



**Nuno David de Jesus Lopes**

Licenciado em Matemática Pura pela Universidade de Lisboa  
Mestre em Matemática pela Universidade de Lisboa

**Métodos Analíticos e Numéricos do  
Tipo Elementos Finitos Contínuos e  
Contínuos/Descontínuos para o Estudo  
de Modelos de Boussinesq Melhorados  
para a Propagação de Ondas**

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em  
Matemática na área de especialização de Análise Numérica

Orientador: Prof. Doutor Pedro Jorge da Silva Pereira,  
Professor Adjunto, ISEL

Co-orientador: Prof. Doutor Luís Trabucho de Campos,  
Professor Catedrático, FCT-UNL



**Maio de 2014**





**Nuno David de Jesus Lopes**

Licenciado em Matemática Pura pela Universidade de Lisboa  
Mestre em Matemática pela Universidade de Lisboa

**Métodos Analíticos e Numéricos do  
Tipo Elementos Finitos Contínuos e  
Contínuos/Descontínuos para o Estudo  
de Modelos de Boussinesq Melhorados  
para a Propagação de Ondas**

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em  
Matemática na área de especialização de Análise Numérica

Orientador: Prof. Doutor Pedro Jorge da Silva Pereira,  
Professor Adjunto, ISEL

Co-orientador: Prof. Doutor Luís Trabucho de Campos,  
Professor Catedrático, FCT-UNL



**Maio de 2014**



# Métodos Analíticos e Numéricos do Tipo Elementos Finitos Contínuos e Contínuos/Descontínuos para o Estudo de Modelos de Boussinesq Melhorados para a Propagação de Ondas

Nuno David de Jesus Lopes

## Copyright

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



## Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos Professores P. J. S. Pereira e L. Trabucho pelo interesse, motivação e disponibilidade na orientação deste trabalho. Ao Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais pelo acolhimento no seu espaço, financiamento para a participação em conferências bem como pelo suporte informático. Ao Gonçalo Catarino pelo logótipo do código DOLFWAVE. Aos meus colegas, Filipa, Hugo, Paulo, Raquel, Ricardo e Sérgio pela força que me deram ao mostrarem o seu interesse no meu trabalho.

À minha Família por todo o apoio que sempre me deram. Obrigado Rita, João e Gabriela.

Por último, o meu Obrigado a todos cujos nomes não foram mencionados nos parágrafos anteriores e que de uma forma ou de outra me ajudaram na concepção desta dissertação com vista à obtenção do grau de Doutor.



Ao Eduardo e à Catarina.



## Resumo

Nesta dissertação, alguns modelos analíticos e numéricos são desenvolvidos para a geração e a propagação de ondas marítimas de superfície, tsunamis, ondas de som em plasmas, ondas em redes não lineares de átomos e vibrações em molas não lineares. Estes problemas não lineares de valores na fronteira e iniciais são resolvidos recorrendo a métodos assintóticos e numéricos do tipo Galerkin de elementos finitos contínuos e contínuos/descontínuos com termos de penalização. Os algoritmos numéricos são escritos em linguagem C++ e implementados através do código designado por DOLFWAVE que desenvolvemos durante este trabalho de investigação científica.

No primeiro problema, o modelo de Zhao et al. é estendido de forma a incluir efeitos de dissipação e de absorção da energia das ondas marítimas de superfície. Diversos mecanismos para a geração de ondas são também considerados. A relação de dispersão para este modelo estendido é deduzida e uma análise matricial da estabilidade do problema linearizado é também apresentada. Mostramos que este modelo é robusto com respeito às instabilidades relacionadas com gradientes acentuados da batimetria. Fenómenos físicos tais como actividades sísmicas no fundo do oceano e a dinâmica de ondas marítimas em portos de abrigo são, entre outros, problemas investigados usando este modelo otimizado.

Uma nova classe de sistemas não lineares do tipo Boussinesq é deduzida no segundo problema. As funções incógnita desta classe de sistemas são a elevação da superfície da onda marítima e o potencial da velocidade do fluido. As características dispersivas assim como o gradiente de empolamento da onda são otimizados através da inclusão de um termo extra de ordem  $O(\mu^{2n+2})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Este termo extra é introduzido no desenvolvimento assintótico do potencial da velocidade do fluido o qual é realizado em termos dos parâmetros de onda longa e de onda de pequena amplitude, denotados por  $\mu$  e  $\varepsilon$ , respectivamente. Uma condição do tipo Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) é obtida para o problema linearizado com batimetria constante. A consistência da relação de dispersão deste modelo assim como as suas boas propriedades de estabilidade são verificadas. Através da simulação de vários testes numéricos conclui-se que esta nova classe de sistemas é apropriada para a modelação de ondas de superfície na água.

No terceiro problema, uma classe de equações do tipo Korteweg, de Vries–Benjamin, Bona e Mahony (KdV-BBM) é deduzida. O parâmetro de Nwogu é determinado de modo a otimizar o potencial da velocidade do modelo KdV-BBM linearizado. Para além disso, uma análise numérica do modelo proposto é realizada. A relação de dispersão associada ao esquema numérico bem como uma condição do tipo CFL são obtidas para o modelo linearizado. A consistência da relação de dispersão do modelo numérico é também investigada. Mostramos que o parâmetro de penalização associado às equações discretas actua como um filtro numérico para ondas de menor comprimento. Concluimos que o modelo KdV-BBM é menos susceptível a instabilidades do que o modelo KdV.

Por último, uma nova equação diferencial do tipo Boussinesq de sexta ordem para a modelação de ondas bidireccionais é proposta. Soluções exactas do tipo onda de translação são obtidas utilizando-se, entre outros, os métodos de integração directa e de expansão  $G'/G$ . Uma nova solução analítica do tipo onda de translação é apresentada. Esta solução é o limite uniforme de uma série geométrica cuja razão é proporcional à solução clássica do tipo solitão da forma do quadrado de uma secante hiperbólica.

**Palavras-chave:** equações diferenciais; modelos de Boussinesq; análise assintótica; operadores diferenciais; método de Galerkin de elementos finitos contínuos e contínuos/descontínuos.



## Abstract

In this thesis, some analytical and numerical models are developed for the generation and propagation of surface water waves, tsunamis, sound waves in plasmas, waves in nonlinear lattices of atoms and vibrations in nonlinear strings. These nonlinear problems with boundary conditions and initial values are solved using asymptotic and numerical methods. Regarding the numerical methods, we consider the continuous and continuous/discontinuous Galerkin finite element methods with penalty terms. The numerical algorithms are written in the C++ programming language and implemented by the software called DOLFWAVE which we developed during this scientific research work.

In the first problem, the model of Zhao et al. is extended in order to include some effects like dissipation and absorption of the energy of the surface water waves. Several mechanisms for the wave generation are also considered. The dispersion relation for this extended model is deduced and a matrix based stability analysis is presented for the linearized problem. We show that this model is robust with respect to the instabilities related to steep bottom gradients of the bathymetry. Physical phenomena such as seismic activities in the ocean bottom and the dynamics of surface waves in harbours are some of the problems investigated using this optimised model.

A new class of nonlinear Boussinesq-type systems is derived in the second problem. The unknown functions of this class of systems are the surface elevation of the water wave and the potential of the velocity of the fluid. The dispersive characteristics as well as the wave shoaling gradient are optimised by including an extra  $O(\mu^{2n+2})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) term in the velocity potential expansion. This expansion is made in terms of the long wave and small amplitude parameters which are denoted by  $\mu$  and  $\varepsilon$ , respectively. A Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) type condition is obtained for the linearized problem with constant bathymetry. The consistency of the dispersion relation as well as the good stability properties of this model are verified. From the numerical tests, we can conclude that the proposed numerical model is appropriate to model surface water waves.

In the third problem, a class of Korteweg, de Vries–Benjamin, Bona and Mahony (KdV-BBM) type equations is deduced. The Nwogu's parameter is determined in order to optimise the velocity potential of the linearized KdV-BBM model. Moreover, a numerical analysis of the proposed model is performed. The dispersion relation associated with the numerical scheme as well as a CFL-type condition are obtained for the linearized model. The consistency of the dispersion relation of the numerical model is also investigated. We show that the penalty parameter related to the discrete equations acts like a numerical filter for shorter length waves. We conclude that the KdV-BBM model is less prone to instabilities than the KdV model.

Finally, a new Boussinesq-type differential equation of sixth-order to model bidirectional waves is derived. Exact travelling wave solutions for the proposed class of nonlinear evolution equations are deduced using, among others, the direct integration and the  $G'/G$ -expansion methods. A new analytical travelling wave solution is found which is the uniform limit of a geometric series. The ratio of this series is proportional to a classical soliton-type solution in the form of a hyperbolic secant function to square.

**Keywords:** differential equations; Boussinesq models; asymptotic analysis; differential operators; continuous and continuous/discontinuous Galerkin finite element methods.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Breves notas históricas . . . . .	1
1.2	Modelos do tipo Boussinesq e métodos numéricos . . . . .	2
1.2.1	Modelos de Boussinesq do tipo BEV e BEP . . . . .	3
1.2.2	Métodos numéricos . . . . .	6
1.3	Ondas solitárias e solitões . . . . .	6
1.4	Estrutura e objectivos da dissertação . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Equações diferenciais de Boussinesq de segunda ordem melhoradas</b>	<b>13</b>
2.1	Introdução . . . . .	13
2.2	DOLFWAVE . . . . .	16
2.3	Dedução do modelo . . . . .	18
2.3.1	Modelos convencionais . . . . .	19
2.3.2	Modelo com equações diferenciais de segunda ordem . . . . .	21
2.4	Relação de dispersão linear . . . . .	22
2.5	Métodos numéricos . . . . .	24
2.6	Geração de onda . . . . .	27
2.6.1	Condições iniciais . . . . .	27
2.6.2	Onda incidente . . . . .	28
2.6.3	Função de fonte . . . . .	29
2.7	Fronteiras reflexivas e camadas de esponja . . . . .	29
2.8	Análise da estabilidade do problema linearizado . . . . .	30
2.9	Validação do modelo e aplicações numéricas . . . . .	33
2.9.1	Onda solitária sobre barras submersas . . . . .	37
2.9.2	Uma bossa Gaussiana numa região quadrada . . . . .	41
2.9.3	Porto de abrigo . . . . .	44
2.9.4	Onda gerada por um fundo móvel . . . . .	48
2.9.5	Um tsunami na falha de Sagres . . . . .	53
2.10	Conclusões sumárias . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Uma análise numérica de uma classe de equações do tipo Boussinesq usando um método de Galerkin de Elementos Finitos Contínuos/Descontínuos</b>	<b>57</b>
3.1	Introdução . . . . .	57
3.2	Dedução do modelo e suas propriedades . . . . .	58
3.2.1	Equações diferenciais . . . . .	58
3.2.2	Melhoramento do modelo . . . . .	63
3.2.3	Relação de dispersão . . . . .	66
3.2.4	Gradiente de empolamento da onda . . . . .	75

3.2.5	Condições de fronteira . . . . .	79
3.3	Método numérico . . . . .	79
3.3.1	Um esquema C/DG-FEM para um modelo de Boussinesq de quarta ordem . . . . .	79
3.3.2	Consistência da relação de dispersão e condição do tipo CFL . . . . .	83
3.4	Validação do modelo . . . . .	90
3.4.1	Uma bossa Gaussiana numa região quadrada . . . . .	90
3.4.2	A evolução de uma onda gerada por um deslizamento subaquático . . . . .	94
3.4.3	Deslocamento de um objecto num fundo horizontal . . . . .	98
3.5	Conclusões sumárias . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Um método de elementos finitos contínuos/descontínuos aplicado a uma classe de equações melhoradas do tipo KdV-BBM</b> . . . . .	<b>105</b>
4.1	Introdução . . . . .	105
4.2	A equação KdV-BBM e algumas propriedades dispersivas . . . . .	106
4.2.1	Dedução da equação KdV-BBM. Solução exacta do tipo solitão . . . . .	106
4.2.2	Relações de dispersão dos modelos linearizados de Airy e de KdV-BBM . . . . .	111
4.2.3	Determinação do parâmetro de Nwogu para o modelo KdV-BBM linearizado . . . . .	113
4.3	Um esquema C/DG-FEM para a equação KdV-BBM . . . . .	115
4.4	Consistência da relação de dispersão e condição do tipo CFL . . . . .	117
4.5	Testes numéricos . . . . .	121
4.5.1	Onda solitária . . . . .	121
4.5.2	Interação entre dois solitões . . . . .	124
4.6	Conclusões sumárias . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Soluções exactas de equações generalizadas de Boussinesq</b> . . . . .	<b>127</b>
5.1	Introdução . . . . .	127
5.2	Dedução do modelo . . . . .	128
5.2.1	Equações diferenciais . . . . .	128
5.2.2	Melhoramento do modelo . . . . .	132
5.3	Equação de Boussinesq estendida e propriedades de dispersão lineares . . . . .	134
5.3.1	Equação integro-diferencial de Boussinesq de sexta ordem . . . . .	134
5.3.2	Propriedades dispersivas . . . . .	138
5.4	Soluções de uma equação de Boussinesq não linear de ordem $O(\mu^2, \varepsilon)$ . . . . .	143
5.4.1	Equação diferencial ordinária e não linear de ordem $O(\mu^2, \varepsilon)$ . . . . .	143
5.5	Soluções de uma equação de Boussinesq não linear de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ . . . . .	152
5.5.1	Equação diferencial ordinária não linear e de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ . . . . .	152
5.6	Soluções das equações não lineares do tipo Boussinesq de ordens $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ e $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$ da forma $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^p(\mathcal{B}\xi + K)$ bem como $\bar{\eta}(\xi) = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2 \cosh^2(\mathcal{B}\xi + K) + 1}$ . . . . .	161
5.6.1	Equação diferencial ordinária não linear de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$ . . . . .	163
5.6.2	Método para a dedução das soluções do tipo solitão das formas (5.151) e (5.152) . . . . .	163
5.7	Algumas soluções das equações não lineares do tipo Boussinesq de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ , $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$ e $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon\mu^2)$ usando o método de expansão $G'/G$ . . . . .	175
5.7.1	Equação diferencial ordinária de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon\mu^2)$ . . . . .	175

5.7.2	Método de expansão $G'/G$ e soluções para as equações diferenciais ordinárias de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ , $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$ e $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon\mu^2)$	176
5.8	Conclusões sumárias . . . . .	188
<b>6</b>	<b>Conclusões finais e trabalho futuro</b>	<b>191</b>
6.1	Conclusões finais . . . . .	191
6.2	Trabalho futuro . . . . .	195
	<b>Publicações e comunicações</b>	<b>197</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>199</b>



# Lista de Figuras

1.1	Propagação e interacção entre dois solitões da forma do quadrado de uma secante hiperbólica modeladas pela equação adimensional BBM. As soluções numéricas são obtidas usando o código DOLFWAVE. No eixo horizontal $ox^*$ representamos a variável espacial, enquanto que o eixo vertical $ot^*$ diz respeito à evolução da solução ao longo do tempo. . . . .	7
1.2	Logótipo do código DOLFWAVE. . . . .	10
2.1	Porto de abrigo da Nazaré em Portugal. . . . .	14
2.2	A elevação da superfície de um tsunami obtida pelo código DOLFWAVE para resolver as equações do modelo optimizado aqui proposto num domínio real. . . . .	14
2.3	Representação esquemática de um corte longitudinal da região ocupada pelo fluido. Note-se que o fundo impermeável do oceano e a superfície da onda marítima são também ilustrados. . . . .	18
2.4	Parte positiva de $\text{Re}\left(C_p/\sqrt{gh}\right)$ em função de $kh$ para vários modelos. . . . .	23
2.5	Representação esquemática da região ocupada pelo fluido com um fundo impermeável de geometria em cunha (painel à esquerda) e de geometria em plataforma (painel à direita). . . . .	32
2.6	Modos instáveis para a propagação de ondas marítimas de superfície para o modelo ZTC (círculos vermelhos) e para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (pontos azuis) para fundos com geometrias em cunha (painel à esquerda) e em plataforma (painel à direita) com $l = 2$ m. . . . .	33
2.7	Modos instáveis para a propagação de ondas marítimas de superfície para o modelo ZTC (círculos vermelhos) e para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (pontos azuis) para fundos com geometrias em cunha (painel à esquerda) e em plataforma (painel à direita) com $l = 1$ m. . . . .	33
2.8	Modos instáveis para a propagação de ondas marítimas de superfície para o modelo ZTC (círculos vermelhos) e para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (pontos azuis) para fundos com geometrias em cunha (painel à esquerda) e em plataforma (painel à direita) com $l = 0.5$ m. . . . .	34
2.9	Espectro dos valores próprios para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (painéis superiores) e modelo ZTC (painéis inferiores) para as geometrias em cunha (painéis à esquerda) e plataforma (painéis à direita), com $l = 2$ m, $\Delta x = 0.02$ m e $h_m$ com valores desde 0.02 m (círculos azuis) até 1 m (círculos vermelhos). . . . .	34
2.10	Espectro dos valores próprios para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (painéis superiores) e modelo ZTC (painéis inferiores) para as geometrias em cunha (painéis à esquerda) e plataforma (painéis à direita), com $l = 1$ m, $\Delta x = 0.1$ m e $h_m$ com valores desde 0.02 m (círculos azuis) até 1 m (círculos vermelhos). . . . .	35

2.11	Espectro dos valores próprios para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (painéis superiores) e modelo ZTC (painéis inferiores) para as geometrias em cunha (painéis à esquerda) e plataforma (painéis à direita), com $l = 0.5$ m, $\Delta x = 0.25$ m e $h_m$ com valores desde 0.02 m (círculos azuis) até 1 m (círculos vermelhos).	36
2.12	Vista em detalhe da onda passando sobre a barra submersa com geometria trapezoidal usando o modelo BEP/ZTC implementado pelo código DOLFWAVE.	41
2.13	Comparação detalhada de uma onda passando sobre a barra submersa com geometria trapezoidal, a qual é simulada pela aplicação DOLFWAVE usando-se o modelo BEP/ZTC (linha vermelha tracejada) e o modelo BEV de Nwogu (linha azul sólida), para $x \in [-10, 25]$ (m) e $t \in [0, 14]$ (s).	42
2.14	Esboço das três configurações do fundo para a barra submersa com geometria triangular e com altura $h_m = 0.1$ m assim como $\varepsilon = 0.1$ (linha sólida azul), $h_m = 0.04$ m e $\varepsilon = 0.25$ (linha verde com marcadores +) bem como para $h_m = 0.02$ m e $\varepsilon = 0.5$ (linha vermelha tracejada).	42
2.15	Comparação detalhada de uma onda a passar sobre a barra submersa com geometria triangular e com $h_m = 0.1$ m, $\varepsilon = 0.1$ , $x \in [-25, 50]$ (m) e $t \in [0, 25]$ (s). Estas soluções são obtidas através do código DOLFWAVE usando-se os modelos BEP/ZTC (linha vermelha tracejada) e BEV/Nwogu (linha azul sólida).	43
2.16	Comparação detalhada de uma onda a passar sobre a barra submersa com geometria triangular e com $h_m = 0.04$ m, $\varepsilon = 0.25$ , $x \in [-25, 50]$ (m) e $t \in [0, 25]$ (s). Estas soluções são obtidas através do código DOLFWAVE usando-se os modelos BEP/ZTC (linha vermelha tracejada) e BEV/Nwogu (linha azul sólida). Observam-se oscilações de alta frequência e de pequena amplitude nas soluções do modelo BEV/Nwogu.	43
2.17	Comparação detalhada de uma onda a passar sobre a barra submersa com geometria triangular e com $h_m = 0.02$ m, $\varepsilon = 0.5$ , $x \in [-25, 50]$ (m) e $t \in [0, 25]$ (s). Estas soluções são obtidas através do código DOLFWAVE usando-se os modelos BEP/ZTC (linha vermelha tracejada) e BEV/Nwogu (linha azul sólida). Observa-se a explosão da solução numérica obtida através do modelo BEV/Nwogu.	44
2.18	Os isovalores da elevação da superfície da onda $\eta$ (m) nos instantes $t = 0$ s, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s, $t \cong 40$ s e $t \cong 50$ s.	45
2.19	Perfil temporal da elevação da superfície da onda $\eta$ (m) em $P_0 = (5, 5)$ (m) (painel superior) e $P_1 = (0, 0)$ (m) (painel inferior), usando malhas não estruturadas com 2815, 1364 e 706 nós.	46
2.20	Vista detalhada da elevação da superfície da onda $\eta$ (m) para $t \in [20, 25]$ (s) em $P_0 = (5, 5)$ (m) usando várias malhas não estruturadas.	46
2.21	Escala de cor.	48
2.22	O fundo impermeável $z = -h$ (m) da região ocupada pelo fluido [ $\max = -5.316$ m, $\min = -13.716$ m].	48
2.23	Camada de esponja (viscosidade cinemática $\nu(x, y)$ ) [ $\max \cong 0.1$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> , $\min = 0$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ].	49
2.24	Elevação da superfície da onda marítima [ $\max \cong 0.63$ m, $\min \cong -0.73$ m].	49
2.25	Campo vectorial da velocidade do fluido em $z = 0$ m e o potencial $\phi_0(x, y, t_s)$ na vizinhança de $P_3$ . Valores do potencial da velocidade do fluido em $\Omega$ : [ $\max \cong 14.2$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> , $\min \cong -12.8$ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ].	50

2.26	Elevação da superfície da onda marítima em $P_1$ , $P_2$ e $P_3$ [ $\max \cong 0.4 \text{ m}$ , $\min \cong -0.31 \text{ m}$ ]. . . . .	50
2.27	Celeridade do fluido ( $ \nabla\phi_0 $ ( $\text{ms}^{-1}$ )) em $P_1$ , $P_2$ e $P_3$ [ $\max \cong 0.53 \text{ ms}^{-1}$ , $\min = 0 \text{ ms}^{-1}$ ]. . . . .	51
2.28	O fundo impermeável $z = -h(x, y, t)$ (m) nos instantes $t_0 = 0 \text{ s}$ e $t_0 = 6 \text{ s}$ [ $\max = -0.405 \text{ m}$ , $\min = -0.45 \text{ m}$ ]. . . . .	51
2.29	A elevação da superfície da onda marítima $\eta$ (m) nos instantes $t_0 = 1 \text{ s}$ , $t_1 = 3 \text{ s}$ , $t_2 = 4.5 \text{ s}$ e $t_3 = 6 \text{ s}$ [ $\max \cong 0.007 \text{ m}$ , $\min \cong -0.011 \text{ m}$ ]. . . . .	52
2.30	Imagem de satélite mostrando o domínio e a batimetria reais. . . . .	54
2.31	Representação da malha com 25088 elementos bem como da batimetria usada na simulação computacional. Designamos o epicentro da perturbação da batimetria por $(x_c, y_c)$ (m). A escala de cor relativa à batimetria é também ilustrada nesta figura. . . . .	55
2.32	Representação da elevação da superfície (m) do tsunami gerado por um sismo com epicentro na falha de Sagres, nos instantes $t = 2 \text{ min}$ , $t = 6 \text{ min}$ , $t = 12 \text{ min}$ , $t = 18 \text{ min}$ , $t = 23 \text{ min}$ e $t = 30 \text{ min}$ . . . . .	56
3.1	Representação esquemática de um corte longitudinal da região ocupada pelo fluido. Note-se que o fundo impermeável do oceano e a superfície da onda marítima são também ilustrados. . . . .	59
3.2	O quadrado da velocidade de fase normalizada $\bar{C}_p^2$ para os modelos 4o-A e 6o-A com diversos valores de $\alpha$ . A figura mostra também $\bar{C}_p^2$ para o modelo completamente linear (C.L.) bem como para o modelo de Chen e Liu. . . . .	69
3.3	O quadrado da velocidade de fase normalizada $\bar{C}_p^2$ como função de $kh$ para os modelos completamente linear (C.L.), 4o-A, 4o-AB e 6o-A com vários valores de $\alpha$ , $\beta_1$ e $\beta_2$ . Em (b) mostra-se que os modelos são altamente sensíveis à variação destes parâmetros. . . . .	71
3.4	O quadrado da componente normalizada da frequência angular $\bar{\omega}_1^2$ como função de $kh$ para um valor fixo de $h$ para os modelos 4o-A, 4o-AB e completamente linear (C.L.). Na região cinzenta, podemos observar $\bar{\omega}_1^2$ como função de $kh$ quando $\omega_1$ é um número imaginário puro. Consideram-se os valores das viscosidades cinemáticas dados por $\nu_1 = 0.14 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e $\nu_2 = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (a), $\nu_1 = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e $\nu_2 = 0.14 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (b) assim como $\nu_1 = 0.07 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e $\nu_2 = 0.07 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (c). . . . .	73
3.5	A parte imaginária da frequência angular $\text{Im}(\omega)$ ( $\text{s}^{-1}$ ) como função de $kh$ para um valor fixo de $h$ para os modelos 4o-A, 4o-AB e completamente linear (C.L.). Consideram-se os valores das viscosidades cinemáticas dados por $\nu_1 = 0.14 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e $\nu_2 = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (a), $\nu_1 = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e $\nu_2 = 0.14 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (b) assim como $\nu_1 = 0.07 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ e $\nu_2 = 0.07 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (c). . . . .	74
3.6	Gradiente de empolamento da onda como função de $kh$ para os modelos completamente linear (C.L.), Chen e Liu, Zhao et al., 4o-AB ( $\alpha = \bar{\alpha}$ , $\beta_1 = \bar{\beta}_1$ , $\beta_2 = \bar{\beta}_2$ ) e 4o-A ( $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$ ). . . . .	77
3.7	Gradiente de empolamento da onda como função de $kh$ para os modelos 4o-AB com $\alpha = \bar{\alpha}$ , $\beta_1 = \bar{\beta}_1$ , $\beta_2 = \bar{\beta}_2$ e $\lambda_s = 0$ assim como para $\alpha = \bar{\alpha}$ , $\beta_1 = \bar{\beta}_1$ , $\beta_2 = \bar{\beta}_2$ e $\lambda_s = 0.29$ , 4o-A com $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$ e $\lambda_s = 0$ e também com $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$ e $\lambda_s = 0.32$ , Chen e Liu, Zhao et al. assim como para o modelo completamente linear (C.L.). . . . .	78

3.8	Um esboço de uma parte do domínio poligonal $\Omega$ , dos interiores dos elementos $\Omega_e$ , das arestas da interface $\tilde{\Gamma}$ (linha tracejada) e da fronteira do domínio $\Gamma_h$ (linha sólida). . . . .	81
3.9	A elevação da superfície da onda $\eta$ (m) relativa ao modelo 4o-M-CDG-P2 usando-se uma malha simétrica nos instantes $t_0 = 1$ s (a), $t_1 = 4$ s (b) e $t_2 = 8$ s (c). Neste caso temos que $\tau = 0.1$ m <sup>4</sup> e $\Delta t = 0.0005$ s. Mostra-se também a elevação da superfície da onda $\eta$ (m) respeitante ao modelo 4o-W-CDG-P2 usando-se uma malha não estruturada nos instantes $t_0 = 1$ s (d), $t_1 = 4$ s (e) e $t_2 = 8$ s (f). Neste caso considera-se que $\tau = 0.004$ m <sup>4</sup> e $\Delta t = 0.00025$ s. Uma escala na vertical com $z = 0.005$ m é usada no eixo $oz$ . . . . .	91
3.10	A evolução no tempo da elevação da superfície da onda em $P_1 = (3, 3)$ (m) (a), $P_2 = (0, 0)$ (m) (b) e $P_3 = (1, 1)$ (m) (c) usando-se a malha uniforme. . . . .	92
3.11	A evolução no tempo da elevação da superfície da onda em $P_1 = (3, 3)$ (m) (a), $P_2 = (0, 0)$ (m) (b) e $P_3 = (1, 1)$ (m) (c) usando-se a malha não estruturada. Em (a) e (b) temos que $\tau = 0.01$ m <sup>4</sup> para os modelos 4o-M-CDG-P2 e 4o-W-CDG-P2. Em (c) comparam-se as soluções associadas aos modelos 4o-W-CDG-P2, para $\tau = 0.01$ m <sup>4</sup> , com as soluções dadas pelos modelos 2o-ZTC-P1 e 2o-ZTC-P2. 93	93
3.12	Dois imagens detalhadas da evolução no tempo da elevação da superfície da onda $\eta$ (m) em $P_2 = (0, 0)$ (m) usando a malha não estruturada com $\tau = 0.0001$ m <sup>4</sup> e $\tau = 0.01$ m <sup>4</sup> (a) bem como $\tau = 0.0001$ m <sup>4</sup> , $\tau = 0.004$ m <sup>4</sup> , $\tau = 0.01$ m <sup>4</sup> , $\tau = 0.1$ m <sup>4</sup> , $\tau = 1$ m <sup>4</sup> e $\tau = 10$ m <sup>4</sup> (b). . . . .	95
3.13	O fundo móvel nos instantes $t_0 = 0$ s, $t_2 = 3$ s e $t_4 = 5.86$ s (a). Em (b) mostramos a primeira e a segunda derivada do fundo com respeito ao tempo bem como as funções de fonte $S_1$ e $S_2$ . . . . .	96
3.14	A elevação da superfície da onda nos instantes $t_1 = 1.51$ s (a), $t_2 = 3$ s (b), $t_3 = 4.51$ s (c) e $t_4 = 5.86$ s (d). Em (b) mostramos uma imagem do perfil da elevação da superfície da onda em $t_2 = 3$ s para os vários modelos implementados. Em (d) podem observar-se as oscilações na esteira de algumas das ondas. Este fenómeno é também descrito em Lynett e Liu (2002). . . . .	97
3.15	A evolução no tempo da elevação da superfície da onda $\eta$ (m) e as posições do objecto (figura vermelha) dadas pelos modelos 4o-W-CDG-P2 (figura azul) e 2o-ZTC-P2 (figura verde). O parâmetro de penalização no modelo 4o-W-CDG-P2 é dado por $\tau = 0.1$ m <sup>4</sup> . . . . .	99
3.16	A elevação da superfície da onda $\eta$ (m) em $t = 8$ s dada pelo modelo 4o-W-CDG-P2 com $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$ (linha azul tracejada) e $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$ (linha vermelha sólida). O parâmetro de penalização e o passo de tempo considerados no modelo 4o-W-CDG-P2 são dados por $\tau = 0.0001$ m <sup>4</sup> e $\Delta t = 0.001$ s, respectivamente. 100	100
3.17	O fundo horizontal da região ocupada pelo fluido juntamente com o objecto deslizante descritos por $z = -h(x, y, t)$ (m) nos instantes $t_0 = 1$ s (painel à esquerda) e $t_3 = 5$ s (painel à direita). . . . .	101
3.18	A elevação da superfície da onda $\eta$ (m) dada pelo modelo 4o-M-CDG-P2 em $t_0 = 1$ s (a), $t_1 = 2$ s (b), $t_2 = 3.5$ s (c) e $t_3 = 5$ s (d). O parâmetro de penalização é dado por $\tau = 0.1$ m <sup>4</sup> . . . . .	102
3.19	Os perfis da elevação da superfície da onda $\eta$ (m) resultantes dos modelos 4o-M-CDG-P2, 2o-ZTC-P2 e 2o-ZTC-P1 nos instantes $t_0 = 1$ s (a), $t_1 = 2$ s (b), $t_2 = 3.5$ s (c) bem como para $t_3 = 5$ s (d) e em $y = 0$ m. . . . .	103

4.1	Representação esquemática da região ocupada pelo fluido. Neste caso, o fundo impermeável do oceano e a superfície da onda marítima são também ilustrados. Aqui, a derivada material é denotada por $\frac{D}{Dt}$ . . . . .	107
4.2	A velocidade de fase normalizada $\bar{C}_p$ como função de $kh$ para as equações KdV, BBM e KdV-BBM com $\hat{\delta}_1 = 0$ e $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ , $\hat{\delta}_1 = -\frac{1}{6}$ e $\hat{\delta}_2 = 0$ assim como $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$ e $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ , respectivamente. Também se mostra $\bar{C}_p$ como função de $kh$ para o modelo de Airy completamente linear (C.L.). . . . .	113
4.3	Esquema do domínio computacional $\Omega$ com os elementos $\Omega_e$ , $\Omega_e^-$ e $\Omega_e^+$ bem como os nós das interfaces interiores $\tilde{\Gamma}$ e os nós da fronteira $\Gamma_h$ . . . . .	116
4.4	A figura representa $\tilde{C}_{p,i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{C}_p$ (ver (4.63)) para os modelos KdV (painel superior e com $i = \text{KdV}$ ) e KdV-BBM (painel inferior e com $i = \text{KdV-BBM}$ ) com $h = 1$ m e $\tau \in [0, 0.1]$ ( $\text{m}^4$ ). A velocidade de fase normalizada $\bar{C}_p$ é também aqui ilustrada para o modelo completamente linear de Airy (C.L. e com $i = \text{C.L.}$ ). . . . .	119
4.5	Solução numérica instável do modelo KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$ e $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) usando-se um esquema C/DG-FEM com $\tau = 0.0001$ . . . . .	122
4.6	Solução numérica estável do modelo KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$ e $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) usando-se um esquema C/DG-FEM com $\tau = 0.1$ . . . . .	123
4.7	Soluções exactas comparadas com as soluções numéricas dos modelos KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$ e $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) e KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$ e $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ). . . . .	123
4.8	Interação entre dois solitões usando-se o esquema C/DG-FEM na implementação do modelo KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$ e $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) com $\tau = 0.1$ . . . . .	125
5.1	Representação esquemática da região ocupada pelo fluido. Note-se que o fundo impermeável do oceano e a superfície da onda marítima são também ilustrados. . . . .	129
5.2	Forma adimensional do quadrado da velocidade de fase $C_p^2$ como função de $k\mu$ para o modelo completamente linear de Airy (C.L.) assim como os desenvolvimentos de Padé de ordens $[2, 2]$ , $[2, 4]$ e $[4, 4]$ relacionados com a equação de Boussinesq proposta. . . . .	142
5.3	Soluções positivas e negativas $\bar{\eta}(\xi)$ como função de $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a) mostramos a solução positiva dada por (5.77)–(5.78) com $\tau_s = 2/3$ . Na figura (b) podemos ver a solução negativa dada por (5.79)–(5.80) com $\tau_s = 0$ . Os valores dos outros parâmetros e de $K$ são dados por $\alpha = \beta_1 = 0$ , $c^2 = a_c^2 = 1$ , $\mu = 0.1$ , $\varepsilon = 0.01$ e $K = 0$ . Também podemos observar as assíntotas verticais em ambos os gráficos ( $\xi = 0$ ). A solução trivial ou nula $\bar{\eta} = 0$ de (5.76) assim como a assíntota horizontal $\bar{\eta} = 0$ de (5.77) e de (5.79) não são apresentadas. . . . .	145
5.4	Soluções $\bar{\eta}(\xi)$ como função de $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a), mostramos as soluções positivas do tipo solitão para $\tau_s = 0$ , $\tau_s = 0.15$ e $\tau_s = 0.3$ (ver (5.81), (5.83) e (5.84)), enquanto que na figura (b), a solução negativa dada por (5.82), (5.83) e (5.84) com $\tau_s = 0$ é apresentada ( $-100 \leq \bar{\eta}(\xi) < 0$ ). Nas figuras (c) e (d), podemos ver as soluções periódicas com $\tau_s = 2/3$ (ver (5.83), (5.95), (5.96) e (5.97)). Os valores dos outros parâmetros e de $K$ são dados por $\alpha = \beta_1 = 0$ , $c^2 = 1.01$ , $a_c^2 = 1$ , $\mu = 0.1$ , $\varepsilon = 0.01$ e $K = 0$ . A solução $\bar{\eta} = (\theta - 1)/\varepsilon$ e as assíntotas verticais são mostradas enquanto que a solução trivial ou nula $\bar{\eta} = 0$ não é representada. . . . .	149

- 5.5 Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.83), (5.84), (5.97), (5.107), (5.108), (5.110) e (5.111) como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a), apresentamos a solução negativa do tipo solitão dada por (5.107) com  $\tau_s = 0.34$ ,  $\tau_s = 0.55$  e  $\tau_s = 0.7$ , enquanto que  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 0.99$ . Na figura (b), mostramos uma solução negativa do tipo solitão dada por (5.107) com  $\tau_s = 0$  e  $c^2 = 0.1$  bem como  $\alpha = 1 - (\sqrt{5}/5)$  e  $\beta_1 = -(1/2)(1 + \sqrt{5}/5)$  ( $-90 \leq \bar{\eta} < 0$ ). Na figura (c), mostramos uma solução positiva dada por (5.108) com  $\tau_s = 2/3$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 0.99$ . Soluções periódicas  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.110) (linha preta sólida) e (5.111) (linha vermelha tracejada) com  $c^2 = 0.99$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $\tau_s = 0$  são apresentadas na figura (d). Nas figuras (a)–(d), os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$  e  $K = 0$ . As assíntotas verticais e a solução  $\bar{\eta} = (\theta - 1)/\varepsilon$  são mostradas enquanto que a solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  assim como a assíntota horizontal  $\bar{\eta} = 0$  dos gráficos em (a)–(c) não são ilustradas. 151
- 5.6 Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.118)–(5.121) como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a), apresentamos a solução negativa do tipo solitão dada por (5.118) e (5.119) com  $\tau_s = 0$ . Na figura (b), mostramos a solução dada por (5.120) e (5.121) com  $\tau_s = 2/3$ . Também representamos as soluções  $\bar{\eta} = 0$  e  $\bar{\eta} = -1/\varepsilon$  juntamente com as assíntotas verticais. Em todos estes casos, os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$  e  $K = 0$ . Note-se que  $\bar{\eta} = 0$  é também uma assíntota horizontal para os gráficos das figuras (a) e (b). . . . . 153
- 5.7 Soluções do tipo onda de translação dadas por (5.81) (linha vermelha sólida para equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$ ) e (5.122) (linha tracejada preta para a equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ ) como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a),  $\theta = 3$  para ambas as soluções enquanto que na figura (b)  $\theta = 2$  e  $\theta = 3$  para as equações de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ , respectivamente. Em ambos os gráficos, os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $\alpha = \beta_1 = \tau_s = 0$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K=0$ . . . . . 155
- 5.8 Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Nas figuras (a) e (b), podemos ver as novas soluções positivas e negativas do tipo solitão, respectivamente. Estas soluções são descritas por (5.83), (5.84) e (5.122)–(5.124) para  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_s = 0.15$  e  $\tau_s = 0.3$ . Na figura (a),  $\alpha = \beta_1 = 0$  enquanto que na figura (b)  $\alpha = 1 - (\sqrt{5}/5)$  e  $\beta_1 = -(1/2)(1 + \sqrt{5}/5)$ . Nas figuras (c) e (d), mostramos as soluções periódicas  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.83), (5.97), (5.124), (5.129) bem como (5.130) para  $\tau_s = 2/3$  e  $\alpha = \beta_1 = 0$ . Também representamos as assíntotas verticais juntamente com as soluções  $\bar{\eta} = \eta_i/\varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ). Em todos estes casos, os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$ ,  $c^2 = 1.01$  e  $K = 0$ . 156
- 5.9 Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . A nova solução negativa do tipo solitão dada por (5.83), (5.84), (5.124) e (5.131) assim como a solução descrita por (5.83), (5.84), (5.124) e (5.132) são mostradas nas figuras (a) e (b), respectivamente. Em ambos os casos, consideramos  $\tau_s = 2/3$ . Nas figuras (c) e (d), mostramos as soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.83), (5.97), (5.124), (5.136) e (5.137) para  $\tau_s = 0$ . Os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$ ,  $c^2 = 0.99$  e  $K = 0$ . Também mostramos as soluções  $\bar{\eta} = 0$ ,  $\bar{\eta} = \frac{\eta_i}{\varepsilon}$  ( $i = 1, 2$ ) juntamente com as assíntotas verticais. 158

- 5.10 Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a) mostramos as soluções  $\bar{\eta}^+$  e  $\bar{\eta}^-$  dadas por (5.138) e (5.140) com  $K = 0$ , juntamente com a solução definida por (5.140) e (5.141) com  $K_1 = K_2 = 0.5$  denotada por  $\bar{\eta}^*$ . Na figura (b) mostramos as soluções  $\bar{\eta}^+$  e  $\bar{\eta}^-$  dadas por (5.139) e (5.140) com  $K = 0$ . As soluções  $\bar{\eta}$  definidas por (5.142) com  $K_1 = K_2 = 0$  e  $K_1 = K_2 = -8$  são representadas nas figuras (c) e (d), respectivamente. Em todos os casos temos  $a_c^2 = 1$ ,  $\tau_s = 2/3$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 3/4$ . A solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  de (5.75) que satisfaz (5.117) assim como a assíntota horizontal  $\bar{\eta} = 0$  das soluções dadas anteriormente são representadas juntamente com a solução  $\bar{\eta} = -1/(2\varepsilon)$  e com uma assíntota vertical. . . . . 160
- 5.11 Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Nas figuras (a) e (b) mostramos as soluções  $\bar{\eta}^+$  e  $\bar{\eta}^-$  dadas por (5.144) e (5.146) assim como (5.145) e (5.146), respectivamente. Em ambos os casos consideramos  $K = 0$ . Na figura (c), mostramos as soluções definidas por (5.147) e (5.148), as quais são denotadas por  $\bar{\eta}^*$  e  $\bar{\eta}^{**}$ , respectivamente, com  $K_1 = K_2 = \ln\left(\varepsilon \frac{2\sqrt{1-\theta}-1}{2(1-\theta)}\right)$ , juntamente com uma assíntota vertical. Na figura (d), as soluções definidas por (5.147) e (5.148), as quais são denotadas por  $\bar{\eta}^*$  e  $\bar{\eta}^{**}$ , respectivamente, são representadas com  $K_1 = K_2 = -4.8$  e  $K_1 = K_2 = -5.7$ . Em todos os casos, os valores dos outros parâmetros são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $\tau_s = 2/3$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 0.1$ . . . . . 162
- 5.12 Algumas soluções de (5.160) que satisfazem (5.75) associadas aos conjuntos  $S_1^+$  e  $S_2^+$  com  $c^2 \cong 0.938502$  e  $c^2 \cong 0.412513$ , respectivamente. Os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $\varepsilon = 0.06$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $\alpha \cong 0.552764$ ,  $\beta_1 \cong -0.804007$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 \cong 1.004062$ ,  $\tau_s = 0.4$  e  $K = 0$ . . . . . 168
- 5.13 Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Nesta figura representa-se uma solução de (5.160) que satisfaz (5.75), a qual está associada ao conjunto  $S_3^+$ . Esta solução é denotada por  $S_3^+$ . Por outro lado, uma solução de (5.76) do tipo (5.81) e que satisfaz (5.75) é também aqui representada. Esta solução é denotada por  $\bar{\eta}^*$ . Os valores dos parâmetros e de  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $c^2 \cong 2.155098$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta_1 \cong -0.804007$ ,  $\beta_2 \cong 0.137701$ ,  $\beta_3 \cong -0.003032$ ,  $\tau_s = 0$  e  $K = 0$ . . . . . 169
- 5.14 Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Nesta figura representam-se duas soluções de (5.172) que satisfazem (5.75). Estas soluções estão associadas ao conjunto  $S_1^+$  e são denotadas por  $\bar{\eta}_i^*(\xi)$  ( $i = 1, 2$ ). Para a solução  $\bar{\eta}_1^*(\xi)$  os valores dos parâmetros são dados por  $\alpha \cong 0.552786$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$  e  $\tau_s \cong 0.416251$ . Por outro lado, para a solução  $\bar{\eta}_2^*(\xi)$  os valores dos parâmetros são dados por  $\alpha = 1$ ,  $\beta_1 \cong -2.222222$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$  e  $\tau_s = 0$ . Em ambos os gráficos, os valores para os restantes parâmetros e para  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $c^2 = 0.85$ ,  $\varepsilon = 0.06$ ,  $\mu = 0.4$  e  $K = 0$ . . . . . 173
- 5.15 Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Várias soluções de (5.172) que satisfazem (5.75) são apresentadas. Estas soluções estão associadas aos conjuntos  $S_2^+$  e  $S_3^+$ , as quais são denotadas por  $\bar{\eta}_{2i}(\xi)$  e  $\bar{\eta}_{3i}(\xi)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), respectivamente. Note-se que  $\bar{\eta}_{21}$  é dada através do caso iii). Por sua vez,  $\bar{\eta}_{22}$  e  $\bar{\eta}_{31}$  são deduzidas através do caso iv). As restantes soluções estão associadas ao caso v). Os parâmetros respeitantes às soluções representadas nesta figura são dados na tabela 5.1. Em todos os gráficos, os valores de  $a_c^2$  e de  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$  e  $K = 0$ . . . . . 174

- 5.16 Algumas soluções  $\eta(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a) mostramos as soluções associadas ao conjunto  $S_2^+$  para quatro valores de  $\varrho$  dados por  $\varrho = -1$ ,  $\varrho = -0.8$ ,  $\varrho = -0.5$  e  $\varrho = -0.2$ . Nas figuras (b) e (c) apresentamos algumas das soluções associadas aos conjuntos  $S_3^-$  e  $S_3^+$ , respectivamente, para diversos valores de  $\varrho$ ,  $a_c$ ,  $\varepsilon$  e  $\mu$ . Mais concretamente, na figura (b) consideramos  $a_c = 5$ . Por outro lado, na figura (c) toma-se  $a_c = 0.3$  e  $\mu = \varepsilon = 1$ . Em ambos os casos  $\varrho = -0.5$ ,  $\varrho = 0$  e  $\varrho = 0.5$ . Na figura (d), as soluções associadas ao conjunto  $S_4$  para  $\varrho$  dado por  $\varrho = -2$ ,  $\varrho = -0.5$  e  $\varrho = -0.05$  são ilustradas. Em todos os gráficos, os valores dos outros parâmetros livres e de  $K_{21}$  são dados por  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = (-15/28)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$ ,  $\tau_s = 0$ ,  $K_{21} = 1$  e, com a exceção da figura (c),  $\mu = 0.1$  e  $\varepsilon = 0.01$ . . . . . 182
- 5.17 Algumas soluções  $\eta(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a) mostramos as soluções associadas ao conjunto  $S_1$  para  $a_c = 1$  e  $K_{21} = 0$ , enquanto que na figura (b) ilustramos as soluções associadas a  $S_2^+$  e  $S_3^+$  com  $K_{21} = -1$  e  $\varrho = -1$ . O valor de  $a_c$  para a solução associada a  $S_3^+$  é  $a_c = 1$ . Na figura (c), uma solução periódica é apresentada a qual está associada ao conjunto  $S_4$  para  $K_{21} = 1$  e  $\varrho = 1$ . Em todos os gráficos, os valores dos outros parâmetros livres são dados por  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = (-15/28)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$ ,  $\tau_s = 0$ ,  $\mu = 0.1$  e  $\varepsilon = 0.01$ . Também representamos as assíntotas verticais aos gráficos em todas as figuras. . . . . 183
- 5.18 Soluções do tipo onda de translação,  $\eta(\xi)$ , como função de  $\xi = a_c X - cT$  dadas por (5.229)–(5.232) e associadas aos conjuntos  $S_1^-$  e  $S_2^-$  com  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = (-15/28)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$  e  $\tau_s = 0$ . Em todos os casos consideramos que  $\alpha_0 = 1$  e que os restantes parâmetros livres são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $\gamma = 1$  assim como  $K_{21} = 1$ . A solução trivial ou nula é também representada. . . . . 185
- 5.19 Soluções do tipo onda de translação  $\eta(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Nas figuras (a) e (b) mostramos as soluções dadas por (5.236) e (5.239) bem como (5.237) e (5.239). As soluções dadas por (5.236) ( $S_1^{[2,4]}$ ) e (5.239) para  $\tau_s = 0$  e  $\tau_s = 0.025$  são ilustradas na figura (a). As soluções associadas aos conjuntos (5.236) ( $S_1^{[2,4]}$ ) e (5.237) ( $S_1^{[4,4]}$ ) para  $\tau_s = 0$  são representadas na figura (b). Em ambos os casos, os restantes parâmetros livres são dados por  $\alpha_{-1} = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K_{21} = -1$ . As assíntotas verticais aos gráficos juntamente com a solução trivial ou nula são também ilustradas. . . . . 187
- 5.20 Quadrados das velocidades de propagação da onda  $c^2$  associados aos conjuntos de soluções dados por (5.236) ( $S_1^{[2,4]}$ ) e (5.237) ( $S_1^{[4,4]}$ ) como função do número de Bond  $\tau_s$ . Em ambos os casos, os parâmetros livres considerados são  $\alpha_{-1} = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K_{21} = -1$ . . . . . 187
- 5.21 Soluções do tipo onda de translação,  $\eta(\xi)$ , como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a) mostram-se algumas das soluções negativas e associadas a  $S_1^+$  para  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_s = 0.05$  e  $\tau_s = 0.09$ . Soluções positivas e correspondentes a  $S_1^-$  são ilustradas na figura (b) para  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_s = 0.2$  e  $\tau_s = 0.4$ . Em ambos os casos, os valores dos restantes parâmetros livres e de  $K_{21}$  são dados por  $\alpha_0 = 0$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K_{21} = 0$ . A solução trivial ou nula assim como uma assíntota vertical aos gráficos também são representadas. . . . . 189

# Lista de Tabelas

2.1	Teste de refinamento da malha. . . . .	47
2.2	Parâmetros usados na geração da onda marítima de superfície por meio da condição de fronteira do tipo Dirichlet. . . . .	47
3.1	Definição das fracções $(T_1 T_7)/(T_2 T_3)$ para diversos valores de $\alpha$ e para os modelos de sexta e quarta ordem. . . . .	70
3.2	Erros relativos $l^2$ (%) entre a malha mais grossa e as malhas mais finas nos pontos $P_0 = (3, 3)$ (m) e $P_1 = (0, 0)$ (m). . . . .	94
4.1	Média dos erros relativos $l^2$ entre as soluções numéricas e as soluções exactas para os modelos KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$ e $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) com $\tau = 0.1$ e KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$ e $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) com $\tau = 0.01$ . Nas colunas $l^2$ -KdV e $l^2$ -KdV-BBM considera-se um passo de tempo $\Delta t = 0.001$ enquanto que na coluna $l^2$ -KdV-BBM* um passo de tempo $\Delta t = 0.00005$ é assumido. . . . .	122
5.1	Valores dos parâmetros $\alpha$ , $\beta_1$ , $\beta_2$ , $\beta_3$ , $\tau_s$ , $c^2$ , $\mu$ e $\varepsilon$ associados às soluções $\bar{\eta}(\xi)$ de (5.172) que satisfazem (5.75) as quais são apresentadas na figura 5.15. Note-se que os valores com seis casas decimais são aproximados. . . . .	174



# Lista de Símbolos

- $A$  Valor característico da amplitude da onda, página 18
- $\mathcal{A}^h$  Espaço de dimensão finita da função incógnita  $\eta^h$  associado ao método dos elementos finitos, página 80
- $\mathcal{A}$  Amplitude ou coeficiente para definir a amplitude de uma onda de translação associada a uma equação do tipo Boussinesq, página 144
- $\mathcal{A}_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) Amplitude ou coeficientes para definir as amplitudes de ondas de translação associadas a equações do tipo Boussinesq, página 162
- $A_s$  Amplitude máxima da perturbação do fundo da região ocupada pelo fluido, página 53
- $a$  Amplitude máxima da elevação da superfície da onda, página 1
- $\mathbf{a}$  Forma bilinear associada à formulação variacional da equação do tipo KdV-BBM, página 115
- $a_0$  Amplitude da onda, página 138
- $a_i$  ( $i = 1, 2$ ) Amplitudes das ondas na forma adimensional associadas a um modelo do tipo Boussinesq, página 28
- $a_3$  Coeficiente associado à magnitude do gradiente do potencial transformado do fluido com respeito a  $\xi^*$ , página 28
- $a_4$  Coeficiente associado à variável  $\xi^*$  utilizado para definir uma solução de um modelo do tipo Boussinesq, página 28
- $a_c$  Constante real associada à transformação de variável de onda de translação, página 143
- $a_0^*$  Amplitude da onda na forma adimensional, página 138
- $\mathbf{a}_i$  ( $i = 1, 2$ ) Formas bilineares associadas à formulação variacional do sistema do tipo Boussinesq, página 80
- $\tilde{a}_i$  ( $i = 1, 2$ ) Amplitudes das ondas para um modelo do tipo Boussinesq, página 27
- $\tilde{a}_3$  Magnitude da velocidade do fluido na direcção do eixo  $ox$  para um modelo do tipo Boussinesq, página 27
- $\hat{a}_i$  ( $i = 1, 2$ ) Amplitudes das ondas para um modelo de Nwogu, página 28

- $B$  Coeficiente associado ao potencial transformado da velocidade do fluido, página 63
- $\mathcal{B}^h$  Espaço de dimensão finita para a função incógnita  $\Phi_\alpha^h$  associado ao método dos elementos finitos, página 80
- $\mathcal{B}_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) Coeficientes utilizados no capítulo 5 e associados a soluções de determinadas equações do tipo Boussinesq, página 144
- $B_i$  ( $i = 0, \dots, 8$ ) Coeficientes associados ao sistema de Boussinesq, página 65
- $B_{NOAA}(x, y)$  Função de interpolação dos dados da NOAA, página 53
- $b$  Magnitude do potencial transformado da velocidade do fluido, página 22
- $b_{1n}, b_{2m}$  ( $n = -l_1, \dots, l_2, m = -l_3, \dots, l_4$ ) Coeficientes associados ao método de expansão Exp, página 8
- $b_{ik}$  ( $i = 3, 4, k = -N, \dots, N$ ) Coeficientes associados aos métodos de expansão Tanh e  $G'/G$ , página 8
- $b_0(z)$  Função relacionada com a magnitude do potencial da velocidade do fluido, página 139
- $b_0^*(z^*)$  Função relacionada com a magnitude do potencial da velocidade do fluido na forma adimensional, página 138
- $\hat{b}(z)$  Função relacionada com a magnitude do potencial da velocidade do fluido, página 67
- $C_i$  ( $i = 0, \dots, 8$ ) Coeficientes associados à equação integro-diferencial de Boussinesq de sexta-ordem, página 137
- $C_p$  Velocidade de fase, página 23
- $\bar{C}_p$  Velocidade de fase normalizada, página 68
- $\tilde{C}_1$  Coeficiente auxiliar associado às soluções da forma onda de translação de uma determinada equação diferencial do tipo Boussinesq, página 166
- $\tilde{C}_p$  Velocidade de fase normalizada associada à equação KdV-BBM linearizada e semi-discreta, página 118
- $C^2$  Espaço de funções cujas derivadas até à ordem dois, inclusivamente, existem e são contínuas, página 83
- $\tilde{C}_{p,i}$  ( $i = \text{KdV, KdV-BBM, C.L.}$ ) Limites das velocidades de fase associadas às equações linearizadas e semi-discretas KdV e KdV-BBM assim como a velocidade de fase normalizada associada ao modelo C.L., página 119
- $c$  Velocidade de propagação da onda, página 1
- $c^*$  Velocidade de propagação da onda na forma adimensional, página 107
- $c_i, c_4^j$  ( $i = 0, \dots, 4, j = 0, 1$ ) Coeficientes auxiliares ao cálculo do gradiente de empolamento da onda, página 76
- $c_j$  ( $j = a, b$ ) Velocidades de propagação das ondas nas formas adimensionais, página 124

- $\hat{c}$  Magnitude da velocidade da onda, página 29
- $D_i, \hat{D}_j$  ( $i = 0, \dots, 9, j = 1, 2$ ) Coeficientes associados a uma determinada equação do tipo Boussinesq, página 136
- $D(\phi)$  Termo dissipativo introduzido na dedução de um determinado sistema de Boussinesq, página 19
- $D(\Delta x, \tilde{k}), D^r(\Delta x, \tilde{k})$  Funções auxiliares utilizadas para definir a relação de dispersão da equação KdV-BBM semi-discreta, página 118
- $D_1(\eta)$  Termo dissipativo considerado na condição de fronteira cinemática imposta na superfície livre da onda, página 59
- $D_2(\phi)$  Termo dissipativo considerado na condição de fronteira dinâmica imposta na superfície livre da onda, página 60
- $D^*$  Coeficiente associado à função de fonte de um determinado sistema do tipo Boussinesq, página 29
- $\hat{D}(\hat{\xi})$  Função auxiliar utilizada para deduzir uma condição do tipo CFL associada ao esquema C/DG-FEM, página 89
- $\tilde{D}(\Delta x, \tilde{k})$  Função utilizada na definição da relação de dispersão associada a determinadas equações de Boussinesq semi-discretas, página 88
- $\tilde{D}_{B_5}(\Delta x, \tilde{k}), \tilde{D}_{(0, B_8)}^0(\Delta x, \tilde{k}), \tilde{D}_{(B_6, B_7)}^{\tau_1}(\Delta x, \tilde{k}), \tilde{D}_{(B_1, B_0)}^{\tau_2}(\Delta x, \tilde{k})$  Funções auxiliares utilizadas na definição de  $\tilde{D}(\Delta x, \tilde{k})$ , página 88
- $d_i^j$  ( $j = 0, 1, 2, i = 0, \dots, 3$ ) Factores auxiliares para o cálculo do gradiente de empolamento da onda, página 75
- $d(x, y)$  Função que designa a distância entre um ponto  $(x, y) \in \Omega_S$  e a intersecção de  $\Gamma$  com a fronteira de  $\Omega_S$ , página 30
- $d_{\Omega_S}$  Diâmetro da camada de esponja, página 30
- $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) Vectores da base canónica do referencial Cartesiano, página 2
- $F$  Função genérica usada para definir uma equação de evolução não linear com derivadas parciais na forma canónica, página 8
- $\mathbf{F}$  Vector associado à discretização de um determinado sistema do tipo Boussinesq através do método dos elementos finitos, página 25
- $F_a(f_1, f_2)$  Função auxiliar utilizada na formulação variacional associada ao esquema C/DG-FEM, página 82
- $F_{\mathbb{L}}^{ij}(f_1, f_2)$  ( $i, j = 1, 2$ ) Funções auxiliares utilizadas na formulação variacional associada ao esquema C/DG-FEM, página 82
- $f_1, f_2$  Funções genéricas auxiliares utilizadas para definir  $F_a(f_1, f_2)$  e  $F_{\mathbb{L}}^{ij}(f_1, f_2)$  ( $i, j = 1, 2$ ), página 82
- $f(t)$  Função arbitrária de integração dependente do tempo, página 18

- $G(\xi)$  Solução geral de uma determinada equação diferencial ordinária, página 8
- $G_i(\xi)$  ( $i = 1, 2$ ) Soluções linearmente independentes de uma determinada equação diferencial ordinária, página 176
- $g$  Aceleração da gravidade, página 1
- $g(T)$  Função arbitrária de integração dependente do tempo, página 137
- $H$  Valor característico da profundidade da região ocupada pelo fluido, página 1
- $H^1$  Espaço de Hilbert, página 80
- $h$  Função que representa a profundidade medida desde o fundo do oceano até ao nível da água em repouso, página 4
- $h^*$  Função que representa a profundidade medida desde o fundo do oceano até ao nível da água em repouso na forma adimensional, página 19
- $h_e^+, h_e$  Funções que dependem do diâmetro dos elementos  $\Omega_e^+$  e  $\Omega_e$ , respectivamente, página 81
- $h_m$  Profundidade mínima entre o nível da água em repouso e o fundo da região ocupada pelo fluido de geometria em cunha ou plataforma, página 32
- $\text{Im}(\omega)$  Parte imaginária do número complexo  $\omega$ , página 32
- $K$  Constante arbitrária de integração, página 110
- $K_{21}$  Constante associada a determinadas soluções relacionadas com o método de expansão  $G'/G$ , página 178
- $K_e$  Constante arbitrária de integração, página 175
- $K_i$  ( $i = 1, 2$ ) Constantes arbitrárias de integração, página 160
- $K_f(t)$  Função de integração dependente do tempo, página 29
- $K_n$  Solução constante de uma determinada equação do tipo Boussinesq, página 178
- $K_{ni}$  ( $i = 1, 2$ ) Constantes associadas a soluções de uma determinada equação diferencial ordinária de segunda ordem, página 178
- $\bar{K}_i$  ( $i = 1, 2$ ) Valores dos limites associados às ordens de convergência do esquema numérico aplicado às equações do tipo KdV-BBM, página 120
- $k$  Número de onda, página 22
- $k_0$  Número inteiro associado a soluções de uma determinada equação do tipo Boussinesq, página 147
- $k_i$  ( $i = 1, 2$ ) Números de onda críticos, página 23
- $k^*$  Número de onda na forma adimensional, página 138
- $\tilde{k}$  Número de onda associado a determinadas equações de Boussinesq semi-discretas, página 89

$\mathcal{K}$	Matriz de rigidez, página 31
$L$	Forma linear associada à formulação variacional da equação do tipo KdV-BBM, página 115
$L$	Valor característico do comprimento da onda, página 18
$L^2$	Espaço de Hilbert das funções quadraticamente integráveis, página 80
$L_i (i = 1, 2)$	Formas lineares associadas à formulação variacional do sistema do tipo Boussinesq, página 80
$\mathcal{L}_h^i (i = 1, \dots, 4)$	Termos envolvidos num determinado sistema matricial do tipo Boussinesq, página 63
$l$	Comprimento da região em cunha ou o dobro da altura do triângulo associado à região em plataforma, página 32
$l_i (i = 1, \dots, 4)$	Inteiros positivos associados ao método de expansão Exp, página 8
$l^2$	Norma Euclideana de um vector, página 94
$M$	Matriz dos coeficientes associada à discretização de um determinado sistema do tipo Boussinesq utilizando o método dos elementos finitos, página 25
$M(t)$	Matriz dos coeficientes dependente do tempo e associada à discretização de um determinado sistema de Boussinesq através do esquema C/DG-FEM , página 83
$M_n$	Matriz dos coeficientes dependente do tempo e avaliada no instante $t = n\Delta t$ e associada a uma discretização de um determinado sistema de Boussinesq através do esquema C/DG-FEM , página 83
$\mathcal{M}$	Matriz de massa, página 31
$m$	Número inteiro, página 4
$m$	Unidade de comprimento correspondente ao metro, página 23
$N$	Inteiro positivo associado ao método de expansão Tanh, página 8
$N_e$	Número de elementos de uma partição de elementos triangulares do domínio computacional, página 80
$N_h$	Número de arestas na fronteira do domínio computacional, página 80
$N_i$	Número de arestas de uma partição de elementos triangulares interiores ao domínio computacional, página 80
$\mathbb{N}$	O conjunto dos números naturais, página 4
$\mathcal{N}_h^i (i = 1, 2)$	Termos de um determinado sistema matricial do tipo Boussinesq, página 63
$n$	Número inteiro, página 4
$n_i (i = 1, 2)$	Parâmetros experimentais associados à camada de esponja, página 30
$\mathbf{n}$	Vector unitário e normal à fronteira do domínio computacional e dirigido para o seu exterior, página 24

- $\mathbf{n}^+, \mathbf{n}^-$  Vectors unitários e normais às arestas e dirigidos para o exterior de  $\Omega_e^+$  e  $\Omega_e^-$ , respectivamente, página 81
- $O(\dots)$  Ordem de uma determinada equação diferencial ou sistema de equações diferenciais do tipo Boussinesq obtidas através de desenvolvimentos assintóticos, página 4
- $ox, oy, oz$  Eixos do referencial Cartesiano associados às variáveis  $x, y$  e  $z$ , respectivamente, página 1
- $P$  Pressão do fluido, página 18
- $P_2(\Omega_e)$  Espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 2 definidos sobre  $\Omega_e$ , página 80
- $\mathcal{P}(\Omega)$  Partição regular composta por elementos triangulares do domínio  $\Omega$ , página 80
- $P_a$  Pressão atmosférica, página 4
- $P_i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) Pontos do domínio computacional, página 44
- $P_i$  ( $i = 1, 2$ ) Espaço dos polinómios de grau 1 ou 2, respectivamente, página 10
- $p$  Número inteiro associado ao expoente de soluções predefinidas de equações do tipo Boussinesq, página 162
- $p_{ij}$  ( $i = -m - j, \dots, m + j, j = 1, \dots, 6$ ) Coeficientes associados às derivadas da função  $s(\xi)$ , página 177
- $\bar{p}$  Período da onda, página 47
- $Q_i$  ( $i = -N, \dots, N$ ) Coeficientes associados a uma determinada equação algébrica polinomial, página 177
- $Q_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) Coeficientes associados a uma equação polinomial de quarto grau, página 171
- $\tilde{Q}_j, \tilde{Q}_r, \tilde{Q}_{d,j}$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) Coeficientes auxiliares associados a determinadas equações polinomiais de quarto grau, página 172
- $\bar{Q}_i$  ( $i = 0, 1, 2, d, q, r, s, t$ ) Coeficientes associados a determinadas equações polinomiais de terceiro grau, página 172
- $q_i$  ( $i = 1, 2$ ) Coeficientes de peso introduzidos no esquema C/DG-FEM, página 81
- $q_{ij}$  ( $i \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3$ ) Coeficientes associados aos termos não lineares de uma determinada equação diferencial ordinária, página 177
- $\mathbb{R}$  O conjunto dos números reais, página 28
- $\text{Re}(\omega)$  Parte real do número complexo  $\omega$ , página 34
- $r$  Parâmetro livre utilizado para condensar as equações semi-discretas associadas ao esquema C/DG-FEM aplicado à equação KdV-BBM, página 121
- $r_i$ , ( $i = 1, 2$ ) Parâmetros livres utilizados para condensar as equações semi-discretas associadas ao esquema C/DG-FEM aplicado ao sistema de Boussinesq, página 89

- $r_i^\pm$ , ( $i = 1, 2$ ) Soluções de uma equação característica de uma determinada equação diferencial ordinária, página 179
- $r_{\text{im}}$ ,  $r_{\text{re}}$  Parte imaginária e parte real de uma solução da equação característica de uma determinada equação diferencial ordinária, respectivamente, página 180
- $S_0$  Velocidade constante do objecto que se move no fundo da região ocupada pelo fluido, página 48
- $S_i$  ( $i = 1, 4$ ) Conjunto de soluções de um determinado sistema algébrico associado a uma equação do tipo Boussinesq, página 178
- $S_i^{[j,k]}$  ( $i = 1, 2, 3$ ,  $j, k = 1, 2, 4$ ) Conjuntos de soluções, i.e., os valores de  $\alpha$  e  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) associados aos desenvolvimentos de Padé do quadrado da velocidade de fase dada pela teoria linear de Airy, página 140
- $S_i^\pm$  ( $i = 1, 2, 3$ ) Conjuntos de soluções de determinados sistemas algébricos associados a equações do tipo Boussinesq, página 166
- $S_{AB}$  Conjuntos de soluções  $\theta$  de uma determinada equação algébrica não linear, página 170
- $S(x, t)$  Função de fonte, página 29
- $S_j(\xi)$  ( $j = \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon\mu^2$ ) Termos não lineares de uma determinada equação diferencial ordinária, página 177
- $S_i(h)$  ( $i = 1, 2$ ) Funções de fonte associadas a um determinado sistema do tipo Boussinesq, página 63
- $s(\xi)$  Solução de uma determinada equação diferencial ordinária, página 8
- $s$  Unidade de medida do tempo correspondente ao segundo, página 23
- $s_i$  ( $i = 1, 2$ ) Coeficientes de peso utilizados no esquema C/DG-FEM para resolver a equação KdV-BBM, página 116
- $T, \tilde{T}, \hat{T}$  Variáveis auxiliares utilizadas para designar a variável temporal transformada na forma adimensional, página 108
- $T_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) Coeficientes associados à relação de dispersão, página 68
- $\mathcal{T}_h^i$  ( $i = 1, 2$ ) Termos de um determinado sistema matricial do tipo Boussinesq, página 63
- $t$  Variável que designa o tempo. Esta variável é dimensional excepto indicação contrária, página 1
- $t^*$  Variável para designar o tempo na forma adimensional, página 7
- $t_i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) Variável temporal na forma dimensional avaliada em alguns instantes, página 51
- $t_n$  Variável temporal associada às equações discretas ( $t_n = n\Delta t$ ), página 25
- $t_s$  Variável temporal na forma dimensional avaliada num certo instante, página 47
- $U$  Referente a  $(\eta, \Phi)$ , página 25

$U_t$	Referente a $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$ , página 25
$U_n$	Valor de $U$ avaliado em $t_n$ , página 25
$U_{n+1}^{(i)}$ ( $i = 0, 1$ )	Valores preditos e corrigidos de $U_n$ , respectivamente, página 25
$U_r$	Número de Ursell, página 20
$u$	Componente da velocidade do fluido na direcção do eixo $ox$ definida através do potencial transformado, página 134
$\bar{\mathbf{u}}$	Vector definido pelas componentes médias do vector velocidade do fluido nas direcções dos eixos $ox$ e $oy$ , página 2
$\mathbf{u}$	Vector velocidade do fluido, página 4
$\mathbf{u}_\alpha$	Vector velocidade do fluido avaliada no nível $z = -\alpha h(x, y)$ , página 5
$\bar{u}_x, \bar{u}_y$	Componentes médias do vector velocidade do fluido nas direcções dos eixos $ox$ e $oy$ , respectivamente, página 2
$\mathcal{V}^h$	Espaço de dimensão finita para as funções teste $\vartheta_i^h (i = 1, 2)$ associado ao método dos elementos finitos C/DG-FEM, página 80
$v$	Função escalar genérica associada à definição do operador da média, página 81
$v^+, v^-$	Valores da função escalar $v$ quando vistos a partir de $\Omega_e^+$ e $\Omega_e^-$ , respectivamente, página 81
$\mathbf{v}$	Função vectorial genérica associada à definição do operador do salto, página 81
$\mathbf{v}^+, \mathbf{v}^-$	Valores da função vectorial genérica $\mathbf{v}$ quando vistos a partir de $\Omega_e^+$ e $\Omega_e^-$ , respectivamente, página 81
$W$	Coefficiente auxiliar associado a um conjunto de soluções de um determinado sistema algébrico, página 179
$W_i$ ( $i = 0, \dots, 4$ )	Coefficientes auxiliares associados aos conjuntos de soluções de determinados sistemas algébricos, página 184
$W(x, t)$	Termo da tensão superficial, página 129
$w(\xi)$	Função auxiliar associada ao método de expansão $G'/G$ , página 176
$X$	Coordenada espacial móvel resultante de uma determinada transformação de variáveis, página 108
$\bar{X}(x, t)$	Função auxiliar usada para definir o fundo da região ocupada pelo fluido, página 48
$\hat{X}$	Variável de integração, página 137
$x, y, z$	Coordenadas Cartesianas na forma dimensional excepto indicação contrária, página 1
$x^*, y^*, z^*$	Coordenadas Cartesianas na forma adimensional, página 7

$\hat{x}$	Variável de integração, página 108
$x_0$	Coordenada fixa utilizada para definir o fundo móvel da região ocupada pelo fluido, página 51
$x_c(t), x_l(t), x_r(t)$	Funções auxiliares usadas para definir o fundo da região ocupada pelo fluido, página 51
$x_j$ ( $j = 1, \dots, n - 1$ )	Nós da malha computacional, página 31
$x_s$	Coordenada fixa utilizada para definir a linha central da banda de geração da onda associada à função de fonte, página 29
$(x_c, y_c)$	Epicentro do deslocamento do fundo do mar, página 53
$Y_1$	Solução real de uma determinada equação polinomial de terceiro grau, página 172
$\bar{Y}(y)$	Função auxiliar usada para definir o fundo da região ocupada pelo fluido, página 51
$\mathbb{Z}$	O conjunto dos números inteiros, página 147
$\alpha$	Parâmetro de Nwogu associado a um nível arbitrário do fluido onde as componentes do vector velocidade são avaliadas, página 5
$\alpha_k$	Parâmetro arbitrário introduzido na equação do tipo KdV-BBM, página 110
$\alpha_i$ ( $i = -m, \dots, m, m \in \mathbb{N}$ )	Coefficientes associados a uma solução de uma determinada equação diferencial ordinária, página 176
$\alpha_s$	Gradiente de empolamento da onda, página 75
$\bar{\alpha}_i$ ( $i = 1, \dots, 4$ )	Coefficientes do modelo BEV de Nwogu, página 5
$\bar{\alpha}$	Valor otimizado para o parâmetro $\alpha$ , página 70
$\tilde{\alpha}_i$ ( $i = 0, 1, 2$ )	Coefficientes auxiliares associados a soluções de uma determinada equação de Boussinesq, página 154
$\beta$	Parâmetro associado à largura da banda de geração da onda, página 29
$\beta_i$ ( $i = 1, 2$ )	Parâmetros livres introduzidos para melhorar as propriedades dispersivas de um determinado sistema do tipo Boussinesq, página 64
$\beta_3$	Parâmetro livre introduzido para melhorar as propriedades dispersivas de uma determinada equação do tipo Boussinesq, página 135
$\bar{\beta}_i$ ( $i = 1, 2$ )	Valores otimizados para os parâmetros $\beta_i$ , página 70
$\Gamma$	Fronteira do domínio computacional $\Omega$ , página 24
$\Gamma_h$	Fronteira do domínio computacional $\Omega$ e associada ao esquema C/DG-FEM, página 80
$\Gamma_r$	Subconjunto de $\Gamma$ onde são consideradas as fronteiras reflexivas, página 79
$\tilde{\Gamma}$	Arestas da interface entre os elementos triangulares do domínio computacional, página 80

- $\gamma$  Coeficiente associado a uma determinada equação diferencial ordinária e linear de segunda ordem, página 9
- $\Delta h$  Valor máximo da espessura do objecto deslizando, página 51
- $\Delta t$  Passo de tempo relativo à discretização numérica, página 25
- $\Delta x$  Diâmetro de uma malha uniforme, página 31
- $\delta_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) Parâmetros dimensionais associados à equação KdV-BBM, página 111
- $\hat{\delta}_i$  ( $i = 1, 2$ ) Parâmetros livres na forma adimensional e associados à equação KdV-BBM, página 110
- $\varepsilon$  Parâmetro de onda de pequena amplitude, página 4
- $\eta$  Elevação da superfície da onda, página 1
- $\eta_i$  ( $i = 1, 2$ ) Coeficientes associados a soluções de uma determinada equação do tipo Boussinesq, página 153
- $\eta^h$  Função incógnita para a elevação da superfície da onda marítima associada ao esquema C/DG-FEM, página 80
- $\eta^*$  Elevação da superfície da onda na forma adimensional, página 19
- $\hat{\eta}$  Função transformada para a elevação da superfície da onda, página 110
- $\hat{\eta}(x)$  Função auxiliar para definir a elevação da superfície da onda para um determinado sistema do tipo Boussinesq linearizado, página 30
- $\hat{\eta}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) Função  $\hat{\eta}$  avaliada em  $x_j$ , página 31
- $\bar{\eta}$  Função transformada para a elevação da superfície da onda, página 143
- $\bar{\eta}_i$  ( $i = 1, 2$ ) Funções auxiliares utilizadas para definir determinadas ondas de translação associadas a equações do tipo Boussinesq, página 163
- $\bar{\eta}^k$  ( $k = +, -, *, **$ ) Ondas de translação associadas a determinadas equações do tipo Boussinesq, página 159
- $\bar{\eta}_j^*$  ( $j = 1, 2$ ) Ondas de translação associadas a determinadas equações do tipo Boussinesq, página 173
- $\bar{\eta}_{jk}$  ( $j = 2, 3, k = 1, \dots, 4$ ) Ondas de translação associadas a determinadas equações do tipo Boussinesq, página 173
- $\theta$  Constante real positiva associada com o quadrado da velocidade de propagação da onda, página 143
- $\tilde{\theta}$  Variável auxiliar relacionada com  $\theta$ , página 171
- $\vartheta_i$  ( $i = 1, 2$ ) Funções teste associadas à formulação variacional do sistema ZTC melhorado, página 24
- $\vartheta^h, \vartheta_i^h$  ( $i = 1, 2$ ) Funções teste associadas à formulação variacional de um determinado sistema do tipo Boussinesq, página 80

$\lambda_s$	Parâmetro introduzido no potencial transformado da velocidade do fluido para otimizar o gradiente de empolamento da onda, página 78
$\mu$	Parâmetro de onda longa, página 4
$\bar{\mu}$	Viscosidade dinâmica do fluido, página 19
$\bar{\mu}_i$ ( $i = 1, 2$ )	Viscosidades dinâmicas do fluido, página 60
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido, página 19
$\nu_i$ ( $i = 1, 2$ )	Valores da viscosidade cinemática do fluido, página 23
$\nu^*$	Viscosidade cinemática do fluido na forma adimensional, página 21
$\nu_i^*$ ( $i = 1, 2$ )	Viscosidades cinemáticas do fluido nas formas adimensionais, página 62
$\xi$	Variável auxiliar definida por uma transformação de Galileu, página 8
$\hat{\xi}$	Variável auxiliar utilizada na dedução de uma condição CFL, página 89
$\tilde{\xi}$	Variável auxiliar definida por uma transformação de Galileu, página 109
$\hat{\xi}_0$	Valor onde é atingido o máximo absoluto da função $\tilde{D}(\Delta x, \hat{\xi})$ , página 120
$\rho$	Densidade do fluido, i.e., a massa do fluido por unidade de volume, página 5
$\varrho$	Coefficiente associado a uma determinada equação diferencial ordinária e linear de segunda ordem, página 9
$\varsigma$	Coefficiente associado ao termo não linear da equação KdV-BBM, página 111
$\tau, \tau_i, \tau_i^h$ ( $i = 1, 2$ )	Parâmetros associados aos coeficientes de penalização do esquema C/DG-FEM, página 81
$\tau_s$	Coefficiente da tensão superficial, página 129
$\tau_s^*$	Número de Bond, página 129
$\bar{\tau}, \bar{\tau}^h$	Coefficientes de penalização associados ao esquema C/DG-FEM aplicado a uma equação do tipo KdV-BBM, página 116
$\bar{\tau}_i, \bar{\tau}_i^h$ ( $i = 1, 2$ )	Coefficientes de penalização associados ao esquema C/DG-FEM aplicado a um sistema do tipo Boussinesq, página 81
$\Upsilon_{(k,j)}^f, \tilde{\Upsilon}_{(k,j)}^f$ ( $k = 1, 3/2, 2, j = 1, 3/2, f = \eta, \Phi$ )	Coefficientes auxiliares utilizados na definição do sistema semi-discreto associado ao esquema C/DG-FEM, página 84
$\Upsilon_{(k,j)}^f, \tilde{\Upsilon}_{(k,j)}^f$ ( $k = j - 1/2, j, j + 1/2, j = 2, \dots, N - 1, f = \eta, \Phi$ )	Coefficientes auxiliares utilizados na definição do sistema semi-discreto associado ao esquema C/DG-FEM, página 84
$\Upsilon_{(k,j)}^f, \tilde{\Upsilon}_{(k,j)}^f$ ( $k = N - 1, N - 1/2, N, j = N - 1/2, \dots, N, f = \eta, \Phi$ )	Coefficientes auxiliares utilizados na definição do sistema semi-discreto associado ao esquema C/DG-FEM, página 84
$\Phi$	Potencial transformado da velocidade do fluido, página 22

$\bar{\Phi}_\alpha$	Potencial transformado da velocidade do fluido, o qual depende do parâmetro de Nwogu $\alpha$ , página 63
$\Phi_\alpha^h$	Função incógnita para o potencial transformado da velocidade do fluido associada ao esquema C/DG-FEM, página 80
$\hat{\Phi}(x)$	Função auxiliar usada para definir o potencial transformado da velocidade do fluido associado a um sistema do tipo Boussinesq linearizado, página 30
$\hat{\Phi}_j$ ( $j = 1, \dots, n$ )	Função $\hat{\Phi}$ avaliada em $x_j$ , página 31
$\phi$	Potencial da velocidade do fluido, página 18
$\phi^*$	Potencial da velocidade do fluido na forma adimensional, página 19
$\bar{\phi}$	Potencial médio da velocidade do fluido, página 5
$\phi_0$	Potencial da velocidade do fluido avaliado em $z = 0$ , página 20
$\phi_1$	Derivada do potencial da velocidade do fluido com respeito à variável $z$ e avaliada em $z = 0$ , página 20
$\phi_{1m}$ ( $m \in \mathbb{N}$ )	Funções auxiliares utilizadas para definir $\phi_1$ , página 62
$\phi_\alpha$	Potencial da velocidade do fluido avaliado no nível $z = -\alpha h$ , página 5
$\chi_{[0,4]}(t)$	Função auxiliar utilizada para o fundo móvel da região ocupada pelo fluido, página 53
$\Omega$	Domínio computacional, página 24
$\Omega_e$	Elemento triangular da partição $\mathcal{P}(\Omega)$ , página 80
$\Omega_e^+, \Omega_e^-$	Elementos triangulares adjacentes de uma partição $\mathcal{P}(\Omega)$ , página 81
$\Omega_S$	Subconjunto de $\Omega$ designado por camada de esponja, página 30
$\omega$	Frequência angular da onda, página 22
$\omega_\alpha$	Frequência angular da onda associada ao modelo linearizado da teoria de Airy, página 112
$\omega_i$ ( $i = 1, 2$ )	Frequências angulares auxiliares utilizadas na definição de $\omega$ , página 67
$\omega_s$	Frequência angular da perturbação do fundo da região ocupada pelo fluido, página 53
$\omega^*$	Frequência angular da onda na forma adimensional, página 138
$\hat{\omega}$	Frequência angular associada às equações discretas, página 32
$\bar{\omega}_1$	Componente normalizada da frequência angular $\omega_1$ , página 72
$\nabla$	Operador diferencial definido por $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , página 2
$\nabla_{xyz}$	Operador diferencial definido por $\nabla_{xyz} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ , página 4

- $\nabla_{xz}$  Operador diferencial definido por  $\nabla_{xz} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ , página 128
- $[\cdot]$  Operador do salto, página 81
- $\langle \cdot \rangle$  Operador da média, página 81
- $(\cdot, \cdot)_{\bar{\Gamma}}$  O produto interno de  $L^2$  sobre as arestas interiores ao domínio computacional, página 80
- $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_h}$  O produto interno de  $L^2$  sobre as arestas da fronteira do domínio computacional, página 80
- $(\cdot, \cdot)_{\tilde{\Omega}}$  O produto interno de  $L^2$  nos interiores dos elementos da partição associada ao domínio computacional, página 80



# Lista de siglas e abreviaturas

- 2D, 3D Bidimensional e tridimensional, respectivamente, página 20
- 2o-ZTC-P1 Modelo ZTC discretizado por um esquema de elementos finitos convencional e usando-se elementos de Lagrange  $P_1$ , página 83
- 2o-ZTC-P2 Modelo ZTC estendido e discretizado por um esquema de elementos finitos convencional e usando-se elementos de Lagrange  $P_2$ , página 83
- 2o-W-CG-P1 Modelo do tipo Boussinesq de segunda ordem e discretizado por um esquema de elementos finitos convencional usando-se elementos de Lagrange  $P_1$ , página 83
- 2o-W-CG-P2 Modelo do tipo Boussinesq de segunda ordem e discretizado por um esquema de elementos finitos convencional e usando-se elementos de Lagrange  $P_2$ , página 83
- 2o-W-DG-P1 Modelo do tipo Boussinesq de segunda ordem e discretizado por um esquema de elementos finitos descontínuos usando-se elementos de Lagrange  $P_1$ , página 83
- 4o-A Modelo do tipo Boussinesq de quarta ordem e com o parâmetro de Nwogu  $\alpha$ , página 66
- 4o-AB Modelo do tipo Boussinesq de quarta ordem e com os parâmetros livres  $\alpha$  e  $\beta_i$  ( $i = 1, 2$ ), página 66
- 4o-M-CDG-P2 Modelo do tipo Boussinesq moderadamente não linear e de quarta ordem. Este modelo é discretizado por um esquema C/DG-FEM com termos de penalização usando-se elementos de Lagrange  $P_2$ , página 83
- 4o-W-CDG-P2 Modelo do tipo Boussinesq fracamente não linear e de quarta ordem. Este modelo é discretizado por um esquema C/DG-FEM com termos de penalização usando-se elementos de Lagrange  $P_2$ , página 83
- 6o-A Modelo do tipo Boussinesq de sexta ordem e com o parâmetro de Nwogu  $\alpha$ , página 65
- 6o-AB Modelo do tipo Boussinesq de sexta ordem e com os parâmetros livres  $\alpha$  e  $\beta_i$  ( $i = 1, 2$ ), página 66
- BBM Benjamin, Bona e Mahony, página 7
- BEP Modelos do tipo Boussinesq cujas funções incógnita primárias são a elevação da superfície da onda marítima e o potencial da velocidade do fluido, página 2
- BEV Modelos do tipo Boussinesq cujas funções incógnita primárias são a elevação da superfície da onda marítima e as duas componentes horizontais da velocidade do fluido, página 2

CG-FEM Método de Galerkin de elementos finitos contínuos, página 83

C/DG-FEM Método de Galerkin de elementos finitos contínuos/descontínuos, página 10

C.L. Modelo associado à teoria completamente linear de Airy, página 23

C.L.\_D Modelo com termos dissipativos associado à teoria completamente linear de Airy, página 23

CFL Courant-Friedrichs-Lewy, página 11

DF Diferenças finitas, página 6

EDO Equação diferencial ordinária, página 7

EENLDP Equação de evolução não linear com derivadas parciais, página 7

EF Elementos finitos, página 6

EXP Designação para a explosão de um modelo numérico, página 121

Exp Método de expansão Exp, página 8

$G'/G$  Método de expansão  $G'/G$ , página 8

KdV Korteweg e de Vries, página 6

LU Factorização de uma matriz através do método de Crout, página 38

mnts Designação da unidade de tempo do Sistema Internacional min (minuto), página 53

N. E. Designação para uma malha não estruturada, página 94

NOAA *National Oceanic and Atmospheric Administration*, página 53

RLW Modelo regularizado de onda longa, página 17

S. U. Designação para uma malha simétrica e uniforme, página 94

Tanh Método de expansão Tanh, página 8

ZTC Modelo de Zhao et al. (2004), página 15

ZTC\_D Modelo de Zhao et al. (2004) com termos dissipativos, página 23

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Breves notas históricas

Ao observar o movimento de um barco que circulava num canal perto de Edimburgo em 1834, o engenheiro John Scott-Russel identificou uma onda que se propagava na água preservando as suas características, em particular a sua forma, elevação e velocidade. A partir desse momento Russel dedicou-se ao estudo e reprodução experimental deste tipo de ondas de superfície (ver Russel (1837, 1840, 1844) e, e.g., Albuquerque (2002)). A esta onda, Russel chamou de onda de translação, sendo actualmente também designada por onda solitária.

Motivado pelos trabalhos de Russel, M. J. Boussinesq apresentou em 1871 uma expressão analítica para modelar uma onda de translação que se propaga num longo canal rectangular (ver Boussinesq (1871)). Mais especificamente, Boussinesq propôs uma equação para a elevação da superfície da onda, a qual é dada pela expressão seguinte:

$$\eta(x, t) = \frac{4a}{2 + \exp\left(\sqrt{\frac{3a}{H^2}}(x - ct)\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{3a}{H^2}}(x - ct)\right)} = a \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3a}{4H^2}}(x - ct)\right), \quad (1.1)$$

onde  $\eta = \eta(x, t)$  representa a elevação da superfície da onda de amplitude máxima  $a$  e  $H$  designa a batimetria de profundidade constante com respeito ao nível da água em repouso. Um referencial Cartesiano a duas dimensões foi adoptado com o eixo horizontal  $ox$  no nível da água em repouso e com o eixo vertical  $oz$  dirigido para o exterior da região ocupada pelo fluido. Em (1.1) a variável temporal é denotada por  $t$ , enquanto que as constantes  $c$  e  $g$  designam a velocidade de propagação da onda e a aceleração da gravidade, respectivamente. Para deduzir esta solução Boussinesq considerou um escoamento irrotacional de um fluido incompressível e invíscido. A amplitude da onda solitária foi também assumida como sendo muito menor do que a profundidade do canal.

Além disso, Boussinesq confirmou a fórmula empírica apresentada por Russel para a velocidade de propagação da onda solitária. Esta fórmula define a velocidade de propagação da onda como uma função da sua amplitude da forma seguinte:

$$c = \sqrt{g(H + a)}. \quad (1.2)$$

Através da equação anterior podemos concluir que quanto maior for a amplitude  $a$  maior será a velocidade de propagação da onda  $c$  para o mesmo valor de  $H$ . Esta propriedade caracteriza a natureza dispersiva da propagação de ondas na água. Salientamos que as observações experimentais de Russel bem como os resultados teóricos de Boussinesq foram confirmados

por Rayleigh (1876). Os resultados de Boussinesq e de Rayleigh otimizaram a teoria de ondas na água existente à data das suas publicações. De facto, nem a teoria linear de Airy (1841) nem a teoria não linear de Stokes (1847) previam a existência ou a propagação da onda de translação (ver, e.g., Craik (2004, 2005)).

No seguimento da sua investigação em ondas marítimas de superfície, Boussinesq propôs um modelo com uma equação não linear para a propagação bidireccional de uma onda num canal (ver Boussinesq (1872)):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + gH \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{3\eta^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right). \quad (1.3)$$

Posteriormente, Boussinesq desenvolveu os trabalhos anteriores de forma a modelar ondas de superfície em domínios e regimes de propagação mais genéricos. Em particular, um referencial Cartesiano a três dimensões bem como um regime de propagação de ondas de superfície moderadamente longas e de pequena amplitude foram considerados. Note-se que a designação de onda longa é utilizada quando o comprimento característico da onda é grande quando comparado com a profundidade característica da batimetria. Por outro lado, uma onda diz-se de pequena amplitude quando o valor característico da sua amplitude é pequeno quando comparado com o valor característico da profundidade (ver, e.g., Mei et al. (2005)). Este regime é designado por regime ou aproximação de Boussinesq. Neste contexto, Boussinesq apresentou um sistema que pode ser escrito da forma seguinte (ver Boussinesq (1883)):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \bar{\mathbf{u}}) + H \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (1.4a)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + g \nabla \eta + \frac{1}{3} H \nabla \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) = \mathbf{0}, \quad (1.4b)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_x(x, y, t) \mathbf{e}_1 + \bar{u}_y(x, y, t) \mathbf{e}_2$  em que  $\bar{u}_x$  e  $\bar{u}_y$  são as componentes médias do vector velocidade do fluido, integradas na profundidade e nas direcções dos eixos  $ox$  e  $oy$ , respectivamente e  $\eta = \eta(x, y, t)$  representa a elevação da superfície da onda com respeito ao nível da água em repouso. Nas equações anteriores o operador diferencial denotado por  $\nabla$  é definido por  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ .

