que se verificar

$$\sigma > 1 - \frac{(\rho-n)(\theta_1+\theta_2)}{\delta(\theta_1+\theta_2+\gamma_1+\gamma_2)} \quad \text{e} \quad \sigma > \frac{\gamma_1+\gamma_2}{\theta_1+\theta_2+\gamma_1+\gamma_2}$$

o que implica que as soluções determinadas não são válidas para níveis de aversão ao risco demasiado baixos, ou elasticidades de substituição intertemporal demasiado altas. Desde que estas condições se verifiquem será sempre $\hat{c}^* > \hat{c}^E$. Os subsídios à educação que aproximam $\hat{h}_1$ e $\hat{h}_2$ dos seus valores óptimos aumentam a taxa de crescimento do consumo per capita através da diminuição do tempo afectado à actividade produtiva.

Os factores que determinam a taxa de crescimento dos stocks de capital humano, e consequentemente, do consumo per capita e de todas as variáveis endógenas na solução com taxas de crescimento constantes, quer na trajectória óptima, quer na trajectória de equilíbrio competitivo são a taxa de crescimento da população, os parâmetros que definem as preferências, σ e ρ, e os parâmentros que definem a tecnologia, θ_1, θ_2, γ_1 e γ_2.

Quando a taxa de crescimento da população, n, aumenta a taxa de crescimento do consumo per capita aumenta quer na trajectória óptima quer na trajectória de equilíbrio competitivo. Romer(1990), num enquadramento diferente, faz notar que este tipo de efeito acontece por haver uma identificação entre população e capital humano, e entre este e conhecimento tecnológico, e constrói um modelo onde a taxa de crescimento não depende da dimensão da população mas apenas do stock de capital humano. Provavelmente se se distinguisse neste trabalho população de trabalhadores, detentores de capital humano, a influência do parâmetro n na taxa de crescimento do consumo per capita seria diferente.

O factor de desconto ρ, como se esperava, afecta negativamente a taxa de crescimento. Uma sociedade que desconta mais o futuro está menos disposta a fazer sacrifícios no período corrente para consumir mais no futuro e portanto vai investir menos quer em capital físico quer em tempo para acumular capital humano e vai ter uma menor taxa de crescimento. A elasticidade de substituição intertemporal, $1/\sigma$, afecta positivamente a taxa de crescimento; uma sociedade mais disposta a trocar consumo presente por consumo futuro também é uma sociedade que investe mais e portanto tem uma maior taxa de crescimento.

Os níveis das variáveis endógenas, nesta solução de longo-prazo, vão ser definidos pelas condições iniciais do problema e pelo valor da produtividade marginal que é dado por $\rho + \sigma\hat{c}$. Podem assim definir-se três variáveis normalizadas z_0, z_1 e z_2 tais que:

$$z_0(t) = e^{-(\hat{c}+n)t}\, K(t)$$

$$z_1(t) = e^{-\hat{h}_1 t} h_1(t)$$

$$z_2(t) = e^{-\hat{h}_2 t} h_2(t)$$

e dada a expressão da Pmg_K, tal como aparece em (10), pode escrever-se:

$$(25) \qquad z_0^{(-\theta_1-\theta_2)}\, z_1^{\theta_1+\gamma_1}\, z_2^{\theta_2+\gamma_2} = \frac{\rho + \sigma\hat{c}}{(1-\theta_1-\theta_2)A\, L_0^{\theta_1+\theta_2} u_1^{\theta_1}\, l_1^{\theta_1+\gamma_1} u_2^{\theta_2}\, l_2^{\theta_2+\gamma_2}}$$

que traduz uma relação positiva entre z_0 e z_1 ou z_2 e uma relação negativa entre z_1 e z_2 no equilíbrio de longo prazo.

Por semelhança com o modelo de Lucas(1988), há convergência das economias para esta solução de longo-prazo, mas o ponto de convergência vai depender das condições iniciais e, por isso, vai ser diferente para economias com situações de partida diferentes. Em Lucas(1988) isso permitia que se mantivessem permanentemente diferenças nos níveis dos stocks de capital físico e capital humano das diferentes economias, uma economia que no início tivesse menos capital humano e menos capital físico que outra manter-se-ia sempre como uma economia com menos recursos. Aqui esse resultado é alargado; também as diferenças em termos dos níveis dos stocks de capital humano podem manter-se, por exemplo uma economia que no início tem maior h_1 mas menor h_2 que outra manter-se-á sempre como uma economia em que os níveis de capital humano existentes são mais próximos.