Desde então, várias classes de modelos foram desenvolvidas com vista a descrever o comportamento hidrodinâmico de ondas marítimas de superfície recorrendo à aproximação de Boussinesq. Mais concretamente, o sistema (1.4) foi generalizado de forma a otimizar as suas características dispersivas assim como a incluir a propagação de ondas sobre batimetrias não constantes. Na secção seguinte, apresentamos alguns dos sistemas do tipo Boussinesq bem como alguns métodos numéricos vulgarmente referidos na literatura e que, em parte, motivaram o estudo apresentado nesta dissertação.

## 1.2 Modelos do tipo Boussinesq e métodos numéricos

Nesta secção, duas classes de modelos de Boussinesq que generalizam o sistema descrito em (1.4) são introduzidas. A primeira classe, diz respeito aos modelos do tipo Boussinesq designados por BEV que têm como funções incógnita primárias a Elevação da superfície da onda marítima e as duas componentes horizontais da velocidade do fluido. Os modelos BEP que têm como funções incógnita primárias a Elevação da superfície da onda marítima e o Potencial da velocidade do fluido constituem a segunda classe de sistemas. Note-se que uma vez conhecendo-se as funções incógnita primárias, a componente vertical da velocidade

do fluido bem como a pressão ficam determinadas nos modelos BEV. Por outro lado, nos modelos BEP o vector velocidade do fluido e a pressão ficam definidos uma vez calculadas as funções incógnita primárias. Salientamos que num problema genérico o número de incógnitas é reduzido de cinco (as três componentes da velocidade do fluido, a pressão e a elevação da superfície da onda) nos modelos BEV para três (o potencial da velocidade do fluido, a pressão e a elevação da superfície da onda) nos modelos BEP.

Para além disto, discutimos alguns dos métodos numéricos habitualmente utilizados para a integração das equações diferenciais dos modelos referidos anteriormente.

Os sistemas do tipo Boussinesq têm sido desenvolvidos de forma a que as suas equações diferenciais permitam simular a geração e a propagação de ondas marítimas de superfície em zonas de profundidade variável tendo em conta os efeitos de dispersão, reflexão, refração e difracção das ondas. Os fenómenos físicos de empolamento da onda assim como interacções não-lineares entre ondas têm também sido modelados. Estes modelos são, no entanto, incapazes de reproduzir com precisão a estrutura vertical das componentes da velocidade das partículas do fluido. Este facto deve-se à redução dimensional dos sistemas, a qual foi realizada por Boussinesq em 1872 (ver Boussinesq (1872)) através do desenvolvimento do potencial da velocidade do fluido numa série de Taylor em torno do ponto  $z = 0$ . Um erro de truncatura foi então originado quando se tomou para o potencial da velocidade do fluido a soma de um número finito de termos desta série. Além disso, efeitos como a rebentação das ondas, inclusão de viscosidade ou efeitos de fricção no fundo têm sido apenas considerados por meio da inclusão de termos adicionais nas equações de Boussinesq. Em geral, a calibração dos parâmetros associados a estes termos depende do caso em estudo.

Em contrapartida, a utilização de modelos baseados na resolução das equações diferenciais de Navier-Stokes com captura de superfície livre permitem uma descrição mais completa da geração e da propagação de ondas sobre batimetrias variáveis e da interacção entre ondas e estruturas físicas. Em particular, o perfil vertical das componentes da velocidade do fluido, o fenómeno de rebentação das ondas assim como a inclusão de termos de viscosidade para a dissipação de energia surgem de forma natural nestes modelos de Navier-Stokes (ver, e.g., Fortes et al. (2012)). No entanto, a implementação computacional destes modelos não é ainda feita de uma forma eficiente de modo a simular problemas físicos de larga escala.

Apesar das limitações dos modelos do tipo Boussinesq atrás referidas, estes são computacionalmente mais viáveis para a modelação de problemas de larga escala. Neste contexto, este tipo de modelos continua a ser fonte de investigação e de desenvolvimento, tanto do ponto de vista analítico como numérico (ver, e.g., Walkley (1999), Avilez-Valente (2000), Fuhrman (2004), Klopman (2010), Sadaka (2011), Antunes do Carmo (2012) e Kazolea et al. (2012)).

A generalização do sistema descrito em (1.4) de forma a modelar a propagação de ondas sobre batimetrias não constantes, bem como a sua resolução numérica, foi proposta por Peregrine (1967). Ao contrário das equações (1.4), o modelo deste autor não contém derivadas com respeito ao tempo de ordem superior a um. Esta propriedade, simplifica consideravelmente a implementação de um esquema numérico para a sua resolução.

### 1.2.1 Modelos de Boussinesq do tipo BEV e BEP

Nesta subsecção, apresentamos alguns modelos baseados nas formulações BEV e BEP. Começamos por referir que os modelos BEV são bastante mais frequentes na literatura do que os modelos BEP. Isto pode dever-se ao facto dos modelos BEP serem baseados em sistemas de equações diferenciais cuja ordem das derivadas com respeito às variáveis espaciais é, em geral, superior à ordem das derivadas com respeito às variáveis espaciais dos modelos BEV. Mais especificamente, referimo-nos a modelos BEP e BEV, que quando escritos na forma

adimensional em termos dos parâmetros de onda longa e de onda de pequena amplitude  $\mu$  e  $\varepsilon$ , respectivamente, tenham a mesma ordem  $O(\mu^n, \varepsilon^m)$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ). Note-se que  $\mu$  é definido como a razão entre os valores característicos da profundidade da região ocupada pelo fluido e do comprimento de onda. Por outro lado,  $\varepsilon$  é definido como a razão entre os valores característicos da amplitude da onda e da profundidade da região mencionada anteriormente.

Assim, do ponto de vista numérico, a discretização dos modelos BEV é mais simples do que a dos modelos BEP. Como referimos anteriormente, as formulações BEP têm como funções incógnita primárias a elevação da superfície da onda e o potencial da velocidade do fluido. Por sua vez, as formulações BEV têm como funções incógnitas primárias a elevação da superfície da onda bem como as componentes horizontais da velocidade do fluido.

Então, no caso da modelação de ondas marítimas de superfície em domínios espaciais com duas dimensões horizontais, os modelos BEP têm menos funções incógnita e equações a resolver do que os modelos BEV. Mais especificamente, duas funções incógnita primárias e duas equações estão associadas aos modelos BEP, enquanto que os modelos BEV têm três funções incógnita primárias e três equações. Nestas condições, os esquemas numéricos baseados em modelos BEP têm, em geral, menos graus de liberdade que os esquemas baseados em modelos BEV. Contudo, no caso da propagação de uma onda num domínio a uma dimensão horizontal, estas classes de modelos possuem o mesmo número de incógnitas e de equações. Alguns modelos relevantes escritos nas suas formas dimensionais dos tipos BEV e BEP são apresentados como segue.

### 1.2.1.1 O modelo BEV de Peregrine (1967)

Este modelo foi deduzido sob as hipóteses de incompressibilidade de um fluido invíscido e da irrotacionalidade do seu escoamento, o qual pode ser escrito da forma seguinte:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot ((\eta + h)\bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (1.5a)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} + g\nabla\eta + \frac{1}{6}h^2\nabla\left(\nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}h\nabla\left(\nabla \cdot \left(h\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\right)\right) = \mathbf{0}, \quad (1.5b)$$

onde  $h(x, y)$  é a função que representa a profundidade medida desde o fundo do oceano até ao nível da água em repouso. As pressões do fluido e atmosférica foram também consideradas nulas na superfície livre da onda como condições de fronteira. Como referido atrás, o modelo proposto por Peregrine foi de facto pioneiro, no sentido em que este é constituído por um sistema de equações diferenciais não lineares do tipo Boussinesq para a propagação de ondas sobre um fundo não constante. Este modelo é também designado na literatura como modelo de Boussinesq convencional.

### 1.2.1.2 O modelo BEP de Wu (1981)

Em Wu (1981) foi proposto um modelo BEV que generaliza (1.5) de forma a incluir a propagação de ondas marítimas de superfície sobre um fundo móvel descrito por  $z = -h(x, y, t)$ . O efeito da pressão atmosférica  $P_a = P_a(x, y, t)$  na superfície livre da onda foi também incluído. Este autor desenvolveu também um modelo BEP equivalente, em que o potencial da velocidade do fluido é uma função harmónica, uma vez que as equações (1.5) foram deduzidas sob os constrangimentos  $\nabla_{xyz} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$  e  $\nabla_{xyz} \cdot \mathbf{u} = 0$  em que  $\mathbf{u}$  é o vector velocidade do fluido. Aqui, o operador diferencial  $\nabla_{xyz}$  é dado por  $\nabla_{xyz} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ . Desta forma, o número de incógnitas e equações a resolver foram reduzidos. Este modelo pode ser escrito da forma

seguinte:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot ((h + \eta) \nabla \bar{\phi}) + \nabla \cdot \left( \left[ \frac{h^2}{3} \nabla^2 \bar{\phi} - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \nabla \bar{\phi}) \right) \right] \nabla h \right) = -\frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1.6a)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \bar{\phi}|^2 + g\eta - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot (h \nabla \bar{\phi})) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \bar{\phi} = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{P_a}{\rho}, \quad (1.6b)$$

onde  $\bar{\phi} = \bar{\phi}(x, y, t)$  designa o potencial médio da velocidade do fluido e  $\rho$  denota a densidade do fluido, i.e., a massa do fluido por unidade de volume.

### 1.2.1.3 O modelo BEV melhorado de Nwogu (1993)

Parte substancial da investigação sobre os modelos do tipo Boussinesq consiste no desenvolvimento de sistemas de equações melhoradas no sentido da preservação e correcta simulação das características dispersivas das ondas marítimas (ver, e.g., Madsen e Schäffer (1998) ou Madsen et al. (2003)). Para tal, as características dispersivas destes modelos linearizados são comparadas com as da teoria linear de Airy (ver Airy (1841)). Em Nwogu (1993), uma nova técnica foi proposta para melhorar estas características dos modelos do tipo Boussinesq. As componentes horizontais do vector velocidade do fluido foram então avaliadas num nível arbitrário do fluido  $z = -\alpha h(x, y)$  com  $\alpha \in [0, 1]$ . O vector velocidade avaliado neste nível arbitrário do fluido é denotado por  $\mathbf{u}_\alpha$ . Este parâmetro real  $\alpha$  é calculado de forma a que as características dispersivas deste modelo linearizado reproduzam o melhor possível as do modelo linear de Airy. Assim, as equações diferenciais de Nwogu (1993) podem ser escritas da forma seguinte:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot ((\eta + h) \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (\bar{\alpha}_1 h^3 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \bar{\alpha}_2 h^2 \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha))) = 0, \quad (1.7a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + g \nabla \eta + \bar{\alpha}_3 h^2 \nabla \left( \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} \right) + \bar{\alpha}_4 h \nabla \left( \nabla \cdot \left( h \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} \right) \right) = \mathbf{0}, \quad (1.7b)$$

onde  $\bar{\alpha}_1 = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}$ ,  $\bar{\alpha}_2 = \alpha + \frac{1}{2}$ ,  $\bar{\alpha}_3 = \frac{\alpha^2}{2}$  e  $\bar{\alpha}_4 = \alpha$ .

### 1.2.1.4 O modelo BEP melhorado de Chen e Liu (1994)

Por outro lado, em Chen e Liu (1994), o modelo de Nwogu (1993) foi reescrito em termos do potencial da velocidade avaliado num nível arbitrário do fluido, o qual é denotado por  $\phi_\alpha = \phi_\alpha(x, y, t)$ . Mais concretamente,  $\phi_\alpha(x, y, t)$  é também avaliado no nível arbitrário mencionado anteriormente (ver subsecção 1.2.1.3), ou seja,  $z = -\alpha h(x, y)$  com  $\alpha \in [0, 1]$ . Este parâmetro real arbitrário é, como se referiu anteriormente, utilizado para calibrar as propriedades dispersivas do modelo. Este sistema BEP é definido do modo seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \eta) \nabla \phi_\alpha] + \nabla \cdot \left[ h \nabla \left( \frac{\alpha^2 h^2}{2} \nabla^2 \phi_\alpha - \alpha h \nabla \cdot (h \nabla \phi_\alpha) \right) + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{2} \nabla (\nabla \cdot (h \nabla \phi_\alpha)) - \frac{h^3}{6} \nabla \nabla^2 \phi_\alpha \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.8a)$$

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi_\alpha|^2 + g\eta - \alpha h \nabla \cdot (h \nabla \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t}) + \frac{\alpha^2 h^2}{2} \nabla^2 \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t} = 0. \quad (1.8b)$$

Para além dos modelos apresentados nesta secção, frisamos que é possível encontrar muitos outros trabalhos onde são estudados ou desenvolvidos modelos das classes BEV e BEP. Para

os modelos da classe BEV referimos, e.g., Madsen e Sørensen (1992), Kirby (1998), Woo e Liu (2004a) ou, mais recentemente, Avilez-Valente (2000) e Dutykh e Dias (2007a). Quanto aos modelos da classe BEP citamos, e.g., Langtangen e Pedersen (1998), Zhao et al. (2004) e Bingham et al. (2009).

### 1.2.2 Métodos numéricos

Como mencionado anteriormente, a resolução numérica de modelos do tipo Boussinesq foi introduzida por Peregrine (1967) através da implementação de um esquema de diferenças finitas (DF). Desde então vários métodos numéricos têm sido desenvolvidos para a resolução de problemas baseados nos modelos do tipo Boussinesq. Para este efeito e para além do método das diferenças finitas, referimos o desenvolvimento e implementação de métodos espectrais (ver, e.g., Dutykh e Dias (2007a)), de métodos de volumes finitos (ver, e.g., Kazolea et al. (2012) e Dutykh et al. (2013)) e também de métodos dos elementos finitos (ver, e.g., Walkley (1999)). No que segue, apresentamos apenas uma breve comparação entre os métodos baseados em esquemas DF e em esquemas de elementos finitos (EF).

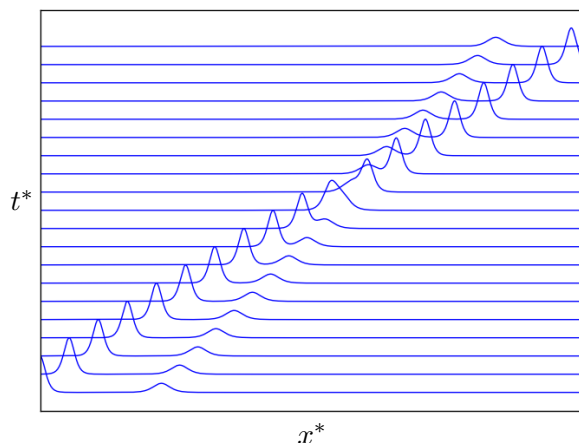
Quanto aos métodos baseados nos esquemas DF, referimos como vantagens a facilidade de discretização das derivadas de alta ordem com respeito às variáveis espaciais e a obtenção de estruturas simples dos sistemas de equações resultantes deste tipo de discretização espacial (e.g., tri-diagonal). Estes sistemas de equações são em geral propícios a uma resolução numérica rápida e eficiente. Como desvantagem, salientamos que é necessária a utilização de malhas estruturadas para a discretização do domínio espacial. Assim, estes métodos são de difícil utilização, especialmente em domínios computacionais complexos. A correcta imposição de condições de fronteira é também de difícil tratamento neste tipo de esquemas. Apesar destas grandes desvantagens, os esquemas DF são ainda vulgarmente utilizados nas aplicações (ver, e.g., Conde et al. (2012)). Podemos encontrar a implementação de esquemas do tipo DF para a resolução de modelos de Boussinesq em, e.g., Madsen e Sørensen (1992), Nwogu (1993), Wei et al. (1995), Beji e Nadaoka (1996) ou, mais recentemente, em Lynett e Liu (2002), Fuhrman (2004) bem como em Lynett e Liu (2004).

Contrariamente aos esquemas de diferenças finitas, os métodos de elementos finitos podem utilizar malhas não estruturadas para a discretização dos domínios espaciais. Este facto permite que a malha espacial seja construída de forma a se adaptar a batimetrias e a fronteiras complexas. No entanto, o tratamento dos termos com derivadas de ordem superior a dois com respeito à variável espacial não é simples e requer, em geral, a utilização de variáveis auxiliares bem como a resolução de um sistema de equações auxiliar. Desta forma o número de graus de liberdade associado à malha computacional é aumentado, tornando estes métodos menos eficientes que os métodos baseados nos esquemas DF. No que diz respeito à implementação e ao desenvolvimento de esquemas EF na resolução de sistemas do tipo Boussinesq, referimos os trabalhos seguintes: Antunes do Carmo et al. (1993), Antunes do Carmo e Seabra-Santos (1996), Walkley (1999), Avilez-Valente (2000), Zhao et al. (2004), Woo e Liu (2004a,b) e Sadaka (2011).

## 1.3 Ondas solitárias e solitões

Como resposta às dúvidas de George Biddell Airy sobre a existência e a forma das ondas solitárias propostas por Russel e Boussinesq, Korteweg e de Vries (KdV) apresentaram em 1895 a primeira equação para a elevação da superfície da onda que admite como solução exacta a onda solitária unidireccional descrita por (1.1) (ver Korteweg e de Vries (2011)). Os trabalhos

realizados por Fermi, Pasta e Ulam em 1955 (ver, e.g., Dauxois e Ruffo (2008)) acerca da simulação numérica de vibrações de átomos em redes cristalinas não lineares, marcaram o início de um novo campo da ciência: a Física não linear. Este problema teve uma importância crucial no desenvolvimento da teoria dos solitões. Motivados por estes trabalhos, Zabusky e Kruskal (1965) introduziram o conceito de solitão. Em particular, estes autores mostraram numericamente que as ondas solitárias da forma descrita por (1.1) eram de facto solitões para a equação KdV. Assim, um solitão é uma onda solitária com uma propriedade adicional: a menos de uma mudança de fase, a sua forma é preservada após a colisão com outro solitão. A título de exemplo, mostramos na figura 1.1 a propagação e a interacção entre dois solitões da forma do quadrado de uma secante hiperbólica. Mais especificamente, a modelação da propagação destes dois solitões é realizada por nós usando uma equação alternativa à de KdV, a qual foi apresentada por Benjamin, Bona e Mahony (BBM) em 1972 (ver Benjamin et al. (1972)). O método de elementos finitos convencional é aqui implementado para a respectiva equação através do código DOLFWAVE (ver <http://launchpad.net/dolfwave>). Para mais pormenores sobre a implementação numérica deste método e sobre os valores dos parâmetros físicos utilizados na simulação dos solitões, sugerimos ao leitor para ver a demonstração `dolfwave/demo/1HD1S/solitonsBBM` incluída no código DOLFWAVE. Referimos ainda que a equação BBM tem melhores propriedades dispersivas e de estabilidade do que a equação KdV, como foi demonstrado por Benjamin et al. (1972).



**Figura 1.1:** Propagação e interacção entre dois solitões da forma do quadrado de uma secante hiperbólica modeladas pela equação adimensional BBM. As soluções numéricas são obtidas usando o código DOLFWAVE. No eixo horizontal  $ox^*$  representamos a variável espacial, enquanto que o eixo vertical  $ot^*$  diz respeito à evolução da solução ao longo do tempo.

De facto, a teoria desenvolvida deste então tem sido generalizada muito para além das ondas marítimas de superfície. Podemos encontrar aplicações da teoria das ondas solitárias e dos solitões, por exemplo, nas seguintes áreas da Física: dinâmica de fluidos, óptica não linear, biofísica, transferência de calor e estado sólido (ver, e.g., Zabusky e Porter (2010)).

No que segue, apresentamos alguns dos métodos matemáticos utilizados para deduzir soluções analíticas do tipo onda de translação de equações de evolução não lineares com derivadas parciais (EENLDP). Todos os métodos referidos a seguir são baseados na transformação de uma EENLDP numa equação diferencial ordinária (EDO) usando uma substituição adequada

(ver, e.g., Griffiths e Schiesser (2009, 2011)).

Uma EENLDP genérica pode ser escrita na forma canónica

$$\frac{\partial s}{\partial t} = F \left( s, \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial^2 s}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^3 s}{\partial t \partial x^2}, \dots \right). \quad (1.9)$$

Considerando uma transformação de variáveis da forma  $s(x, t) = s(\xi)$ , onde  $\xi = \xi(x, t)$ , a equação anterior pode rescrever-se como uma EDO. No contexto das ondas de translação, utiliza-se geralmente uma transformação de Galileu dada por  $\xi(x, t) = x - ct$ , onde  $c$  é a velocidade de propagação da onda. Assim, a EDO resultante desta transformação de variáveis aplicada em (1.9) escreve-se na forma seguinte:

$$-c \frac{ds}{d\xi} = F \left( s, \frac{ds}{d\xi}, -c \frac{d^2s}{d\xi^2}, -c \frac{d^3s}{d\xi^3}, \dots \right). \quad (1.10)$$

Neste contexto, referimos os métodos matemáticos seguintes:

- Método de integração directa: consiste na aplicação das técnicas convencionais do cálculo diferencial e integral para transformar a EDO descrita por (1.10) numa equação completamente integrável, por exemplo, numa EDO com variáveis separadas;
- Método de factorização: recorre à factorização da EDO mencionada anteriormente em vários problemas de resolução mais simples. Este método aplica-se em geral a equações com termos não lineares da forma polinomial;
- Métodos de expansão: são baseados na hipótese de que a EDO dada por (1.10) admite soluções  $s(\xi)$  que podem ser escritas como uma combinação algébrica de uma determinada classe de funções base. Mais concretamente, referimos os métodos de expansão Exp, Tanh e  $G'/G$ .

- a) No método de expansão Exp, consideram-se soluções  $s(\xi)$  de (1.10) da forma seguinte:

$$s(\xi) = \frac{\sum_{n=-l_1}^{l_2} b_{1n} e^{n\xi}}{\sum_{m=-l_3}^{l_4} b_{2m} e^{m\xi}}, \quad (1.11)$$

onde  $l_i$  ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) são inteiros positivos e  $b_{1n}$  ( $n \in \{-l_1, \dots, l_2\}$ ) assim como  $b_{2m}$  ( $m \in \{-l_3, \dots, l_4\}$ ) são coeficientes reais a determinar;

- b) Por sua vez, no método de expansão Tanh as soluções  $s(\xi)$  de (1.10) são escritas do modo seguinte:

$$s(\xi) = \sum_{k=-N}^N b_{3k} \tanh^k(m\xi), \quad (1.12)$$

onde  $N$  é um inteiro positivo e  $m$  bem como  $b_{3k}$  ( $k \in \{-N, \dots, N\}$ ) são os coeficientes reais a calcular;

- c) Por último, salientamos que no método de expansão  $G'/G$  são admitidas soluções  $s(\xi)$  de (1.10) dadas por

$$s(\xi) = \sum_{k=-N}^N b_{4k} \left( \frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^k, \quad (1.13)$$

onde  $G(\xi)$  é a solução geral de uma determinada EDO linear ou não linear. No método de expansão  $G'/G$  convencional,  $G(\xi)$  é a solução geral da EDO linear de segunda ordem e de coeficientes constantes  $G'''(\xi) + \gamma G'(\xi) + \varrho G(\xi) = 0$ . Em (1.13),  $N$  é um inteiro positivo e  $b_{4k}$  ( $k \in \{-N, \dots, N\}$ ) assim como  $\gamma$  e  $\varrho$  são os coeficientes reais a calcular.

Em geral, estes métodos de expansão conduzem à resolução analítica de sistemas algébricos de equações não lineares para o cálculo dos coeficientes nas expressões (1.11)-(1.13). A resolução destes sistemas de equações não lineares só é praticável recorrendo a programas computacionais de cálculo simbólico, tais como o Maple. Os inteiros positivos  $l_i$  ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) e  $N$  introduzidos nas equações (1.11)-(1.13) são normalmente determinados através de balanços homogéneos quer entre os termos lineares e não lineares de maior ordem da EDO em causa, quer entre os termos lineares e não lineares de menor ordem. No capítulo 5, o método de expansão  $G'/G$  é aplicado na integração de uma EDO não linear. Em particular, a técnica do balanço homogéneo bem como a noção de ordem dos termos de uma dada EDO são descritas no capítulo referido anteriormente.

Note-se que em Kudryashov (2010) os métodos de expansão mencionados nas alíneas b) e c) foram comparados. De facto, o autor mostrou que as soluções de uma EDO não linear obtidas através do método de expansão  $G'/G$  são as mesmas do que aquelas provenientes da aplicação do método de expansão Tanh.

## 1.4 Estrutura e objectivos da dissertação

Esta dissertação é composta por seis capítulos, dos quais o primeiro tem sido dedicado a uma breve introdução sobre a teoria de ondas marítimas de superfície bem como sobre modelos convencionais do tipo Boussinesq. Os trabalhos de investigação científica desenvolvidos com vista à obtenção do grau de Doutor são apresentados nos capítulos dois, três, quatro e cinco. De forma a que estes capítulos sejam autónomos, eles contêm não só uma introdução mas também uma secção dedicada à dedução das equações que governam os fenómenos físicos que pretendemos modelar. Também incluímos em todos estes capítulos uma secção de conclusões sumárias. Esta opção torna a leitura da dissertação mais clara assim como permite uma melhor compreensão dos seus conteúdos, embora possa originar algumas repetições do seu texto.

O objectivo principal desta dissertação consiste no desenvolvimento e optimização de modelos analíticos e numéricos do tipo Boussinesq para a geração e a propagação de ondas marítimas de superfície. Outro objectivo é a elaboração de um código baseado em métodos de elementos finitos, para a simulação de diversos fenómenos físicos relacionados com a geração e a propagação de ondas. A investigação científica sobre o tema encontra motivação em inúmeras aplicações, entre as quais, a construção de estruturas portuárias ou de protecção costeira (ver, e.g., Woo e Liu (2004b)) bem como o desenvolvimento de sistemas de alarme para tsunamis (ver, e.g., Behrens (2011)). A formulação e a resolução analítica de uma classe de equações para a modelação de ondas bidireccionais a uma dimensão horizontal é também um assunto abordado nesta dissertação.

Neste contexto, vários problemas não lineares com condições na fronteira e de valores iniciais são investigados recorrendo a métodos analíticos assintóticos bem como a métodos numéricos para a integração das suas equações diferenciais. Diversas técnicas matemáticas são utilizadas nesta dissertação: análise assintótica, teoria de operadores diferenciais, análise de estabilidade de sistemas, métodos de elementos finitos contínuos e contínuos/descontínuos com termos de penalização, métodos de predição-correcção e de Runge-Kutta, método de integração

directa e método de expansão  $G'/G$ . Os algoritmos numéricos apresentados neste trabalho são escritos em linguagem C++ e implementados no código designado por DOLFWAVE que desenvolvemos durante este trabalho de investigação científica (ver figura 1.2).



**Figura 1.2:** Logótipo do código DOLFWAVE.

No capítulo 2, o modelo desenvolvido por Zhao et al. (2004) para estudar o comportamento hidrodinâmico de ondas marítimas de superfície é estendido de forma a incluir diversos mecanismos para a geração de ondas. Efeitos de dissipação e de absorção da energia das ondas são também analisados. As equações deste modelo modificado não contêm derivadas de ordem superior a dois com respeito às variáveis espaciais. Este facto permite a utilização de um método de elementos finitos convencional. A relação de dispersão deste modelo otimizado é também estudada. Para além disto, uma análise matricial da estabilidade do problema linearizado é apresentada. A robustez deste modelo é verificada com respeito às instabilidades relacionadas com gradientes acentuados da batimetria. Fenómenos físicos tais como actividades sísmicas no fundo do oceano e a dinâmica de ondas marítimas em portos de abrigo são, entre outros, problemas investigados usando este sistema de equações otimizado. A simulação numérica destes problemas físicos é realizada pelo código designado por DOLFWAVE referido anteriormente (ver <http://www.fenicsproject.org/applications> e <http://launchpad.org/dolfwave>). O código DOLFWAVE permite não só a resolução numérica das equações diferenciais estudadas nesta dissertação, como fornece ainda um conjunto de ferramentas para o desenvolvimento e análise de problemas análogos.

Uma nova classe de sistemas não lineares melhorados do tipo BEP é apresentada no capítulo 3. Efeitos de dissipação e de absorção da energia das ondas são incluídos nesta classe de sistemas. Para além disto, as perturbações da superfície livre da onda induzidas pelo deslocamento de um fundo impermeável são também modeladas. O fundo da região ocupada pelo fluido, mencionado anteriormente, é uma função das coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  bem como do tempo  $t$ . As características dispersivas assim como o gradiente de empolamento da onda são analisadas em função de um termo extra de ordem  $O(\mu^{2n+2})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Este termo extra é adicionado no desenvolvimento assintótico do potencial da velocidade do fluido, o qual é realizado em termos dos parâmetros de onda longa  $\mu$  e de onda de pequena amplitude  $\varepsilon$ . Para calcular as soluções numéricas do modelo melhorado de quarta ordem, propomos um esquema do tipo Galerkin de elementos finitos contínuos/descontínuos com termos de penalização (C/DG-FEM). Tanto quanto saibamos, este esquema numérico é aqui utilizado pela primeira vez na resolução numérica de modelos do tipo Boussinesq. Elementos finitos contínuos de Lagrange  $P_2$  são introduzidos para a discretização do domínio espacial. Esquemas de predição-correcção inicializados por um método explícito de Runge-Kutta são implementados para a integração das equações no tempo. Uma condição do tipo Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) para o problema linearizado com batimetria constante é deduzida.

A consistência da relação de dispersão bem como as suas propriedades de estabilidade são investigadas. Para testar a robustez e a aplicabilidade dos modelos propostos são simulados vários problemas físicos usando o código DOLFWAVE. A convergência e a precisão do esquema numérico é verificada através da inclusão de testes de refinamento das malhas.

No capítulo 4, uma classe de equações do tipo KdV-BBM é deduzida e analisada numericamente. Determinamos os valores para o parâmetro de Nwogu de modo a que o erro entre os potenciais da velocidade dos modelos lineares de KdV-BBM e de Airy seja da ordem  $O(\mu^4)$ . Em princípio, o esquema C/DG-FEM é também aqui usado pela primeira vez para a integração das equações do tipo KdV-BBM. Estas equações modelam a propagação de ondas unidireccionais a uma dimensão horizontal sobre uma batimetria constante. Para além disto, deduzimos a relação de dispersão associada ao método numérico e apresentamos uma condição do tipo CFL para o problema linearizado. A influência do coeficiente de penalização nas propriedades dispersivas do modelo numérico C/DG-FEM é investigada. Para demonstrar a aplicabilidade do método C/DG-FEM à classe de equações do tipo KdV-BBM, apresentamos dois testes numéricos.

Uma nova classe de equações de evolução não lineares é deduzida no capítulo 5. Esta classe de equações do tipo Boussinesq com derivadas parciais de sexta ordem com respeito às variáveis espaciais tem como função incógnita a elevação da superfície da onda. A modelação da propagação de ondas bidireccionais a uma dimensão horizontal sobre uma batimetria constante pode ser realizada por meio desta classe de equações. Vários parâmetros são também introduzidos, tais como o coeficiente de Nwogu  $\alpha$  e o coeficiente de tensão superficial, de modo a otimizar algumas propriedades dispersivas desta classe de equações. Os domínios de validade das soluções do tipo onda de translação são determinados em função dos valores destes parâmetros. Novas famílias de soluções exactas do tipo onda de translação são deduzidas usando, entre outros, os métodos de integração directa e de expansão  $G'/G$ .

No último capítulo, apresentamos as conclusões mais relevantes dos trabalhos de investigação científica descritos anteriormente. Alguns destes trabalhos estão ainda a ser finalizados com vista a serem publicados. Sugestões para trabalhos futuros são também aqui indicadas.



## Capítulo 2

# Equações diferenciais de Boussinesq de segunda ordem melhoradas <sup>1</sup>

### 2.1 Introdução

O projecto FEniCS via DOLFIN, UFL e FFC fornece um bom suporte técnico e científico para a implementação de modelos industriais de larga escala baseados no método dos elementos finitos (ver, e.g., Kirby e Logg (2006), Alnaes et al. (2009), Logg e Wells (2010) ou Logg et al. (2012)). Mais concretamente, as matrizes e vectores associados ao método dos elementos finitos são gerados e agrupados automaticamente pelas bibliotecas DOLFIN e FFC a partir da formulação variacional do problema. Por sua vez, a formulação variacional do problema é declarada usando a biblioteca UFL. Referimos ainda que a biblioteca DOLFIN fornece uma interface simples para outras bibliotecas necessárias para a resolução dos sistemas de equações resultantes do método dos elementos finitos.

A resolução numérica das equações de Boussinesq remonta aos trabalhos de Peregrine (1967) ou de Wu (1981). Citamos também algumas publicações mais recentes que, em parte, motivaram o estudo efectuado neste capítulo, nomeadamente: Madsen et al. (1991), Nwogu (1993), Chen e Liu (1994) assim como Beji e Nadaoka (1996). Nestas referências, os autores deduziram modelos do tipo Boussinesq com características dispersivas melhoradas bem como apresentaram esquemas numéricos adequados às suas resoluções.

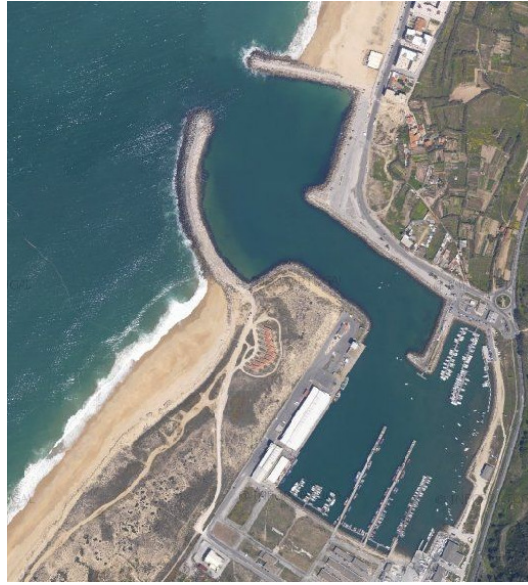
Um esquema numérico é implementado aqui para resolver alguns sistemas do tipo Boussinesq que modelam a geração e a propagação de ondas marítimas de superfície sobre uma batimetria variável. Este tipo de modelo é usado, por exemplo, na simulação do comportamento hidrodinâmico de ondas marítimas de superfície em portos de abrigo ou em zonas costeiras bem como na geração e na propagação de tsunamis. Na figura 2.1 é mostrado o porto de abrigo da Nazaré, em Portugal, como exemplo de um porto de abrigo convencional. Por outro lado, na figura 2.2 pode ver-se a simulação de um tsunami num domínio real. Esta simulação é realizada por nós utilizando o código DOLFWAVE para resolver o sistema de Boussinesq melhorado deduzido neste capítulo.

Na secção 2.2, começamos por descrever o código DOLFWAVE, i.e., uma aplicação baseada no projecto FEniCS para a simulação da dinâmica de ondas marítimas de superfície (ver <http://www.fenicsproject.org/applications/> e <http://ptmat.fc.ul.pt/~ndl/>).

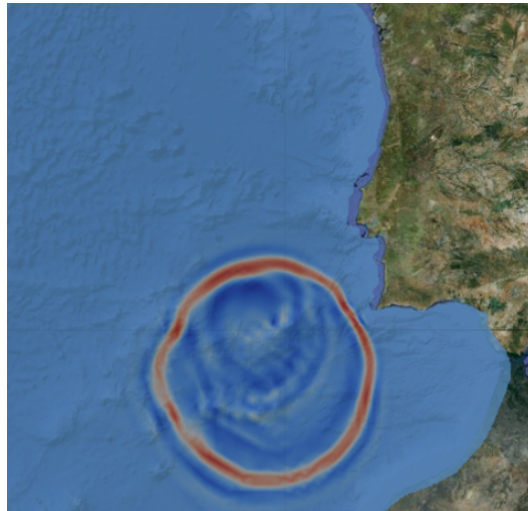
As equações que regem as ondas marítimas de superfície são apresentadas na secção 2.3.

---

<sup>1</sup>Publicado em: Lopes, N. D., Pereira, P. J. S. and Trabucho, L., Improved Boussinesq Equations for Surface Water Waves, Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, Eds. Anders Logg and Kent-Andre Mardal and Garth N. Wells, LNCSE Vol. 84, páginas 471–504, Springer, 2012.



**Figura 2.1:** Porto de abrigo da Nazaré em Portugal.



**Figura 2.2:** A elevação da superfície de um tsunami obtida pelo código DOLFWAVE para resolver as equações do modelo otimizado aqui proposto num domínio real.

A partir destas equações vários tipos de modelos podem ser deduzidos. Existem na literatura vários modelos do tipo Boussinesq, sendo os mais frequentemente utilizados os que são baseados na formulação da Elevação da superfície da onda e nas duas componentes horizontais da velocidade do fluido (BEV) (ver, e.g., Walkley e Berzins (2002) bem como Woo e Liu (2004a,b) para discretizações de modelos BEV utilizando o método dos elementos finitos). No entanto, apenas a formulação baseada na Elevação da superfície da onda e no Potencial da velocidade do fluido (BEP) é considerada (ver, e.g., Langtangen e Pedersen (1998) para a discretização por elementos finitos de um modelo BEP). Assim o número de incógnitas é reduzido de cinco (as três componentes da velocidade do fluido, a pressão e a elevação da superfície da onda) nos modelos BEV para três (o potencial da velocidade do fluido, a pressão e a elevação da superfície da onda) nos modelos BEP. Dois modelos do tipo BEP são considerados:

- i*) um modelo convencional contendo derivadas de sexta ordem com respeito às variáveis espaciais;
- ii*) o modelo proposto por Zhao et al. (2004) (ZTC), contendo apenas derivadas de segunda ordem com respeito às variáveis espaciais.

Uma técnica matemática convencional é usada para deduzir o modelo do tipo Boussinesq referido em *i*). Nas secções seguintes, apenas o modelo ZTC é considerado. Note-se que alguns termos extra são introduzidos nestes modelos para incluir efeitos de dissipação e de absorção da energia das ondas marítimas de superfície. Por outro lado, a geração de ondas marítimas de superfície é realizada aqui através da movimentação de um fundo impermeável ou através de funções de fonte.

A relação de dispersão do modelo ZTC estendido com termos dissipativos é apresentada na secção 2.4.

A secção 2.5 é dedicada aos métodos numéricos usados na discretização da formulação variacional. A discretização das equações com respeito às variáveis espaciais é feita usando elementos finitos do tipo Lagrange  $P_1$  ou  $P_2$ . Por sua vez, a integração das equações no tempo é implementada através de algoritmos de Runge-Kutta e de predição-correcção.

Alguns mecanismos para a geração de ondas bem como condições de fronteira de reflexão e a implementação de camadas de esponja são assuntos discutidos nas secções 2.6 e 2.7. Condições iniciais bem como condições de fronteira do tipo Dirichlet são apresentadas para a propagação de uma onda solitária e para a geração de ondas periódicas, respectivamente. Além disso, o modelo ZTC estendido incorpora uma função de fonte para a geração de ondas marítimas de superfície. Esta função é deduzida utilizando as técnicas propostas por Wei et al. (1999). Fronteiras totalmente reflexivas são modeladas usando condições de Neumann nulas para a elevação da superfície da onda bem como para o potencial da velocidade do fluido. A absorção da energia das ondas marítimas de superfície é simulada usando camadas de esponja.

Na secção 2.8, uma análise matricial do modelo ZTC linearizado, com batimetria independente do tempo e a uma dimensão horizontal, é realizada com o objectivo de estudar algumas propriedades de estabilidade das equações. O modelo BEP convencional investigado por Løvholt e Pedersen (2009) é aqui também usado como referência para comparação. Este modelo BEP tem como funções incógnita primárias a elevação da superfície da onda marítima e o potencial médio da velocidade do fluido.

Vários testes numéricos são apresentados na secção 2.9. Mais concretamente, as equações de ZTC estendidas são usadas para modelar cinco problemas físicos distintos: a evolução de uma onda solitária passando sobre obstáculos submersos com geometrias distintas, a evolução de uma elevação gaussiana da superfície de uma onda num domínio quadrado, a evolução de uma onda periódica num porto de abrigo com uma geometria análoga à do porto da Nazaré representado na figura 2.1, a geração e a propagação de uma onda pela movimentação de um objecto num fundo horizontal e, por último, a geração e a propagação de um tsunami num domínio real (ver figura 2.2). O primeiro teste numérico é também usado para ilustrar a utilização da aplicação DOLFWAVE.

Diversos códigos baseados principalmente em esquemas de diferenças finitas foram propostos, tais como FUNWAVE (Kirby (1998)), COULWAVE (Lynett e Liu (2004)) e o código de Pedersen e Løvholt (2008) o qual é baseado num modelo do tipo Boussinesq para a simulação de ondas oceânicas. O código FUNWAVE é baseado nas equações BEV não lineares de Wei et al. (1995). Mecanismos para a geração de ondas por meio de funções de fonte e para o tratamento de zonas costeiras com fronteiras móveis bem como fronteiras totalmente reflexivas e camadas de esponja são suportados no programa. Para além disso, podem ser modelados os fenómenos de rebentamento de ondas, de fricção no fundo e de turbulência. Neste modelo, as equações

diferenciais de terceira ordem com respeito às variáveis espaciais foram discretizadas usando esquemas de diferenças finitas de quarta ordem. Especificamente, para a integração no tempo foi usado um esquema de quarta ordem do tipo Adams-Bashforth-Moulton. Além disso, um filtro do tipo Shapiro de quarta ordem foi implementado para remover ondas de menor comprimento. A maior causa de instabilidades na simulação de ondas em zonas de pequena profundidade deve-se ao aumento da magnitude dos termos não lineares nos modelos do tipo Boussinesq. As instabilidades revelam-se através do rápido crescimento da amplitude das ondas de menor comprimento que eventualmente causam a explosão do modelo.

O código `COULWAVE` possui essencialmente as mesmas características do código `FUNWAVE` mas incorpora também a geração de ondas por meio do movimento do fundo da região ocupada pelo fluido. Além disso, o programa `COULWAVE` é baseado num sistema multi-camada de equações diferenciais de terceira ordem do tipo BEV. Note-se que este tipo de sistemas é baseado na decomposição da região ocupada pelo fluido em diversas camadas, necessitando-se assim de condições de continuidade nas suas interfaces. Estes sistemas multi-camadas permitem uma melhoria substancial das características de dispersão e das propriedades não lineares dos modelos, quando comparados com os sistemas com uma única camada. Note-se que o código `FUNWAVE` foi implementado tendo como base um modelo a uma camada. No entanto, o número de incógnitas primárias neste modelo a duas dimensões horizontais com  $n$  camadas aumenta de 3 para  $2n + 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Este código designado por `COULWAVE` perde parte da sua eficácia uma vez que o tempo computacional aumenta.

Por outro lado, o código proposto por Pedersen e Løvholm (2008) foi baseado em modelos BEV e BEP. Contudo os autores preferem as versões BEV. Em Løvholm e Pedersen (2009) vários modelos BEV e BEP foram estudados com respeito às suas propriedades de estabilidade lineares. Através deste estudo, os autores mostraram que os modelos BEV são menos susceptíveis a instabilidades provocadas por gradientes acentuados da batimetria do que os modelos BEP. O modelo de Pedersen e Løvholm (2008) inclui o efeito de Coriolis e a modificação dos comprimentos de arco das curvas devido à curvatura da terra. O objectivo principal deste código é o tratamento de forma eficaz, robusta e rápida de ondas oceânicas e, especialmente, tsunamis. Esquemas para o tratamento de zonas costeiras com fronteiras móveis e fenómenos tais como a geração de ondas por meio de fundos móveis ou o rebentamento de ondas não foram considerados. Apenas termos não lineares de ordem  $O(\varepsilon)$  foram implementados e a discretização das equações diferenciais foi feita usando métodos de diferenças finitas.

## 2.2 DOLFWAVE

O objectivo principal do programa `DOLFWAVE` é o de fornecer um conjunto de ferramentas para a análise, desenvolvimento e computação de modelos para ondas marítimas de superfície. Algoritmos numéricos para o tratamento de zonas costeiras com fronteiras móveis, filtros numéricos, diminuição da energia das ondas através do efeito de fricção no fundo e fenómenos de rebentamento das ondas não são ainda considerados na aplicação. No entanto, a implementação de modelos com filtros numéricos e para simular os fenómenos físicos referidos anteriormente está planeada para o futuro próximo.

O programa `DOLFWAVE` já inclui esquemas numéricos para simular os problemas seguintes:

- i)* Modelos para a propagação e a geração de ondas marítimas de superfície longas e unidireccionais a uma dimensão horizontal em zonas de pequena profundidade;
- ii)* Modelos do tipo Boussinesq para ondas marítimas de superfície moderadamente longas e com pequena amplitude em zonas de pequena profundidade.

Os modelos mencionados na alínea *i*) são os seguintes:

- O modelo de Korteweg-de Vries (KdV) que consiste numa equação com derivadas parciais de terceira ordem com respeito às variáveis espaciais para a elevação da superfície da onda. A discretização da equação com respeito à variável espacial é efectuada usando-se o método de Galerkin de elementos finitos contínuo/descontínuo com termos de penalização (C/DG-FEM) com elementos de Lagrange  $P_2$ ;
- O modelo de Benjamin-Bona-Mahony (BBM), também conhecido por modelo regularizado de onda longa (RLW), o qual apresenta melhores propriedades dispersivas do que as do modelo KdV. A equação diferencial do modelo BBM contém apenas derivadas de segunda ordem com respeito à variável espacial. A discretização da equação com respeito à variável espacial é realizada usando-se um método de elementos finitos contínuos com elementos de Lagrange  $P_1$  ou  $P_2$ .

Na aplicação DOLFWAVE, consideramos os modelos do tipo Boussinesq seguintes:

- O modelo de ZTC estendido, o qual é baseado num sistema de equações com derivadas parciais de segunda ordem com respeito à variável espacial. As funções incógnita destas equações são a elevação da superfície da onda bem como o potencial da velocidade do fluido. A discretização das equações com respeito às variáveis espaciais é implementada usando-se um método de elementos finitos contínuos com elementos de Lagrange  $P_1$  ou  $P_2$ ;
- Uma extensão do modelo proposto por Chen e Liu (1994) de forma a incluir efeitos dissipativos, diferentes formas de geração de ondas assim como propriedades dispersivas melhoradas. Este modelo é baseado num sistema de equações com derivadas parciais de quarta ordem com respeito às variáveis espaciais. As funções incógnita deste modelo são a elevação da superfície da onda e o potencial da velocidade do fluido. A discretização das equações com respeito às variáveis espaciais é realizada usando-se o método C/DG-FEM com elementos de Lagrange  $P_2$ .

Um esquema de predição-correcção inicializado por um esquema explícito de Runge-Kutta é usado para a integração das equações no tempo. Estes esquemas são mais simples de implementar e requerem um menor tempo de cálculo computacional do que no caso da utilização de esquemas implícitos. No entanto, os métodos aqui usados são mais susceptíveis a instabilidades numéricas e requerem passos de tempo mais pequenos.

Usamos a linguagem do código UFL para a declaração da discretização por elementos finitos das formas variacionais relacionadas com os modelos mencionados atrás (ver os ficheiros UFL em `dolwave/src/1hd1sforms`, `dolwave/src/1hdforms` e `dolwave/src/2hdforms`). Estes ficheiros são compilados usando-se o programa FFC para gerar o código C++ respeitante à discretização por elementos finitos das formas variacionais. O programa DOLFWAVE é baseado na interface DOLFIN 1.0 para gerar e resolver todos os sistemas de equações relacionados com o método dos elementos finitos.

Note-se que o código DOLFWAVE está disponível em <https://launchpad.net/dolwave>. Algumas rotinas são incluídas de forma a gerar código C++ para o tratamento de condições de fronteira e para as funções de fonte. Código para auxiliar a visualização e a análise de dados é também parte da aplicação. O pós-processador Xd3d é usado nalguns casos para a visualização dos resultados numéricos (ver <http://www.cmap.polytechnique.fr/~jouve/xd3d/>). Por último, referimos que o programa DOLFWAVE inclui um grande número de demonstrações respeitantes aos modelos implementados (ver `dolwave/demo`). Os exemplos numéricos apresentados neste capítulo estão incluídos nestas demonstrações.

## 2.3 Dedução do modelo

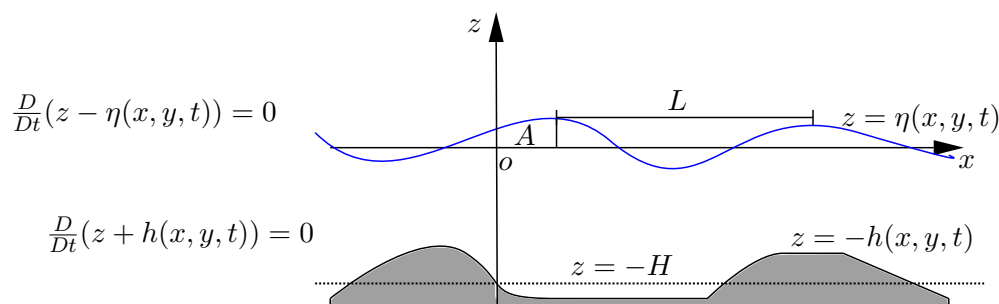
Consideramos um escoamento irrotacional de um fluido incompressível e invíscido modelado pelo conjunto de equações seguinte:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{xyz})\mathbf{u} = -\nabla_{xyz} \left( \frac{P}{\rho} + g z \right), \quad (2.1a)$$

$$\nabla_{xyz} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla_{xyz} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1c)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vector velocidade do fluido,  $P$  a pressão,  $g$  a aceleração da gravidade,  $\rho$  a densidade do fluido,  $t$  o tempo e o operador diferencial  $\nabla_{xyz}$  é dado por  $\nabla_{xyz} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ . Para além disso, adoptamos um referencial Cartesiano com os eixos  $ox$  e  $oy$  no nível da água em repouso e o eixo dos  $oz$  dirigido para o exterior da região ocupada pelo fluido (ver figura 2.3). O domínio do fluido é limitado pelo fundo do mar descrito por  $z = -h(x, y, t)$  e pela superfície livre da onda dada por  $z = \eta(x, y, t)$ . Na figura 2.3,  $L$ ,  $A$  e  $H$  são os valores característicos do comprimento da onda, da amplitude da onda e da profundidade da região ocupada pelo fluido, respectivamente. Note-se que a derivada material é denotada por  $\frac{D}{Dt}$ .



**Figura 2.3:** Representação esquemática de um corte longitudinal da região ocupada pelo fluido. Note-se que o fundo impermeável do oceano e a superfície da onda marítima são também ilustrados.

Da hipótese de irrotacionalidade do escoamento de um fluido (ver (2.1b)), podemos introduzir a função potencial da velocidade do fluido  $\phi(x, y, z, t)$  para obter a equação de Bernoulli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla_{xyz} \phi \cdot \nabla_{xyz} \phi + \frac{P}{\rho} + g z = f(t), \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{u} = \nabla_{xyz} \phi(x, y, z, t)$  e  $f(t)$  representa uma função arbitrária de integração. Note-se que se  $\phi$  for redefinido por  $\phi + \int f(t) dt$  a equação (2.2) pode ser rescrita sem esta função arbitrária de integração denotada por  $f(t)$ . Da condição de incompressibilidade do fluido (ver (2.1c)) podemos mostrar que o potencial da velocidade do fluido satisfaz a equação de Laplace seguinte:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.3)$$

onde o operador diferencial denotado por  $\nabla$  é dado por  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ . Para que o problema possa ficar bem posto, algumas condições de fronteira devem ser satisfeitas, as quais são dadas do modo seguinte:

*i)* a condição de fronteira cinemática imposta na superfície livre da onda:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \nabla\eta, \quad z = \eta; \quad (2.4)$$

*ii)* a condição de fronteira cinemática imposta no fundo impermeável da região ocupada pelo fluido:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} + (\nabla\phi \cdot \nabla h) = -\frac{\partial h}{\partial t}, \quad z = -h; \quad (2.5)$$

*iii)* a condição de fronteira dinâmica imposta na superfície livre da onda:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left( |\nabla\phi|^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right) + D(\phi) = 0, \quad z = \eta, \quad (2.6)$$

onde  $D(\phi)$  é um termo dissipativo (ver, e.g., Dutykh e Dias (2007b)). Aqui assumimos que este termo dissipativo é da forma seguinte:

$$D(\phi) = \nu \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \quad (2.7)$$

em que a viscosidade cinemática é dada por  $\nu = \bar{\mu}/\rho$  sendo  $\bar{\mu}$  o coeficiente de viscosidade, também designado por viscosidade dinâmica do fluido. Note-se que não existe perda de energia em fenómenos físicos descritos por modelos não dissipativos. Este facto não é aceitável do ponto de vista da Física, uma vez que o fluxo de partículas de um fluido real é sempre acompanhado por uma perda de energia.

Usando a equação de Laplace (2.3) é possível rescrever (2.7) na forma  $D(\phi) = -\nu\nabla^2\phi$ . Na literatura, podemos encontrar termos análogos àquele dado por (2.7), os quais foram adicionados às condições de fronteira cinemática e dinâmica de forma a simular a absorção da energia das ondas marítimas de superfície em algumas zonas perto da fronteira do domínio computacional. Estes termos estão relacionados com as camadas de esponja e, como se verá mais à frente, podem ser usados para modificar algumas propriedades dispersivas do modelo proposto.

Uma descrição mais detalhada das equações diferenciais apresentadas anteriormente pode ser encontrada nos livros de Whitham (1974) e de Johnson (1997).

### 2.3.1 Modelos convencionais

Nesta subsecção, apresentamos um sistema genérico do tipo Boussinesq baseado numa formulação que tem como funções incógnita primárias a elevação da superfície da onda marítima e o potencial da velocidade do fluido. Com o objectivo de transformar as equações (2.2)–(2.7) numa forma adimensional, introduzem-se as escalas seguintes (ver figura 2.3):

$$(x^*, y^*) = \frac{1}{L}(x, y), \quad z^* = \frac{z}{H}, \quad t^* = \frac{t\sqrt{gH}}{L}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{A}, \quad \phi^* = \frac{H\phi}{AL\sqrt{gH}}, \quad h^* = \frac{h}{H}. \quad (2.8)$$

Para além disso, consideram-se os parâmetros físicos seguintes:

$$\mu = \frac{H}{L}, \quad \varepsilon = \frac{A}{H}. \quad (2.9)$$

Nas duas últimas equações dadas por (2.9),  $\mu$  é o parâmetro de onda longa e  $\varepsilon$  é designado por parâmetro de onda de pequena amplitude. Note-se que os parâmetros  $\varepsilon$  e  $\mu$  estão relacionados

com os termos não lineares e com os termos dispersivos das equações, respectivamente. No que segue, salientamos que as variáveis adimensionais são apresentadas sem o asterisco de forma a simplificar a escrita das equações.

Em geral, a abordagem do tipo Boussinesq consiste em transformar um problema tridimensional (3D) num problema bidimensional (2D). Esta redução dimensional do problema pode ser realizada através do desenvolvimento do potencial da velocidade do fluido numa série de Taylor em termos da coordenada  $z$ . Usando-se a equação de Laplace, escrita na forma adimensional, pode-se mostrar que o potencial da velocidade do fluido é dado pela expressão seguinte:

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \mu^{2n} \nabla^{2n} \phi_0(x, y, t) + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \mu^{2n} \nabla^{2n} \phi_1(x, y, t) \right), \quad (2.10)$$

em que

$$\phi_0 = \phi|_{z=0}, \quad \phi_1 = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) |_{z=0}. \quad (2.11)$$

Por sua vez,  $\phi_1$  pode ser escrito em termos de  $\phi_0$  usando-se desenvolvimentos assintóticos, técnicas de aproximações sucessivas assim como a condição de fronteira cinemática imposta no fundo impermeável da região ocupada pelo fluido (ver Chen e Liu (1994) e Zhao et al. (2004)). Neste trabalho, assumimos sem perda de generalidade que os termos não lineares e os termos dispersivos estão relacionados pela equação seguinte:

$$\frac{\varepsilon}{\mu^2} = O(1) \text{ com } \mu < 1 \text{ e } \varepsilon < 1. \quad (2.12)$$

Note-se que o número de Ursell é definido por  $U_r = \frac{\varepsilon}{\mu^2}$ , o qual desempenha um papel fundamental na escolha das aproximações feitas na dedução dos modelos. Diferentes aproximações podem corresponder a diferentes fenómenos físicos. O regime descrito por ondas moderadamente longas e de pequena amplitude em zonas de pequena profundidade, modelado por equações fracamente não lineares, é caracterizado por (2.12) ( $O(\mu^2) = O(\varepsilon)$ , i.e.,  $\frac{H^2}{L^2} \sim \frac{A}{H}$ ). As equações de Boussinesq têm em conta os efeitos não lineares e de dispersão associados aos termos dominantes de ordens  $\varepsilon$  e  $\mu^2$ , respectivamente. Quando  $\varepsilon \gg \mu^2$ , as equações de Boussinesq reduzem-se às equações de Airy. Por outro lado, quando  $\varepsilon \ll \mu^2$  as equações de Boussinesq reduzem-se às equações linearizadas para descrever fenómenos fracamente dispersivos. Finalmente, a equação linear clássica das ondas é obtida quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\mu^2 \rightarrow 0$  (ver, e.g., Mei et al. (2005)).

Um modelo composto por equações diferenciais de sexta ordem com respeito às variáveis espaciais é obtido se  $\phi_1$  for desenvolvido assintoticamente em termos de  $\phi_0$  e preservando todos os termos até à ordem  $O(\mu^6)$ , inclusivamente. Assim, as condições de fronteira cinemática e dinâmica impostas na superfície livre da onda são rescritas na forma assintótica do modo seguinte <sup>2</sup>:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \nabla \cdot (\eta \nabla \phi_0) - \frac{1}{\mu^2} \phi_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \nabla \cdot (\eta^2 \nabla \phi_1) = O(\mu^6), \quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \varepsilon \eta \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \eta + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi_0|^2 + \varepsilon^2 \nabla \phi_0 \cdot \eta \nabla \phi_1 - \\ - \varepsilon^2 \eta \nabla^2 \phi_0 \phi_1 + \frac{\varepsilon}{2\mu^2} \phi_1^2 + D(\phi_0, \phi_1) = O(\mu^6), \end{aligned} \quad (2.13b)$$

---

<sup>2</sup>Note-se que  $D$  é aqui considerado na forma adimensional.

em que  $\phi_1$  é dado por

$$\begin{aligned} \phi_1 = & -\mu^2 \nabla \cdot (h \nabla \phi_0) + \frac{\mu^4}{6} \nabla \cdot (h^3 \nabla^3 \phi_0) - \frac{\mu^4}{2} \nabla \cdot (h^2 \nabla^2 \cdot (h \nabla \phi_0)) - \\ & - \frac{\mu^6}{120} \nabla \cdot (h^5 \nabla^5 \phi_0) + \frac{\mu^6}{24} \nabla \cdot (h^4 \nabla^4 \cdot (h \nabla \phi_0)) + \frac{\mu^6}{12} \nabla \cdot (h^2 \nabla^2 \cdot (h^3 \nabla^3 \phi_0)) - \\ & - \frac{\mu^6}{4} \nabla \cdot (h^2 \nabla^2 \cdot (h^2 \nabla^2 \cdot (h \nabla \phi_0))) - \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\mu^2}{2} \nabla \cdot (h^2 \nabla \frac{\partial h}{\partial t}) + \\ & + \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\mu^4}{24} \nabla \cdot (h^4 \nabla^3 \frac{\partial h}{\partial t}) - \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\mu^4}{4} \nabla \cdot (h^2 \nabla^2 (h^2 \nabla \frac{\partial h}{\partial t})) + O(\mu^8). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para obter a equação (2.14), assumimos que  $\frac{\partial h}{\partial t} = O(\varepsilon)$  (ver Dutykh e Dias (2007b)).

### 2.3.2 Modelo com equações diferenciais de segunda ordem

Essencialmente, as equações com derivadas parciais de segunda ordem com respeito às variáveis espaciais são obtidas sob a hipótese de pequena variação do fundo. Mais concretamente, apenas os termos de ordem  $O(h, \nabla h)$  são preservados. Por sua vez, este modelo apenas contém termos não lineares de ordem  $O(\varepsilon)$ . De facto, o modelo ZTC estendido é escrito retendo, no desenvolvimento assintótico de  $\phi_1$ , apenas termos até à ordem  $O(\mu^6)$ , inclusivamente.

De acordo com estas suposições, as equações (2.13) e (2.14) podem ser escritas do modo seguinte:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \nabla \cdot (\eta \nabla \phi_0) - \frac{1}{\mu^2} \phi_1 = O(\mu^6), \quad (2.15a)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \eta + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi_0|^2 - \nu^* \varepsilon \nabla^2 \phi_0 = O(\mu^6), \quad (2.15b)$$

em que  $\nu^* = \nu \sqrt{H} / (AL \sqrt{g})$  e

$$\begin{aligned} \phi_1 = & -\mu^2 \nabla \cdot (h \nabla \phi_0) + \frac{\mu^4}{6} \nabla \cdot (h^3 \nabla^3 \phi_0) - \frac{\mu^4}{2} \nabla \cdot (h^2 \nabla^2 \cdot (h \nabla \phi_0)) - \\ & - \frac{2\mu^6}{15} h^5 \nabla^6 \phi_0 - 2\mu^6 h^4 \nabla h \cdot \nabla^5 \phi_0 - \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t} + O(\mu^8). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Assim, estas equações estendidas são escritas da forma seguinte:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \varepsilon \eta) \nabla \Phi] - \frac{\mu^2}{2} \nabla \cdot [h^2 \nabla \frac{\partial \eta}{\partial t}] + \frac{\mu^2}{6} h^2 \nabla^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\mu^2}{15} \nabla \cdot [h \nabla (h \frac{\partial \eta}{\partial t})] = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \Phi|^2 + \eta - \frac{\mu^2}{15} h \nabla \cdot (h \nabla \eta) - \nu^* \varepsilon \nabla^2 \Phi = 0, \quad (2.17b)$$

sendo  $\Phi$  o potencial transformado da velocidade do fluido dado por

$$\Phi = \phi_0 + \mu^2 \frac{h}{15} \nabla \cdot (h \nabla \phi_0). \quad (2.18)$$

As equações (2.17) escritas na forma dimensional são dadas por

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \eta) \nabla \Phi] - \frac{1}{2} \nabla \cdot [h^2 \nabla \frac{\partial \eta}{\partial t}] + \frac{1}{6} h^2 \nabla^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{15} \nabla \cdot [h \nabla (h \frac{\partial \eta}{\partial t})] = -\frac{\partial h}{\partial t}, \quad (2.19a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + g \eta - \frac{1}{15} g h \nabla \cdot (h \nabla \eta) - \nu \nabla^2 \Phi = 0. \quad (2.19b)$$

Por sua vez a equação (2.18) é rescrita como segue:

$$\Phi = \phi_0 + \frac{h}{15} \nabla \cdot (h \nabla \phi_0). \quad (2.20)$$

Neste contexto, a utilização do potencial transformado da velocidade do fluido tem duas vantagens importantes (ver Zhao et al. (2004)):

- i)* a ordem das derivadas com respeito às variáveis espaciais é reduzida para 2;
- ii)* as propriedades dispersivas deste modelo são análogas às do modelo BEV desenvolvido por Nwogu (1993) assim como às do modelo BEP proposto por Chen e Liu (1994). Referimos que estes dois últimos modelos, mencionados anteriormente, contêm derivadas de terceira e quarta ordem com respeito às variáveis espaciais, respectivamente.

## 2.4 Relação de dispersão linear

Uma das propriedades mais importantes de um modelo para a geração e a propagação de ondas marítimas de superfície é descrita pela relação de dispersão linear. A partir desta relação podem-se deduzir as velocidades de fase e de grupo assim como o gradiente de empolamento da onda.

Salientamos que a relação de dispersão de um modelo linearizado para ondas marítimas de superfície deve estar em concordância com a relação de dispersão proveniente do modelo linear de Airy.

Nesta secção, seguimos o trabalho de Dutykh e Dias (2007b). Referimos ainda que apenas apresentamos a versão generalizada da relação de dispersão do modelo ZTC estendido com os termos dissipativos mencionados anteriormente (ver (2.19)). De forma análoga, podemos também incluir outros termos para descrever a absorção da energia das ondas, os quais são usados para definir camadas de esponja introduzidas em determinadas zonas do domínio computacional.

Para simplificar o problema, apenas o modelo a uma dimensão horizontal é considerado. Com o objectivo de deduzir a relação de dispersão, consideramos agora que a elevação da superfície da onda marítima e que o potencial da velocidade do fluido são descritos pelas ondas harmónicas seguintes:

$$\eta(x, t) = a e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.21a)$$

$$\Phi(x, t) = -b i e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.21b)$$

onde  $a$  é a amplitude da onda,  $b$  a magnitude do potencial transformado da velocidade do fluido,  $k = 2\pi/L$  o número de onda e  $\omega$  a frequência angular. A relação de dispersão pode ser deduzida introduzindo as equações (2.21) no modelo de ZTC estendido (ver (2.19)) com o termo dissipativo extra  $D$  e assumindo-se que a profundidade da região ocupada pelo fluido é constante. Deste modo obtemos a equação seguinte:

$$\omega^2 - ghk^2 \frac{1 + \frac{1}{15}(kh)^2}{1 + \frac{2}{5}(kh)^2} + i\nu\omega k^2 = 0. \quad (2.22)$$

A relação de dispersão dada pela última equação é precisa até à ordem  $O((kh)^4)$  ou  $O(\mu^4)$  quando comparada com o desenvolvimento de Padé de ordem  $[2, 2]$  da equação seguinte:

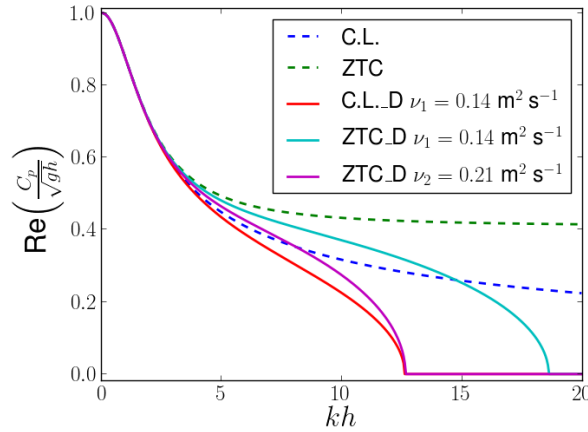
$$\omega^2 - ghk^2 \frac{\tanh(kh)}{kh} + i\nu\omega k^2 = 0. \quad (2.23)$$

De facto, a equação (2.23) é a relação de dispersão do problema completamente linear proveniente da teoria de Airy.

A partir de (2.22), a velocidade de fase  $C_p = \frac{w}{k}$ , para este modelo de ZTC estendido com termos dissipativos, é dada por

$$C_p = -\frac{i\nu k}{2} \pm \sqrt{-\left(\frac{\nu k}{2}\right)^2 + gh \frac{(1 + \frac{1}{15}(kh)^2)}{(1 + \frac{2}{5}(kh)^2)}}. \quad (2.24)$$

Na figura 2.4, podemos observar a parte real positiva de  $(C_p/\sqrt{gh})$  como uma função de  $kh$  para os modelos seguintes: teoria completamente linear (C.L.), Zhao et al. (ZTC), teoria completamente linear com dissipação (C.L.\_D) e o modelo melhorado ZTC com um termo dissipativo (ZTC\_D).



**Figura 2.4:** Parte positiva de  $\text{Re}(C_p/\sqrt{gh})$  em função de  $kh$  para vários modelos.

Os dois modelos dissipativos, C.L.\_D e ZTC\_D com  $\nu_1 = 0.14 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , admitem números de onda críticos  $k_1$  e  $k_2$  ( $k_1 < k_2$ ) tais que as partes positivas de  $\text{Re}(C_p/\sqrt{gh})$  são nulas para  $k \geq k_1$  e  $k \geq k_2$ , respectivamente (ver figura 2.4). Note-se que o valor de  $\nu$  no modelo ZTC\_D pode ser otimizado de forma a que se tenha  $k_1 = k_2$ . De (2.23),  $\text{Re}(C_p/\sqrt{gh})$  é zero para

$$k_1^3 = 4g \frac{\tanh(k_1 h)}{\nu^2}. \quad (2.25)$$

Deste modo, os valores de  $k_1$  para o modelo C.L.\_D podem ser obtidos de forma a que as ondas de menor comprimento não se propaguem para valores fixos de  $h$  e de  $\nu = \nu_1$ . Considerando agora a parte real de (2.24) igual a zero, tem-se que

$$\nu^2 = 4 \frac{gh}{k^2} \left( \frac{1 + \frac{1}{15}(kh)^2}{1 + \frac{2}{5}(kh)^2} \right). \quad (2.26)$$

O valor correspondente de  $\nu = \nu_2$ , respeitante ao modelo ZTC\_D, pode ser obtido inserindo o valor de  $k_1$  dado por (2.25) em (2.26). De facto, a partir deste valor de  $\nu = \nu_2$  as ondas de menor comprimento não se propagam.

Assim como em Dutykh e Dias (2007b), escolhemos  $\nu_1 = 0.14 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . Através da figura 2.4 pode-se concluir que se nos modelos C.L.\_D e ZTC\_D as viscosidades cinemáticas forem  $\nu_1 = 0.14 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $\nu_2 = 0.21 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , respectivamente, então  $k_1 = k_2 = 12.6 \text{ m}^{-1}$  para  $h = 1 \text{ m}$ . Neste caso, o decaimento no tempo das soluções do modelo ZTC\_D é mais acentuado do que no modelo C.L.\_D. Algumas instabilidades geradas pelas ondas de menor comprimento podem ser assim eliminadas otimizando os valores da viscosidade cinemática.

Em geral, as relações de dispersão podem ser melhoradas usando transformações análogas àquela dada por (2.20) ou então avaliando o potencial da velocidade do fluido em  $z = -\alpha h$  ( $\alpha \in [0, 1]$ ) (ver Bingham et al. (2009), Madsen e Agnon (2003) assim como Madsen et al. (2003)).

## 2.5 Métodos numéricos

Iniciamos esta secção referindo que os métodos numéricos descritos a seguir podem ser vistos com mais detalhe no relatório de Lopes (2007).

Para simplificar o problema, apenas o sistema de equações diferenciais dado pelas equações (2.19) é considerado sem termos dissipativos nem funções de fonte. Assume-se ainda um fundo estacionário da região ocupada pelo fluido.

A formulação variacional destas equações pode ser escrita da forma seguinte:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \eta}{\partial t} \vartheta_1 \, dx \, dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} h^2 \nabla \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cdot \nabla \vartheta_1 \, dx \, dy - \frac{1}{6} \int_{\Omega} \nabla \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cdot \nabla (h^2 \vartheta_1) \, dx \, dy + \\ & + \frac{1}{15} \int_{\Omega} h \nabla \left( h \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \cdot \nabla \vartheta_1 \, dx \, dy - \frac{1}{15} \int_{\Gamma} h \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial \eta}{\partial t} \vartheta_1 \, ds = \end{aligned} \quad (2.27a)$$

$$\begin{aligned} & = \int_{\Omega} (h + \eta) \nabla \Phi \cdot \nabla \vartheta_1 \, dx \, dy - \int_{\Gamma} (h + \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial n} \vartheta_1 \, ds + \frac{2}{5} \int_{\Gamma} h^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) \vartheta_1 \, ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \vartheta_2 \, dx \, dy = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 \vartheta_2 \, dx \, dy - g \int_{\Omega} \eta \vartheta_2 \, dx \, dy - \\ & - \frac{g}{15} \int_{\Omega} h \nabla \eta \cdot \nabla (h \vartheta_2) \, dx \, dy + \frac{g}{15} \int_{\Gamma} h^2 \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} \vartheta_2 \, ds, \end{aligned} \quad (2.27b)$$

onde as funções incógnita  $\eta$  e  $\Phi$  representam a elevação da superfície da onda marítima e o potencial transformado da velocidade do fluido. As funções teste denotadas por  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  são definidas em espaços apropriados. Nas equações (2.27), o domínio computacional e a sua fronteira são denotados por  $\Omega$  e  $\Gamma$ , respectivamente. O vector unitário normal a  $\Gamma$  e dirigido para o exterior de  $\Omega$  é denotado por  $\mathbf{n}$ . A integração das equações diferenciais no tempo é realizada através de um esquema de predição-correcção com inicialização dada por um método explícito de Runge-Kutta. Estas rotinas estão implementadas no código DOLFWAVE nas classes PredCorr e RungeKutta (ver `dolfwave/src/predictorcorrector` e `dolfwave/src/rungekutta`).

Note-se que a discretização das equações (2.27) pode ser escrita na forma seguinte:

$$MU_t = \mathbf{F}(t, U), \quad (2.28)$$

onde  $U_t$  e  $U$  referem-se a  $\left( \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$  e  $(\eta, \Phi)$ , respectivamente. A matriz dos coeficientes  $M$  é dada pelos primeiros membros de (2.27), enquanto que o vector  $\mathbf{F}$  está relacionado com os segundos membros das mesmas equações. Desta forma, o método de quarta ordem de

Adams-Bashforth-Moulton pode ser escrito como segue:

$$MU_{n+1}^{(0)} = MU_n + \frac{\Delta t}{24}[55\mathbf{F}(t_n, U_n) - 59\mathbf{F}(t_{n-1}, U_{n-1}) + 37\mathbf{F}(t_{n-2}, U_{n-2}) - 9\mathbf{F}(t_{n-3}, U_{n-3})], \quad (2.29a)$$

$$MU_{n+1}^{(1)} = MU_n + \frac{\Delta t}{24}[9\mathbf{F}(t_{n+1}, U_{n+1}^{(0)}) + 19\mathbf{F}(t_n, U_n) - 5\mathbf{F}(t_{n-1}, U_{n-1}) + \mathbf{F}(t_{n-2}, U_{n-2})], \quad (2.29b)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo,  $t_n = n\Delta t$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) e  $U_n$  é o valor de  $U$  avaliado em  $t_n$ . Os valores preditos e corrigidos de  $U_n$  são denotados por  $U_n^{(0)}$  e  $U_n^{(1)}$ , respectivamente. A equação (2.29b), relativa ao passo de correcção, pode ser iterada sucessivamente em função de um erro predeterminado entre passos de tempo consecutivos. Para mais detalhes sobre estes métodos numéricos, referimos, e.g., Hairer e Wanner (1991) ou Lambert (1991).

A discretização da formulação variacional com respeito à variável espacial das equações (2.27) com termos dissipativos e uma função de fonte é declarada no ficheiro UFL (ver `dolfwave/src/2hdforms/Zhao.ufl`). Esta discretização é obtida através da utilização de elementos de Lagrange  $P_1$  e o seu código é apresentado como segue. <sup>3</sup>

---

```
# Linear Lagrange element in triangles
P=FiniteElement("Lagrange",triangle,1)
# Product space for basis functions
Th=P*P

# eta_t: time derivative of the surface elevation
# phi_t: time derivative of the velocity potential
(eta_t,phi_t)=TrialFunctions(Th)

# p: test function for eta_t
# q: test function for phi_t
(p,q)=TestFunctions(Th)

# Surface elevation
eta=Coefficient(P)
# Transformed Velocity potential
phi=Coefficient(P)

# Depth function
h=Coefficient(P)
# Gravity acceleration
g=Constant(triangle)

# Several types of sponge layers are considered
# Viscous frequency coefficient of eta
sp_eta=Coefficient(P)
# Viscosity coefficient of Laplacian of eta
sp_lap_eta=Coefficient(P)
```

---

<sup>3</sup>Por se tratar de uma transcrição do código incluído na aplicação DOLFWAVE, optamos por manter em Inglês os comentários nele inseridos.

```

# Viscous frequency coefficient of phi
sp_phi=Coefficient(P)
# Viscosity coefficient of Laplacian of phi
sp_lap_phi=Coefficient(P)

# Source function for the surface elevation equation
srceta=Coefficient(P)

# Normal Vector for boundary contributions
n=P.cell().n

# Bilinear form declaration for M
# Contribution from the surface elevation equation
a0=eta_t*p*dx
a1=(1./2.)*inner(h*h*grad(eta_t),grad(p))*dx
a2=-(1./6.0)*inner(grad(eta_t),grad(h*h*p))*dx
a3=(1./15.0)*inner(h*grad(h*eta_t),grad(p))*dx
# Boundary contribution
a4=-(1./15.)*h*inner(grad(h),n)*eta_t*p*ds

# Contribution from the velocity potential equation
a5=(phi_t*q)*dx

# a: bilinear form
# See 'dolfwave/src/formsfactory/bilinearforminit.cpp'
a=a0+a1+a2+a3+a4+a5

# Linear Variational form declaration for F(t,U)
# Contribution from the surface elevation equation
l0=inner(((h+eta))*grad(phi0),grad(p))*dx

# Contribution from the velocity potential equation
l1=-(1./2.)*inner(grad(phi0),grad(phi0))*q*dx
l2=-g*(eta*q)*dx
l3=-g*(1.0/15.0)*inner(h*grad(eta),grad(h*q))*dx

# Sponge layers contributions
l4=-sp_eta*eta*p*dx-sp_lap_eta*inner(grad(eta),grad(p))*dx
l5=-sp_phi*phi0*q*dx-sp_lap_phi*inner(grad(phi0),grad(q))*dx

# Source function for the surface elevation equation
l6=srceta*p*dx

# L: linear form
# See 'dolfwave/src/formsfactory/linearforminit.cpp'
L=l0+l1+l2+l3+l4+l5+l6

```

## 2.6 Geração de onda

Nesta secção, alguns dos mecanismos físicos responsáveis pela geração de ondas marítimas de superfície são apresentados. Note-se que a abordagem da geração de onda por meio de um fundo impermeável e móvel é útil para os casos de ondas geradas por actividades sísmicas. No entanto, alguns problemas da Física estão relacionados com outros mecanismos de geração de onda. Para simplificar o problema, apenas mecanismos que geram ondas marítimas de superfície ao longo da direcção do eixo  $ox$  são considerados.

### 2.6.1 Condições iniciais

A forma mais simples de induzir uma onda num certo domínio computacional consiste na implementação de uma condição inicial apropriada. Esta forma é usualmente designada por geração passiva. Um caso típico e útil é a indução de uma onda solitária dada por

$$\eta(x, t) = \tilde{a}_1 \operatorname{sech}^2(kx - \omega t) + \tilde{a}_2 \operatorname{sech}^4(kx - \omega t) \quad \text{em } t = 0 \text{ s}, \quad (2.30)$$

$$u(x, t) = \tilde{a}_3 \operatorname{sech}^2(kx - \omega t) \quad \text{em } t = 0 \text{ s}, \quad (2.31)$$

onde os parâmetros  $\tilde{a}_1$  e  $\tilde{a}_2$  são as amplitudes das ondas e  $\tilde{a}_3$  é a magnitude da velocidade do fluido na direcção do eixo  $ox$ . Note-se que a onda solitária dada por (2.30) e (2.31), mas para todo  $t \geq 0$  s, foi apresentada como solução do modelo estendido de Nwogu em Wei et al. (1995) bem como em Walkley (1999).

As funções  $\Phi^*$  e  $\eta^*$  podem ser determinadas através de (2.17) assumindo-se um fundo constante da região ocupada pelo fluido ( $h^* = \frac{h}{H} = 1$ ) bem como desprezando o termo dissipativo ( $\nu^* = 0$ ). Isto deve-se ao facto de se usar uma formulação baseada no potencial da velocidade do fluido. Introduzimos aqui uma transformação de Galileu  $\xi^* = x^* - c^*t^*$  assim como as escalas seguintes:

$$c^* = \frac{c}{\sqrt{gH}} \quad \text{e} \quad \xi^* = \frac{\xi}{L}, \quad (2.32)$$

em que  $c^*$  é a velocidade de propagação da onda na forma adimensional. Note-se que usando (2.17b) resulta

$$\eta^* = -\frac{\partial \Phi^*}{\partial t^*} + O(\mu^2). \quad (2.33)$$

De (2.17) e (2.33) e usando-se a transformação de Galileu assim como uma técnica de substituição recursiva obtém-se a equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$  seguinte:

$$\frac{d^2 \Phi^*}{d\xi^{*2}} (1 - c^{*2}) + 3\varepsilon c^* \frac{d\Phi^*}{d\xi^*} \frac{d^2 \Phi^*}{d\xi^{*2}} + \frac{1}{3} c^{*2} \mu^2 \frac{d^4 \Phi^*}{d\xi^{*4}} = 0. \quad (2.34)$$

Integrando a equação anterior com respeito a  $\xi^*$  e assumindo-se que no limite  $\frac{d\Phi^*}{d\xi^*} = \frac{d^3 \Phi^*}{d\xi^{*3}} = 0$  quando  $|\xi^*| \rightarrow +\infty$  resulta uma determinada equação para o potencial transformado da velocidade do fluido. Multiplicando-se esta equação por  $2 \frac{d^2 \Phi^*}{d\xi^{*2}}$ , integrando-se novamente com respeito a  $\xi^*$  e impondo-se as condições de fronteira referidas anteriormente juntamente com a condição que no limite  $\frac{d^2 \Phi^*}{d\xi^{*2}} = 0$  quando  $|\xi^*| \rightarrow +\infty$ , temos que

$$\left( \frac{d\Phi^*}{d\xi^*} \right)^2 (1 - c^{*2}) + \varepsilon c^* \left( \frac{d\Phi^*}{d\xi^*} \right)^3 + \frac{1}{3} \mu^2 c^{*2} \left( \frac{d^2 \Phi^*}{d\xi^{*2}} \right)^2 = 0. \quad (2.35)$$

Assumindo-se uma solução da forma seguinte:

$$\frac{d\Phi^*}{d\xi^*} = a_3 \operatorname{sech}^2(a_4 \xi^*) \quad (2.36)$$

e usando-se (2.35), temos que

$$a_3 = \frac{c^{*2} - 1}{\varepsilon c^*} \quad \text{e} \quad a_4 = \frac{\pm \sqrt{3(c^{*2} - 1)}}{2\mu c^*}. \quad (2.37)$$

Integrando-se (2.36) com respeito a  $\xi^*$ , temos que

$$\Phi^*(\xi^*) = \frac{a_3}{a_4} \tanh(a_4 \xi^*) + K_1, \quad (2.38)$$

em que  $K_1$  é uma constante real e arbitrária de integração e  $c^* \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ . Usando-se (2.17b), (2.33) e a respectiva transformação de Galileu  $\xi^* = x^* - c^* t^*$  assim como (2.36) e (2.37) resulta a expressão para a elevação da superfície da onda seguinte:

$$\eta^*(\xi^*) = a_1 \operatorname{sech}^2(a_4 \xi^*) + a_2 \operatorname{sech}^4(a_4 \xi^*), \quad (2.39)$$

em que  $a_1$  e  $a_2$  são dados por

$$a_1 = a_3 \left( c^* + \frac{4}{15} \mu^2 c^{*2} a_4^2 \right) \quad \text{e} \quad a_2 = -a_3 \left( \frac{1}{2} \varepsilon a_3 + \frac{2}{5} c^* \mu^2 a_4^2 \right). \quad (2.40)$$

Deste modo, usando-se (2.8), (2.9), (2.32), (2.37) e (2.38) o potencial transformado da velocidade do fluido na forma dimensional é dado pela expressão que segue:

$$\Phi(x, t) = \pm \frac{2H \sqrt{3(c^2 - gH)}}{3} \tanh \left( \pm \frac{\sqrt{3(c^2 - gH)}}{2Hc} (x - ct) \right) + K_1 \frac{AL\sqrt{gH}}{H}. \quad (2.41)$$

Por outro lado, usando-se (2.8), (2.9), (2.32), (2.37), (2.39) e (2.40) a elevação da superfície da onda marítima na forma dimensional é dada pela equação seguinte:

$$\eta(x, t) = \hat{a}_1 \operatorname{sech}^2 \left( \pm \frac{\sqrt{3(c^2 - gH)}}{2Hc} (x - ct) \right) + \hat{a}_2 \operatorname{sech}^4 \left( \pm \frac{\sqrt{3(c^2 - gH)}}{2Hc} (x - ct) \right), \quad (2.42)$$

onde  $\hat{a}_1$  e  $\hat{a}_2$  são dados por

$$\hat{a}_1 = \frac{(c^2 - gH)(5gHc + \sqrt{gH}(c^2 - gH))}{5g^2Hc} \quad \text{e} \quad \hat{a}_2 = \frac{-8(c^2 - gH)^2}{10gc^2}. \quad (2.43)$$

Note-se que (2.41)–(2.43) são válidas para  $t \geq 0$  s. Então pode-se definir aqui uma condição inicial homóloga àquela expressa pelas equações (2.30) e (2.31), a qual é definida pelas equações (2.41)–(2.43) para  $t = 0$  s.

## 2.6.2 Onda incidente

A indução de ondas por meio das condições de fronteira pode ser considerada para a geração de ondas dependentes do tempo. Este processo requer que a elevação da superfície da onda bem como o potencial da velocidade do fluido satisfaçam condições de fronteira apropriadas,

e.g., condições de Dirichlet ou condições de Neumann. Um dos casos mais simples é a indução de uma onda periódica dada por

$$\eta(x, t) = a \sin(kx - \omega t), \quad (2.44)$$

$$\Phi(x, t) = -\frac{\hat{c}}{k} \cos(kx - \omega t) + K_f(t), \quad (2.45)$$

em que  $\hat{c}$  é a magnitude da velocidade da onda e  $K_f(t)$  é uma função de integração dependente do tempo. Esta função  $K_f(t)$  tem de satisfazer a condição inicial do problema. Note-se que os parâmetros  $a$ ,  $\hat{c}$ ,  $k$  e  $\omega$  não são arbitrários. Mais especificamente,  $k$  e  $\omega$  devem estar relacionados pela relação de dispersão dada pela equação (2.22) sem termos dissipativos. Por outro lado,  $\hat{c}$  é dado pela expressão seguinte:

$$\frac{\hat{c}}{k} = \frac{a\omega}{hk^2} \left( 1 + \frac{2}{5}(kh)^2 \right). \quad (2.46)$$

A sobreposição de ondas pode também ser considerada como soluções do problema completamente linear assumindo-se que o fundo do oceano é constante.

### 2.6.3 Função de fonte

No trabalho de Wei et al. (1999), uma função de fonte foi apresentada para a geração de ondas marítimas de superfície. Esta função de fonte foi obtida usando transformadas de Fourier e funções de Green, para resolver as equações linearizadas e não homogêneas dos modelos de Peregrine (1967) e de Nwogu (1993). Este procedimento matemático pode ser adaptado neste trabalho com vista à dedução de uma função de fonte análoga.

Consideramos uma onda Gaussiana monocromática gerada pela função de fonte seguinte:

$$S(x, t) = D^* e^{-\beta(x-x_s)^2} \cos(\omega t), \quad (2.47)$$

com  $D^*$  dado por

$$D^* = \frac{\sqrt{\beta}}{\omega\sqrt{\pi}} a e^{(k^2/(4\beta))} \frac{2}{15} h^3 k^3 g. \quad (2.48)$$

Nas expressões anteriores  $x_s$  é a linha central da banda de geração associada à função de fonte enquanto  $\beta$  é o parâmetro associado à largura da banda referida (ver Wei et al. (1999)). Note-se que a função de fonte  $S(x, t)$  deve ser adicionada ao segundo membro da equação (2.19a).

## 2.7 Fronteiras reflexivas e camadas de esponja

Consideramos mais dois tipos de fronteiras:

- i*) fronteiras totalmente reflexivas;
- ii*) camadas de esponja.

O primeiro caso é modelado pelas equações seguintes:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{em } \Gamma, \quad (2.49)$$

em que  $\Gamma$  é a fronteira do domínio computacional  $\Omega$  e  $\mathbf{n}$  é o vector unitário normal a  $\Gamma$  e dirigido para o exterior de  $\Omega$ . O segundo caso fica definido através da introdução de um termo

extra e artificial, designado usualmente por camada de esponja, o qual é dado por  $\nu \nabla^2 \Phi$  (ver (2.19b)). Para além disto, as condições de fronteira dadas pelas equações (2.49) devem ainda ser satisfeitas. Este termo extra actua numa vizinhança da fronteira  $\Gamma$ . Desta forma, a energia associada aos fenómenos de reflexão das ondas pode ser controlada. Podemos também prevenir os fenómenos de reflexões indesejadas junto às fronteiras bem como evitar interações complexas entre ondas. Os efeitos de dissipação da energia originados pelo rebentamento das ondas podem também ser simulados.

De facto, uma camada de esponja é um subconjunto  $\Omega_S$  de  $\Omega$  onde os efeitos dissipativos de energia são considerados por meio da inclusão de um termo extra nas equações diferenciais. Como mencionado anteriormente, o sistema de equações diferenciais pode incorporar diversos termos extra para descrever a absorção da energia da onda, como aquele termo incluído no modelo dissipativo aqui estudado (ver (2.19b)). Assim, o coeficiente de viscosidade cinemática  $\nu$  pode ser descrito por uma função com a forma seguinte:

$$\nu(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin \Omega_S, \\ n_1 \frac{e^{\left(\frac{d_{\Omega_S} - d(x, y)}{d_{\Omega_S}}\right)^{n_2}} - 1}{e - 1}, & (x, y) \in \Omega_S, \end{cases} \quad (2.50)$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são, em geral, parâmetros experimentais,  $d_{\Omega_S}$  é o diâmetro da camada de esponja,  $d(x, y)$  designa a função que representa a distância entre um ponto  $(x, y) \in \Omega_S$  e a intersecção de  $\Gamma$  com a fronteira de  $\Omega_S$  (ver, e.g., Walkley (1999)).

## 2.8 Análise da estabilidade do problema linearizado

Nesta secção, uma análise matricial da estabilidade do modelo ZTC linearizado é realizada assumindo-se um problema a uma dimensão horizontal e um fundo impermeável independente do tempo. Os procedimentos matemáticos desenvolvidos por Løvholm e Pedersen (2009) são aqui adoptados para o estudo da estabilidade do sistema de equações discretizadas com respeito à variável espacial usando-se o método dos elementos finitos. Apenas malhas uniformes são consideradas para a análise da estabilidade apresentada a seguir. O modelo convencional baseado numa formulação do potencial médio da velocidade do fluido investigado por Løvholm e Pedersen (2009) é também aqui usado como referência para comparação. Condições de fronteira completamente reflexivas são consideradas em ambos os modelos.

Começamos por assumir soluções com variáveis separáveis para a elevação da superfície da onda marítima e para o potencial transformado da velocidade do fluido na forma seguinte:

$$\eta(x, t) = e^{i\omega t} \hat{\eta}(x), \quad \Phi(x, t) = e^{i\omega t} \hat{\Phi}(x), \quad (2.51)$$

onde  $\omega$  designa a frequência angular que pode tomar valores reais ou complexos. Nas equações do modelo ZTC linearizado, as derivadas com respeito ao tempo da elevação da superfície da onda e do potencial transformado da velocidade do fluido, i.e.,  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , podem ser substituídas por  $i\omega \eta$  e por  $i\omega \Phi$ , respectivamente. Isto deve-se ao facto das soluções serem dadas na forma descrita por (2.51). Utilizando-se (2.51) e (2.27) assim como substituindo-se  $\hat{\eta}$  e  $\hat{\Phi}$  pelas suas aproximações por elementos finitos obtém-se um problema de valores próprios da forma seguinte:

$$(\mathcal{K} + i\omega \mathcal{M})U = 0, \quad (2.52)$$

em que  $\mathcal{K}$  é a matriz de rigidez relacionada com os segundos membros das equações (2.27), enquanto  $\mathcal{M}$  é a matriz de massa dada pelos primeiros membros das mesmas equações. Este pro-

blema é resolvido usando-se a interface DOLFIN para as bibliotecas SLEPc. O código de demonstração para este problema de valores próprios está disponível em `dolfwave/demo/stability`.

Note-se que no caso particular em que se considera um fundo impermeável constante, o problema (2.52) é descrito pelo conjunto de equações semi-discretas que segue:

$$\frac{H}{\Delta x} \hat{\Phi}_1 - \frac{H}{\Delta x} \hat{\Phi}_2 - i\omega \left[ \left( \frac{\Delta x}{3} + \frac{2}{5} \frac{H^2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_1 + \left( \frac{\Delta x}{6} - \frac{2}{5} \frac{H^2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_2 \right] = 0, \quad (2.53a)$$

$$\left( -g \frac{\Delta x}{3} - g \frac{H^2}{15\Delta x} \right) \hat{\eta}_1 + \left( -g \frac{\Delta x}{6} + g \frac{H^2}{15\Delta x} \right) \hat{\eta}_2 - i\omega \left( \frac{\Delta x}{3} \hat{\Phi}_1 + \frac{\Delta x}{6} \hat{\Phi}_2 \right) = 0, \quad (2.53b)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{H}{\Delta x} \left( \hat{\Phi}_{j-1} + \hat{\Phi}_{j+1} \right) + \frac{2H}{\Delta x} \hat{\Phi}_j - \\ & - i\omega \left[ 2 \left( \frac{\Delta x}{3} + \frac{2}{5} \frac{H^2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_j + \left( \frac{\Delta x}{6} - \frac{2}{5} \frac{H^2}{\Delta x^2} \right) (\hat{\eta}_{j-1} + \hat{\eta}_{j+1}) \right] = 0 \quad (2 \leq j \leq n-2), \end{aligned} \quad (2.53c)$$

$$\begin{aligned} & - 2 \left( g \frac{\Delta x}{3} + g \frac{H^2}{15\Delta x} \right) \hat{\eta}_j + \left( -g \frac{\Delta x}{6} + g \frac{H^2}{15\Delta x} \right) (\hat{\eta}_{j-1} + \hat{\eta}_{j+1}) - \\ & - i\omega \left[ 2 \frac{\Delta x}{3} \hat{\Phi}_j + \frac{\Delta x}{6} (\hat{\Phi}_{j-1} + \hat{\Phi}_{j+1}) \right] = 0 \quad (2 \leq j \leq n-2), \end{aligned} \quad (2.53d)$$

$$\frac{H}{\Delta x} \hat{\Phi}_n - \frac{H}{\Delta x} \hat{\Phi}_{n-1} - i\omega \left[ \left( \frac{\Delta x}{3} + \frac{2}{5} \frac{H^2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_n + \left( \frac{\Delta x}{6} - \frac{2}{5} \frac{H^2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_{n-1} \right] = 0, \quad (2.53e)$$

$$\left( -g \frac{\Delta x}{3} - g \frac{H^2}{15\Delta x} \right) \hat{\eta}_n + \left( -g \frac{\Delta x}{6} + g \frac{H^2}{15\Delta x} \right) \hat{\eta}_{n-1} - i\omega \left( \frac{\Delta x}{3} \hat{\Phi}_n + \frac{\Delta x}{6} \hat{\Phi}_{n-1} \right) = 0, \quad (2.53f)$$

onde  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ) é o diâmetro da malha uniforme e  $\hat{\eta}_j$  assim como  $\hat{\Phi}_j$  designam  $\hat{\eta}(x_j)$  e  $\hat{\Phi}(x_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ), respectivamente. Podemos mostrar que

$$\omega = \pm \sqrt{g \left( \frac{3H}{\Delta x^2} \right) \left( \frac{5\Delta x^2 + H^2}{5\Delta x^2 + 6H^2} \right)} \quad (2.54)$$

são sempre valores próprios do problema de fundo constante. Através de (2.54) podemos concluir que o erro absoluto gerado no cálculo dos valores próprios é inferior a  $10^{-11}$  e que o raio espectral tende para infinito quando  $\Delta x$  tende para zero.

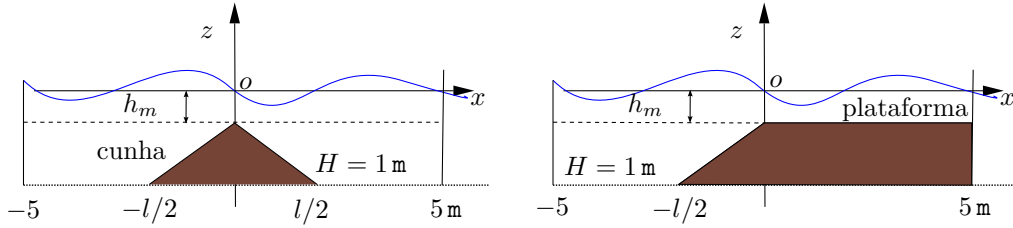
Alguns modelos das classes BEV e BEP podem ser susceptíveis a instabilidades relacionadas com gradientes acentuados do fundo (ver Løvholm e Pedersen (2009)). De facto, Løvholm e Pedersen (2009) mostraram que o modelo convencional baseado na formulação do potencial médio da velocidade do fluido é muito susceptível a estas instabilidades. As propriedades de estabilidade do modelo linearizado ZTC e do modelo convencional, mencionado atrás, são aqui comparadas. Através das equações (2.51) e (2.52) podemos concluir que podem ocorrer diversos modos instáveis, relativos à propagação de ondas marítimas de superfície, quando os valores próprios  $\omega$  são do tipo seguinte:

- (I) quando  $\omega$  é um número imaginário puro as soluções crescem ou decaem de forma exponencial e sem propagação;
- (II) quando  $\omega$  é um número complexo com parte real não nula as soluções crescem ou decaem exponencialmente com propagação.

Para além disto, quando é considerado um esquema de diferenças finitas centradas com erro de ordem  $O((\Delta t)^2)$  para discretizar o problema com respeito ao tempo, a equação (2.52)

é rescrita com  $\omega$  substituído por  $\hat{\omega}$  onde  $\hat{\omega} = \frac{2}{\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)$ . Nesta situação, outro tipo de instabilidades pode surgir quando uma solução real é encontrada para  $\hat{\omega}$  tal que  $\frac{1}{2}\Delta t|\hat{\omega}| > 1$  e  $\omega$  complexo, o que corresponde a um critério do tipo CFL. Este tipo de instabilidade pode ser evitada considerando um passo de tempo  $\Delta t$  suficientemente pequeno.

Para os testes de estabilidade, consideramos as geometrias descritas na figura 2.5 com  $l = 2$  m,  $l = 1$  m e  $l = 0.5$  m. Em todos os casos testamos 1300 pares de  $(h_m, \Delta x)$  com  $h_m$  e  $\Delta x \in ]0, 1](\text{m})$ .



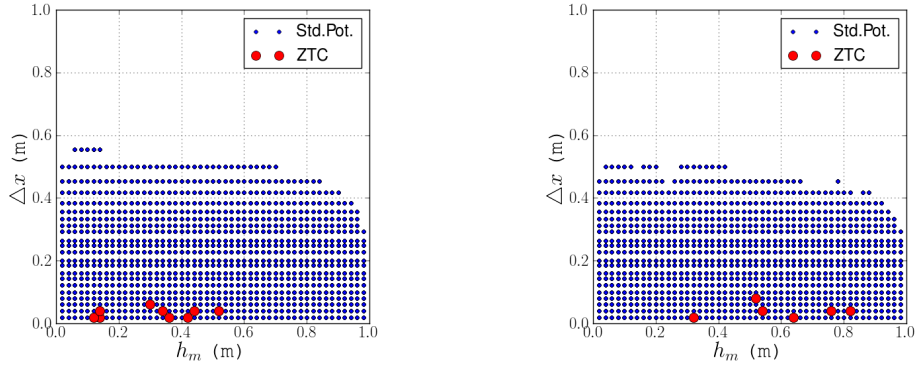
**Figura 2.5:** Representação esquemática da região ocupada pelo fluido com um fundo impermeável de geometria em cunha (painel à esquerda) e de geometria em plataforma (painel à direita).

Nas figuras 2.6–2.8, podem-se observar os modos instáveis  $(h_m, \Delta x)$ , relativos à propagação das ondas marítimas de superfície, para o modelo ZTC (círculos vermelhos) e para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (pontos azuis) para as geometrias em cunha (painéis à esquerda) e em plataforma (painéis à direita) com  $l = 2$  m,  $l = 1$  m e  $l = 0.5$  m. Apenas apresentamos os pares  $(h_m, \Delta x)$  relacionados com os valores próprios com parte imaginária (crescimento/decaimento exponencial) pelo menos de ordem  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Note-se que no modelo ZTC, apenas se registam no máximo 10 modos instáveis do tipo I com taxas de crescimento menores que  $|\text{Im}(\omega)| = 3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

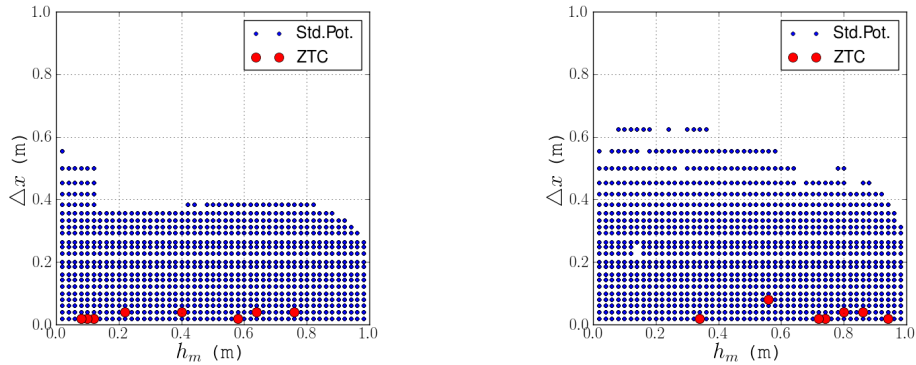
Por outro lado, nas figuras 2.9–2.11 apresentamos os valores próprios para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (painéis superiores) e para o modelo ZTC (painéis inferiores), relativos às geometrias em cunha (painéis à esquerda) e em plataforma (painéis à direita), com  $l = 2$  m e  $\Delta x = 0.02$  m,  $l = 1$  m e  $\Delta x = 0.1$  m assim como  $l = 0.5$  m e  $\Delta x = 0.25$  m. Saliente-se que o espectro depende de  $h_m$  e os valores próprios são representados com cores diferentes (desde vermelho até azul) de forma a acentuar essa dependência ( $h_m \cong 1$  m,  $h_m \cong 0.5$  m e  $h_m \cong 0.02$  m, sendo estes valores representados por círculos vermelhos, verdes e azuis, respectivamente).

Assim como referido em Løvholt e Pedersen (2009), encontramos aqui também instabilidades dos tipos I e II para o modelo convencional baseado na formulação BEP, quando se consideram gradientes acentuados da batimetria e malhas finas. Para além disso, pode-se também concluir que se  $l$  aumenta, o número de modos instáveis também aumenta. Mais ainda, o aumento dos gradientes do fundo com respeito às variáveis espaciais implica o aumento da taxa de crescimento das soluções instáveis para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido. Em contraste, as taxas de crescimento das soluções instáveis, relativas ao modelo ZTC, estão limitadas a  $|\text{Im}(\omega)| = 3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Løvholt e Pedersen (2009) mostraram que um limite inferior para a taxa de crescimento das soluções instáveis de  $|\text{Im}(\omega)| = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  não influencia os resultados numéricos para a maioria dos problemas reais, ainda que ocorram gradientes acentuados da batimetria, como no caso da simulação de tsunamis.

Podemos concluir que o modelo ZTC é bastante robusto no que diz respeito às instabilidades dependentes de  $l$ , dos gradientes acentuados do fundo do oceano e das variações do diâmetro das malhas (ver figuras 2.6–2.11).



**Figura 2.6:** Modos instáveis para a propagação de ondas marítimas de superfície para o modelo ZTC (círculos vermelhos) e para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (pontos azuis) para fundos com geometrias em cunha (painel à esquerda) e em plataforma (painel à direita) com  $l = 2$  m.

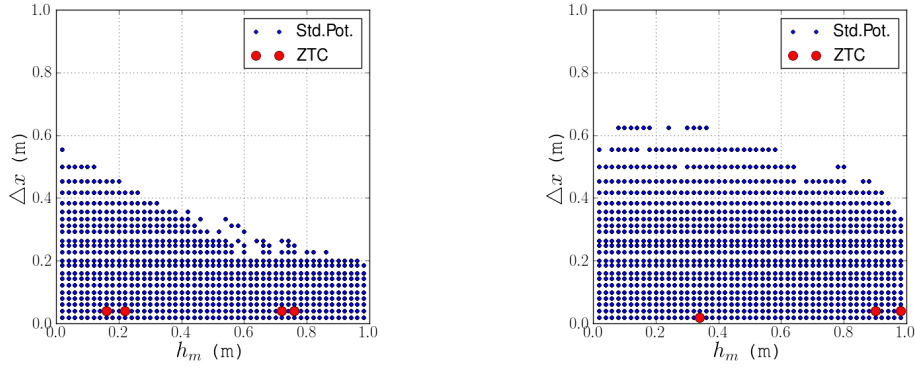


**Figura 2.7:** Modos instáveis para a propagação de ondas marítimas de superfície para o modelo ZTC (círculos vermelhos) e para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (pontos azuis) para fundos com geometrias em cunha (painel à esquerda) e em plataforma (painel à direita) com  $l = 1$  m.

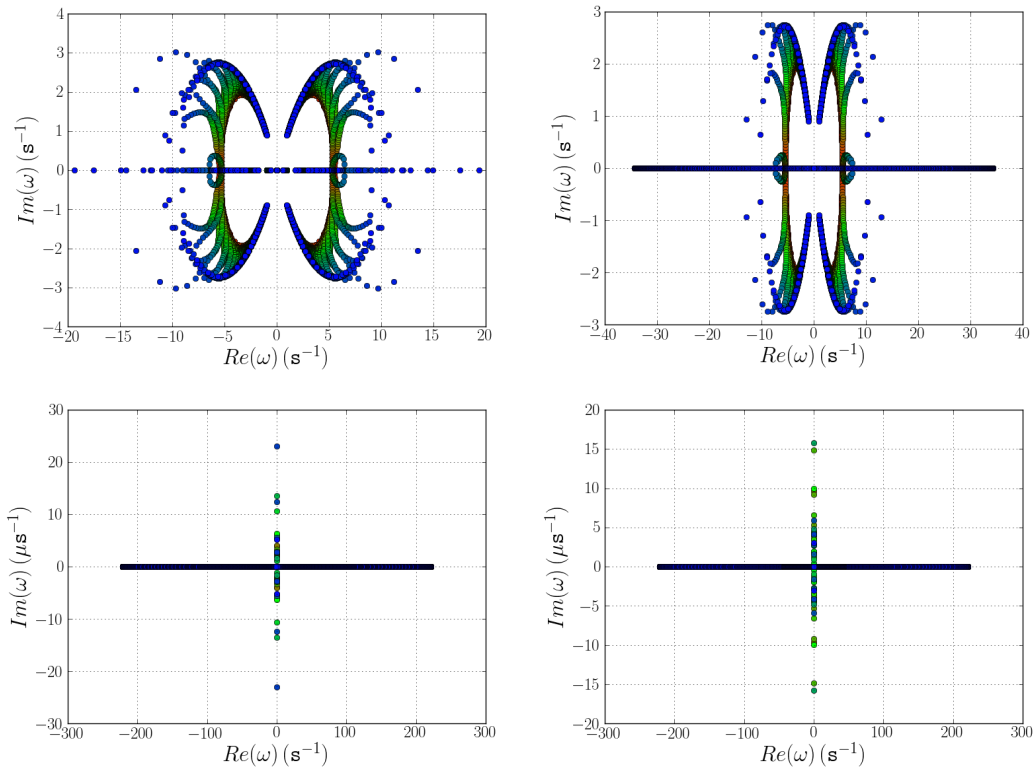
Na secção seguinte, o modelo fracamente não linear de ZTC é testado de forma a verificar a sua robustez com respeito a instabilidades.

## 2.9 Validação do modelo e aplicações numéricas

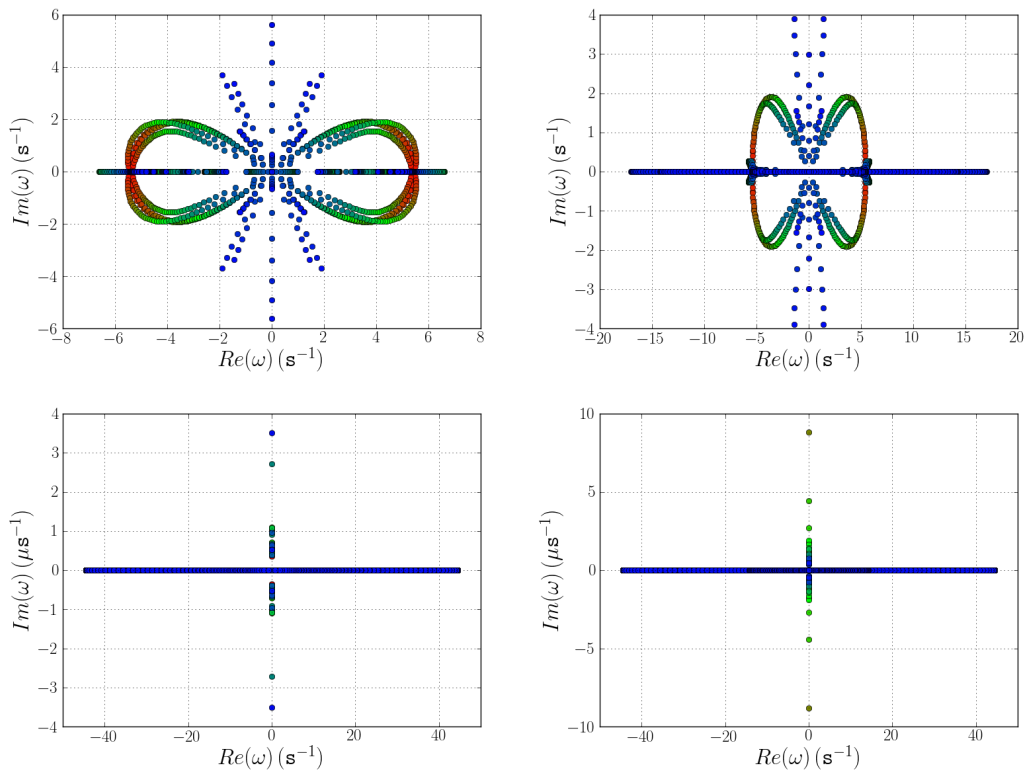
Para validar o modelo consideram-se duas aplicações disponíveis na literatura. Adicionalmente, investigamos também a propagação de ondas de superfície numa geometria típica de um porto de abrigo assim como a geração de uma onda de superfície originada pelo deslocamento de um objecto num fundo plano. Para além disto, a geração e a propagação de um tsunami ao largo da costa portuguesa são também simuladas.



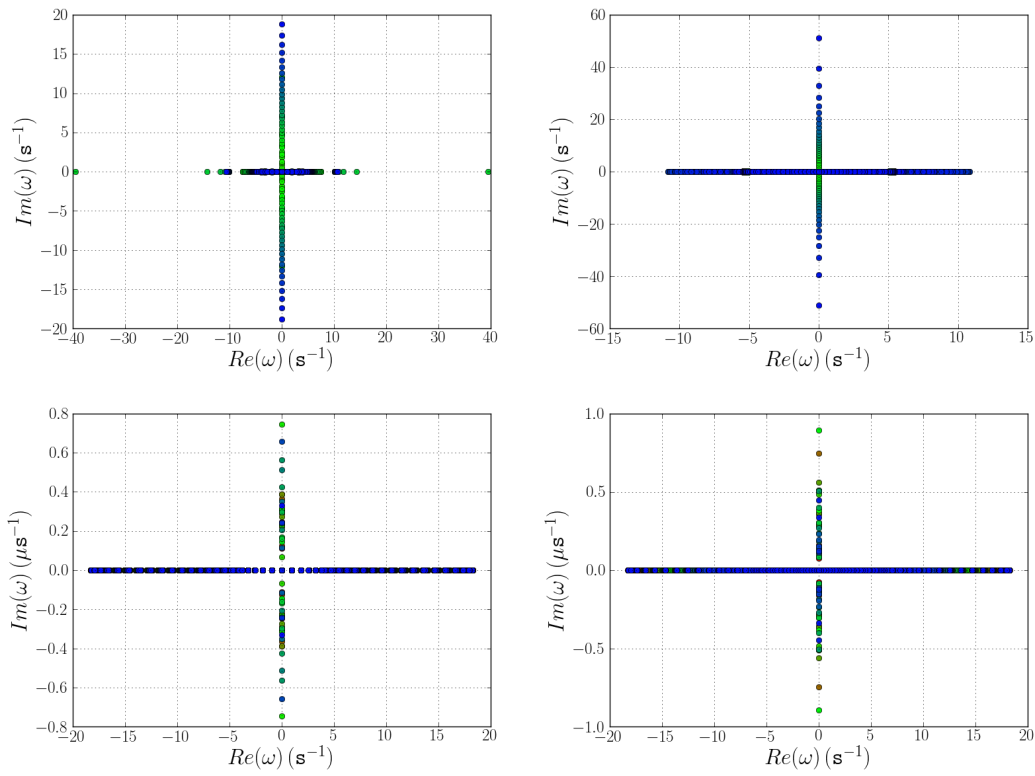
**Figura 2.8:** Modos instáveis para a propagação de ondas marítimas de superfície para o modelo ZTC (círculos vermelhos) e para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (pontos azuis) para fundos com geometrias em cunha (painel à esquerda) e em plataforma (painel à direita) com  $l = 0.5$  m.



**Figura 2.9:** Espectro dos valores próprios para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (painéis superiores) e modelo ZTC (painéis inferiores) para as geometrias em cunha (painéis à esquerda) e plataforma (painéis à direita), com  $l = 2$  m,  $\Delta x = 0.02$  m e  $h_m$  com valores desde 0.02 m (círculos azuis) até 1 m (círculos vermelhos).



**Figura 2.10:** Espectro dos valores próprios para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (painéis superiores) e modelo ZTC (painéis inferiores) para as geometrias em cunha (painéis à esquerda) e plataforma (painéis à direita), com  $l = 1$  m,  $\Delta x = 0.1$  m e  $h_m$  com valores desde 0.02 m (círculos azuis) até 1 m (círculos vermelhos).



**Figura 2.11:** Espectro dos valores próprios para o modelo convencional do potencial médio da velocidade do fluido (painéis superiores) e modelo ZTC (painéis inferiores) para as geometrias em cunha (painéis à esquerda) e plataforma (painéis à direita), com  $l = 0.5$  m,  $\Delta x = 0.25$  m e  $h_m$  com valores desde 0.02 m (círculos azuis) até 1 m (círculos vermelhos).

### 2.9.1 Onda solitária sobre barras submersas

Nesta subsecção, a propagação de ondas solitárias sobre barras submersas é simulada através do código DOLFWAVE. Em particular, consideramos barras com geometrias trapezoidais e triangulares. Note-se que as soluções do modelo BEP/ZTC obtidas pelo código DOLFWAVE são comparadas com as soluções das equações do modelo BEV de Nwogu. Estas últimas soluções são obtidas através de outro código desenvolvido neste trabalho de investigação científica (ver `dolfwave/tools/Nwogu`). Especificamente, as equações de Nwogu são discretizadas através de uma formulação mista de elementos finitos (ver Walkley (1999)) bem como um esquema implícito de Runge-Kutta do tipo Radau IIA para a integração no tempo (ver Hairer e Wanner (1991)).

Começamos pela descrição do problema conjuntamente com o código DOLFWAVE usado para a sua resolução numérica. O código C++ deve ser inicializado com a inclusão da biblioteca DOLFWAVE.

---

```
#include <dolfwave.h>
using namespace dolfin::dolfwave;
```

---

A condição inicial para a elevação da superfície da onda marítima é dada por (2.30) e implementada como segue:

---

```
class ElevationInit : public Expression
{
    void eval(Array<double> & values,const Array<double> & x) const
    {
        // Wave parameters (see Walkley [1999])
        double c=sqrt(1.025), H=0.4;
        double ca=-0.4, cb=ca+1.0/3.0;
        double center=-5.0;
        double a1=(H/3.0)*(sqr(c)-1)/(cb-ca*sqr(c));
        double a2=-(H/2.0)*sqr((sqr(c)-1)/c)*(cb+2.0*ca*sqr(c))/(cb-ca*sqr(c));
        double k=(1.0/(2.0*H))*sqrt((sqr(c)-1)/(cb-ca*sqr(c)));
        values[0]=a1/sqr(cosh(k*(x[0]-center)))+a2/sqr(sqr(cosh(k*(x[0]-center))));
    }
};
```

---

A condição inicial para o potencial da velocidade do fluido é definida por (2.41) e implementada usando o código seguinte:

---

```
class PotentialInit : public Expression
{
    void eval(Array<double> & values,const Array<double> & x) const
    {
        //Wave parameters
        double c=sqrt(1.025), H=0.4;
        double ca=-0.4, cb=ca+1.0/3.0;
        double center=-5.0;
        double a3=sqrt(H*g_e)*(sqr(c)-1)/c;
        double k=(1.0/(2.0*H))*sqrt((sqr(c)-1)/(cb-ca*sqr(c)));
```

```

//Constant of integration
double cnst=4.0*a3/(2.0*k*(1+exp(2.0*k*(-25.))));
values[0]=-4.0*a3/(2.0*k*(1+exp(2.0*k*(x[0]-center))))+cnst;
}
};

```

---

O fundo de geometria trapezoidal  $z = -h(x)$  é descrito pela função contínua e diferenciável por ramos  $h(x)$  (m), a qual é expressa pela equação seguinte:

$$h(x) = \begin{cases} 0.4 & \text{se } -25 \leq x \leq 6 \\ -0.05x + 0.7 & \text{se } 6 < x \leq 12 \\ 0.1 & \text{se } 12 < x \leq 14 \\ 0.1x - 1.3 & \text{se } 14 < x \leq 17 \\ 0.4 & \text{se } 17 < x \leq 25 \end{cases} \quad (\text{m}). \quad (2.55)$$

Este fundo trapezoidal é implementado através do código que segue:

---

```

class Depth : public Expression
{
void eval(Array<double> & values,const Array<double> & x) const
{
double retrn=0.0;
if(x[0]<=6.0)
retrn=0.4;
else if(x[0]<=12.0)
retrn=-0.05*x[0]+0.7;
else if(x[0]<=14.0)
retrn=0.1;
else if(x[0]<=17.0)
retrn=0.1*x[0]-1.3;
else retrn=0.4;
values[0]=retrn;
}
};

```

---

O código da demonstração inicia-se com a criação de um objecto da classe Dolfwave. Aqui, simulamos a propagação de uma onda durante 25s usando um passo de tempo de 0.001s. O ficheiro UFL “Zhao\_1D”, que contém a formulação variacional usada neste problema, corresponde à versão do problema a uma dimensão horizontal descrito por (2.27). Neste exemplo usamos um método LU disponibilizado pela biblioteca PETSc (ver Logg et al. (2012)). A pré-visualização das soluções numéricas é realizada pelo programa Viper, o qual está integrado nas bibliotecas do projecto FEniCS. Para o pós-processamento, as soluções são gravadas na directoria “output” usando um formato ASCII denotado por “xyz”.

---

```

int main( )
{
Dolfwave dw(25000 /*Number of steps*/,
0.001 /*Time step*/,

```

```

100 /*Gap for saving the solutions*/,
"Zhao_1D" /*Variational form identifier*/,
"LU_P" /*Linear solver type*/,
"viper" /*Preview program*/,
"output" /*Output directory*/,
"xyz" /*File output format*/);

```

---

O domínio espacial usado no caso da barra submersa com geometria trapezoidal é definido pelo intervalo  $[-25, 25]$ (m) discretizado usando 201 nós.

---

```
Interval mesh(201,-25,25);
```

---

As funções conhecidas são inicializadas de seguida. Neste exemplo não consideramos camadas de esponja ou funções de fonte.

---

```

// Depth função
Depth depth;
// Initial condition for the surface elevation
ElevationInit eta_init;
// Initial condition for the velocity potential
PotentialInit phi_init;
// Sponge layers and source function are zero
Constant zero(0.0);

```

---

Todas as matrizes e vectores associados ao método dos elementos finitos são criados a partir das formas bilinear e linear da formulação variacional.

---

```

// Initialization of the function spaces
dw.FunçãoSpaceInit(mesh);
// Initialization of the bilinear form 'a'
dw.BilinearFormInit(mesh,depth);
// Initialization of the system matrices
dw.MatricesAssemble( );
// Initialization of the surface elevation and velocity potential
dw.FunçõesInit( );
// Initialization of the linear form 'L'
dw.LinearFormsInit(depth, zero, zero, zero, zero, zero);
// Setting the initial conditions
dw.InitialCondition(eta_init,phi_init);
// Initialization of the auxiliary vectors for the time integration schemes
dw.VectorInit( );

```

---

Apenas necessitamos de fazer uma factorização LU uma vez que a matriz do sistema de elementos finitos não depende do tempo.

---

```

// Reuse the LU factorization throughout the time integration routines
dw.LUFactorization(true);

```

---

Para o pós-processamento dos dados, a função simétrica da função que descreve a batimetria é gravada.

---

```
// Plot the symmetric of the depth função h
dw.DepthPlot(mesh,depth,true);
```

---

As rotinas de integração no tempo são usadas agora. O esquema de Adams-Bashforth-Moulton descrito pelas equações (2.29) é inicializado por um esquema explícito de Runge-Kutta de quarta ordem.

---

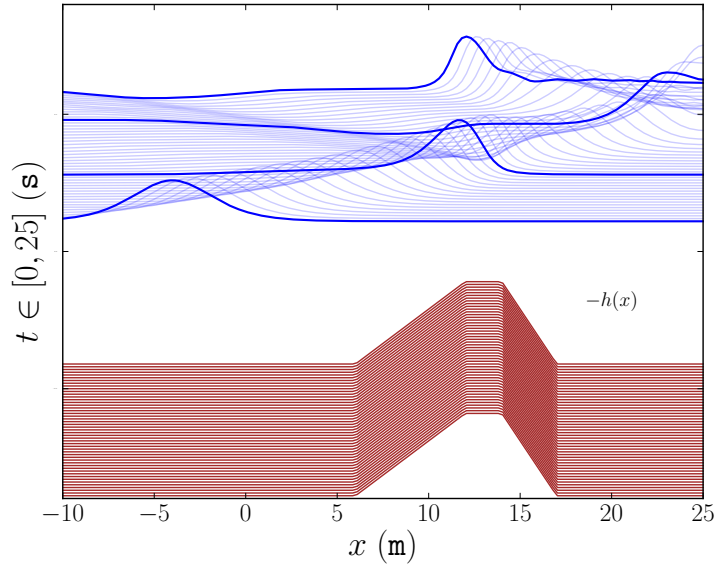
```
// Choose the explicit 4th-order Runge-Kutta for initialization
dw.RKInit("exp4");
// Use the Runge-Kutta for the 3 initial steps
dw.RKSolve( );
// Initialization of the predictor-corrector with multi-step corrector
dw.PCInit(mesh,true);
// Advance in time with the predictor-corrector scheme
for(dofin::uint i=4; i<dw.MaxSteps+1;i++)
{
    // Adams-Bashforth-Moulton method
    dw.PCSolve( );
    // Save and preview the surf. elevation with a gap of 100 iterations
    if (!(i%dw.WriteGap))
        dw.Plot(mesh,true /*eta preview*/, false /*phi preview*/,
            true /*eta save*/, false /*phi save*/);
}
return (EXIT_SUCCESS); // Finish the process
}
```

---

Neste exemplo, apenas visualizamos e gravamos a elevação da superfície da onda usando a função Plot. A solução obtida pelo código, para o caso da barra submersa com geometria trapezoidal com  $x \in [-10, 25]$  (m), é representada na figura 2.12. Note-se que o efeito de empolamento da onda é claramente observado tanto para as ondas incidentes como para as ondas reflectidas.

Na figura 2.13, as soluções obtidas pelos dois modelos independentes podem ser comparadas. Note-se que as equações (2.30) e (2.31) são usadas para definir a condição inicial correspondente às equações de Nwogu. Observamos que existe uma boa concordância entre as soluções numéricas, apesar destas serem provenientes de modelos e discretizações distintas. Para além disto, estas soluções são ainda concordantes com as de outro modelo desenvolvido por nós e implementado na aplicação DOLFWAVE (ver `dolfwave/demo/1HD/submergedbar` e o capítulo 3).

Nas simulações numéricas da onda solitária a passar sobre a barra submersa com geometria triangular, investigamos os efeitos não lineares e a influência de  $h_m$  na propagação da onda para os modelos fracamente não lineares BEP/ZTC e BEV/Nwogu (ver figura 2.14). Através da figura 2.15, podemos concluir que estes modelos estão em concordância no caso da barra submersa com geometria triangular com  $h_m = 0.1$  m. Estes modelos podem ainda ser comparáveis para o caso da barra submersa com geometria triangular para valores inferiores



**Figura 2.12:** Vista em detalhe da onda passando sobre a barra submersa com geometria trapezoidal usando o modelo BEP/ZTC implementado pelo código DOLFWAVE.

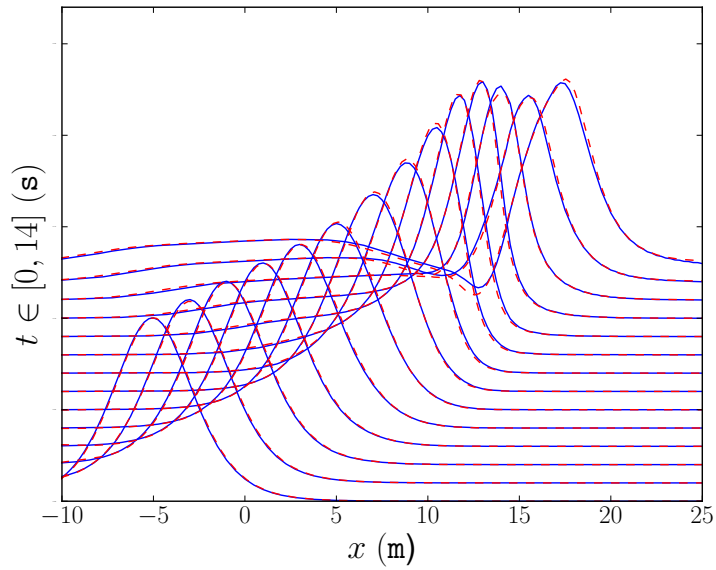
de  $h_m$  tais como  $h_m = 0.04$  m. Contudo, o modelo BEV/Nwogu apresenta oscilações de alta frequência e de baixa amplitude após a interacção da onda com a barra submersa (ver figura 2.16). Com o decréscimo do valor de  $h_m$  o modelo BEV/Nwogu torna-se instável (ver figura 2.17). Na figura 2.17, observamos a explosão da solução numérica obtida através do modelo de Nwogu para  $h_m = 0.02$  m. Salienta-se que a noção de explosão de uma solução numérica está relacionada com o facto de esta se tornar ilimitada num dado instante. Note-se que os valores de referência de  $\varepsilon$  no ponto  $(15, -h_m)$ (m) são de  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.25$  e  $\varepsilon = 0.5$  para  $h_m = 0.1$  m,  $h_m = 0.04$  m e  $h_m = 0.02$  m, respectivamente. Ainda que para  $\varepsilon = 0.5$  estejamos fora do domínio de validade para a aplicação dos modelos BEP/ZTC e BEV/Nwogu, o primeiro modelo mostra-se mais robusto perante os efeitos não lineares. Como iremos ver na secção seguinte, estas propriedades de estabilidade para o modelo BEP/ZTC são também observadas em testes numéricos envolvendo o refinamento das malhas.

### 2.9.2 Uma bossa Gaussiana numa região quadrada

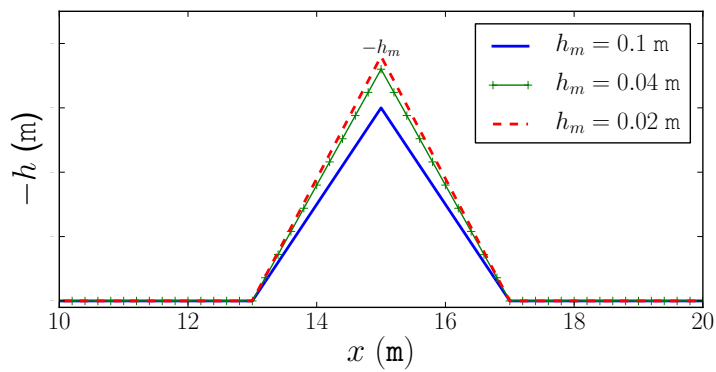
Nesta subsecção, simulamos a evolução de uma bossa Gaussiana a propagar-se numa região quadrada. Testes análogos podem ser encontrados na literatura (ver, e.g., Wei et al. (1995) assim como Woo e Liu (2004a)). O domínio computacional é um quadrado de área  $10 \times 10$  m<sup>2</sup>, o qual é discretizado usando malhas triangulares não estruturadas. Testes de refinamento da malha são apresentados de forma a garantir a convergência e a precisão do esquema. Fronteiras totalmente reflexivas (ver (2.49)) são assumidas e camadas de esponja não são consideradas. As condições iniciais do problema são dadas da forma seguinte:

$$\begin{cases} \eta(x, y, 0) = 0.1 e^{-0.4((x-5)^2+(y-5)^2)} \text{ (m)}, \\ \Phi(x, y, 0) = 0 \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}. \end{cases} \quad (2.56)$$

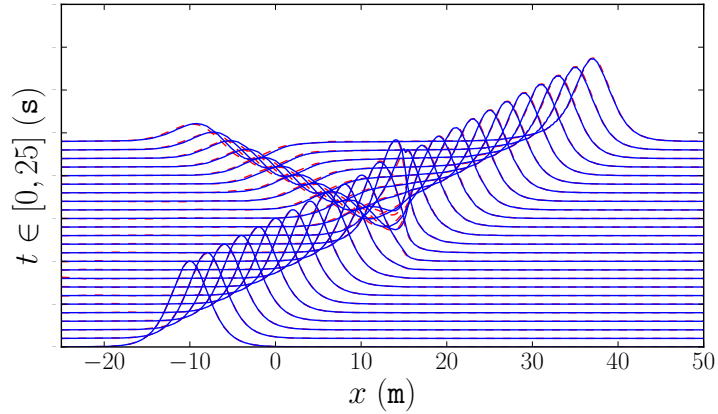
Um fundo constante descrito por  $z = -h$  com  $h = 0.5$  m é considerado. As condições iniciais dadas por (2.56) assim como este fundo constante foram considerados no manual do código FUNWAVE (ver Kirby (1998)). As soluções exactas das equações não lineares (2.19) não são



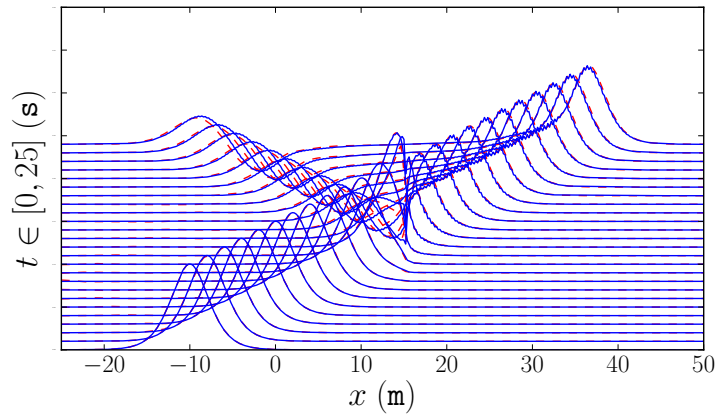
**Figura 2.13:** Comparação detalhada de uma onda passando sobre a barra submersa com geometria trapezoidal, a qual é simulada pela aplicação DOLFWAVE usando-se o modelo BEP/ZTC (linha vermelha tracejada) e o modelo BEV de Nwogu (linha azul sólida), para  $x \in [-10, 25](\text{m})$  e  $t \in [0, 14](\text{s})$ .



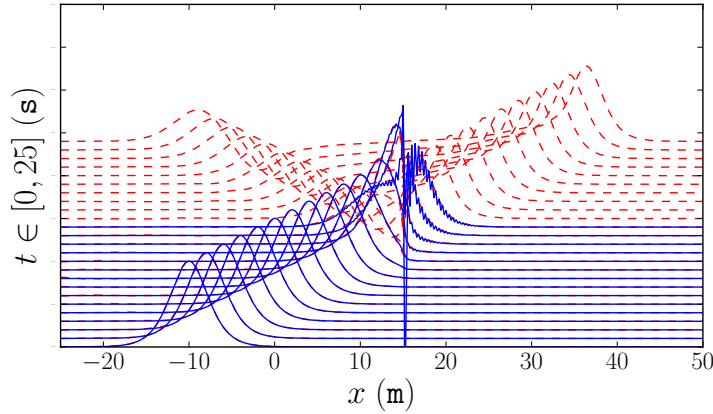
**Figura 2.14:** Esboço das três configurações do fundo para a barra submersa com geometria triangular e com altura  $h_m = 0.1 \text{ m}$  assim como  $\varepsilon = 0.1$  (linha sólida azul),  $h_m = 0.04 \text{ m}$  e  $\varepsilon = 0.25$  (linha verde com marcadores +) bem como para  $h_m = 0.02 \text{ m}$  e  $\varepsilon = 0.5$  (linha vermelha tracejada).



**Figura 2.15:** Comparação detalhada de uma onda a passar sobre a barra submersa com geometria triangular e com  $h_m = 0.1$  m,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $x \in [-25, 50]$ (m) e  $t \in [0, 25]$ (s). Estas soluções são obtidas através do código DOLFWAVE usando-se os modelos BEP/ZTC (linha vermelha tracejada) e BEV/Nwogu (linha azul sólida).



**Figura 2.16:** Comparação detalhada de uma onda a passar sobre a barra submersa com geometria triangular e com  $h_m = 0.04$  m,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $x \in [-25, 50]$ (m) e  $t \in [0, 25]$ (s). Estas soluções são obtidas através do código DOLFWAVE usando-se os modelos BEP/ZTC (linha vermelha tracejada) e BEV/Nwogu (linha azul sólida). Observam-se oscilações de alta frequência e de pequena amplitude nas soluções do modelo BEV/Nwogu.



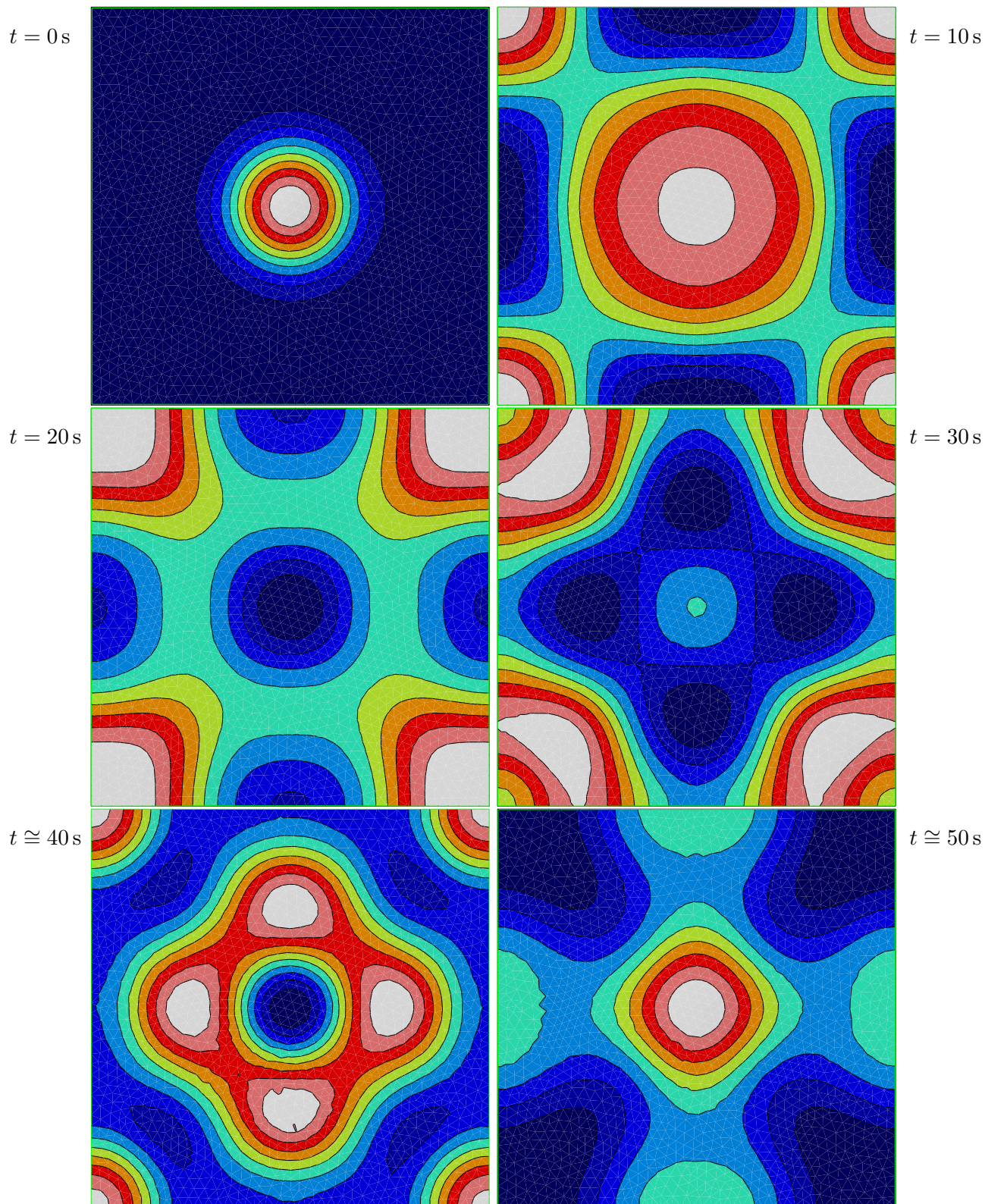
**Figura 2.17:** Comparação detalhada de uma onda a passar sobre a barra submersa com geometria triangular e com  $h_m = 0.02$  m,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $x \in [-25, 50]$ (m) e  $t \in [0, 25]$ (s). Estas soluções são obtidas através do código DOLFWAVE usando-se os modelos BEP/ZTC (linha vermelha tracejada) e BEV/Nwogu (linha azul sólida). Observa-se a explosão da solução numérica obtida através do modelo BEV/Nwogu.

conhecidas para o problema da propagação da bossa Gaussiana na região quadrada. Contudo, os perfis para a elevação da superfície da onda devem reflectir as propriedades simétricas do problema. De facto, estas propriedades de simetria são preservadas nas soluções numéricas obtidas pelo código DOLFWAVE mesmo para malhas não simétricas e não estruturadas. Como exemplo, os isovalores da elevação da superfície da onda são mostrados na figura 2.18 para a malha com 1873 nós e nos instantes  $t = 0$  s,  $t = 10$  s,  $t = 20$  s,  $t = 30$  s,  $t \cong 40$  s assim como  $t \cong 50$  s. Salientamos ainda que a lei da conservação de massa é satisfeita com um erro negligenciável. Na figura 2.19, o perfil temporal da elevação da superfície da onda é representado no ponto central  $P_0 = (5, 5)$ (m) e no ponto  $P_1 = (0, 0)$ (m), usando malhas com 2815, 1364 e 706 nós. Os resultados apresentados estão em concordância com aqueles incluídos no manual do código FUNWAVE, para um problema homólogo descrito pelas equações BEV não lineares de Wei et al. (1995). Apenas uma pequena mudança na fase é observada para  $t > 40$  s. Uma visão detalhada do perfil temporal da elevação da superfície da onda é mostrada na figura 2.20 para o ponto central  $P_0 = (5, 5)$ (m) usando malhas com 5049, 3964, 2815, 1873, 1364 e 706 nós. Note-se que uma pequena discrepância é observada entre os resultados obtidos com a malha mais grossa de 706 nós e as malhas mais finas.

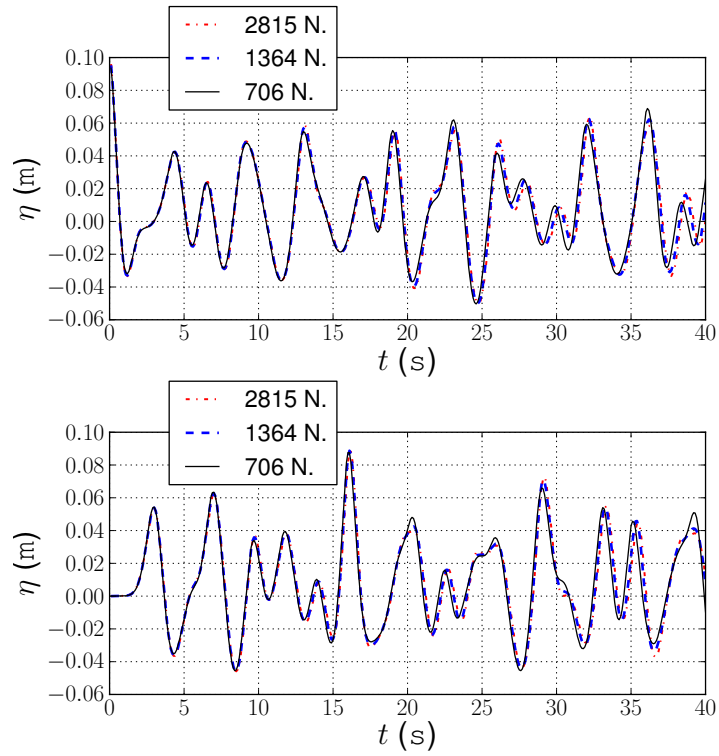
Na tabela 2.1, apresentamos o erro relativo  $l^2$  (%) entre as malhas mais grossas e a mais fina com 5094 nós. Consideramos  $t \in [0, 30]$ (s) assim como a elevação da superfície da onda nos pontos  $P_0 = (5, 5)$ (m) e  $P_1 = (0, 0)$ (m), usando malhas não estruturadas com 706, 1364, 1873, 2815 e 3964 nós. Com o refinamento da malha o erro referido diminui e aproxima-se de zero. Este facto fornece uma boa indicação da convergência do modelo numérico para um intervalo limitado de tempo.

### 2.9.3 Porto de abrigo

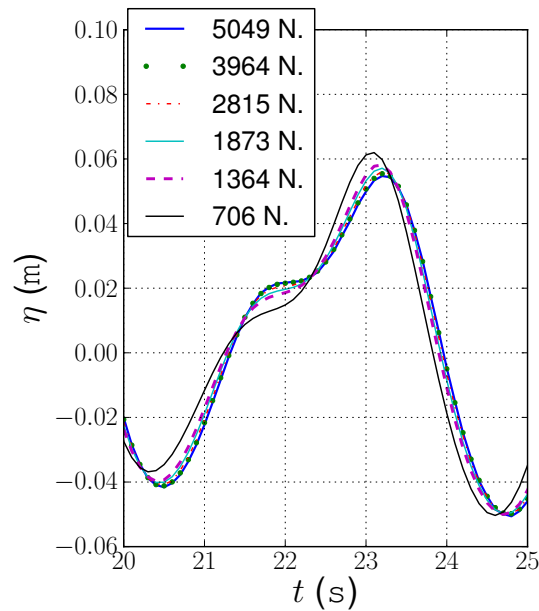
Nesta subsecção, apresentamos alguns resultados numéricos sobre a propagação de ondas marítimas de superfície numa geometria análoga à do porto de abrigo da Nazaré (ver figura 2.1). A discretização das equações (2.27), através do método dos elementos finitos, é declarada no ficheiro UFL (ver secção 2.5). O código DOLFWAVE correspondente a este exemplo está disponível em `dolfwave/demo/2HD/harbor`.



**Figura 2.18:** Os isovalores da elevação da superfície da onda  $\eta$ (m) nos instantes  $t = 0$  s,  $t = 10$  s,  $t = 20$  s,  $t = 30$  s,  $t \cong 40$  s e  $t \cong 50$  s.



**Figura 2.19:** Perfil temporal da elevação da superfície da onda  $\eta$  (m) em  $P_0 = (5, 5)(m)$  (painel superior) e  $P_1 = (0, 0)(m)$  (painel inferior), usando malhas não estruturadas com 2815, 1364 e 706 nós.



**Figura 2.20:** Vista detalhada da elevação da superfície da onda  $\eta$ (m) para  $t \in [20, 25](s)$  em  $P_0 = (5, 5)(m)$  usando várias malhas não estruturadas.

Malha	$P_0 = (5, 5)(\text{m})$	$P_1 = (0, 0)(\text{m})$
706	6.6%	5.7%
1364	1.2%	1.1%
1873	0.5%	0.5%
2815	0.2%	0.1%
3964	0.1%	0.02%

**Tabela 2.1:** Teste de refinamento da malha.

A escala de cor usada nas figuras 2.22–2.25 é apresentada na figura 2.21. As representações esquemáticas do domínio do fluido, batimetria e camadas de esponja podem ser observadas nas figuras 2.22 e 2.23. Note-se que a batimetria é aproximada por uma função linear por ramos. Camadas de esponja do tipo  $\nu \nabla^2 \Phi$  são usadas para absorver a energia da onda, quer na região de entrada bem como na região de saída do porto de abrigo. Note-se que o coeficiente de viscosidade cinemática  $\nu$  é dado pela equação (2.50). Desta forma, as interações entre as ondas incidentes e as ondas reflectidas podem ser evitadas. Uma onda monocromática é introduzida no domínio computacional  $\Omega$  através da fronteira indicada na figura 2.23 (Dirichlet BC). Uma condição de fronteira do tipo Dirichlet definida por uma função periódica é então utilizada, a qual é descrita pelas equações (2.44) e (2.45). Esta condição de fronteira satisfaz as características descritas na tabela 2.2.

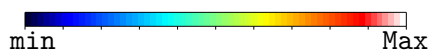
$a$	amplitude da onda	0.25 m
$\omega$	frequência angular da onda	$0.64715 \text{ s}^{-1}$
$\bar{p}$	período da onda	4.06614 s
$k$	número de onda	$0.06185 \text{ m}^{-1}$
$L$	comprimento de onda	101.59474 m
$b$	magnitude do potencial	$3.97151 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
$\hat{c}$	magnitude da velocidade da onda	$0.24562 \text{ ms}^{-1}$
$\varepsilon$	parâmetro de onda de pequena amplitude	0.01823
$\mu$	parâmetro de onda longa	0.13501

**Tabela 2.2:** Parâmetros usados na geração da onda marítima de superfície por meio da condição de fronteira do tipo Dirichlet.

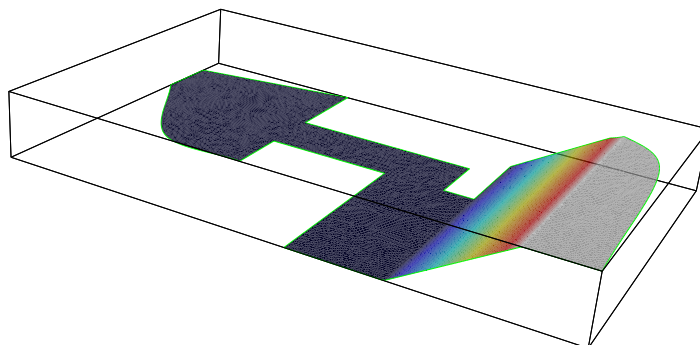
Condições de fronteira puramente reflexivas são consideradas em toda a fronteira, excepto na entrada do porto. Na figura 2.24, mostra-se uma imagem da elevação da superfície da onda marítima no instante  $t_s = 137 \text{ s}$ .

Por sua vez, o potencial da velocidade do fluido  $\phi_0(x, y)$  e o campo vectorial da velocidade no plano da água em repouso ( $z = 0 \text{ m}$ ) são apresentados numa vizinhança do ponto  $P_3 = (255, -75)(\text{m})$  e no instante  $t_s = 137 \text{ s}$  (ver figura 2.25). As figuras 2.26 e 2.27 representam a elevação da superfície da onda marítima e a celeridade ( $|\nabla \phi_0| (\text{ms}^{-1})$ ) do fluido como funções do tempo, nos pontos  $P_1 = (-350, 150)(\text{m})$ ,  $P_2 = (-125, 60)(\text{m})$  e  $P_3 = (255, -75)(\text{m})$ .

Destes resultados numéricos, podemos concluir que a interacção entre as ondas incidentes e as ondas reflectidas, perto da entrada do porto, pode gerar ondas com amplitudes três vezes



**Figura 2.21:** Escala de cor.



**Figura 2.22:** O fundo impermeável  $z = -h$  (m) da região ocupada pelo fluido [max =  $-5.316$  m, min =  $-13.716$  m].

maiores que a amplitude da onda incidente. Um comportamento análogo é também observado para as celeridades do fluido. Note-se que nenhum mecanismo é considerado para a dissipação da energia das ondas reflectidas na zona da fronteira onde é gerada a onda incidente.

#### 2.9.4 Onda gerada por um fundo móvel

Nesta subsecção, simulamos a geração e a propagação de uma onda marítima devido ao deslocamento de um objecto num fundo horizontal. Considera-se que este objecto se move com uma velocidade constante. A declaração da discretização por meio de elementos finitos de (2.27) está descrita na secção 2.5.

O domínio espacial é descrito por um rectângulo de área  $12.5 \times 6 \text{ m}^2$ , o qual é discretizado com uma malha uniforme e simétrica com 2100 elementos. Fronteiras totalmente reflexivas são assumidas. O fundo horizontal da região ocupada pelo fluido juntamente com o objecto deslizante são descritos por  $z = -h(x, y, t)$  (m). Por outro lado, o objecto move-se com uma velocidade constante  $S_0 = 1 \text{ ms}^{-1}$ . Por sua vez, a função  $h(x, y, t)$  é definida por

$$h(x, y, t) = 0.45 - \frac{\Delta h}{(1 + \tanh(1))^4} \bar{X}(x, t) \bar{Y}(y) \quad (2.57)$$

com

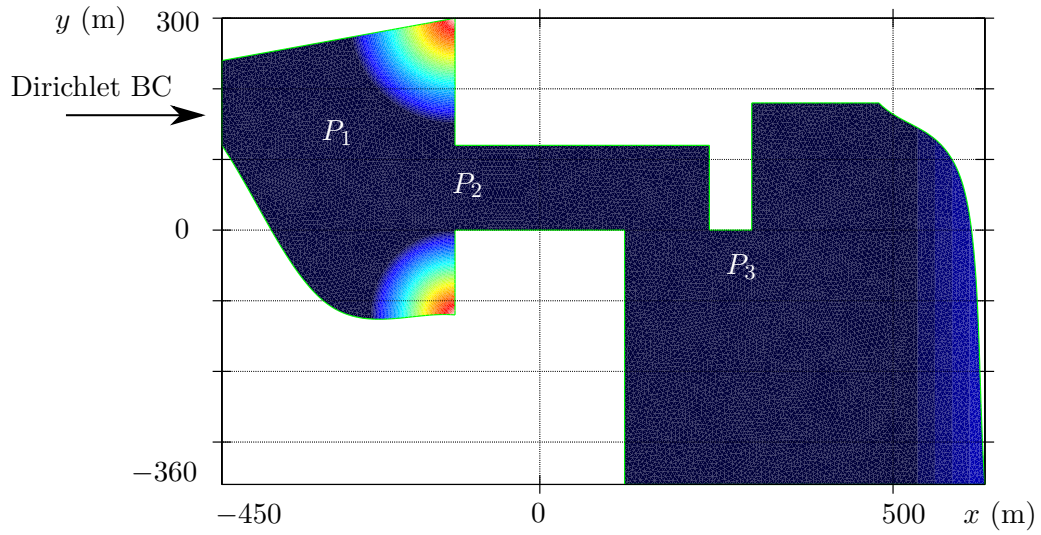
$$\bar{X}(x, t) = (1 + \tanh(2(x - x_l(t))))(1 - \tanh(2(x - x_r(t)))) \quad (2.58)$$

$$\bar{Y}(y) = (1 + \tanh(2y + 1))(1 - \tanh(2y - 1)) \quad (2.59)$$

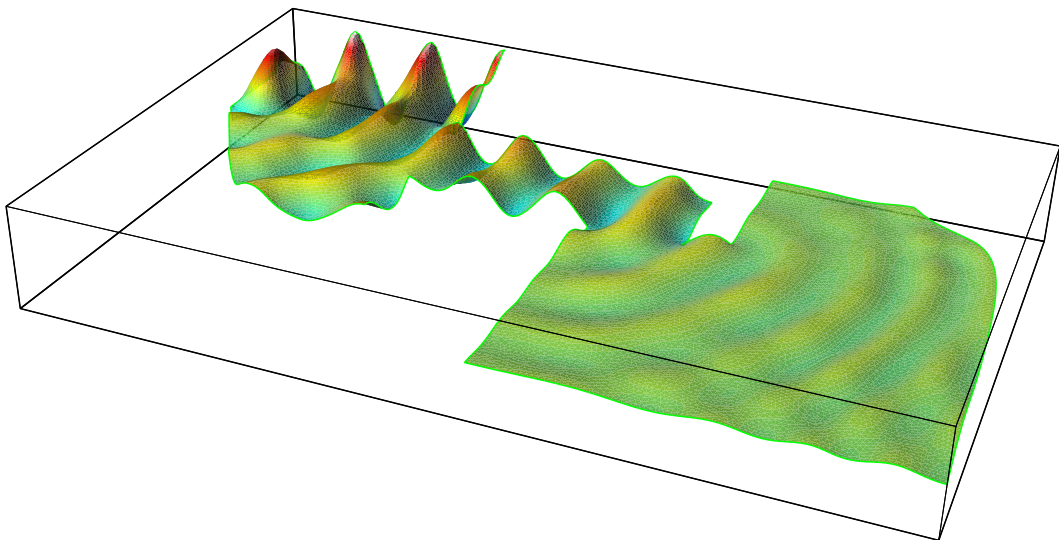
$$x_l(t) = x_c(t) - \frac{1}{2}, \quad x_r(t) = x_c(t) + \frac{1}{2}, \quad x_c(t) = x_0 + S_0 t \quad (2.60)$$

onde  $x_0 = 0$  m e  $\Delta h = 0.045$  m é o valor máximo da espessura do objecto deslizante (ver figura 2.28).

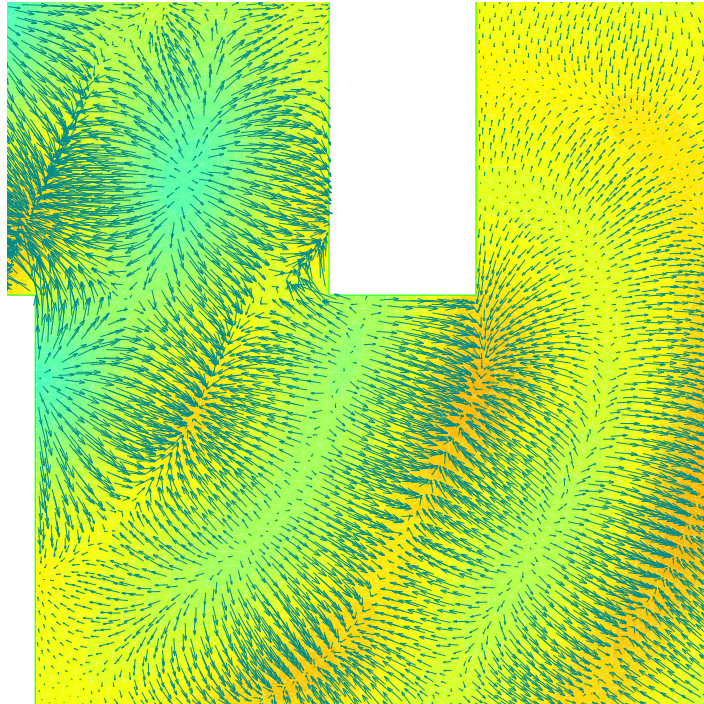
O passo de tempo é dado por  $\Delta t = 0.0005$  s. Por outro lado, na figura 2.29, mostram-se quatro imagens da elevação da superfície da onda marítima obtida através do modelo estendido



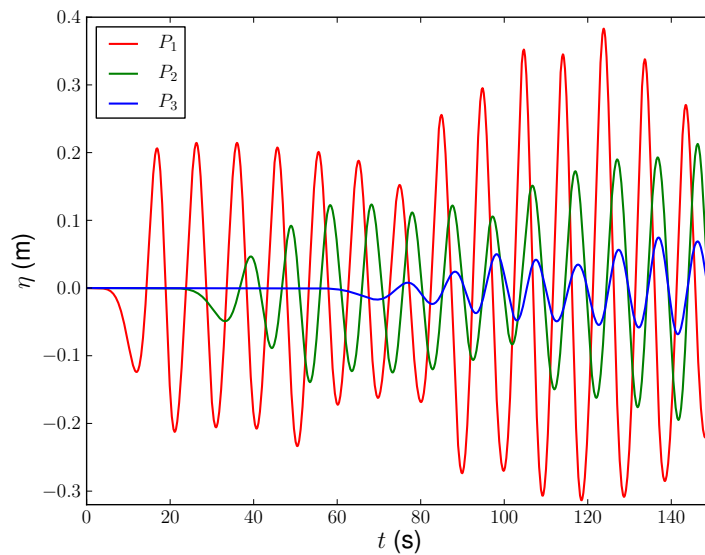
**Figura 2.23:** Camada de esponja (viscosidade cinemática  $\nu(x, y)$ ) [ $\max \cong 0.1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $\min = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ].



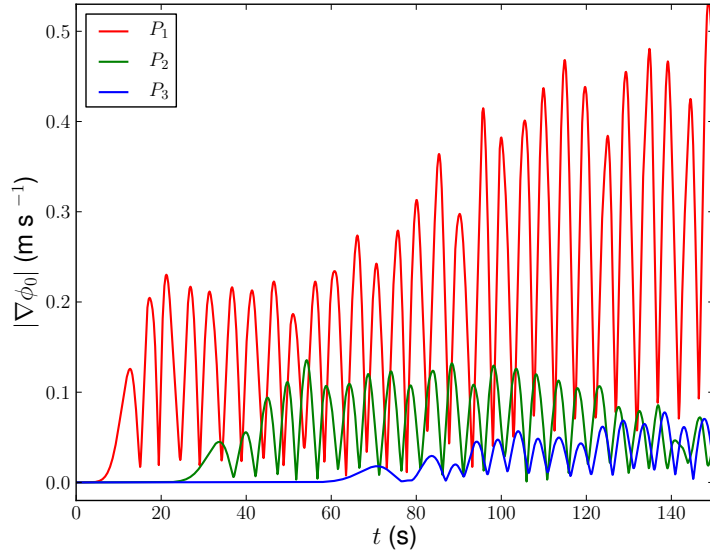
**Figura 2.24:** Elevação da superfície da onda marítima [ $\max \cong 0.63 \text{ m}$ ,  $\min \cong -0.73 \text{ m}$ ].



**Figura 2.25:** Campo vectorial da velocidade do fluido em  $z = 0$  m e o potencial  $\phi_0(x, y, t_s)$  na vizinhança de  $P_3$ . Valores do potencial da velocidade do fluido em  $\Omega$ :  $[\max \cong 14.2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \min \cong -12.8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}]$ .



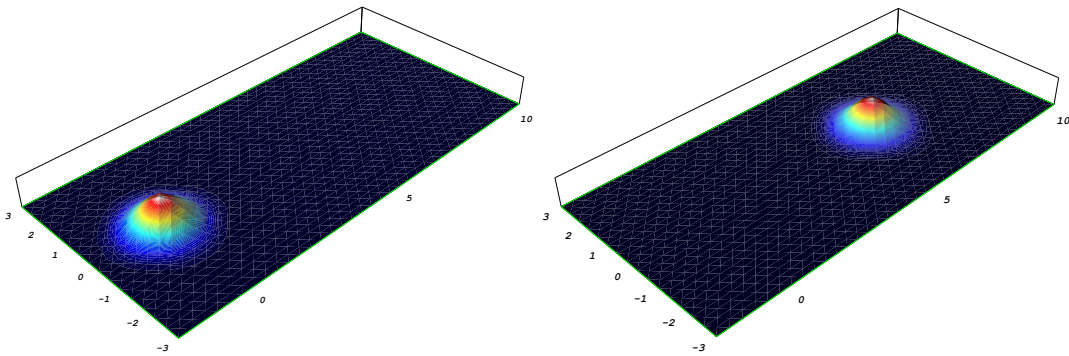
**Figura 2.26:** Elevação da superfície da onda marítima em  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$   $[\max \cong 0.4 \text{ m}, \min \cong -0.31 \text{ m}]$ .



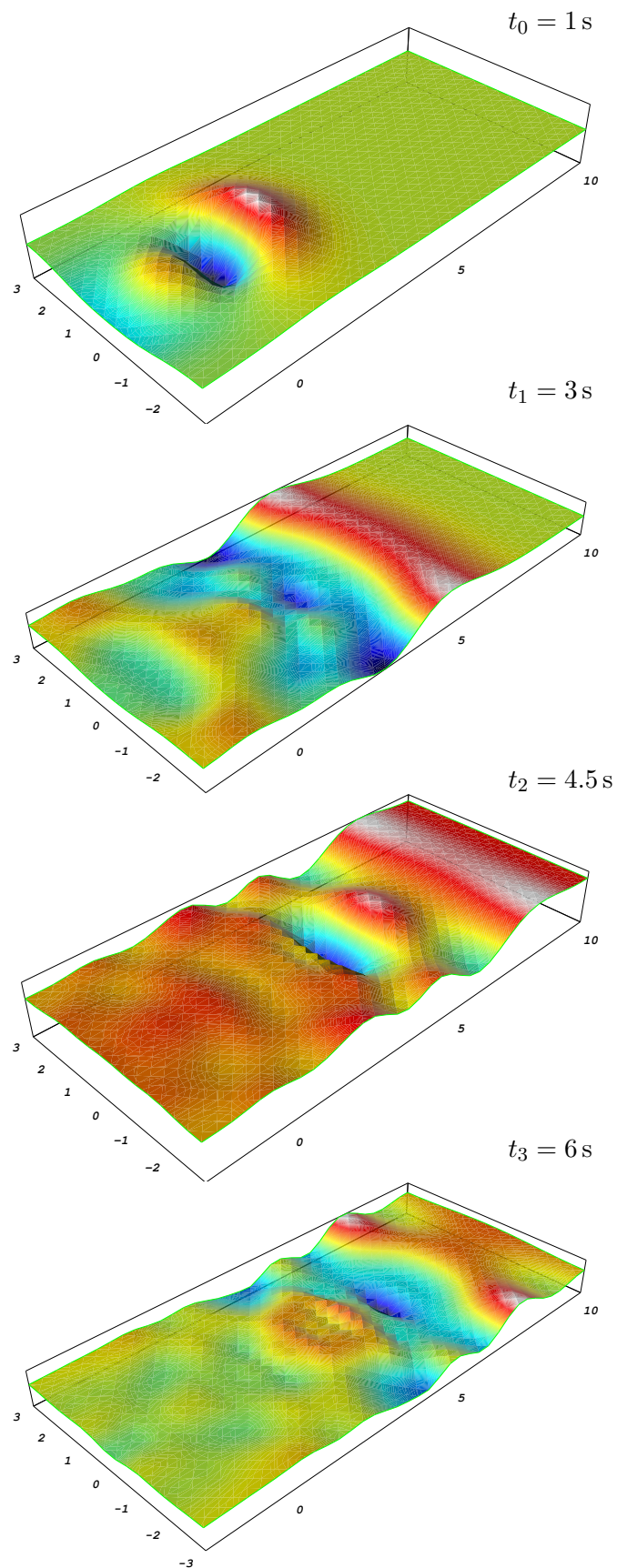
**Figura 2.27:** Celeridade do fluido ( $|\nabla\phi_0|$  ( $\text{ms}^{-1}$ )) em  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  [ $\max \cong 0.53 \text{ ms}^{-1}$ ,  $\min = 0 \text{ ms}^{-1}$ ].

de ZTC nos instantes  $t_0 = 1 \text{ s}$ ,  $t_1 = 3 \text{ s}$ ,  $t_2 = 4.5 \text{ s}$  e  $t_3 = 6 \text{ s}$ . A escala de cor das imagens apresentadas nesta subsecção é dada na figura 2.21.

Note-se que as equações (2.57)–(2.60) descrevem um fundo móvel distinto daqueles dados por funções lineares por ramos (ver, e.g., (2.55)). De facto, as derivadas com respeito às variáveis espaciais de qualquer ordem da função  $h(x, y, t)$  são não nulas. O modelo ZTC é deduzido assumindo-se a hipótese de que os gradientes com respeito às variáveis espaciais do fundo são de pequena magnitude e, para além disso, apenas são admitidos termos de ordem  $O(h, \nabla h)$ . Contudo, uma boa concordância é observada entre as soluções apresentadas nesta subsecção e outras provenientes de outros modelos (ver [dolfwave/demo/2HD/hLandslide](#)). Estes últimos modelos incluem termos de ordem  $O(h, \nabla h, \nabla^2 h)$ , como se pode constatar no capítulo 3.



**Figura 2.28:** O fundo impermeável  $z = -h(x, y, t)$  (m) nos instantes  $t_0 = 0 \text{ s}$  e  $t_0 = 6 \text{ s}$  [ $\max = -0.405 \text{ m}$ ,  $\min = -0.45 \text{ m}$ ].



**Figura 2.29:** A elevação da superfície da onda marítima  $\eta$  (m) nos instantes  $t_0 = 1\text{ s}$ ,  $t_1 = 3\text{ s}$ ,  $t_2 = 4.5\text{ s}$  e  $t_3 = 6\text{ s}$  [ $\max \cong 0.007\text{ m}$ ,  $\min \cong -0.011\text{ m}$ ].

### 2.9.5 Um tsunami na falha de Sagres <sup>4</sup>

Para finalizar esta secção, a geração e a propagação de um tsunami ao largo da costa portuguesa são modeladas pelas equações ZTC estendidas (2.19), as quais são implementadas pelo código DOLFWAVE. O domínio tridimensional usado como referência na geração da malha computacional é representado na figura 2.30. A malha associada à discretização por elementos finitos do domínio espacial é gerada pelo código Gmsh (ver <http://geuz.org/gmsh/>) a partir dos dados disponibilizados pela National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), USA (ver [http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/gdas/gd\\_designagrid.html](http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/gdas/gd_designagrid.html)). Na figura 2.31, podemos ver a discretização do domínio espacial, dada por uma malha com 25088 elementos assim como a discretização da batimetria. Um passo de tempo de  $\Delta t = 0.05$  s é usado na discretização do intervalo de tempo  $[0, 4000]$  (s). Para a geração da onda marítima de superfície é assumido um fundo móvel  $z = -h(x, y, t)$  (m) em que  $h(x, y, t)$  é dada pela expressão seguinte:

$$h(x, y, t) = B_{\text{NOAA}}(x, y) + A_s \chi_{[0,4]}(t) \sin(\omega_s t) e^{-((x-x_c)^2+(y-y_c)^2)} \text{ (m)}, t \in [0, 4000] \text{ (s)} \quad (2.61)$$

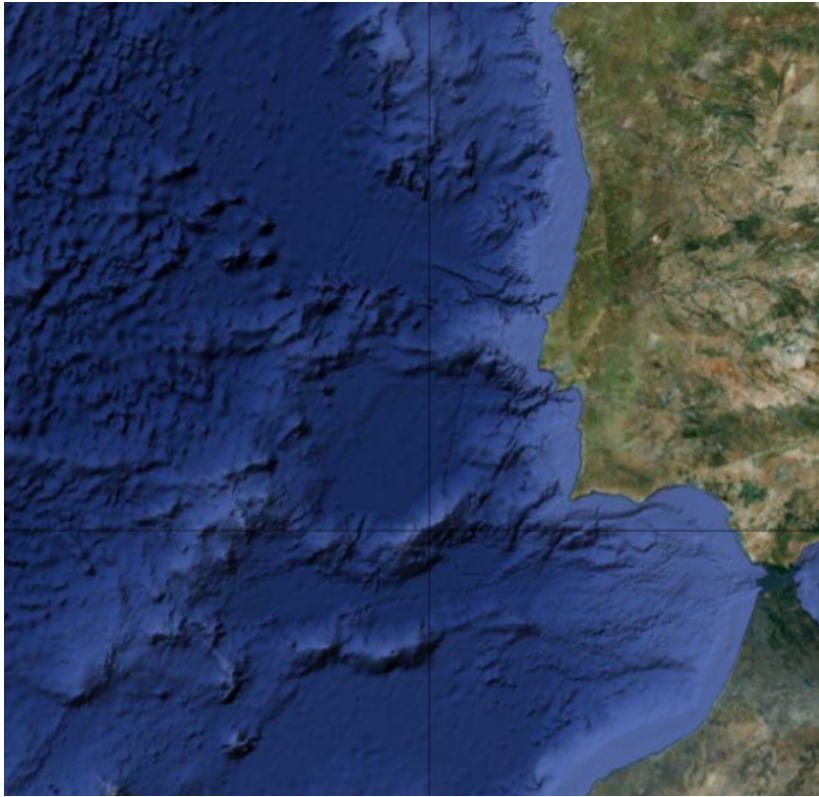
onde  $B_{\text{NOAA}}(x, y)$  designa a função de interpolação dos dados da NOAA para descrever a batimetria,  $A_s = 5$  m é a amplitude máxima da perturbação do fundo,  $\omega_s = \frac{\pi}{4} \text{ s}^{-1}$  é a frequência angular da perturbação do fundo e  $(x_c, y_c) = (-1.25 \times 10^6, 4 \times 10^6)$  (m) é o epicentro do deslocamento (ver figura 2.31) Por outro lado,  $\chi_{[0,4]}(t)$  representa a função definida por  $\chi_{[0,4]}(t) = 1$  se  $t \in [0, 4]$  (s) e  $\chi_{[0,4]}(t) = 0$  se  $t > 4$  s. Note-se que, num futuro próximo, pretendemos implementar um modelo mais adequado para descrever a perturbação no fundo da região ocupada pelo fluido (ver, e.g., Dutykh e Dias (2007b)). Condições iniciais nulas são assumidas tanto para a elevação da superfície da onda marítima como para o potencial da velocidade do fluido. Na figura 2.32, pode-se ver a elevação da superfície (m) do tsunami nos instantes  $t = 2$  min,  $t = 6$  min,  $t = 12$  min,  $t = 18$  min,  $t = 23$  min e  $t = 30$  min, o qual é gerado por um sismo com epicentro na falha de Sagres<sup>5</sup>. Dos resultados numéricos podemos concluir que existem grandes variações na amplitude da onda. Estas variações são consequência não só dos gradientes acentuados do fundo, com respeito às variáveis espaciais, mas também da interacção entre ondas incidentes e reflectidas junto à linha costeira. De facto, as amplitudes das ondas localizadas junto à costa podem tomar valores que são quatro vezes maiores que a amplitude da onda incidente. No entanto, estas oscilações na amplitude das ondas não tornam o esquema numérico instável. Neste exemplo, mecanismos para a dissipação da energia das ondas incidentes e das ondas reflectidas junto às fronteiras não são considerados. Por outro lado, fronteiras completamente reflexivas são assumidas neste exemplo, as quais são descritas pelas equações (2.49) (ver secção 2.7). Salientamos que o tempo computacional é aproximadamente 5.3 vezes superior ao tempo de simulação, sendo os cálculos efectuados num computador com um processador Intel(R) Xeon(R) com 8 núcleos E5420 CPUs a 2.5 GHz, em cálculo paralelo e usando-se o sistema operativo Linux Ubuntu 10.04 (64b).

Através dos resultados apresentados, podemos concluir que o modelo aqui proposto é suficientemente robusto e eficiente para modelar a geração e a propagação de ondas marítimas de superfície induzidas por fenómenos sísmicos no fundo do oceano. O modelo numérico aqui considerado apresenta-se como uma boa alternativa a alguns modelos não dispersivos, como

<sup>4</sup>Este teste numérico foi apresentado em: Lopes, N. D., Pereira, P. J. S. and Trabucho, L., Solutions of some improved Boussinesq-type models for surface water waves using finite element methods, Recent trends in hyperbolic and related PDEs: Theory, numerics and applications; Instituto para a Investigação Interdisciplinar, University of Lisbon, Portugal, 2011.

<sup>5</sup>Nas ilustrações da figura 2.32 a abreviatura mnts refere-se à unidade de tempo do Sistema Internacional min.

aqueles baseados, por exemplo, nas equações para a geração e a propagação de ondas em zonas de pequena profundidade (ver, e.g., LeVeque et al. (2011)).



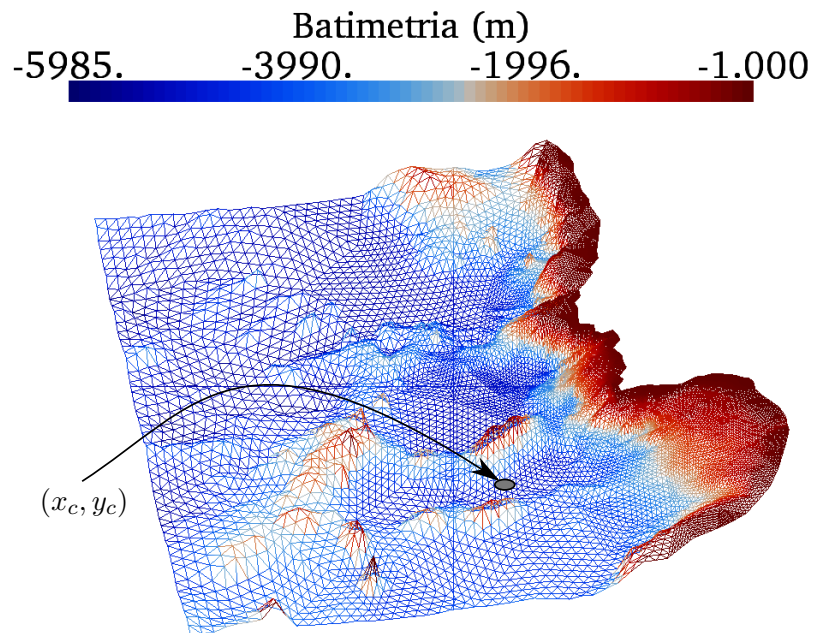
**Figura 2.30:** Imagem de satélite mostrando o domínio e a batimetria reais.

## 2.10 Conclusões sumárias

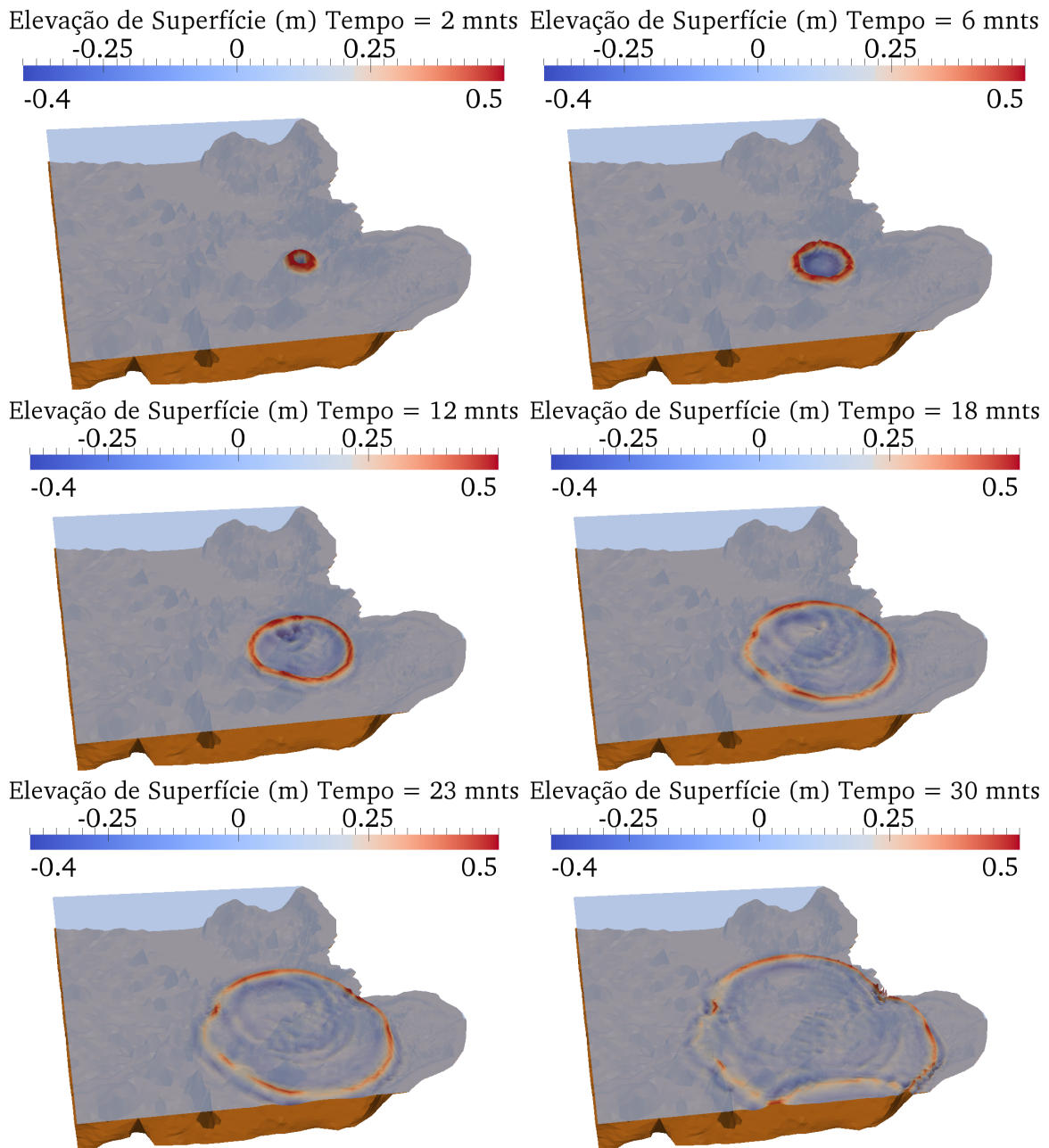
Neste capítulo, o modelo BEP de Zhao et al. (2004) foi estendido de modo a incluir efeitos de dissipação e de absorção da energia das ondas marítimas de superfície. Diversos mecanismos para a geração de ondas foram também considerados. A influência dos termos dissipativos nalgumas das propriedades dispersivas do modelo ZTC estendido foram investigadas. Em particular, mostrámos que existem valores para o número de onda a partir dos quais as ondas de menor comprimento não se propagam.

As equações do modelo ZTC estendido foram discretizadas com respeito às variáveis espaciais usando o método de elementos finitos convencional com elementos de Lagrange  $P_1$ . Para a integração no tempo, usámos um esquema de predição-correcção inicializado por um método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem. A partir de uma análise matricial baseada no modelo semi-discreto e linearizado, concluímos que o modelo BEP/ZTC é pouco susceptível a instabilidades relacionadas com gradientes acentuados da batimetria ou com discretizações do domínio espacial descritas por malhas finas.

Para validar o modelo aqui estudado bem como o código DOLFWAVE vários testes numéricos foram simulados. Destes testes, concluímos que o modelo numérico aqui investigado é apropriado à modelação de ondas marítimas de superfície.



**Figura 2.31:** Representação da malha com 25088 elementos bem como da batimetria usada na simulação computacional. Designamos o epicentro da perturbação da batimetria por  $(x_c, y_c)$  (m). A escala de cor relativa à batimetria é também ilustrada nesta figura.



**Figura 2.32:** Representação da elevação da superfície (m) do tsunami gerado por um sismo com epicentro na falha de Sagres, nos instantes  $t = 2$  min,  $t = 6$  min,  $t = 12$  min,  $t = 18$  min,  $t = 23$  min e  $t = 30$  min.

## Capítulo 3

# Uma análise numérica de uma classe de equações do tipo Boussinesq usando um método de Galerkin de Elementos Finitos Contínuos/Descontínuos <sup>1</sup>

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, uma classe de sistemas do tipo Boussinesq é obtida para a geração e a propagação de ondas marítimas de superfície bem como um esquema para a sua resolução é implementado. Um fundo impermeável da região ocupada pelo fluido e dependente do tempo é considerado. Este tipo de modelos é usado, por exemplo, na simulação da dinâmica de ondas marítimas em zonas portuárias ou costeiras e na geração e na propagação de tsunamis.