Quando a taxa de crescimento do consumo per capita aumenta as curvas que descrevem a relação entre estas variáveis deslocam-se tal como é ilustrado na figura 2. Assim, uma economia em que os subsídios à educação sejam tais que a aproximam da trajectória óptima tem, para igual stock de capital físico, maior stock de capital humano quer no nível mais baixo de h quer no seu nível mais elevado.

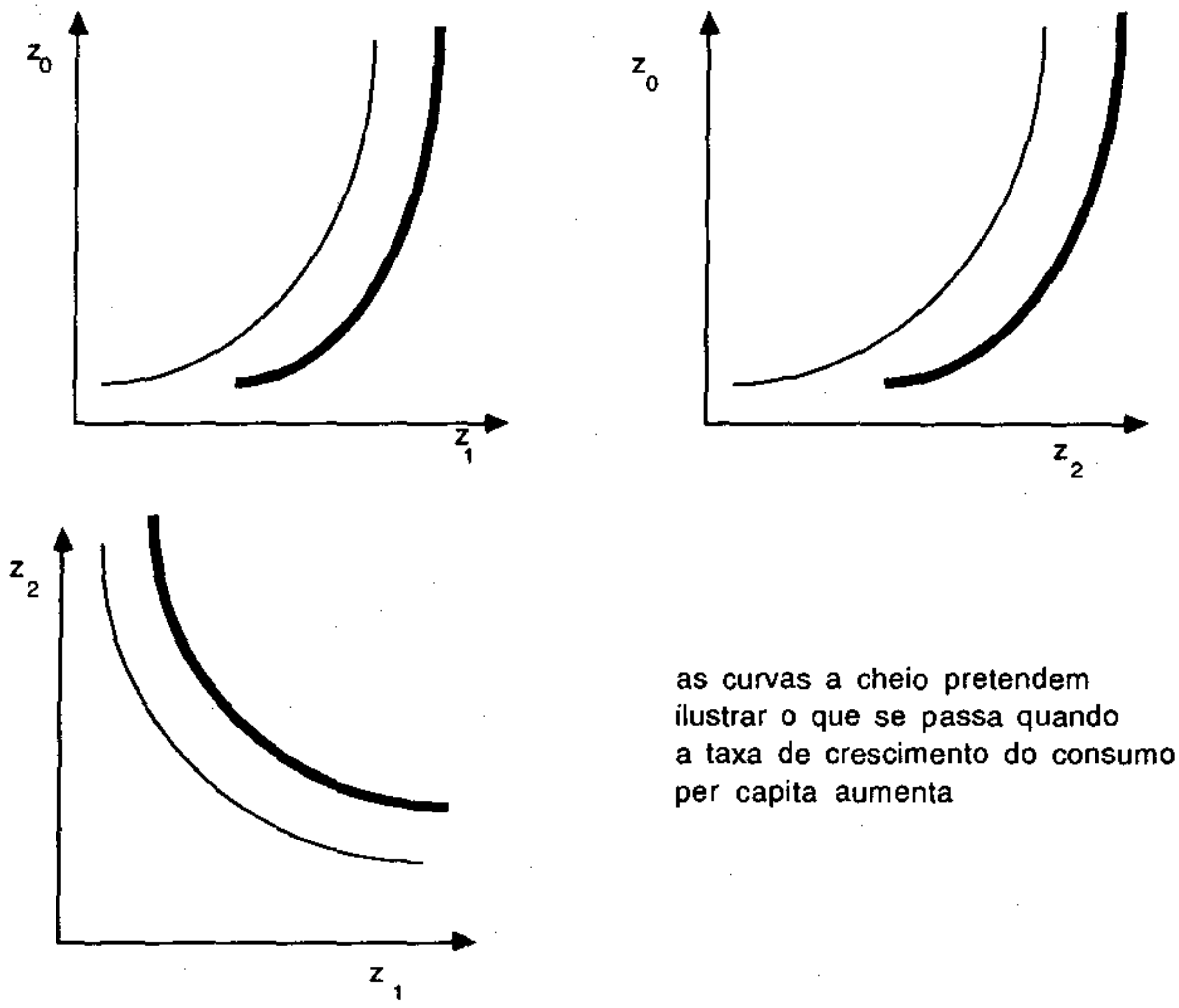

Fig. 2

Já se viu que l_1 não afecta as taxas de crescimento. Isso acontece porque este modelo é multiplicativo; bastaria fazer a externalidade, como em Lucas, depender do nível médio de stock de capital humano na economia, para que a distribuição dos trabalhadores pelos vários níveis de capital humano fosse relevante para a determinação das taxas de crescimento. Neste modelo l_1 afecta os níveis de c, K, h_1 e h_2 no equilíbrio de longo-prazo dado que é um dos determinantes da Pmg_k.