As equações que regem os fenómenos relacionados com as ondas marítimas de superfície são apresentadas na secção seguinte. Destas equações, podem ser obtidos vários tipos de modelos. Neste trabalho, apenas consideramos os modelos baseados numa formulação BEP que têm como funções incógnita primárias a **E**levação da superfície da onda e o **P**otencial da velocidade do fluido (ver, e.g., Chen e Liu (1994)). Desta forma, o número de equações dos sistemas é reduzido quando comparado com o dos modelos baseados na formulação BEV, que têm como funções incógnita primárias a **E**levação da superfície da onda e as componentes horizontais da **V**elocidade do fluido (ver, e.g., Woo e Liu (2004a) assim como Walkley e Berzins (2002)). Aqui deduzimos uma classe melhorada de equações diferenciais do tipo Boussinesq de ordem arbitrária com um termo extra de ordem  $O(\mu^{2n+2})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) no desenvolvimento assintótico do potencial da velocidade do fluido. Deste modo, algumas das propriedades dispersivas dos modelos de ordem superior, i.e., de ordem  $O(\mu^{2n+2})$ , são preservadas sem aumentar a ordem de derivação das equações. Estes modelos são complementados com a inclusão de alguns termos de forma a modelar efeitos de dissipação e de absorção da energia das ondas. Por outro lado, a geração de ondas induzidas pela movimentação do fundo impermeável da região ocupada pelo fluido é também investigada. Duas importantes características dos modelos

---

<sup>1</sup>Publicado em: Lopes, N. D. and Pereira, P. J. S. and Trabucho, L., A numerical analysis of a class of generalized Boussinesq-type equations using continuous/discontinuous FEM, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2012, volume 69, pages 1186–1218, John Wiley & Sons, Ltd, doi: 10.1002/fld.2631.

baseados nas equações diferenciais de quarta e de sexta ordem são aqui apresentadas. Mais concretamente, a relação de dispersão incluindo termos dissipativos bem como o gradiente de empolamento da onda são estudados. Nesta secção, vários mecanismos são descritos para a geração e a reflexão das ondas marítimas de superfície.

A terceira secção é dedicada ao método numérico usado para a discretização da formulação variacional do modelo melhorado de quarta ordem. Para resolver numericamente este modelo, propomos um método de elementos finitos de Galerkin do tipo contínuo/descontínuo com termos de penalização (C/DG-FEM). Note-se que este tipo de esquemas usa o mesmo número de graus de liberdade que os métodos convencionais de elementos finitos contínuos. Este esquema tem características não locais uma vez que usa termos avaliados nas arestas dos elementos, contidas no interior do domínio computacional, que contribuem para os dois elementos adjacentes à respectiva interface. Como consequência, um ciclo adicional é necessário. Este ciclo percorre as arestas da interface entre todos os elementos do domínio computacional (cf. Engel et al. (2002)). Esta funcionalidade é fornecida pelas bibliotecas de código aberto do projecto FEniCS (ver <http://www.fenicsproject.org> bem como Logg et al. (2012)) e descrita por Olgaard et al. (2008). A discretização das equações diferenciais com respeito às variáveis espaciais é realizada utilizando-se elementos finitos de Lagrange  $P_2$ . Por outro lado, a integração no tempo é feita recorrendo-se a esquemas de Runge-Kutta e de predição-correcção. Uma condição do tipo Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) é deduzida para os modelos propostos linearizados no caso em que se assume uma batimetria constante. Assim, o esquema aqui apresentado pode ser uma boa alternativa aos esquemas de elementos finitos descontínuos propostos para a resolução de outros modelos do tipo Boussinesq (ver, e.g., Eskilsson e Sherwin (2006) bem como Engsig-Karup et al. (2008)). Relativamente à utilização de métodos de elementos finitos neste tipo de problemas, referimos também o trabalho de Avilez-Valente e Seabra-Santos (2009). Neste trabalho, um esquema do tipo Petrov-Galerkin foi apresentado para um modelo BEV.

Como mencionado anteriormente, desenvolvemos o código computacional DOLFWAVE (ver <http://ptmat.fc.ul.pt/~ndl/>), o qual é uma aplicação para modelos BEP baseada nas bibliotecas do projecto FEniCS. As equações diferenciais de quarta ordem que propomos neste capítulo são implementadas numericamente através do código DOLFWAVE.

Os esquemas numéricos aqui desenvolvidos bem como alguns testes numéricos para a validação do modelo são apresentados na quarta secção. Observamos uma boa concordância entre as soluções provenientes dos vários modelos e dos esquemas numéricos aqui desenvolvidos. Para além disto, o modelo numérico proposto apresenta também boas propriedades de estabilidade.

## 3.2 Dedução do modelo e suas propriedades

### 3.2.1 Equações diferenciais

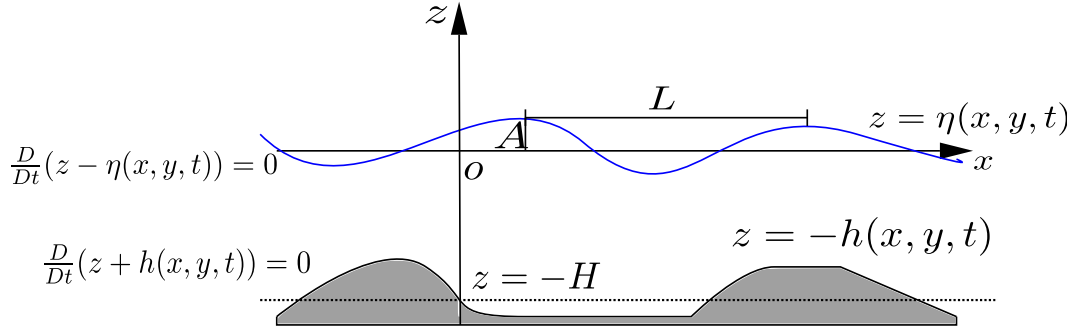
Analogamente à secção 2.3, consideramos um escoamento irrotacional de um fluido incompressível e invíscido modelado pelo conjunto de equações seguinte:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{xyz}) \mathbf{u} = -\nabla_{xyz} \left( \frac{P}{\rho} + gz \right), \quad (3.1a)$$

$$\nabla_{xyz} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.1b)$$

$$\nabla_{xyz} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1c)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vector velocidade do fluido,  $P$  a pressão,  $g$  a aceleração da gravidade,  $\rho$  a densidade do fluido,  $t$  o tempo e o operador diferencial  $\nabla_{xyz}$  é dado por  $\nabla_{xyz} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ . Para além disso, adoptamos um referencial Cartesiano com os eixos  $ox$  e  $oy$  no nível da água em repouso e o eixo dos  $oz$  dirigido para o exterior da região ocupada pelo fluido (ver figura 3.1). O domínio do fluido é limitado pelo fundo do mar descrito por  $z = -h(x, y, t)$  e pela superfície livre da onda dada por  $z = \eta(x, y, t)$ . Na figura 3.1,  $L$ ,  $A$  e  $H$  são os valores característicos



**Figura 3.1:** Representação esquemática de um corte longitudinal da região ocupada pelo fluido. Note-se que o fundo impermeável do oceano e a superfície da onda marítima são também ilustrados.

do comprimento de onda, da amplitude da onda e da profundidade da região ocupada pelo fluido, respectivamente. Note-se que a derivada material é denotada por  $\frac{D}{Dt}$ .

Da hipótese de irrotacionalidade do escoamento de um fluido (ver (3.1b)), podemos introduzir a função do potencial da velocidade do fluido  $\phi(x, y, z, t)$  para obter a equação de Bernoulli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla_{xyz} \phi \cdot \nabla_{xyz} \phi + \frac{P}{\rho} + g z = f(t), \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{u} = \nabla_{xyz} \phi(x, y, z, t)$  e  $f(t)$  representa uma função arbitrária de integração. Note-se que se  $\phi$  for redefinido por  $\phi + \int f(t) dt$  a equação (3.2) pode ser rescrita sem esta função arbitrária de integração denotada por  $f(t)$ . Da condição de incompressibilidade (ver (3.1c)) podemos mostrar que o potencial da velocidade do fluido satisfaz a equação de Laplace seguinte:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (3.3)$$

onde o operador diferencial denotado por  $\nabla$  é dado por  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ . Para que o problema possa ficar bem posto, algumas condições de fronteira devem ser satisfeitas, as quais são dadas do modo seguinte:

i) a condição de fronteira cinemática imposta na superfície livre da onda,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \eta + D_1(\eta), \quad z = \eta; \quad (3.4)$$

ii) a condição de fronteira cinemática imposta no fundo impermeável da região ocupada pelo fluido,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + (\nabla \phi \cdot \nabla h) = -\frac{\partial h}{\partial t}, \quad z = -h; \quad (3.5)$$

iii) a condição de fronteira dinâmica imposta na superfície livre da onda,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g \eta + \frac{1}{2} \left( |\nabla \phi|^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) + D_2(\phi) = 0, \quad z = \eta, \quad (3.6)$$

onde  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) é um termo dissipativo (ver, e.g., Dutykh e Dias (2007a) assim como Dias et al. (2008)). Os termos dissipativos são definidos aqui pelas expressões seguinte:

$$D_1(\eta) = -\nu_1 \nabla^2 \eta, \quad (3.7a)$$

$$D_2(\phi) = \nu_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad (3.7b)$$

em que a viscosidade cinemática é dada por  $\nu_i = \frac{\bar{\mu}_i}{\rho}$  ( $i = 1, 2$ ) sendo  $\bar{\mu}_i$  o coeficiente de viscosidade também designado por viscosidade dinâmica do fluido. Note-se que não existe perda de energia em fenómenos físicos descritos por modelos não dissipativos. Este facto não é aceitável do ponto de vista da Física, uma vez que o fluxo de partículas de um fluido real é sempre acompanhado por uma perda de energia.

Usando a equação de Laplace 3.3 é possível rescrever (3.7b) na forma  $D_2(\phi) = -\nu_2 \nabla^2 \phi$ . Na literatura, podemos encontrar termos análogos àqueles dados por (3.7a) e (3.7b), os quais foram adicionados às condições de fronteira cinemática e dinâmica de forma a simular a absorção da energia das ondas marítimas de superfície em algumas zonas perto da fronteira do domínio computacional. Estes termos estão relacionados com as camadas de esponja e, como se verá mais à frente, podem ser usados para modificar algumas propriedades dispersivas do modelo proposto.

Com o objectivo de transformar as equações (3.3)-(3.7) numa forma adimensional, introduzem-se as escalas seguintes:

$$(x^*, y^*) = \frac{1}{L}(x, y), \quad z^* = \frac{z}{H}, \quad t^* = \frac{t\sqrt{gH}}{L}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{A}, \quad \phi^* = \frac{H\phi}{AL\sqrt{gH}}, \quad h^* = \frac{h}{H}. \quad (3.8)$$

Para além disso, consideram-se os parâmetros físicos seguintes:

$$\mu = \frac{H}{L}, \quad \varepsilon = \frac{A}{H}. \quad (3.9)$$

Nas duas últimas equações dadas por (3.9),  $\mu$  é o parâmetro de onda longa e  $\varepsilon$  é designado por parâmetro de onda de pequena amplitude. Note-se que os parâmetros  $\varepsilon$  e  $\mu$  estão relacionados com os termos não lineares e com os termos dispersivos, respectivamente. No que segue, salientamos que as variáveis adimensionais são apresentadas sem o asterisco de forma a simplificar a escrita das equações.

Em geral, a abordagem do tipo Boussinesq consiste em transformar um problema 3D num problema 2D. Esta redução dimensional pode ser realizada através do desenvolvimento do potencial da velocidade do fluido numa série de Taylor em termos da coordenada  $z$ . Usando-se a equação de Laplace, escrita na forma adimensional, pode-se mostrar que o potencial da velocidade do fluido é dado pela expressão seguinte:

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \mu^{2n} \nabla^{2n} \phi_0(x, y, t) + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \mu^{2n} \nabla^{2n} \phi_1(x, y, t) \right), \quad (3.10)$$

em que

$$\phi_0 = \phi|_{z=0}, \quad \phi_1 = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) |_{z=0}. \quad (3.11)$$

Por sua vez,  $\phi_1$  pode ser escrito em termos de  $\phi_0$  usando-se desenvolvimentos assintóticos, técnicas de aproximações sucessivas assim como a condição de fronteira cinemática imposta no fundo impermeável da região ocupada pelo fluido (ver Chen e Liu (1994)). Neste trabalho,

assumimos sem perda de generalidade que os termos não lineares e os termos dispersivos estão relacionados pela equação seguinte:

$$\frac{\varepsilon}{\mu^2} = O(1) \text{ com } \mu < 1 \text{ e } \varepsilon < 1. \quad (3.12)$$

Note-se que o número de Ursell é definido por  $U_r = \frac{\varepsilon}{\mu^2}$ , o qual desempenha um papel fundamental na escolha das aproximações feitas na dedução dos modelos. Diferentes aproximações podem corresponder a diferentes fenómenos físicos. O regime descrito por ondas moderadamente longas e de pequena amplitude em zonas de pequena profundidade, modelado por equações fracamente não lineares, é caracterizado por (3.12) ( $O(\mu^2) = O(\varepsilon)$ , i.e.,  $\frac{H^2}{L^2} \sim \frac{A}{H}$ ). As equações de Boussinesq têm em conta os efeitos não lineares e de dispersão associados aos termos dominantes de ordens  $\varepsilon$  e  $\mu^2$ , respectivamente. Quando  $\varepsilon \gg \mu^2$ , as equações de Boussinesq reduzem-se às equações de Airy. Por outro lado, quando  $\varepsilon \ll \mu^2$  as equações de Boussinesq reduzem-se às equações linearizadas para descrever fenómenos fracamente dispersivos. Finalmente, a equação linear clássica das ondas é obtida quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\mu^2 \rightarrow 0$  (ver, e.g., Mei et al. (2005)).

A equação do potencial da velocidade do fluido (3.10) pode ser reescrita da forma seguinte<sup>2</sup>:

$$\phi(x, y, z, t) = \cos(z\mu\nabla)\phi_0 + \frac{1}{\mu} \sin(z\mu\nabla)\nabla^{-1}\phi_1. \quad (3.13)$$

Utilizando (3.13) para substituir  $\phi$  nas equações (3.4)–(3.6) obtemos as seguintes condições de fronteira na forma assintótica:

*i)* a condição de fronteira cinemática imposta na superfície livre da onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \varepsilon \left( \cos(\varepsilon\eta\mu\nabla)\nabla\phi_0 + \frac{1}{\mu} \sin(\varepsilon\eta\mu\nabla)\phi_1 \right) \cdot \nabla\eta - \\ - \frac{1}{\mu^2} \left( -\mu \sin(\varepsilon\eta\mu\nabla)\nabla\phi_0 + \cos(\varepsilon\eta\mu\nabla)\phi_1 \right) - \nu_1^* \nabla^2 \eta = 0; \end{aligned} \quad (3.14)$$

*ii)* a condição de fronteira cinemática imposta no fundo impermeável da região ocupada pelo fluido,

$$\begin{aligned} \left( \mu \sin(h\mu\nabla) + \nabla h \cdot \mu^2 \cos(h\mu\nabla) \right) \cdot \nabla\phi_0 + \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t} = \\ = \left( -\cos(h\mu\nabla) + \nabla h \cdot \mu \sin(h\mu\nabla) \right) \phi_1; \end{aligned} \quad (3.15)$$

*iii)* a condição de fronteira dinâmica imposta na superfície livre da onda,

$$\begin{aligned} \left( \cos(\varepsilon\eta\mu\nabla) \frac{\partial\phi_0}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \sin(\varepsilon\eta\mu\nabla) \nabla^{-1} \frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \eta \right) + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon \left( \left| \cos(\varepsilon\eta\mu\nabla)\nabla\phi_0 + \frac{1}{\mu} \sin(\varepsilon\eta\mu\nabla)\phi_1 \right|^2 + \left( -\sin(\varepsilon\eta\mu\nabla)\nabla\phi_0 + \frac{1}{\mu} \cos(\varepsilon\eta\mu\nabla)\phi_1 \right)^2 \right) - \\ - \nu_2^* \nabla^2 \left( \cos(\varepsilon\eta\mu\nabla)\phi_0 + \frac{1}{\mu} \sin(\varepsilon\eta\mu\nabla)\nabla^{-1}\phi_1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

<sup>2</sup>Note-se que  $\nabla^{-1}$  é tal que  $\nabla^{-1} \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla^{-1} f) = f$ , onde  $f$  é uma função escalar.

Assumimos aqui que os parâmetros de viscosidade adimensionais  $\nu_1^*$  e  $\nu_2^*$  são de ordem  $O(\mu^2)$  e são dados por:

$$\nu_i^* = \nu_i \frac{L}{\sqrt{gH}H^2} \mu^2 \quad (i = 1, 2). \quad (3.17)$$

No que segue, salientamos novamente que a notação do asterisco, tanto para as variáveis como para os coeficientes, é abandonada de forma a simplificar a escrita das equações.

Resolvendo assintoticamente a equação (3.15) em ordem a  $\phi_1$ , pode-se obter uma fórmula recursiva para expressar  $\phi_1$  em termos de  $\phi_0$ , a qual é dada da forma seguinte:

$$\phi_1 = \sum_{m=0}^{+\infty} \phi_{1m}, \quad (3.18)$$

com  $\phi_{1m}$  definido por

$$\phi_{1m} = \begin{cases} \phi_{10} = -\frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t}, \\ \phi_{1m} = (-1)^m \frac{\mu^{2m}}{(2m-1)!} \nabla \cdot (h^{2m-1} \nabla^{2m-1} \phi_0) + \\ + \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} \frac{\mu^{2n}}{(2n)!} \nabla \cdot (h^{2n} \nabla^{2n-1} \phi_{1(m-n)}), \quad (m \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (3.19)$$

No trabalho de Madsen e Schäffer (1998) foi apresentada uma expressão semelhante aquela dada por (3.18) para a relação entre as componentes vertical e horizontal da velocidade do fluido. No entanto, nesse trabalho apenas foi considerado um fundo estacionário da região ocupada pelo fluido. Usando (3.18) para substituir  $\phi_1$  em (3.14) e (3.16) e desenvolvendo os operadores trigonométricos em séries de Taylor, pode-se obter um sistema do tipo Boussinesq até à ordem desejada.

Na próxima subsecção, consideramos o sistema de sexta ordem dado por (3.14) e (3.16) quando os operadores trigonométricos são desenvolvidos em séries de Taylor até à ordem  $O(\mu^6)$ , inclusivamente. Por sua vez,  $\phi_1$  é dado aproximadamente pelos quatro primeiros termos de (3.18).

Contrariamente à expressão dada por (2.14), as derivadas de  $h$  com respeito às variáveis espaciais são desprezadas nos termos de sexta ordem no desenvolvimento assintótico de  $\phi_1$  dado por (3.18) e (3.19). Podemos interpretar esta hipótese como uma abordagem convencional do tipo variação suave do fundo actuando apenas nos termos de alta ordem. Neste contexto,  $\phi_1$  é reescrito da forma seguinte:

$$\begin{aligned} \phi_1 \sim & -\mu^2 \nabla \cdot (h \nabla \phi_0) + \frac{\mu^4}{6} \nabla \cdot (h^3 \nabla^3 \phi_0) - \frac{\mu^4}{2} \nabla \cdot (h^2 \nabla^2 \cdot (h \nabla \phi_0)) - \\ & - \mu^6 h^5 \frac{2}{15} \nabla^6 \phi_0 - \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\mu^2}{2} \nabla \cdot \left( h^2 \nabla \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{5h^4 \mu^4}{24} \nabla^4 \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

O principal objectivo desta subsecção é a dedução de um sistema do tipo Boussinesq de quarta ordem que preserve algumas das propriedades dispersivas dos modelos de ordem superior. Este objectivo é concretizado através da inclusão de um termo extra de ordem  $O(\mu^6)$  no desenvolvimento assintótico do potencial da velocidade do fluido (ver (3.20)). O modelo resultante é deduzido usando as equações (3.14), (3.16) e (3.20) assim como a abordagem convencional mencionada atrás, resultando em

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}_h^1(\eta) \\ \mathcal{T}_h^2(\phi_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{L}_h^1(\eta) \\ \mathcal{L}_h^2(\phi_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{L}_h^3(\phi_0) \\ \mathcal{L}_h^4(\eta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{N}_h^1(\eta, \phi_0) \\ \mathcal{N}_h^2(\eta, \phi_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_1(h) \\ \mathcal{S}_2(h) \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

com

$$\mathcal{T}_h^1(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \mathcal{T}_h^2(\phi_0) = \frac{\partial \phi_0}{\partial t}, \quad (3.22a)$$

$$\mathcal{L}_h^1(\eta) = -\nu_1 \nabla^2 \eta, \quad \mathcal{L}_h^2(\phi_0) = -\nu_2 \nabla^2(\phi_0) + \mu^2 h \nabla^2 \phi_0 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.22b)$$

$$\mathcal{L}_h^3(\phi_0) = \nabla \cdot (h \nabla \phi_0) - \frac{\mu^2}{6} \nabla \cdot (h^3 \nabla^3 \phi_0) + \frac{\mu^2}{2} \nabla \cdot (h^2 \nabla^2 \cdot (h \nabla \phi_0)) + \mu^4 h^5 \frac{2}{15} \nabla^6 \phi_0, \quad (3.22c)$$

$$\mathcal{L}_h^4(\eta) = \eta - \mu^2 \eta \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}, \quad (3.22d)$$

$$\mathcal{N}_h^1(\eta, \phi_0) = \varepsilon \nabla \cdot (\eta \nabla \phi_0), \quad \mathcal{N}_h^2(\eta, \phi_0) = \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi_0|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \mu^2 h^2 (\nabla^2 \phi_0)^2 - \varepsilon \eta \mu^2 h \nabla^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial t}, \quad (3.22e)$$

$$\mathcal{S}_1(h) = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\mu^2}{2} \nabla \cdot (h^2 \nabla \frac{\partial h}{\partial t}) - \left( \frac{\mu^4}{\varepsilon} \right) \frac{5h^4}{24} \nabla^4 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathcal{S}_2(h) = -\frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2. \quad (3.22f)$$

Note-se que se assume que  $\frac{\partial h}{\partial t}$  é de ordem  $O(\varepsilon)$  (cf. Dutykh e Dias (2007b)). Considerando a transformação de variáveis,

$$\phi_0 = \Phi - \frac{2}{15} \mu^4 h^4 \nabla^4 \phi_0, \quad (3.23)$$

deduzimos o sistema de quarta ordem melhorado dado por (3.21) e (3.22), substituindo-se em (3.22)  $\phi_0$  por  $\Phi$  assim como  $\mathcal{T}_h^2$  e  $\mathcal{L}_h^3$  pelas expressões seguintes:

$$\mathcal{T}_h^2(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{2}{15} \mu^4 h^4 \nabla^4 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (3.24a)$$

$$\mathcal{L}_h^3(\Phi) = \nabla \cdot (h \nabla \Phi) - \frac{\mu^2}{6} \nabla \cdot (h^3 \nabla^3 \Phi) + \frac{\mu^2}{2} \nabla \cdot (h^2 \nabla^2 \cdot (h \nabla \Phi)). \quad (3.24b)$$

Neste contexto, a utilização do potencial transformado da velocidade do fluido  $\Phi$  tem duas grandes vantagens. Mais concretamente, a ordem da derivada com respeito às variáveis espaciais é reduzida para quatro e as propriedades dispersivas lineares dos modelos são melhoradas (ver subsecção 3.2.3).

### 3.2.2 Melhoramento do modelo

As propriedades dispersivas assim como o gradiente de emolamento linear da onda podem ser optimizadas, substituindo-se  $\phi_0$  por uma função auxiliar designada por  $\Phi_\alpha$ . Neste trabalho  $\Phi_\alpha$  é dado por

$$\Phi_\alpha = \tilde{\phi}_\alpha + B \mu^4 h^4 \nabla^4 \tilde{\phi}_\alpha, \quad (3.25)$$

com  $\tilde{\phi}_\alpha = \phi(x, y, -\alpha h, t)$  o potencial da velocidade avaliado num nível arbitrário do fluido  $z = -\alpha h$  com  $\alpha \in [0, 1]$  (ver, e.g., Nwogu (1993) e Gobbi et al. (2000)) e  $B$  uma constante real dependente de  $\alpha$ . Para se obter o modelo melhorado, procedemos como segue (ver, e.g., Zhao et al. (2004) assim como Beji e Nadaoka (1996)). De (3.13) obtemos

$$\tilde{\phi}_\alpha = \cos(\alpha h \mu \nabla) \phi_0 - \frac{1}{\mu} \sin(\alpha h \mu \nabla) \nabla^{-1} \phi_1, \quad (3.26)$$

onde  $\phi_1$  é dado por (3.20). Usando técnicas de aproximações sucessivas (ou um desenvolvimento assintótico em  $\phi_0$ ) pode-se expressar  $\phi_0$  em termos de  $\tilde{\phi}_\alpha$ , resultando

$$\begin{aligned} \phi_0 \sim & \tilde{\phi}_\alpha + \mu^2 \left( -\alpha h \nabla \cdot (h \nabla \tilde{\phi}_\alpha) + \frac{(\alpha h)^2}{2} \nabla^2 \tilde{\phi}_\alpha \right) + \\ & + \mu^4 \left( \frac{5}{24} \alpha^4 - \frac{5}{6} \alpha^3 + \alpha^2 - \frac{\alpha}{3} \right) h^4 \nabla^4 \tilde{\phi}_\alpha - (\alpha h) \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t} + \mu^2 \frac{\mu^2}{\varepsilon} \left( -\frac{\alpha^3}{3} + \alpha^2 - \frac{\alpha}{2} \right) h^3 \nabla^2 \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Por sua vez, pode-se substituir  $\phi_0$  por  $\Phi_\alpha$  usando-se (3.25) e (3.27), obtendo-se a expressão seguinte:

$$\begin{aligned} \phi_0 \sim & \Phi_\alpha + \mu^2 \left( -\alpha h \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha) + \frac{(\alpha h)^2}{2} \nabla^2 \Phi_\alpha \right) + \\ & + \mu^4 \left( \frac{5}{24} \alpha^4 - \frac{5}{6} \alpha^3 + \alpha^2 - \frac{\alpha}{3} - B \right) h^4 \nabla^4 \Phi_\alpha - \\ & - (\alpha h) \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t} + \mu^2 \frac{\mu^2}{\varepsilon} \left( -\frac{\alpha^3}{3} + \alpha^2 - \frac{\alpha}{2} \right) h^3 \nabla^2 \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Um novo sistema de equações é deduzido, introduzindo-se (3.28) em (3.21) e (3.22), bem como negligenciando-se os termos de ordem  $O(\mu^4)$  que dependem das derivadas de  $h$  com respeito às variáveis espaciais de acordo com a abordagem descrita antes da equação (3.20). Este novo sistema depende do parâmetro  $\alpha$  e preserva a ordem dos termos na equação (3.22).

As propriedades dispersivas podem ser melhoradas introduzindo-se dois parâmetros novos. Usando-se a primeira equação de (3.21) assim como (3.22) com  $\phi_0$  substituído por  $\Phi_\alpha$  pode-se obter a relação seguinte:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha) = & -\frac{\partial \eta}{\partial t} - \varepsilon \nabla \cdot (\eta \nabla \Phi_\alpha) - \alpha \mu^2 \nabla \cdot \left( h \nabla \left( h \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right) - \\ & - \frac{\alpha^2}{2} \mu^2 \nabla \cdot \left( h \nabla \left( h^2 \nabla^2 \Phi_\alpha \right) \right) + \alpha \mu^2 h \nabla \cdot \left( \eta \nabla \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \frac{\mu^2}{6} \nabla \cdot \left( h^3 \nabla^3 \Phi_\alpha \right) - \\ & - \frac{\mu^2}{2} \nabla \cdot \left( h^2 \nabla^2 \cdot (h \nabla \Phi_\alpha) \right) + \nu_1 \nabla^2 \eta - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{1}{2} \nabla \cdot \left( h^2 \nabla \frac{\partial h}{\partial t} \right) + O(\mu^4). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Note-se que a equação para definir  $\mathcal{L}_h^3(\Phi_\alpha)$  do novo sistema tem um termo dado por (ver (3.23), (3.24) e (3.28))

$$- \alpha \mu^2 \nabla \cdot (h \nabla (h \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha))), \quad (3.30)$$

o qual pode ser decomposto da forma que segue:

$$- \alpha(\beta_1 + (1 - \beta_1)) \mu^2 \nabla \cdot (h \nabla (h \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha))). \quad (3.31)$$

A equação (3.29) é usada agora para substituir  $\nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha)$  em  $-\alpha \beta_1 \mu^2 \nabla \cdot (h \nabla (h \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha)))$ . Por outro lado, através da segunda equação de (3.21) assim como (3.22) (com  $\phi_0$  substituído por  $\Phi_\alpha$ ) obtém-se

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} = -\eta + O(\mu^2). \quad (3.32)$$

A equação (3.32) pode ser rescrita da forma seguinte:

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} = \beta_2 \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + (1 - \beta_2) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t}. \quad (3.33)$$

Usando-se (3.23), (3.24a) e (3.28) a função  $\mathcal{T}_h^2(\Phi_\alpha)$  fica definida. Assim, podemos introduzir (3.33) com  $\beta_2 \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t}$  substituído por  $-\beta_2 \eta$  nos termos de alta ordem de  $\mathcal{T}_h^2(\Phi_\alpha)$ .

Como consequência, uma nova classe de modelos melhorados é descrita pelas equações (3.21) (substituindo  $\phi_0$  por  $\Phi_\alpha$ ) com

$$\mathcal{T}_h^1(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha \beta_1 \mu^2 \nabla \cdot \left( h \nabla \left( h \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right) + \alpha^2 \beta_1 \mu^4 h^4 \nabla^4 \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (3.34a)$$

$$\mathcal{T}_h^2(\Phi_\alpha) = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} - \mu^2 \alpha \frac{\partial}{\partial t} (h \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha)) + \mu^2 \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (h^2 \nabla^2 \Phi_\alpha) + \mu^4 B_0 h^4 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 \Phi_\alpha, \quad (3.34b)$$

$$\mathcal{L}_h^1(\eta) = -\nu_1 \nabla^2 \eta - \alpha \mu^2 h \nabla \cdot \left( \eta \nabla \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \alpha \beta_1 \mu^2 h^2 \nu_1 \nabla^4 \eta, \quad (3.34c)$$

$$\mathcal{L}_h^2(\Phi_\alpha) = -\alpha h \mu^2 \nabla \Phi_\alpha \nabla \frac{\partial h}{\partial t} - \nu_2 \nabla^2 (\Phi_\alpha) - \nu_2 B_1 \mu^2 h^2 \nabla^4 \Phi_\alpha + \mu^2 h \nabla^2 \Phi_\alpha \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.34d)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^3(\Phi_\alpha) = & \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha) - \frac{\mu^2}{6} \nabla \cdot (h^3 \nabla^3 \Phi_\alpha) + \frac{\mu^2}{2} \nabla \cdot (h^2 \nabla^2 \cdot (h \nabla \Phi_\alpha)) + \mu^4 h^5 B_2 \nabla^6 \Phi_\alpha - \\ & - \alpha \mu^2 (1 - \beta_1) \nabla \cdot (h \nabla (h \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha))) + \frac{\alpha^2}{2} \mu^2 \nabla \cdot (h \nabla (h^2 \nabla^2 \Phi_\alpha)), \end{aligned} \quad (3.34e)$$

$$\mathcal{L}_h^4(\eta) = \eta - \mu^2 \eta \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \mu^4 \beta_2 \frac{1}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) h^4 \nabla^4 \eta, \quad (3.34f)$$

$$\mathcal{N}_h^1(\eta, \Phi_\alpha) = \varepsilon \nabla \cdot (\eta \nabla \Phi_\alpha) + \mu^2 \varepsilon B_1 h^2 \nabla \cdot (\eta \nabla^3 \Phi_\alpha) + \alpha \mu^2 \beta_1 \varepsilon h^2 \nabla^3 \cdot (\eta \nabla \Phi_\alpha), \quad (3.34g)$$

$$\mathcal{N}_h^2(\eta, \Phi_\alpha) = \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \Phi_\alpha|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \mu^2 h^2 (\nabla^2 \Phi_\alpha)^2 + \mu^2 h^2 \varepsilon B_1 \nabla \Phi_\alpha \nabla^3 \Phi_\alpha + \varepsilon \eta \mu^2 h \nabla^2 \eta, \quad (3.34h)$$

$$\mathcal{S}_1(h) = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\mu^2}{2} \nabla \cdot \left( h^2 \nabla \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \mu^2 \frac{\mu^2}{\varepsilon} B_3 h^4 \nabla^4 \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha (1 - \beta_1) \frac{\mu^2}{\varepsilon} \nabla \cdot \left( h \nabla (h \frac{\partial h}{\partial t}) \right), \quad (3.34i)$$

$$\mathcal{S}_2(h) = -\frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 + \alpha \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \left( h \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \mu^2 \frac{\mu^2}{\varepsilon} B_4 h^3 \nabla^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \alpha h \nu_2 \frac{\mu^2}{\varepsilon} \nabla^2 \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right), \quad (3.34j)$$

em que  $\beta_1$  assim como  $\beta_2$  são parâmetros introduzidos em (3.31) e (3.33). Para além disto, os coeficientes  $B$ ,  $B_0, \dots, B_3$  e  $B_4$  dependem de  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . No que segue, quatro tipos possíveis de modelos são discutidos em função dos coeficientes referidos. No primeiro caso, temos um modelo de sexta ordem (6o-A) com  $\alpha \neq 0, \beta_1 = \beta_2 = 0$  e

$$\begin{aligned} B_0 = \frac{5}{24} (\alpha^2 - 2\alpha) \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right), \quad B_2 = \frac{5}{24} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right)^2, \\ B_3 = \frac{1}{3} \alpha \left( \alpha^2 - 3\alpha + \frac{5}{2} \right) - \frac{5}{24}, \quad B = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

No segundo caso, temos um modelo de quarta ordem (4o-A) com  $\alpha \neq 0, \beta_1 = \beta_2 = 0$  e

$$\begin{aligned} B_0 = -\frac{1}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right), \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{1}{3} \alpha \left( \alpha^2 - 3\alpha + \frac{5}{2} \right) - \frac{5}{24}, \\ B = \frac{5}{24} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

No terceiro caso, temos um modelo de sexta ordem (6o-AB) com  $\alpha \neq 0, \beta_i \neq 0, i = 1$  ou  $i = 2$

e

$$B_0 = -(1 - \beta_2) \frac{1}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right), \quad B_2 = \beta_1 \alpha \frac{1}{2} \left( \alpha^2 + \frac{2}{3} \right),$$

$$B_3 = \frac{1}{3} \alpha \left( \alpha^2 - 3\alpha + \frac{5}{2} \right) - \frac{5}{24} - \frac{\alpha \beta_1}{2}, \quad B = \frac{5}{24} \left( \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) \right)^2. \quad (3.37)$$

Finalmente, no quarto caso, temos um modelo de quarta ordem (4o-AB) dado por  $\alpha \neq 0, \beta_i \neq 0, i = 1$  ou  $i = 2$  e

$$B_0 = -(1 - \beta_2) \frac{1}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) - \beta_1 \alpha \frac{1}{2} \left( \alpha^2 + \frac{2}{3} \right), \quad B_2 = 0,$$

$$B_3 = \frac{1}{3} \alpha \left( \alpha^2 - 3\alpha + \frac{5}{2} \right) - \frac{5}{24} - \frac{\alpha \beta_1}{2}, \quad B = \frac{5}{24} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right)^2 + \beta_1 \alpha \frac{1}{2} \left( \alpha^2 + \frac{2}{3} \right). \quad (3.38)$$

Em todos estes casos, os coeficientes  $B_1$  e  $B_4$  são dados por

$$B_1 = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha, \quad B_4 = -\frac{\alpha^3}{3} + \alpha^2 - \frac{\alpha}{2}. \quad (3.39)$$

Para finalizar esta subsecção, referimos que se considerarmos  $\alpha = 0$  então obtemos os modelos apresentados na subsecção anterior. Note-se que se  $\alpha = 0, B_0 = 0, B_2 = \frac{2}{15}$  e  $B = 0$  então é recuperado o modelo de sexta ordem descrito por (3.21) e (3.22) e se  $\alpha = 0, B_0 = -\frac{2}{15}, B_2 = 0$  e  $B = \frac{2}{15}$  reconstruímos o sistema de quarta ordem definido por (3.21)–(3.24). Por outro lado, se  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$ , o modelo dado por (3.21), (3.34) e (3.35) pode ser reduzido a um sistema de quarta ordem, uma vez que se tem  $B_2 = 0$ . Na próxima subsecção, mostramos que este último caso apresenta a mesma relação de dispersão que a do modelo proposto por Zhao et al. (2004) (ver capítulo 2). Note-se que uma generalização do modelo proposto por Chen e Liu (1994), mas para um fundo dependente do tempo, pode ser obtida quando os efeitos dissipativos e o termo extra  $O(\mu^6)$  em (3.20) não forem considerados.

### 3.2.3 Relação de dispersão

Nesta subsecção, a relação de dispersão para o modelo proposto e linearizado é apresentada. No que segue, apenas variáveis dimensionais são consideradas. Para simplificar o problema, considera-se somente o caso **2D** com um fundo constante da região ocupada pelo fluido. Este fundo é descrito por  $z = -h$ .

O problema completamente linear com efeitos dissipativos, em que as funções incógnita são o potencial da velocidade do fluido e a elevação da superfície da onda, é dado pelas equações seguintes:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \nabla^2 \phi = 0, \quad (x, z) \in \mathbb{R} \times [-h, 0], \quad (3.40a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nu_1 \nabla^2 \eta = 0, \quad z = 0, \quad (3.40b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \nu_2 \nabla^2 \phi = 0, \quad z = 0, \quad (3.40c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (3.40d)$$

Este problema admite soluções definidas por

$$\eta(x, t) = a e^{i(kx - \omega t)}, \quad \phi(x, z, t) = \hat{b}(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.41)$$

desde que a relação de dispersão associada a este problema seja satisfeita. Esta relação de dispersão é dada pelas equações seguintes:

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{4}(\nu_1 - \nu_2)^2 k^4 + ghk^2 \frac{\tanh(kh)}{kh}, \quad (3.42)$$

$$\omega_2 = -\frac{k^2}{2}(\nu_1 + \nu_2). \quad (3.43)$$

A frequência angular é definida aqui por  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$  em que  $a$  é a amplitude da onda,  $\hat{b}(z)$  é uma função relacionada com a magnitude do potencial da velocidade do fluido e  $k = \frac{2\pi}{L}$  é o número de onda. Se se tiver  $\nu_1 = \nu_2$  então os termos dissipativos não contribuem para a parte real da frequência angular.

Por outro lado, a linearização do sistema descrito por (3.21) e (3.34)–(3.39) com um fundo constante  $z = -h$  pode ser escrito na forma genérica seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h\nabla^2 \Phi_\alpha + B_5 h^3 \nabla^4 \Phi_\alpha + B_2 h^5 \nabla^6 \Phi_\alpha + B_6 h^2 \nabla^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \\ + B_7 h^4 \nabla^4 \frac{\partial \eta}{\partial t} - \nu_1 \nabla^2 \eta - B_6 h^2 \nu_1 \nabla^4 \eta = 0, \end{aligned} \quad (3.44a)$$

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + B_1 h^2 \nabla^2 \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + B_0 h^4 \nabla^4 \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + g\eta - \nu_2 \nabla^2 \Phi_\alpha - \nu_2 B_1 h^2 \nabla^4 \Phi_\alpha + gB_8 h^4 \nabla^4 \eta = 0, \quad (3.44b)$$

com  $B_i$  ( $i = 5, \dots, 8$ ) dados como segue:

**Modelos 6o-A e 4o-A**

$$B_5 = \frac{1}{2} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{2}{3} \right), \quad (3.45a)$$

$$B_{6,7,8} = 0; \quad (3.45b)$$

**Modelos 6o-AB e 4o-AB**

$$B_5 = \frac{1}{2} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{2}{3} \right) + \alpha\beta_1, \quad (3.46a)$$

$$B_6 = \alpha\beta_1, \quad B_7 = \alpha^2\beta_1, \quad (3.46b)$$

$$B_8 = \beta_2 \frac{1}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right). \quad (3.46c)$$

O sistema (3.44) admite soluções da forma

$$\eta(x, t) = a e^{i(kx - \omega t)}, \quad \Phi_\alpha(x, t) = -ib e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.47)$$

desde que a relação de dispersão associada seja satisfeita. Esta relação de dispersão é dada por

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{4} \left( \frac{T_5}{T_2 T_3} \nu_1 + \frac{T_4}{T_3} \nu_2 \right)^2 k^4 + \frac{T_6}{T_2 T_3} \nu_1 \nu_2 k^4 + ghk^2 \frac{T_1 T_7}{T_2 T_3}, \quad (3.48)$$

$$\omega_2 = -\frac{k^2}{2} \left( \frac{T_5}{T_2 T_3} \nu_1 + \frac{T_4}{T_3} \nu_2 \right), \quad (3.49)$$

em que  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) são dados por

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 - B_5(kh)^2 + B_2(kh)^4, & T_2 &= 1 - B_6(kh)^2 + B_7(kh)^4, \\ T_3 &= 1 - B_1(kh)^2 + B_0(kh)^4, & T_4 &= 1 - B_1(kh)^2, \\ T_5 &= 1 - (B_2 + B_6)(kh)^2 + (B_2B_6 + B_0)(kh)^4, & T_6 &= 1 - (B_6 + B_1)(kh)^2 + B_6B_1(kh)^4, \\ T_7 &= 1 + B_8(kh)^4 \end{aligned} \quad (3.50)$$

e  $b$  é uma constante relacionada com a magnitude do potencial da velocidade do fluido.

### 3.2.3.1 Discussão sobre os parâmetros $\alpha$ , $\beta_1$ e $\beta_2$

A ideia principal é a otimização dos coeficientes  $B_i$  ( $i = 0, 1, 2, 5, \dots, 8$ ) de modo que (3.48), (3.49) e (3.50) reproduzam o melhor possível (3.42) e (3.43). Note-se que os termos dissipativos não são considerados nesta subsecção ( $\nu_1 = \nu_2 = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ).

Agora, discute-se o modelo com  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  e com  $\alpha$  um parâmetro real a determinar. Como habitualmente, as relações de dispersão dos modelos deduzidos são comparadas com os desenvolvimentos de Padé das relações de dispersão provenientes da teoria completamente linear (ver, e.g., Gobbi et al. (2000) e Madsen e Schäffer (1998)). O quadrado da velocidade de fase normalizada do problema linear  $\bar{C}_p^2$  é definido por

$$\bar{C}_p^2 = \frac{\omega^2}{ghk^2} = \frac{\tanh(kh)}{kh}. \quad (3.51)$$

Os desenvolvimentos de Padé de ordem [2, 2] e [2, 4] de  $\bar{C}_p^2$  são dados por

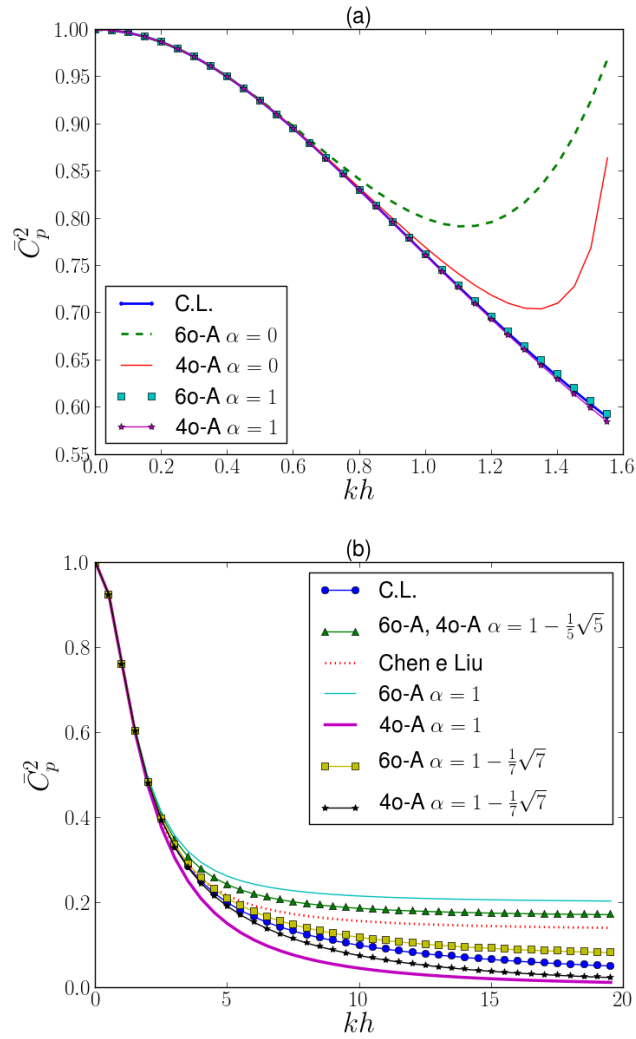
$$\frac{1 + \frac{(kh)^2}{15}}{1 + \frac{2(kh)^2}{5}}, \quad (3.52a)$$

$$\frac{1 + \frac{2(kh)^2}{21}}{1 + \frac{3(kh)^2}{7} + \frac{(kh)^4}{105}}, \quad (3.52b)$$

respectivamente.

O valor de  $\alpha$  pode ser escolhido de forma a que a fracção  $(T_1T_7)/(T_2T_3)$  (ver (3.48)) reproduza qualquer um dos desenvolvimentos de Padé apresentados em (3.52). Note-se que esta fracção é definida por (3.52a) e (3.52b) para o modelo de quarta ordem com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$  e  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$ , respectivamente. Na tabela 3.1, podem ser vistas as fracções  $(T_1T_7)/(T_2T_3)$  para alguns valores de  $\alpha$ . Note-se que os modelos 4o-A e 6o-A coincidem se  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$ . Neste caso, obtemos a relação de dispersão associada ao modelo de segunda ordem de Zhao et al. (2004) (ver capítulo 2) assim como aquela respeitante ao modelo BEV de terceira ordem descrito em Dutykh e Dias (2007b). Na figura 3.2, apresenta-se  $\bar{C}_p^2$  como função de  $kh$ , relativamente aos modelos aqui propostos assim como ao modelo de Chen e Liu (1994). Salienta-se que também é possível melhorar a relação de dispersão com outros valores de  $\alpha$  determinados pelo método dos mínimos quadrados, tendo como critério de optimização, por exemplo, o erro relativo obtido entre as várias relações de dispersão.

Como exemplo, referimos os seguintes erros obtidos para  $kh \in [0, 20]$ : se  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$  obtém-se um erro de 8.6%; se  $\alpha = 1$  o erro do modelo de quarta ordem é melhorado para 2.39% e se  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$  obtemos um erro de 0.49% e de 0.55% para os modelos de sexta e de quarta ordem, respectivamente. Por sua vez, o erro produzido pela aproximação dada pelo



**Figura 3.2:** O quadrado da velocidade de fase normalizada  $\bar{C}_p^2$  para os modelos 4o-A e 6o-A com diversos valores de  $\alpha$ . A figura mostra também  $\bar{C}_p^2$  para o modelo completamente linear (C.L.) bem como para o modelo de Chen e Liu.

$\alpha$	6ª ordem	4ª ordem
0	$1 - \frac{(kh)^2}{3} + \frac{2(kh)^4}{15}$	$\frac{1 - \frac{(kh)^2}{3}}{1 - \frac{2(kh)^4}{15}}$
1	$\frac{1 + \frac{(kh)^2}{6} + \frac{(kh)^4}{120}}{1 + \frac{(kh)^2}{2} + \frac{(kh)^4}{24}}$	$\frac{1 + \frac{(kh)^2}{6}}{1 + \frac{(kh)^2}{2} + \frac{(kh)^4}{30}}$
$1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{1 + \frac{(kh)^2}{15}}{1 + \frac{2(kh)^2}{5}}$	$\frac{1 + \frac{(kh)^2}{15}}{1 + \frac{2(kh)^2}{5}}$ (ver (3.52a))
$1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$	$\frac{1 + \frac{2(kh)^2}{21} + \frac{(kh)^4}{1470}}{1 + \frac{3(kh)^2}{7} + \frac{(kh)^4}{98}}$	$\frac{1 + \frac{2(kh)^2}{21}}{1 + \frac{3(kh)^2}{7} + \frac{(kh)^4}{105}}$ (ver (3.52b))

**Tabela 3.1:** Definição das fracções  $(T_1T_7)/(T_2T_3)$  para diversos valores de  $\alpha$  e para os modelos de sexta e quarta ordem.

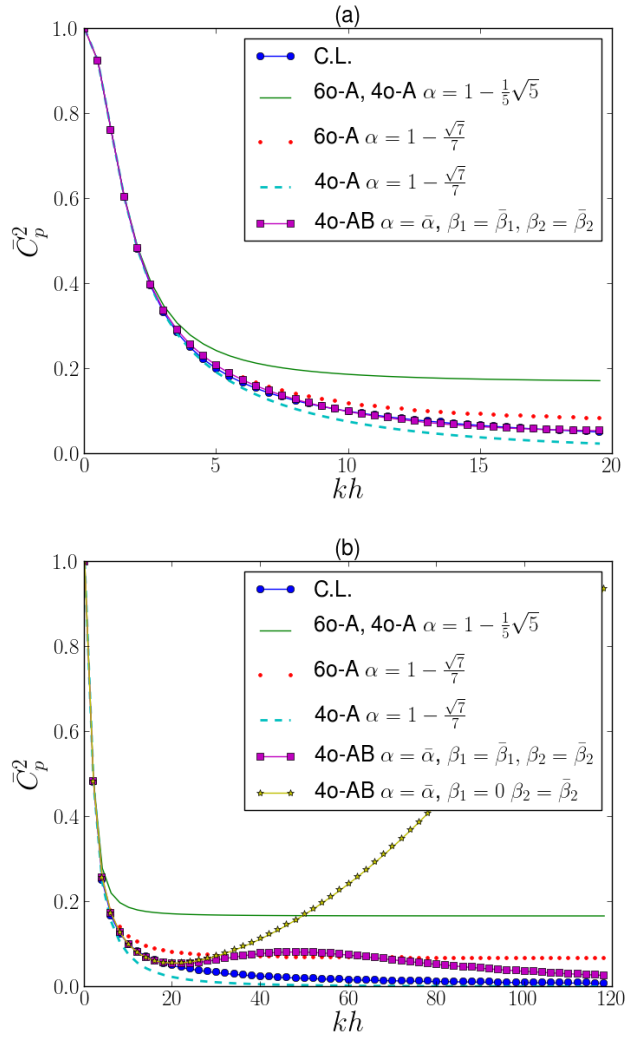
desenvolvimento de Padé [4, 4] de (3.51) é de 0.29%. No entanto, se  $\alpha = 0.583948$  pode-se melhorar a relação de dispersão obtendo-se um erro de 0.08% para o modelo 4o-A. Este último valor pode ainda ser minimizado se forem escolhidos valores apropriados de  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Usando-se um método do tipo ponto fixo no gradiente do erro, consegue-se determinar os valores de  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  para os quais o erro obtido para a fracção  $(T_1T_7)/(T_2T_3)$  é igual a 0.01672% relativamente ao modelo 4o-AB (ver figura 3.3). Denotamos estes valores de  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  por  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}_1$  e  $\bar{\beta}_2$ , respectivamente e os seus valores são dados por

$$\bar{\alpha} = 0.5917517028, \quad \bar{\beta}_1 = 4.971623160 \times 10^{-7}, \quad \bar{\beta}_2 = -8.100610226 \times 10^{-4}. \quad (3.53)$$

Por outro lado, os erros para as aproximações dadas pelos desenvolvimentos de Padé [4, 6] e [6, 6] de (3.51) são de 0.0394% e de 0.0096%, respectivamente. Note-se que  $\bar{C}_p^2$  é altamente sensível à escolha destes parâmetros. Este facto é ilustrado na figura 3.3 (b) onde também se considera o modelo 4o-AB com  $\alpha = \bar{\alpha}$ ,  $\beta_1 = 0$  e  $\beta_2 = \bar{\beta}_2$ . A partir de agora, apenas consideramos os parâmetros dados por (3.53). Salienta-se que  $\lim_{kh \rightarrow +\infty} \frac{\tanh(kh)}{kh} = 0$ . Assim, o desenvolvimento de Padé de ordem  $[2n, 2n + 2]$  de (3.51) fornece uma melhor aproximação do que o desenvolvimento de Padé de ordem  $[2n + 2, 2n + 2]$  de (3.51), para valores grandes de  $kh$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). Por outro lado, apenas se tem  $\lim_{kh \rightarrow +\infty} \frac{T_1T_7}{T_2T_3} = 0$  para os modelos de quarta ordem aqui apresentados, com a excepção do modelo 4o-A quando  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

### 3.2.3.2 Efeitos de dissipação

Nesta subsecção, estudamos a contribuição dos efeitos dissipativos na relação de dispersão, estendendo a análise feita em Dutykh e Dias (2007a). A inclusão dos efeitos dissipativos permite que  $\omega_1$  possa ser um número puramente imaginário para certos valores de  $kh$  (ver (3.42) e (3.48)). No modelo completamente linear a parte imaginária da frequência angular é negativa para coeficientes de viscosidade cinemática não negativos  $\nu_1$  e  $\nu_2$  e com  $\nu_1 \neq 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$



**Figura 3.3:** O quadrado da velocidade de fase normalizada  $\bar{C}_p^2$  como função de  $kh$  para os modelos completamente linear (C.L.), 4o-A, 4o-AB e 6o-A com vários valores de  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Em (b) mostra-se que os modelos são altamente sensíveis à variação destes parâmetros.

ou  $\nu_2 \neq 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  ( $kh > 0$ ). Isto significa que o decaimento no tempo das soluções depende da parte imaginária da frequência angular.

Assim como em Dutykh e Dias (2007a), consideramos  $\nu_1 = 0.14 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $\nu_2 = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . Para além disto, o caso  $\nu_1 = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e  $\nu_2 = 0.14 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  é também estudado juntamente com o caso  $\nu_1 = \nu_2 = 0.07 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ . Salienta-se que o modelo completamente linear tem os mesmos valores de  $\omega_2$  para todos estes casos. Com respeito ao modelo completamente linear, podemos retirar as conclusões seguintes:

- i)* os dois primeiros casos têm as mesmas partes imaginária e real da frequência angular (ver (3.42) e (3.43));
- ii)* o terceiro caso não tem uma bifurcação para a parte imaginária da frequência angular (ver figura 3.5 (c)). Isto significa que os termos dissipativos contribuem de forma igual para a dissipação da energia das ondas que se propagam tanto na direcção positiva como na direcção negativa do eixo  $ox$ . Este último facto está em concordância com o trabalho de Dias et al. (2008).

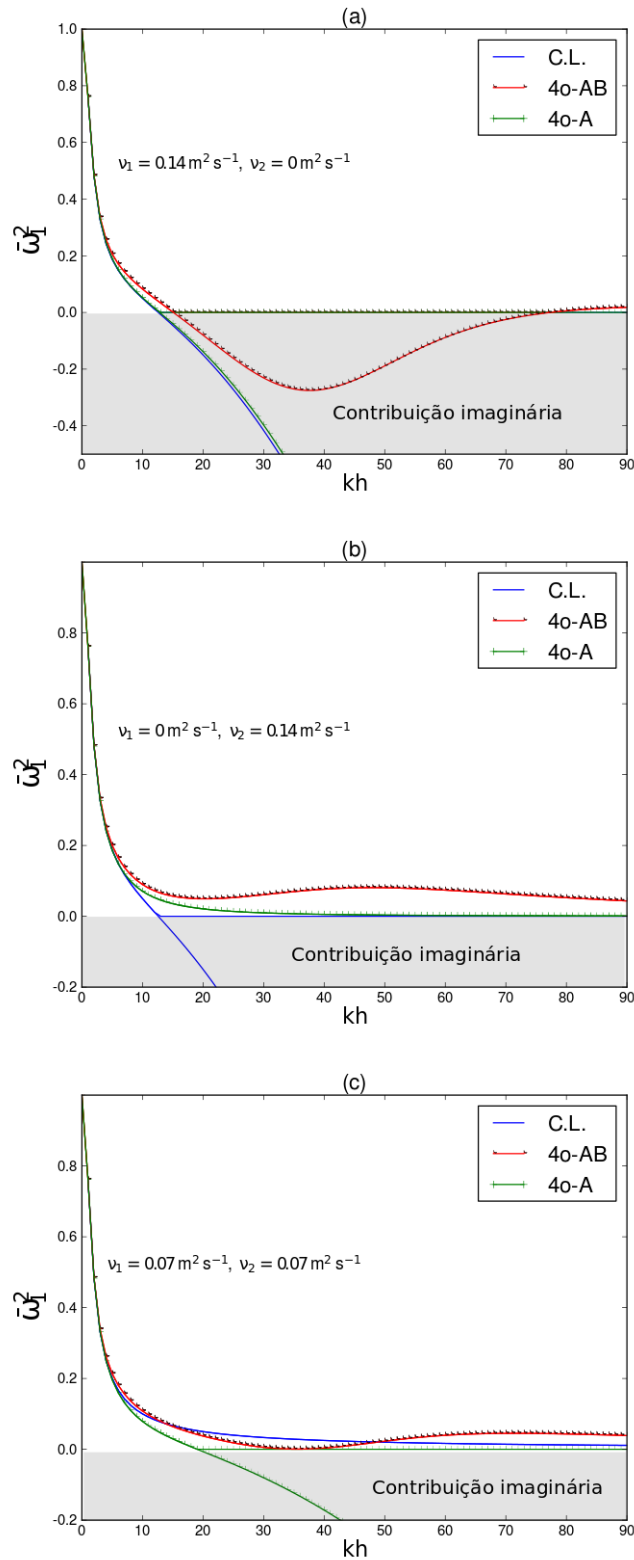
Na figura 3.4, pode-se observar o quadrado da componente normalizada da frequência angular  $\omega_1$ ,

$$\bar{\omega}_1^2 = \frac{\omega_1^2}{ghk^2}, \quad (3.54)$$

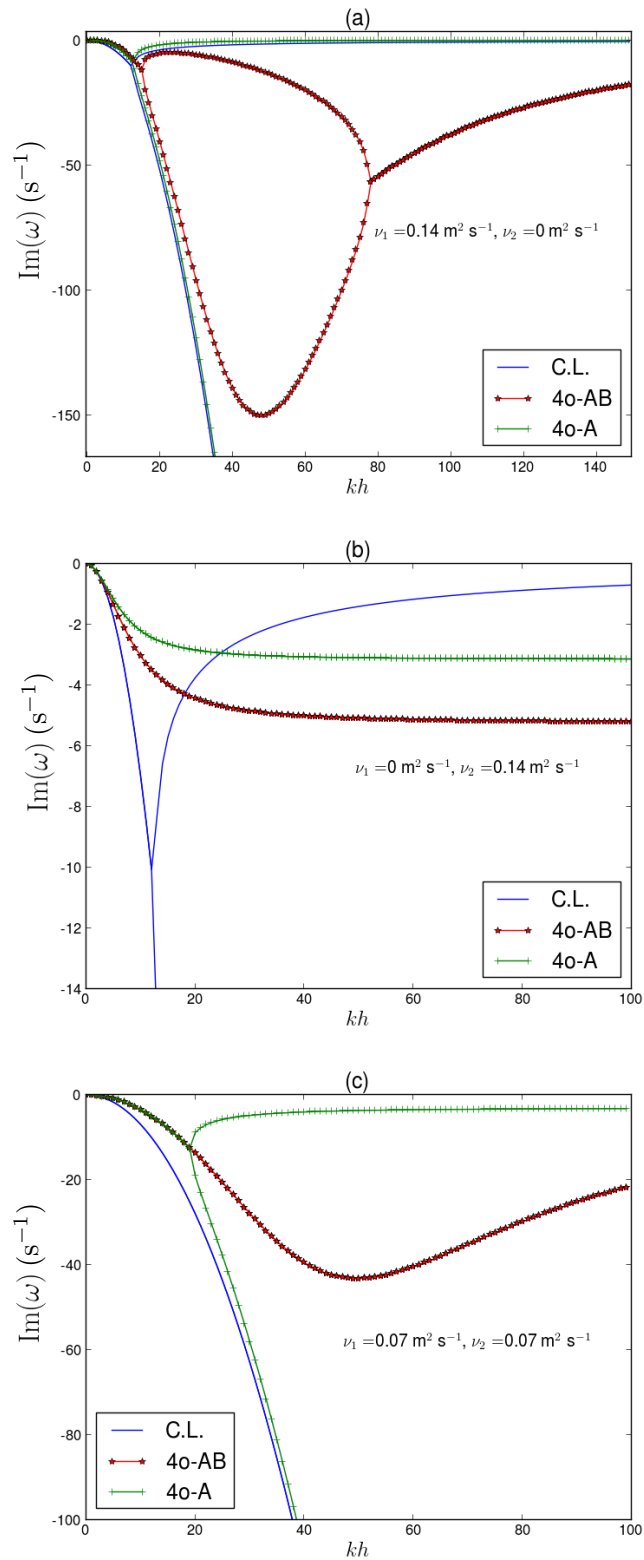
como função de  $kh$  para os modelos 4o-A e 4o-AB bem como para o modelo completamente linear. Note-se que  $\bar{\omega}_1^2 = \text{Re}^2(\bar{C}_p)$  quando  $w_1$  é um número real. Consideramos aqui o modelo 4o-A com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$  e o modelo 4o-AB com  $\alpha = \bar{\alpha}$  e  $\beta_i = \bar{\beta}_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Das figuras 3.4 e 3.5, conclui-se o seguinte:

- i)* podemos observar através das figuras 3.4 (a) e 3.5 (a) que o modelo 4o-A e que o modelo completamente linear apresentam o mesmo comportamento para  $\bar{\omega}_1^2$  e para  $\text{Im}(\omega)$  ( $\nu_1 = 0.14 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\nu_2 = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ );
- ii)* a escolha dos parâmetros  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}_1$  e  $\bar{\beta}_2$  não melhora  $\bar{\omega}_1^2$  do modelo 4o-AB, quando comparada com  $\bar{\omega}_1^2$  do modelo 4o-A, mesmo para  $kh \in [0, 20]$  (ver figura 3.4 (a)). Por outro lado, o modelo 4o-AB e o modelo completamente linear apresentam comportamentos distintos com respeito à parte imaginária da frequência angular para  $kh > 40$  (ver figura 3.5 (a));
- iii)* os modelos 4o-A e 4o-AB têm comportamentos diferentes para  $\bar{\omega}_1^2$  assim como para  $\text{Im}(\omega)$  quando comparados com os do modelo completamente linear (ver figuras 3.4 (b) e 3.5 (b)). Note-se que  $\bar{\omega}_1^2$  também tem uma contribuição imaginária para o modelo completamente linear ( $\nu_1 = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\nu_2 = 0.14 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ). Este facto está em concordância com os resultados fornecidos por um dos modelos dissipativos apresentados em Dutykh e Dias (2007a). A priori, não vemos nenhuma vantagem para o uso deste modelo dissipativo;
- iv)* podemos concluir através das figuras 3.4 (c) e 3.5 (c) que  $\bar{\omega}_1^2$  não tem uma contribuição imaginária quer para o modelo 4o-AB quer para o modelo completamente linear ( $\nu_1 = \nu_2 = 0.07 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ). No entanto,  $\bar{\omega}_1^2$  também tem uma contribuição imaginária para o modelo 4o-A. Por outro lado,  $\text{Im}(\omega)$  relativo ao modelo completamente linear tem um comportamento semelhante a um dos ramos da componente homóloga associada ao modelo 4o-A (ver figura 3.5 (c)). O ramo mencionado anteriormente está associado aos valores negativos da componente puramente imaginária  $\omega_1$  da frequência angular.
- v)* Em todos estes casos  $\text{Im}(\omega)$  é negativo ( $kh > 0$ ).



**Figura 3.4:** O quadrado da componente normalizada da frequência angular  $\bar{\omega}_1^2$  como função de  $kh$  para um valor fixo de  $h$  para os modelos 4o-A, 4o-AB e completamente linear (C.L.). Na região cinzenta, podemos observar  $\bar{\omega}_1^2$  como função de  $kh$  quando  $\omega_1$  é um número imaginário puro. Consideram-se os valores das viscosidades cinemáticas dados por  $\nu_1 = 0.14 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  e  $\nu_2 = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (a),  $\nu_1 = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  e  $\nu_2 = 0.14 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (b) assim como  $\nu_1 = 0.07 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  e  $\nu_2 = 0.07 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (c).



**Figura 3.5:** A parte imaginária da frequência angular  $\text{Im}(\omega) \text{ (s}^{-1}\text{)}$  como função de  $kh$  para um valor fixo de  $h$  para os modelos 4o-A, 4o-AB e completamente linear (C.L.). Consideram-se os valores das viscosidades cinemáticas dados por  $\nu_1 = 0.14 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  e  $\nu_2 = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (a),  $\nu_1 = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  e  $\nu_2 = 0.14 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (b) assim como  $\nu_1 = 0.07 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  e  $\nu_2 = 0.07 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (c).

### 3.2.4 Gradiente de empolamento da onda

O gradiente de empolamento pode ser usado para analisar a deformação da onda quando esta é afectada pela variação de um fundo estacionário da região ocupada pelo fluido (ver, e.g., Madsen e Sørensen (1992) ou Lee et al. (2003)). Para além disso, os efeitos de dissipação da energia das ondas não são considerados nesta análise. Começamos por assumir que as equações descritas por (3.21) e (3.34), quando escritas numa forma linearizada, admitem as soluções seguintes:

$$\eta = a(x) \cos \left( \int k(x) dx - \omega t \right), \quad (3.55a)$$

$$\Phi_\alpha = b(x) \sin \left( \int k(x) dx - \omega t \right). \quad (3.55b)$$

Também consideramos variações suaves para as funções que descrevem o fundo do mar, número de onda, amplitude da onda bem como para a magnitude do potencial da velocidade do fluido. Isto significa que as derivadas de ordem superior ou igual a dois, assim como os produtos das derivadas de primeira ordem de  $h(x)$ ,  $k(x)$ ,  $a(x)$  e  $b(x)$  são negligenciados.

O gradiente de empolamento da onda  $\alpha_s$  é definido por

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dx} = -\alpha_s \frac{1}{h} \frac{dh}{dx}. \quad (3.56)$$

Por outro lado, o gradiente de empolamento da onda associado à teoria de linear sem efeitos dissipativos é dado pela relação bem conhecida (ver, e.g., citetMad ou Walkley (1999)) que segue:

$$\alpha_s = \frac{2kH(\sinh(2kH) + kH(1 - \cosh(2kH)))}{(2kH + \sinh(2kH))^2}. \quad (3.57)$$

Neste trabalho, os procedimentos utilizados em Lee et al. (2003) são tomados em consideração. No entanto, para o modelo 4o-AB uma relação distinta daquelas obtidas em Lee et al. (2003) é deduzida, resultando em

$$d_0^0 \frac{1}{a} \frac{da}{dx} + d_1^0 \frac{1}{b} \frac{db}{dx} + d_2^0 \frac{1}{k} \frac{dk}{dx} + d_3^0 \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} = 0, \quad (3.58)$$

com

$$d_0^0 = \left( 2\beta_2 \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) - 4\alpha^2\beta_1 \right) h^2 k^2 h\bar{\omega} + 2\alpha\beta_1 h\bar{\omega}, \quad (3.59a)$$

$$d_1^0 = \left( -4h^2 k^2 B_0 + 2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \right) h \frac{\omega^2}{g} - 4 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha(1 - \beta_1) + \frac{1}{3} \right) h^2 k^2 + 2, \quad (3.59b)$$

$$d_2^0 = \left( \left( \beta_2 \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) - 6\alpha^2\beta_1 \right) h^2 k^2 + 6\alpha\beta_1 \right) h\bar{\omega} - \left( 6B_0 h^3 k^2 - \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \right) h \frac{\omega^2}{g} - 6 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha(1 - \beta_1) + \frac{1}{3} \right) + 1, \quad (3.59c)$$

$$d_3^0 = -\alpha h \frac{\omega^2}{g} + 3\alpha\beta_1 h\bar{\omega} + \left( 6(1 - \beta_1)\alpha - \frac{5}{2}\alpha^2 - 2 \right) h^2 k^2 + 1. \quad (3.59d)$$

Note-se que  $\omega^2 = \bar{\omega}\tilde{\omega}$  em que

$$\bar{\omega} = hk^2 \frac{-\left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha(1 - \beta_1) + \frac{1}{3} \right) h^2 k^2 + 1}{\alpha^2\beta_1 h^4 k^4 - \alpha\beta_1 h^2 k^2 + 1} = hk^2 \frac{T_1}{T_2} \quad (3.60)$$

e

$$\tilde{\omega} = g \frac{B_8 h^4 k^4 + 1}{B_0 h^4 k^4 - \left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha\right) h^2 k^2 + 1} = g \frac{T_7}{T_3}. \quad (3.61)$$

Se derivarmos a equação linearizada do potencial da velocidade do fluido (ver (3.44b)) com respeito a  $x$ , obtemos

$$d_0^1 \frac{1}{a} \frac{da}{dx} + d_1^1 \frac{1}{b} \frac{db}{dx} + d_2^1 \frac{1}{k} \frac{dk}{dx} + d_3^1 \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} = 0, \quad (3.62)$$

com

$$\begin{aligned} d_0^1 &= -d_1^1 = \frac{1}{6} h^4 k^4 \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) + 1, \\ d_2^1 &= d_3^1 = \frac{2}{3} \beta_2 h^4 k^4 \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) - 4B_0 h^4 k^4 \frac{\tilde{\omega}}{g} + 2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) h^2 k^2 \frac{\tilde{\omega}}{g}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Usando (3.58) e (3.62), obtém-se a relação seguinte:

$$c_1 \frac{1}{a} \frac{da}{dx} + c_2 \frac{1}{k} \frac{dk}{dx} + c_3 \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} = 0, \quad (3.64)$$

onde  $c_1 = d_0^0 - d_0^1 \frac{d_1^0}{d_1^1}$ ,  $c_2 = d_2^0 - d_2^1 \frac{d_1^0}{d_1^1}$  e  $c_3 = d_3^0 - d_3^1 \frac{d_1^0}{d_1^1}$ . Note-se que  $\omega^2$  não depende de  $x$ .

Assim, temos que

$$2c_4^0 \frac{1}{k} \frac{dk}{dx} + c_4^1 \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k} \frac{dk}{dx} = -c_4 \frac{1}{h} \frac{dh}{dx}, \quad (3.65)$$

em que

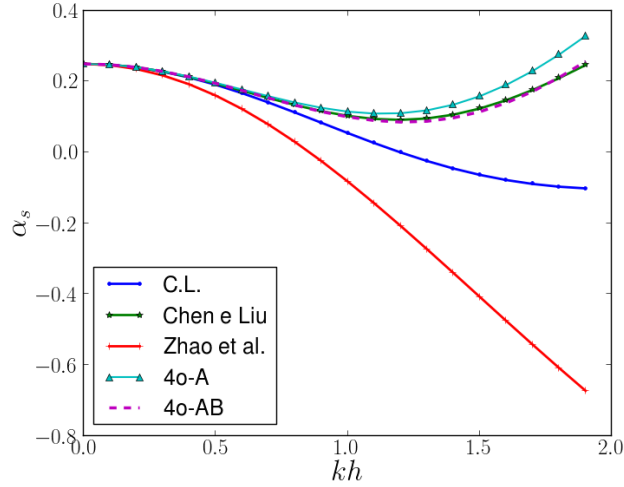
$$\begin{aligned} c_4^0 &= (B_1 B_5 B_7 B_8 - B_0 B_7 B_8 + B_0 B_5 B_6 B_8)(kh)^{12} + \\ &\quad + (-2B_5 B_7 B_8 - 2B_1 B_5 B_6 B_8 - 2B_0 B_5 B_8 + 2B_0 B_5 B_7)(kh)^{10} + \\ &\quad + (B_7 B_8 + 3B_5 B_6 B_8 + B_1 B_6 B_8 + 3B_1 B_5 B_8 + B_0 B_8 - B_1 B_5 B_7 - 3B_0 B_7 - B_0 B_5 B_6)(kh)^8 + \\ &\quad + (-2B_6 B_8 - 4B_5 B_8 - 2B_1 B_8 + 2B_1 B_7 + 2B_0 B_6)(kh)^6 + \\ &\quad + (3B_8 - B_7 + B_5 B_6 - B_1 B_6 + B_1 B_5 - B_0)(kh)^4 - 2B_5 (kh)^2 + 1, \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} c_4^1 &= B_0 B_5 B_7 B_8 (kh)^{14} + (B_1 B_5 B_7 B_8 - 3B_0 B_7 B_8 + B_0 B_5 B_6 B_8)(kh)^{12} + \\ &\quad + (-3B_5 B_7 B_8 + B_1 B_7 B_8 - 3B_1 B_5 B_6 B_8 + B_0 B_6 B_8 - 3B_0 B_5 B_8 + 5B_0 B_5 B_7)(kh)^{10} + \\ &\quad + (B_7 B_8 + 5B_5 B_6 B_8 + B_1 B_6 B_8 + 5B_1 B_5 B_8 + B_0 B_8 - 3B_1 B_5 B_7 - 7B_0 B_7 - 3B_0 B_5 B_6)(kh)^8 + \\ &\quad + (-3B_6 B_8 - 7B_5 B_8 - 3B_1 B_8 + B_5 B_7 + 5B_1 B_7 + B_1 B_5 B_6 + 5B_0 B_6 + B_0 B_5)(kh)^6 + \\ &\quad + (5B_8 - 3B_7 + B_5 B_6 - 3B_1 B_6 + B_1 B_5 - 3B_0)(kh)^4 + (B_6 - 3B_5 + B_1)(kh)^2 + 1 \end{aligned} \quad (3.67)$$

e  $c_4 = \frac{c_4^1}{2c_4^0}$ . Como consequência, o gradiente de empolamento da onda é dado pela fórmula seguinte:

$$\alpha_s = \frac{c_3 - c_2 c_4}{c_1}. \quad (3.68)$$

Na figura 3.6 representa-se o gradiente de empolamento da onda como função de  $kh$  para os modelos 4o-AB ( $\alpha = \bar{\alpha}, \beta_1 = \bar{\beta}_1, \beta_2 = \bar{\beta}_2$ ), 4o-A ( $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$ ), Chen e Liu, Zhao et al. e para o modelo completamente linear.



**Figura 3.6:** Gradiente de empolamento da onda como função de  $kh$  para os modelos completamente linear (C.L.), Chen e Liu, Zhao et al., 4o-AB ( $\alpha = \bar{\alpha}, \beta_1 = \bar{\beta}_1, \beta_2 = \bar{\beta}_2$ ) e 4o-A ( $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$ ).

Referimos que existe uma boa concordância entre as curvas do gradiente de empolamento da onda referentes aos modelos melhorados de quarta ordem, completamente linear e ao modelo de Chen e Liu (1994), para valores pequenos de  $kh$ . Por sua vez, o gradiente de empolamento da onda pode ainda ser melhorado modificando-se os valores de  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . No entanto, neste caso as relações de dispersão lineares iriam piorar quando comparadas com aquelas provenientes da teoria linear de Airy. Contudo, na secção seguinte propõe-se um método para otimizar o gradiente de empolamento da onda sem piorar as características dispersivas.

### 3.2.4.1 Otimização do gradiente de empolamento da onda

O modelo proposto pode ainda ser melhorado, relativamente às características de empolamento da onda, se se considerar uma generalização do potencial auxiliar da velocidade do fluido  $\Phi_\alpha$  introduzido em (3.25). Mais concretamente,  $\Phi_\alpha$  é escrito agora da forma seguinte:

$$\Phi_\alpha = \tilde{\phi}_\alpha + B\mu^4 h^4 \nabla^4 \tilde{\phi}_\alpha + \lambda_s \mu^2 h \nabla h \cdot \nabla \tilde{\phi}_\alpha, \quad (3.69)$$

em que  $\lambda_s$  é um parâmetro livre ( $\lambda_s \in \mathbb{R}$ ) o qual é determinado de modo a melhorar a curva do gradiente de empolamento da onda, quando comparada com aquela proveniente da teoria linear. Salienta-se que (3.69) é igual a (3.25) quando se assume que  $h$  é constante ou  $\lambda_s = 0$ . A introdução deste potencial transformado da velocidade do fluido apenas modifica as equações (3.34b) e (3.34e) do modelo descrito por (3.21) e (3.34). Em particular, a equação (3.34b) rescreve-se da forma seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_h^2(\Phi_\alpha) = & \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} - \mu^2 \alpha \frac{\partial}{\partial t} (h \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha)) + \mu^2 \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (h^2 \nabla^2 \Phi_\alpha) + \\ & + \mu^4 B_0 h^4 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 \Phi_\alpha + \mu^2 \lambda_s \frac{\partial (h \nabla h \cdot \nabla \Phi_\alpha)}{\partial t}, \quad (3.70) \end{aligned}$$

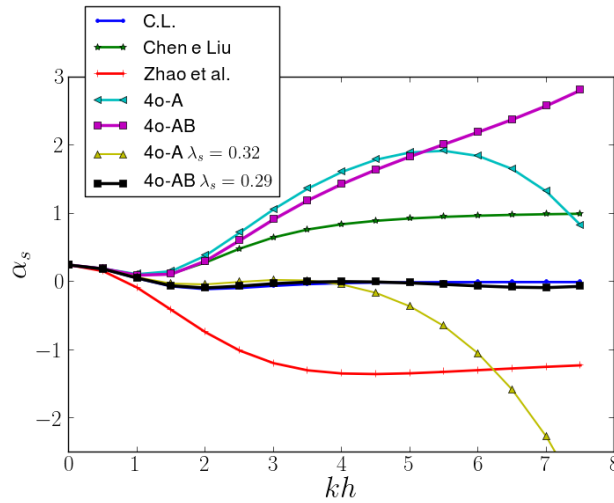
enquanto que (3.34e) é substituída por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^3(\Phi_\alpha) = & \nabla \cdot (h\nabla\Phi_\alpha) - \frac{\mu^2}{6} \nabla \cdot (h^3\nabla^3\Phi_\alpha) + \frac{\mu^2}{2} \nabla \cdot (h^2\nabla^2 \cdot (h\nabla\Phi_\alpha)) + \\ & + \mu^4 h^5 B_2 \nabla^6 \Phi_\alpha - \alpha \mu^2 (1 - \beta_1) \nabla \cdot (h\nabla (h\nabla \cdot (h\nabla\Phi_\alpha))) + \\ & + \frac{\alpha^2}{2} \mu^2 \nabla \cdot (h\nabla (h^2\nabla^2\Phi_\alpha)) + \mu^2 \lambda_s \nabla \cdot (h\nabla (h\nabla h \cdot \nabla\Phi_\alpha)). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Neste contexto, a expressão para o gradiente de empolamento da onda é obtida usando-se um método análogo àquele descrito anteriormente para deduzir a equação (3.68). De facto, este novo problema é descrito pelas equações dadas anteriormente, desde (3.58) a (3.68), com excepção da equação (3.59d) para definir  $d_3^0$ . Mais concretamente,  $d_3^0$  é rescrito agora da forma seguinte:

$$d_3^0 = (\lambda_s - \alpha) h \frac{\omega^2}{g} + 3\alpha\beta_1 h \bar{\omega} + \left( 6(1 - \beta_1)\alpha - \frac{5}{2}\alpha^2 - 2 - \lambda_s \right) h^2 k^2 + 1. \quad (3.72)$$

A introdução deste potencial transformado da velocidade do fluido dado por (3.69) permite uma boa optimização do gradiente de empolamento da onda. Na figura 3.7, mostra-se o gradiente de empolamento da onda como função de  $kh$  para os modelos 4o-AB com  $\alpha = \bar{\alpha}$ ,  $\beta_1 = \bar{\beta}_1$ ,  $\beta_2 = \bar{\beta}_2$  e  $\lambda_s = 0$  assim como para  $\alpha = \bar{\alpha}$ ,  $\beta_1 = \bar{\beta}_1$ ,  $\beta_2 = \bar{\beta}_2$  e  $\lambda_s = 0.29$ , 4o-A com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$  e  $\lambda_s = 0$  e também bem com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$  e  $\lambda_s = 0.32$ , Chen e Liu, Zhao et al. assim como para o modelo completamente linear (C.L.). Finalizamos esta subsecção



**Figura 3.7:** Gradiente de empolamento da onda como função de  $kh$  para os modelos 4o-AB com  $\alpha = \bar{\alpha}$ ,  $\beta_1 = \bar{\beta}_1$ ,  $\beta_2 = \bar{\beta}_2$  e  $\lambda_s = 0$  assim como para  $\alpha = \bar{\alpha}$ ,  $\beta_1 = \bar{\beta}_1$ ,  $\beta_2 = \bar{\beta}_2$  e  $\lambda_s = 0.29$ , 4o-A com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$  e  $\lambda_s = 0$  e também com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$  e  $\lambda_s = 0.32$ , Chen e Liu, Zhao et al. assim como para o modelo completamente linear (C.L.).

referindo que existe uma boa concordância para os gradientes de empolamento da onda entre o modelo 4o-AB com  $\lambda_s = 0.29$  e o modelo completamente linear para valores de  $kh \in [0, 8]$ . Por sua vez, os gradientes de empolamento da onda para o modelo 4o-AB com  $\lambda_s = 0$  e para o modelo completamente linear só são concordantes para valores de  $kh \in [0, 1]$ . Planeia-se num futuro próximo implementar numericamente o modelo proposto utilizando-se o potencial transformado da velocidade do fluido definido por (3.69).

### 3.2.5 Condições de fronteira

Alguns dos mecanismos físicos são aqui descritos para induzir ondas marítimas de superfície, fenómenos de reflexão de ondas bem como efeitos de absorção da energia das ondas. Note-se que a geração de ondas através da movimentação do fundo da região ocupado pelo fluido é apropriada para a modelação de ondas marítimas de superfície geradas por actividades sísmicas. No entanto, outras aplicações da Física estão associadas a outros mecanismos de geração de ondas.

Uma das formas mais simples de induzir uma onda, consiste na imposição de uma condição inicial apropriada. Esta forma de geração de onda é habitualmente designada de geração passiva. Este caso é apresentado no primeiro teste numérico (ver subsecção 3.4.1).

A indução de um grupo de ondas pode ser também induzida através de uma condição de fronteira dependente do tempo. Neste caso, a elevação da superfície da onda bem como o potencial da velocidade do fluido devem satisfazer condições de fronteira apropriadas, e.g., condições de Dirichlet ou de Neumann (ver, e.g., a subsecção 2.9.3). Neste capítulo não usamos este método. Contudo, no programa DOLFWAVE podem ser encontrados vários exemplos usando este método de indução de ondas.

Para além das condições de fronteira para a onda incidente, onde os perfis das ondas são conhecidos, precisamos de condições de fronteira apropriadas para que o problema possa ficar bem posto. Denotemos por  $\Gamma$  a fronteira de  $\Omega$  e por  $\Gamma_r$  o subconjunto de  $\Gamma$  onde são consideradas as fronteiras reflexivas.

Consideram-se mais dois tipos de fronteiras:

- i)* fronteiras totalmente reflexivas;
- ii)* camadas de esponja.

O primeiro caso é modelado pelas equações seguintes:

$$\begin{cases} \nabla^{2n-1}\Phi_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0, \forall n = 1, 2 \\ \nabla\eta \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_r \quad (3.73)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vector unitário normal a  $\Gamma$  e dirigido para o exterior de  $\Omega$  (ver Engsig-Karup et al. (2008)). Também assumimos a condição seguinte:

$$\nabla^3\eta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.74)$$

se  $\beta_i \neq 0$  ( $i = 1, 2$ ). Esta última equação surge da formulação variacional do problema como uma condição de fronteira natural.

No segundo caso, usando-se uma camada artificial extra, habitualmente designada por camada de esponja ou por camada de absorção, podemos simular fronteiras parcialmente reflexivas ou absorventes. Desta forma, a energia das ondas reflectidas poderá ser controlada. Assim, o efeito das reflexões das ondas nas fronteiras pode ser minimizado e evitar-se também interacções complexas entre ondas incidentes e reflectidas. A dissipação da energia associada ao rebentamento das ondas é também possível de ser simulada.

## 3.3 Método numérico

### 3.3.1 Um esquema C/DG-FEM para um modelo de Boussinesq de quarta ordem

Nesta subsecção, introduzimos um método de elementos finitos contínuos/descontínuos, com termos de penalização, para o modelo de Boussinesq 4o-AB com derivadas de quarta ordem

com respeito às variáveis espaciais. Este modelo é descrito pelas equações (3.21), (3.34), (3.38) e (3.39). Note-se que todos os modelos de quarta ordem atrás mencionados podem ser obtidos a partir do modelo 4o-AB através de uma escolha apropriada dos parâmetros introduzidos nestas equações. Planeia-se num futuro próximo implementar numericamente os modelos compostos por equações de sexta ordem com respeito às variáveis espaciais, usando-se um método do tipo C/DG-FEM.

O nosso esquema numérico surge dos conceitos introduzidos por Engel et al. (2002) para os modelos elípticos com derivadas de quarta ordem com respeito às variáveis espaciais. Estes modelos elípticos são utilizados em problemas de estruturas da Mecânica dos Meios Contínuos. No que segue, apenas consideramos condições de fronteira reflexivas, i.e., do tipo Neumann.

Com vista à implementação do método dos elementos finitos contínuos/descontínuos com termos de penalização, definimos o espaço de dimensão finita das funções incógnita e das funções teste da forma seguinte:

$$\mathcal{A}^h = \mathcal{B}^h = \mathcal{V}^h = \{\vartheta^h \in H^1(\Omega) : \vartheta^h|_{\Omega_e} \in \mathcal{P}_2(\Omega_e), \quad \forall \Omega_e \in \mathcal{P}(\Omega)\}, \quad (3.75)$$

onde  $\mathcal{P}(\Omega) = \{\Omega_e\}_{e=1}^{N_e}$  é uma partição regular composta por elementos triangulares do domínio poligonal  $\Omega$  em  $N_e$  elementos  $\Omega_e$ . Por sua vez,  $\mathcal{P}_2(\Omega_e)$  é o espaço de dimensão finita de todos os polinómios de grau menor ou igual a 2 definidos sobre  $\Omega_e$ . O método que propomos para a resolução do problema descrito por (3.21), (3.34), (3.38) e (3.39) pode ser escrito como segue. Para cada  $t$ , determinar  $(\eta^h, \Phi_\alpha^h) \in \mathcal{A}^h \times \mathcal{B}^h$  tal que

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1(\eta_t^h, \vartheta_1^h) = \mathbf{L}_1(\eta^h, \Phi_\alpha^h, \vartheta_1^h), \\ \mathbf{a}_2(\Phi_{\alpha,t}^h, \vartheta_2^h) = \mathbf{L}_2(\Phi_\alpha^h, \eta^h, \vartheta_2^h), \end{cases} \quad \forall \vartheta_1^h, \vartheta_2^h \in \mathcal{V}^h \quad (3.76)$$

onde  $\mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{L}_i$  ( $i = 1, 2$ ) são obtidos a partir da formulação variacional do problema e em que o índice  $t$  denota a derivada de primeira ordem com respeito à variável temporal da função em causa. Nas próximas equações utiliza-se a notação seguinte:

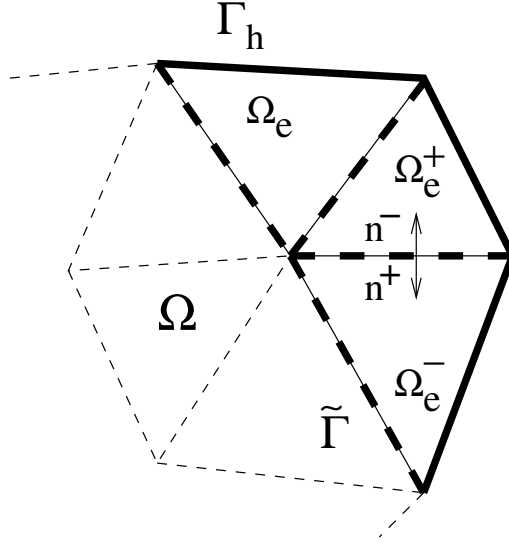
$$(\cdot, \cdot)_{\tilde{\Omega}} = \sum_{e=1}^{N_e} (\cdot, \cdot)_{\Omega_e}, \quad (\cdot, \cdot)_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{j=1}^{N_i} (\cdot, \cdot)_{\tilde{\Gamma}_j}, \quad (\cdot, \cdot)_{\Gamma_h} = \sum_{j=1}^{N_h} (\cdot, \cdot)_{\Gamma_j}, \quad (3.77)$$

com  $N_i$  o número de arestas interiores ao domínio,  $N_h$  o número de arestas na fronteira do domínio e  $(\cdot, \cdot)_{\tilde{\Omega}}$  representa o produto interno de  $L^2$  nos interiores dos elementos. Por outro lado,  $(\cdot, \cdot)_{\tilde{\Gamma}}$  representa o produto interno de  $L^2$  sobre as arestas interiores ao domínio. Para além disto, o produto interno de  $L^2$  sobre as arestas da fronteira do domínio é representado por  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_h}$ .

O operador do salto  $[\cdot]$  é definido por  $[\mathbf{v}] = \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n}^-$ , em que  $\mathbf{v}$  é uma função vectorial e  $\mathbf{v}^+$  assim como  $\mathbf{v}^-$  são os valores de  $\mathbf{v}$  vistos a partir de  $\Omega_e^+$  e  $\Omega_e^-$ , respectivamente. Aqui,  $\mathbf{n}^+$  e  $\mathbf{n}^-$  denotam os vectores unitários e normais a cada aresta, os quais são dirigidos para o exterior de  $\Omega_e^+$  e  $\Omega_e^-$ , respectivamente (ver figura 3.8). De forma análoga, o operador da média  $\langle \cdot \rangle$  é definido sobre as arestas da interface entre elementos por  $\langle v \rangle = \frac{1}{2}(v^+ + v^-)$  em que  $v$  é uma função escalar. Os termos de penalização, quer nas arestas interiores, quer nas arestas da fronteira do domínio computacional, estão associados aos parâmetros

$$\bar{\tau}_i = \frac{\tau_i}{h_e^+}, \quad \bar{\tau}_i^h = \frac{\tau_i^h}{h_e} \quad (i = 1, 2), \quad (3.78)$$

respectivamente. Em (3.78),  $h_e^+$  e  $h_e$  são funções que dependem do diâmetro dos elementos  $\Omega_e^+$  e  $\Omega_e$ , respectivamente. Nos exemplos numéricos, considera-se  $\tau_i = \tau_i^h = \tau$  ( $i = 1, 2$ ) sobre todos os elementos.



**Figura 3.8:** Um esboço de uma parte do domínio poligonal  $\Omega$ , dos interiores dos elementos  $\Omega_e$ , das arestas da interface  $\tilde{\Gamma}$  (linha tracejada) e da fronteira do domínio  $\Gamma_h$  (linha sólida).

As formas  $\mathbf{a}_i$  e  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(\eta_t^h, \vartheta_1^h) &= (\eta_t^h, \vartheta_1^h)_{\tilde{\Omega}} - \alpha\beta_1 (h\nabla h \eta_t^h, \nabla \vartheta_1^h)_{\tilde{\Omega}} - \alpha\beta_1 (h^2 \nabla \eta_t^h, \nabla \vartheta_1^h)_{\tilde{\Omega}} + \\ &+ \alpha^2 \beta_1 (h^4 \nabla^2 \eta_t^h, \nabla^2 \vartheta_1^h)_{\tilde{\Omega}} - q_1 \alpha^2 \beta_1 F_a(\eta_t^h, \vartheta_1^h) - q_2 \alpha^2 \beta_1 F_a(\vartheta_1^h, \eta_t^h) + \\ &+ \bar{\tau}_1 \left( [\nabla \eta_t^h], [\nabla \vartheta_1^h] \right)_{\tilde{\Gamma}} + \bar{\tau}_1^h (\nabla \eta_t^h \cdot \mathbf{n}, \nabla \vartheta_1^h \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_h}, \quad (3.79) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(\eta^h, \Phi_\alpha^h, \vartheta_1^h) &= -\nu_1 (\nabla \eta^h, \nabla \vartheta_1^h)_{\tilde{\Omega}} - \alpha (h \eta^h \nabla h_t, \nabla \vartheta_1^h)_{\tilde{\Omega}} + \alpha \beta_1 \nu_1 (h^2 \nabla^2 \eta^h, \nabla^2 \vartheta_1^h)_{\tilde{\Omega}} + \\ &+ (h \nabla \Phi_\alpha^h, \nabla \vartheta_1^h)_{\tilde{\Omega}} + \frac{1}{6} (\nabla^2 \Phi_\alpha^h, \nabla \cdot (h^3 \nabla \vartheta_1^h))_{\tilde{\Omega}} - \frac{1}{2} (\nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha^h), \nabla \cdot (h^2 \nabla \vartheta_1^h))_{\tilde{\Omega}} + \\ &+ \alpha(1 - \beta_1) (h \nabla \cdot (h \nabla \Phi_\alpha^h), \nabla \cdot (h \nabla \vartheta_1^h))_{\tilde{\Omega}} - \frac{\alpha^2}{2} (h^2 \nabla^2 \Phi_\alpha^h, \nabla \cdot (h \nabla \vartheta_1^h))_{\tilde{\Omega}} + \\ &+ (\eta^h \nabla \Phi_\alpha^h, \nabla \vartheta_1^h)_{\tilde{\Omega}} - B_1 (h^2 \nabla^2 \Phi_\alpha^h, \nabla \cdot (\eta^h \nabla \vartheta_1^h))_{\tilde{\Omega}} - \alpha \beta_1 (h^2 \nabla \cdot (\eta^h \nabla \Phi_\alpha^h), \nabla^2 \vartheta_1^h)_{\tilde{\Omega}} + \\ &+ (S_1(h), \vartheta_1^h)_{\tilde{\Omega}} + q_1 F_L^{11}(\eta^h, \vartheta_1^h) + q_1 F_L^{12}(\Phi_\alpha^h, \vartheta_1^h) + q_2 F_L^{11}(\vartheta_1^h, \eta^h) + q_2 F_L^{12}(\vartheta_1^h, \Phi_\alpha^h), \quad (3.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2(\Phi_{\alpha,t}^h, \vartheta_2^h) &= (\Phi_{\alpha,t}^h, \vartheta_2^h)_{\tilde{\Omega}} + (\alpha - \alpha^2) (h \nabla \Phi_{\alpha,t}^h, \nabla h \vartheta_2^h)_{\tilde{\Omega}} - B_1 (h \nabla \Phi_{\alpha,t}^h, h \nabla \vartheta_2^h)_{\tilde{\Omega}} + \\ &+ B_0 (h^4 \nabla^2 \Phi_{\alpha,t}^h, \nabla^2 \vartheta_2^h)_{\tilde{\Omega}} - q_1 B_0 F_a(\Phi_{\alpha,t}^h, \vartheta_2^h) - q_2 B_0 F_a(\vartheta_2^h, \Phi_{\alpha,t}^h) + \\ &+ \bar{\tau}_2 \left( [\nabla \Phi_{\alpha,t}^h], [\nabla \vartheta_2^h] \right)_{\tilde{\Gamma}} + \bar{\tau}_2^h (\nabla \Phi_{\alpha,t}^h \cdot \mathbf{n}, \nabla \vartheta_2^h \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_h}, \quad (3.81) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L_2 \left( \Phi_\alpha^h, \eta^h, \vartheta_2^h \right) &= \alpha \left( h \nabla \Phi_\alpha^h \nabla h_t, \vartheta_2^h \right)_{\tilde{\Omega}} - \nu_2 \left( \nabla \Phi_\alpha^h, \nabla \vartheta_2^h \right)_{\tilde{\Omega}} + \nu_2 B_1 \left( h^2 \nabla^2 \Phi_\alpha^h, \nabla^2 \vartheta_2^h \right)_{\tilde{\Omega}} + \\
&\quad + \left( h \nabla \Phi_\alpha^h, \nabla \left( h_t \vartheta_2^h \right) \right)_{\tilde{\Omega}} - g \left( \eta^h, \vartheta_2^h \right)_{\tilde{\Omega}} + \left( \eta^h h_{tt}, \vartheta_2 \right)_{\tilde{\Omega}} - \\
&\quad - g \frac{\beta_2}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) \left( h^4 \nabla^2 \eta^h, \nabla^2 \vartheta_2^h \right)_{\tilde{\Omega}} - \frac{1}{2} \left( \left| \nabla \Phi_\alpha^h \right|^2, \vartheta_2^h \right)_{\tilde{\Omega}} - \frac{1}{2} \left( h^2 \left( \nabla^2 \Phi_\alpha^h \right)^2, \vartheta_2^h \right)_{\tilde{\Omega}} + \\
&\quad + B_1 \left( h^2 \nabla^2 \Phi_\alpha^h, \nabla \cdot \left( \nabla \Phi_\alpha^h \vartheta_2^h \right) \right)_{\tilde{\Omega}} + g \left( h \nabla \eta^h, \nabla \left( \eta^h \vartheta_2^h \right) \right)_{\tilde{\Omega}} - \alpha \left( h \nabla \Phi_\alpha^h, \nabla \left( h_t \vartheta_2^h \right) \right)_{\tilde{\Omega}} - \\
&\quad - \alpha \left( h_t \nabla \Phi_\alpha^h, \nabla \left( h \vartheta_2^h \right) \right)_{\tilde{\Omega}} + \alpha^2 \left( \nabla \Phi_\alpha^h, \nabla \left( h h_t \vartheta_2^h \right) \right)_{\tilde{\Omega}} + \\
&\quad + \left( S_2(h), \vartheta_2^h \right)_{\tilde{\Omega}} + q_1 F_L^{21}(\Phi_\alpha^h, \vartheta_2^h) + q_1 F_L^{22}(\eta^h, \vartheta_2^h) + q_2 F_L^{21}(\vartheta_2^h, \Phi_\alpha^h) + q_2 F_L^{22}(\vartheta_2^h, \eta^h),
\end{aligned} \tag{3.82}$$

onde  $q_1$  e  $q_2$  são factores de peso e as funções  $F_a(f_1, f_2)$  e  $F_L^{ij}(f_1, f_2)$  ( $i, j \in 1, 2$ ) são definidas para duas funções arbitrárias  $f_1$  e  $f_2$  como segue:

$$F_a(f_1, f_2) = \left[ \left( h^4 \langle \nabla^2 f_1 \rangle, [\nabla f_2] \right)_{\tilde{\Gamma}} + \left( h^4 \nabla^2 f_1, \nabla f_2 \cdot \mathbf{n} \right)_{\Gamma_h} \right], \tag{3.83}$$

$$F_L^{11}(f_1, f_2) = -\alpha \beta_1 \nu_1 \left[ \left( h^2 \langle \nabla^2 f_1 \rangle, [\nabla f_2] \right)_{\tilde{\Gamma}} + \left( h^2 \nabla^2 f_1, \nabla f_2 \cdot \mathbf{n} \right)_{\Gamma_h} \right], \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}
F_L^{12}(f_1, f_2) &= \alpha \beta_1 \left[ \left( h^2 \langle \nabla \cdot \left( \eta^h \nabla f_1 \right) \rangle, [\nabla f_2] \right)_{\tilde{\Gamma}} + \left( h^2 \nabla \cdot \left( \eta^h \nabla f_1 \right), \nabla f_2 \cdot \mathbf{n} \right)_{\Gamma_h} \right] + \\
&\quad + \left( \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6} \right) \left[ \left( h^3 \langle \nabla^2 f_1 \rangle, [\nabla f_2] \right)_{\tilde{\Gamma}} + \left( h^3 \nabla^2 f_1, \nabla f_2 \cdot \mathbf{n} \right)_{\Gamma_h} \right] + \\
&\quad + B_1 \left[ \left( h^2 \langle \nabla^2 f_1 \rangle, [\eta^h \nabla f_2] \right)_{\tilde{\Gamma}} + \left( h^2 \nabla^2 f_1, \eta^h \nabla f_2 \cdot \mathbf{n} \right)_{\Gamma_h} \right] + \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} - \alpha(1 - \beta_1) \right) \left[ \left( \langle \nabla \cdot \left( h \nabla f_1 \right) \rangle, [h^2 \nabla f_2] \right)_{\tilde{\Gamma}} + \left( \nabla \cdot \left( h \nabla f_1 \right), h^2 \nabla f_2 \cdot \mathbf{n} \right)_{\Gamma_h} \right],
\end{aligned} \tag{3.85}$$

$$F_L^{21}(f_1, f_2) = -\nu_2 B_1 \left[ \left( h^2 \langle \nabla^2 f_1 \rangle, [\nabla f_2] \right)_{\tilde{\Gamma}} + \left( h^2 \nabla^2 f_1, \nabla f_2 \cdot \mathbf{n} \right)_{\Gamma_h} \right] \tag{3.86}$$

e

$$F_L^{22}(f_1, f_2) = g \frac{\beta_2}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) \left[ \left( h^4 \langle \nabla^2 f_1 \rangle, [\nabla f_2] \right)_{\tilde{\Gamma}} + \left( h^4 \nabla^2 f_1, \nabla f_2 \cdot \mathbf{n} \right)_{\Gamma_h} \right]. \tag{3.87}$$

Note-se que as condições de fronteira definidas por (3.73) e (3.74) são consideradas.

No caso das funções base do espaço das funções incógnita e funções teste serem suficientemente suaves, e.g., de classe  $C^2([0, T]; \Omega)$  com  $T$  o limite superior para a variável temporal, então todos os termos avaliados sobre as arestas são nulos. Neste caso, resulta uma formulação de elementos finitos convencional.

Um esquema de predição-correcção, inicializado por um método explícito de Runge-Kutta, é utilizado para a integração no tempo de (3.76). A discretização das equações (3.76) pode ser escrita na forma seguinte:

$$M(t)U_t = \mathbf{F}(t, U), \tag{3.88}$$

onde  $U_t$  e  $U$  referem-se a  $(\eta_t^h, \Phi_{\alpha,t}^h)$  e a  $(\eta^h, \Phi_\alpha^h)$ , respectivamente. A matriz dos coeficientes  $M(t) = M(h(t))$  é dada pelos primeiros membros de (3.76). Por outro lado, o termo

independente  $\mathbf{F}$  está relacionado com os segundos membros das mesmas equações. Desta forma, o método de quarta ordem de Adams-Bashforth-Moulton (ver, e.g., Lambert (1991)) pode escrever-se da forma seguinte:

$$M_{n+1}U_{n+1}^{(0)} = M_{n+1}U_n + \frac{\Delta t}{24}[55\mathbf{F}(t_n, U_n) - 59\mathbf{F}(t_{n-1}, U_{n-1}) + 37\mathbf{F}(t_{n-2}, U_{n-2}) - 9\mathbf{F}(t_{n-3}, U_{n-3})], \quad (3.89a)$$

$$M_{n+1}U_{n+1}^{(1)} = M_{n+1}U_n + \frac{\Delta t}{24}[9\mathbf{F}(t_{n+1}, U_{n+1}^{(0)}) + 19\mathbf{F}(t_n, U_n) - 5\mathbf{F}(t_{n-1}, U_{n-1}) + \mathbf{F}(t_{n-2}, U_{n-2})], \quad (3.89b)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo,  $t_n = n\Delta t$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) e  $U_n$  é  $U$  avaliado em  $t_n$ . Os valores preditos e corrigidos de  $U_n$  são denotados por  $U_n^{(0)}$  e  $U_n^{(1)}$ , respectivamente. A equação respeitante ao passo de correcção (3.89b) pode ser iterada, de forma a que seja satisfeito um erro predefinido entre passos de tempo consecutivos <sup>3</sup>.

O modelo numérico apresentado é denotado por 4o-M-CDG-P2, o qual significa modelo moderadamente não linear de quarta ordem, discretizado por um método de elementos finitos do tipo C/DG-FEM com termos de penalização e usando elementos de Lagrange  $P_2$ .

Vários conjuntos de equações estão já numericamente implementados no código DOLFWAVE, usando-se diferentes métodos de elementos finitos. No capítulo 2, o modelo fracamente não linear de segunda ordem de Zhao et al. (2004) foi otimizado de forma a ser incorporada a geração de onda por meio de um movimento do fundo impermeável da região ocupada pelo fluido. Para discretizar essas equações usámos um método de Galerkin convencional utilizando-se elementos finitos triangulares e contínuos (CG-FEM) de Lagrange  $P_1$  e  $P_2$ . Estes modelos são denotados aqui por 2o-ZTC-P1 e 2o-ZTC-P2.

As formas fracamente não lineares dos modelos de segunda e quarta ordem aqui apresentados são também consideradas. Estes modelos são designados por 2o-W-CG-P1, 2o-W-DG-P1, 2o-W-CG-P2 e 4o-W-CDG-P2. Em todos estes casos, apenas consideramos termos não lineares de ordem  $O(\varepsilon)$ . Estes modelos são deduzidos usando-se os métodos mencionados nas secções anteriores. Note-se que o modelo de segunda ordem proposto tem algumas propriedades dispersivas do modelo de quarta ordem. Isto deve-se à inclusão de um termo extra de ordem  $O(\mu^4)$  no desenvolvimento assintótico do potencial da velocidade do fluido. Os modelos 2o-W-CG-P1 e 2o-W-CG-P2 são discretizados através de elementos contínuos de Lagrange  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. Para além disto, o modelo 2o-W-DG-P1 é discretizado recorrendo a elementos finitos descontínuos de Lagrange  $P_1$  com termos de penalização (ver, e.g., Brenner e Scott (2008)). O mesmo esquema de predição-correcção, referido anteriormente, é considerado em todos estes casos.

### 3.3.2 Consistência da relação de dispersão e condição do tipo CFL

Aqui, apresentamos alguns resultados sobre a consistência da relação de dispersão e a estabilidade do método numérico, com respeito às equações linearizadas a uma dimensão horizontal e assumindo-se um fundo constante da região ocupada pelo fluido.

Consideram-se soluções com variáveis separáveis da forma

$$\eta(x, t) = ae^{i(kx - \omega t)}, \quad \Phi_\alpha(x, t) = be^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.90)$$

<sup>3</sup>Note-se que no método descrito pelas equações (2.29), a matriz  $M$  não é dependente do tempo.

onde  $a$  é a amplitude da onda,  $b$  uma constante relacionada com a magnitude do potencial da velocidade do fluido e  $\omega$  denota a frequência angular que pode tomar valores reais ou complexos. Nas equações linearizadas esta separação de variáveis (ver (3.90)) resulta na substituição de  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$  por  $-i\omega\eta$  e  $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t}$  por  $-i\omega\Phi_\alpha$ . Substituindo-se  $\eta$  e  $\Phi_\alpha$  em (3.76) pelas suas aproximações de elementos finitos  $\hat{\eta}$  e  $\hat{\Phi}_\alpha$ , respectivamente, obtém-se o sistema seguinte:

$$(\mathcal{K} + i\omega\mathcal{M})U = 0, \quad (3.91)$$

onde  $\mathcal{K}$  é a matriz de rigidez relacionada com os segundos membros das equações (3.76) e  $\mathcal{M}$  é a matriz de massa dada pelos primeiros membros das mesmas equações. Note-se que para um fundo constante e impermeável  $z = -h$  da região ocupada pelo fluido assim como para uma malha uniforme então (3.91) escreve-se da forma que segue:

$$-i\omega \left( \bar{\Upsilon}_{(1,j)}^\eta \hat{\eta}_1 + \bar{\Upsilon}_{(\frac{3}{2},j)}^\eta \hat{\eta}_{\frac{3}{2}} + \bar{\Upsilon}_{(2,j)}^\eta \hat{\eta}_2 \right) = \Upsilon_{(1,j)}^\eta \hat{\Phi}_1 + \Upsilon_{(\frac{3}{2},j)}^\eta \hat{\Phi}_{\frac{3}{2}} + \Upsilon_{(2,j)}^\eta \hat{\Phi}_2, \quad (3.92a)$$

$$-i\frac{\omega}{g} \left( \bar{\Upsilon}_{(1,j)}^\Phi \hat{\Phi}_1 + \bar{\Upsilon}_{(\frac{3}{2},j)}^\Phi \hat{\Phi}_{\frac{3}{2}} + \bar{\Upsilon}_{(2,j)}^\Phi \hat{\Phi}_2 \right) = \Upsilon_{(1,j)}^\Phi \hat{\eta}_1 + \Upsilon_{(\frac{3}{2},j)}^\Phi \hat{\eta}_{\frac{3}{2}} + \Upsilon_{(2,j)}^\Phi \hat{\eta}_2, \quad (3.92b)$$

com  $j \in \{1, \frac{3}{2}\}$ ;

$$\begin{aligned} -i\omega \left( \bar{\Upsilon}_{(l-1,j)}^\eta \hat{\eta}_{l-1} + \bar{\Upsilon}_{(l-\frac{1}{2},j)}^\eta \hat{\eta}_{l-\frac{1}{2}} + \bar{\Upsilon}_{(l,j)}^\eta \hat{\eta}_l + \bar{\Upsilon}_{(l+\frac{1}{2},j)}^\eta \hat{\eta}_{l+\frac{1}{2}} + \bar{\Upsilon}_{(l+1,j)}^\eta \hat{\eta}_{l+1} \right) = \\ = \Upsilon_{(l-1,j)}^\eta \hat{\Phi}_{l-1} + \Upsilon_{(l-\frac{1}{2},j)}^\eta \hat{\Phi}_{l-\frac{1}{2}} + \Upsilon_{(l,j)}^\eta \hat{\Phi}_l + \Upsilon_{(l+\frac{1}{2},j)}^\eta \hat{\Phi}_{l+\frac{1}{2}} + \Upsilon_{(l+1,j)}^\eta \hat{\Phi}_{l+1}, \end{aligned} \quad (3.93a)$$

$$\begin{aligned} -i\frac{\omega}{g} \left( \bar{\Upsilon}_{(l-1,j)}^\Phi \hat{\Phi}_{l-1} + \bar{\Upsilon}_{(l-\frac{1}{2},j)}^\Phi \hat{\Phi}_{l-\frac{1}{2}} + \bar{\Upsilon}_{(l,j)}^\Phi \hat{\Phi}_l + \bar{\Upsilon}_{(l+\frac{1}{2},j)}^\Phi \hat{\Phi}_{l+\frac{1}{2}} + \bar{\Upsilon}_{(l+1,j)}^\Phi \hat{\Phi}_{l+1} \right) = \\ = \Upsilon_{(l-1,j)}^\Phi \hat{\eta}_{l-1} + \Upsilon_{(l-\frac{1}{2},j)}^\Phi \hat{\eta}_{l-\frac{1}{2}} + \Upsilon_{(l,j)}^\Phi \hat{\eta}_l + \Upsilon_{(l+\frac{1}{2},j)}^\Phi \hat{\eta}_{l+\frac{1}{2}} + \Upsilon_{(l+1,j)}^\Phi \hat{\eta}_{l+1}, \end{aligned} \quad (3.93b)$$

em que  $j \in \{l - \frac{1}{2}, l, l + \frac{1}{2}\}$  e  $l \in \{2, \dots, N - 1\}$ ;

$$-i\omega \left( \bar{\Upsilon}_{(N-1,j)}^\eta \hat{\eta}_{N-1} + \bar{\Upsilon}_{(N-\frac{1}{2},j)}^\eta \hat{\eta}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{\Upsilon}_{(N,j)}^\eta \hat{\eta}_N \right) = \quad (3.94a)$$

$$= \Upsilon_{(N-1,j)}^\eta \hat{\Phi}_{N-1} + \Upsilon_{(N-\frac{1}{2},j)}^\eta \hat{\Phi}_{N-\frac{1}{2}} + \Upsilon_{(N,j)}^\eta \hat{\Phi}_N, \quad (3.94b)$$

$$\begin{aligned} -i\frac{\omega}{g} \left( \bar{\Upsilon}_{(N-1,j)}^\Phi \hat{\Phi}_{N-1} + \bar{\Upsilon}_{(N-\frac{1}{2},j)}^\Phi \hat{\Phi}_{N-\frac{1}{2}} + \bar{\Upsilon}_{(N,j)}^\Phi \hat{\Phi}_N \right) = \\ = \Upsilon_{(N-1,j)}^\Phi \hat{\eta}_{N-1} + \Upsilon_{(N-\frac{1}{2},j)}^\Phi \hat{\eta}_{N-\frac{1}{2}} + \Upsilon_{(N,j)}^\Phi \hat{\eta}_N, \end{aligned} \quad (3.94c)$$

onde  $j \in \{N - \frac{1}{2}, N\}$  e  $\hat{\eta}_j$  assim como  $\hat{\Phi}_j$  denotam  $\hat{\eta}(x_j)$  e  $\hat{\Phi}(x_j)$  ( $j \in \{1, \frac{3}{2}, \dots, N - \frac{1}{2}, N\}$ ), respectivamente. Note-se que os índices fraccionários estão associados aos nós intermédios dos

elementos  $P_2$ . Os coeficientes  $\Upsilon_{(\cdot,\cdot)}^{(*)}$  e  $\bar{\Upsilon}_{(\cdot,\cdot)}^{(*)}$  são dados pelas expressões seguintes:

$$\bar{\Upsilon}_{(1,1)}^\eta = \bar{\Upsilon}_{(N,N)}^\eta = \frac{2\Delta x}{15} - \frac{7B_6h^2}{3\Delta x} + \frac{16B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{6q_1B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{6q_2B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{9\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.95a)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(2,1)}^\eta = \bar{\Upsilon}_{(N-1,N)}^\eta = -\frac{\Delta x}{30} - \frac{B_6h^2}{3\Delta x} + \frac{16B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{6q_1B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{2q_2B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{3\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.95b)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(\frac{3}{2},1)}^\eta = \bar{\Upsilon}_{(N-\frac{1}{2},N)}^\eta = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_6h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{12q_1B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{8q_2B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{12\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.95c)$$

$$\Upsilon_{(1,1)}^\eta = \Upsilon_{(N,N)}^\eta = \frac{7h}{3\Delta x} - \frac{16B_5h^3}{\Delta x^3} + \frac{6q_1B_5h^3}{\Delta x^3} + \frac{6q_2B_5h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.95d)$$

$$\Upsilon_{(2,1)}^\eta = \Upsilon_{(N-1,N)}^\eta = \frac{h}{3\Delta x} - \frac{16B_5h^3}{\Delta x^3} + \frac{6q_1B_5h^3}{\Delta x^3} + \frac{2q_2B_5h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.95e)$$

$$\Upsilon_{(\frac{3}{2},1)}^\eta = \Upsilon_{(N-\frac{1}{2},N)}^\eta = -\frac{8h}{3\Delta x} + \frac{32B_5h^3}{\Delta x^3} - \frac{12q_1B_5h^3}{\Delta x^3} - \frac{8q_2B_5h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.95f)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(1,\frac{3}{2})}^\eta = \bar{\Upsilon}_{(N,N-\frac{1}{2})}^\eta = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_6h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{8q_1B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{12q_2B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{12\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.96a)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(2,\frac{3}{2})}^\eta = \bar{\Upsilon}_{(N-1,N-\frac{1}{2})}^\eta = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_6h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{8q_1B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{4q_2B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{4\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.96b)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}^\eta = \bar{\Upsilon}_{(N-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2})}^\eta = \frac{8\Delta x}{15} - \frac{16B_6h^2}{3\Delta x} + \frac{64B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_1B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_2B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{16\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.96c)$$

$$\Upsilon_{(1,\frac{3}{2})}^\eta = \Upsilon_{(N,N-\frac{1}{2})}^\eta = -\frac{8h}{3\Delta x} + \frac{32B_5h^3}{\Delta x^3} - \frac{8q_1B_5h^3}{\Delta x^3} - \frac{12q_2B_5h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.96d)$$

$$\Upsilon_{(2,\frac{3}{2})}^\eta = \Upsilon_{(N-1,N-\frac{1}{2})}^\eta = -\frac{8h}{3\Delta x} + \frac{32B_5h^3}{\Delta x^3} - \frac{8q_1B_5h^3}{\Delta x^3} - \frac{4q_2B_5h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.96e)$$

$$\Upsilon_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}^\eta = \Upsilon_{(N-\frac{1}{2},N-\frac{1}{2})}^\eta = \frac{16h}{3\Delta x} - \frac{64B_5h^3}{\Delta x^3} + \frac{16q_1B_5h^3}{\Delta x^3} + \frac{16q_2B_5h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.96f)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(1,1)}^\Phi = \bar{\Upsilon}_{(N,N)}^\Phi = \frac{2\Delta x}{15} - \frac{7B_1h^2}{3\Delta x} + \frac{16B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{6q_1B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{6q_2B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{9\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.97a)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(2,1)}^\Phi = \bar{\Upsilon}_{(N-1,N)}^\Phi = -\frac{\Delta x}{30} - \frac{B_1h^2}{3\Delta x} + \frac{16B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{6q_1B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{2q_2B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{3\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.97b)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(\frac{3}{2},1)}^\Phi = \bar{\Upsilon}_{(N-\frac{1}{2},N)}^\Phi = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_1h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{12q_1B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{8q_2B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{12\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.97c)$$

$$\Upsilon_{(1,1)}^\Phi = \Upsilon_{(N,N)}^\Phi = -\frac{2\Delta x}{15} - \frac{16B_8h^4}{\Delta x^3} + \frac{6q_1B_8h^4}{\Delta x^3} + \frac{6q_2B_8h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.97d)$$

$$\Upsilon_{(2,1)}^\Phi = \Upsilon_{(N-1,N)}^\Phi = \frac{\Delta x}{30} - \frac{16B_8h^4}{\Delta x^3} + \frac{6q_1B_8h^4}{\Delta x^3} + \frac{2q_2B_8h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.97e)$$

$$\Upsilon_{(\frac{3}{2},1)}^\Phi = \Upsilon_{(N-\frac{1}{2},N)}^\Phi = -\frac{\Delta x}{15} + \frac{32B_8h^4}{\Delta x^3} - \frac{12q_1B_8h^4}{\Delta x^3} - \frac{8q_2B_8h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.97f)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(1, \frac{3}{2})}^{\Phi} = \bar{\Upsilon}_{(N, N-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_1 h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_0 h^4}{\Delta x^3} + \frac{8q_1 B_0 h^4}{\Delta x^3} + \frac{12q_2 B_0 h^4}{\Delta x^3} - \frac{12\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.98a)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(2, \frac{3}{2})}^{\Phi} = \bar{\Upsilon}_{(N-1, N-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_1 h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_0 h^4}{\Delta x^3} + \frac{8q_1 B_0 h^4}{\Delta x^3} + \frac{4q_2 B_0 h^4}{\Delta x^3} - \frac{4\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.98b)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})}^{\Phi} = \bar{\Upsilon}_{(N-\frac{1}{2}, N-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \frac{8\Delta x}{15} - \frac{16B_1 h^2}{3\Delta x} + \frac{64B_0 h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_1 B_0 h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_2 B_0 h^4}{\Delta x^3} + \frac{16\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.98c)$$

$$\Upsilon_{(1, \frac{3}{2})}^{\Phi} = \Upsilon_{(N, N-\frac{1}{2})}^{\Phi} = -\frac{\Delta x}{15} + \frac{32B_8 h^4}{\Delta x^3} - \frac{8q_1 B_8 h^4}{\Delta x^3} - \frac{12q_2 B_8 h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.98d)$$

$$\Upsilon_{(2, \frac{3}{2})}^{\Phi} = \Upsilon_{(N-1, N-\frac{1}{2})}^{\Phi} = -\frac{\Delta x}{15} + \frac{32B_8 h^4}{\Delta x^3} - \frac{8q_1 B_8 h^4}{\Delta x^3} - \frac{4q_2 B_8 h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.98e)$$

$$\Upsilon_{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})}^{\Phi} = \Upsilon_{(N-\frac{1}{2}, N-\frac{1}{2})}^{\Phi} = -\frac{8\Delta x}{15} - \frac{64B_8 h^4}{\Delta x^3} + \frac{16q_1 B_8 h^4}{\Delta x^3} + \frac{16q_2 B_8 h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.98f)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l, l)}^{\eta} = \frac{4\Delta x}{15} - \frac{14B_6 h^2}{3\Delta x} + \frac{32B_7 h^4}{\Delta x^3} - \frac{24q_1 B_7 h^4}{\Delta x^3} - \frac{24q_2 B_7 h^4}{\Delta x^3} + \frac{36\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.99a)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l+1, l)}^{\eta} = \bar{\Upsilon}_{(l-1, l)}^{\eta} = -\frac{\Delta x}{30} - \frac{B_6 h^2}{3\Delta x} + \frac{16B_7 h^4}{\Delta x^3} - \frac{12q_1 B_7 h^4}{\Delta x^3} - \frac{4q_2 B_7 h^4}{\Delta x^3} + \frac{6\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.99b)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l+\frac{1}{2}, l)}^{\eta} = \bar{\Upsilon}_{(l-\frac{1}{2}, l)}^{\eta} = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_6 h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_7 h^4}{\Delta x^3} + \frac{24q_1 B_7 h^4}{\Delta x^3} + \frac{16q_2 B_7 h^4}{\Delta x^3} - \frac{24\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.99c)$$

$$\Upsilon_{(l, l)}^{\eta} = \frac{14h}{3\Delta x} - \frac{32B_5 h^3}{\Delta x^3} + \frac{24q_1 B_5 h^3}{\Delta x^3} + \frac{24q_2 B_5 h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.99d)$$

$$\Upsilon_{(l-1, l)}^{\eta} = \Upsilon_{(l+1, l)}^{\eta} = \frac{h}{3\Delta x} - \frac{16B_5 h^3}{\Delta x^3} + \frac{12q_1 B_5 h^3}{\Delta x^3} + \frac{4q_2 B_5 h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.99e)$$

$$\Upsilon_{(l+\frac{1}{2}, l)}^{\eta} = \Upsilon_{(l-\frac{1}{2}, l)}^{\eta} = -\frac{8h}{3\Delta x} + \frac{32B_5 h^3}{\Delta x^3} - \frac{24q_1 B_5 h^3}{\Delta x^3} - \frac{16q_2 B_5 h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.99f)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l,l-\frac{1}{2})}^\eta = \bar{\Upsilon}_{(l,l+\frac{1}{2})}^\eta = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_6h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{16q_1B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{24q_2B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{24\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.100a)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l-1,l-\frac{1}{2})}^\eta = \bar{\Upsilon}_{(l+1,l+\frac{1}{2})}^\eta = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_6h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{8q_1B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{4q_2B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{4\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.100b)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l+1,l-\frac{1}{2})}^\eta = \bar{\Upsilon}_{(l-1,l+\frac{1}{2})}^\eta = \frac{8q_1B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{4q_2B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{4\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.100c)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2})}^\eta = \bar{\Upsilon}_{(l-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2})}^\eta = -\frac{16q_1B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_2B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{16\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.100d)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2})}^\eta = \bar{\Upsilon}_{(l+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2})}^\eta = \frac{8\Delta x}{15} - \frac{16B_6h^2}{3\Delta x} + \frac{64B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_1B_7h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_2B_7h^4}{\Delta x^3} + \frac{16\tau_1}{\Delta x^3}, \quad (3.100e)$$

$$\Upsilon_{(l,l-\frac{1}{2})}^\eta = \Upsilon_{(l,l+\frac{1}{2})}^\eta = -\frac{8h}{3\Delta x} + \frac{32B_5h^3}{\Delta x^3} - \frac{16q_1B_5h^3}{\Delta x^3} - \frac{24q_2B_5h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.100f)$$

$$\Upsilon_{(l-1,l-\frac{1}{2})}^\eta = \Upsilon_{(l+1,l+\frac{1}{2})}^\eta = -\frac{8h}{3\Delta x} + \frac{32B_5h^3}{\Delta x^3} - \frac{8q_1B_5h^3}{\Delta x^3} - \frac{4q_2B_5h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.100g)$$

$$\Upsilon_{(l+1,l-\frac{1}{2})}^\eta = \Upsilon_{(l-1,l+\frac{1}{2})}^\eta = -\frac{8q_1B_5h^3}{\Delta x^3} - \frac{4q_2B_5h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.100h)$$

$$\Upsilon_{(l-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2})}^\eta = \Upsilon_{(l+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2})}^\eta = \frac{16h}{3\Delta x} - \frac{64B_5h^3}{\Delta x^3} + \frac{16q_1B_5h^3}{\Delta x^3} + \frac{16q_2B_5h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.100i)$$

$$\Upsilon_{(l+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2})}^\eta = \Upsilon_{(l-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2})}^\eta = \frac{16q_1B_5h^3}{\Delta x^3} + \frac{16q_2B_5h^3}{\Delta x^3}, \quad (3.100j)$$

$$(3.100k)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l,l)}^\Phi = \frac{4\Delta x}{15} - \frac{14B_1h^2}{3\Delta x} + \frac{32B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{24q_1B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{24q_2B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{36\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.101a)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l+1,l)}^\Phi = \bar{\Upsilon}_{(l-1,l)}^\Phi = -\frac{\Delta x}{30} - \frac{B_1h^2}{3\Delta x} + \frac{16B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{12q_1B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{4q_2B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{6\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.101b)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l+\frac{1}{2},l)}^\Phi = \bar{\Upsilon}_{(l-\frac{1}{2},l)}^\Phi = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_1h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{24q_1B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{16q_2B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{24\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.101c)$$

$$\Upsilon_{(l,l)}^\Phi = -\frac{4\Delta x}{15} - \frac{32B_8h^4}{\Delta x^3} + \frac{24q_1B_8h^4}{\Delta x^3} + \frac{24q_2B_8h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.101d)$$

$$\Upsilon_{(l-1,l)}^\Phi = \Upsilon_{(l+1,l)}^\Phi = \frac{\Delta x}{30} - \frac{16B_8h^4}{\Delta x^3} + \frac{12q_1B_8h^4}{\Delta x^3} + \frac{4q_2B_8h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.101e)$$

$$\Upsilon_{(l+\frac{1}{2},l)}^\Phi = \Upsilon_{(l-\frac{1}{2},l)}^\Phi = -\frac{\Delta x}{15} + \frac{32B_8h^4}{\Delta x^3} - \frac{24q_1B_8h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_2B_8h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.101f)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l,l-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \bar{\Upsilon}_{(l,l+\frac{1}{2})}^{\Phi} = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_1h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{16q_1B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{24q_2B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{24\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.102a)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l-1,l-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \bar{\Upsilon}_{(l+1,l+\frac{1}{2})}^{\Phi} = \frac{\Delta x}{15} + \frac{8B_1h^2}{3\Delta x} - \frac{32B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{8q_1B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{4q_2B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{4\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.102b)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l+1,l-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \bar{\Upsilon}_{(l-1,l+\frac{1}{2})}^{\Phi} = \frac{8q_1B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{4q_2B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{4\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.102c)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \bar{\Upsilon}_{(l-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2})}^{\Phi} = -\frac{16q_1B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_2B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{16\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.102d)$$

$$\bar{\Upsilon}_{(l-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \bar{\Upsilon}_{(l+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2})}^{\Phi} = \frac{8\Delta x}{15} - \frac{16B_1h^2}{3\Delta x} + \frac{64B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_1B_0h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_2B_0h^4}{\Delta x^3} + \frac{16\tau_2}{\Delta x^3}, \quad (3.102e)$$

$$\Upsilon_{(l,l-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \Upsilon_{(l,l+\frac{1}{2})}^{\Phi} = -\frac{\Delta x}{15} + \frac{32B_8h^4}{\Delta x^3} - \frac{16q_1B_8h^4}{\Delta x^3} - \frac{24q_2B_8h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.102f)$$

$$\Upsilon_{(l-1,l-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \Upsilon_{(l+1,l+\frac{1}{2})}^{\Phi} = -\frac{\Delta x}{15} + \frac{32B_8h^4}{\Delta x^3} - \frac{8q_1B_8h^4}{\Delta x^3} - \frac{4q_2B_8h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.102g)$$

$$\Upsilon_{(l+1,l-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \Upsilon_{(l-1,l+\frac{1}{2})}^{\Phi} = -\frac{8q_1B_8h^4}{\Delta x^3} - \frac{4q_2B_8h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.102h)$$

$$\Upsilon_{(l-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \Upsilon_{(l+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2})}^{\Phi} = -\frac{8\Delta x}{15} - \frac{64B_8h^4}{\Delta x^3} + \frac{16q_1B_8h^4}{\Delta x^3} + \frac{16q_2B_8h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.102i)$$

$$\Upsilon_{(l+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2})}^{\Phi} = \Upsilon_{(l-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2})}^{\Phi} = \frac{16q_1B_8h^4}{\Delta x^3} + \frac{16q_2B_8h^4}{\Delta x^3}, \quad (3.102j)$$

onde  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$  é o diâmetro da malha uniforme e  $x_j$  denota os nós na fronteira dos elementos  $P_2$  ( $j \in \{1, \dots, N-1\}$ ). De (3.92)–(3.102) podemos deduzir uma relação de dispersão associada às equações semi-discretas de Boussinesq sem termos dissipativos ( $\nu_1 = \nu_2 = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ), resultando

$$\frac{\omega^2}{gh\tilde{k}^2} = \tilde{D}(\Delta x, \tilde{k}) = \frac{\tilde{D}_{B_5}(\Delta x, \tilde{k})\tilde{D}_{(0,B_8)}^0(\Delta x, \tilde{k})}{\tilde{D}_{(B_6,B_7)}^{\tau_1}(\Delta x, \tilde{k})\tilde{D}_{(B_1,B_0)}^{\tau_2}(\Delta x, \tilde{k})}, \quad (3.103)$$

onde  $\tilde{D}_{(B_i,B_j)}^{\tau_i}$  e  $\tilde{D}_{B_5}$  são definidas da forma seguinte:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{(B_i,B_j)}^{\tau_i}(\Delta x, \tilde{k}) &= \left( \frac{1}{240}r_2\tilde{k}^4 - \frac{1}{480}r_1\tilde{k}^4 \right) \Delta x^4 + \frac{1}{3}r_1 + \frac{4}{3}r_2 + \\ &+ \left( \frac{1}{60}r_1\tilde{k}^2 + \frac{1}{6}r_2h^2B_i\tilde{k}^4 - \frac{1}{48}r_1h^2B_i\tilde{k}^4 - \frac{1}{5}r_2\tilde{k}^2 \right) \Delta x^2 - \frac{3}{4}r_1h^4B_jq_1\tilde{k}^4 + \frac{3}{8}r_1\tau_i\tilde{k}^4 + \\ &+ r_2h^4B_jq_1\tilde{k}^4 - \frac{1}{3}r_1h^2B_i\tilde{k}^2 + r_1h^4B_j\tilde{k}^4 - \frac{1}{2}r_2\tau_i\tilde{k}^4 - \frac{1}{4}r_1h^4B_jq_2\tilde{k}^4 - \frac{4}{3}r_2h^2B_i\tilde{k}^2 + \\ &+ \frac{1}{2}r_2h^4B_jq_2\tilde{k}^4 - 2r_2h^4B_j\tilde{k}^4 + \frac{16r_2h^4B_j\tilde{k}^2 + 6r_1h^4B_jq_1\tilde{k}^2 - 8r_2h^4B_jq_1\tilde{k}^2 - 8r_1h^4B_j\tilde{k}^2}{\Delta x^2}, \\ &(B_i, B_j \in \{0, B_0, B_1, B_6, B_7, B_8\} \text{ e } \tau_i \in \{0, \tau_1, \tau_2\}), \quad (3.104) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{B_5}(\Delta x, \tilde{k}) &= \left( \frac{1}{48}r_1\tilde{k}^2 - \frac{1}{6}r_2\tilde{k}^2 \right) \Delta x^2 + \frac{1}{4}\tilde{k}^2h^2r_1B_5q_2 - \tilde{k}^2h^2r_1B_5 + \\ &+ 2\tilde{k}^2h^2r_2B_5 + \frac{3}{4}\tilde{k}^2h^2r_1B_5q_1 - \frac{1}{2}\tilde{k}^2h^2r_2B_5q_2 + \frac{1}{3}r_1 - \tilde{k}^2h^2r_2B_5q_1 + \frac{4}{3}r_2 + \\ &+ \frac{8h^2r_1B_5 - 16h^2r_2B_5 - 6h^2r_1B_5q_1 + 8h^2r_2B_5q_1}{\Delta x^2}, \quad (3.105) \end{aligned}$$

em que  $r_1$  e  $r_2$  são parâmetros livres usados para deduzir e condensar as equações discretas e  $\tilde{k}$  é dado por

$$\tilde{k} = \frac{4}{\Delta x} \sin\left(\frac{k\Delta x}{4}\right). \quad (3.106)$$

Tomando-se o limite quando  $\Delta x$  tende para zero da relação de dispersão dada pela equação (3.103), obtém-se

$$\frac{\omega^2}{ghk^2} = \frac{(1 - B_5(kh)^2)(1 + B_8(kh)^4)}{(1 - B_1(kh)^2 + B_0(kh)^4 + r_2\tau_2k^4)(1 - B_6(kh)^2 + B_7(kh)^4 + r_1\tau_1k^4)}, \quad (3.107)$$

o que corresponde à relação de dispersão dada pela equação (3.48) com  $\nu_1 = \nu_2 = 0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  e assumindo-se que  $\tau_j$  tende para zero ( $j = 1, 2$ ).

Para além disto, esta consistência é obtida para valores apropriados dos parâmetros  $r_i$  e  $q_i$  ( $i = 1, 2$ ), nomeadamente

$$r_1 = \frac{11}{5} + \frac{2\sqrt{19}}{5}, \quad r_2 = \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{19}}{10}, \quad q_1 = \frac{52}{25} - \frac{4\sqrt{19}}{25}, \quad q_2 = 2 - \frac{2\sqrt{19}}{3}. \quad (3.108)$$

Por outro lado, as soluções com variáveis separáveis descritas por (3.90) satisfazem as equações dadas por

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -i\omega\eta, \quad \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} = -i\omega\Phi_\alpha. \quad (3.109)$$

Uma condição de estabilidade deve ser satisfeita de forma a prevenir o crescimento exponencial das soluções com o tempo. As soluções numéricas são obtidas após a aplicação do método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem às equações (3.109). A condição de estabilidade é dada pela desigualdade seguinte:

$$\left| 1 - i\omega\Delta t - \omega^2\frac{\Delta t^2}{2} + i\omega^3\frac{\Delta t^3}{6} + \omega^4\frac{\Delta t^4}{24} \right| \leq 1. \quad (3.110)$$

Note-se que quando  $\omega$  é um número complexo as soluções crescem ou decaem exponencialmente com ou sem propagação, i.e., valores complexos de  $\omega$  estão associados a soluções instáveis. Usando (3.103), (3.106) e (3.110) assim como usando-se valores reais para  $\omega$ , obtém-se:

$$\omega^2\Delta t^2 = gh\Delta t^2 \frac{16}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{4}\right) \tilde{D}\left(\Delta x, \frac{4}{\Delta x} \sin\left(\frac{k\Delta x}{4}\right)\right) \leq 8. \quad (3.111)$$

De (3.106) resulta que  $k\Delta x \in [0, 2\pi]$ . Desta forma, devemos ter pelo menos 3 nós de discretização por comprimento de onda, usando-se elementos de Lagrange  $P_2$ .

Defina-se agora  $\hat{D}(\hat{\xi}) = \sin^2(\hat{\xi}) \tilde{D}\left(\Delta x, \frac{4}{\Delta x} \sin(\hat{\xi})\right)$  com  $\hat{\xi} = \frac{k\Delta x}{4}$ . No que segue, consideramos o modelo 4o-A com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$  ou  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$  bem como o modelo 4o-AB com  $\alpha = \bar{\alpha}$  e  $\beta_i = \bar{\beta}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Pode-se provar que a função não negativa  $\hat{D}(\hat{\xi})$  para  $\hat{\xi} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  possui um máximo global em  $\hat{\xi} = \frac{\pi}{2}$ . Como consequência, podemos substituir  $\sin(\hat{\xi})$  por 1 em (3.111) e obter a condição do tipo CFL seguinte:

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{\Delta x^2}{2gh\tilde{D}\left(\Delta x, \frac{4}{\Delta x}\right)}}. \quad (3.112)$$

Concluimos que o termo extra de ordem  $O(\mu^6)$  considerado no desenvolvimento assintótico do potencial da velocidade do fluido (ver (3.20)) melhora as propriedades de estabilidade

do modelo. De facto, quando consideramos o modelo 4o-A com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$ , o segundo membro da condição do tipo CFL dada por (3.112) tende para zero quando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Note-se que este modelo não inclui o termo extra mencionado atrás. Por outro lado, nos casos em que se considera este termo extra, o valor deste limite é uma constante real positiva. Mais concretamente, obtemos no limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \leq \sqrt{\frac{4h}{5g}}$  para o modelo 4o-A com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$  e  $\Delta t \leq \sqrt{\frac{0.021h}{g}}$  para o modelo 4o-AB com  $\alpha = \bar{\alpha}$  e  $\beta_i = \bar{\beta}_i$  ( $i = 1, 2$ ).

### 3.4 Validação do modelo

Para validar o modelo, consideramos dois testes disponíveis na literatura juntamente com outro exemplo. Note-se que o pós-processamento de todas as figuras tridimensionais é realizado utilizando elementos de Lagrange  $P_1$ . Termos dissipativos não são utilizados nos testes que se seguem. Para além disto, considera-se que as soluções dos modelos numéricos explodem se um limite de cinco iterações no passo de correcção for excedido.

#### 3.4.1 Uma bossa Gaussiana numa região quadrada

A evolução de uma bossa Gaussiana numa região quadrada é aqui simulada. Estes resultados são comparados com aqueles obtidos por Woo e Liu (2004a), onde um modelo BEV fracamente não linear foi usado. Isto significa que apenas termos não lineares de ordem  $O(\varepsilon)$  foram considerados. O domínio computacional é um quadrado de área  $6 \times 6 \text{ m}^2$  discretizado através de uma malha simétrica e uniforme com 900 elementos bem como usando-se uma malha triangular não estruturada com 1998 elementos. Apenas se consideram condições de fronteira totalmente reflexivas (ver (3.73)). Como condições iniciais, temos que

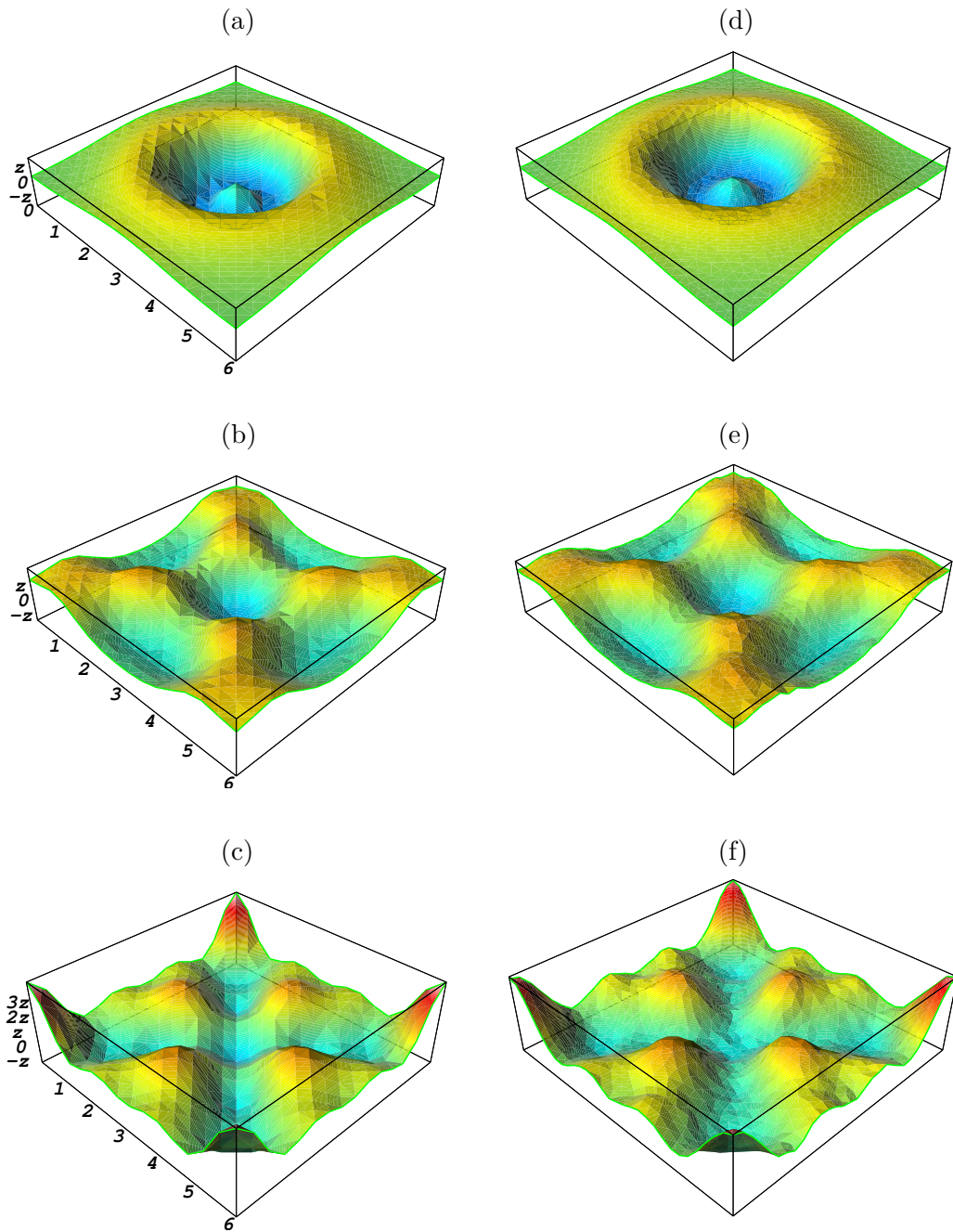
$$\eta(x, y, 0) = 0.045 e^{-2((x-3)^2+(y-3)^2)} \quad (\text{m}), \quad (3.113a)$$

$$\Phi_\alpha(x, y, 0) = 0 \quad (\text{m}^2\text{s}^{-1}). \quad (3.113b)$$

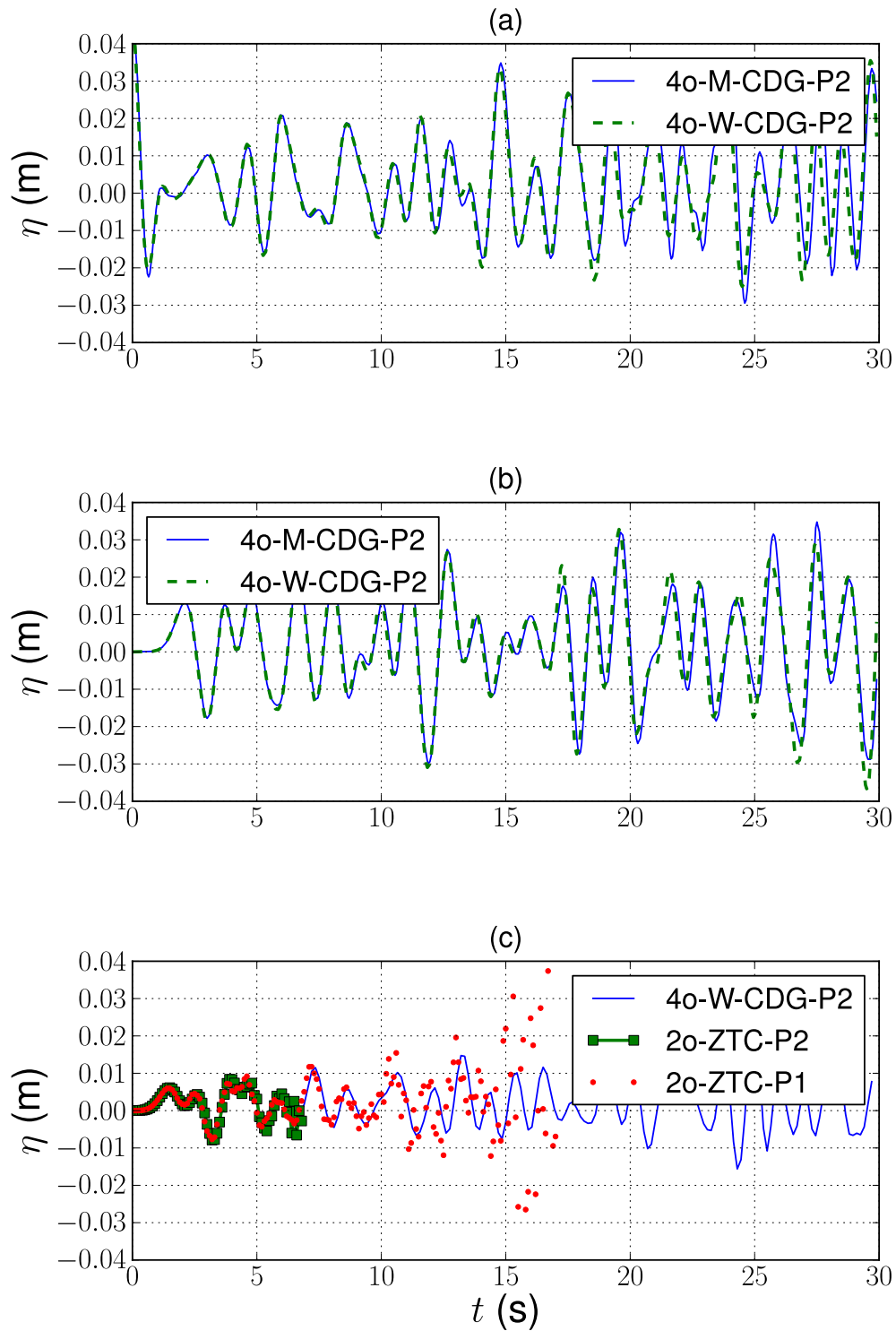
O fundo da região ocupada pelo fluido é considerado como uma constante e é descrito por  $z = -h$  (m) com  $h = 0.45$  m. A elevação da superfície da onda resultante do modelo de quarta ordem proposto neste trabalho é comparada com as soluções homólogas provenientes dos modelos 2o-ZTC-P1 e 2o-ZTC-P2. Os passos de tempo usados nas simulações numéricas são dados por  $\Delta t = 0.0005$  s e  $\Delta t = 0.00025$  s para a malha simétrica uniforme e para a malha não estruturada, respectivamente.

Na figura 3.9, podemos ver algumas imagens da elevação da superfície da onda para  $t_0 = 1$  s,  $t_1 = 4$  s e  $t_2 = 8$  s. Os resultados estão associados aos modelos 4o-M-CDG-P2 e 4o-W-CDG-P2 para a malha simétrica (coluna da esquerda) e para a malha não estruturada (coluna da direita), respectivamente. Nas figuras 3.10 e 3.11, mostramos a evolução da elevação da superfície da onda em três pontos distintos do domínio, nomeadamente em  $P_1 = (3, 3)$  (m) (centro do domínio),  $P_2 = (0, 0)$  (m) e  $P_3 = (1, 1)$  (m). A malha simétrica e a malha não estruturada são usadas nestas simulações. Como seria de esperar, a inclusão dos termos não lineares de maior ordem nas equações (3.21) e (3.34) aumenta a instabilidade do modelo. Este fenómeno pode ser observado nas figuras 3.11 (a) e (b), onde se mostra a explosão do modelo 4o-M-CDG-P2. Nas figuras 3.10 (c) e 3.11 (c) também se pode observar a explosão dos modelos 2o-ZTC-P1 e 2o-ZTC-P2.

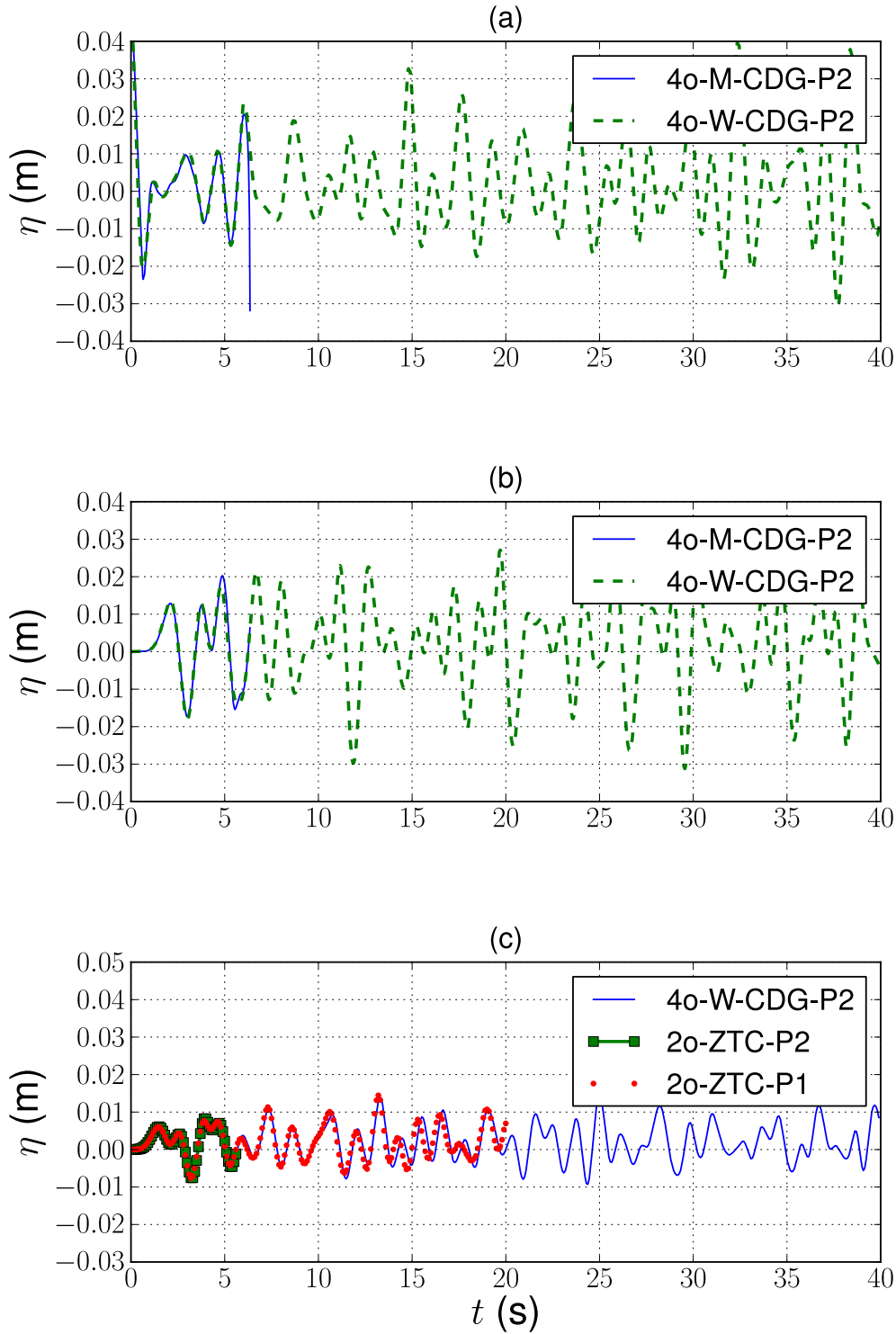
Vários valores para o coeficiente de penalização  $\tau$  são testados. Na figura 3.12, representam-se duas imagens detalhadas da evolução da elevação da superfície da onda nos pontos  $P_2 = (0, 0)$  (m) usando-se a malha não estruturada e para  $\tau = 0.0001 \text{ m}^4$ ,  $\tau = 0.004 \text{ m}^4$ ,



**Figura 3.9:** A elevação da superfície da onda  $\eta$  (m) relativa ao modelo 4o-M-CDG-P2 usando-se uma malha simétrica nos instantes  $t_0 = 1$  s (a),  $t_1 = 4$  s (b) e  $t_2 = 8$  s (c). Neste caso temos que  $\tau = 0.1 \text{ m}^4$  e  $\Delta t = 0.0005$  s. Mostra-se também a elevação da superfície da onda  $\eta$  (m) respeitante ao modelo 4o-W-CDG-P2 usando-se uma malha não estruturada nos instantes  $t_0 = 1$  s (d),  $t_1 = 4$  s (e) e  $t_2 = 8$  s (f). Neste caso considera-se que  $\tau = 0.004 \text{ m}^4$  e  $\Delta t = 0.00025$  s. Uma escala na vertical com  $z = 0.005$  m é usada no eixo  $oz$ .



**Figura 3.10:** A evolução no tempo da elevação da superfície da onda em  $P_1 = (3, 3)$  (m) (a),  $P_2 = (0, 0)$  (m) (b) e  $P_3 = (1, 1)$  (m) (c) usando-se a malha uniforme.



**Figura 3.11:** A evolução no tempo da elevação da superfície da onda em  $P_1 = (3, 3)$  (m) (a),  $P_2 = (0, 0)$  (m) (b) e  $P_3 = (1, 1)$  (m) (c) usando-se a malha não estruturada. Em (a) e (b) temos que  $\tau = 0.01 \text{ m}^4$  para os modelos 4o-M-CDG-P2 e 4o-W-CDG-P2. Em (c) comparam-se as soluções associadas aos modelos 4o-W-CDG-P2, para  $\tau = 0.01 \text{ m}^4$ , com as soluções dadas pelos modelos 2o-ZTC-P1 e 2o-ZTC-P2.

$\tau = 0.01 \text{ m}^4$ ,  $\tau = 0.1 \text{ m}^4$ ,  $\tau = 1 \text{ m}^4$  assim como para  $\tau = 10 \text{ m}^4$ . Observa-se que para os valores mais elevados do parâmetro de penalização a estabilidade do esquema é melhorada. A explosão da solução para  $\tau = 0.0001 \text{ m}^4$  é mostrada na figura 3.12 (a). Por outro lado, verifica-se que para valores mais elevados do parâmetro de penalização as soluções numéricas são mais fortemente afectadas pela geometria da malha. Assim, a precisão do método é penalizada. Na figura 3.12 (b), podemos observar as discrepâncias entre as soluções com  $\tau = 1 \text{ m}^4$  e  $\tau = 10 \text{ m}^4$  e as soluções com valores mais pequenos de  $\tau$ .

Apresentamos também alguns testes de refinamento e de independência do tipo da malha. Para tal, consideram-se malhas simétricas uniformes com 1600, 2500, 3600, 4900, 6400 e 8100 elementos assim como malhas não estruturadas com 1544, 2360, 3396, 4536, 6288 e 7922 elementos. Na tabela 3.2, os erros relativos  $l^2$  (%) entre a malha mais grossa e as malhas mais finas são comparados nos pontos  $P_0 = (3, 3)$  (m) e  $P_1 = (0, 0)$  (m). O passo de tempo é dado por  $\Delta t = 0.0005 \text{ s}$  e o parâmetro de penalização é igual a  $\tau = 0.1 \text{ m}^4$  para as malhas simétricas uniformes (Malha S. U.). Por sua vez, para as malhas não estruturadas (Malha N. E.)  $\Delta t = 0.00025 \text{ s}$  e  $\tau = 0.0001 \text{ m}^4$ . Para as malhas simétricas uniformes considera-se que  $t \in [0, 25]$  (s) enquanto que para as malhas não estruturadas tem-se que  $t \in [0, 17]$  (s). Verifica-se que este erro decresce com o aumento do número de nós da malha, o que nos dá

Malha S. U.	$P_0$	$P_1$	Malha N. E.	$P_0$	$P_1$
1600	6.70%	12.76%	1544	4.49%	7.90%
2500	2.89%	4.83%	2360	0.86%	2.31%
3600	1.01%	1.55%	3396	0.10%	0.20%
4900	0.28%	0.42%	4536	0.09%	0.06%
6400	0.05%	0.07%	6288	0.01%	0.01%

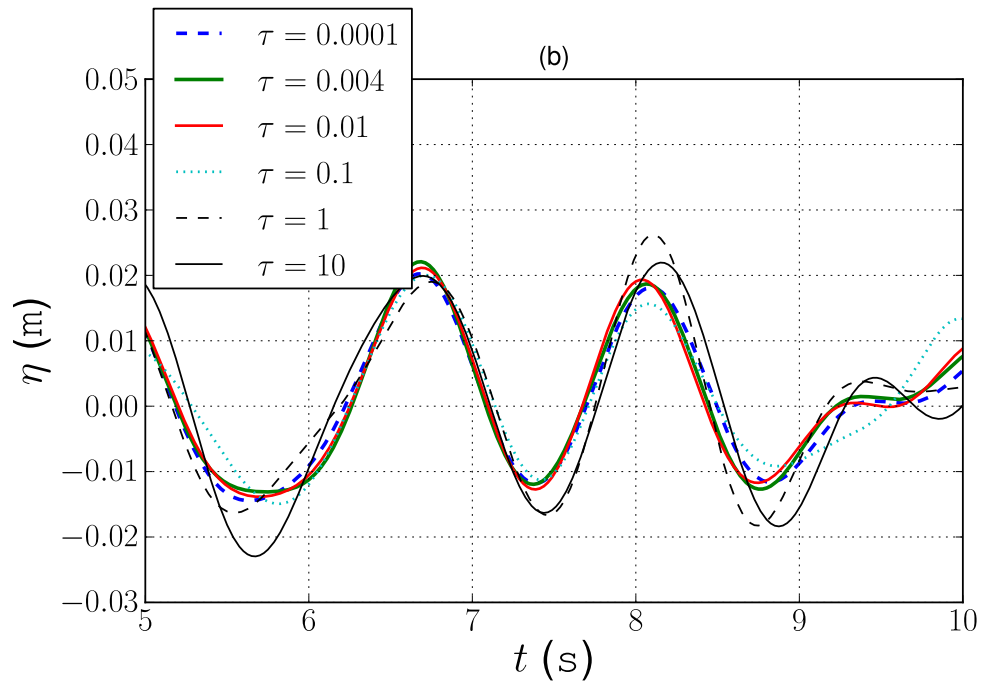
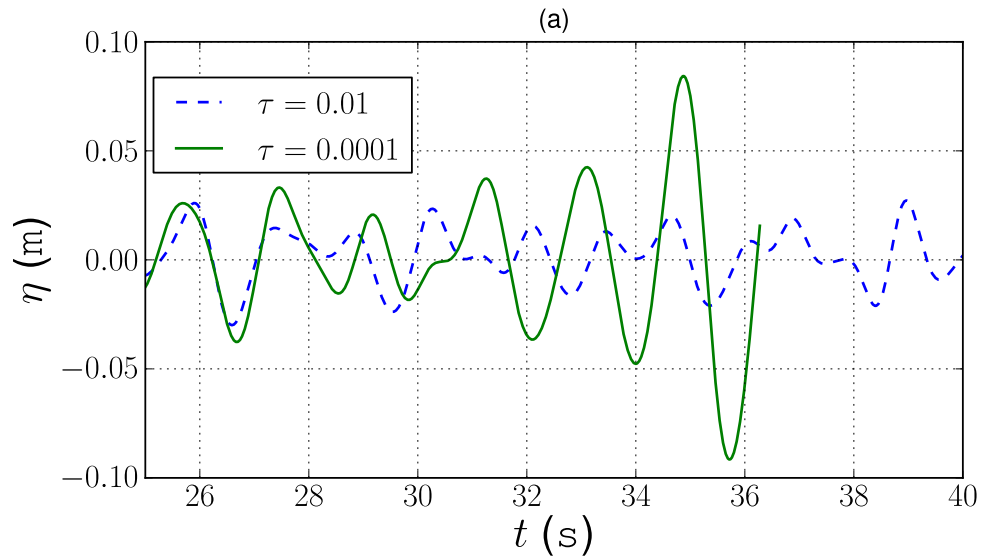
**Tabela 3.2:** Erros relativos  $l^2$  (%) entre a malha mais grossa e as malhas mais finas nos pontos  $P_0 = (3, 3)$  (m) e  $P_1 = (0, 0)$  (m).

uma boa indicação da convergência do método numérico para um certo intervalo de tempo.

Dos resultados numéricos, podemos concluir que existe uma boa concordância entre as soluções associadas ao modelo BEV de Woo e Liu (2004a), ao modelo BEP de segunda ordem de Zhao et al. (2004) e aos modelos desenvolvidos neste trabalho. Também se pode concluir que o modelo de quarta ordem proposto tem propriedades de estabilidade melhores que as dos modelos BEP de segunda ordem mencionados atrás, usando-se elementos de Lagrange  $P_1$  e  $P_2$ .

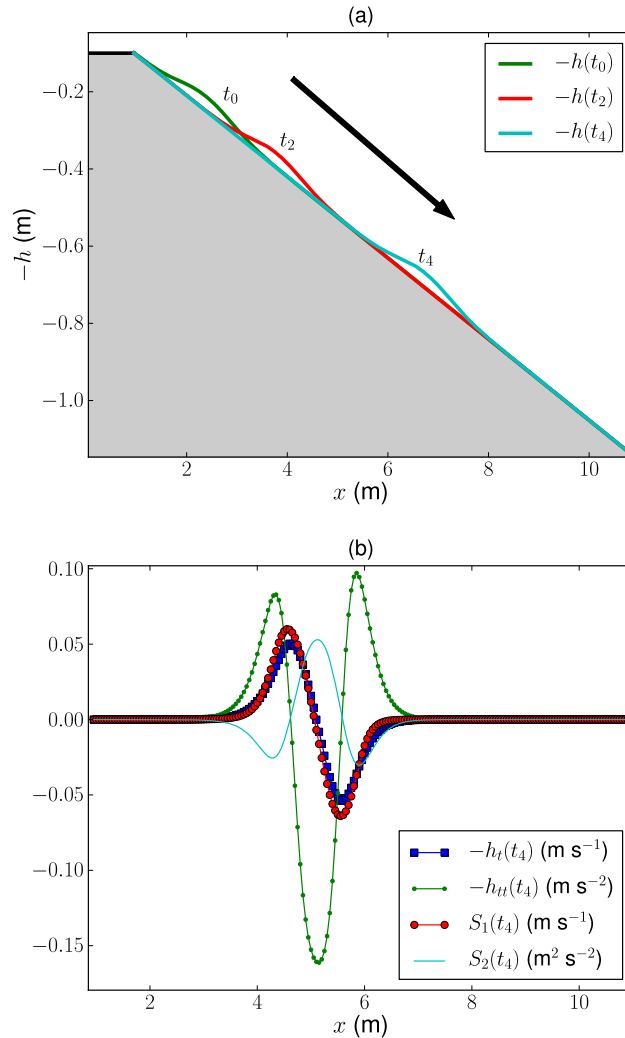
### 3.4.2 A evolução de uma onda gerada por um deslizamento subaquático

Nesta subsecção, a evolução de uma onda gerada por um deslizamento subaquático é simulada (ver, e.g., Lynett e Liu (2002), Fuhrman e Madsen (2009)). No entanto, referimos que não foi considerado nenhum algoritmo numérico para o tratamento de zonas costeiras com fronteiras móveis. Assume-se que todas as fronteiras são totalmente reflexivas. Aqui, o domínio espacial computacional  $\Omega$  é um rectângulo de área dada por  $10.5 \times 0.5 \text{ m}^2$ . Para a discretização deste domínio considera-se uma malha uniforme de 544 elementos. O passo de tempo é dado por  $\Delta t = 0.0005 \text{ s}$ . Para a geração da onda considera-se o fundo móvel da região ocupada pelo fluido descrito por Fuhrman e Madsen (2009). No entanto, uma plataforma de profundidade  $0.1 \text{ m}$  para  $x \in [0, 0.95144]$  (m) é também usada. A descrição geométrica do fundo móvel é



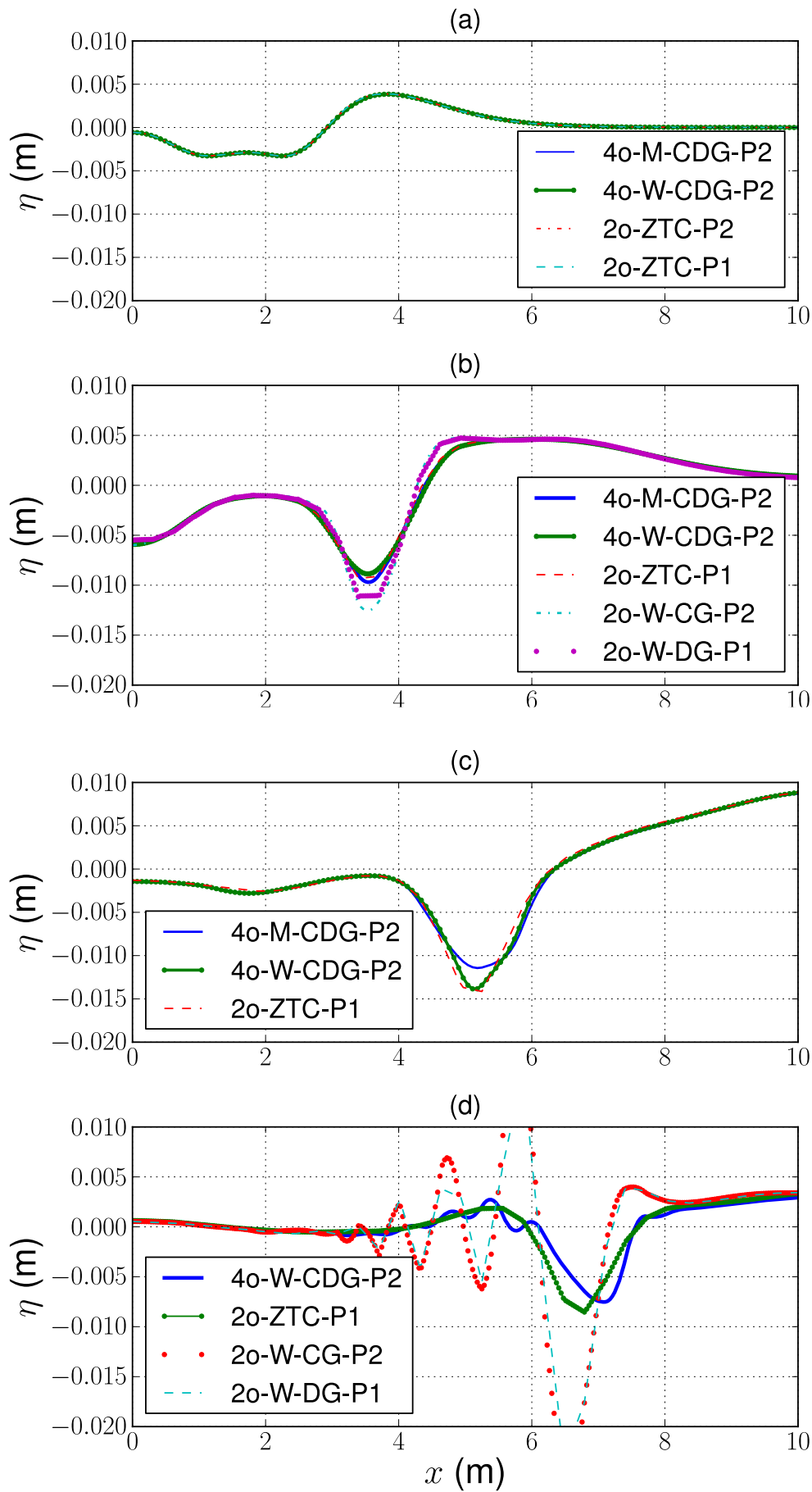
**Figura 3.12:** Duas imagens detalhadas da evolução no tempo da elevação da superfície da onda  $\eta$  (m) em  $P_2 = (0, 0)$  (m) usando a malha não estruturada com  $\tau = 0.0001 \text{ m}^4$  e  $\tau = 0.01 \text{ m}^4$  (a) bem como  $\tau = 0.0001 \text{ m}^4$ ,  $\tau = 0.004 \text{ m}^4$ ,  $\tau = 0.01 \text{ m}^4$ ,  $\tau = 0.1 \text{ m}^4$ ,  $\tau = 1 \text{ m}^4$  e  $\tau = 10 \text{ m}^4$  (b).

apresentada na figura 3.13 (a). As funções dadas necessárias para definir o modelo 4-M-CDG-P2, nomeadamente, a primeira e a segunda derivada de  $z = -h(x, y, t)$  com respeito à variável temporal assim como as funções de fonte  $S_1$  e  $S_2$  são mostradas na figura 3.13 (b).



**Figura 3.13:** O fundo móvel nos instantes  $t_0 = 0$  s,  $t_2 = 3$  s e  $t_4 = 5.86$  s (a). Em (b) mostramos a primeira e a segunda derivada do fundo com respeito ao tempo bem como as funções de fonte  $S_1$  e  $S_2$ .

Na figura 3.14, podemos observar a evolução da elevação da superfície da onda gerada pelo fundo móvel  $z = -h(x, y, t)$ . As soluções apresentadas dizem respeito aos modelos 4o-M-CDG-P2, 4o-W-CDG-P2, 2o-ZTC-P1, 2o-ZTC-P2, 2o-W-CG-P2 e 2o-W-DG-P1, nos instantes  $t_1 = 1.51$  s,  $t_2 = 3$  s,  $t_3 = 4.51$  s e  $t_4 = 5.86$  s. Referimos que os modelos 4-M-CDG-P2 e 2o-ZTC-P2 explodem nos instantes  $t = 5.4$  s e  $t = 2.0$  s, respectivamente. Na figura 3.14 (c), pode-se também observar que as soluções dos modelos 2o-W-CG-P2 e 2o-W-DG-P1 não têm significado físico. O mesmo acontece para o modelo 2o-W-CG-P1. Mais uma vez, existe uma boa concordância entre as soluções dos modelos implementados. No entanto, as soluções do modelo de quarta ordem proposto e as soluções dadas por Fuhrman e Madsen (2009) divergem nas zonas de maior profundidade para  $t > 4.5$  s. Esta divergência pode ser expectável uma vez que os modelos e as condições de fronteira são diferentes.



**Figura 3.14:** A elevação da superfície da onda nos instantes  $t_1 = 1.51$  s (a),  $t_2 = 3$  s (b),  $t_3 = 4.51$  s (c) e  $t_4 = 5.86$  s (d). Em (b) mostramos uma imagem do perfil da elevação da superfície da onda em  $t_2 = 3$  s para os vários modelos implementados. Em (d) podem observar-se as oscilações na esteira de algumas das ondas. Este fenómeno é também descrito em Lynett e Liu (2002).

### 3.4.3 Deslocamento de um objecto num fundo horizontal

Nesta subsecção, simula-se uma onda gerada através do deslocamento de um objecto movendo-se num fundo horizontal da região ocupada pelo fluido. Este objecto move-se com uma velocidade constante.

#### 3.4.3.1 Caso 2D

O domínio computacional é uma linha de comprimento 30 m, a qual é discretizada usando-se 300 elementos de Lagrange  $P_2$ . Um passo de tempo de  $\Delta t = 0.00025$  s é considerado. O fundo horizontal da região ocupada pelo fluido juntamente com o objecto deslizando são descritos por  $z = -h(x, t)$  (m). Por outro lado, o objecto move-se com uma velocidade constante  $S_0 = 1$  ms<sup>-1</sup>. Por sua vez, a função  $h(x, t)$  é definida por

$$h(x, t) = 0.45 - \frac{\Delta h}{(1 + \tanh(1))^2} \bar{X}(x, t), \quad (3.114)$$

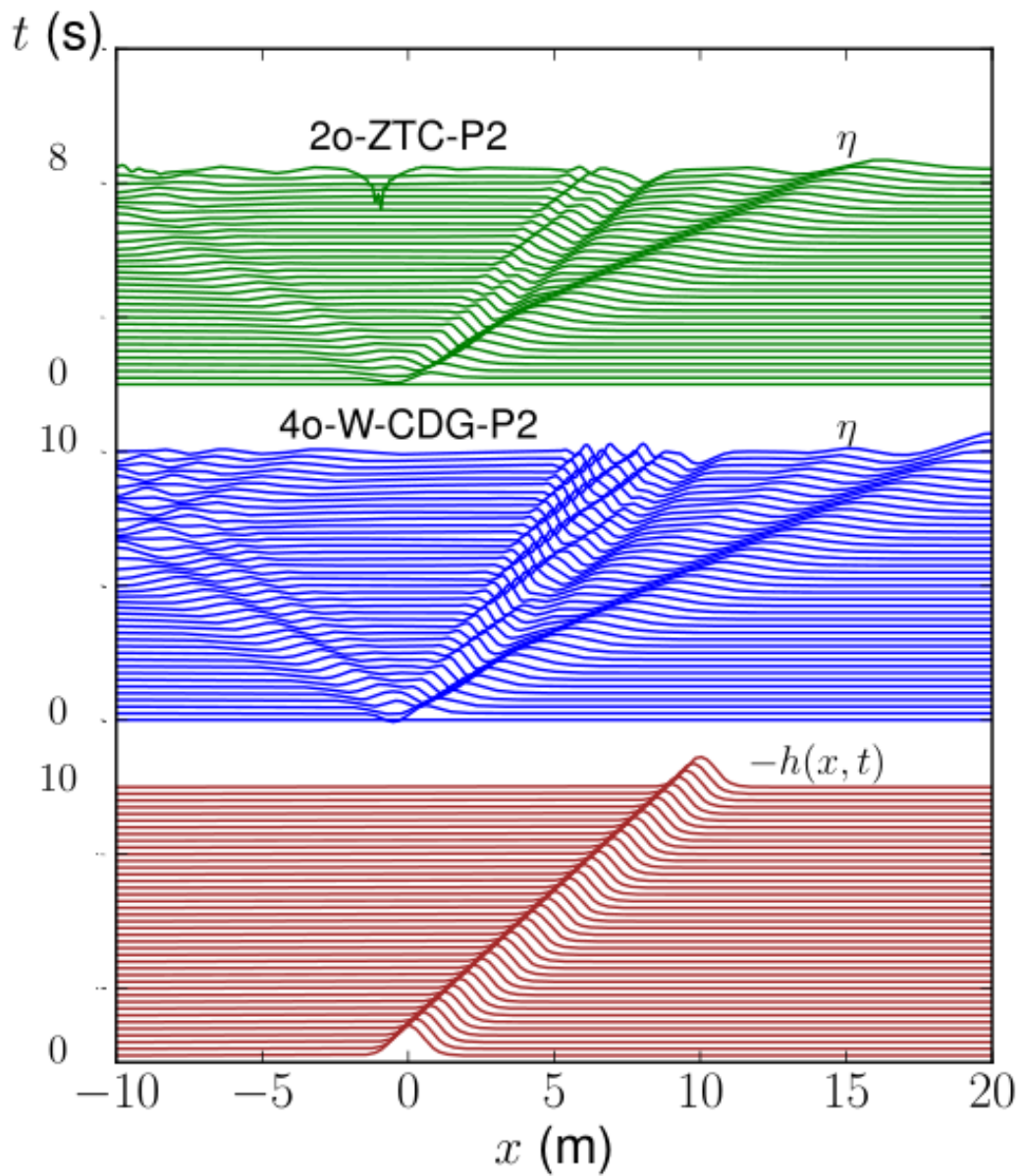
com

$$\bar{X}(x, t) = \{1 + \tanh[2x - 2x_l(t)]\} \{1 - \tanh[2x - 2x_r(t)]\}, \quad (3.115)$$

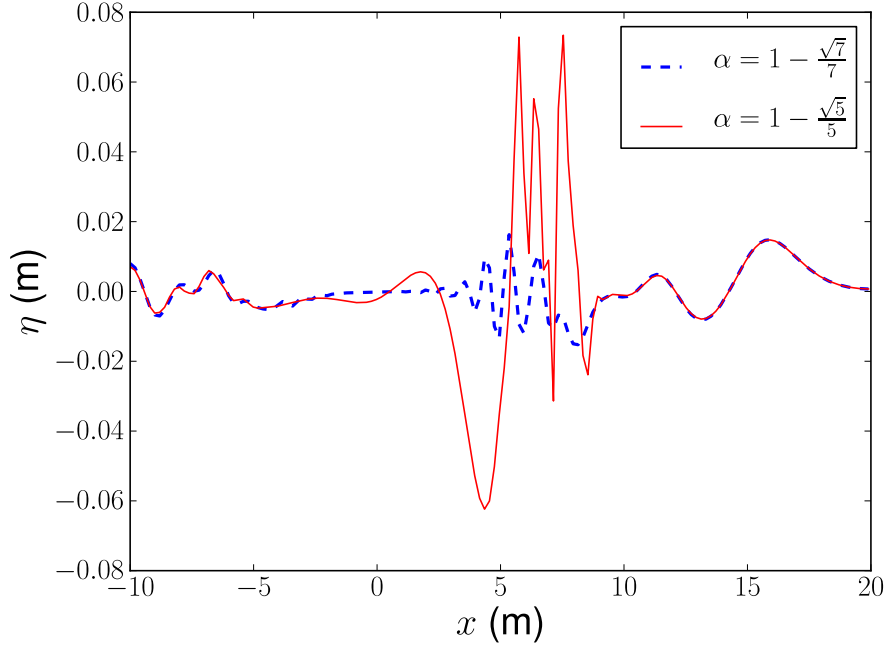
$$x_l(t) = x_c(t) - \frac{1}{2}, \quad x_r(t) = x_c(t) + \frac{1}{2}, \quad x_c(t) = x_0 + S_0 t, \quad (3.116)$$

onde  $x_0 = 0$  m e  $\Delta h = 0.045$  m é o valor máximo da espessura do objecto deslizando. Saliente-se que o primeiro termo e o segundo termo da equação (3.114) representam a profundidade do fundo horizontal e o objecto deslizando, respectivamente. Apenas se comparam as soluções dos modelos fracamente não lineares denotados por 4o-W-CDG-P2 e 2o-ZTC-P2. Note-se que a função de fonte do modelo 2o-ZTC-P2 apenas incorpora termos de ordem dominante (ver capítulo 2). Na figura 3.15, podemos observar a evolução da elevação da superfície da onda gerada pelo movimento do objecto durante dez segundos. Fronteiras totalmente reflexivas assim como condições iniciais nulas são consideradas. A diferença principal entre as soluções obtidas pelos dois modelos considerados está nas ondas de menor comprimento. Estas ondas de menor comprimento estão localizadas na esteira da onda principal e de maior comprimento. O modelo 2o-ZTC-P2 explode em  $t = 8$  s enquanto que o nosso modelo de quarta ordem não explode.

Para finalizar esta subsecção, refere-se que os termos extra de ordem  $O(\mu^4)$  nos modelos 4o-A e 4o-AB (ver (3.34), (3.36) e (3.38)) melhoram as suas propriedades de estabilidade. Vários cenários, incluindo e excluindo este termos de ordem  $O(\mu^4)$  foram testados. Aqui, apenas comparamos as elevações da superfície da onda respeitante ao modelo 4o-W-CDG-P2 em  $t = 8$  s para  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$  e para  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$ . Em todos os casos simulados  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , enquanto que o parâmetro de penalização e o passo de tempo usados são dados por  $\tau = 0.0001$  m<sup>4</sup> e  $\Delta t = 0.001$  s, respectivamente (ver figura 3.16). Note-se que o modelo com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$  corresponde ao modelo de quarta ordem sem o termo extra de ordem  $O(\mu^4)$ , uma vez que para este caso temos que  $B = B_2 = B_0 = 0$  (ver equações (3.34), (3.35) e (3.36)). Por outro lado, o modelo 4o-W-CDG-P2 com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$  inclui os termos extra de ordem  $O(\mu^4)$ , uma vez que  $B \neq 0$  e  $B_0 \neq 0$  (ver (3.34) e (3.36)). Na figura 3.16, podemos ver que o modelo 4o-W-CDG-P2 sem termos extra de ordem  $O(\mu^4)$  explode enquanto que o modelo que inclui os termos extra se mantém estável. Através das simulações numéricas, com várias combinações de valores para  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , podemos concluir que as boas propriedades de estabilidade do modelo estão relacionadas com a inclusão dos termos extra referidos anteriormente.



**Figura 3.15:** A evolução no tempo da elevação da superfície da onda  $\eta$  (m) e as posições do objecto (figura vermelha) dadas pelos modelos 4o-W-CDG-P2 (figura azul) e 2o-ZTC-P2 (figura verde). O parâmetro de penalização no modelo 4o-W-CDG-P2 é dado por  $\tau = 0.1 \text{ m}^4$ .



**Figura 3.16:** A elevação da superfície da onda  $\eta$  (m) em  $t = 8$  s dada pelo modelo 4o-W-CDG-P2 com  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$  (linha azul tracejada) e  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$  (linha vermelha sólida). O parâmetro de penalização e o passo de tempo considerados no modelo 4o-W-CDG-P2 são dados por  $\tau = 0.0001 \text{ m}^4$  e  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ , respectivamente.