Tendo em conta que $l_2 = 1 - l_1$, pode calcular-se a derivada do denominador do membro do lado direito da expressão (25):

$$\frac{d\Psi}{dl_1} = (1-\theta_1-\theta_2)A\ L_0^{\theta_1+\theta_2} u_1^{\theta_1} l_1^{\theta_1+\gamma_1} u_2^{\theta_2} (1-l_1)^{\theta_2+\gamma_2} \left[\frac{\theta_1+\gamma_1}{l_1} - \frac{\theta_2+\gamma_2}{1-l_1}\right]$$

esta derivada é positiva desde que $l_1 < \dfrac{\theta_1+\gamma_1}{\theta_1+\gamma_1+\theta_2+\gamma_2}$. Assim para economias com l_1 elevado, aumentar l_1 deve implicar quedas no stock de capital físico e aumento de h_1 e h_2, enquanto para economias com l_1 baixo o efeito é inverso.

A Pmg_k tende a ser igual entre os vários países devido ao grau de mobilidade existente para o capital físico, mas isso é compatível, para iguais h_1 e h_2, com várias distribuições dos trabalhadores pelos diferentes níveis de capital humano. Podem manter-se situações de economias com muita gente no nível mais baixo de capital humano simultaneamente com outras economias onde a maioria dos trabalhadores têm um elevado stock de capital humano.

3. Conclusão

Este trabalho alterou o modelo de Lucas(1988), distinguindo dois níveis de capital humano e pondo a hipótese de que o nível mais elevado de capital humano tem um efeito externo menos importante do que o nível mais baixo. Construiu-se, assim um modelo que mantém, na generalidade, os resultados de Lucas; é a taxa de crescimento dos stocks de capital humano (nos dois níveis considerados) que determina a taxa de crescimento do consumo per capita e do stock de capital físico. A taxa de crescimento do consumo per capita resultante depende da taxa de crescimento da população, dos parâmetros que definem as preferências e dos parâmetros que definem a tecnologia. Devido à existência de externalidades, a solução de equilíbrio competitivo vai divergir da solução óptima podendo justificar uma política de subsídios à educação que, aumentando a taxa de crescimento dos stocks de capital humano, aumente a taxa de crescimento do consumo per capita aproximando-a da solução óptima.

A política óptima de subsídios à educação vai depender do efeito externo de cada nível de capital humano (determinado pelos parâmetros γ_1 e γ_2 do modelo) e também da contribuição de cada nível de capital humano para a produção (determinado pelos parâmetros θ_1 e θ_2 do modelo). Não é suficiente dizer que o ensino primário implica maiores externalidades para poder concluir que este nível de ensino deve ser mais subsidiado que o ensino superior, mas este é um factor relevante. Por outro lado, a política de subsídios também vai afectar a distribuição da população pelos diferentes níveis de capital humano e esse é um efeito que este trabalho não tem em conta por assumir essa distribuição fixa exogenamente.

No equilíbrio de longo prazo não há convergência nos níveis de capital físico e capital humano das diferentes economias. As diferenças iniciais tendem a permanecer. Se já no modelo de Lucas(1988) uma economia que no início tivesse níveis mais baixos de capital humano e capital físico permanecia uma economia mais pobre, neste modelo também diferenças iniciais nos diferentes níveis de capital humano tendem a manter-se, assim como diferentes distribuições da população activa pelos vários níveis de capital humano.

ANEXO

A formulação geral do problema (I) é a seguinte:

$$\underset{c,\, u1,\, u2}{\text{Max}}\, U = \int e^{-\rho t}\frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma}-1\right] L(t)\, dt$$

s.a.

$$\dot{K}(t) = f_0(c, K, h_1, h_2)$$

$$\dot{h}_1(t) = f_1(h_1, u_1)$$

$$\dot{h}_2(t) = f_2(h_2, u_2)$$

$$K(0) = K_0$$

$$h_1(0) = h_{10}$$

$$h_2(0) = h_{20}$$

$$\left.\begin{array}{l} c(t) \geq 0 \\ u_1(t) \geq 0 \\ u_2(t) \geq 0 \\ u_1(t) \leq 1 \\ u_2(t) \leq 1 \end{array}\right|$$

estas condições definem o domínio das variáveis de controlo

$$K(t) \geq 0$$

$$h_1(t) \geq 0$$

$$h_2(t) \geq 0$$

A função Hamiltoneana continua a ser:

$$H(c, u_1, u_2, K, h_1, h_2, \lambda, v_1, v_2, t) = \frac{1}{1-\sigma}\left[c(t)^{1-\sigma}-1\right]L(t) + \lambda f_0(c, K, h_1, h_2)+v_1 f_1(h_1,u_1) + \\ +v_2 f_2(h_2,u_2)$$