### 3.4.3.2 Caso 3D

O domínio espacial numérico aqui considerado é um rectângulo de área dada por  $12.5 \times 6 \text{ m}^2$ . Este domínio espacial é discretizado através de uma malha simétrica e uniforme com 2100 elementos. O fundo horizontal da região ocupada pelo fluido juntamente com o objecto deslizante são descritos por  $z = -h(x, y, t)$  (m). Por outro lado, o objecto move-se com uma velocidade constante  $S_0 = 1 \text{ ms}^{-1}$ . Por sua vez, a função  $h(x, y, t)$  é definida por

$$h(x, y, t) = 0.45 - \frac{\Delta h}{(1 + \tanh(1))^4} \bar{X}(x, t) \bar{Y}(y), \quad (3.117)$$

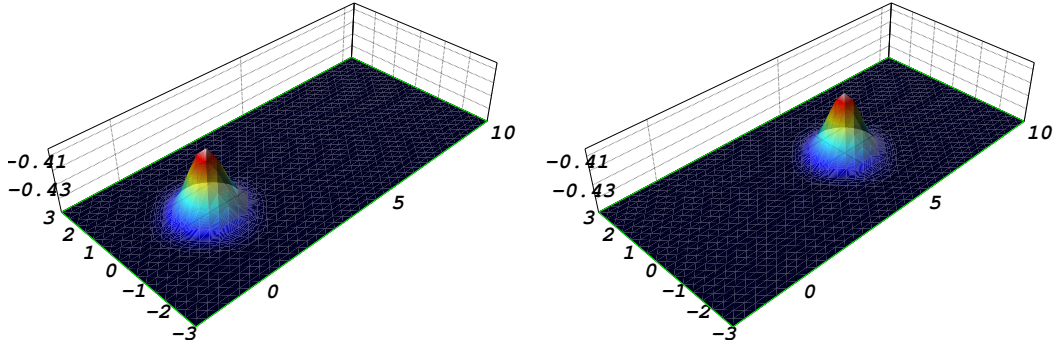
com

$$\bar{X}(x, t) = (1 + \tanh(2(x - x_l(t))))(1 - \tanh(2(x - x_r(t))))), \quad (3.118)$$

$$\bar{Y}(y) = (1 + \tanh(2y + 1))(1 - \tanh(2y - 1)), \quad (3.119)$$

$$x_l(t) = x_c(t) - \frac{1}{2}, \quad x_r(t) = x_c(t) + \frac{1}{2}, \quad x_c(t) = x_0 + S_0 t, \quad (3.120)$$

onde  $x_0 = 0 \text{ m}$  e  $\Delta h = 0.045 \text{ m}$  é o valor máximo da espessura do objecto deslizante (ver figura 3.17). Um passo de tempo de  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$  é considerado. Na figura 3.18, mostramos quatro imagens da elevação da superfície da onda resultantes da aplicação do modelo 4o-M-CDG-P2 nos instantes  $t_0 = 1 \text{ s}$ ,  $t_1 = 2 \text{ s}$ ,  $t_2 = 3.5 \text{ s}$  e  $t_3 = 5 \text{ s}$ . Na figura 3.19, podem ver-se os perfis das elevações da superfície da onda dados pelos modelos 4o-M-CDG-P2, 2o-ZTC-P2 e 2o-ZTC-P1 nos instantes  $t_0 = 1 \text{ s}$ ,  $t_1 = 2 \text{ s}$ ,  $t_2 = 3.5 \text{ s}$  assim como para  $t_3 = 5 \text{ s}$  e em  $y = 0 \text{ m}$ . A maior diferença entre as soluções dadas pelos modelos implementados é observada na esteira



**Figura 3.17:** O fundo horizontal da região ocupada pelo fluido juntamente com o objecto deslizando descritos por  $z = -h(x, y, t)$  (m) nos instantes  $t_0 = 1$  s (painel à esquerda) e  $t_3 = 5$  s (painel à direita).

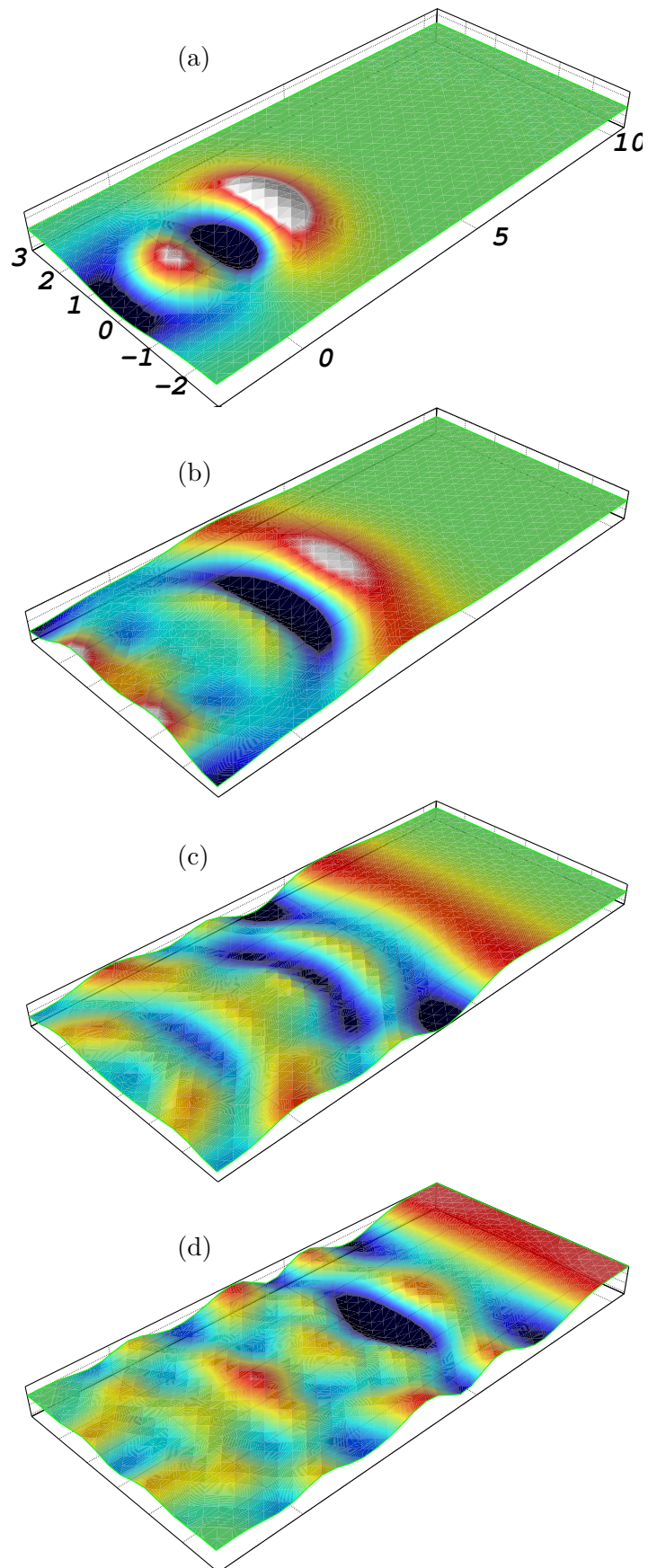
da onda. De facto, as ondas de menor comprimento começam-se a desenvolver na referida esteira. Note-se que a maior desvantagem do modelo numérico, baseado na formulação C/DG-FEM aqui proposta, está relacionada com o tempo de cálculo computacional. Neste caso 3D, todos os sistemas são gerados e resolvidos em cada passo de tempo. A execução do esquema 4o-M-CDG-P2 demora aproximadamente 4s por iteração de predição-correcção. Por sua vez, a execução dos esquemas 2o-ZTC-P2 e 2o-ZTC-P1 demora 2s e 0.33s, respectivamente. Nos testes apresentados usou-se um computador com o sistema operativo Linux Ubuntu 10.04 (64b) e com um processador Intel(R) Xeon(R) E5420 CPUs a 2.5GHz.

### 3.5 Conclusões sumárias

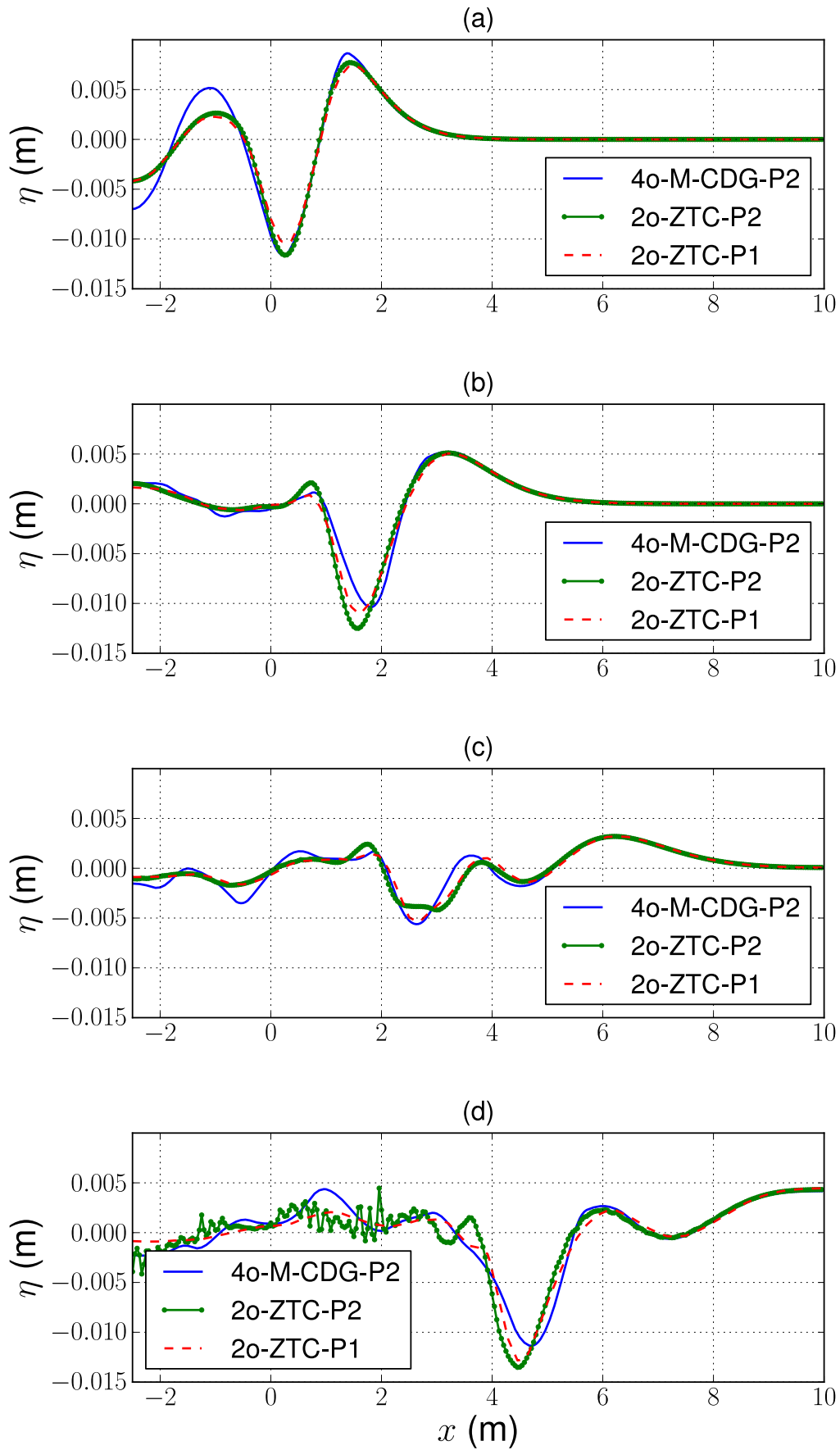
Neste capítulo, um novo modelo para a geração e a propagação de ondas marítimas de superfície foi deduzido e proposto. Este modelo é baseado numa classe de equações do tipo Boussinesq de ordem arbitrária incluindo um termo extra de ordem  $O(\mu^{2n+2})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). As características de dispersão e o gradiente de empolamento da onda bem como as propriedades de estabilidade foram melhoradas. Estes factos devem-se à inclusão deste termo extra de ordem  $O(\mu^{2n+2})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) no desenvolvimento assintótico do potencial da velocidade do fluido.

Um esquema C/DG-FEM foi proposto para a resolução numérica do sistema de equações diferenciais de quarta ordem aqui deduzidas. Tanto quanto sabemos, este esquema é aqui implementado pela primeira vez para a discretização deste tipo de modelos. Note-se que o esquema C/DG-FEM foi aplicado directamente ao sistema de Boussinesq estendido, i.e., não foram utilizados quaisquer sistemas ou variáveis auxiliares, ao contrário do que acontece, por exemplo, em formulações baseadas no método de elementos finitos mistos.

Com o objectivo de validar o método C/DG-FEM, vários testes numéricos foram apresentados. Uma boa concordância foi observada entre as soluções provenientes do modelo aqui proposto com as soluções resultantes dos outros modelos discutidos neste trabalho. Destes testes, concluímos que o modelo por nós desenvolvido é apropriado para modelar ondas marítimas de superfície, conduzindo a algoritmos eficientes e robustos incluídos no código DOLFWAVE. Este código foi por nós desenvolvido durante este trabalho de investigação científica apresentado nesta dissertação.



**Figura 3.18:** A elevação da superfície da onda  $\eta$  (m) dada pelo modelo 4o-M-CDG-P2 em  $t_0 = 1$  s (a),  $t_1 = 2$  s (b),  $t_2 = 3.5$  s (c) e  $t_3 = 5$  s (d). O parâmetro de penalização é dado por  $\tau = 0.1 \text{ m}^4$ .



**Figura 3.19:** Os perfis da elevação da superfície da onda  $\eta$  (m) resultantes dos modelos 4o-M-CDG-P2, 2o-ZTC-P2 e 2o-ZTC-P1 nos instantes  $t_0 = 1$  s (a),  $t_1 = 2$  s (b),  $t_2 = 3.5$  s (c) bem como para  $t_3 = 5$  s (d) e em  $y = 0$  m.



## Capítulo 4

# Um método de elementos finitos contínuos/descontínuos aplicado a uma classe de equações melhoradas do tipo KdV-BBM<sup>1</sup>

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, implementamos um método de Galerkin de elementos finitos contínuos/descontínuos (C/DG-FEM) para uma classe de equações melhoradas do tipo Korteweg-de Vries/Bona-Benjamin-Mahony (KdV-BBM) com alguns parâmetros livres a determinar. Em princípio, o esquema C/DG-FEM é aqui usado pela primeira vez para a integração deste tipo de equações. Estas equações do tipo KdV-BBM são usadas para modelar diversos problemas da Física, tais como a propagação de ondas de superfície na água ou em plasmas. Sem perda de generalidade, neste capítulo referimo-nos apenas ao problema de propagação de ondas marítimas de superfície. Note-se que as equações clássicas BBM, KdV-BBM e KdV modificada foram recentemente resolvidas usando-se um esquema de elementos finitos de Petrov-Galerkin (ver Avilez-Valente e Seabra-Santos (2004)), um método de volumes finitos (ver Dutykh et al. (2013)) bem como um método de Galerkin de elementos finitos descontínuos juntamente com um esquema do tipo Runge-Kutta (ver Rostamy e Zabihi (2013)), respectivamente.

Na segunda secção, uma classe de equações melhoradas do tipo KdV-BBM é deduzida a partir da classe de equações de Boussinesq proposta no capítulo 3. Destas equações de Boussinesq e utilizando-se técnicas recursivas é deduzida uma classe de equações não lineares e de terceira ordem para a propagação unidireccional de ondas de superfície sobre um fundo constante da região ocupada pelo fluido. A função incógnita desta classe de equações do tipo KdV-BBM é a elevação da superfície da onda. Uma solução analítica do tipo solitão da equação KdV-BBM proposta é também deduzida. A validade deste tipo de solução é discutida em termos da velocidade de propagação da onda assim como dos valores dos parâmetros livres introduzidos nestas equações. Algumas propriedades dispersivas destas equações são estabelecidas. Os desenvolvimentos de Padé de ordens  $[2, 1]$ ,  $[1, 2]$  e  $[2, 2]$  da velocidade de fase

---

<sup>1</sup>Parcialmente publicado em: Lopes, N. D., Pereira, P. J. S. e Trabucho, L., A numerical analysis of a class of KdV-BBM equations using Continuous/Discontinuous Galerkin Finite Element Method, Proceedings of Fluid Mechanics, Thermodynamics and Energy 2012, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 2012. Submetido para publicação como: Lopes, N. D., Pereira, P. J. S. and Trabucho, L., A continuous/discontinuous finite element method applied to a parameterised class of KdV-BBM equations.

do modelo da teoria linear de Airy são reproduzidos para valores apropriados dos parâmetros introduzidos no modelo KdV-BBM. Para além disto, mostramos que existem determinados valores para o parâmetro de Nwogu para os quais o erro entre os potenciais da velocidade do fluido dos modelos linearizados de KdV-BBM e de Airy é de ordem  $O(\mu^4)$ . Aqui  $\mu$  representa o parâmetro de onda longa. A ordem deste erro é a mesma da do erro de truncatura do modelo KdV-BBM proposto.

O método numérico usado na discretização da formulação variacional da equação KdV-BBM é descrito na terceira secção. Note-se que um método de elementos finitos convencional não pode ser directamente aplicado às equações do tipo KdV-BBM, uma vez que estas envolvem termos com derivadas parciais de terceira ordem com respeito à variável espacial. Neste contexto, um método C/DG-FEM é implementado para resolver numericamente as equações KdV-BBM. Salienta-se que factores de peso bem como um parâmetro livre são introduzidos no esquema C/DG-FEM para se obter consistência da relação de dispersão. Este tipo de esquemas usa o mesmo número de graus de liberdade que o método dos elementos finitos convencional, quando são utilizados elementos de Lagrange  $P_2$ . Um esquema de predição-correcção inicializado por um método explícito de Runge-Kutta é implementado para a integração no tempo das equações KdV-BBM. Estes esquemas são mais fáceis de implementar e necessitam de menor tempo de cálculo do que os esquemas implícitos. Contudo, os esquemas utilizados aqui são mais susceptíveis a instabilidades e requerem em geral passos de tempos menores.

Na quarta secção, uma condição do tipo Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) é deduzida para o esquema numérico associado às equações linearizadas dos modelos KdV e KdV-BBM. A influência do parâmetro de penalização  $\tau$  nas propriedades dispersivas do modelo numérico C/DG-FEM é investigada. Mostra-se que este parâmetro actua como um filtro para ondas de menor comprimento. A ordem de convergência da razão entre o passo de tempo e o diâmetro da malha é investigada para diferentes valores dos parâmetros livres  $\hat{\delta}_i$  ( $i = 1, 2$ ) e do coeficiente de penalização  $\tau$ . Salienta-se que esta razão é obtida a partir da condição do tipo CFL e que os parâmetros  $\hat{\delta}_i$  ( $i = 1, 2$ ) são introduzidos nas equações KdV-BBM para otimizar a relação de dispersão.

Na penúltima secção, o método numérico proposto é validado através da simulação de dois problemas físicos. A propagação de uma onda solitária é simulada usando-se as equações KdV e KdV-BBM. Vários valores do coeficiente de penalização são utilizados bem como várias discretizações espaciais são consideradas para investigar a estabilidade e a precisão dos modelos KdV-BBM. Conclui-se que existe uma boa concordância entre as soluções numéricas e as exactas. Para finalizar, a interacção entre dois solitões é modelada. A simulação da interacção entre estes dois solitões apenas é conseguida através da implementação do modelo KdV-BBM. As simulações numéricas são feitas recorrendo ao código DOLFWAVE que desenvolvemos durante o trabalho de investigação científica apresentado nesta dissertação (ver <http://launchpad.net/dolfwave> ou <http://ptmat.fc.ul.pt/~ndl/>).

## 4.2 A equação KdV-BBM e algumas propriedades dispersivas

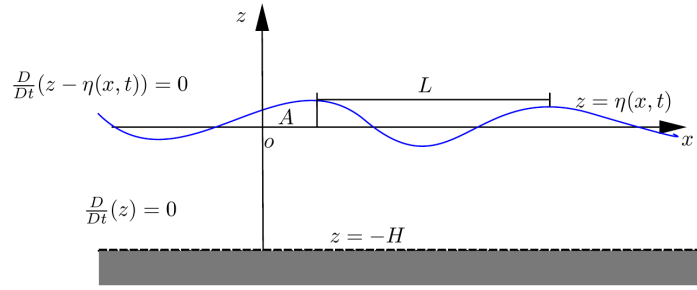
### 4.2.1 Dedução da equação KdV-BBM. Solução exacta do tipo solitão

Aqui, deduzimos uma classe de equações melhoradas do tipo KdV-BBM usando-se as equações adimensionais (3.21)–(3.34) sem termos dissipativos ( $\nu_i = 0, i = 1, 2$ ). Esta classe de equações melhoradas é de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$ , inclusivamente. Um fundo constante  $h$  da região ocupada pelo fluido é também aqui assumido. Assim como no capítulo 3, consideramos as escalas

seguintes:

$$x^* = \frac{1}{L}x, \quad z^* = \frac{1}{H}z, \quad t^* = \frac{t\sqrt{gH}}{L}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{A}, \quad h^* = \frac{h}{H}, \quad c^* = \frac{c}{\sqrt{gH}}, \quad (4.1)$$

onde  $g$  é aceleração da gravidade,  $t$  o tempo,  $\eta$  a elevação da superfície da onda marítima,  $c$  a velocidade de propagação da onda e  $L$ ,  $A$  bem como  $H$  são os valores característicos do comprimento de onda, da amplitude da onda e da profundidade da região ocupada pelo fluido, respectivamente. Um referencial Cartesiano é aqui adoptado com o eixo horizontal  $ox$  ao nível da água em repouso e o eixo  $oz$  dirigido para o exterior da região ocupada pelo fluido (ver figura 4.1). Os valores adimensionais destas quantidades físicas são denotados pelo símbolo do



**Figura 4.1:** Representação esquemática da região ocupada pelo fluido. Neste caso, o fundo impermeável do oceano e a superfície da onda marítima são também ilustrados. Aqui, a derivada material é denotada por  $\frac{D}{Dt}$ .

asterisco. No entanto, a notação do asterisco não é usada neste capítulo de forma a simplificar a escrita das equações. Consideram-se também os parâmetros de onda longa  $\mu$  e de onda de pequena amplitude  $\varepsilon$  seguintes:

$$\mu = \frac{H}{L}, \quad \varepsilon = \frac{A}{H}. \quad (4.2)$$

Salienta-se de novo que os termos não lineares estão relacionados com o parâmetro  $\varepsilon$  enquanto que os termos dispersivos estão associados ao parâmetro  $\mu$ . Assim, as equações adimensionais (3.21)–(3.34) são rescritas da forma seguinte:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mu^2 \alpha \beta_1 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x^2} + \mu^2 \left( \frac{1}{3} - \alpha(1 - \beta_1) + \frac{\alpha^2}{2} \right) \frac{\partial^4 \Phi_\alpha}{\partial x^4} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + \mu^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \frac{\partial^3 \Phi_\alpha}{\partial t \partial x^2} + \eta + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (4.3b)$$

onde  $\Phi_\alpha$  é o potencial transformado da velocidade (ver (3.25)) avaliado num nível arbitrário do fluido  $z = -\alpha h$  com  $\alpha \in [0, 1]$ . Para além disto,  $\beta_1$  é um parâmetro real livre introduzido na dedução do modelo proposto no capítulo anterior.

Com o objectivo de deduzir uma classe de equações do tipo KdV-BBM, começamos por derivar (4.3b) com respeito a  $x$ . A velocidade horizontal  $u$  em termos do potencial transformado da velocidade do fluido é definida como  $u = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x}$ . Assim, obtêm-se as equações

seguintes (ver (4.3)):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \beta_1 \mu^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(\eta u) + \mu^2 \left( \frac{1}{3} - \alpha(1 - \beta_1) + \frac{\alpha^2}{2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mu^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.4b)$$

Note-se que as equações (4.4) até à ordem  $O(\varepsilon, \mu^2)$  são rescritas da forma que segue:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = O(\mu^2, \varepsilon), \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = O(\mu^2, \varepsilon). \quad (4.5b)$$

Derivando-se (4.4a) e (4.4b) com respeito a  $t$  e a  $x$ , respectivamente, obtêm-se duas equações. Subtraindo-se estas duas equações temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \mu^2 \left( \alpha \beta_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} + \left( \frac{1}{3} + \alpha \beta_1 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} \right) + \\ + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} u + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

As equações (4.5) são usadas recursivamente em (4.6) para substituir alguns dos termos de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$  de forma a obter-se uma equação não linear para  $\eta$ . Deste modo, a equação (4.6) pode ser rescrita como segue:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \mu^2 \left( \alpha \beta_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} - \left( \alpha \beta_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \right) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( u^2 + \frac{\eta^2}{2} \right) = 0. \quad (4.7)$$

Para expressar o termo não linear  $\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2)$  de (4.7) em termos de  $\eta$ , usamos a transformação de variáveis seguinte (ver, e.g., Johnson (1997) para uma transformação similar):

$$T = t \quad \text{e} \quad X = x + \varepsilon \int_{-\infty}^x \eta(t, \hat{x}) d\hat{x}. \quad (4.8)$$

Salienta-se que esta transformação define  $X$  como uma coordenada móvel com velocidade  $-\varepsilon u + O(\varepsilon \mu^2, \varepsilon^2)$  a menos de uma função arbitrária de integração dependente do tempo (ver (4.5a)). Para além disto, as equações (4.5), escritas em termos das novas variáveis  $X$  e  $T$  (ver (4.8)), são usadas para substituir recursivamente em (4.7) as derivadas de  $u$  pelas derivadas de  $\eta$ . Mais concretamente, temos que

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{\partial u}{\partial X} = O(\mu^2, \varepsilon), \quad (4.9a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial T} + \frac{\partial \eta}{\partial X} = O(\mu^2, \varepsilon). \quad (4.9b)$$

Assim, deduz-se a equação seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \mu^2 \left( \alpha \beta_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial T^2 \partial X^2} - \left( \alpha \beta_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \right) - \\ - \varepsilon \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \eta + 2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)^2 \right) + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial X} g(T) + \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial X} g'(T) = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A função de integração  $g(T)$  em (4.10) surge quando a regra da cadeia é usada para expressar o termo  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$  de (4.7) nas novas variáveis  $X$  e  $T$  (ver (4.8)). No que segue, assume-se que as funções arbitrárias de integração  $g(T)$  e  $g'(T)$  são de pequena variação no tempo. Isto significa que  $g(T)$  e  $g'(T)$  são de ordem  $O(\varepsilon, \mu^2)$ . Como consequência, a equação diferencial não linear que propomos é dada por

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \mu^2 \left( \alpha \beta_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial T^2 \partial X^2} - \left( \alpha \beta_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \right) - \varepsilon \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \eta + 2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)^2 \right) = 0. \quad (4.11)$$

Assumindo-se que a onda se propaga de forma unidireccional, pode-se considerar a transformação

$$\tilde{\xi} = X - \tilde{T} \quad \text{e} \quad \tilde{T} = T. \quad (4.12)$$

Usando-se (4.12), a equação (4.11) pode ser rescrita como segue:

$$\begin{aligned} & -2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tilde{T} \partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tilde{T}^2} - \frac{\mu^2}{3} \frac{\partial^4 \eta}{\partial \tilde{\xi}^4} - 2\mu^2 \alpha \beta_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial \tilde{T} \partial \tilde{\xi}^3} + \mu^2 \alpha \beta_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial \tilde{T}^2 \partial \tilde{\xi}^2} - \\ & - \varepsilon \left[ 3 \left( \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tilde{\xi}^2} \eta + 2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{T}} \right)^2 - 4 \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{T}} \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Por sua vez, pode-se obter uma nova equação usando-se (4.13) e a transformação

$$\hat{T} = \varepsilon \tilde{T}. \quad (4.14)$$

Dividindo esta nova equação por  $\varepsilon$ , resulta

$$\begin{aligned} & -2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \hat{T} \partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \hat{T}^2} - \frac{\mu^2}{3\varepsilon} \frac{\partial^4 \eta}{\partial \tilde{\xi}^4} - 2\mu^2 \alpha \beta_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial \hat{T} \partial \tilde{\xi}^3} + \varepsilon \mu^2 \alpha \beta_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial \hat{T}^2 \partial \tilde{\xi}^2} - \\ & - \left[ 3 \left( \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tilde{\xi}^2} \eta + 2\varepsilon^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial \hat{T}} \right)^2 - 4\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \hat{T}} \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Uma equação de ordem  $O(\mu^2)$  é obtida se os termos de ordem  $O(\varepsilon)$ ,  $O(\varepsilon^2)$  e  $O(\varepsilon\mu^2)$  forem desprezados em (4.15). Multiplicando-se esta equação por  $-\frac{1}{2}$ , integrando-se em ordem a  $\tilde{\xi}$  e assumindo-se que  $\frac{\partial \eta}{\partial \hat{T}} = \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tilde{\xi}^3} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial \hat{T} \partial \tilde{\xi}^2} = 0$  quando  $|\tilde{\xi}| \rightarrow +\infty$  temos que

$$\frac{\partial \eta}{\partial \hat{T}} + \frac{1}{6} \frac{\mu^2}{\varepsilon} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tilde{\xi}^3} + \mu^2 \alpha \beta_1 \frac{\partial^3 \eta}{\partial \hat{T} \partial \tilde{\xi}^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\xi}} \eta = 0. \quad (4.16)$$

Uma nova equação pode ser obtida usando-se (4.16) e a substituição seguinte (ver (4.14)):

$$\tilde{T} = \frac{\hat{T}}{\varepsilon}, \quad (4.17)$$

juntamente com a transformação

$$\eta = \frac{2}{3\varepsilon} + \tilde{\eta}. \quad (4.18)$$

Multiplicando-se esta nova equação por  $\varepsilon$  temos que

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{T}} + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{1}{6} \mu^2 \frac{\partial^3 \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\xi}^3} + \mu^2 \alpha \beta_1 \frac{\partial^3 \tilde{\eta}}{\partial \tilde{T} \partial \tilde{\xi}^2} + \varepsilon \frac{3}{2} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{\eta} = 0. \quad (4.19)$$

Através de (4.19), pode-se obter

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{T}} = -\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\xi}} + O(\mu^2, \varepsilon). \quad (4.20)$$

Usando-se (4.20), obtém-se a equação seguinte:

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\xi}} = \alpha_k \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\xi}} - (1 - \alpha_k) \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{T}} + O(\mu^2, \varepsilon), \quad (4.21)$$

em que  $\alpha_k$  é um parâmetro real arbitrário. Usando-se (4.21), o terceiro termo de ordem  $O(\mu^2)$  no primeiro membro da equação (4.19) pode ser rescrito, resultando a equação seguinte:

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{T}} + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\xi}} + \mu^2 \frac{\alpha_k}{6} \frac{\partial^3 \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\xi}^3} + \mu^2 \left( \alpha \beta_1 + \frac{\alpha_k - 1}{6} \right) \frac{\partial^3 \tilde{\eta}}{\partial \tilde{T} \partial \tilde{\xi}^2} + \varepsilon \frac{3}{2} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{\eta} = 0. \quad (4.22)$$

No que segue, a função incógnita  $\tilde{\eta}$  e as variáveis adimensionais  $\tilde{\xi}$  e  $\tilde{T}$  são denotadas por  $\eta$ ,  $x$  e  $t$ , respectivamente, de modo a simplificar a escrita das equações. Deste modo, a equação (4.22) é escrita da forma seguinte:

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2} \varepsilon \eta \eta_x + \hat{\delta}_1 \mu^2 \eta_{txx} + \hat{\delta}_2 \mu^2 \eta_{xxx} = 0, \quad (4.23)$$

em que

$$\hat{\delta}_1 = \left( \alpha \beta_1 + \frac{\alpha_k - 1}{6} \right), \quad \hat{\delta}_2 = \frac{\alpha_k}{6}. \quad (4.24)$$

Neste capítulo, o índice  $t$  denota a derivada parcial com respeito à variável temporal enquanto que o índice  $x$  denota a derivada parcial com respeito à variável espacial.

Uma solução exacta do tipo solitão da equação (4.23) pode ser obtida da forma que segue. Usando-se (4.23) e uma transformação de Galileu  $\xi = x - ct$  obtém-se uma determinada equação. Note-se que  $c$  representa a velocidade de propagação da onda na forma adimensional. Integrando-se esta equação com respeito à variável  $\xi$  e impondo-se as condições de fronteira  $\eta = \eta_{\xi\xi} = 0$  quando  $|\xi| \rightarrow +\infty$  obtém-se uma nova equação. Multiplicando-se esta nova equação por  $\eta_\xi$  e integrando-se com respeito a  $\xi$  assim como impondo-se as condições de fronteira  $\eta = \eta_\xi = 0$  quando  $|\xi| \rightarrow +\infty$ , temos que

$$(1 - c)\eta^2 + \frac{\varepsilon}{2}\eta^3 + \mu^2(\hat{\delta}_2 - c\hat{\delta}_1)\eta_\xi^2 = 0. \quad (4.25)$$

Integrando-se (4.25) com respeito a  $\xi$  através do método de substituição obtém-se uma solução exacta de (4.23) do tipo solitão dada por

$$\eta(x, t) = 2 \left( \frac{c-1}{\varepsilon} \right) \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{c-1}{\hat{\delta}_2 - c\hat{\delta}_1}} (x - ct) + K \right), \quad (4.26)$$

em que  $K$  é uma constante arbitrária de integração e o radicando da raiz quadrada em (4.26) deve ser um número real não negativo.

Note-se que se se escolher  $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$  em (4.23)–(4.24), obtém-se a equação KdV clássica (ver Korteweg e de Vries (2011)). Por outro lado, se se considerar  $\hat{\delta}_1 = -\frac{1}{6}$  e  $\hat{\delta}_2 = 0$

a equação BBM clássica é recuperada (ver Benjamin et al. (1972)). Salientamos que para estas equações clássicas, as soluções dadas por (4.26) apenas são válidas para  $c \in [1, +\infty[$ . Para além disto, a equação BBM admite soluções da forma de ondas de depressão no caso em que  $c < 0$ . Refere-se que no modelo aqui proposto é possível considerar outros valores para  $\hat{\delta}_1$  e  $\hat{\delta}_2$  permitindo a existência de outros domínios de validade para a velocidade de propagação da onda  $c$ . Como veremos na subsecção seguinte, obtemos os valores de  $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$  através da comparação da relação de dispersão do modelo proposto com a relação de dispersão do modelo linear de Airy. Para estes valores, o domínio de validade para a velocidade de propagação da onda  $c$  é dado por  $] -\infty, \frac{9}{19}[ \cup [1, +\infty[$ . Salienta-se que para valores de  $c \in ] -\infty, \frac{9}{19}[$  uma onda de depressão é obtida.

Usando-se (4.1) e (4.2), as equações (4.23) e (4.26) podem ser escritas na forma dimensional que segue:

$$\eta_t + \delta_0 \eta_x + \frac{3}{2} \varsigma \eta \eta_x + \delta_1 \eta_{txx} + \delta_2 \eta_{xxx} = 0, \quad (4.27)$$

$$\eta(x, t) = 2 \left( \frac{c - \delta_0}{\varsigma} \right) \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{c - \delta_0}{\delta_2 - c \delta_1} \right)} (x - ct) + K \right), \quad (4.28)$$

com

$$\delta_0 = \sqrt{gh}, \quad \varsigma = \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad \delta_1 = \hat{\delta}_1 h^2, \quad \delta_2 = \hat{\delta}_2 h^2 \sqrt{gh}. \quad (4.29)$$

De forma similar, o radicando da raiz quadrada em (4.28) deve ser um número real não negativo.

## 4.2.2 Relações de dispersão dos modelos linearizados de Airy e de KdV-BBM

O problema linear baseado no potencial da velocidade do fluido respeitante à teoria de Airy sem termos dissipativos é descrito por um conjunto de equações bem conhecido (ver, e.g., as equações (3.40) com  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ ). As variáveis independentes destas equações são as coordenadas Cartesianas e o tempo  $(x, z, t)$ . As funções incógnita deste sistema de equações são a elevação da superfície da onda  $\eta$  e o potencial da velocidade do fluido o qual é denotado por  $\phi$ . Estas equações de Airy podem ser rescritas em termos das variáveis independentes  $(\tilde{\xi}, z, \tilde{T})$  e das funções incógnita  $\tilde{\eta}$  e  $\phi$  usando-se o grupo de transformações introduzido na secção anterior (ver (4.8), (4.12), (4.14), (4.17) e (4.18)). Deste modo, as equações linearizadas de Airy são dadas por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (x, z) \in \mathbb{R} \times [-h, 0], \quad (4.30a)$$

$$-\sqrt{gh} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (4.30b)$$

$$-\sqrt{gh} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{2}{3}gh = 0, \quad z = 0, \quad (4.30c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (4.30d)$$

Note-se que as equações (4.30) estão escritas na forma dimensional e que as funções incógnita  $\tilde{\eta}$  e  $\phi$  assim como as variáveis independentes  $(\tilde{\xi}, z, \tilde{T})$  são denotadas por  $\eta$ ,  $\phi$  e  $(x, z, t)$ , respectivamente. Isto é feito de forma a simplificar a escrita das equações. Este problema

admite soluções da forma seguinte:

$$\eta(x, t) = a e^{i(kx - \omega_a t)} - \frac{2}{3}h, \quad (4.31a)$$

$$\phi(x, z, t) = \hat{b}(z) e^{i(kx - \omega_a t)}, \quad (4.31b)$$

desde que seja satisfeita a relação de dispersão dada por

$$\frac{(\omega_a + k\sqrt{gh})^2}{ghk^2} = \frac{\tanh(kh)}{kh}. \quad (4.32)$$

Aqui  $\omega_a + k\sqrt{gh}$  é a frequência angular,  $\sqrt{gh}$  é a velocidade do referencial devido à utilização da transformação de Galileu,  $a$  a amplitude da onda,  $\hat{b}(z)$  é uma função relacionada com a magnitude do potencial da velocidade,  $k = \frac{2\pi}{L}$  é o número de onda e  $L$  representa o comprimento de onda. Note-se que usando-se (4.31a) e substituindo-se  $\phi(x, z, t)$  dado por (4.31b) em (4.30) a função  $\hat{b}(z)$  fica determinada. De facto, a função  $\hat{b}(z)$  é dada por

$$\hat{b}(z) = -\frac{i\sqrt{ga}}{\sqrt{k}\sqrt{(1 + e^{2kh})(e^{2kh} - 1)}} \left( e^{kz} e^{2kh} + e^{-kz} \right). \quad (4.33)$$

Em particular, usando-se (4.32) e (4.33) pode-se determinar  $\hat{b}(0)$  como uma função de  $\omega_a + k\sqrt{gh}$  a qual é dada pela relação seguinte:

$$\hat{b}(0) = -\frac{ia g}{\omega_a + k\sqrt{gh}}. \quad (4.34)$$

Neste caso a velocidade de fase normalizada do modelo completamente linear de Airy  $\bar{C}_p$  é definida por

$$\bar{C}_p = \frac{\omega_a + k\sqrt{gh}}{k\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{\tanh(kh)}{kh}}. \quad (4.35)$$

Por outro lado, a linearização da equação (4.27) com os coeficientes dados por (4.29) é escrita da forma seguinte:

$$\eta_t + \delta_0 \eta_x + \delta_1 \eta_{txx} + \delta_2 \eta_{xxx} = 0. \quad (4.36)$$

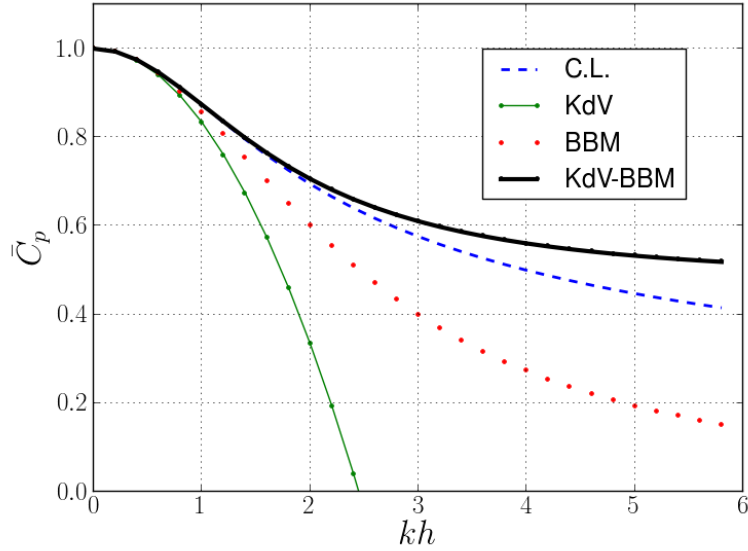
Esta última equação também admite uma solução da forma

$$\eta(x, t) = a e^{i(kx - \omega t)} - \frac{2}{3}h, \quad (4.37)$$

desde que seja satisfeita a relação de dispersão seguinte:

$$\bar{C}_p \equiv \frac{\omega}{\sqrt{gh}k} = \frac{1 - \hat{\delta}_2(kh)^2}{1 - \hat{\delta}_1(kh)^2}. \quad (4.38)$$

Pode-se impor que as velocidades de fase normalizadas dos modelos linearizados de Airy e de KdV-BBM sejam iguais. Isto significa que o segundo membro de (4.38) deve ser igual ao segundo membro de (4.35). Note-se que o gráfico de  $\omega_a + k\sqrt{gh}$  pode ser obtido através de uma translação do gráfico de  $\omega_a$  de  $k\sqrt{gh}$  unidades na direcção negativa do eixo  $\omega_a$ . Deste modo, através de uma escolha apropriada dos parâmetros  $\hat{\delta}_i$  ( $i = 1, 2$ ) em (4.38) é possível reproduzir os desenvolvimentos de Padé de ordem  $[2, 1]$ ,  $[1, 2]$  e  $[2, 2]$  da velocidade de fase normalizada  $\bar{C}_p$  do problema de Airy completamente linear (ver (4.35)). Mais concretamente, temos os três casos seguintes:  $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ,  $\hat{\delta}_1 = -\frac{1}{6}$  e  $\hat{\delta}_2 = 0$  assim como  $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e



**Figura 4.2:** A velocidade de fase normalizada  $\bar{C}_p$  como função de  $kh$  para as equações KdV, BBM e KdV-BBM com  $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ,  $\hat{\delta}_1 = -\frac{1}{6}$  e  $\hat{\delta}_2 = 0$  assim como  $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ , respectivamente. Também se mostra  $\bar{C}_p$  como função de  $kh$  para o modelo de Airy completamente linear (C.L.).

$\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$  para os desenvolvimentos de Padé de ordem  $[2, 1]$  (equação clássica KdV),  $[1, 2]$  (equação clássica BBM) assim como  $[2, 2]$  (equação KdV-BBM deduzida neste trabalho), respectivamente (ver figura 4.2). Salienta-se que a escolha dos valores para os parâmetros  $\hat{\delta}_i$  ( $i = 1, 2$ ) determinam que o valor de  $\alpha\beta_1$  seja igual a zero. No entanto, se se considerar  $\beta_1 = 0$ , o parâmetro de Nwogu denotado por  $\alpha$  ( $\alpha \in [0, 1]$ ) pode ser determinado de forma a otimizar o perfil do potencial da velocidade do fluido para o modelo KdV-BBM linearizado. Esta otimização é realizada na subsecção seguinte.

Uma vez que a equação BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{1}{6}$  e  $\hat{\delta}_2 = 0$ ) pode ser discretizada usando-se um método de elementos finitos convencional (ver, e.g., Walkley (1999)) apenas se consideram nas secções seguintes a equação KdV com  $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$  assim como a equação KdV-BBM com  $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ .

### 4.2.3 Determinação do parâmetro de Nwogu para o modelo KdV-BBM linearizado

Assuma-se uma solução do modelo KdV-BBM linearizado da forma seguinte:

$$\eta(x, t) = a e^{i(kx - \omega t)} - \frac{2}{3}h, \quad (4.39a)$$

$$\Phi_\alpha(x, t) = b e^{i(kx - \omega t)}. \quad (4.39b)$$

No que segue, compara-se o potencial transformado da velocidade do fluido dado por (4.39b) e associado ao modelo KdV-BBM linearizado com o potencial da velocidade do fluido do modelo linearizado dado por (4.31b) relativo à teoria linear de Airy. Note-se que nas equações (4.39) assim como nesta subsecção as funções incógnita  $\tilde{\eta}$ ,  $\Phi_\alpha$  e  $\phi$  assim como as variáveis independentes  $(\tilde{\xi}, z, \tilde{T})$  são denotadas por  $\eta$ ,  $\Phi_\alpha$ ,  $\phi$  e  $(x, z, t)$ , respectivamente. Isto é feito de forma a simplificar a escrita das equações.

A partir das equações (3.13), (3.20) e (3.25)–(3.28) pode-se obter uma certa expressão de ordem  $O(\mu^2)$ , inclusivamente, para o potencial transformado da velocidade do fluido na forma adimensional. Usando-se o grupo de transformações introduzido na subsecção 4.2.1 (ver (4.8), (4.12), (4.14), (4.17) e (4.18)) pode-se obter uma nova equação de ordem  $O(\mu^2)$ , inclusivamente, para o potencial transformado da velocidade do fluido no espaço das variáveis independentes  $(\xi, z, \tilde{T})$ . Desta forma,  $\phi(x, z, t)$  e  $\Phi_\alpha(x, t)$  estão relacionados de acordo com a equação dimensional seguinte:

$$\phi(x, z, t) = \Phi_\alpha + h^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x^2} + \left( \frac{z^2}{2} - zh \right) \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x^2}. \quad (4.40)$$

Usando-se (4.40) o potencial da velocidade do fluido avaliado em  $z = 0$  é dado por

$$\phi(x, 0, t) = \Phi_\alpha + h^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x^2}. \quad (4.41)$$

Note-se que para  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 2$  obtém-se

$$\phi(x, 0, t) = \Phi_\alpha. \quad (4.42)$$

Salientamos que dos valores de  $\alpha$  encontrados ( $\alpha = 0$  e  $\alpha = 2$ ) apenas o valor  $\alpha = 0$  pertence ao intervalo  $[0, 1]$ . A partir da comparação da equação (4.31b) avaliada em  $z = 0$  com a equação (4.42) e usando-se (4.39b) resulta que  $b \sim \hat{b}(0)$  com os cálculos efectuados no instante  $t = 0$ .

Por outro lado, substituindo-se  $\Phi_\alpha$  dado por (4.39b) em (4.41) temos que

$$\phi(x, 0, t) = b \left( 1 - \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) (kh)^2 \right) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (4.43)$$

Através das equações (4.31b) e (4.34) do modelo linear de Airy resulta a expressão para o potencial da velocidade do fluido seguinte:

$$\phi(x, 0, t) = -\frac{ia g}{\omega_a + k\sqrt{gh}} e^{i(kx - \omega_a t)}. \quad (4.44)$$

Usando-se (4.44) avaliada no instante  $t = 0$  e desenvolvendo-se o termo (ver (4.35) e (4.44))

$$\frac{1}{\omega_a + k\sqrt{gh}} = \frac{1}{k\sqrt{gh}} \sqrt{\frac{kh}{\tanh(kh)}}, \quad (4.45)$$

em série de Taylor em torno do ponto  $kh = 0$  até à ordem  $O((kh)^2)$ , inclusivamente, resulta

$$\phi(x, 0, 0) = -\frac{ia g}{k\sqrt{gh}} \left( 1 + \frac{1}{6}(kh)^2 \right) e^{ikx}. \quad (4.46)$$

Comparando-se o segundo membro de (4.43) avaliado em  $t = 0$  com o segundo membro de (4.46) obtém-se

$$-\frac{ia g}{k\sqrt{gh}} \left( 1 + \frac{1}{6}(kh)^2 \right) = b \left( 1 - \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) (kh)^2 \right). \quad (4.47)$$

Esta última equação define a constante  $b$  relacionada com a magnitude do potencial transformado da velocidade do fluido  $\Phi_\alpha$  como segue:

$$b = -\frac{ia g}{k\sqrt{gh}} \quad (4.48)$$

desde que

$$\alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad (4.49)$$

Note-se que o erro cometido na expressão (4.47) é de ordem  $O((kh)^4)$ . Este erro é da mesma ordem do erro cometido na dedução do modelo KdV-BBM linearizado. Por último, refere-se que dos valores de  $\alpha$  dados por (4.49) somente o valor de  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$  pertence ao intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

### 4.3 Um esquema C/DG-FEM para a equação KdV-BBM

Nesta secção, introduzimos o método de Galerkin de elementos finitos contínuos/descontínuos com termos de penalização (C/DG-FEM) para discretizar as equações propostas dos modelos do tipo KdV-BBM, as quais são descritas por (4.27) e (4.29). Este esquema numérico surge dos conceitos introduzidos por Engel et al. (2002) para os problemas elípticos com derivadas de quarta ordem com respeito às variáveis espaciais. Estes modelos elípticos são utilizados em problemas de estruturas da Mecânica dos Meios Contínuos. Para implementar o esquema C/DG-FEM, definimos o espaço das funções incógnita e das funções teste da forma dada por

$$\mathcal{A}^h = \mathcal{V}^h = \{\vartheta^h \in H^1(\Omega) : \vartheta^h|_{\Omega_e} \in \mathbf{P}_2(\Omega_e), \quad \forall \Omega_e \in \mathcal{P}(\Omega)\}, \quad (4.50)$$

onde  $\mathcal{P}(\Omega) = \{\Omega_e\}_{e=1}^{N_e}$  é uma partição regular do domínio  $\Omega$  em  $N_e$  elementos  $\Omega_e$ . Por sua vez,  $\mathbf{P}_2(\Omega_e)$  é o espaço de dimensão finita de todos os polinómios de grau menor ou igual a 2 definidos sobre  $\Omega_e$ . O método que propomos para a resolução do problema descrito por (4.27) e (4.29) pode ser escrito como segue. Para cada  $t$ , determinar  $\eta^h \in \mathcal{A}^h$  tal que

$$\mathbf{a}(\eta_t^h, \vartheta^h) = \mathbf{L}(\eta^h, \vartheta^h), \quad \forall \vartheta^h \in \mathcal{V}^h, \quad (4.51)$$

onde  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  bem como  $\mathbf{L}(\cdot, \cdot)$  são obtidas a partir da formulação variacional do problema. Nas próximas equações utiliza-se a notação seguinte:

$$(\cdot, \cdot)_{\tilde{\Omega}} = \sum_{e=1}^{N_e} (\cdot, \cdot)_{\Omega_e}, \quad (\cdot, \cdot)_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{j=1}^{N_i} (\cdot, \cdot)_{\tilde{\Gamma}_j}, \quad (\cdot, \cdot)_{\Gamma_h} = \sum_{j=1}^{N_h} (\cdot, \cdot)_{\Gamma_j}, \quad (4.52)$$

com  $N_i$  o número de nós interiores ao domínio e  $N_h$  o número de nós na fronteira do domínio computacional. Para além disso,  $(\cdot, \cdot)_{\tilde{\Omega}}$  representa o produto interno de  $L^2$  nos interiores dos elementos, enquanto que  $(\cdot, \cdot)_{\tilde{\Gamma}}$  representa o produto interno de  $L^2$  sobre os nós interiores ao domínio. Por outro lado, o produto interno de  $L^2$  sobre os nós da fronteira do domínio é denotado por  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_h}$ . O operador do salto  $[[\cdot]]$  é definido por  $[[v]] = v^- - v^+$  para uma função escalar  $v$ , com  $v^+$  e  $v^-$  os valores de  $v$  vistos a partir de  $\Omega_e^+$  e  $\Omega_e^-$ , respectivamente. Aqui,  $\Omega_e^+$  e  $\Omega_e^-$  representam dois elementos adjacentes em  $\mathcal{P}(\Omega)$  (ver Fig. 4.3). De forma análoga, o operador da média  $\langle \cdot \rangle$  é definido sobre os nós das interfaces dos elementos por  $\langle v \rangle = (1/2)(v^+ + v^-)$  para uma função escalar  $v$ . Os termos de penalização, quer nos nós interiores, quer nos nós da fronteira do domínio computacional, estão associados aos parâmetros

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{h_e^+}, \quad \bar{\tau}^h = \frac{\tau^h}{h_e}, \quad (4.53)$$

respectivamente. Em (4.53)  $h_e^+$  e  $h_e$  são funções que dependem do diâmetro dos elementos  $\Omega_e^+$  e  $\Omega_e$ , respectivamente. Nos testes numéricos, consideramos que  $\tau = \tau^h$  sobre todos os elementos. As formas  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  e  $\mathbf{L}(\cdot, \cdot)$  são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\eta_t^h, \vartheta^h) &= (\eta_t^h, \vartheta^h)_{\tilde{\Omega}} - \delta_1 (\eta_{tx}^h, \vartheta_x^h)_{\tilde{\Omega}} + \delta_1 (\eta_{tx}^h, \vartheta^h \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_h} + \\ &\quad + \bar{\tau} \left( [[\eta_{tx}^h]], [[\vartheta_x^h]] \right)_{\tilde{\Gamma}} + \bar{\tau}^h (\eta_{tx}^h, \vartheta_x^h)_{\Gamma_h}, \end{aligned} \quad (4.54a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\eta^h, \vartheta^h) &= \delta_0 (\eta^h, \vartheta_x^h)_{\tilde{\Omega}} + \frac{3}{4} \zeta \left( (\eta^h)^2, \vartheta_x^h \right)_{\tilde{\Omega}} - \delta_2 (\eta_x^h, \vartheta_{xx}^h)_{\tilde{\Omega}} + \\ &+ s_1 \delta_2 \left( \langle \eta_x^h \rangle, [[\vartheta_x^h]] \right)_{\tilde{\Gamma}} + s_2 \delta_2 \left( \langle \vartheta_x^h \rangle, [[\eta_x^h]] \right)_{\tilde{\Gamma}} - \delta_0 (\eta^h, \vartheta^h \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_h} - \frac{3}{4} \zeta \left( (\eta^h)^2, \vartheta^h \cdot \mathbf{n} \right)_{\Gamma_h} + \\ &\quad + \delta_2 (\eta_x^h, \vartheta_x^h \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_h} - \delta_2 (\eta_{xx}^h, \vartheta^h \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_h}, \end{aligned} \quad (4.54b)$$

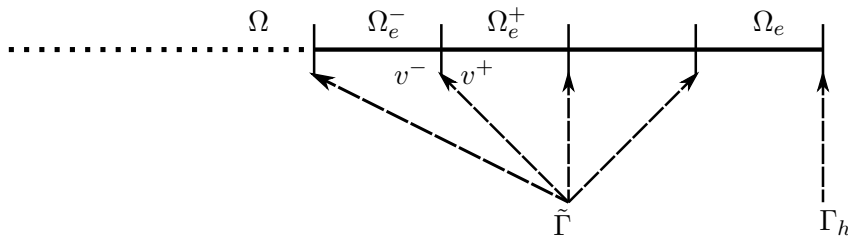
respectivamente. Em (4.54b) os factores de peso são denotados  $s_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ), os quais são calculados de forma a que a relação de dispersão associada ao esquema numérico seja consistente. Salienta-se também que no caso das funções base do espaço das funções incógnita e das funções teste serem suficientemente suaves, e.g., de classe  $C^2([0, T]; \Omega)$  com  $T$  um limite superior para a variável temporal, então todos os termos que são avaliados sobre os nós são nulos. Neste caso, resulta uma formulação de elementos finitos convencional. Um esquema de predição-correcção, inicializado por um método explícito de Runge-Kutta, é utilizado para a integração no tempo de (4.51). A discretização da equação (4.51) pode ser escrita na forma seguinte:

$$MU_t = \mathbf{F}(t, U), \quad (4.55)$$

onde  $U_t$  e  $U$  estão associados à discretização de  $\eta_t^h$  e  $\eta^h$ , respectivamente (onde  $\eta^h(t, x)$  é dado por uma combinação linear dependente do tempo das funções de base  $\vartheta^h(x)$ ). A matriz dos coeficientes  $M$  é dada pelo primeiro membro de (4.51), o qual é dado por (4.54a). Por outro lado, o vector  $\mathbf{F}$  está relacionado com o segundo membro de (4.54a), o qual é dado por (4.54b). Desta forma, o método de quarta ordem de Adams-Bashforth-Moulton pode escrever-se da forma seguinte:

$$\begin{aligned} MU_{n+1}^{(0)} &= MU_n + \frac{\Delta t}{24} \left[ 55\mathbf{F}(t_n, U_n) - 59\mathbf{F}(t_{n-1}, U_{n-1}) + \right. \\ &\quad \left. + 37\mathbf{F}(t_{n-2}, U_{n-2}) - 9\mathbf{F}(t_{n-3}, U_{n-3}) \right], \end{aligned} \quad (4.56a)$$

$$\begin{aligned} MU_{n+1}^{(1)} &= MU_n + \frac{\Delta t}{24} \left[ 9\mathbf{F}(t_n, U_{n+1}^{(0)}) + 19\mathbf{F}(t_n, U_n) - \right. \\ &\quad \left. - 5\mathbf{F}(t_{n-1}, U_{n-1}) + \mathbf{F}(t_{n-2}, U_{n-2}) \right], \end{aligned} \quad (4.56b)$$



**Figura 4.3:** Esquema do domínio computacional  $\Omega$  com os elementos  $\Omega_e$ ,  $\Omega_e^-$  e  $\Omega_e^+$  bem como os nós das interfaces interiores  $\tilde{\Gamma}$  e os nós da fronteira  $\Gamma_h$ .

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo,  $t_n = n\Delta t$  ( $n \in N$ ) e  $U_n$  é  $U$  avaliado em  $t_n$ . Os valores preditos e corrigidos de  $U_n$  são denotados por  $U_n^{(0)}$  e  $U_n^{(1)}$ , respectivamente. A equação (4.56b) associada ao passo de correcção pode ser iterada como função de um erro predefinido entre passos de tempo consecutivos.

#### 4.4 Consistência da relação de dispersão e condição do tipo CFL

Nesta secção, apresentam-se alguns resultados sobre a consistência da relação de dispersão e a estabilidade do esquema numérico associado à equação linearizada do modelo KdV-BBM dada por (4.36). Assumimos uma solução com variáveis separáveis para a elevação da superfície da onda da forma seguinte:

$$\eta(x, t) = ae^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.57)$$

onde  $a$  é a amplitude da onda e  $\omega$  representa a frequência angular que pode ser real ou complexa. A forma das soluções descrita por (4.57) permite substituir  $\eta_t$  por  $-i\omega\eta$  nas equações linearizadas dos modelos KdV-BBM. Substituindo-se  $\eta$  em (4.51) pela sua forma discretizada por elementos finitos  $\hat{\eta}$  e usando-se (4.51), (4.54) e (4.57) obtém-se um sistema da forma seguinte:

$$(\mathcal{K} + i\omega\mathcal{M})U = 0, \quad (4.58)$$

onde  $\mathcal{K}$  é a matriz de rigidez relacionada com o segundo membro da equação (4.51) (ver (4.54b)) e  $\mathcal{M}$  é a matriz de massa dada pelo primeiro membro da mesma equação (ver (4.54a)). Assumindo-se uma malha uniforme e desprezando-se o efeito das condições de fronteira então (4.58) é descrita pelo conjunto de equações semi-discretas que segue:

$$\begin{aligned} & -i\omega \left( \frac{\Delta x}{15} + \frac{8\delta_1}{3\Delta x} - \frac{24\tau}{\Delta x^3} \right) \hat{\eta}_j - i\omega \left( \frac{\Delta x}{15} + \frac{8\delta_1}{3\Delta x} - \frac{4\tau}{\Delta x^3} \right) \hat{\eta}_{j-1} - \\ & - i\omega \left( -\frac{4\tau}{\Delta x^3} \right) \hat{\eta}_{j+1} - i\omega \left( \frac{16\tau}{\Delta x^3} \right) \hat{\eta}_{j+\frac{1}{2}} - i\omega \left( \frac{8\Delta x}{15} - \frac{16\delta_1}{3\Delta x} + \frac{16\tau}{\Delta x^3} \right) \hat{\eta}_{j-\frac{1}{2}} = \\ & = \left( \frac{8\delta_2}{\Delta x^2} - \frac{2\delta_0}{3} - \frac{12\delta_2 s_2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_j + \left( \frac{2\delta_2 s_1}{\Delta x^2} - \frac{2\delta_2 s_2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_{j+1} + \left( \frac{8\delta_2 s_1}{\Delta x^2} + \frac{8\delta_2 s_2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_{j-\frac{1}{2}} + \\ & + \left( -\frac{8\delta_2 s_1}{\Delta x^2} + \frac{8\delta_2 s_2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_{j+\frac{1}{2}} + \left( -\frac{2\delta_2 s_2}{\Delta x^2} - \frac{8\delta_2}{\Delta x^2} + \frac{2\delta_0}{3} - \frac{2\delta_2 s_1}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_{j-1}, \\ & \hspace{20em} 2 \leq j \leq N-2, \quad (4.59a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -i\omega \left( \frac{4\Delta x}{15} - \frac{14\delta_1}{3\Delta x} + \frac{36\tau}{\Delta x^3} \right) \hat{\eta}_j - i\omega \left( -\frac{\Delta x}{30} - \frac{\delta_1}{3\Delta x} + \frac{6\tau}{\Delta x^3} \right) (\hat{\eta}_{j-1} + \hat{\eta}_{j+1}) - \\ & - i\omega \left( \frac{\Delta x}{15} + \frac{8\delta_1}{3\Delta x} - \frac{24\tau}{\Delta x^3} \right) (\hat{\eta}_{j-\frac{1}{2}} + \hat{\eta}_{j+\frac{1}{2}}) = \\ & = \left( \frac{\delta_0}{6} - \frac{4\delta_2}{\Delta x^2} - \frac{3\delta_2 s_1}{\Delta x^2} \right) (\hat{\eta}_{j+1} - \hat{\eta}_{j-1}) + \left( -\frac{2\delta_0}{3} + \frac{12\delta_2 s_1}{\Delta x^2} \right) (\hat{\eta}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{\eta}_{j-\frac{1}{2}}), \\ & \hspace{20em} 2 \leq j \leq N-2, \quad (4.59b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\omega \left( \frac{\Delta x}{15} + \frac{8\delta_1}{3\Delta x} + \frac{24\tau}{\Delta x^3} \right) \hat{\eta}_j - i\omega \left( \frac{\Delta x}{15} + \frac{8\delta_1}{3\Delta x} + \frac{4\tau}{\Delta x^3} \right) \hat{\eta}_{j+1} - \\
& - i\omega \left( \frac{4\tau}{\Delta x^3} \right) \hat{\eta}_{j-1} - i\omega \left( -\frac{16\tau}{\Delta x^3} \right) \hat{\eta}_{j-\frac{1}{2}} - i\omega \left( \frac{8\Delta x}{15} - \frac{16\delta_1}{3\Delta x} - \frac{16\tau}{\Delta x^3} \right) \hat{\eta}_{j+\frac{1}{2}} = \\
& = \left( -\frac{8\delta_2}{\Delta x^2} + \frac{2\delta_0}{3} + \frac{12\delta_2 s_2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_j + \left( \frac{2\delta_2 s_2}{\Delta x^2} - \frac{2\delta_2 s_1}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_{j-1} + \left( \frac{8\delta_2 s_1}{\Delta x^2} - \frac{8\delta_2 s_2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_{j-\frac{1}{2}} + \\
& + \left( -\frac{8\delta_2 s_1}{\Delta x^2} - \frac{8\delta_2 s_2}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_{j+\frac{1}{2}} + \left( \frac{2\delta_2 s_2}{\Delta x^2} + \frac{8\delta_2}{\Delta x^2} - \frac{2\delta_0}{3} + \frac{2\delta_2 s_1}{\Delta x^2} \right) \hat{\eta}_{j+1}, \\
& \qquad \qquad \qquad 2 \leq j \leq N-2, \quad (4.59c)
\end{aligned}$$

onde  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$  ( $j = 1, \dots, N-1$ ) é o diâmetro da malha uniforme com  $N$  elementos de Lagrange  $P_2$  e  $\hat{\eta}_p$  representa  $\hat{\eta}(x_p)$  com  $p \in \{j, j \pm \frac{1}{2}\}$  ( $j = 1, \dots, N$ ). Note-se que os índices  $j \pm \frac{1}{2}$  designam os nós centrais dos elementos de Lagrange  $P_2$ .

A relação de dispersão associada à equação linearizada e semi-discreta dos modelos KdV-BBM, obtida através da condensação das equações (4.59), é então dada por

$$\tilde{C}_p = \frac{\omega}{\sqrt{gh\tilde{k}}\sqrt{1 - \frac{\tilde{k}^2 \Delta x^2}{16}}} = \frac{D(\Delta x, \tilde{k})}{D^\tau(\Delta x, \tilde{k})}, \quad (4.60)$$

onde  $D$  e  $D^\tau$  são definidos pelas expressões seguintes:

$$\begin{aligned}
D(\Delta x, \tilde{k}) &= 5 + \left( \frac{20}{\Delta x^2} r - \frac{15}{\Delta x^2} \right) 6\hat{\delta}_2 h^2 s_1 + \left( 20 - \frac{5}{2}\tilde{k}^2 \Delta x^2 + 15\tilde{k}^2 \hat{\delta}_2 h^2 s_1 \right) r + \\
& + \frac{5}{8}\tilde{k}^2 \Delta x^2 + \left( \frac{20}{\Delta x^2} - \frac{5}{2}\tilde{k}^2 - \frac{15}{8}\tilde{k}^2 s_1 - \frac{40r}{\Delta x^2} - 5r\tilde{k}^2 \right) 6\hat{\delta}_2 h^2, \quad (4.61a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^\tau(\Delta x, \tilde{k}) &= 5 + 20r - 5 \left( \tilde{k}^2 + \frac{\Delta x^2}{16} \tilde{k}^4 \right) \hat{\delta}_1 h^2 - 3\tilde{k}^2 \Delta x^2 r + \frac{1}{16} \tilde{k}^4 \Delta x^4 r + \\
& + \frac{1}{4} \tilde{k}^2 \Delta x^2 - 20\tilde{k}^2 r \hat{\delta}_1 h^2 + \frac{10\Delta x^2}{4} \tilde{k}^4 r \hat{\delta}_1 h^2 + \frac{45}{8} \tilde{k}^4 \tau - \frac{1}{32} \tilde{k}^4 \Delta x^4, \quad (4.61b)
\end{aligned}$$

com  $r$  um parâmetro livre introduzido para condensar as equações semi-discretas e com  $\tilde{k}$  definido por

$$\tilde{k} = \frac{4}{\Delta x} \sin \left( \frac{k\Delta x}{4} \right). \quad (4.62)$$

Tomando o limite da relação de dispersão dada por (4.60) quando  $\Delta x$  tende para zero, pode-se mostrar que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tilde{C}_p = \frac{1 - \hat{\delta}_2 (kh)^2}{1 - \hat{\delta}_1 (kh)^2 + \frac{1}{2}k^4\tau}, \quad (4.63)$$

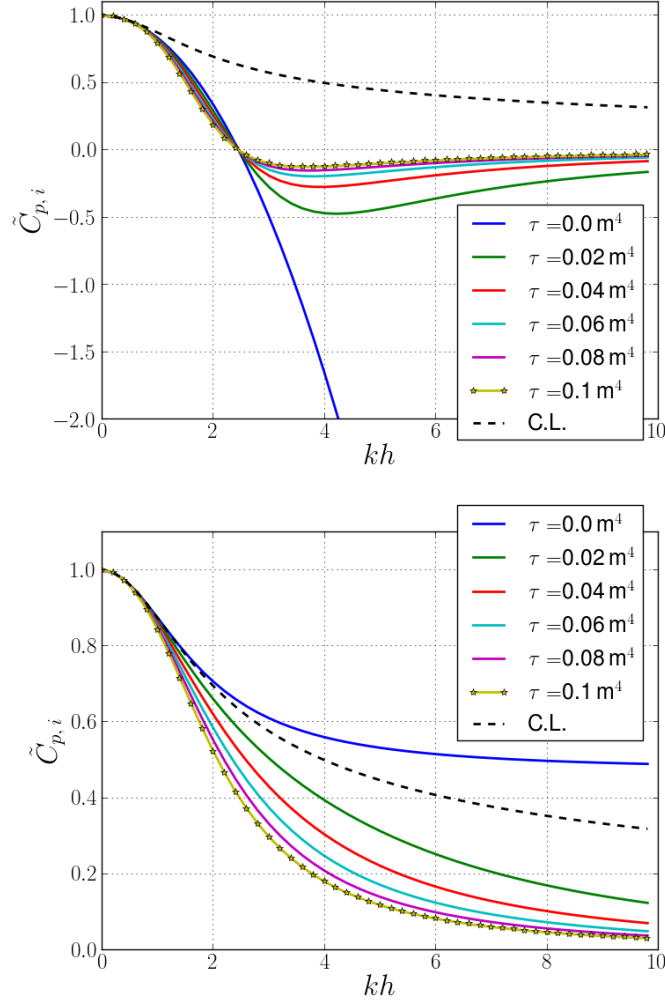
se os parâmetros  $r$  e  $s_1$  forem escolhidos da forma que segue:

$$r = \frac{5}{16}, \quad s_1 = \frac{6}{7}. \quad (4.64)$$

A equação (4.63) é consistente com a velocidade de fase normalizada dada por (4.38). Contudo, esta consistência é somente obtida para os valores dos parâmetros  $r$  e  $s_1$  dados por (4.64) e assumindo-se que  $\tau$  se aproxima de zero.

Na figura 4.4, podemos observar a influência do parâmetro de penalização  $\tau$  no limite da velocidade de fase normalizada quando  $\Delta x$  tende para zero. Em particular, a influência deste

parâmetro na propagação das ondas de menor comprimento para os modelos KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) e KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) pode também ser observada. A velocidade de fase normalizada  $\tilde{C}_p$  para o modelo completamente linear de Airy (C.L.) é também representada. Aplicando o método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem à equação seguinte:



**Figura 4.4:** A figura representa  $\tilde{C}_{p,i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tilde{C}_p$  (ver (4.63)) para os modelos KdV (painel superior e com  $i = \text{KdV}$ ) e KdV-BBM (painel inferior e com  $i = \text{KdV-BBM}$ ) com  $h = 1$  m e  $\tau \in [0, 0.1]$  ( $\text{m}^4$ ). A velocidade de fase normalizada  $\tilde{C}_p$  é também aqui ilustrada para o modelo completamente linear de Airy (C.L. e com  $i = \text{C.L.}$ ).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -i\omega\eta, \quad (4.65)$$

uma condição de estabilidade deve ser satisfeita de modo a prevenir um crescimento exponencial com o tempo. Esta condição de estabilidade é dada por

$$\left| 1 - i\omega\Delta t - \omega^2 \frac{\Delta t^2}{2} + i\omega^3 \frac{\Delta t^3}{6} + \omega^4 \frac{\Delta t^4}{24} \right| \leq 1. \quad (4.66)$$

Salientamos que quando  $\omega$  é um número complexo as soluções crescem ou decrescem exponencialmente com o tempo com ou sem propagação, i.e., valores complexos de  $\omega$  com partes

imaginárias positivas estão relacionados com soluções instáveis. Usando-se (4.60), (4.62) e (4.66) bem como assumindo-se valores reais para  $\omega$  obtém-se a desigualdade seguinte:

$$\omega^2 \Delta t^2 = gh \Delta t^2 \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{k \Delta x}{2} \right) \left( \frac{D \left( \Delta x, \frac{4}{\Delta x} \sin \left( \frac{k \Delta x}{4} \right) \right)}{D^\tau \left( \Delta x, \frac{4}{\Delta x} \sin \left( \frac{k \Delta x}{4} \right) \right)} \right)^2 \leq 8. \quad (4.67)$$

Através de (4.62) pode-se concluir que se deve ter  $k \Delta x \in [0, 2\pi]$ . Defina-se agora a função  $\tilde{D}(\Delta x, \hat{\xi})$  com  $\hat{\xi} = \frac{k \Delta x}{4}$  como segue:

$$\tilde{D}(\Delta x, \hat{\xi}) = \sin^2(2\hat{\xi}) \left( \frac{D \left( \Delta x, \frac{4}{\Delta x} \sin(\hat{\xi}) \right)}{D^\tau \left( \Delta x, \frac{4}{\Delta x} \sin(\hat{\xi}) \right)} \right)^2. \quad (4.68)$$

O modelo KdV-BBM é aqui considerado com  $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$  assim como  $\tau = 0 \text{ m}^4$ . Pode-se provar que a função não negativa  $\tilde{D}(\Delta x, \hat{\xi})$  para  $\hat{\xi} \in [0, \pi/2]$  e  $(\Delta x/h) \in [0, 1]$  tem um máximo absoluto em  $\hat{\xi}_0 \in [0, \pi/2]$ . Mais concretamente, o valor de  $\hat{\xi}_0$  é dado aproximadamente por 1.0801 para  $(\Delta x/h) = 1$ . Como consequência, podemos substituir  $\sin(\hat{\xi})$  por  $\sin(\hat{\xi}_0)$  em (4.68) e deduzir a condição do tipo CFL seguinte:

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{2\Delta x^2}{gh \tilde{D}(\Delta x, \hat{\xi}_0)}}. \quad (4.69)$$

Note-se que o segundo membro da condição do tipo CFL dada por (4.69) aproxima-se de zero quando  $\Delta x$  tende para zero. De facto, a ordem de convergência é definida aqui por  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \bar{K}_1 \text{ (s m}^{-1}\text{)}$  em que  $\bar{K}_1 \cong \frac{1.7289}{\sqrt{gh}} \text{ s m}^{-1}$ . Por sua vez, se  $\tau \neq 0 \text{ m}^4$  e  $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  assim como  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$  então o modelo KdV-BBM torna-se incondicionalmente estável.

Por outro lado, o modelo KdV com  $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$  assim como  $\tau \neq 0 \text{ m}^4$  é também incondicionalmente estável. A função  $\Delta x^4 \tilde{D}(\Delta x, \hat{\xi})$  com  $\tilde{D}(\Delta x, \hat{\xi})$  dada por (4.68) é também válida no caso em que  $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$  assim como  $\tau = 0 \text{ m}^4$  e  $\hat{\xi} \in [0, \pi/2] \setminus \{\hat{\xi}_1\}$  com  $\hat{\xi}_1 \cong 1.1503$ . No entanto, neste caso a ordem de convergência é definida por  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x^3} = \bar{K}_2 \text{ (s m}^{-3}\text{)}$ , onde  $\bar{K}_2 \text{ (s m}^{-3}\text{)}$  é um número real positivo que pode ser determinado para cada intervalo escolhido para  $\hat{\xi}$ . Para além disso, a razão  $\frac{\Delta t}{\Delta x^3}$  é menor ou igual ao segundo membro de (4.69) com  $\tilde{D}(\Delta x, \hat{\xi}_0)$  substituído por  $\Delta x^6 \tilde{D}(\Delta x, \hat{\xi}_0)$ . O valor  $\hat{\xi}_0$  é determinado para cada intervalo escolhido para  $\hat{\xi}$  mencionado anteriormente, de forma a que a função  $\tilde{D}(\Delta x, \hat{\xi})$  tenha um máximo global em  $\hat{\xi} = \hat{\xi}_0$ . Note-se que para cada valor escolhido de  $\Delta x$ , o valor do número de onda  $k$  é restringido. Finalmente, o modelo KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) torna-se instável quando  $\tau = 0 \text{ m}^4$  e  $\hat{\xi} \cong 1.1503$ . Desta forma, concluímos que a equação KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) tem propriedades de estabilidade bastante melhores do que as da equação KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ).

Na secção seguinte, os modelos não lineares KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) e KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) são testados numericamente de forma a verificar a sua robustez com respeito a instabilidades.

## 4.5 Testes numéricos

Nesta secção, dois problemas físicos são simulados. Comparam-se as soluções obtidas pelo método numérico C/DG-FEM aplicado às equações KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) e KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ). Todas as simulações numéricas aqui apresentadas são feitas recorrendo ao código DOLFWAVE que desenvolvemos durante o trabalho de investigação científica apresentado nesta dissertação (ver <http://launchpad.net/dolfwave> ou <http://ptmat.fc.ul.pt/~ndl/>).

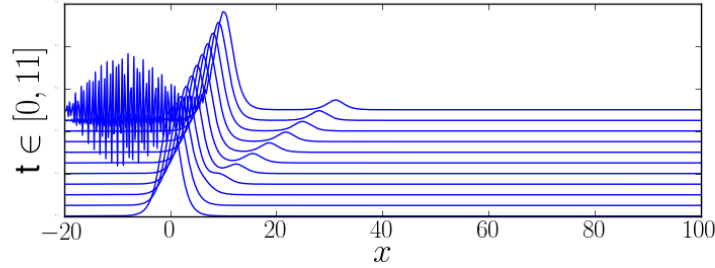
### 4.5.1 Onda solitária

Em primeiro lugar, considera-se a propagação de uma onda solitária definida pela equação adimensional seguinte:

$$\eta(x, t) = 2 \left( \frac{c-1}{\varepsilon} \right) \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{(c-1)}{\hat{\delta}_2 - c\hat{\delta}_1}} (x - ct) \right). \quad (4.70)$$

Note-se que (4.70) é obtida a partir de (4.26) com  $K = 0$ . O domínio espacial é o intervalo  $[-20, 200]$ , o qual é discretizado usando-se diversas malhas uniformes com elementos de Lagrange  $P_2$ . Diversos valores para o coeficiente de penalização  $\tau$  são considerados. Os parâmetros adimensionais que definem a condição inicial são a velocidade de propagação da onda dada por  $c = \frac{81}{80}$  e a amplitude da onda dada por  $\frac{2(c-1)}{\varepsilon} = \frac{1}{4}$ . Os parâmetros de onda longa e de onda de pequena amplitude são definidos por  $\mu = 0.31623$  e  $\varepsilon = 0.1$ , respectivamente. A simulação da propagação da onda é realizada para  $t \in [0, 120]$  e para  $\Delta t = 0.001$ . Observamos que para valores pequenos de  $\tau$  o modelo KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) torna-se instável e as soluções explodem. Neste trabalho, assumimos que as soluções numéricas explodem se o limite de cinco iterações do passo de correcção for excedido. Na figura 4.5, mostra-se um exemplo de uma solução numérica instável para o modelo KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) com  $\tau = 0.0001$  e utilizando-se uma discretização espacial com 1000 elementos de Lagrange  $P_2$ . No entanto, soluções numéricas estáveis são obtidas para valores maiores de  $\tau$  (ver figura 4.6). A partir das simulações numéricas, podemos concluir que a equação KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) é muito menos susceptível a instabilidades do que a equação KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ). Deste modo, a equação KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) permite utilizar valores menores de  $\tau$ . Neste exemplo, pode-se mesmo considerar  $\tau = 0$  sendo a sua influência maioritariamente observada na estabilidade da esteira da onda. Para além disto, observa-se que existe uma boa concordância entre as soluções exactas (ver (4.70)) e as soluções numéricas dos dois modelos referidos anteriormente (ver figura 4.7).

Alguns testes de refinamento da malha são também efectuados. Consideram-se malhas com 55, 110, 220, 440, 880, 1760 e 3520 elementos de Lagrange  $P_2$ . Na tabela 4.1, apresenta-se a média do erro relativo  $l^2$  entre as soluções numéricas e as soluções exactas para os modelos KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) com  $\tau = 0.1$  e KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) com  $\tau = 0.01$ . O intervalo de tempo adimensional é dado por  $t \in [0, 10]$ . Refere-se que na tabela 4.1 as colunas designadas por  $l^2$ -KdV e  $l^2$ -KdV-BBM estão associadas a um passo de tempo de  $\Delta t = 0.001$ . De modo análogo, a coluna designada por  $l^2$ -KdV-BBM\* está associada a um passo de tempo  $\Delta t = 0.00005$ . Verifica-se que este erro decresce com o aumento do número de nós da malha e com a diminuição do passo de tempo, o que nos dá uma boa indicação da convergência do método numérico para um certo intervalo de tempo. Na tabela 4.1, a explosão das soluções numéricas é denotada pela sigla EXP. Para além disto, indica-se o número de iterações, entre parênteses, a partir do qual o limite de cinco passos de correcção foi excedido.

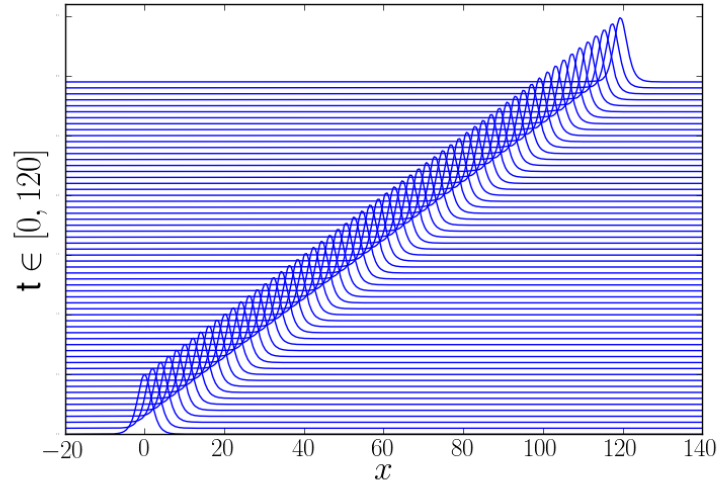


**Figura 4.5:** Solução numérica instável do modelo KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) usando-se um esquema C/DG-FEM com  $\tau = 0.0001$ .

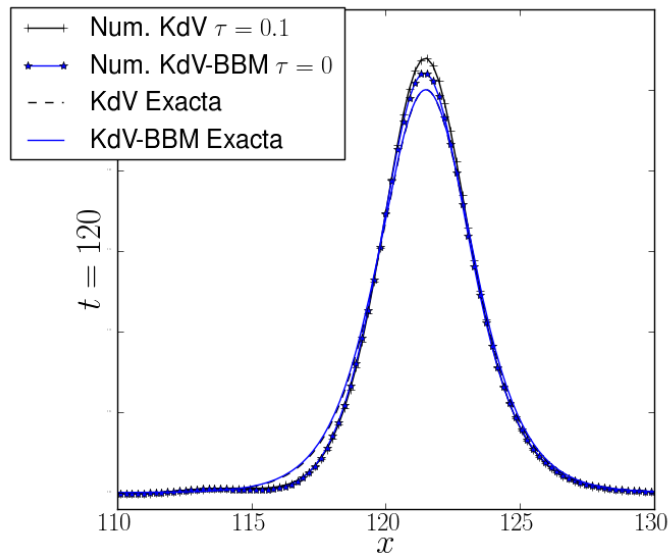
Malha	$l^2 - \text{KdV}$	$l^2 - \text{KdV-BBM}$	$l^2 - \text{KdV-BBM}^*$
55	0.118260	0.108179	0.108161
110	0.024473	0.013592	0.013150
220	0.005499	0.007973	0.007544
440	0.003134	0.005892	0.005451
880	0.002961	0.003154	0.001727
1760	EXP(3038)	0.002926	0.000462
3520	EXP(93)	0.002832	0.000172

**Tabela 4.1:** Média dos erros relativos  $l^2$  entre as soluções numéricas e as soluções exactas para os modelos KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) com  $\tau = 0.1$  e KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) com  $\tau = 0.01$ . Nas colunas  $l^2$ -KdV e  $l^2$ -KdV-BBM considera-se um passo de tempo  $\Delta t = 0.001$  enquanto que na coluna  $l^2$ -KdV-BBM\* um passo de tempo  $\Delta t = 0.00005$  é assumido.

A influência dos coeficientes associados aos termos de penalização na precisão do método numérico é estudada. Conclui-se que valores mais elevados dos coeficientes de penalização aumentam a estabilidade do método mas diminuem a sua precisão. Por outro lado, o modelo numérico torna-se mais preciso mas menos estável quando são considerados valores menores dos coeficientes de penalização. Uma vez que os termos de penalização dependem não só dos seus coeficientes, mas também dos diâmetros dos elementos, malhas diferentes devem estar associadas a valores distintos dos coeficientes ideais de penalização  $\tau$ . Para além disto, observa-se que o esquema numérico proposto para ambos os modelos KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) e KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) satisfaz a lei de conservação da massa



**Figura 4.6:** Solução numérica estável do modelo KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) usando-se um esquema C/DG-FEM com  $\tau = 0.1$ .



**Figura 4.7:** Soluções exactas comparadas com as soluções numéricas dos modelos KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) e KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ).

$\left( \int_{-20}^{200} \eta(x, t) dx = \text{constante} \right)$  com um erro absoluto da ordem de  $5 \times 10^{-6}$ .

### 4.5.2 Interação entre dois solitões

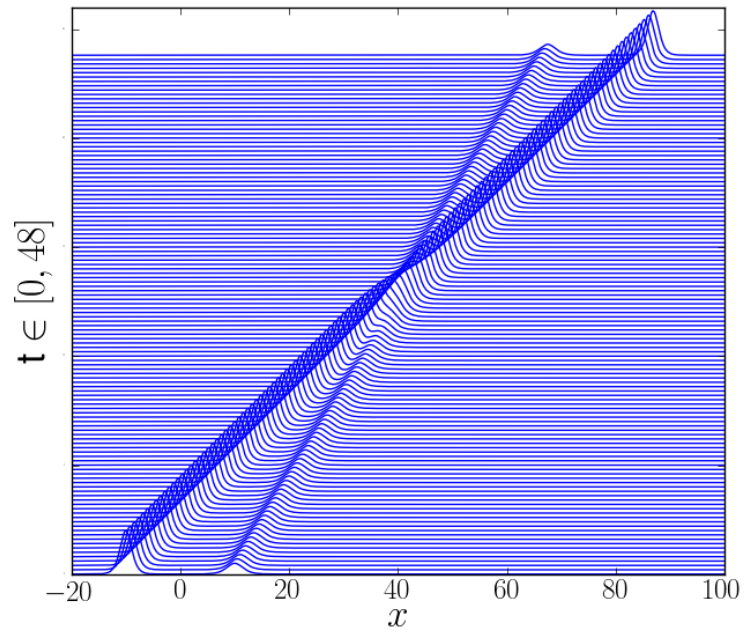
O segundo problema físico diz respeito à interação entre dois solitões. A condição inicial para a elevação da superfície da onda é dada pela expressão adimensional seguinte:

$$\eta(x) = 2 \left( \frac{c_a - 1}{\varepsilon} \right) \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{c_a - 1}{\hat{\delta}_2 - c_a \hat{\delta}_1}} (x + 10) \right) + 2 \left( \frac{c_b - 1}{\varepsilon} \right) \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{c_b - 1}{\hat{\delta}_2 - c_b \hat{\delta}_1}} (x - 10) \right). \quad (4.71)$$

O domínio espacial é o intervalo  $[-20, 100]$  discretizado com 1200 elementos de Lagrange  $P_2$ . Os parâmetros adimensionais para definir a condição inicial são as velocidades de propagação das ondas  $c_a = 2$  e  $c_b = \frac{5}{4}$  e as amplitudes das ondas dadas por  $\frac{2(c_a - 1)}{\varepsilon} = 2$  e  $\frac{2(c_b - 1)}{\varepsilon} = \frac{1}{2}$ . A robustez do modelo é testada para os parâmetros  $\varepsilon = 1$  e  $\mu = 1$ . Simulamos a evolução dos solitões para  $t \in [0, 48]$  com um passo de tempo de  $\Delta t = 0.0001$ . Vários valores para o parâmetro de penalização  $\tau$  são considerados. Mais uma vez verifica-se que o modelo KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) é bastante estável. Por outro lado, não se conseguem obter soluções estáveis para o modelo KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ), mesmo que se considerem valores maiores para  $\tau$ . Isto pode dever-se ao facto de não ser satisfeita alguma condição do tipo CFL. Note-se que a utilização de valores menores de  $\Delta t$  aumenta o tempo computacional. Na figura (4.8), mostramos a solução numérica do modelo KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) com  $\tau = 0.1$ . Note-se que após a interação entre os dois solitões a estrutura dos mesmos é preservada.

## 4.6 Conclusões sumárias

Neste capítulo, uma classe de equações melhoradas do tipo KdV-BBM foi deduzida. Uma solução analítica do tipo solitão foi também obtida para a equação do tipo KdV-BBM proposta. A validade desta solução foi discutida em termos da velocidade de propagação da onda e dos parâmetros livres introduzidos neste modelo. Por exemplo, mostrou-se que a solução do tipo solitão para o modelo KdV-BBM proposto com características dispersivas melhoradas ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) requer que a velocidade de propagação da onda  $c$  pertença à reunião de intervalos  $] -\infty, \frac{9}{19}[ \cup ]1, +\infty[$ . Note-se que neste caso ondas de depressão foram obtidas para valores da velocidade de propagação da onda  $c$  pertencentes ao intervalo  $] -\infty, \frac{9}{19}[$ . Algumas propriedades dispersivas destas equações foram estudadas. Mostrámos que existem certos valores do parâmetro de Nwogu para os quais o erro entre os potenciais da velocidade do fluido avaliados no instante inicial dos modelos linearizados de KdV-BBM e de Airy é da ordem  $O(\mu^4)$ . Mais concretamente, os valores de  $\alpha$  encontrados que pertencem ao intervalo  $[0, 1]$  são  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ . A ordem deste erro é a mesma da do erro de truncatura do modelo KdV-BBM aqui deduzido. Para além disto, um esquema C/DG-FEM foi proposto para resolver numericamente estas equações. Tanto quanto saibamos, este esquema foi aqui implementado pela primeira vez para a discretização deste tipo de equações. Uma condição do tipo CFL foi deduzida para o esquema numérico associado às equações linearizadas dos modelos KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ) e KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ). Para além disto, investigámos a relevância do coeficiente de penalização na relação de dispersão do modelo



**Figura 4.8:** Interação entre dois solitões usando-se o esquema C/DG-FEM na implementação do modelo KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) com  $\tau = 0.1$ .

numérico implementado através do esquema C/DG-FEM. Mostrámos que o parâmetro de penalização actua como um filtro numérico para ondas de menor comprimento. A partir dos testes numéricos, concluímos que a equação KdV-BBM ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) é bastante menos susceptível a instabilidades do que a equação KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ).



## Capítulo 5

# Soluções exactas de equações generalizadas de Boussinesq <sup>1</sup>

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, deduzimos uma classe de equações não lineares de sexta ordem do tipo Boussinesq para a elevação da superfície de uma onda. Esta classe de equações modela a propagação bidireccional de uma onda a uma dimensão horizontal sobre um fundo constante. Este tipo de equações é usado para modelar diversos problemas físicos tais como ondas marítimas de superfície, ondas não lineares em redes de átomos, ondas de som em plasmas e vibrações em cordas não lineares (ver, e.g., Jeffrey (1972), Whitham (1974), Johnson (1997) e Wazwaz (2008)). Sem perda de generalidade, neste capítulo referimo-nos apenas ao problema de propagação de ondas marítimas de superfície. Alguns parâmetros livres são introduzidos com o objectivo de melhorar algumas das propriedades lineares e não lineares do sistema do tipo Boussinesq proposto. De facto, estes parâmetros livres melhoram as propriedades dispersivas e de estabilidade dos modelos (ver capítulos 2, 3 e 4). As soluções exactas das equações não lineares de evolução desempenham um papel importante no estudo da teoria dos solitões. Estas soluções também evidenciam os efeitos globais dos parâmetros introduzidos nas equações diferenciais não lineares dos modelos do tipo Boussinesq. Neste capítulo, soluções exactas são obtidas para as equações não lineares de evolução propostas. Para deduzir estas soluções usam-se, entre outros, o método de integração directa bem como o método de expansão  $G'/G$  (ver, e.g., Wang et al. (2008a), Ozis e Aslan (2010) assim como Zuo e Zhang (2011)). Para além disto, mostra-se que os parâmetros livres mencionados anteriormente estão também relacionados com os tipos de solução da forma onda de translação bem como com os seus domínios de validade. A ideia principal do método de expansão  $G'/G$  consiste no facto das soluções das equações propostas e não lineares poderem ser expressas por um polinómio em  $G'/G$ , onde  $G(\xi)$  satisfaz uma determinada equação diferencial ordinária de segunda ordem. A variável independente móvel é denotada por  $\xi$ .