A função Lagrangeana vem:

$$L\ (c, u_1, u_2, K, h_1, h_2, \lambda, v_1, v_2, \pi_0, \pi_1, \pi_2, t) = H - \mu_0 c - \mu_1 u_1 - \mu_2 u_2 + \mu_3(1-u_1) + \mu_4(1-u_2) + \\ + \pi_0 f_0(c,K,h_1,h_2) + \pi_1 f_1(h_1,u_1) + \pi_2 f_2(h_2,u_2)$$

e as condições necessárias para o óptimo passam a ser:

(i) $\underset{c,\ u1,\ u2}{\mathrm{Max}}\ H$

s.a. $c(t) \geq 0$

$u_1(t) \geq 0$

$u_2(t) \geq 0$

$u_1(t) \leq 1$

$u_2(t) \leq 1$

e $f_0(c, K, h_1, h_2) \geq 0$ sempre que $K = 0$

$f_1(h_1, u_1) \geq 0$ sempre que $u_1 = 0$

$f_2(h_2, u_2) \geq 0$ sempre que $u_2 = 0$

a existência das restrições sobre o espaço das variáveis de controlo obriga a que se utilizem as condições de optimização de Kuhn-Tucker

$$L = H + \upsilon_1(1-u_1) + \upsilon_2(1-u_2)$$

$$\frac{dL}{dc} \leq 0 \qquad c \geq 0 \qquad c\frac{dL}{dc} = 0$$

$$\frac{dL}{du_1} \leq 0 \qquad u_1 \geq 0 \qquad u_1\frac{dL}{du_1} = 0$$

$$\frac{dL}{du_2} \leq 0 \qquad u_2 \geq 0 \qquad u_2\frac{dL}{du_2} = 0$$

$$\frac{dL}{d\upsilon_1} \geq 0 \qquad \upsilon_1 \geq 0 \qquad \upsilon_1(1-u_1) = 0$$

$$\frac{dL}{d\upsilon_2} \geq 0 \qquad \upsilon_2 \geq 0 \qquad \upsilon_2(1-u_2) = 0$$

(ii) $\dot{K}(t) = \frac{dL}{d\lambda}$

$\dot{h}_1(t) = \frac{dL}{dv_1}$

$\dot{h}_2(t) = \frac{dL}{dv_2}$

(iii) $\dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{dL}{dK}$

$\dot{v}_1 = \rho v_1 - \frac{dL}{dh_1}$

$\dot{v}_2 = \rho v_2 - \frac{dL}{dh_2}$

(iv) $\frac{dL}{dc} = 0$

$\frac{dL}{du_1} = 0$

$\frac{dL}{du_2} = 0$

(v) $\mu_0 \leq 0$ $\quad\quad$ $\mu_0 c = 0$

$\mu_1 \leq 0$ $\quad\quad$ $\mu_1 u_1 = 0$

$\mu_2 \leq 0$ $\quad\quad$ $\mu_2 u_2 = 0$

$\mu_3 \leq 0$ $\quad\quad$ $\mu_3(1-u_1) = 0$

$\mu_4 \leq 0$ $\quad\quad$ $\mu_4(1-u_2) = 0$

(vi) $\pi_0 \geq 0$ $\quad\quad$ $\pi_0 f_0(c,K,h_1,h_2) = 0$

$\pi_1 \geq 0$ $\quad\quad$ $\pi_1 f_1(h_1,u_1) = 0$

$\pi_2 \geq 0$ $\quad\quad$ $\pi_2 f_2(h_2,u_2) = 0$

(vii) $\pi_0 \dot{K} = 0$

$\pi_1 h_1 = 0$

$\pi_2 h_2 = 0$

Bibliografia

Lucas, Robert E. Jr., 1988, On The Mechanics of Economic Development, Journal of Monetary Economics 22, 3-42

Romer, Paul M, 1986, Increasing Returns and Long-run Growth, Journal of Political Economy 94, 1002-37

Romer, Paul M, 1990, Endogenous Technological Change, Journal of Political Economy 98, S71- S102

Solow, Robert M, 1956, A Contribution to the Theory of Economic Growth, Quarterly Journal of Economics 70, 65-94

Uzawa, Hirifumi, 1965, Optimum Technical Change in an Aggregative Growth, International Economic Review 6, 18-31