A estrutura deste capítulo é apresentada de seguida. Na próxima secção, as equações regentes para as ondas marítimas de superfície são apresentadas. Incluímos também o efeito da tensão superficial no modelo. A partir destas equações, um sistema melhorado de Boussinesq de equações não lineares bidireccionais e de sexta ordem é obtido usando-se métodos assintóticos e assumindo-se uma batimetria constante. As funções incógnita deste sistema são a elevação

---

<sup>1</sup>Uma parte deste capítulo encontra-se submetida para publicação como: P. J. S. Pereira, N. D. Lopes and L. Trabucho, *Exact solutions of an improved class of nonlinear sixth-order Boussinesq equations*. Outra parte encontra-se em preparação para publicação.

da superfície da onda e o potencial transformado da velocidade do fluido. Os desenvolvimentos assintóticos são realizados em termos do coeficiente de dispersão  $\mu$  (parâmetro de onda longa) e do coeficiente de não linearidade  $\varepsilon$  (parâmetro de onda de pequena amplitude). A terceira secção é dedicada à dedução de uma equação integro-diferencial não linear de sexta ordem para a elevação da superfície da onda. Para além disto, algumas das propriedades dispersivas desta equação linearizada são discutidas em função dos parâmetros livres. Na quarta secção, uma equação diferencial ordinária e não linear é deduzida utilizando-se, entre outras, transformações de Galileu. Esta equação de ordem  $O(\varepsilon, \mu^2)$  é completamente integrável e soluções clássicas do tipo solitão assim como outras ondas de translação são deduzidas. Na quinta secção, mostramos que a equação de ordem  $O(\varepsilon, \mu^2, \varepsilon^2)$  também é completamente integrável e novas formas de soluções do tipo solitão são deduzidas. Esta equação diferencial ordinária é obtida usando-se transformações similares às aquelas mencionadas previamente. Métodos analíticos são usados na sexta secção para provar a existência ou a não existência de soluções de tipos predefinidos para as equações diferenciais ordinárias e não lineares de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$ . Na penúltima secção, uma equação integro-diferencial de sexta ordem é transformada numa equação diferencial ordinária da mesma ordem. O método de expansão  $G'/G$  é usado aqui para deduzir soluções do tipo onda de translação para as equações resultantes de ordens  $O(\varepsilon, \mu^2, \mu^4)$ ,  $O(\varepsilon, \mu^2, \mu^4, \varepsilon^2)$  e  $O(\varepsilon, \mu^2, \mu^4, \varepsilon\mu^2, \varepsilon^2)$ . Em todos estes casos, mostra-se que as classes de soluções do tipo onda de translação aqui apresentadas estão associadas à escolha dos parâmetros introduzidos no modelo, tais como o número de Bond, o parâmetro de Nwogu (ver Nwogu (1993)) e a velocidade de propagação da onda.

## 5.2 Dedução do modelo

### 5.2.1 Equações diferenciais

Como anteriormente, considera-se um escoamento irrotacional de um fluido incompressível e invíscido modelado pelo conjunto de equações seguintes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{xz})\mathbf{u} = -\nabla_{xz} \left( \frac{P}{\rho} + gz \right), \quad (5.1a)$$

$$\nabla_{xz} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (5.1b)$$

$$\nabla_{xz} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.1c)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vector velocidade do fluido,  $P$  a pressão,  $g$  a aceleração da gravidade,  $\rho$  a densidade do fluido,  $t$  o tempo e o operador diferencial  $\nabla_{xz}$  é dado por  $\nabla_{xz} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ . Para além disso, adoptamos um referencial Cartesiano com o eixo horizontal  $ox$  no nível da água em repouso e o eixo dos  $oz$  dirigido para o exterior da região ocupada pelo fluido (ver figura 5.1). O domínio do fluido é limitado pelo fundo do mar descrito por  $z = -H$  com  $H$  uma constante real positiva e pela superfície livre da onda dada por  $z = \eta(x, t)$ . Na figura 5.1,  $L$ ,  $A$  e  $H$  são os valores característicos do comprimento de onda, da amplitude da onda e da profundidade da região ocupada pelo fluido, respectivamente. Note-se que a derivada material é denotada por  $\frac{D}{Dt}$ .

Da hipótese de irrotacionalidade do escoamento de um fluido (ver (5.1b)), pode-se introduzir a função do potencial da velocidade do fluido  $\phi(x, z, t)$  para obter a equação de Bernoulli seguinte:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla_{xz} \phi \cdot \nabla_{xz} \phi + \frac{P}{\rho} + gz = f(t), \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{u} = \nabla_{xz}\phi(x, z, t)$  e  $f(t)$  representa uma função arbitrária de integração. Note-se que se  $\phi$  for redefinido por  $\phi + \int f(t) dt$  a equação (5.2) pode ser rescrita sem esta função arbitrária de integração denotada por  $f(t)$ . Da condição de incompressibilidade do fluido (ver (5.1c)) podemos mostrar que o potencial da velocidade do fluido satisfaz a equação de Laplace seguinte:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.3)$$

Para que este problema possa ficar bem posto, algumas condições de fronteira devem ser satisfeitas, as quais são dadas do modo seguinte:

i) a condição de fronteira cinemática imposta na superfície livre da onda,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad z = \eta; \quad (5.4)$$

ii) a condição de fronteira cinemática imposta no fundo impermeável da região ocupada pelo fluido:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -H; \quad (5.5)$$

iii) a condição de fronteira dinâmica imposta na superfície livre da onda,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) - W(x, t) = 0, \quad z = \eta, \quad (5.6)$$

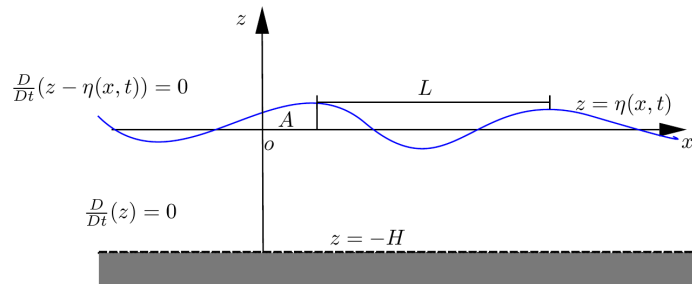
onde  $W(x, t)$  é o termo da tensão superficial dado por

$$W(x, t) = \frac{\tau_s}{\rho} \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}}, \quad (5.7)$$

com  $\tau_s$  o coeficiente da tensão superficial. Note-se que os efeitos da tensão superficial são incluídos também nas equações de Boussinesq e nas equações do tipo KdV em, e.g., Dash e Daripa (2002) e Wang et al. (2008b).

Com o objectivo de transformar as equações (5.3)–(5.7) numa forma adimensional, introduzem-se as escalas seguintes:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, & z^* &= \frac{z}{H}, & t^* &= \frac{t\sqrt{gH}}{L}, & \eta^* &= \frac{\eta}{A}, \\ \phi^* &= \frac{H\phi}{AL\sqrt{gH}}, & h^* &= \frac{h}{H} = 1, & \tau_s^* &= \frac{\tau_s}{\rho g H^2}, \end{aligned} \quad (5.8)$$



**Figura 5.1:** Representação esquemática da região ocupada pelo fluido. Note-se que o fundo impermeável do oceano e a superfície da onda marítima são também ilustrados.

assim como os parâmetros físicos

$$\mu = \frac{H}{L}, \quad \varepsilon = \frac{A}{H}. \quad (5.9)$$

Em (5.8),  $\tau_s^*$  designa o número de Bond. Para além disto, na última equação  $\mu$  é o parâmetro de onda longa e  $\varepsilon$  é designado por parâmetro de onda de pequena amplitude. Salienta-se que os parâmetros  $\varepsilon$  e  $\mu$  estão relacionados com os termos não lineares e com os termos dispersivos, respectivamente. No que segue, as variáveis independentes adimensionais bem como as funções incógnita são apresentadas sem a notação do asterisco de forma a simplificar a escrita das equações.

Neste caso, a abordagem de Boussinesq consiste na transformação do problema 2D num problema unidimensional. Esta redução dimensional pode ser realizada através do desenvolvimento do potencial da velocidade do fluido numa série de Taylor em termos da coordenada  $z$ . Usando-se a equação de Laplace, escrita na forma adimensional, pode-se mostrar que o potencial da velocidade do fluido é dado pela expressão seguinte:

$$\phi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \mu^{2n} \frac{\partial^{2n} \phi_0}{\partial x^{2n}}(x, t) + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \mu^{2n} \frac{\partial^{2n} \phi_1}{\partial x^{2n}}(x, t) \right), \quad (5.10)$$

em que

$$\phi_0 = \phi|_{z=0}, \quad \phi_1 = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) |_{z=0}. \quad (5.11)$$

Por sua vez,  $\phi_1$  pode ser escrito em termos de  $\phi_0$  usando-se desenvolvimentos assintóticos, técnicas de aproximações sucessivas assim como a condição de fronteira cinemática imposta no fundo da região ocupada pelo fluido (ver, e.g., Chen e Liu (1994)). Neste capítulo, assume-se sem perda de generalidade que os termos não lineares e os termos dispersivos estão relacionados pela equação seguinte:

$$\frac{\varepsilon}{\mu^2} = O(1) \text{ com } \mu < 1 \text{ e } \varepsilon < 1. \quad (5.12)$$

Note-se que o número de Ursell é definido por  $U_r = \frac{\varepsilon}{\mu^2}$  e desempenha um papel fundamental na escolha das ordens da aproximação requerida, as quais correspondem a diferentes problemas físicos. O regime descrito por ondas moderadamente longas e de pequena amplitude em zonas de pequena profundidade, modelado por equações fracamente não lineares, é caracterizado por (5.12) ( $O(\mu^2) = O(\varepsilon)$ , i.e.,  $\frac{H^2}{L^2} \sim \frac{A}{H}$ ). As equações de Boussinesq têm em conta os efeitos não lineares e de dispersão associados aos termos dominantes de ordens  $\varepsilon$  e  $\mu^2$ , respectivamente. Quando  $\varepsilon \gg \mu^2$ , as equações de Boussinesq reduzem-se às equações de Airy. Por outro lado, quando  $\varepsilon \ll \mu^2$  as equações de Boussinesq reduzem-se às equações linearizadas para descrever fenómenos fracamente dispersivos. Finalmente, a equação linear clássica das ondas é obtida quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\mu^2 \rightarrow 0$  (ver, e.g., Mei et al. (2005)).

A equação do potencial da velocidade do fluido (5.10) pode ser reescrita da forma que segue <sup>2</sup>:

$$\phi(x, z, t) = \cos \left( z\mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_0(x, t) + \frac{1}{\mu} \sin \left( z\mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} \phi_1(x, t). \quad (5.13)$$

Utilizando (5.13) para substituir  $\phi$  nas equações (5.4)–(5.9) obtemos as condições de fronteira nas formas assintóticas seguintes:

<sup>2</sup>Note-se que  $\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1}$  é tal que  $\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) f = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} f = f$ , onde  $f$  é uma função escalar.

i) a condição de fronteira cinemática imposta na superfície livre da onda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \left( \cos \left( \varepsilon \eta \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \sin \left( \varepsilon \eta \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \\ - \frac{1}{\mu^2} \left( -\mu \sin \left( \varepsilon \eta \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \cos \left( \varepsilon \eta \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 \right) = 0; \end{aligned} \quad (5.14)$$

ii) a condição de fronteira cinemática imposta no fundo impermeável da região ocupada pelo fluido,

$$\left( \mu \sin \left( \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial x} = \left( -\cos \left( \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \phi_1; \quad (5.15)$$

iii) a condição de fronteira dinâmica imposta na superfície livre da onda,

$$\begin{aligned} \left( \cos \left( \varepsilon \eta \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \sin \left( \varepsilon \eta \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \eta \right) + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon \left( \left( \cos \left( \varepsilon \eta \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \sin \left( \varepsilon \eta \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( -\sin \left( \varepsilon \eta \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \cos \left( \varepsilon \eta \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 \right)^2 \right) - \\ - \tau_s \mu^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left[ 1 + \varepsilon^2 \mu^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Resolvendo a equação (5.15) em ordem a  $\phi_1$ , temos que

$$\phi_1 = -\mu \tan \left( \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial x}. \quad (5.17)$$

Usando (5.17) para substituir  $\phi_1$  em (5.14) e (5.16) assim como desenvolvendo os operadores trigonométricos podemos obter um sistema de Boussinesq até à ordem desejada.

Nas subsecções seguintes, consideramos o sistema de sexta ordem dado pelos desenvolvimentos de ordem  $O(\mu^6)$  de (5.14) e (5.16), quando  $\phi_1$  é dado aproximadamente pelos três primeiros termos de (5.17). Mais concretamente,  $\phi_1$  é rescrito da forma que segue:

$$\phi_1 \sim -\mu^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} - \frac{\mu^4}{3} \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial x^4} - \mu^6 \frac{2}{15} \frac{\partial^6 \phi_0}{\partial x^6}. \quad (5.18)$$

Neste trabalho, temos como um dos objectivos a obtenção de um sistema do tipo Boussinesq de quarta ordem que preserve algumas propriedades dispersivas dos modelos de ordem superior. Isto é realizado através da inclusão de um termo extra  $O(\mu^6)$  no desenvolvimento assintótico do potencial da velocidade do fluido (ver (5.18)).

O modelo é deduzido usando-se as equações (5.14), (5.16) e (5.18), resultando

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\mu^2}{3} \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial x^4} + \mu^4 \frac{2}{15} \frac{\partial^6 \phi_0}{\partial x^6} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right) = 0, \quad (5.19a)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \eta + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \mu^2 \left( \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} \right)^2 - \varepsilon \eta \mu^2 \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial t \partial x^2} - \tau_s \mu^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \quad (5.19b)$$

Tomando em consideração a transformação de variáveis,

$$\phi_0 = \Phi - \frac{2}{15} \mu^4 \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial x^4}, \quad (5.20)$$

deduzimos o modelo melhorado de quarta ordem substituindo em (5.19)  $\phi_0$  por  $\Phi$ , resultando

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\mu^2}{3} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0, \quad (5.21a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{2}{15} \mu^4 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial t \partial x^4} + \eta + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \mu^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 - \\ - \varepsilon \eta \mu^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t \partial x^2} - \tau_s \mu^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.21b)$$

Neste contexto, a utilização do potencial transformado da velocidade do fluido  $\Phi$  tem duas vantagens fundamentais. Mais concretamente, a ordem da derivada com respeito à variável espacial é reduzida para quatro e as características dispersivas são melhoradas (ver capítulo 3).

## 5.2.2 Melhoramento do modelo

Com o objectivo de melhorar as propriedades dispersivas do modelo apresentado na subsecção anterior,  $\phi_0$  é substituído por uma função auxiliar designada por  $\Phi_\alpha$ . Neste capítulo,  $\Phi_\alpha$  é dado por

$$\Phi_\alpha = \tilde{\phi}_\alpha + B \mu^4 \frac{\partial^4 \tilde{\phi}_\alpha}{\partial x^4}, \quad (5.22)$$

com  $\tilde{\phi}_\alpha = \phi(x, -\alpha, t)$  o potencial da velocidade avaliado num nível arbitrário do fluido  $z = -\alpha h$  com  $\alpha \in [0, 1]$  (ver, e.g., Gobbi et al. (2000) assim como Nwogu (1993)) e  $B$  uma constante real definida através de  $\alpha$ .

Para deduzirmos um modelo melhorado, procedemos da forma seguinte (ver, e.g., Beji e Nadaoka (1996) bem como Zhao et al. (2004)). A partir de (5.13) obtemos

$$\tilde{\phi}_\alpha = \cos \left( \alpha \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_0 - \frac{1}{\mu} \sin \left( \alpha \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{-1} \phi_1, \quad (5.23)$$

em que  $\phi_1$  é dado por (5.18). Usando-se técnicas de aproximações sucessivas (ou um desenvolvimento assintótico em  $\phi_0$ ) pode expressar-se  $\phi_0$  em termos de  $\tilde{\phi}_\alpha$ , resultando

$$\phi_0 \sim \tilde{\phi}_\alpha + \mu^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_\alpha}{\partial x^2} + \mu^4 \left( \frac{5}{24} \alpha^4 - \frac{5}{6} \alpha^3 + \alpha^2 - \frac{\alpha}{3} \right) \frac{\partial^4 \tilde{\phi}_\alpha}{\partial x^4}. \quad (5.24)$$

Utilizando-se (5.22) e (5.24) para substituir  $\phi_0$  por  $\Phi_\alpha$ , resulta

$$\phi_0 \sim \Phi_\alpha + \mu^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x^2} + \mu^4 \left( \frac{5}{24} \alpha^4 - \frac{5}{6} \alpha^3 + \alpha^2 - \frac{\alpha}{3} - B \right) \frac{\partial^4 \Phi_\alpha}{\partial x^4}. \quad (5.25)$$

Introduzindo-se (5.25) em (5.19) obtém-se um novo sistema de equações. Este sistema que depende do parâmetro  $\alpha$  é deduzido preservando também a ordem dos termos nas equações (5.19). Podemos ainda melhorar a precisão das propriedades dispersivas introduzindo dois parâmetros extra denotados por  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Usamos (5.19a) com  $\phi_0$  substituído por  $\Phi_\alpha$  para obter a relação seguinte:

$$\frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x^2} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \right) - \alpha \mu^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} - \left( \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{3} \right) \mu^2 \frac{\partial^4 \Phi_\alpha}{\partial x^4} + O(\mu^4). \quad (5.26)$$

Note-se que o novo sistema tem um termo dado por (ver (5.20), (5.21), e (5.25))

$$- \alpha \mu^2 \frac{\partial^4 \Phi_\alpha}{\partial x^4}, \quad (5.27)$$

o qual é decomposto da forma que segue:

$$-\alpha(\beta_1 + (1 - \beta_1))\mu^2 \frac{\partial^4 \Phi_\alpha}{\partial x^4}. \quad (5.28)$$

Agora, (5.26) é usada para substituir  $\frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x^2}$  em  $-\alpha\beta_1\mu^2 \frac{\partial^4 \Phi_\alpha}{\partial x^4}$ .

Por outro lado, usando-se (5.19b) (com  $\phi_0$  substituído por  $\Phi_\alpha$ ) pode-se obter

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} = -\eta + O(\mu^2), \quad (5.29)$$

a qual é rescrita da forma seguinte:

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} = \beta_2 \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + (1 - \beta_2) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t}. \quad (5.30)$$

Quando o segundo termo de (5.21b) é escrito em termos de  $\Phi_\alpha$  usando-se (5.20) e (5.25), podemos introduzir neste termo (5.30) com  $\beta_2 \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t}$  substituído por  $-\beta_2 \eta$  (ver (5.29)). Como consequência, pode-se propor uma classe de modelos melhorados descritos pelas equações seguintes:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mu^2 \alpha \beta_1 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} + \mu^4 \alpha^2 \beta_1 \frac{\partial^5 \eta}{\partial t \partial x^4} + \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x^2} + \\ & + \mu^2 \left( \frac{1}{3} - \alpha(1 - \beta_1) + \frac{\alpha^2}{2} \right) \frac{\partial^4 \Phi_\alpha}{\partial x^4} + \mu^4 B_2 \frac{\partial^6 \Phi_\alpha}{\partial x^6} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \right) + \\ & + \varepsilon \mu^2 \alpha \beta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left( \eta \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \right) + \varepsilon \mu^2 B_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial^3 \Phi_\alpha}{\partial x^3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.31a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + \mu^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \frac{\partial^3 \Phi_\alpha}{\partial t \partial x^2} + \mu^4 B_0 \frac{\partial^5 \Phi_\alpha}{\partial t \partial x^4} + \eta + \\ & + \mu^4 \beta_2 \frac{1}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \mu^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x^2} \right)^2 + \\ & + \varepsilon \mu^2 B_1 \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial^3 \Phi_\alpha}{\partial x^3} + \mu^2 \varepsilon \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \tau_s \mu^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \end{aligned} \quad (5.31b)$$

onde  $\beta_1$  assim como  $\beta_2$  são parâmetros livres introduzidos em (5.28) e (5.30). Para além disto, os coeficientes  $B$ ,  $B_0$ ,  $B_1$  e  $B_2$  dependem de  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Quatro possíveis modelos são, agora, discutidos como função destes coeficientes. Para o primeiro caso temos um modelo de sexta ordem com  $\alpha \neq 0, \beta_1 = \beta_2 = 0$  e

$$B_0 = \frac{5}{24}(\alpha^2 - 2\alpha) \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right), \quad B_2 = \frac{5}{24} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right)^2, \quad B = 0. \quad (5.32)$$

O segundo caso é o modelo de quarta ordem com  $\alpha \neq 0, \beta_1 = \beta_2 = 0$  e

$$B_0 = -\frac{1}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right), \quad B_2 = 0, \quad B = \frac{5}{24} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right)^2. \quad (5.33)$$

O terceiro caso é o modelo de sexta ordem com  $\alpha \neq 0, \beta_i \neq 0$  ( $i = 1$  ou  $i = 2$ ) e

$$\begin{aligned} B_0 = -(1 - \beta_2) \frac{1}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right), \quad B_2 = \beta_1 \alpha \frac{1}{2} \left( \alpha^2 + \frac{2}{3} \right), \\ B = \frac{5}{24} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Finalmente, o quarto caso é o modelo de quarta ordem com  $\alpha \neq 0, \beta_i \neq 0 (i = 1 \text{ ou } i = 2)$  e

$$B_0 = -(1 - \beta_2) \frac{1}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) - \beta_1 \alpha \frac{1}{2} \left( \alpha^2 + \frac{2}{3} \right), \quad B_2 = 0,$$

$$B = \frac{5}{24} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right)^2 + \beta_1 \alpha \frac{1}{2} \left( \alpha^2 + \frac{2}{3} \right). \quad (5.35)$$

Em todos estes casos temos que

$$B_1 = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha. \quad (5.36)$$

Para finalizar esta subsecção, relembramos que se  $\alpha = 0$  recuperamos os modelos dados na subsecção anterior. Note-se que se  $\alpha = 0, B_0 = 0, B_2 = \frac{2}{15}$  e  $B = 0$  o modelo de sexta ordem descrito por (5.19) é reproduzido e se  $\alpha = 0, B_0 = -\frac{2}{15}, B_2 = 0$  e  $B = \frac{2}{15}$  recuperamos o sistema de quarta ordem definido por (5.21). Por outro lado, se  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$  o modelo dado por (5.31) e (5.32) pode ser reduzido a um sistema de quarta ordem uma vez que  $B_2 = 0$ . Note-se que se não for considerado o efeito da tensão superficial e o termo extra de ordem  $O(\mu^6)$  em (5.18), então o modelo proposto em Chen e Liu (1994) é recuperado.

### 5.3 Equação de Boussinesq estendida e propriedades de dispersão lineares

#### 5.3.1 Equação integro-diferencial de Boussinesq de sexta ordem

Com o objectivo de deduzir uma nova equação de sexta ordem para a elevação da superfície da onda, começamos por derivar (5.31b) com respeito a  $x$ . Aqui, define-se a velocidade horizontal  $u$  em termos da função do potencial transformado da velocidade como  $u = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x}$ . Assim, obtêm-se as equações seguintes (ver (5.31)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \beta_1 \mu^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\eta u) + \\ + \mu^2 \left( \frac{1}{3} - \alpha(1 - \beta_1) + \frac{\alpha^2}{2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mu^4 B_2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \alpha^2 \beta_1 \mu^4 \frac{\partial^5 \eta}{\partial t \partial x^4} + \\ + \varepsilon \mu^2 \alpha \beta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} (\eta u) + \varepsilon \mu^2 B_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = O(\mu^6), \end{aligned} \quad (5.37a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mu^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu^4 B_0 \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} + \\ + \mu^4 \frac{\beta_2}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) \frac{\partial^5 \eta}{\partial x^5} + \varepsilon \mu^2 (1 + B_1) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \mu^2 B_1 u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \\ + \varepsilon \mu^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \varepsilon \mu^2 \eta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \tau_s \mu^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = O(\mu^6). \end{aligned} \quad (5.37b)$$

Refere-se que as equações (5.37) até à ordem  $O(\varepsilon, \mu^2)$  e  $O(\mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon \mu^2)$  são rescritas da forma que segue:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = O(\mu^2, \varepsilon), \quad (5.38a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = O(\mu^2, \varepsilon), \quad (5.38b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \beta_1 \mu^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(\eta u) + \\ + \mu^2 \left( \frac{1}{3} - \alpha(1 - \beta_1) + \frac{\alpha^2}{2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = O(\mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon \mu^2), \end{aligned} \quad (5.39a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mu^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} - \tau_s \mu^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = O(\mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon \mu^2). \quad (5.39b)$$

Se se derivar (5.37a) e (5.37b) com respeito a  $t$  e  $x$ , respectivamente, assim como subtraindo estas equações, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \mu^2 \left( \alpha \beta_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} + \left( \frac{1}{3} + \alpha \beta_1 \right) \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} \right) + \tau_s \mu^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \\ + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} u + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \\ + \mu^4 \left( \alpha^2 \beta_1 \frac{\partial^6 \eta}{\partial t^2 \partial x^4} + (B_2 - B_0) \frac{\partial^6 u}{\partial t \partial x^5} - \frac{\beta_2}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) \frac{\partial^6 \eta}{\partial x^6} \right) + \\ + \varepsilon \mu^2 \left( (B_1 + 3\alpha \beta_1) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) - (1 + B_1) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - \right. \\ \left. - (2B_1 + 1) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_1 + \alpha \beta_1) \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \eta \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} \right) - \right. \\ \left. - B_1 u \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \eta \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \right. \\ \left. + \alpha \beta_1 \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial t \partial x^3} u + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \frac{\partial u}{\partial t} + 3 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right) = O(\mu^6). \quad (5.40) \end{aligned}$$

Para melhorar algumas propriedades da equação proposta de Boussinesq, um novo parâmetro livre denotado por  $\beta_3$  é introduzido. Usando-se (5.38b), o termo  $\frac{\partial^6 \eta}{\partial x^6}$  em (5.40) pode ser escrito como  $-\frac{\partial^6 u}{\partial t \partial x^5}$ . Assim, considera-se a decomposição seguinte (ver (5.38)):

$$\frac{\partial^6 u}{\partial t \partial x^5} = -\beta_3 \frac{\partial^6 \eta}{\partial t^2 \partial x^4} - (1 - \beta_3) \frac{\partial^6 \eta}{\partial x^6}. \quad (5.41)$$

Para obter a equação não linear para  $\eta$ , as equações (5.38) e (5.39) são usadas recursivamente em (5.40) para substituir alguns dos termos de ordem  $O(\mu^4, \varepsilon \mu^2, \varepsilon^2)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon)$ . Desta forma,

consegue-se rescrever (5.40) do modo seguinte:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \mu^2 \left( D_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} - D_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \right) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( u^2 + \frac{\eta^2}{2} \right) + \\
& + \mu^4 \left( D_2 \frac{\partial^6 \eta}{\partial t^2 \partial x^4} + D_3 \frac{\partial^6 \eta}{\partial x^6} \right) - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} u^2 + 4 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} u + 2 \eta u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right) + \\
& + \varepsilon \mu^2 \left( D_4 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \eta + D_5 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \frac{\partial \eta}{\partial x} + D_6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} u + D_7 \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} + \right. \\
& \left. + D_8 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} \right)^2 + D_9 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 \right) = O(\mu^6), \quad (5.42)
\end{aligned}$$

onde os coeficientes  $D_i$  ( $i = 0, \dots, 9$ ) são dados por

$$\begin{aligned}
D_0 &= \alpha \beta_1, \quad D_1 = \frac{1}{3} + D_0 - \tau_s, \quad D_2 = \alpha^2 \beta_1 - \beta_3 \hat{D}_1, \\
D_3 &= -\frac{\beta_2}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) - (1 - \beta_3) \hat{D}_1 + \tau_s \left( \frac{1}{3} + D_0 \right), \\
D_4 &= \tau_s - 1 - D_0, \quad D_5 = \tau_s - 2 - 4D_0, \quad D_6 = -2\hat{D}_2, \\
D_7 &= -3B_1 - 7D_0 - \frac{7}{3} - \hat{D}_2, \quad D_8 = -2B_1 - 6D_0 - 2, \quad D_9 = -1 - 3D_0, \quad (5.43)
\end{aligned}$$

com

$$\hat{D}_1 = \left( B_2 - B_0 - \left( \frac{1}{3} + D_0 \right) B_1 \right) \text{ e } \hat{D}_2 = \left( \frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{3} - \alpha(1 - \beta_1) \right). \quad (5.44)$$

Para expressar o termo não linear  $\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2)$  de (5.42) em termos de  $\eta$ , usa-se a transformação de variáveis seguinte (ver, e.g., Johnson (1997) para uma transformação similar):

$$T = t \quad \text{e} \quad X = x + \varepsilon \int_{-\infty}^x \eta(t, \hat{x}) d\hat{x}. \quad (5.45)$$

Frisamos que esta transformação define  $X$  como uma coordenada móvel com velocidade  $-\varepsilon u + O(\varepsilon \mu^2, \varepsilon^2)$  a menos de uma função arbitrária de integração dependente do tempo (ver (5.38a)). Para além disto, usam-se as equações (5.38) e (5.39), escritas em termos das novas variáveis  $X$  e  $T$  (ver (5.45)), para substituir recursivamente as derivadas de  $u$  pelas derivadas de  $\eta$  em (5.42). Mais concretamente, obtêm-se as relações seguintes:

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{\partial u}{\partial X} = O(\mu^2, \varepsilon), \quad (5.46a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial T} + \frac{\partial \eta}{\partial X} = O(\mu^2, \varepsilon), \quad (5.46b)$$

assim como

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{\partial u}{\partial X} + \mu^2 C_0 \frac{\partial^3 \eta}{\partial T \partial X^2} + \mu^2 \hat{D}_2 \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} + 2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial X} \eta + \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial X} f(T) = O(\mu^4, \varepsilon \mu^2, \varepsilon^2), \quad (5.47a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial T} + \frac{\partial \eta}{\partial X} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial X} f(T) + \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial X} \eta + \mu^2 B_1 \frac{\partial^3 u}{\partial T \partial X^2} - \tau_s \mu^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3} = O(\mu^4, \varepsilon \mu^2, \varepsilon^2), \quad (5.47b)$$

onde  $f$  é uma função de integração obtida a partir da integração de (5.46a), resultando

$$u(T, X) = - \int_{-\infty}^X \frac{\partial \eta}{\partial T}(T, \hat{X}) d\hat{X} + f(T) + O(\mu^2, \varepsilon). \quad (5.48)$$

Desta forma, deduz-se a equação seguinte:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \mu^2 \left( C_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial T^2 \partial X^2} - C_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \right) - \\ & - \varepsilon \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \eta + 2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)^2 \right) + \mu^4 \left( C_2 \frac{\partial^6 \eta}{\partial T^2 \partial X^4} + C_3 \frac{\partial^6 \eta}{\partial X^6} \right) - \\ & - \varepsilon^2 \left( 2\eta \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 - 2\eta \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \eta^2 \right) + \\ & + \varepsilon \mu^2 \left( C_4 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial X} \right)^2 + C_4 \frac{\partial \eta}{\partial T} \frac{\partial^3 \eta}{\partial T \partial X^2} + C_5 \frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3} \frac{\partial \eta}{\partial X} + C_6 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + C_7 \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \eta + C_8 \frac{\partial^4 u}{\partial X^4} u - C_8 u \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \right) + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial X} g(T) + \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial X} g'(T) + \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} f^2(T) - 4\varepsilon^2 \frac{\partial \eta}{\partial T} \frac{\partial \eta}{\partial X} f(T) + \varepsilon \mu^2 2C_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial T \partial X^3} f(T) + \varepsilon \mu^2 C_0 \frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3} f'(T) = O(\mu^6), \end{aligned} \quad (5.49)$$

onde os coeficientes  $C_i$ ,  $i \in \{0, \dots, 8\}$ , são dados por

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha\beta_1, \quad C_1 = \frac{1}{3} + \alpha\beta_1 - \tau_s, \quad C_2 = \alpha^2\beta_1 - \beta_3\hat{D}_1, \\ C_3 &= -\frac{\beta_2}{6} \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{4}{5} \right) - (1 - \beta_3)\hat{D}_1 + \tau_s \left( \frac{1}{3} + \alpha\beta_1 \right), \\ C_4 &= -\frac{4}{3} - 4\alpha\beta_1, \quad C_5 = -8\alpha\beta_1 - 4 + 7\tau_s, \quad C_6 = -5\alpha\beta_1 - \frac{7}{3} + 4\tau_s, \\ C_7 &= -3\alpha\beta_1 - \frac{7}{3} + 5\tau_s, \quad C_8 = \frac{2}{3} - 2\alpha(1 - \beta_1) + \alpha^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

A função arbitrária de integração  $g(T)$  em (5.49) surge quando a regra da cadeia é usada para expressar o termo  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$  de (5.42) nas novas variáveis  $X$  e  $T$  (ver (5.45)). Usando-se (5.46a)

e (5.48), podemos rescrever (5.49) da forma seguinte:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \mu^2 \left( C_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial T^2 \partial X^2} - C_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \right) - \\
& - \varepsilon \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \eta + 2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)^2 \right) + \mu^4 \left( C_2 \frac{\partial^6 \eta}{\partial X^4 \partial T^2} + C_3 \frac{\partial^6 \eta}{\partial X^6} \right) - \\
& - \varepsilon^2 \left( 2\eta \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 - 2\eta \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \eta^2 \right) + \varepsilon \mu^2 \left( C_4 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial X} \right)^2 + \right. \\
& \quad + C_4 \frac{\partial \eta}{\partial T} \frac{\partial^3 \eta}{\partial T \partial X^2} + C_5 \frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3} \frac{\partial \eta}{\partial X} + C_6 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \right)^2 + C_7 \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \eta + \\
& \quad + C_8 \frac{\partial^4 \eta}{\partial T \partial X^3} \int_{-\infty}^X \frac{\partial \eta}{\partial T}(T, \hat{X}) d\hat{X} + C_8 \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \int_{-\infty}^X \frac{\partial \eta}{\partial T}(T, \hat{X}) d\hat{X} \left. \right) + \\
& \quad + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial X} g(T) + \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial X} g'(T) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} f^2(T) - \varepsilon \mu^2 C_8 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} f(T) - \\
& - 4\varepsilon^2 \frac{\partial \eta}{\partial T} \frac{\partial \eta}{\partial X} f(T) + \varepsilon \mu^2 (2C_0 - C_8) \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^3 \partial T} f(T) + \varepsilon \mu^2 C_0 \frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3} f'(T) = O(\mu^6). \quad (5.51)
\end{aligned}$$

Finalmente, no que segue, assumimos que as funções arbitrárias de integração  $f$ ,  $f'$ ,  $g$  e  $g'$  são de pequena variação no tempo. Isto significa que  $f(T)$  e  $f'(T)$  são de ordem  $O(\varepsilon, \mu^2)$ , enquanto que  $g(T)$  e  $g'(T)$  são de ordem  $O(\varepsilon \mu^2, \mu^4, \varepsilon^2)$ . Como consequência, a equação integro-diferencial não linear que propomos é dada por

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \mu^2 \left( C_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial T^2 \partial X^2} - C_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \right) - \\
& - \varepsilon \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \eta + 2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)^2 \right) + \mu^4 \left( C_2 \frac{\partial^6 \eta}{\partial X^4 \partial T^2} + C_3 \frac{\partial^6 \eta}{\partial X^6} \right) - \\
& - \varepsilon^2 \left( 2\eta \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 - 2\eta \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \eta^2 \right) + \varepsilon \mu^2 \left( C_4 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial T \partial X} \right)^2 + \right. \\
& \quad + C_4 \frac{\partial \eta}{\partial T} \frac{\partial^3 \eta}{\partial T \partial X^2} + C_5 \frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3} \frac{\partial \eta}{\partial X} + C_6 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \right)^2 + C_7 \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \eta + \\
& \quad + C_8 \frac{\partial^4 \eta}{\partial T \partial X^3} \int_{-\infty}^X \frac{\partial \eta}{\partial T}(T, \hat{X}) d\hat{X} + C_8 \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \int_{-\infty}^X \frac{\partial \eta}{\partial T}(T, \hat{X}) d\hat{X} \left. \right) = O(\mu^6). \quad (5.52)
\end{aligned}$$

## 5.3.2 Propriedades dispersivas

### 5.3.2.1 Relação de dispersão

Nesta subsecção, apresentamos a relação de dispersão para o modelo linearizado. Note-se que usamos as escalas dadas por (5.8) juntamente com as seguintes:

$$a_0^* = \frac{a_0}{A}, \quad \omega^* = \frac{\omega L}{\sqrt{gH}}, \quad k^* = kL, \quad b_0^*(z^*) = \frac{b_0(z)H}{AL\sqrt{gH}}. \quad (5.53)$$

Nas equações (5.53), os parâmetros adimensionais  $a_0^*$ ,  $\omega^*$ ,  $k^*$  e  $b_0^*(z^*)$ , denotam a amplitude da onda, a frequência angular, o número de onda e a função relacionada com a magnitude do

potencial da velocidade, respectivamente. No que segue, abandonamos novamente a notação do asterisco. Começamos por introduzir as equações adimensionais do problema completamente linearizado de Airy escrito nas variáveis  $X$  e  $T$  (ver (5.45)),

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = 0, \quad (X, z) \in \mathbb{R} \times [-1, 0], \quad (5.54a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (5.54b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} + \eta - \tau_s \mu^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} = 0, \quad z = 0, \quad (5.54c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -1. \quad (5.54d)$$

Este problema admite a solução definida por

$$\eta(X, T) = a_0 e^{i(kX - \omega T)}, \quad \phi(X, z, T) = b_0(z) e^{i(kX - \omega T)}, \quad (5.55)$$

desde que uma determinada relação de dispersão seja satisfeita, a qual é dada por

$$\frac{\omega^2}{k^2} = (1 + \tau_s \mu^2 k^2) \frac{\tanh(\mu k)}{\mu k}. \quad (5.56)$$

Por outro lado, obtemos uma equação diferencial linear com derivadas parciais de ordem dominante  $O(\mu^2, \mu^4)$  a partir da linearização da equação (5.52). Esta equação é dada da forma seguinte:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \mu^2 \left( C_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial T^2 \partial X^2} - C_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \right) + \mu^4 \left( C_2 \frac{\partial^6 \eta}{\partial X^4 \partial T^2} + C_3 \frac{\partial^6 \eta}{\partial X^6} \right) = 0. \quad (5.57)$$

A equação (5.57) admite soluções da forma

$$\eta(X, T) = a_0 e^{i(kX - \omega T)}, \quad (5.58)$$

desde que a relação de dispersão associada seja satisfeita, a qual é dada por

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1 - C_1(\mu k)^2 - C_3(\mu k)^4}{1 - C_0(\mu k)^2 + C_2(\mu k)^4}. \quad (5.59)$$

### 5.3.2.2 Discussão sobre os parâmetros $\alpha$ , $\beta_1$ , $\beta_2$ e $\beta_3$

A ideia principal consiste no cálculo dos coeficientes  $C_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) em (5.59) de forma a reproduzir (5.56). Note-se que o termo da tensão superficial não é aqui considerado ( $\tau_s = 0$ ).

Como é habitual, comparamos as relações de dispersão dos modelos linearizados descritos por (5.57) (com os coeficientes dados por (5.34)–(5.36), (5.43), (5.44) e (5.50)) com os desenvolvimentos de Padé da relação de dispersão dada pela teoria completamente linear de Airy (ver, e.g., Gobbi et al. (2000) assim como Madsen e Schäffer (1998)). O quadrado da velocidade de fase do problema completamente linear  $C_p^2$  é definido por (ver (5.56))

$$C_p^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\tanh(\mu k)}{\mu k}. \quad (5.60)$$

Os desenvolvimentos de Padé de ordens  $[2, 1]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[2, 2]$ ,  $[4, 1]$ ,  $[1, 4]$ ,  $[2, 4]$ ,  $[4, 2]$  e  $[4, 4]$  de  $C_p^2$  são dados por (ver (5.60))

$$1 - \frac{1}{3}(\mu k)^2, \quad (5.61a) \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{3}(\mu k)^2 - \frac{1}{45}(\mu k)^4}, \quad (5.61e)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{3}(\mu k)^2}, \quad (5.61b) \quad \frac{1 + \frac{2}{21}(\mu k)^2}{1 + \frac{3}{7}(\mu k)^2 + \frac{1}{105}(\mu k)^4}, \quad (5.61f)$$

$$\frac{1 + \frac{1}{15}(\mu k)^2}{1 + \frac{2}{5}(\mu k)^2}, \quad (5.61c) \quad \frac{1 + \frac{1}{14}(\mu k)^2 - \frac{1}{630}(\mu k)^4}{1 + \frac{17}{42}(\mu k)^2}, \quad (5.61g)$$

$$1 - \frac{1}{3}(\mu k)^2 + \frac{2}{15}(\mu k)^4, \quad (5.61d) \quad \frac{1 + \frac{1}{9}(\mu k)^2 + \frac{1}{945}(\mu k)^4}{1 + \frac{4}{9}(\mu k)^2 + \frac{1}{63}(\mu k)^4}, \quad (5.61h)$$

respectivamente. Podemos escolher  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$  de forma a que a equação (5.59) reproduza os desenvolvimentos de Padé apresentados em (5.61). Para generalizar as equações propostas de forma a que seja possível a sua utilização na modelação de todos os problemas físicos possíveis, assumimos que  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3 \in \mathbb{R}$ . Mais especificamente, reproduzimos os desenvolvimentos de Padé definidos em (5.61) para os conjuntos de soluções seguintes:

$$S_1^{[2,1]} = \{(\alpha, \beta_1) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = 0, \beta_1 \in \mathbb{R}\}, \quad (5.62a)$$

$$S_2^{[2,1]} = \{(\alpha, \beta_1) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in \mathbb{R}, \beta_1 = 0\}, \quad (5.62b)$$

$$S_1^{[1,2]} = \{(\alpha, \beta_1) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = -\frac{1}{3\beta_1}, \beta_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \quad (5.63a)$$

$$S_1^{[2,2]} = \left\{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}, \beta_1 = -\frac{2}{5\alpha}, \right. \\ \left. \beta_2 = -\frac{12\alpha(\beta_3 - 1)}{\beta_3(5\alpha^2 - 10\alpha + 4)}, \beta_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}, \quad (5.64a)$$

$$S_2^{[2,2]} = \left\{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}, \beta_1 = -\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \right. \\ \left. \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_3 = 1\right\}, \quad (5.64b)$$

$$S_1^{[4,1]} = \{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in \mathbb{R}, \beta_1 = 0, \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_3 = 0\}, \quad (5.65a)$$

$$S_2^{[4,1]} = \left\{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}, \beta_1 = 0, \right. \\ \left. \beta_2 = \frac{4}{5\alpha^2 - 10\alpha + 4}, \beta_3 \in \mathbb{R}\right\}, \quad (5.65b)$$

$$S_3^{[4,1]} = \{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = 0, \beta_1 \in \mathbb{R}, \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_3 = 0\}, \quad (5.65c)$$

$$S_4^{[4,1]} = \{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = 0, \beta_1 \in \mathbb{R}, \beta_2 = 1, \beta_3 \in \mathbb{R}\}, \quad (5.65d)$$

$$S_1^{[1,4]} = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}, \beta_1 = -\frac{1}{3\alpha}, \right. \\ \left. \beta_2 = -\frac{2}{3} \left( \frac{1 + 15\beta_3\alpha - \beta_3 - 15\alpha}{\beta_3(5\alpha^2 - 10\alpha + 4)} \right), \beta_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \quad (5.66a)$$

$$S_2^{[1,4]} = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = \frac{1}{15}, \beta_1 = -5, \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_3 = 0 \right\}, \quad (5.66b)$$

$$S_3^{[1,4]} = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}, \right. \\ \left. \beta_1 = -\frac{5}{6} + \frac{5}{12} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right), \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_3 = 1 \right\}, \quad (5.66c)$$

$$S_1^{[2,4]} = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}, \beta_1 = -\frac{3}{7\alpha}, \right. \\ \left. \beta_2 = -\frac{2}{7} \left( \frac{-1 + 45\beta_3\alpha + \beta_3 - 45\alpha}{\beta_3(5\alpha^2 - 10\alpha + 4)} \right), \beta_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \quad (5.67a)$$

$$S_2^{[2,4]} = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = \frac{-1}{45}, \beta_1 = \frac{135}{7}, \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_3 = 0 \right\}, \quad (5.67b)$$

$$S_3^{[2,4]} = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}, \beta_1 = -\frac{15}{28} \left( 1 \mp \frac{\sqrt{5}}{5} \right), \right. \\ \left. \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_3 = 1 \right\}, \quad (5.67c)$$

$$S_1^{[4,2]} = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}, \beta_1 = -\frac{17}{42\alpha}, \right. \\ \left. \beta_2 = -\frac{1}{21} \left( \frac{255\beta_3\alpha + \beta_3 - 255\alpha}{\beta_3(5\alpha^2 - 10\alpha + 4)} \right), \beta_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \quad (5.68a)$$

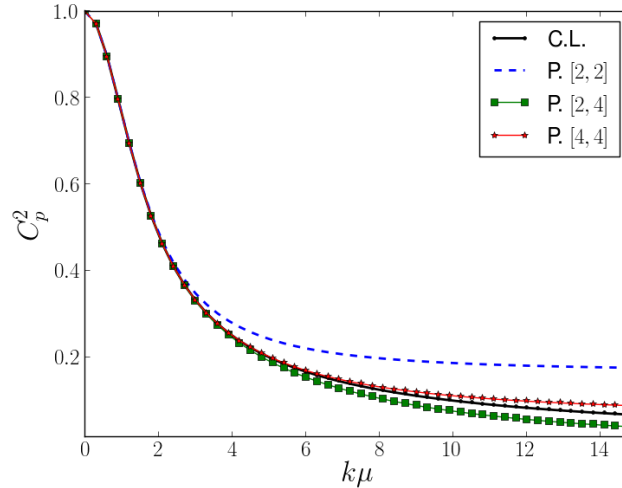
$$S_2^{[4,2]} = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}, \beta_1 = -\frac{85}{168} \left( 1 \mp \frac{\sqrt{5}}{5} \right), \right. \\ \left. \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_3 = \frac{52020}{52531} + \frac{255}{52531} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\}, \quad (5.68b)$$

$$S_1^{[4,4]} = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}, \beta_1 = -\frac{4}{9\alpha}, \right. \\ \left. \beta_2 = -\frac{2}{63} \left( \frac{-15 + 420\beta_3\alpha + 14\beta_3 - 420\alpha}{\beta_3(5\alpha^2 - 10\alpha + 4)} \right), \beta_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \quad (5.69a)$$

$$S_2^{[4,4]} = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = \frac{-1}{28}, \beta_1 = \frac{112}{9}, \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_3 = 0 \right\}, \quad (5.69b)$$

$$S_3^{[4,4]} = \left\{ (\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}, \beta_1 = -\frac{10}{18} \left( 1 \mp \frac{\sqrt{5}}{5} \right), \right. \\ \left. \beta_2 \in \mathbb{R}, \beta_3 = \frac{10995}{10934} - \frac{15}{5467} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\}. \quad (5.69c)$$

Nas últimas equações,  $S_i^{[n,m]}$  ( $i = 1, 2, 3; n, m \in \{1, 2, 4\}$ ) designa os conjuntos de soluções, i.e., os valores de  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  para os quais (5.59) reproduz os desenvolvimentos de Padé de ordens  $[n, m]$  de (5.60), os quais são dadas por (5.61). Note-se que os conjuntos de solução  $S_1^{[2,1]}$ ,  $S_2^{[2,1]}$  e  $S_1^{[1,2]}$  (ver (5.62) e (5.63)) estão associados à equação diferencial de ordem  $O(\mu^2)$  obtida a partir de (5.57). Na figura 5.2, mostramos a forma adimensional do quadrado da velocidade de fase  $C_p^2$  como função de  $k\mu$  para o modelo completamente linear de Airy assim como os desenvolvimentos de Padé de ordens  $[2, 2]$ ,  $[2, 4]$  e  $[4, 4]$  relacionados com a equação de Boussinesq estendida.



**Figura 5.2:** Forma adimensional do quadrado da velocidade de fase  $C_p^2$  como função de  $k\mu$  para o modelo completamente linear de Airy (C.L.) assim como os desenvolvimentos de Padé de ordens  $[2, 2]$ ,  $[2, 4]$  e  $[4, 4]$  relacionados com a equação de Boussinesq proposta.

## 5.4 Soluções de uma equação de Boussinesq não linear de ordem $O(\mu^2, \varepsilon)$

### 5.4.1 Equação diferencial ordinária e não linear de ordem $O(\mu^2, \varepsilon)$

A partir de (5.52), obtemos a equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$  seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \mu^2 C_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial T^2 \partial X^2} - \mu^2 C_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} - \\ - \varepsilon \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \eta + 2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)^2 \right) = O(\mu^4, \varepsilon \mu^2, \varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Para obter uma equação diferencial ordinária não linear, introduzimos a transformação seguinte:

$$\bar{\eta} = \eta - \varepsilon \eta^2. \quad (5.71)$$

Note-se que temos (ver (5.46) e (5.71))

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial X^2} + O(\mu^2, \varepsilon). \quad (5.72)$$

Usando-se (5.71) e (5.72), a equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$  dada por (5.70) pode ser reescrita da forma seguinte:

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial X^2} + \mu^2 C_0 \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial T^2 \partial X^2} - \mu^2 C_1 \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial X^4} - \varepsilon \frac{3}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} (\bar{\eta}^2) = 0. \quad (5.73)$$

Usando-se (5.73) e a transformação de onda de translação  $\xi = a_c X - cT$  assim como assumindo-se que  $\bar{\eta}(\xi) = \bar{\eta}(X, T)$ , obtém-se a equação diferencial ordinária dada por

$$(c^2 - a_c^2) \bar{\eta}'' + \mu^2 a_c^2 (C_0 c^2 - a_c^2 C_1) \bar{\eta}^{(IV)} - \frac{3}{2} \varepsilon a_c^2 (\bar{\eta}^2)'' = 0, \quad (5.74)$$

onde  $a_c$  é uma constante real e  $c$  é a velocidade de propagação da onda. Aqui, impomos as condições de fronteira seguintes:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \bar{\eta}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \bar{\eta}'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \bar{\eta}''(\xi) = 0. \quad (5.75)$$

Integrando-se duas vezes (5.74) com respeito a  $\xi$  e impondo-se as condições de fronteira (5.75) obtém-se uma equação diferencial ordinária e não linear. Multiplicando-se esta equação não linear por  $\bar{\eta}'$ , integrando-se novamente com respeito a  $\xi$  e impondo-se as mesmas condições de fronteira, tem-se que

$$(c^2 - a_c^2) \bar{\eta}^2 + \mu^2 a_c^2 (C_0 c^2 - a_c^2 C_1) (\bar{\eta}')^2 - \varepsilon a_c^2 \bar{\eta}^3 = 0. \quad (5.76)$$

Note-se que a equação (5.76) admite a solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  que satisfaz as condições de fronteira (5.75).

Podemos mostrar que (5.76) é integrável. Mais concretamente, consideramos  $c^2 = \theta a_c^2$ ,  $\theta \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $c \in \mathbb{R}$  e  $a_c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  juntamente com os três casos seguintes:  $c^2 = a_c^2$  ( $\theta = 1$ ),  $c^2 > a_c^2$  ( $\theta > 1$ ) e  $c^2 < a_c^2$  ( $0 \leq \theta < 1$ ). Frisamos que o caso especial  $\theta = 0$  corresponde a um regime de onda estacionário descrito por (5.73) com as derivadas da elevação da superfície da onda, com respeito ao tempo, iguais a zero. Por outro lado, quando  $a_c = 0$  temos um regime de onda apenas dependente do tempo. Este regime é descrito por (5.73) onde os gradientes com respeito à variável espacial da elevação da superfície da onda são desprezados. Este último caso não é aqui considerado, uma vez que não são obtidas soluções com significado físico no contexto deste trabalho.

#### 5.4.1.1 Primeiro caso $\theta = 1$ ( $c^2 = a_c^2$ e $a_c \neq 0$ )

Neste caso, a equação (5.76) é completamente integrável e admite soluções positivas e negativas. A solução positiva  $\bar{\eta}$  é dada por

$$\bar{\eta}(\xi) = \frac{4}{(\pm \mathcal{B}_1 \xi + K)^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \mp \frac{K}{\mathcal{B}_1} \right\}, \quad (5.77)$$

onde  $K$  é uma constante arbitrária de integração, enquanto que  $\mathcal{B}_1$  é definida da forma seguinte:

$$\mathcal{B}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu^2 a_c^2 (-\frac{1}{3} + \tau_s)}}. \quad (5.78)$$

Por outro lado, a solução negativa  $\bar{\eta}$  é dada por

$$\bar{\eta}(\xi) = \frac{-4}{(\pm \mathcal{B}_2 \xi + K)^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \mp \frac{K}{\mathcal{B}_2} \right\}, \quad (5.79)$$

onde  $\mathcal{B}_2$  é definida por

$$\mathcal{B}_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu^2 a_c^2 (\frac{1}{3} - \tau_s)}}. \quad (5.80)$$

Note-se que as soluções dadas por (5.77)–(5.80) satisfazem as condições de fronteira descritas por (5.75). Relembramos que  $C_0 = \alpha\beta_1$  e  $C_1 = \alpha\beta_1 + \frac{1}{3} - \tau_s$ , onde  $\alpha$  é o coeficiente de Nwogu,  $\beta_1$  é um parâmetro arbitrário (ver (5.28)) e  $\tau_s$  é o número de Bond. Assim, para se ter uma solução dada por (5.77) deve ser satisfeita a seguinte desigualdade:  $\tau_s > \frac{1}{3}$ . Por outro lado, para se ter uma solução dada por (5.79) deve ser satisfeita a seguinte condição:  $0 \leq \tau_s < \frac{1}{3}$ . No nosso caso, notamos que  $\mathcal{B}_i \neq 0$  e estas soluções têm singularidades em  $\xi = \mp \frac{K}{\mathcal{B}_i}$  ( $i = 1, 2$ ). Note-se que para  $\tau_s = \frac{1}{3}$  a solução trivial ou nula  $\bar{\eta}(\xi) = 0$  é obtida. Na figura 5.3 (a) mostramos a solução positiva  $\bar{\eta}(\xi)$  ( $\xi = a_c X - cT$ ) dada por (5.77)–(5.78) com  $\tau_s = 2/3$ . Por outro lado, podemos ver a solução negativa dada por (5.79)–(5.80) com  $\tau_s = 0$  na figura 5.3 (b). Os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\alpha = \beta_1 = 0$ ,  $c^2 = a_c^2 = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K = 0$ . A solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  de (5.76) assim como a assíntota horizontal  $\bar{\eta} = 0$  de (5.77) e de (5.79) não são apresentadas.

#### 5.4.1.2 Segundo caso $\theta > 1$ ( $c^2 > a_c^2$ e $a_c \neq 0$ )

Neste caso, podemos mostrar que a equação (5.76) também é completamente integrável e admite soluções exactas positivas e negativas, as quais satisfazem as condições de fronteira (5.75). Estas soluções exactas positivas e negativas são dadas por

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \operatorname{sech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (5.81)$$

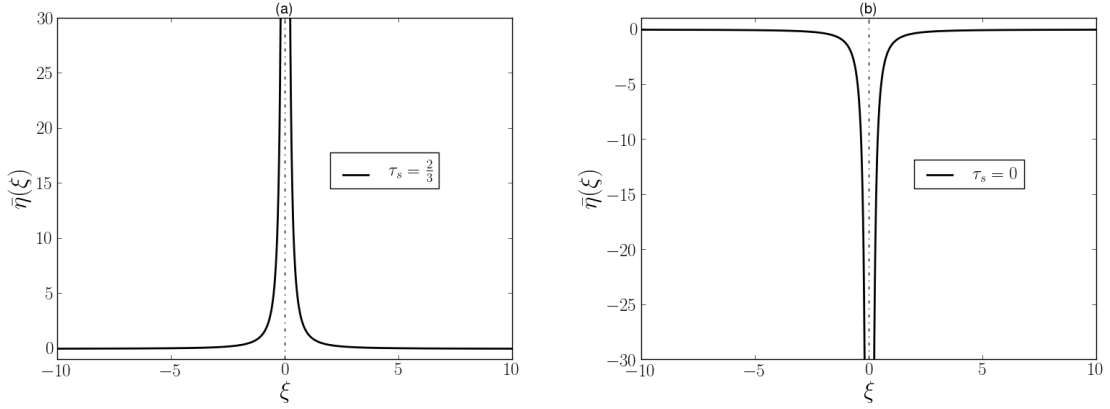
e

$$\bar{\eta}(\xi) = -\mathcal{A} \operatorname{cosech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \mp \frac{K}{\mathcal{B}_3} \right\}, \quad (5.82)$$

respectivamente, onde  $K$  é uma constante arbitrária de integração e  $\mathcal{A}$  bem como  $\mathcal{B}_3$  são definidos da forma seguinte:

$$\mathcal{A} = \frac{c^2 - a_c^2}{\varepsilon a_c^2} = \frac{\theta - 1}{\varepsilon}, \quad (5.83)$$

$$\mathcal{B}_3 = \sqrt{\frac{1 - \theta}{4\mu^2(C_0 c^2 - C_1 a_c^2)}} = \sqrt{\frac{1 - \theta}{4\mu^2 a_c^2 (\alpha\beta_1(\theta - 1) - (\frac{1}{3} - \tau_s))}}. \quad (5.84)$$



**Figura 5.3:** Soluções positivas e negativas  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a) mostramos a solução positiva dada por (5.77)–(5.78) com  $\tau_s = 2/3$ . Na figura (b) podemos ver a solução negativa dada por (5.79)–(5.80) com  $\tau_s = 0$ . Os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\alpha = \beta_1 = 0$ ,  $c^2 = a_c^2 = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K = 0$ . Também podemos observar as assíntotas verticais em ambos os gráficos ( $\xi = 0$ ). A solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  de (5.76) assim como a assíntota horizontal  $\bar{\eta} = 0$  de (5.77) e de (5.79) não são apresentadas.

No que segue, discutimos as soluções anteriores em termos dos parâmetros  $a_c$ ,  $c$ ,  $\tau_s$ ,  $\alpha$  e  $\beta_1$  de forma a que  $\mathcal{B}_3 \in \mathbb{R}^+$ . Como mencionado anteriormente  $\alpha \in [0, 1]$  (ver subsecção (5.2.2)). Nos problemas de ondas marítimas de superfície  $z = -\alpha h$  ( $\alpha \in [0, 1]$ ) é, do ponto de vista da Física, interpretado como o nível da água onde o potencial transformado da velocidade é avaliado. No entanto, assumimos que  $\alpha \geq 0$  para generalizar estas equações de forma a modelar outros problemas da Física. Salientamos que todos os factores em (5.84) que dependem de  $\alpha$  assim como de  $\beta_1$  são da forma  $\alpha\beta_1$ . Desta forma, o sinal de  $\alpha\beta_1$  é discutido como função de  $\beta_1$  ( $\alpha \geq 0$ ). Para além disto, o número de Bond  $\tau_s$  assume valores físicos não negativos. Note-se que soluções triviais ou nulas são obtidas quando  $\mathcal{B}_3 = \mathcal{A} = 0$  ( $\theta = 1$ ),  $\mu > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  assim como  $\tau_s \geq 0$  e  $\tau_s \neq \frac{1}{3}$  ( $a_c \neq 0$ ). Por outro lado,  $\bar{\eta}(\xi) = (\theta - 1)/\varepsilon$  é uma solução positiva de (5.76) que não satisfaz (5.75).

Neste contexto, o domínio de validade das soluções é definido por

$$\alpha\beta_1(\theta - 1) - \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) < 0. \quad (5.85)$$

Assim, temos os casos seguintes:

- (p1-a) Se  $\alpha = 0$  ou  $\beta_1 = 0$ , então devemos ter  $0 \leq \tau_s < \frac{1}{3}$  para que se obtenham soluções válidas para qualquer  $\theta > 1$ . Note-se que, neste caso, não existem soluções reais para valores de  $\tau_s \geq \frac{1}{3}$ ;
- (p1-b) Por outro lado, alguns dos casos descritos pela equação (5.85) com  $0 \leq \theta < 1$ ,  $\frac{3}{4} < \theta < 1$  e  $0 \leq \theta < \frac{3}{4}$  irão surgir nas subsecções seguintes. Nestes casos, se  $\alpha = 0$  ou  $\beta_1 = 0$ , então deveremos ter  $0 \leq \tau_s < \frac{1}{3}$  de forma a serem obtidas soluções válidas. Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $\tau_s \geq \frac{1}{3}$ ;
- (p2-a) Se  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 > 0$ , então deveremos ter

$$1 < \theta < \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \tau_s < 1/3, \quad (5.86)$$

para que se obtenham soluções admissíveis no caso em que  $\theta > 1$ . Note-se que, neste caso, não existem soluções reais para valores de  $\tau_s \geq \frac{1}{3}$ ;

(p2-b) Por outro lado, no caso em que  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 > 0$ , a equação (5.85) é verificada para todo o  $\theta$  tal que  $0 \leq \theta < 1$  desde que  $0 \leq \tau_s \leq \frac{1}{3}$ . Neste caso em que  $0 \leq \theta < 1$  se

$$0 \leq \theta < \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 \quad \text{com} \quad \frac{1}{3} \leq \tau_s < \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}, \quad (5.87)$$

a equação (5.85) é também satisfeita. Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $\tau_s \geq \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}$ ;

(p2-c) No caso em que  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 > 0$ , a equação (5.85) é verificada para todo o  $\theta$  tal que  $\frac{3}{4} < \theta < 1$  desde que  $0 \leq \tau_s \leq \frac{1}{3}$ . Neste caso em que  $\frac{3}{4} < \theta < 1$  se

$$\frac{3}{4} < \theta < \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 \quad \text{com} \quad \frac{1}{3} \leq \tau_s < \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}, \quad (5.88)$$

a equação (5.85) é também satisfeita. Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $\tau_s \geq \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}$ ;

(p2-d) Por sua vez, no caso em que  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 > 0$ , a equação (5.85) é verificada para todo o  $\theta$  tal que  $0 \leq \theta < \frac{3}{4}$  desde que  $0 \leq \tau_s \leq \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}$ . Para além disto, neste caso em que  $0 \leq \theta < \frac{3}{4}$  se

$$0 \leq \theta < \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 \quad \text{com} \quad \frac{1}{3} + \frac{\alpha\beta_1}{4} \leq \tau_s < \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}, \quad (5.89)$$

a equação (5.85) é também satisfeita. Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $\tau_s \geq \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}$ ;

(p3-a) Se  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 < 0$ , então deveremos ter

$$\theta > 1 \text{ e } \theta > \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1. \quad (5.90)$$

Assim, se  $0 \leq \tau_s \leq \frac{1}{3}$  temos soluções para qualquer  $\theta > 1$ . Para além disto, se  $\tau_s \geq \frac{1}{3}$  só se obtêm soluções para

$$\theta > \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1; \quad (5.91)$$

(p3-b) Por outro lado, no caso em que  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 < 0$ , a equação (5.85) é satisfeita para todos os valores de  $\theta$  tais que  $0 \leq \theta < 1$  se  $0 \leq \tau_s < \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}$ . Neste caso, a equação (5.85) é também verificada para todos os valores de  $\theta$  tais que

$$\left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 < \theta < 1 \quad (5.92)$$

se  $\alpha\beta_1 + \frac{1}{3} \leq \tau_s < \frac{1}{3}$  e  $\tau_s \geq 0$ . Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $\tau_s \geq \frac{1}{3}$ ;

(p3-c) No caso em que  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 < 0$ , a equação (5.85) é satisfeita para todos os valores de  $\theta$  tais que  $\frac{3}{4} < \theta < 1$  se  $0 \leq \tau_s \leq \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}$ . Neste caso, a equação (5.85) é também verificada para todos os valores de  $\theta$  tais que

$$\left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 < \theta < 1 \quad (5.93)$$

se  $\frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3} \leq \tau_s < \frac{1}{3}$  e  $\tau_s \geq 0$ . Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $\tau_s \geq \frac{1}{3}$ ;

(p3-d) Por sua vez, no caso em que  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 < 0$ , a equação (5.85) é satisfeita para todos os valores de  $\theta$  tais que  $0 \leq \theta < \frac{3}{4}$  se  $0 \leq \tau_s < \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}$ . Neste caso, a equação (5.85) é também verificada para todos os valores de  $\theta$  tais que

$$\left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 < \theta < \frac{3}{4} \quad (5.94)$$

se  $\alpha\beta_1 + \frac{1}{3} \leq \tau_s < \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}$  e  $\tau_s \geq 0$ . Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $\tau_s \geq \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}$ .

Para além disto, também obtemos soluções periódicas que não satisfazem as condições de fronteira (5.75), as quais são dadas por

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \sec^2(\pm \mathcal{B}_4 \xi + K), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\mathcal{B}_4} \left( \frac{\pi}{2} + k_0 \pi - K \right) \right\}, \quad (k_0 \in \mathbb{Z}) \quad (5.95)$$

e

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \operatorname{cosec}^2(\pm \mathcal{B}_4 \xi + K), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\mathcal{B}_4} (k_0 \pi - K) \right\}, \quad (k_0 \in \mathbb{Z}), \quad (5.96)$$

com  $K$  uma constante arbitrária de integração,  $\mathcal{A}$  dado por (5.83) e  $\mathcal{B}_4$  é definido por

$$\mathcal{B}_4 = \sqrt{\frac{\theta - 1}{4\mu^2(C_0 c^2 - C_1 a_c^2)}} = \sqrt{\frac{\theta - 1}{4\mu^2 a_c^2 (\alpha\beta_1(\theta - 1) - (\frac{1}{3} - \tau_s))}}. \quad (5.97)$$

Para que o valor de  $\mathcal{B}_4$  seja um número real positivo, o domínio de validade dos parâmetros é descrito por

$$\alpha\beta_1(\theta - 1) - \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) > 0. \quad (5.98)$$

Neste contexto, temos os casos seguintes:

- (n1-a) Se  $\alpha = 0$  ou  $\beta_1 = 0$ , então deveremos ter  $\tau_s > \frac{1}{3}$  de forma a serem obtidas soluções válidas para  $\theta > 1$ . Note-se que, neste caso, não existem soluções reais para valores de  $0 \leq \tau_s \leq \frac{1}{3}$ ;
- (n1-b) Refere-se também que os casos descritos pela equação (5.98) com  $0 \leq \theta < 1$ ,  $\frac{3}{4} < \theta < 1$  e  $0 \leq \theta < \frac{3}{4}$  irão surgir nas subsecções seguintes. Nestes casos, se  $\alpha = 0$  ou  $\beta_1 = 0$  então deve-se ter  $\tau_s > \frac{1}{3}$  para que sejam obtidas soluções válidas. Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $0 \leq \tau_s \leq \frac{1}{3}$ ;
- (n2-a) Se  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 > 0$ , a equação (5.98) é verificada para  $\theta > 1$  desde que  $\tau_s \geq \frac{1}{3}$ . Para além disto, se

$$\theta > \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 \quad \text{com} \quad 0 \leq \tau_s \leq \frac{1}{3}, \quad (5.99)$$

a equação (5.98) é também satisfeita;

- (n2-b) Por outro lado, no caso em que  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 > 0$ , a equação (5.98) é verificada para todos os valores de  $\theta$  tais que  $0 \leq \theta < 1$  desde que  $\tau_s > \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}$ . Para além disto, se

$$\left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 < \theta < 1 \quad \text{com} \quad \frac{1}{3} < \tau_s \leq \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}, \quad (5.100)$$

a equação (5.98) é também satisfeita. Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $0 \leq \tau_s \leq \frac{1}{3}$ ;

(n2-c) No caso em que  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 > 0$ , a equação (5.98) é verificada para todos os valores de  $\theta$  tais que  $\frac{3}{4} < \theta < 1$  desde que  $\tau_s \geq \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}$ . Para além disto, se

$$\left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 < \theta < 1 \quad \text{com} \quad \frac{1}{3} < \tau_s \leq \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}, \quad (5.101)$$

a equação (5.98) é também satisfeita. Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $0 \leq \tau_s \leq \frac{1}{3}$ ;

(n2-d) Por sua vez, se  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 > 0$ , a equação (5.98) é verificada para todos os valores de  $\theta$  tais que  $0 \leq \theta < \frac{3}{4}$  desde que  $\tau_s > \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}$ . Para além disto, se

$$\left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 < \theta < \frac{3}{4} \quad \text{com} \quad \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3} < \tau_s \leq \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}, \quad (5.102)$$

a equação (5.98) é também satisfeita. Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $0 \leq \tau_s \leq \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}$ ;

(n3-a) Se  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 < 0$ , então só existem soluções admissíveis para valores de  $\theta > 1$  tais que

$$1 < \theta < \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 \quad \text{com} \quad \tau_s > \frac{1}{3}. \quad (5.103)$$

Note-se que, neste caso, não existem soluções reais para valores de  $0 \leq \tau_s \leq \frac{1}{3}$ ;

(n3-b) Por outro lado, no caso em que  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 < 0$ , a equação (5.98) é verificada para todos os valores de  $\theta$  tais que  $0 \leq \theta < 1$  se  $\tau_s \geq \frac{1}{3}$ . Neste caso, a equação (5.98) é também verificada se

$$0 \leq \theta < \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 \quad \text{com} \quad \alpha\beta_1 + \frac{1}{3} < \tau_s \leq \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \tau_s \geq 0. \quad (5.104)$$

Note-se que, neste caso, não existem soluções reais para valores de  $0 \leq \tau_s \leq \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}$ ;

(n3-c) No caso em que  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 < 0$ , a equação (5.98) é verificada para todos os valores de  $\theta$  tais que  $\frac{3}{4} \leq \theta < 1$  se  $\tau_s \geq \frac{1}{3}$ . Neste caso, a equação (5.98) é também verificada se

$$\frac{3}{4} < \theta < \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 \quad \text{com} \quad \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3} < \tau_s \leq \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \tau_s \geq 0. \quad (5.105)$$

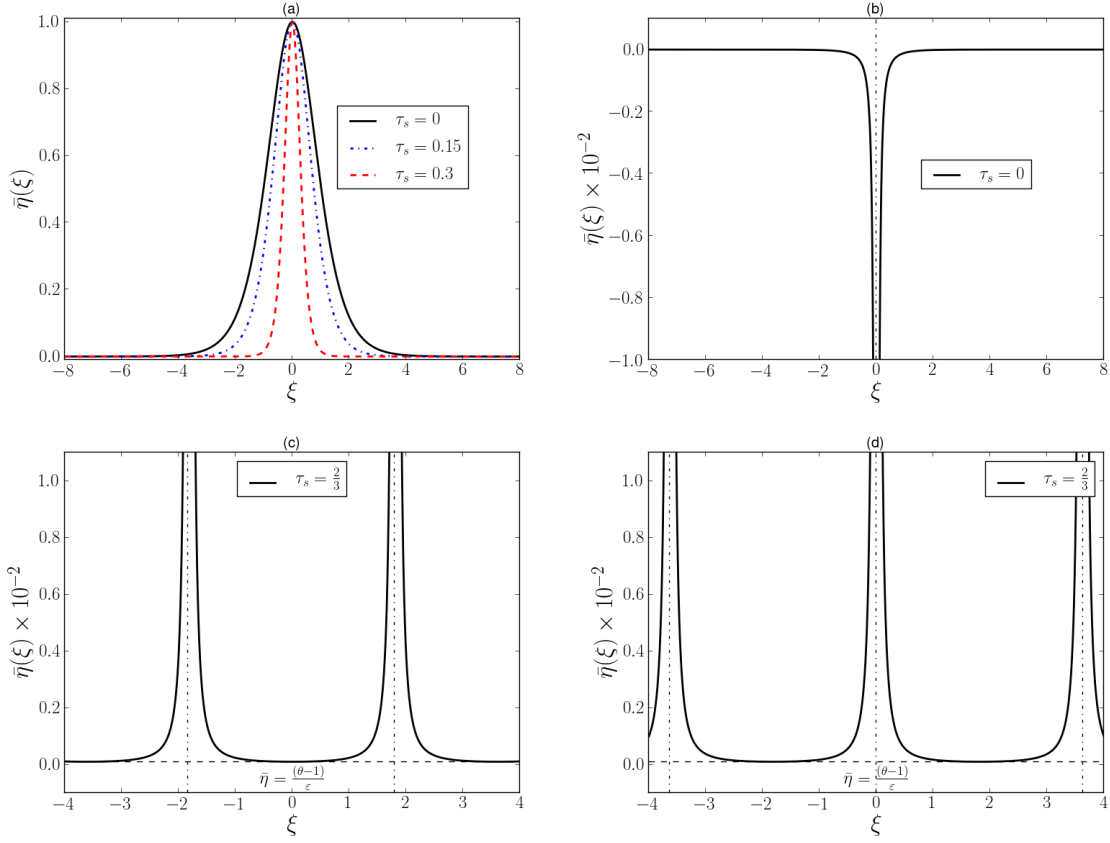
Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $0 \leq \tau_s \leq \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}$ ;

(n3-d) Por sua vez, se  $\alpha > 0$  e  $\beta_1 < 0$ , a equação (5.98) é verificada para todos os valores de  $\theta$  tais que  $0 \leq \theta < \frac{3}{4}$  se  $\tau_s \geq \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}$ . Neste caso, a equação (5.98) é também verificada se

$$0 \leq \theta < \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) \frac{1}{\alpha\beta_1} + 1 \quad \text{com} \quad \alpha\beta_1 + \frac{1}{3} < \tau_s \leq \frac{\alpha\beta_1}{4} + \frac{1}{3}. \quad (5.106)$$

Note-se que, nestes casos, não existem soluções reais para valores de  $0 \leq \tau_s \leq \alpha\beta_1 + \frac{1}{3}$ .

Na figura 5.4, apresentamos as soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.81)–(5.84) bem como (5.83), (5.95), (5.96) e (5.97) como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura 5.4 (a), mostramos a solução positiva do tipo solitão para  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_s = 0.15$  e  $\tau_s = 0.3$  (ver (5.81), (5.83) e (5.84)), enquanto que a solução negativa dada por (5.82), (5.83) e (5.84) com  $\tau_s = 0$  é apresentada na figura 5.4 (b). Note-se que  $\bar{\eta} = 0$  é também uma solução da equação diferencial ordinária (5.76) que satisfaz (5.75). Por outro lado, os gráficos das soluções descritas por (5.81) e (5.82) admitem uma



**Figura 5.4:** Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a), mostramos as soluções positivas do tipo solitão para  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_s = 0.15$  e  $\tau_s = 0.3$  (ver (5.81), (5.83) e (5.84)), enquanto que na figura (b), a solução negativa dada por (5.82), (5.83) e (5.84) com  $\tau_s = 0$  é apresentada ( $-100 \leq \bar{\eta}(\xi) < 0$ ). Nas figuras (c) e (d), podemos ver as soluções periódicas com  $\tau_s = 2/3$  (ver (5.83), (5.95), (5.96) e (5.97)). Os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\alpha = \beta_1 = 0$ ,  $c^2 = 1.01$ ,  $a_c^2 = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K = 0$ . A solução  $\bar{\eta} = (\theta - 1)/\varepsilon$  e as assíntotas verticais são mostradas enquanto que a solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  não é representada.

assíntota horizontal definida por  $\bar{\eta} = 0$ . Nas figuras 5.4 (c) e 5.4 (d), também podemos ver as soluções periódicas dadas por (5.83), (5.95), (5.96) e (5.97) como função de  $\xi$  com  $\tau_s = 2/3$ . Os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\alpha = \beta_1 = 0$ ,  $c^2 = 1.01$ ,  $a_c^2 = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K = 0$ .

A partir da figura 5.4 (a), podemos observar que se  $\tau_s$  cresce então o comprimento da onda, definido em qualquer altura, decresce.

#### 5.4.1.3 Terceiro caso $0 \leq \theta < 1$ ( $c^2 < a_c^2$ e $a_c \neq 0$ )

Neste caso, a equação (5.76) admite soluções negativas e positivas que satisfazem (5.75), as quais são dadas por

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \operatorname{sech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (5.107)$$

e

$$\bar{\eta}(\xi) = -\mathcal{A} \operatorname{cosech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \mp \frac{K}{\mathcal{B}_3} \right\}, \quad (5.108)$$

respectivamente. Em (5.107) e (5.108),  $K$  é uma constante arbitrária de integração e as constantes  $\mathcal{A}$  bem como  $\mathcal{B}_3$  são definidas por (5.83) e (5.84), respectivamente. Note-se que soluções triviais ou nulas são obtidas quando  $\mathcal{B}_3 = \mathcal{A} = 0$  ( $\theta = 1$ ),  $\mu > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  bem como  $\tau_s \geq 0$  e  $\tau_s \neq \frac{1}{3}$  ( $a_c \neq 0$ ). Por outro lado,  $\bar{\eta}(\xi) = (\theta - 1)/\varepsilon$  é também uma solução negativa de (5.76) que não satisfaz (5.75). Para que o valor de  $\mathcal{B}_3$  seja um número real positivo, o domínio de validade dos parâmetros é descrito por

$$\alpha\beta_1(\theta - 1) - \left(\frac{1}{3} - \tau_s\right) > 0. \quad (5.109)$$

Neste contexto, devemos satisfazer as condições descritas por (n1-b), (n2-b) ou (n3-b) para obter soluções admissíveis (ver 5.4.1.2).

Para além disto, também obtemos soluções periódicas que não satisfazem as condições de fronteira (5.75), as quais são dadas por

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}\sec^2(\pm\mathcal{B}_4\xi + K), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{1}{\mathcal{B}_4} \left( \frac{\pi}{2} + k_0\pi - K \right) \right\}, \quad (k_0 \in \mathbb{Z}), \quad (5.110)$$

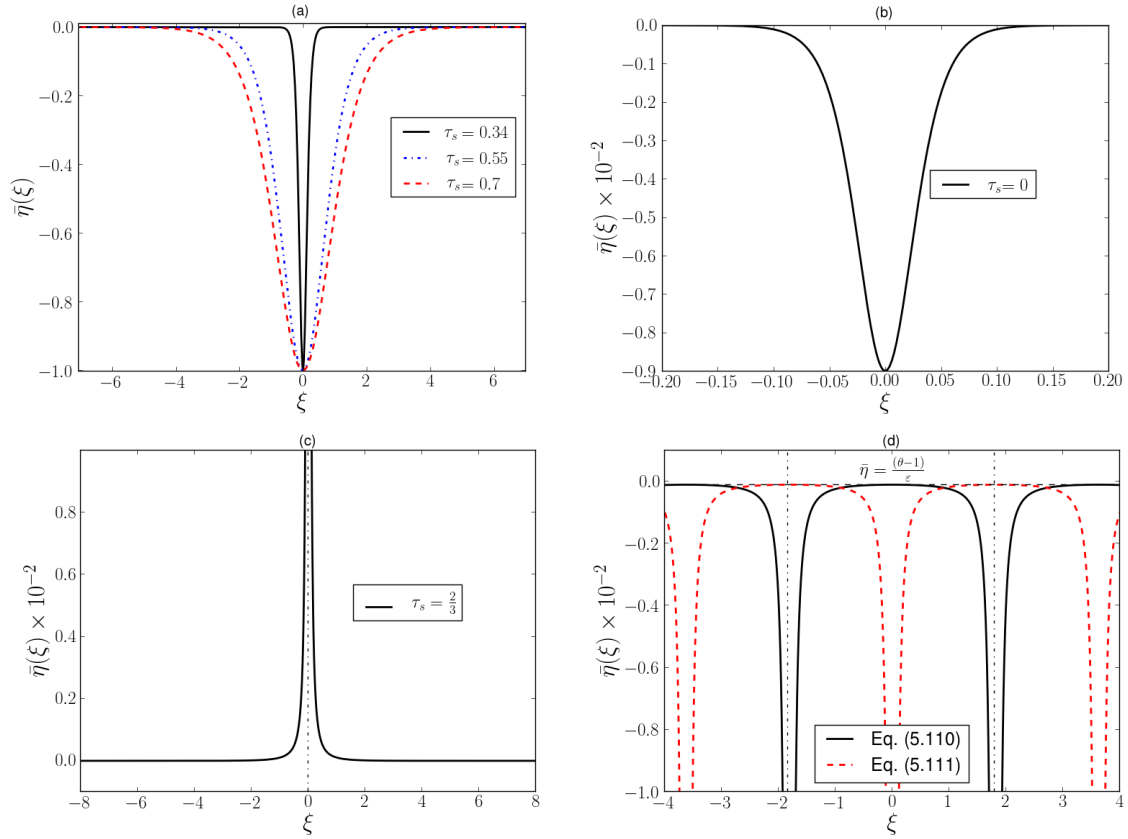
e

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}\operatorname{cosec}^2(\pm\mathcal{B}_4\xi + K), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{1}{\mathcal{B}_4} (k_0\pi - K) \right\}, \quad (k_0 \in \mathbb{Z}), \quad (5.111)$$

com  $K$  uma constante arbitrária de integração e  $\mathcal{A}$  bem como  $\mathcal{B}_4$  são dadas por (5.83) e (5.97), respectivamente. Neste caso, para se ter soluções admissíveis uma das condições (p1-b), (p2-b) ou (p3-b) deve ser satisfeita.

Na figura 5.5, mostramos as soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.83), (5.84), (5.97), (5.107), (5.108), (5.110) e (5.111) como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura 5.5 (a), apresentamos as soluções negativas do tipo solitão dadas por (5.107) com  $\tau_s = 0.34$ ,  $\tau_s = 0.55$  e  $\tau_s = 0.7$ , enquanto que  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 0.99$ . Na figura 5.5 (b), mostramos uma solução negativa do tipo solitão dada por (5.107) com  $\tau_s = 0$  e  $c^2 = 0.1$  bem como  $\alpha = 1 - (\sqrt{5}/5)$  e  $\beta_1 = -(1/2)(1 + \sqrt{5}/5)$  (ver (5.64b)).

Note-se que  $\bar{\eta} = 0$  é também uma solução da equação diferencial ordinária (5.76) que satisfaz (5.75). Por outro lado, os gráficos das soluções descritas por (5.107) e (5.108) admitem uma assíntota horizontal definida por  $\bar{\eta} = 0$ . Na figura 5.5 (c), representa-se uma solução positiva dada por (5.108) com  $\tau_s = 2/3$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 0.99$ . Soluções periódicas  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.83), (5.97), (5.110) e (5.111) com  $c^2 = 0.99$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $\tau_s = 0$  são apresentadas na figura 5.5 (d). Em todos estes casos, os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$  e  $K = 0$ . Destes resultados, podemos concluir que as equações propostas modelam ondas de depressão para  $\tau_s \geq 0$ . Estes resultados devem-se à inclusão dos parâmetros introduzidos na equação proposta, permitindo que a velocidade de propagação da onda  $c = \pm|a|\sqrt{\theta}$  com  $\theta \in \mathbb{R}_0^+$  e  $a_c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  possa tomar qualquer valor real.



**Figura 5.5:** Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.83), (5.84), (5.97), (5.107), (5.108), (5.110) e (5.111) como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a), apresentamos a solução negativa do tipo solitão dada por (5.107) com  $\tau_s = 0.34$ ,  $\tau_s = 0.55$  e  $\tau_s = 0.7$ , enquanto que  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 0.99$ . Na figura (b), mostramos uma solução negativa do tipo solitão dada por (5.107) com  $\tau_s = 0$  e  $c^2 = 0.1$  bem como  $\alpha = 1 - (\sqrt{5}/5)$  e  $\beta_1 = -(1/2)(1 + \sqrt{5}/5)$  ( $-90 \leq \bar{\eta} < 0$ ). Na figura (c), mostramos uma solução positiva dada por (5.108) com  $\tau_s = 2/3$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 0.99$ . Soluções periódicas  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.110) (linha preta sólida) e (5.111) (linha vermelha tracejada) com  $c^2 = 0.99$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $\tau_s = 0$  são apresentadas na figura (d). Nas figuras (a)–(d), os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$  e  $K = 0$ . As assíntotas verticais e a solução  $\bar{\eta} = (\theta - 1)/\varepsilon$  são mostradas enquanto que a solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  assim como a assíntota horizontal  $\bar{\eta} = 0$  dos gráficos em (a)–(c) não são ilustradas.

## 5.5 Soluções de uma equação de Boussinesq não linear de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$

### 5.5.1 Equação diferencial ordinária não linear e de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$

De (5.52) obtemos a equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$  seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \mu^2 C_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial T^2 \partial X^2} - \mu^2 C_1 \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} - \\ - \varepsilon \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \eta + 2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)^2 \right) - \\ - \varepsilon^2 \left( 2\eta \left( \frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 - 2\eta \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \eta^2 \right) = O(\mu^4, \varepsilon \mu^2). \end{aligned} \quad (5.112)$$

Para se obter uma equação diferencial ordinária e não linear, começamos por introduzir aqui a transformação seguinte:

$$\bar{\eta} = \eta - \varepsilon \eta^2 + \varepsilon^2 \eta^3. \quad (5.113)$$

Note-se que temos (ver (5.46) e (5.113))

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial X^2} + O(\mu^2, \varepsilon). \quad (5.114)$$

Usando-se (5.112), (5.113) e (5.114), obtemos a equação até à ordem dominante mencionada atrás, a qual é dada por

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial X^2} + \mu^2 C_0 \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial T^2 \partial X^2} - \mu^2 C_1 \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial X^4} - \varepsilon \frac{3}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} (\bar{\eta}^2) - \varepsilon^2 2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} (\bar{\eta}^3) = 0. \quad (5.115)$$

Através de (5.115) e da transformação de onda de translação  $\xi = a_c X - cT$  bem como assumindo-se que  $\bar{\eta}(\xi) = \bar{\eta}(X, T)$ , deduz-se a equação diferencial ordinária seguinte:

$$(c^2 - a_c^2) \bar{\eta}'' + \mu^2 a_c^2 (C_0 c^2 - a_c^2 C_1) \bar{\eta}^{(IV)} - \frac{3}{2} \varepsilon a_c^2 (\bar{\eta}^2)'' - 2 \varepsilon^2 a_c^2 (\bar{\eta}^3)'' = 0. \quad (5.116)$$

Integrando-se duas vezes (5.116) e impondo-se as condições de fronteira (5.75) obtém-se uma equação diferencial ordinária e não linear. Multiplicando-se esta equação não linear por  $\bar{\eta}'$ , integrando-se novamente e impondo-se as mesmas condições de fronteira, tem-se que

$$(c^2 - a_c^2) \bar{\eta}^2 + \mu^2 a_c^2 (C_0 c^2 - a_c^2 C_1) (\bar{\eta}')^2 - \varepsilon a_c^2 \bar{\eta}^3 - \varepsilon^2 a_c^2 \bar{\eta}^4 = 0. \quad (5.117)$$

Note-se que a equação (5.117) é integrável e admite a solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$ , a qual satisfaz as condições de fronteira (5.75). No que segue, procuram-se soluções não triviais. Mais concretamente, podemos considerar  $c^2 = \theta a_c^2$ ,  $\theta \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $c \in \mathbb{R}$  e  $a_c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  juntamente com os cinco casos seguintes:  $c^2 = a_c^2$  ( $\theta = 1$ ),  $c^2 > a_c^2$  ( $\theta > 1$ ),  $\frac{3}{4} a_c^2 < c^2 < a_c^2$  ( $\frac{3}{4} < \theta < 1$ ),  $c^2 = \frac{3}{4} a_c^2$  ( $\theta = \frac{3}{4}$ ) e  $0 \leq c^2 < \frac{3}{4} a_c^2$  ( $0 \leq \theta < \frac{3}{4}$ ). Conclusões análogas às mencionadas anteriormente podem ser obtidas quando  $\theta = 0$  e  $a_c = 0$  (ver subsecção 5.4.1).

#### 5.5.1.1 Primeiro caso $\theta = 1$ ( $c^2 = a_c^2$ e $a_c \neq 0$ )

Neste caso, a equação (5.117) é também completamente integrável. Se  $\tau_s = 1/3$  então temos a solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  enquanto que se  $0 \leq \tau_s < 1/3$  obtemos

$$\bar{\eta}(\xi) = \frac{-4}{(\pm \mathcal{B}_5 \xi + K)^2 + 4\varepsilon}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (5.118)$$

com

$$\mathcal{B}_5 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu^2} \frac{1}{c^2(\frac{1}{3} - \tau_s)}}. \quad (5.119)$$

Finalmente, se  $\tau_s > \frac{1}{3}$  obtém-se

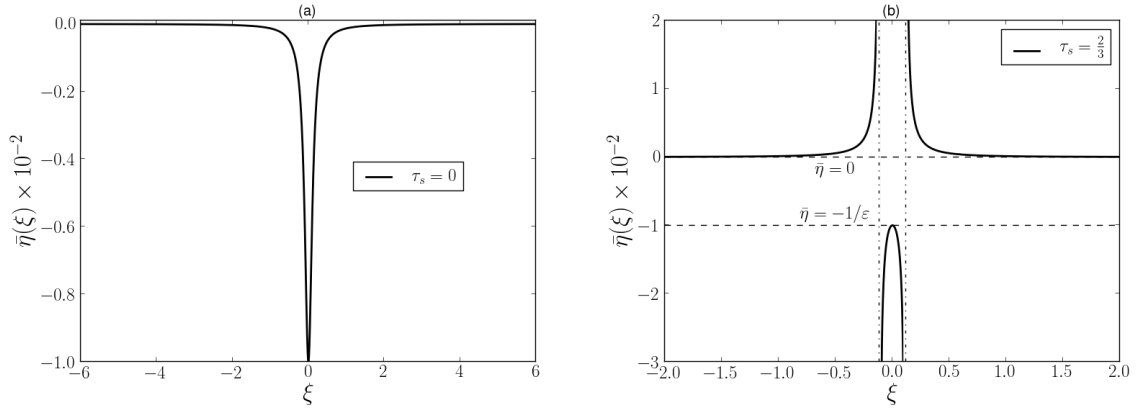
$$\bar{\eta}(\xi) = \frac{4}{(\pm \mathcal{B}_6 \xi + K)^2 - 4\varepsilon}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\sqrt{4\varepsilon} \mp K}{\mathcal{B}_6}, \frac{-\sqrt{4\varepsilon} \mp K}{\mathcal{B}_6} \right\}, \quad (5.120)$$

onde  $\mathcal{B}_6$  é definido da forma que segue:

$$\mathcal{B}_6 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu^2} \frac{1}{c^2(-\frac{1}{3} + \tau_s)}}. \quad (5.121)$$

Todas estas soluções de (5.117) satisfazem (5.75). Em (5.118) e (5.120),  $K$  é uma constante arbitrária de integração. Salienta-se que  $\bar{\eta} = 0$  é uma solução de (5.117) que satisfaz (5.75) enquanto que  $\bar{\eta} = -1/\varepsilon$  é uma solução da mesma equação, mas que não satisfaz as condições de fronteira (5.75).

Na figura 5.6, mostramos as soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.118)–(5.121) como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura 5.6 (a), apresentamos a solução negativa do tipo solitão dada por (5.118) e (5.119) com  $\tau_s = 0$ . Na figura 5.6 (b), mostramos a solução dada por (5.120) e (5.121) com  $\tau_s = 2/3$ . Em todos estes casos, os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$  e  $K = 0$ .



**Figura 5.6:** Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.118)–(5.121) como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a), apresentamos a solução negativa do tipo solitão dada por (5.118) e (5.119) com  $\tau_s = 0$ . Na figura (b), mostramos a solução dada por (5.120) e (5.121) com  $\tau_s = 2/3$ . Também representamos as soluções  $\bar{\eta} = 0$  e  $\bar{\eta} = -1/\varepsilon$  juntamente com as assíntotas verticais. Em todos estes casos, os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$  e  $K = 0$ . Note-se que  $\bar{\eta} = 0$  é também uma assíntota horizontal para os gráficos das figuras (a) e (b).

### 5.5.1.2 Segundo caso $\theta > 1$ ( $c^2 > a_c^2$ e $a_c \neq 0$ )

Neste caso, conseguimos mostrar que a equação (5.117) admite as soluções positivas e negativas que satisfazem (5.75), as quais são dadas por

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \frac{\text{sech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K)}{(\eta_2 - \eta_1) - \eta_2 \text{sech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (5.122)$$

e

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \frac{\operatorname{sech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K)}{(\eta_1 - \eta_2) - \eta_1 \operatorname{sech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (5.123)$$

respectivamente. Aqui,  $K$  é uma constante arbitrária de integração e  $\mathcal{A}$  bem como  $\mathcal{B}_3$  são dadas pelas equações (5.83) e (5.84), respectivamente. Para além disto, os coeficientes  $\eta_i$  ( $i = 1, 2$ ) são definidos por

$$\eta_i = -\frac{1}{2} \left( 1 - (-1)^i \sqrt{4\theta - 3} \right), \quad (i = 1, 2). \quad (5.124)$$

Note-se que para  $\theta > 1$  duas desigualdades são satisfeitas, as quais são dadas por

$$\left| \left( \frac{\eta_2}{\eta_2 - \eta_1} \right)^n \operatorname{sech}^{2n}(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K) \right| \leq \left| \left( \frac{\eta_2}{\eta_2 - \eta_1} \right)^n \right| = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4\theta - 3}} \right)^n < 1, \quad (5.125)$$

$$\left| \left( \frac{\eta_1}{\eta_1 - \eta_2} \right)^n \operatorname{sech}^{2n}(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K) \right| \leq \left| \left( \frac{\eta_1}{\eta_1 - \eta_2} \right)^n \right| = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{4\theta - 3}} \right)^n < 1. \quad (5.126)$$

Desta forma, podemos garantir que estas novas soluções do tipo onda de translação descritas por (5.122) e (5.123) são o limite uniforme das séries geométricas seguintes:

$$\mathcal{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_2^n}{(\eta_2 - \eta_1)^{n+1}} \operatorname{sech}^{2n+2}(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K) \quad (5.127)$$

e

$$\mathcal{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_1^n}{(\eta_1 - \eta_2)^{n+1}} \operatorname{sech}^{2n+2}(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K), \quad (5.128)$$

respectivamente. Estas conclusões resultam da aplicação do critério da convergência uniforme de Weierstrass. Note-se que a constante  $\mathcal{B}_3$  é definida por (5.84), assim como o domínio de validade para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\tau_s$  é dado pelas condições (p1-a), (p2-a) e (p3-a) como estabelecido anteriormente (ver subsecção 5.4.1.2). Note-se que soluções triviais ou nulas são obtidas quando  $\mathcal{B}_3 = \mathcal{A} = 0$  ( $\theta = 1$ ),  $\mu > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  bem como  $\tau_s \geq 0$  e  $\tau_s \neq \frac{1}{3}$  ( $a_c \neq 0$ ). Também realçamos que  $\bar{\eta} = \frac{\eta_i}{\varepsilon}$  ( $i = 1, 2$ ) são soluções constantes de (5.117) que não satisfazem (5.75).

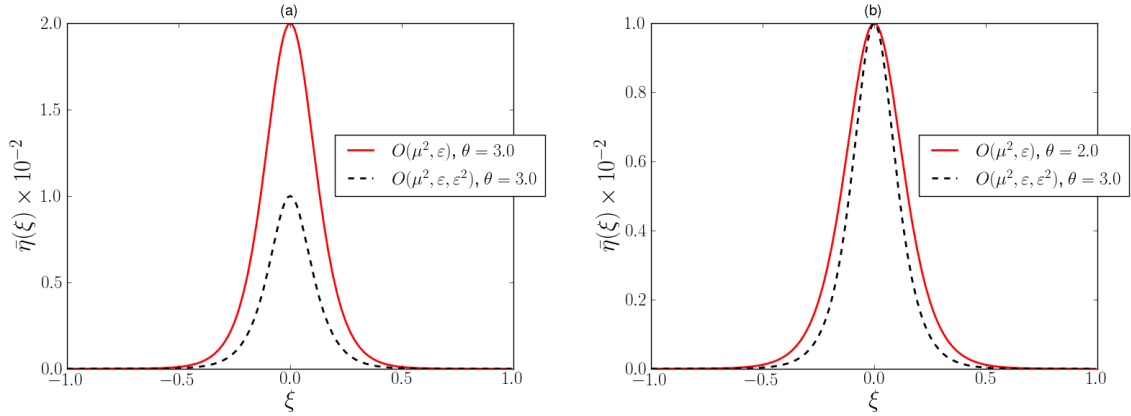
Na figura 5.7, comparamos as solução clássicas do tipo solitão dadas por (5.81) com as novas soluções do tipo onda de translação descritas por (5.122). Note-se que a solução  $\bar{\eta} = 0$  de (5.76) e (5.117) satisfaz as condições de fronteira (5.75). Por outro lado,  $\bar{\eta} = 0$  é uma assíntota horizontal para os gráficos descritos por (5.81), (5.122) e (5.123). Saliente-se que para se terem as mesmas amplitudes nas soluções correspondentes então devem ter-se valores distintos para a velocidade de propagação da onda  $c$ . Por outro lado, se impusermos a mesma velocidade de propagação da onda então as amplitudes correspondentes são diferentes. Estas conclusões resultam assumindo-se que  $a_c$  é fixo.

Para além disto, (5.117) admite soluções periódicas que não satisfazem (5.75), as quais são dadas por

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \frac{\sec^2(\pm \mathcal{B}_4 \xi + K)}{(\eta_2 - \eta_1) - \eta_2 \sec^2(\pm \mathcal{B}_4 \xi + K)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\mathcal{B}_4} (\tilde{\alpha}_1 - K + k_0 \pi), \pm \frac{1}{\mathcal{B}_4} (-\tilde{\alpha}_1 - K + k_0 \pi) \right\}, \quad (k_0 \in \mathbb{Z}) \quad (5.129)$$

e

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \frac{\sec^2(\pm \mathcal{B}_4 \xi + K)}{(\eta_1 - \eta_2) - \eta_1 \sec^2(\pm \mathcal{B}_4 \xi + K)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\mathcal{B}_4} (\tilde{\alpha}_2 - K + k_0 \pi), \pm \frac{1}{\mathcal{B}_4} (-\tilde{\alpha}_2 - K + k_0 \pi) \right\}, \quad (k_0 \in \mathbb{Z}), \quad (5.130)$$



**Figura 5.7:** Soluções do tipo onda de translação dadas por (5.81) (linha vermelha sólida para equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$ ) e (5.122) (linha tracejada preta para a equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ ) como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a),  $\theta = 3$  para ambas as soluções enquanto que na figura (b)  $\theta = 2$  e  $\theta = 3$  para as equações de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ , respectivamente. Em ambos os gráficos, os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $\alpha = \beta_1 = \tau_s = 0$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K=0$ .

onde  $\tilde{\alpha}_i = \arccos\left(\pm\sqrt{\eta_j/(\eta_j - \eta_i)}\right)$  ( $i, j \in \{1, 2\}$  e  $i \neq j$ ),  $K$  é uma constante arbitrária de integração e  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}_4$  assim como  $\eta_i$  ( $i = 1, 2$ ) são dadas pelas equações (5.83), (5.97) e (5.124), respectivamente. Neste contexto, o domínio de validade para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\tau_s$  é dado pelas condições (n1-a), (n2-a) e (n3-a) como estabelecido anteriormente (ver subsecção 5.4.1.2).

Na figura 5.8, mostramos as soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . As novas soluções positivas e negativas do tipo solitão (ver (5.83), (5.84) e (5.122)–(5.124)) para três valores distintos de  $\tau_s$  são mostradas nas figuras 5.8 (a) e (b), respectivamente. Mais concretamente, consideramos  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_s = 0.15$  e  $\tau_s = 0.3$ . Na figura 5.8 (a),  $\alpha = \beta_1 = 0$  enquanto que na figura 5.8 (b)  $\alpha = 1 - (\sqrt{5}/5)$  e  $\beta_1 = -(1/2)(1 + \sqrt{5}/5)$ . Nas figuras 5.8 (c) e (d), mostramos as soluções periódicas  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.83), (5.97), (5.124), (5.129) assim como (5.130) para  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $\tau_s = 2/3$ . Em todos estes casos, os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$ ,  $c^2 = 1.01$  e  $K = 0$ . Note-se que a solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  de (5.117) satisfaz (5.75). Por outro lado,  $\bar{\eta} = 0$  é uma assíntota horizontal para os gráficos das soluções dadas por (5.122) e (5.123). Note-se que a solução  $\bar{\eta} = 0$  assim como a assíntota horizontal referida atrás não são representadas. Por outro lado, as soluções  $\bar{\eta} = \eta_i/\varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ) de (5.117) que não satisfazem (5.75) são ilustradas.

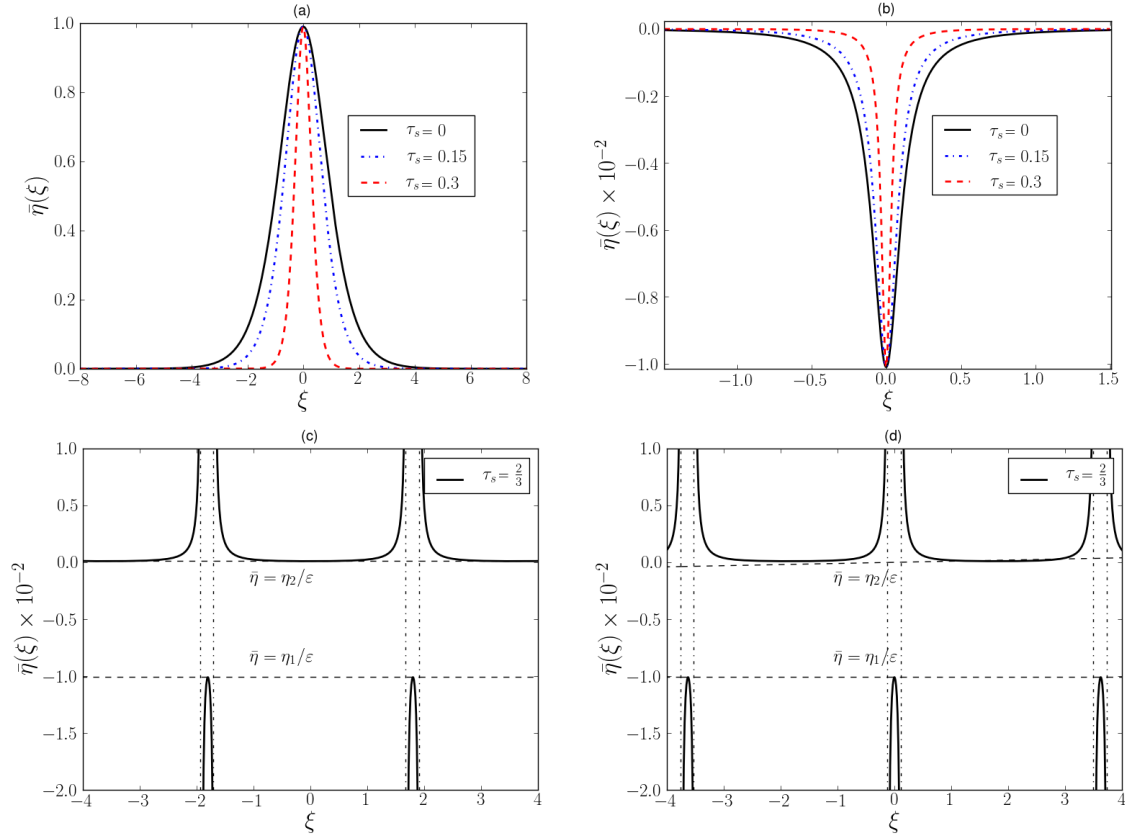
### 5.5.1.3 Terceiro caso $\frac{3}{4} < \theta < 1$ ( $\frac{3}{4}a_c^2 < c^2 < a_c^2$ e $a_c \neq 0$ )

Neste caso, a equação (5.117) admite soluções exactas que satisfazem as condições de fronteira (5.75). Estas soluções exactas são dadas por

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \frac{\text{sech}^2(\pm\mathcal{B}_3\xi + K)}{(\eta_2 - \eta_1) - \eta_2 \text{sech}^2(\pm\mathcal{B}_3\xi + K)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (5.131)$$

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \frac{\text{sech}^2(\pm\mathcal{B}_3\xi + K)}{(\eta_1 - \eta_2) - \eta_1 \text{sech}^2(\pm\mathcal{B}_3\xi + K)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{(\tilde{\alpha}_0 - K)}{\mathcal{B}_3}, \mp \frac{(\tilde{\alpha}_0 + K)}{\mathcal{B}_3} \right\}, \quad (5.132)$$

onde  $\tilde{\alpha}_0 = \text{arccosh}\left(\sqrt{\eta_1/(\eta_1 - \eta_2)}\right)$ ,  $K$  é uma constante arbitrária de integração e  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}_3$  assim como  $\eta_i$  ( $i = 1, 2$ ) são definidas por (5.83), (5.84) e (5.124), respectivamente.



**Figura 5.8:** Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Nas figuras (a) e (b), podemos ver as novas soluções positivas e negativas do tipo solitão, respectivamente. Estas soluções são descritas por (5.83), (5.84) e (5.122)–(5.124) para  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_s = 0.15$  e  $\tau_s = 0.3$ . Na figura (a),  $\alpha = \beta_1 = 0$  enquanto que na figura (b)  $\alpha = 1 - (\sqrt{5}/5)$  e  $\beta_1 = -(1/2)(1 + \sqrt{5}/5)$ . Nas figuras (c) e (d), mostramos as soluções periódicas  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.83), (5.97), (5.124), (5.129) bem como (5.130) para  $\tau_s = 2/3$  e  $\alpha = \beta_1 = 0$ . Também representamos as assíntotas verticais juntamente com as soluções  $\bar{\eta} = \eta_i/\varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ). Em todos estes casos, os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$ ,  $c^2 = 1.01$  e  $K = 0$ .

Neste caso, a nova solução do tipo solitão dada por (5.131) só é o limite uniforme da série geométrica

$$\mathcal{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_2^n}{(\eta_2 - \eta_1)^{n+1}} \operatorname{sech}^{2n+2}(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K) \quad (5.133)$$

se  $\frac{7}{9} < \theta < 1$ . Por outro lado, a nova onda de translação descrita pela solução dada por (5.132) é também a soma da série geométrica seguinte:

$$\mathcal{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_1^n}{(\eta_1 - \eta_2)^{n+1}} \operatorname{sech}^{2n+2}(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K). \quad (5.134)$$

No entanto, esta série apenas converge pontualmente para valores de  $\xi$  satisfazendo as desigualdades seguintes:

$$\xi < \frac{-\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\eta_1/(\eta_1 - \eta_2)}\right) \mp K}{\mathcal{B}_3} \quad \text{ou} \quad \xi > \frac{\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\eta_1/(\eta_1 - \eta_2)}\right) \mp K}{\mathcal{B}_3}. \quad (5.135)$$

Note-se que o domínio de validade para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\tau_s$  é dado pelas condições (n1-b), (n2-c) e (n3-c) (ver subsecção 5.4.1.2).

Para além disto, (5.117) admite soluções periódicas que não satisfazem (5.75), as quais são dadas por

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \frac{\sec^2(\pm \mathcal{B}_4 \xi + K)}{(\eta_2 - \eta_1) - \eta_2 \sec^2(\pm \mathcal{B}_4 \xi + K)},$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\mathcal{B}_4} (\tilde{\alpha}_1 - K + k_0 \pi), \pm \frac{1}{\mathcal{B}_4} (-\tilde{\alpha}_1 - K + k_0 \pi) \right\}, (k_0 \in \mathbb{Z}) \quad (5.136)$$

e

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \frac{\sec^2(\pm \mathcal{B}_4 \xi + K)}{(\eta_1 - \eta_2) - \eta_1 \sec^2(\pm \mathcal{B}_4 \xi + K)},$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\mathcal{B}_4} (\tilde{\alpha}_2 - K + k_0 \pi), \pm \frac{1}{\mathcal{B}_4} (-\tilde{\alpha}_2 - K + k_0 \pi) \right\}, (k_0 \in \mathbb{Z}), \quad (5.137)$$

onde  $\tilde{\alpha}_i = \arccos\left(\pm \sqrt{\eta_j / (\eta_j - \eta_i)}\right)$  ( $i, j \in \{1, 2\}$  e  $i \neq j$ ),  $K$  é uma constante arbitrária de integração e  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}_4$  assim como  $\eta_i$  ( $i = 1, 2$ ) são dadas pelas equações (5.83), (5.97) e (5.124), respectivamente. Neste caso, o domínio de validade para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\tau_s$  é dado pelas condições (p1-b), (p2-c) e (p3-c), de acordo com o que foi estabelecido anteriormente (ver subsecção 5.4.1.2). Note-se que  $\bar{\eta} = \eta_i / \varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ) também são soluções de (5.117) mas que não satisfazem (5.75).

Na figura 5.9, mostramos estas soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . As novas soluções negativas do tipo solitão dadas por (5.83), (5.84), (5.124) e (5.131) assim como a solução descrita por (5.83), (5.84), (5.124) e (5.132) são mostradas nas figuras 5.9 (a) e 5.9 (b), respectivamente. Em ambos os casos, consideramos  $\tau_s = 2/3$ . Nas figuras 5.9 (c) e 5.9 (d), podemos observar as soluções periódicas dadas por (5.83), (5.97), (5.124), (5.136) e (5.137) para  $\tau_s = 0$ . Os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$ ,  $c^2 = 0.99$  e  $K = 0$ . Note-se que a solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  é uma solução de (5.117) que satisfaz (5.75). Por outro lado, os gráficos das soluções dadas por (5.131) e (5.132) têm também uma assíntota horizontal definida por  $\bar{\eta} = 0$ . As soluções  $\bar{\eta} = \eta_i / \varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ) que não satisfazem (5.75) são também ilustradas juntamente com as assíntotas verticais.

#### 5.5.1.4 Quarto caso $c^2 = \frac{3}{4} a_c^2$ ( $\theta = \frac{3}{4}$ )

Neste caso, obtemos soluções de (5.117) que não satisfazem (5.75), as quais são dadas por

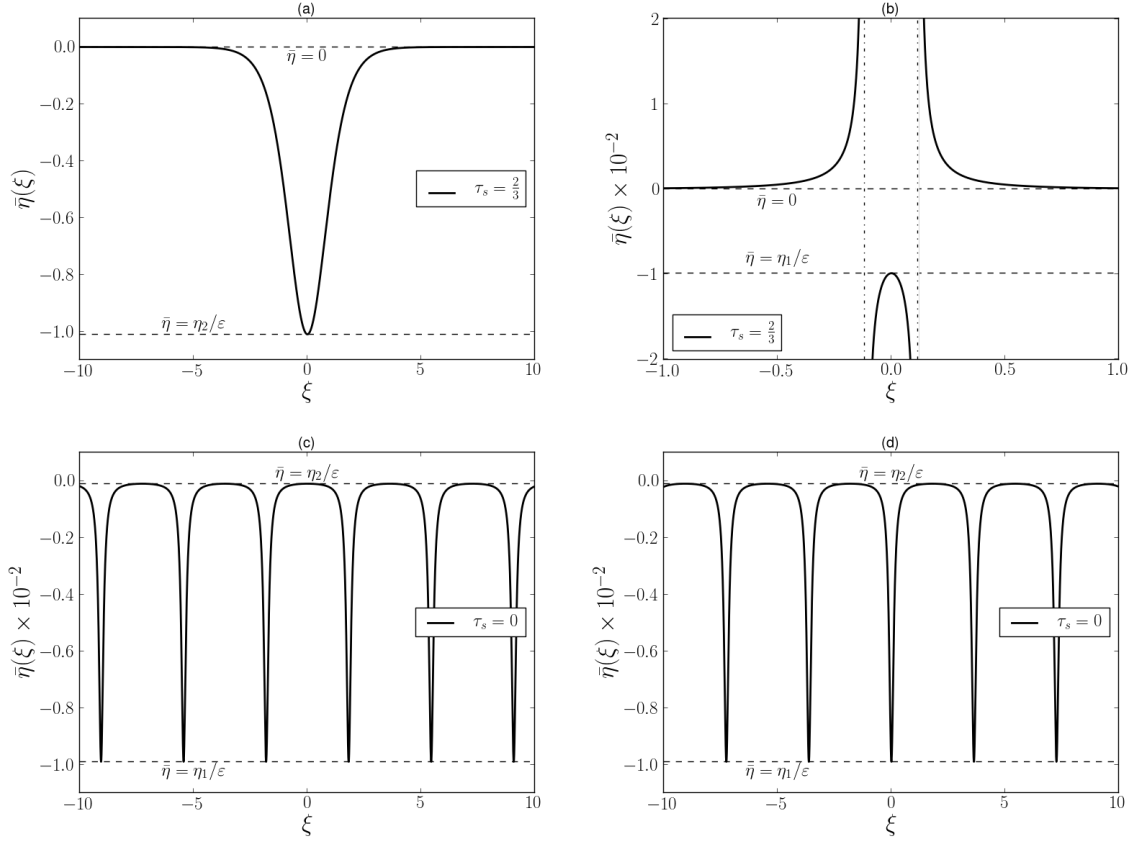
$$\bar{\eta}(\xi) = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{e^{\pm \mathcal{B}_7 \xi + K} - 1}, \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \mp \frac{K}{\mathcal{B}_7} \right\} \quad (5.138)$$

e

$$\bar{\eta}(\xi) = -\frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{e^{\pm \mathcal{B}_7 \xi + K} + 1}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (5.139)$$

com  $K$  uma constante arbitrária de integração e  $\mathcal{B}_7$  definido por

$$\mathcal{B}_7 = \sqrt{\frac{1}{4\mu^2 a_c^2 \left( \tau_s - \frac{1}{3} - \frac{\alpha \beta_1}{4} \right)}}. \quad (5.140)$$



**Figura 5.9:** Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . A nova solução negativa do tipo solitão dada por (5.83), (5.84), (5.124) e (5.131) assim como a solução descrita por (5.83), (5.84), (5.124) e (5.132) são mostradas nas figuras (a) e (b), respectivamente. Em ambos os casos, consideramos  $\tau_s = 2/3$ . Nas figuras (c) e (d), mostramos as soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.83), (5.97), (5.124), (5.136) e (5.137) para  $\tau_s = 0$ . Os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $a_c^2 = 1$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$ ,  $c^2 = 0.99$  e  $K = 0$ . Também mostramos as soluções  $\bar{\eta} = 0$ ,  $\bar{\eta} = \frac{\eta_i}{\varepsilon}$  ( $i = 1, 2$ ) juntamente com as assíntotas verticais.

Resolvendo (5.117) com respeito a  $\bar{\eta}'$  obtemos duas equações diferenciais. Para obter novas soluções que satisfaçam (5.75), estas equações podem ser resolvidas em regiões complementares de  $\mathbb{R}$ . Por exemplo, tomando duas regiões complementares de  $\mathbb{R}$  pode-se ter (ver (5.138))

$$\bar{\eta}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{e^{\mathcal{B}_7 \xi + K_1} - 1}, & \xi \geq \frac{K_2 - K_1}{2\mathcal{B}_7}, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{e^{-\mathcal{B}_7 \xi + K_2} - 1}, & \xi < \frac{K_2 - K_1}{2\mathcal{B}_7}, \end{cases} \quad (5.141)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são duas constantes arbitrárias de integração. Note-se que o gráfico da solução dada por (5.141) tem uma única singularidade no ponto  $\xi = -\frac{K_1}{\mathcal{B}_7}$  se  $K_1 + K_2 = 0$  e, por outro lado, temos uma solução contínua mas não diferenciável em  $\xi = (K_2 - K_1)/(2\mathcal{B}_7)$  se  $K_1 + K_2 > 0$ .

Para além disto, também se pode obter (ver (5.139))

$$\bar{\eta}(\xi) = \begin{cases} \frac{-1}{2\varepsilon} \frac{1}{e^{\mathcal{B}_7\xi+K_1} + 1}, & \xi \geq \frac{K_2 - K_1}{2\mathcal{B}_7}, \\ \frac{-1}{2\varepsilon} \frac{1}{e^{-\mathcal{B}_7\xi+K_2} + 1}, & \xi < \frac{K_2 - K_1}{2\mathcal{B}_7}, \end{cases} \quad (5.142)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são duas constantes reais arbitrárias de integração. Neste caso, temos uma solução contínua mas não diferenciável em  $\xi = (K_2 - K_1)/(2\mathcal{B}_7)$ .

Note-se que, em todos estes casos, apenas temos soluções válidas se for satisfeita a desigualdade seguinte (ver (5.140)):

$$4\tau_s - \frac{4}{3} > \alpha\beta_1. \quad (5.143)$$

Note-se que  $\bar{\eta} = -1/(2\varepsilon)$  para  $\theta = 3/4$  é também uma solução de (5.117) mas que não satisfaz as condições de fronteira (5.75).

No que segue, as soluções obtidas a partir de (5.138), (5.139) e (5.140) usando-se os sinais  $+$  e  $-$  são denotadas por  $\bar{\eta}^+$  e  $\bar{\eta}^-$ , respectivamente. Na figura 5.10 (a), mostramos as soluções  $\bar{\eta}^+$  e  $\bar{\eta}^-$  dadas por (5.138) e (5.140) com  $K = 0$ , juntamente com a solução definida por (5.140) e (5.141) com  $K_1 = K_2 = 0.5$  a qual é denotada por  $\bar{\eta}^*$ . Salienta-se que se se escolher as curvas a preto e a vermelho localizadas no primeiro e no segundo quadrantes da figura 5.10 (a) definidas pelos sinais  $+$  e  $-$  de (5.138), respectivamente, uma nova solução pode ser obtida. De modo análogo, podemos definir uma nova solução escolhendo as curvas definidas pelos sinais  $+$  e  $-$  de (5.138) e localizadas no terceiro e no quarto quadrantes, respectivamente, da mesma figura. Na figura 5.10 (b), as soluções  $\bar{\eta}^+$  e  $\bar{\eta}^-$  dadas por (5.139) e (5.140) com  $K = 0$  são ilustradas. A solução  $\bar{\eta}$  definida por (5.142) com  $K_1 = K_2 = 0$  é representada na figura 5.10 (c). Por último, a curva ilustrada na figura 5.10 (d) é obtida a partir de (5.142) com  $K_1 = K_2 = -8$ . Note-se que esta solução não é diferenciável em  $\mathbb{R}$ . Em todos os casos, temos  $a_c^2 = 1$ ,  $\tau_s = 2/3$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 3/4$ . A solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  de (5.75) que satisfaz (5.117) assim como a assíntota horizontal  $\bar{\eta} = 0$  das soluções dadas anteriormente são representadas juntamente com a solução  $\bar{\eta} = -1/(2\varepsilon)$  e com uma assíntota vertical. Note-se que  $\bar{\eta} = -1/(2\varepsilon)$  é uma solução de (5.117) mas que não satisfaz as condições de fronteira (5.75).

### 5.5.1.5 Quinto caso $c^2 < \frac{3}{4}a_c^2$ ( $0 \leq \theta < \frac{3}{4}$ )

Neste último caso, obtemos soluções que satisfazem as condições de fronteira (5.75), as quais são dadas por

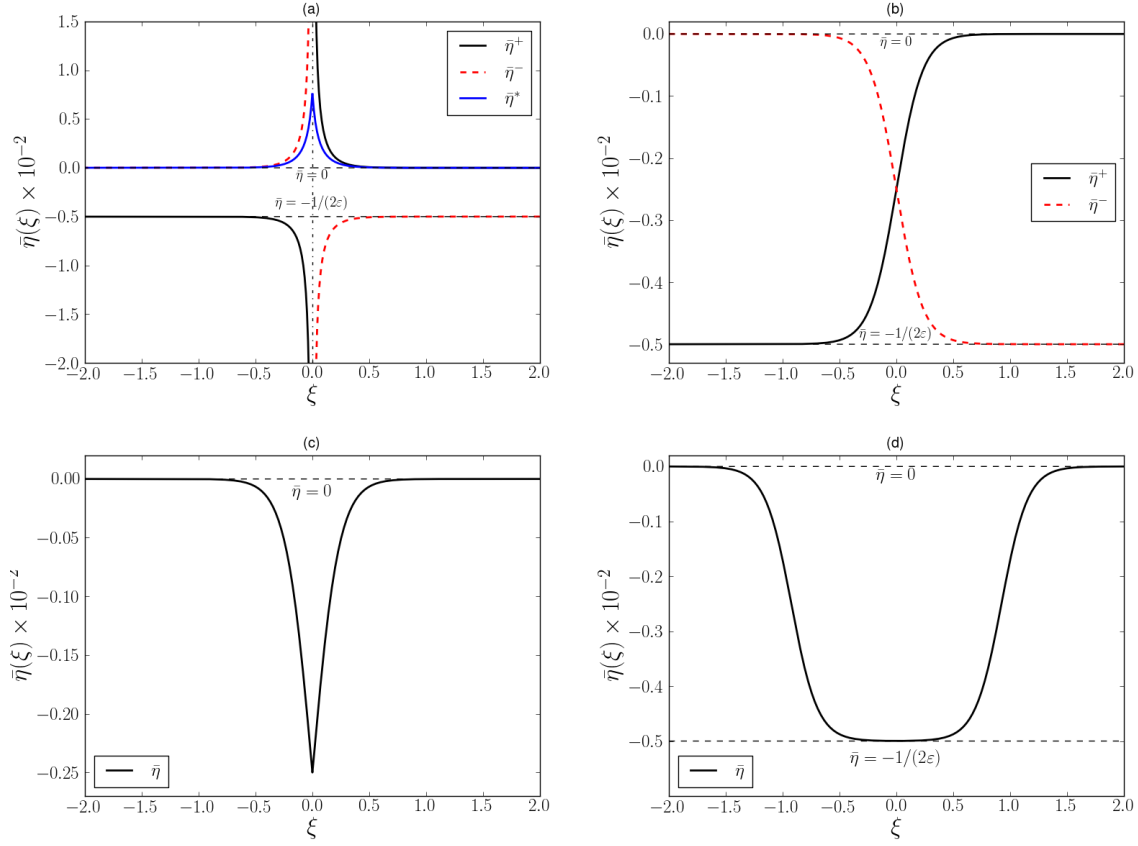
$$\bar{\eta}(\xi) = \frac{-2e^{\pm\mathcal{B}_8\xi+K}}{\frac{\varepsilon^2}{\theta-1} + \left(e^{\pm\mathcal{B}_8\xi+K} - \frac{\varepsilon}{2(\theta-1)}\right)^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\ln\left(\varepsilon \frac{2\sqrt{1-\theta}-1}{2(1-\theta)}\right) - K}{\mathcal{B}_8} \right\} \quad (5.144)$$

e

$$\bar{\eta}(\xi) = \frac{2e^{\pm\mathcal{B}_8\xi+K}}{\frac{\varepsilon^2}{\theta-1} + \left(e^{\pm\mathcal{B}_8\xi+K} + \frac{\varepsilon}{2(\theta-1)}\right)^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\ln\left(\varepsilon \frac{2\sqrt{1-\theta}+1}{2(1-\theta)}\right) - K}{\mathcal{B}_8} \right\}, \quad (5.145)$$

onde  $K$  é uma constante arbitrária de integração e  $\mathcal{B}_8$  é definida por

$$\mathcal{B}_8 = \sqrt{\frac{1-\theta}{\mu^2 a_c^2 (\alpha\beta_1(\theta-1) - (\frac{1}{3} - \tau_s))}}. \quad (5.146)$$



**Figura 5.10:** Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a) mostramos as soluções  $\bar{\eta}^+$  e  $\bar{\eta}^-$  dadas por (5.138) e (5.140) com  $K = 0$ , juntamente com a solução definida por (5.140) e (5.141) com  $K_1 = K_2 = 0.5$  denotada por  $\bar{\eta}^*$ . Na figura (b) mostramos as soluções  $\bar{\eta}^+$  e  $\bar{\eta}^-$  dadas por (5.139) e (5.140) com  $K = 0$ . As soluções  $\bar{\eta}$  definidas por (5.142) com  $K_1 = K_2 = 0$  e  $K_1 = K_2 = -8$  são representadas nas figuras (c) e (d), respectivamente. Em todos os casos temos  $a_c^2 = 1$ ,  $\tau_s = 2/3$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 3/4$ . A solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  de (5.75) que satisfaz (5.117) assim como a assíntota horizontal  $\bar{\eta} = 0$  das soluções dadas anteriormente são representadas juntamente com a solução  $\bar{\eta} = -1/(2\varepsilon)$  e com uma assíntota vertical.

Analogamente ao quarto caso, podemos resolver (5.117) com respeito a  $\bar{\eta}'$  de forma a obter duas equações diferenciais. Se estas equações diferenciais forem resolvidas em regiões complementares de  $\mathbb{R}$ , pode-se obter novas soluções satisfazendo (5.75). Por exemplo, tomando duas regiões complementares de  $\mathbb{R}$  podemos ter (ver (5.144))

$$\bar{\eta}(\xi) = \begin{cases} \frac{-2e^{\mathcal{B}_8\xi+K_1}}{\frac{\varepsilon^2}{\theta-1} + \left(e^{\mathcal{B}_8\xi+K_1} - \frac{\varepsilon}{2(\theta-1)}\right)^2}, & \xi \geq \frac{K_2 - K_1}{2\mathcal{B}_8}, \\ \frac{-2e^{-\mathcal{B}_8\xi+K_2}}{\frac{\varepsilon^2}{\theta-1} + \left(e^{-\mathcal{B}_8\xi+K_2} - \frac{\varepsilon}{2(\theta-1)}\right)^2}, & \xi < \frac{K_2 - K_1}{2\mathcal{B}_8}, \end{cases} \quad (5.147)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são duas constantes arbitrárias de integração. Note-se que o gráfico da solução dada por (5.147) tem uma única singularidade no ponto  $\xi = -\frac{1}{\mathcal{B}_8} \left( K_1 - \ln \left( \varepsilon \frac{2\sqrt{1-\theta}-1}{2(1-\theta)} \right) \right)$  se

$K_1 + K_2 = 2 \ln \left( \varepsilon \frac{2\sqrt{1-\theta}-1}{2(1-\theta)} \right)$ . Por outro lado, temos uma solução contínua mas não diferenciável em  $\xi = \frac{K_2 - K_1}{2\mathcal{B}_8}$  se  $K_1 + K_2 > 2 \ln \left( \varepsilon \frac{2\sqrt{1-\theta}-1}{2(1-\theta)} \right)$ .

Do mesmo modo, pode-se também considerar a solução dada por (ver (5.144))

$$\bar{\eta}(\xi) = \begin{cases} \frac{-2e^{-\mathcal{B}_8\xi+K_1}}{\frac{\varepsilon^2}{\theta-1} + \left( e^{-\mathcal{B}_8\xi+K_1} - \frac{\varepsilon}{2(\theta-1)} \right)^2}, & \xi \geq \frac{K_2 - K_1}{2\mathcal{B}_8}, \\ \frac{-2e^{\mathcal{B}_8\xi+K_2}}{\frac{\varepsilon^2}{\theta-1} + \left( e^{\mathcal{B}_8\xi+K_2} - \frac{\varepsilon}{2(\theta-1)} \right)^2}, & \xi < \frac{K_2 - K_1}{2\mathcal{B}_8}, \end{cases} \quad (5.148)$$

em que  $K_1$  e  $K_2$  são duas constantes arbitrárias de integração. O gráfico da solução dada por (5.148) tem uma única singularidade no ponto  $\xi = \frac{1}{\mathcal{B}_8} \left( K_1 - \ln \left( \varepsilon \frac{2\sqrt{1-\theta}-1}{2(1-\theta)} \right) \right)$  se  $K_1 + K_2 = 2 \ln \left( \varepsilon \frac{2\sqrt{1-\theta}-1}{2(1-\theta)} \right)$ . Neste caso temos também uma solução contínua mas não diferenciável em  $\xi = \frac{K_2 - K_1}{2\mathcal{B}_8}$  se  $K_1 + K_2 < 2 \ln \left( \varepsilon \frac{2\sqrt{1-\theta}-1}{2(1-\theta)} \right)$ .

De acordo com o estabelecido anteriormente e para que tenhamos soluções admissíveis, o domínio de validade para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_1$  e  $\tau_s$  é dado pelas condições (n1-b), (n2-d) e (n3-d) (ver subsecção 5.4.1.2).

Na figura 5.11 (a) e 5.11 (b), mostramos as soluções  $\bar{\eta}^+$  e  $\bar{\eta}^-$  definidas por (5.144) e (5.146) assim como (5.145) e (5.146), respectivamente. Em ambos os casos consideramos  $K = 0$ . Na figura 5.11 (c), mostramos as soluções definidas por (5.147) e (5.148), as quais são denotadas por  $\bar{\eta}^*$  e  $\bar{\eta}^{**}$ , respectivamente, com  $K_1 = K_2 = \ln \left( \varepsilon \frac{2\sqrt{1-\theta}-1}{2(1-\theta)} \right)$ , juntamente com uma assíntota vertical. Na figura 5.11 (d), as soluções definidas por (5.147) e (5.148), as quais são denotadas por  $\bar{\eta}^*$  e  $\bar{\eta}^{**}$ , respectivamente, são representadas com  $K_1 = K_2 = -4.8$  e  $K_1 = K_2 = -5.7$ . Em todos os casos, os valores dos outros parâmetros são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $\tau_s = 2/3$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 0.1$ . Note-se que a solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$  de (5.117) que satisfaz (5.75) assim como a assíntota horizontal  $\bar{\eta} = 0$  das soluções mencionadas anteriormente não são ilustradas.

Finalizamos esta secção referindo que utilizando a técnica de substituição recursiva pode-se obter uma expressão aproximada para  $\eta$  em função de  $\bar{\eta}$  através de (5.113). De facto, obtém-se  $\eta \sim \bar{\eta} + \varepsilon\bar{\eta}^2 + \varepsilon^2\bar{\eta}^3$ , a qual é válida até à ordem  $O(\varepsilon^2)$ , inclusivamente.

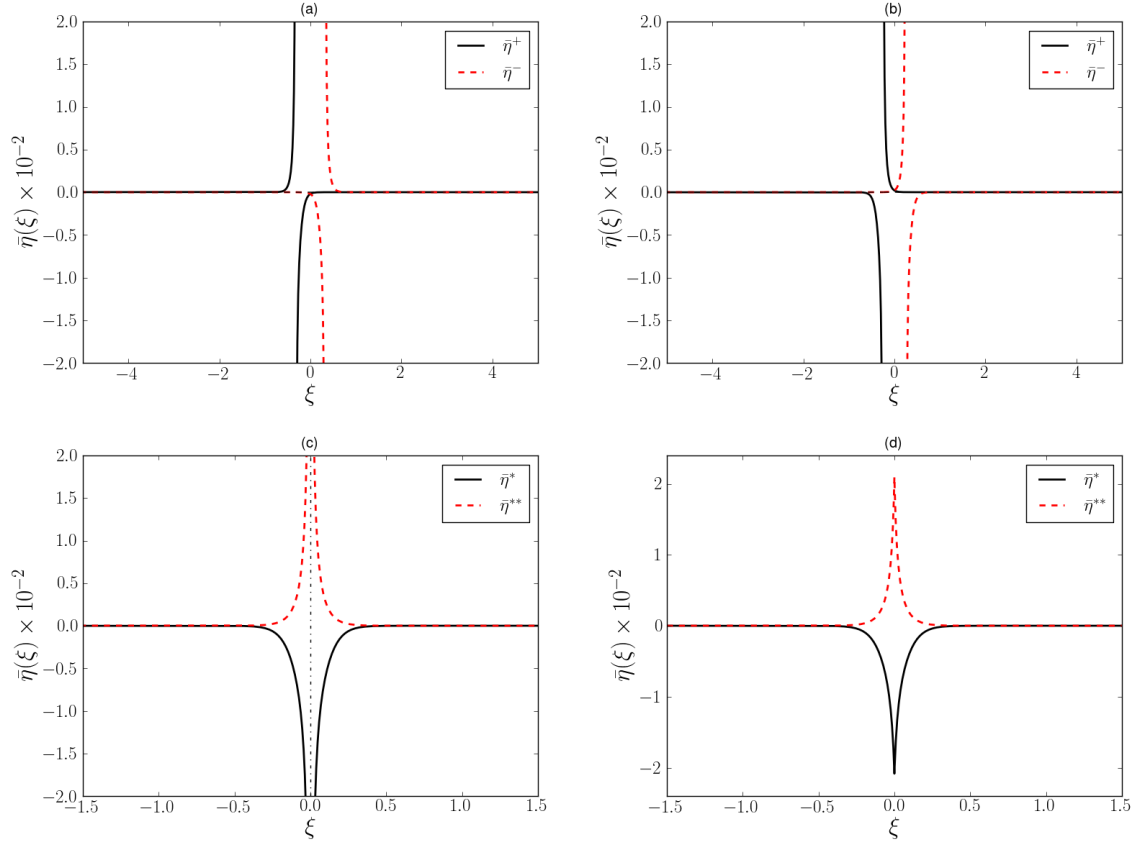
## 5.6 Soluções das equações não lineares do tipo Boussinesq de ordens $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ e $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$ da forma $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^p(\mathcal{B}_3\xi + K)$ bem como $\bar{\eta}(\xi) = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2 \cosh^2(\mathcal{B}_3\xi + K) + 1}$

Nas secções 5.4 e 5.5, soluções do tipo solitão para as equações não lineares de Boussinesq de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$  foram deduzidas. Mais concretamente, mostrámos que a equação de Boussinesq de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$  admite uma solução do tipo solitão da forma seguinte (ver (5.81), (5.83) e (5.84)):

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \operatorname{sech}^2(\pm\mathcal{B}_3\xi + K). \quad (5.149)$$

Relativamente à equação de Boussinesq de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ , provou-se que esta admite uma solução do tipo solitão da forma seguinte (ver (5.83), (5.84), (5.122), (5.123) e (5.124)):

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \frac{\operatorname{sech}^2(\pm\mathcal{B}_3\xi + K)}{\eta_i - \eta_j - \eta_i \operatorname{sech}^2(\pm\mathcal{B}_3\xi + K)} \quad (i, j = 1, 2, i \neq j). \quad (5.150)$$



**Figura 5.11:** Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Nas figuras (a) e (b) mostramos as soluções  $\bar{\eta}^+$  e  $\bar{\eta}^-$  dadas por (5.144) e (5.146) assim como (5.145) e (5.146), respectivamente. Em ambos os casos consideramos  $K = 0$ . Na figura (c), mostramos as soluções definidas por (5.147) e (5.148), as quais são denotadas por  $\bar{\eta}^*$  e  $\bar{\eta}^{**}$ , respectivamente, com  $K_1 = K_2 = \ln\left(\frac{\varepsilon^2\sqrt{1-\theta}-1}{2(1-\theta)}\right)$ , juntamente com uma assíntota vertical. Na figura (d), as soluções definidas por (5.147) e (5.148), as quais são denotadas por  $\bar{\eta}^*$  e  $\bar{\eta}^{**}$ , respectivamente, são representadas com  $K_1 = K_2 = -4.8$  e  $K_1 = K_2 = -5.7$ . Em todos os casos, os valores dos outros parâmetros são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $\tau_s = 2/3$ ,  $\alpha = \beta_1 = 0$  e  $c^2 = 0.1$ .

Nas subsecções seguintes e com base nas equações (5.149) e (5.150), mostra-se se as equações de Boussinesq de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2, \mu^4)$  admitem ou não soluções do tipo solitão das formas genéricas seguintes:

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^p(\mathcal{B}\xi + K) \quad (p \in \mathbb{N}, \mathcal{A}_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathcal{B} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (5.151)$$

e

$$\bar{\eta}(\xi) = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2 \cosh^2(\mathcal{B}\xi + K) + 1} \quad (\mathcal{A}_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathcal{A}_2 \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0], \mathcal{B} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}). \quad (5.152)$$

Para além disto, note-se que apenas são investigadas as soluções das formas dadas por (5.151) e (5.152) nos casos em que estas funções são de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  e satisfazem as condições de fronteira definidas por (5.75). No entanto, o método que se usa nas subsecções seguintes pode ser utilizado também para deduzir soluções que não satisfaçam as premissas anteriores. Por exemplo, podem também investigar-se soluções da forma dada por (5.151) considerando-se que  $p$  é um número inteiro negativo. Podem ainda considerar-se soluções da forma dada

por (5.152) com  $\mathcal{A}_2 \in [-1, 0]$ . Estes valores de  $p$  bem como de  $\mathcal{A}_2$  estão associados a soluções constantes ou a soluções não limitadas em  $\mathbb{R}$ . Esta análise está planeada para um trabalho futuro. Por outro lado, o estudo da existência ou inexistência de soluções da forma (5.151) e (5.152) para as equações diferenciais não lineares de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^2\varepsilon)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2, \mu^2\varepsilon)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \mu^2\varepsilon)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \mu^2\varepsilon)$  encontra-se em fase final de preparação e será submetido para publicação.

### 5.6.1 Equação diferencial ordinária não linear de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$

A equação integro-diferencial não linear e completa (5.52) até à ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$  pode ser transformada numa equação diferencial ordinária não linear usando-se a transformação de variáveis de onda de translação  $\xi = a_c X - cT$  ( $a_c \neq 0$ ) e assumindo-se que  $\eta(X, T) = \eta(\xi)$ . Note-se que quando  $a_c = 0$  um regime de onda apenas dependente do tempo é obtido, o qual não tem interesse físico no contexto deste trabalho. Deste modo, a equação resultante para a elevação da superfície da onda pode ser escrita da forma seguinte:

$$\begin{aligned} (c^2 - a_c^2) \eta'' + \mu^2 a_c^2 (C_0 c^2 - C_1 a_c^2) \eta^{(IV)} + \mu^4 a_c^4 (C_2 c^2 + C_3 a_c^2) \eta^{(VI)} - \\ - \varepsilon \left( (2c^2 + a_c^2) (\eta')^2 + 3a_c^2 \eta'' \eta \right) - \varepsilon^2 \left( 2(a_c^2 - c^2) (\eta')^2 \eta + 3a_c^2 \eta^2 \eta'' \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.153)$$

Por outro lado, a última equação pode ainda ser rescrita usando-se a transformação  $\bar{\eta} = \eta - \varepsilon \eta^2 + \varepsilon^2 \eta^3$  (ver (5.113)). Desta forma, (5.153) é rescrita em termos de  $\bar{\eta}$  da forma que segue:

$$\begin{aligned} (c^2 - a_c^2) \bar{\eta}'' + \mu^2 a_c^2 (C_0 c^2 - C_1 a_c^2) \bar{\eta}^{(IV)} + \mu^4 a_c^4 (C_2 c^2 + C_3 a_c^2) \bar{\eta}^{(VI)} - \\ - \varepsilon a_c^2 \frac{3}{2} (\bar{\eta}^2)'' - 2\varepsilon^2 a_c^2 (\bar{\eta}^3)'' = 0. \end{aligned} \quad (5.154)$$

### 5.6.2 Método para a dedução das soluções do tipo solitão das formas (5.151) e (5.152)

O método que utilizamos para a dedução dos coeficientes livres dados nas expressões (5.151) ( $p \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A}_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\mathcal{B} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) e (5.152) ( $\mathcal{A}_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\mathcal{A}_2 \in \mathbb{R}[-1, 0]$  e  $\mathcal{B} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) é baseado no facto de ser possível expressar os termos das equações diferenciais propostas em funções polinomiais em  $\bar{\eta}(\xi)$ . Salienta-se que o método utilizado permite, nestes casos, provar a existência ou a não existência de soluções dos tipos (5.151) e (5.152). Isto conduz-nos à resolução de sistemas de equações algébricas e não lineares.

No que segue, apresentam-se algumas relações entre as funções  $\bar{\eta}(\xi)$  dadas por (5.151) e (5.152) e as suas derivadas.

#### 1) Primeiro tipo de soluções (ver (5.151))

As soluções da forma seguinte:

$$\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \bar{\eta}_1^p(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^p(\mathcal{B}\xi + K), \quad (5.155)$$

com  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A}_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\mathcal{B} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  verificam as relações dadas por

$$\bar{\eta}'(\xi) = -\mathcal{A}_0 \bar{\eta}_1^p(\xi) p \tanh(\mathcal{B}\xi + K) \mathcal{B}, \quad (5.156a)$$

$$\bar{\eta}''(\xi) = \mathcal{B}^2 p^2 \mathcal{A}_0 \bar{\eta}_1^p(\xi) - \mathcal{B}^2 \mathcal{A}_0 p(p+1) \bar{\eta}_1^{p+2}(\xi), \quad (5.156b)$$

$$\bar{\eta}'''(\xi) = -\mathcal{B}^3 p^3 \mathcal{A}_0 \bar{\eta}_1^p(\xi) \tanh(\mathcal{B}\xi + K) + \mathcal{B}^3 \mathcal{A}_0 p(p+1) \bar{\eta}_1^{p+2}(\xi) (p+2) \tanh(\mathcal{B}\xi + K), \quad (5.156c)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^{(IV)}(\xi) &= \mathcal{B}^4 \mathcal{A}_0 p(p+1)(p+2)(p+3) \bar{\eta}_1^{p+4}(\xi) - \\ &\quad - \mathcal{B}^4 \mathcal{A}_0 \left( p(p+1)(p+2)^2 + p^3 + p^4 \right) \bar{\eta}_1^{p+2}(\xi) + \mathcal{B}^4 \mathcal{A}_0 p^4 \bar{\eta}_1^p(\xi), \end{aligned} \quad (5.156d)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^{(V)}(\xi) &= -\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_0 p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4) \bar{\eta}_1^{p+4}(\xi) \tanh(\mathcal{B}\xi + K) + \\ &\quad + \mathcal{B}^5 \mathcal{A}_0 \left( p(p+1)(p+2)^2 + p^3 + p^4 \right) (p+2) \bar{\eta}_1^{p+2}(\xi) \tanh(\mathcal{B}\xi + K) - \\ &\quad - \mathcal{B}^5 \mathcal{A}_0 p^5 \bar{\eta}_1^p(\xi) \tanh(\mathcal{B}\xi + K), \end{aligned} \quad (5.156e)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^{(VI)}(\xi) &= \mathcal{B}^6 \mathcal{A}_0 p^6 \bar{\eta}_1^p(\xi) - \\ &\quad - \mathcal{B}^6 \mathcal{A}_0 \left( (p+2)^2 \left( p(p+1)(p+2)^2 + p^3 + p^4 \right) + p^6 + p^5 \right) \bar{\eta}_1^{p+2}(\xi) + \\ &\quad + \mathcal{B}^6 \mathcal{A}_0 \left( (p(p+4))^2 + p(p+2)^2 + p^3 \right) (p+1)(p+2)(p+3) \bar{\eta}_1^{p+4}(\xi) - \\ &\quad - \mathcal{B}^6 \mathcal{A}_0 p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5) \bar{\eta}_1^{p+6}(\mathcal{B}\xi + K), \end{aligned} \quad (5.156f)$$

$$(\bar{\eta}^2(\xi))'' = 4\mathcal{A}_0^2 \mathcal{B}^2 p^2 \bar{\eta}_1^{2p}(\xi) - 2\mathcal{A}_0^2 \mathcal{B}^2 p(2p+1) \bar{\eta}_1^{2p+2}(\xi), \quad (5.156g)$$

$$(\bar{\eta}^3(\xi))'' = 9\mathcal{A}_0^3 \bar{\eta}_1^{3p}(\xi) p^2 \mathcal{B}^2 - \mathcal{A}_0^3 \bar{\eta}_1^{3p+2}(\xi) (3p+9p^2) \mathcal{B}^2. \quad (5.156h)$$

## 2) Segundo tipo de soluções (ver (5.152))

As soluções da forma seguinte:

$$\bar{\eta}(\xi) = \bar{\eta}_2(\xi) = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2 \cosh^2(\mathcal{B}\xi + K) + 1}, \quad (5.157)$$

com  $\mathcal{A}_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\mathcal{A}_2 \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$  e  $\mathcal{B} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  verificam as relações dadas por

$$\bar{\eta}'(\xi) = -\frac{2}{\mathcal{A}_1} \mathcal{B} \mathcal{A}_2 \bar{\eta}_2^2(\xi) \cosh(\mathcal{B}\xi + K) \sinh(\mathcal{B}\xi + K), \quad (5.158a)$$

$$\bar{\eta}''(\xi) = 4\bar{\eta}_2(\xi) \mathcal{B}^2 - \frac{(12 + 6\mathcal{A}_2) \bar{\eta}_2^2(\xi) \mathcal{B}^2}{\mathcal{A}_1} + \frac{(8 + 8\mathcal{A}_2) \bar{\eta}_2^3(\xi) \mathcal{B}^2}{\mathcal{A}_1^2}, \quad (5.158b)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}'''(\xi) &= -8 \frac{\mathcal{B}^3 \mathcal{A}_2 \bar{\eta}_2^2(\xi) \cosh(\mathcal{B}\xi + K) \sinh(\mathcal{B}\xi + K)}{\mathcal{A}_1} + \\ &\quad + \frac{(48 + 24\mathcal{A}_2) \bar{\eta}_2^3(\xi) \mathcal{B}^3 \mathcal{A}_2 \cosh(\mathcal{B}\xi + K) \sinh(\mathcal{B}\xi + K)}{\mathcal{A}_1^2} - \\ &\quad - \frac{(48 + 48\mathcal{A}_2) \bar{\eta}_2^4(\xi) \mathcal{B}^3 \mathcal{A}_2 \cosh(\mathcal{B}\xi + K) \sinh(\mathcal{B}\xi + K)}{\mathcal{A}_1^3}, \end{aligned} \quad (5.158c)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^{(IV)}(\xi) &= 16\mathcal{B}^4 \bar{\eta}_2(\xi) - \frac{(240 + 120\mathcal{A}_2) \mathcal{B}^4 \bar{\eta}_2^2(\xi)}{\mathcal{A}_1} + \frac{(800 + 800\mathcal{A}_2 + 120\mathcal{A}_2^2) \bar{\eta}_2^3(\xi) \mathcal{B}^4}{\mathcal{A}_1^2} - \\ &\quad - \frac{(1440\mathcal{A}_2 + 960 + 480\mathcal{A}_2^2) \bar{\eta}_2^4(\xi) \mathcal{B}^4}{\mathcal{A}_1^3} + \frac{(768\mathcal{A}_2 + 384 + 384\mathcal{A}_2^2) \bar{\eta}_2^5(\xi) \mathcal{B}^4}{\mathcal{A}_1^4}, \end{aligned} \quad (5.158d)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}^{(V)}(\xi) = & \left( -32 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2 \bar{\eta}_2^2(\xi)}{\mathcal{A}_1} + \left( 960 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1^2} + 480 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2^2}{\mathcal{A}_1^2} \right) \bar{\eta}_2^3(\xi) - \right. \\
& - \left( 4800 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1^3} + 4800 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2^2}{\mathcal{A}_1^3} + 720 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2^3}{\mathcal{A}_1^3} \right) \bar{\eta}_2^4(\xi) + \\
& + \left( 11520 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2^2}{\mathcal{A}_1^4} + 7680 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1^4} + 3840 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2^3}{\mathcal{A}_1^4} \right) \bar{\eta}_2^5(\xi) - \\
& \left. - \left( 7680 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2^2}{\mathcal{A}_1^5} + 3840 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1^5} + 3840 \frac{\mathcal{B}^5 \mathcal{A}_2^3}{\mathcal{A}_1^5} \right) \bar{\eta}_2^6(\xi) \right) \cosh(\mathcal{B}\xi + K) \sinh(\mathcal{B}\xi + K),
\end{aligned} \tag{5.158e}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}^{(VI)}(\xi) = & 64 \bar{\eta}_2(\xi) \mathcal{B}^6 - \left( 4032 \frac{\mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1} + 2016 \frac{\mathcal{A}_2 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1} \right) \bar{\eta}_2^2(\xi) + \\
& + \left( 38528 \frac{\mathcal{A}_2 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^2} + 6720 \frac{\mathcal{A}_2^2 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^2} + 38528 \frac{\mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^2} \right) \bar{\eta}_2^3(\xi) - \\
& - \left( 5040 \frac{\mathcal{A}_2^3 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^3} + 134400 \frac{\mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^3} + 201600 \frac{\mathcal{A}_2 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^3} + 77280 \frac{\mathcal{A}_2^2 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^3} \right) \bar{\eta}_2^4(\xi) + \\
& + \left( 40320 \frac{\mathcal{A}_2^3 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^4} + 215040 \frac{\mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^4} + 430080 \frac{\mathcal{A}_2 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^4} + 255360 \frac{\mathcal{A}_2^2 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^4} \right) \bar{\eta}_2^5(\xi) - \\
& - \left( 80640 \frac{\mathcal{A}_2^3 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^5} + 161280 \frac{\mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^5} + 403200 \frac{\mathcal{A}_2 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^5} + 322560 \frac{\mathcal{A}_2^2 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^5} \right) \bar{\eta}_2^6(\xi) + \\
& + \left( 46080 \frac{\mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^6} + 46080 \frac{\mathcal{A}_2^3 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^6} + 138240 \frac{\mathcal{A}_2 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^6} + 138240 \frac{\mathcal{A}_2^2 \mathcal{B}^6}{\mathcal{A}_1^6} \right) \bar{\eta}_2^7(\xi),
\end{aligned} \tag{5.158f}$$

$$(\bar{\eta}^2(\xi))'' = 16 \bar{\eta}_2^2(\xi) \mathcal{B}^2 - \frac{(40 + 20\mathcal{A}_2) \bar{\eta}_2^3(\xi) \mathcal{B}^2}{\mathcal{A}_1} + \frac{(24 + 24\mathcal{A}_2) \bar{\eta}_2^4(\xi) \mathcal{B}^2}{\mathcal{A}_1^2}, \tag{5.158g}$$

$$(\bar{\eta}^3(\xi))'' = 36 \bar{\eta}_2^3(\xi) \mathcal{B}^2 - \frac{(84 + 42\mathcal{A}_2) \bar{\eta}_2^4(\xi) \mathcal{B}^2}{\mathcal{A}_1} + \frac{(48 + 48\mathcal{A}_2) \bar{\eta}_2^5(\xi) \mathcal{B}^2}{\mathcal{A}_1^2}. \tag{5.158h}$$

A equação (5.154) é rescrita numa forma polinomial em termos de  $\bar{\eta}_1(\xi)$  (ver (5.155)) ou  $\bar{\eta}_2(\xi)$  (ver (5.157)) utilizando-se as equações (5.156) e (5.158), respectivamente. Estas equações polinomiais obtidas a partir de (5.154)–(5.158) são resolvidas recorrendo ao método dos coeficientes indeterminados. Quando esta equação polinomial é considerada, este método leva-nos à resolução de sistemas algébricos em que cada equação é dada por uma combinação não linear dos coeficientes associados aos termos em  $\bar{\eta}_i(\xi)$  com potências iguais ( $i = 1$  ou  $i = 2$  no caso dos tipos de soluções (5.155) ou (5.157), respectivamente).

Note-se ainda que relativamente às soluções do tipo (5.155), os valores possíveis para o parâmetro  $p \in \mathbb{N}$  têm de ser calculados previamente. Este cálculo é feito através de um balanço homogéneo das potências de  $\bar{\eta}_1(\xi)$  relativas aos termos lineares com as potências de  $\bar{\eta}_1(\xi)$  associadas aos termos não lineares.

### 5.6.2.1 Soluções da equação de Boussinesq de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$

Nesta subsecção, considera-se a equação (5.154) até à ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ , inclusivamente. Mais especificamente, considera-se a equação que segue:

$$(c^2 - a_c^2) \bar{\eta}'' + \mu^2 a_c^2 (C_0 c^2 - C_1 a_c^2) \bar{\eta}^{(IV)} + \mu^4 a_c^4 (C_2 c^2 + C_3 a_c^2) \bar{\eta}^{(VI)} - \varepsilon a_c^2 \frac{3}{2} (\bar{\eta}^2)'' = 0. \quad (5.159)$$

Assim como nas secções 5.4 e 5.5, assume-se aqui que  $c^2 = \theta a_c^2$  com  $\theta \in \mathbb{R}_0^+$ . Para além disto, apenas os casos  $\theta \neq 0$  e  $a_c \neq 0$  são considerados. Note-se que se  $\theta = 0$  então tem-se um regime de onda estacionário. Por outro lado, se  $a_c = 0$  tem-se um regime de onda apenas dependente do tempo. Integrando-se duas vezes a última equação com respeito a  $\xi$  e impondo-se as condições de fronteira (5.75), obtém-se a equação diferencial ordinária e não linear seguinte:

$$(\theta - 1) \bar{\eta} + \mu^2 a_c^2 (C_0 \theta - C_1) \bar{\eta}'' + \mu^4 a_c^4 (C_2 \theta + C_3) \bar{\eta}^{(IV)} - \varepsilon \frac{3}{2} (\bar{\eta}^2) = 0. \quad (5.160)$$

Note-se que a equação (5.160) admite a solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$ , a qual satisfaz as condições de fronteira (5.75). Por outro lado, as soluções constantes da forma  $\bar{\eta} = \frac{2(c^2 - a_c^2)}{3a_c^2 \varepsilon}$  com  $a_c \neq 0$  também satisfazem (5.160). No entanto, estas soluções constantes não satisfazem (5.75) se  $c^2 \neq a_c^2$ . Observa-se ainda que se  $C_2 \theta + C_3 = 0$  então a ordem da equação (5.160) é reduzida de  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$  para  $O(\mu^2, \varepsilon)$ . Este último caso está estudado na secção 5.4.

Com base no método do balanço homogéneo descrito anteriormente e com vista ao cálculo de uma solução não trivial da forma dada por (5.155), verifica-se que o único valor possível para o coeficiente  $p \in \mathbb{N}$  é dado por  $p = 4$ .

#### 1) Sistema algébrico para a solução da forma $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^4(\mathcal{B}\xi + K)$

O sistema algébrico não linear resultante da substituição das expressões (5.155) e (5.156) com  $p = 4$  na equação (5.160) é dado por

$$(\theta - 1) + 16\mu^2 a_c^2 (C_0 \theta - C_1) \mathcal{B}^2 + 256\mu^4 a_c^4 (C_2 \theta + C_3) \mathcal{B}^4 = 0, \quad (5.161a)$$

$$\mu^2 a_c^2 (C_0 \theta - C_1) + 52\mu^4 a_c^4 (C_2 \theta + C_3) \mathcal{B}^2 = 0, \quad (5.161b)$$

$$840\mu^4 a_c^4 (C_2 \theta + C_3) \mathcal{B}^4 - \frac{3}{2} \varepsilon \mathcal{A}_0 = 0. \quad (5.161c)$$

O sistema (5.161) admite três conjuntos de soluções não triviais. O primeiro conjunto pode ser descrito da forma seguinte:

$$S_1^\pm = \left\{ (\mathcal{A}_0, \mathcal{B}, \theta) \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}_0 = \frac{35\theta - 1}{36\varepsilon}, \mathcal{B} = \pm \sqrt{\frac{C_1 - C_0 \theta}{52\mu^2 a_c^2 (C_2 \theta + C_3)}}, \right. \\ \left. \theta = \frac{1}{2} \frac{72 C_1 C_0 + 169(C_3 - C_2) + 13 \sqrt{\tilde{C}_1}}{36 C_0^2 - 169 C_2} \right\}. \quad (5.162)$$

Note-se que em (5.162),  $\tilde{C}_1$  é definido por

$$\tilde{C}_1 = 169(C_2 + C_3)^2 + 144(C_1 - C_0)(C_1 C_2 + C_0 C_3). \quad (5.163)$$

Por outro lado, o segundo conjunto de soluções é dado por

$$S_2^\pm = \left\{ (\mathcal{A}_0, \mathcal{B}, \theta) \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}_0 = \frac{35\theta - 1}{36\varepsilon}, \mathcal{B} = \pm \sqrt{\frac{C_1 - C_0\theta}{52\mu^2 a_c^2 (C_2\theta + C_3)}}, \right. \\ \left. \theta = \frac{1}{2} \frac{72C_1C_0 + 169(C_3 - C_2) - 13\sqrt{\tilde{C}_1}}{36C_0^2 - 169C_2} \right\}. \quad (5.164)$$

Note-se que as expressões de  $\theta$  nos conjuntos  $S_1^\pm$  e  $S_2^\pm$  são obtidas através da resolução de uma equação polinomial de segundo grau, a qual é obtida assumindo-se que  $C_2\theta + C_3 \neq 0$  e introduzindo-se a expressão de  $\mathcal{B}^2$  resultante de (5.161b) em (5.161a). Esta equação polinomial é dada por

$$\theta^2(169C_2 - 36C_0^2) + \theta(169C_3 + 72C_0C_1 - 169C_2) - (169C_3 + 36C_1^2) = 0. \quad (5.165)$$

Salienta-se que para que estes dois conjuntos de soluções sejam admissíveis é necessário que sejam satisfeitas as condições seguintes:

$$\tilde{C}_1 \geq 0, \quad 36C_0^2 - 169C_2 \neq 0, \quad \theta > 0, \quad \frac{C_1 - C_0\theta}{C_2\theta + C_3} \geq 0 \quad \text{e} \quad C_2\theta + C_3 \neq 0. \quad (5.166)$$

Neste caso, obtém-se uma nova solução da forma  $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^4(\mathcal{B}\xi + K)$  de (5.154) com os coeficientes dados por (5.162)–(5.163).

Para além disto, no caso em que  $169C_2 - 36C_0^2 = 0$  o sistema (5.161) admite o terceiro conjunto de soluções definido da forma seguinte:

$$S_3^\pm = \left\{ (\mathcal{A}_0, \mathcal{B}, \theta) \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}_0 = \frac{35\theta - 1}{36\varepsilon}, \mathcal{B} = \pm \sqrt{\frac{C_1 - C_0\theta}{52\mu^2 a_c^2 (C_2\theta + C_3)}}, \right. \\ \left. \theta = \frac{36C_1^2 + 169C_3}{169C_3 + 72C_0C_1 - 169C_2} \right\}. \quad (5.167)$$

Para que este terceiro conjunto de soluções seja admissível é necessário que sejam satisfeitas as condições seguintes:

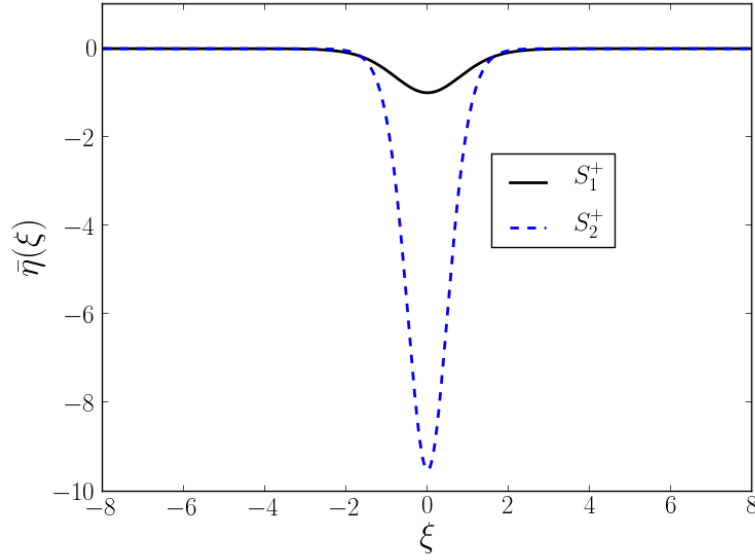
$$169C_2 - 36C_0^2 = 0, \quad 169C_3 + 72C_0C_1 - 169C_2 \neq 0, \quad \theta > 0, \\ \frac{C_1 - C_0\theta}{C_2\theta + C_3} \geq 0 \quad \text{e} \quad C_2\theta + C_3 \neq 0. \quad (5.168)$$

Salienta-se ainda que no caso em que sejam verificadas as condições seguintes:

$$169C_2 - 36C_0^2 = 0, \quad 169C_3 + 72C_0C_1 - 169C_2 = 0, \\ 169C_3 + 36C_1^2 = 0, \quad \theta > 0, \quad \frac{C_1 - C_0\theta}{C_2\theta + C_3} \geq 0 \quad \text{e} \quad C_2\theta + C_3 \neq 0, \quad (5.169)$$

não existem soluções admissíveis para os coeficientes  $C_i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) quando estes são expressos através dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  e  $\tau_s$  (ver (5.35)–(5.36), (5.43), (5.44) e (5.50)).

Na figura 5.12 algumas soluções de (5.160) que satisfazem (5.75) são ilustradas. Estas soluções estão associadas aos conjuntos  $S_1^+$  e  $S_2^+$  com  $c^2 \cong 0.938502$  e  $c^2 \cong 0.412513$ , respectivamente. Mais concretamente e neste caso, os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $\varepsilon = 0.06$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $\alpha \cong 0.552764$ ,  $\beta_1 \cong -0.804007$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 \cong 1.004062$ ,  $\tau_s = 0.4$  e  $K = 0$ . Note-se que nestes dois exemplos, ondas de depressão são obtidas. Por



**Figura 5.12:** Algumas soluções de (5.160) que satisfazem (5.75) associadas aos conjuntos  $S_1^+$  e  $S_2^+$  com  $c^2 \cong 0.938502$  e  $c^2 \cong 0.412513$ , respectivamente. Os valores dos outros parâmetros e de  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $\varepsilon = 0.06$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $\alpha \cong 0.552764$ ,  $\beta_1 \cong -0.804007$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 \cong 1.004062$ ,  $\tau_s = 0.4$  e  $K = 0$ .

outro lado, na figura 5.13 é ilustrada uma solução de (5.160) que satisfaz (5.75), a qual está associada ao conjunto de soluções  $S_3^+$ . Uma solução do tipo (5.81) de (5.76) que satisfaz (5.75) é também representada nesta figura. Esta solução é denotada por  $\bar{\eta}^*$ . Neste caso, os valores dos parâmetros e de  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $c^2 \cong 2.155098$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta_1 \cong -0.804007$ ,  $\beta_2 \cong 0.137701$ ,  $\beta_3 \cong -0.003032$ ,  $\tau_s = 0$  e  $K = 0$ .

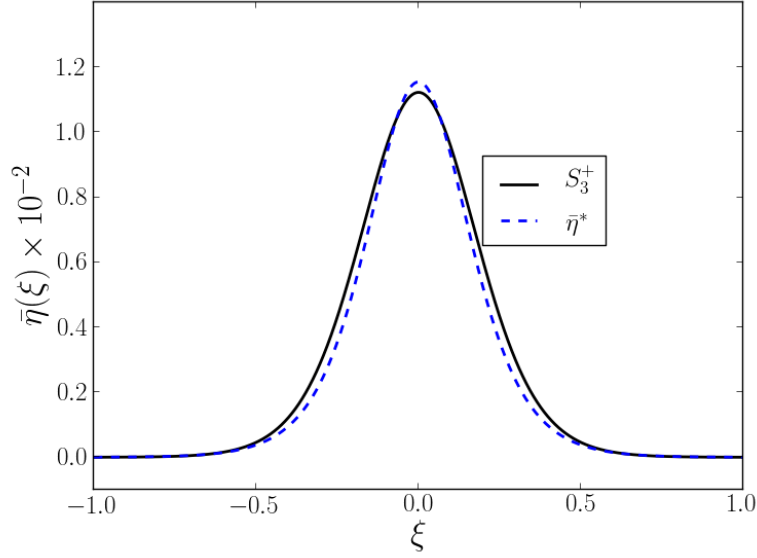
Conclui-se que a razão entre a amplitude desta nova onda da forma  $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^4(\pm \mathcal{B}\xi + K)$  e a amplitude do solitão clássico dado por (5.81) é igual a  $\frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}} = \frac{35}{36}$  para os mesmos valores de  $\theta$  e de  $\varepsilon$ .

## 2) Sistema algébrico para a solução da forma $\bar{\eta}(\xi) = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2 \cosh^2(\mathcal{B}\xi + K) + 1}$

Relativamente às soluções da forma (5.157), um sistema algébrico composto por cinco equações não lineares é obtido. Note-se que a equação associada ao termo  $\bar{\eta}_2^5(\xi)$  é dada por

$$\mu^4 a_c^4 (C_2 \theta + C_3) \frac{(\mathcal{A}_2 + 1)^2}{\mathcal{A}_1^4} \mathcal{B}^4 = 0. \quad (5.170)$$

Desta última equação e assumindo-se que  $C_2 \theta + C_3 \neq 0$  resulta que as soluções admissíveis para este sistema algébrico apenas permitem os valores de  $\mathcal{A}_2 = -1$  ou  $\mathcal{B} = 0$ . Deste modo, conclui-se que não existem soluções não constantes da forma dada por (5.157) e de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  para a equação (5.160).



**Figura 5.13:** Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Nesta figura representa-se uma solução de (5.160) que satisfaz (5.75), a qual está associada ao conjunto  $S_3^+$ . Esta solução é denotada por  $S_3^+$ . Por outro lado, uma solução de (5.76) do tipo (5.81) e que satisfaz (5.75) é também aqui representada. Esta solução é denotada por  $\bar{\eta}^*$ . Os valores dos parâmetros e de  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $c^2 \cong 2.155098$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta_1 \cong -0.804007$ ,  $\beta_2 \cong 0.137701$ ,  $\beta_3 \cong -0.003032$ ,  $\tau_s = 0$  e  $K = 0$ .

### 5.6.2.2 Soluções da equação de Boussinesq de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2, \mu^4)$

Nesta subsecção, o procedimento matemático apresentado anteriormente é seguido. A equação (5.154) de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2, \mu^4)$ , inclusivamente, é escrita da forma seguinte:

$$(c^2 - a_c^2) \bar{\eta}'' + \mu^2 a_c^2 (C_0 c^2 - C_1 a_c^2) \bar{\eta}^{(IV)} + \mu^4 a_c^4 (C_2 c^2 + C_3 a_c^2) \bar{\eta}^{(VI)} - \varepsilon a_c^2 \frac{3}{2} (\bar{\eta}^2)'' - 2\varepsilon^2 a_c^2 (\bar{\eta}^3)'' = 0. \quad (5.171)$$

Integrando-se duas vezes a última equação com respeito a  $\xi$ , impondo-se as condições de fronteira (5.75) e considerando-se que  $c^2 = \theta a_c^2$ , obtém-se a equação diferencial ordinária e não linear seguinte:

$$(\theta - 1) \bar{\eta} + \mu^2 a_c^2 (C_0 \theta - C_1) \bar{\eta}'' + \mu^4 a_c^4 (C_2 \theta + C_3) \bar{\eta}^{(IV)} - \varepsilon \frac{3}{2} (\bar{\eta}^2) - 2\varepsilon^2 (\bar{\eta}^3) = 0. \quad (5.172)$$

Note-se que a equação (5.172) admite uma solução trivial ou nula  $\bar{\eta} = 0$ , a qual satisfaz as condições de fronteira (5.75). Por outro lado, a equação (5.172) também admite as soluções

constantes da forma  $\bar{\eta} = -\frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 8(\theta - 1)}}{4\varepsilon}$ . No entanto, se  $\theta \neq 1$  ou  $\theta = 1$  e escolhendo-se

o sinal + na última equação, nenhuma destas soluções constantes satisfaz (5.75). Observa-se ainda que se  $C_2 \theta + C_3 = 0$  a ordem da equação (5.172) é reduzida de  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2, \mu^4)$  para  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ . Este último caso está estudado na secção 5.5.

Com vista ao cálculo de uma solução não constante da forma dada por (5.155), verifica-se através do método do balanço homogéneo descrito anteriormente que o único valor possível para o coeficiente  $p \in \mathbb{N}$  é dado por  $p = 2$ .

**1) Sistema algébrico para a solução da forma  $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^2(\mathcal{B}\xi + K)$**

O sistema algébrico não linear resultante da substituição das expressões (5.155) e (5.156) com  $p = 2$  na equação (5.172) é dado como segue:

$$(\theta - 1) + 4\mu^2 a_c^2 (C_0\theta - C_1)\mathcal{B}^2 + 16\mu^4 a_c^4 (C_2\theta + C_3)\mathcal{B}^4 = 0, \quad (5.173a)$$

$$\mu^2 a_c^2 (C_0\theta - C_1)\mathcal{B}^2 + 20\mu^4 a_c^4 (C_2\theta + C_3)\mathcal{B}^4 + \frac{1}{4}\varepsilon\mathcal{A}_0 = 0, \quad (5.173b)$$

$$60\mu^4 a_c^4 (C_2\theta + C_3)\mathcal{B}^4 - \varepsilon^2 \mathcal{A}_0^2 = 0. \quad (5.173c)$$

O sistema (5.173) admite três conjuntos de soluções não triviais. Note-se que no caso em que  $C_0\theta - C_1 = 0$  obtém-se o primeiro conjunto de soluções da forma que segue:

$$S_1^\pm = \left\{ (\mathcal{A}_0, \mathcal{B}, \theta) \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}_0 = -\frac{3}{4\varepsilon}, \mathcal{B} = \pm \frac{1}{2\mu a_c} \left( \frac{3}{17C_2 + 20C_3} \right)^{\frac{1}{4}}, \theta = \frac{17}{20} \right\}, \quad (5.174)$$

com  $17C_2 + 20C_3 > 0$ .

Por outro lado, assumindo-se que  $C_0\theta - C_1 \neq 0$ , obtém-se mais dois conjuntos de soluções. Estes conjuntos de soluções são denotados por  $S_2^\pm$  e  $S_3^\pm$ . O conjunto  $S_2^\pm$  é dado da forma seguinte:

$$S_2^\pm = \left\{ (\mathcal{A}_0, \mathcal{B}, \theta) \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}_0 = \frac{-15 + \sqrt{960\theta - 735}}{\varepsilon 32}, \right. \\ \left. \mathcal{B} = \pm \frac{1}{16\sqrt{2}\mu a_c} \sqrt{\frac{145 + \sqrt{960\theta - 735} - 160\theta}{C_0\theta - C_1}}, \theta \in S_{AB} \right\}. \quad (5.175)$$

No conjunto de soluções definido em (5.175),  $S_{AB}$  é definido por

$$S_{AB} = \{ \theta \in \mathbb{R}^+ : 60\mu^4 a_c^4 (C_2\theta + C_3)\mathcal{B}^4 - \varepsilon^2 \mathcal{A}_0^2 = 0 \}. \quad (5.176)$$

Para que o conjunto  $S_2^\pm$  seja admissível é necessário que sejam verificadas as condições dadas por

$$\theta \geq \frac{49}{64}, \quad \frac{145 + \sqrt{960\theta - 735} - 160\theta}{C_0\theta - C_1} \geq 0 \quad \text{e} \quad C_0\theta - C_1 \neq 0. \quad (5.177)$$

No entanto, no caso em que  $\theta = \frac{49}{64}$  a solução associada ao conjunto  $S_2^\pm$  corresponde à solução trivial ou nula  $\bar{\eta}(\xi) = 0$ .

Para além disto, o conjunto  $S_3^\pm$  é dado do modo que segue:

$$S_3^\pm = \left\{ (\mathcal{A}_0, \mathcal{B}, \theta) \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}_0 = \frac{-15 - \sqrt{960\theta - 735}}{\varepsilon 32}, \right. \\ \left. \mathcal{B} = \pm \frac{1}{16\sqrt{2}\mu a_c} \sqrt{\frac{145 - \sqrt{960\theta - 735} - 160\theta}{C_0\theta - C_1}}, \theta \in S_{AB} \right\}. \quad (5.178)$$

Por sua vez, para que o conjunto  $S_3^\pm$  seja admissível é necessário que sejam verificadas as condições seguintes:

$$\theta \geq \frac{49}{64}, \quad \frac{145 - \sqrt{960\theta - 735} - 160\theta}{C_0\theta - C_1} \geq 0 \quad \text{e} \quad C_0\theta - C_1 \neq 0. \quad (5.179)$$

Através de (5.174) e (5.178) conclui-se que o coeficiente  $\mathcal{A}_0$  associado aos conjuntos  $S_1^\pm$  e  $S_3^\pm$  satisfaz a desigualdade  $\mathcal{A}_0 \leq 0$ . Deste modo, apenas ondas de depressão da forma  $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^2(\mathcal{B}\xi + K)$  são obtidas juntamente com a solução trivial ou nula  $\bar{\eta}(\xi) = 0$ .

De seguida, investigam-se as soluções  $\theta$  do conjunto  $S_{AB}$  (ver (5.176)). Utilizando-se as expressões de  $\mathcal{A}_0$  dadas em (5.175) e (5.178) assim como definindo-se  $\tilde{\theta} = j\sqrt{960\theta - 735}$  ( $j = \pm 1$ ), a equação dada em (5.176) pode ser reescrita em termos de  $\tilde{\theta}$  da forma seguinte:

$$\left[25(C_2(735 + \tilde{\theta}^2) + 960C_3)(\tilde{\theta} + 9)^2 - 4(C_0(735 + \tilde{\theta}^2) - 960C_1)^2\right] (\tilde{\theta} - 15)^2 = 0. \quad (5.180)$$

Note-se que  $\tilde{\theta} = \sqrt{960\theta - 735} = 15$  é uma solução de (5.180) o que corresponde a  $\theta = 1$ . No entanto, se  $\theta = 1$  não existem soluções não triviais associadas ao conjunto  $S_2^\pm$  (ver (5.175)). Por outro lado, no caso em que  $\tilde{\theta} = -\sqrt{960\theta - 735}$ , tem-se que a equação  $\tilde{\theta} = 15$  é impossível em  $\mathbb{R}$ . Para além disto, a equação (5.180) é também verificada se for satisfeita a equação polinomial de quarto grau dada por

$$25(C_2(735 + \tilde{\theta}^2) + 960C_3)(\tilde{\theta} + 9)^2 - 4(C_0(735 + \tilde{\theta}^2) - 960C_1)^2 = 0. \quad (5.181)$$

Esta última equação pode ser escrita do modo seguinte:

$$\mathcal{Q}_4\tilde{\theta}^4 + \mathcal{Q}_3\tilde{\theta}^3 + \mathcal{Q}_2\tilde{\theta}^2 + \mathcal{Q}_1\tilde{\theta} + \mathcal{Q}_0 = 0, \quad (5.182)$$

onde os coeficientes  $\mathcal{Q}_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) são dados por

$$\mathcal{Q}_0 = 2025(735C_2 + 960C_3) - 4(735C_0 - 960C_1)^2, \quad (5.183a)$$

$$\mathcal{Q}_1 = 450(735C_2 + 960C_3), \quad (5.183b)$$

$$\mathcal{Q}_2 = 25(735C_2 + 960C_3) + 2025C_2 - 8(735C_0 - 960C_1)C_0, \quad (5.183c)$$

$$\mathcal{Q}_3 = 450C_2, \quad (5.183d)$$

$$\mathcal{Q}_4 = 25C_2 - 4C_0^2. \quad (5.183e)$$

As soluções de (5.182) podem ser obtidas através das fórmulas resolventes conhecidas para polinómios até ao quarto grau, inclusivamente. No que segue, consideram-se também os casos em que (5.182) se reduz a uma equação polinomial de graus 0, 1, 2 e 3.

- i) A equação polinomial de grau 0 é definida por  $\mathcal{Q}_4 = \mathcal{Q}_3 = \mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_1 = 0$  e  $\mathcal{Q}_0 = 0$ .

Neste caso tem-se que  $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$ . Deste modo obtém-se apenas as soluções constantes  $\left(\bar{\eta}(\xi) = 0 \text{ e } \bar{\eta} = -\frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 8(\theta - 1)}}{4\varepsilon}\right)$ .

- ii) A equação polinomial de grau 1 é definida por  $\mathcal{Q}_4 = \mathcal{Q}_3 = \mathcal{Q}_2 = 0$  e  $\mathcal{Q}_1 \neq 0$ . Este caso não é possível uma vez que  $\mathcal{Q}_4 = \mathcal{Q}_3 = \mathcal{Q}_2 = 0$  implica que  $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_1 = 0$ . Deste modo, este caso reduz-se ao anterior.

- iii) A equação polinomial de grau 2 é definida por  $\mathcal{Q}_4 = \mathcal{Q}_3 = 0$  e  $\mathcal{Q}_2 \neq 0$ .

Nesta situação tem-se que  $C_0 = C_2 = 0$ . Assumindo-se que  $C_3 \neq 0$ , a equação (5.182) é reescrita como uma equação polinomial de segundo grau dada por

$$5C_3\tilde{\theta}^2 + 90C_3\tilde{\theta} + 405C_3 - 768C_1^2 = 0. \quad (5.184)$$

As soluções de (5.184) são dadas por

$$\tilde{\theta} = -9 \pm \frac{16C_1\sqrt{15C_3}}{5C_3}. \quad (5.185)$$

iv) A equação polinomial de grau 3 é definida por  $Q_4 = 0$  e  $Q_3 \neq 0$ .

Das hipóteses  $Q_4 = 0$  e  $Q_3 \neq 0$  conclui-se que  $C_2 = \frac{4C_0^2}{25}$  e  $C_0 \neq 0$ . Neste caso, a equação (5.182) reduz-se a uma equação polinomial de grau 3 que pode ser escrita da forma seguinte:

$$\tilde{\theta}^3 + \bar{Q}_2 \tilde{\theta}^2 + \bar{Q}_1 \tilde{\theta} + \bar{Q}_0 = 0, \quad (5.186)$$

onde

$$\bar{Q}_2 = \frac{Q_2}{Q_3}, \quad \bar{Q}_1 = \frac{Q_1}{Q_3}, \quad \bar{Q}_0 = \frac{Q_0}{Q_3}. \quad (5.187)$$

As soluções desta equação de terceiro grau são dadas por

$$\tilde{\theta}_1 = -\frac{1}{3}\bar{Q}_2 + \bar{Q}_s + \bar{Q}_t, \quad (5.188a)$$

$$\tilde{\theta}_{2j} = -\frac{1}{3}\bar{Q}_2 - \frac{1}{2}(\bar{Q}_s + \bar{Q}_t) + (-1)^j \frac{i\sqrt{3}}{2}(\bar{Q}_s - \bar{Q}_t) \quad (j = 1, 2), \quad (5.188b)$$

$$(5.188c)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{Q}_s &= \sqrt[3]{\bar{Q}_r + \sqrt{\bar{Q}_d}}, \quad \bar{Q}_t = \sqrt[3]{\bar{Q}_r - \sqrt{\bar{Q}_d}}, \quad \bar{Q}_d = \bar{Q}_q^3 + \bar{Q}_r^2, \\ \bar{Q}_q &= \frac{3\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2^2}{9}, \quad \bar{Q}_r = \frac{9\bar{Q}_1\bar{Q}_2 - 27\bar{Q}_0 - 2\bar{Q}_2^3}{54}. \end{aligned} \quad (5.189)$$

v) A equação polinomial de grau 4 é definida por  $Q_4 \neq 0$ .

Da hipótese  $Q_4 \neq 0$  conclui-se que  $C_2 \neq \frac{4C_0^2}{25}$ . Neste último caso, a equação (5.182) pode ser rescrita como segue:

$$\tilde{\theta}^4 + \tilde{Q}_3 \tilde{\theta}^3 + \tilde{Q}_2 \tilde{\theta}^2 + \tilde{Q}_1 \tilde{\theta} + \tilde{Q}_0 = 0, \quad (5.190)$$

onde

$$\tilde{Q}_3 = \frac{Q_3}{Q_4}, \quad \tilde{Q}_2 = \frac{Q_2}{Q_4}, \quad \tilde{Q}_1 = \frac{Q_1}{Q_4}, \quad \tilde{Q}_0 = \frac{Q_0}{Q_4}. \quad (5.191)$$

Esta equação de quarto grau tem as soluções dadas por

$$\tilde{\theta}_{lj} = -\frac{1}{4}\tilde{Q}_3 + (-1)^l \frac{1}{2}\tilde{Q}_r + (-1)^j \frac{1}{2}\tilde{Q}_{d,3-l} \quad (l, j = 1, 2), \quad (5.192)$$

onde  $\tilde{Q}_r$  e  $\tilde{Q}_{d,j}$  ( $j = 1, 2$ ) são definidos pelas expressões dadas por

$$\tilde{Q}_r = \sqrt{\frac{1}{4}\tilde{Q}_3^2 - \tilde{Q}_2 + Y_1}, \quad (5.193)$$

$$\tilde{Q}_{d,j} = \sqrt{\frac{3}{4}\tilde{Q}_3^2 - 2\tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_r^2 + \frac{(-1)^{j-1}}{4}(4\tilde{Q}_3\tilde{Q}_2 - 8\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_3^3)\tilde{Q}_r^{-1}} \quad \text{e} \quad \tilde{Q}_r \neq 0, \quad (5.194a)$$

$$\tilde{Q}_{d,j} = \sqrt{\frac{3}{4}\tilde{Q}_3^2 - 2\tilde{Q}_2 + (-1)^{j-1}2\sqrt{Y_1^2 - 4\tilde{Q}_0}} \quad \text{e} \quad \tilde{Q}_r = 0. \quad (5.194b)$$

Em (5.193) e (5.194b),  $Y_1$  é uma solução real da equação polinomial de terceiro grau seguinte:

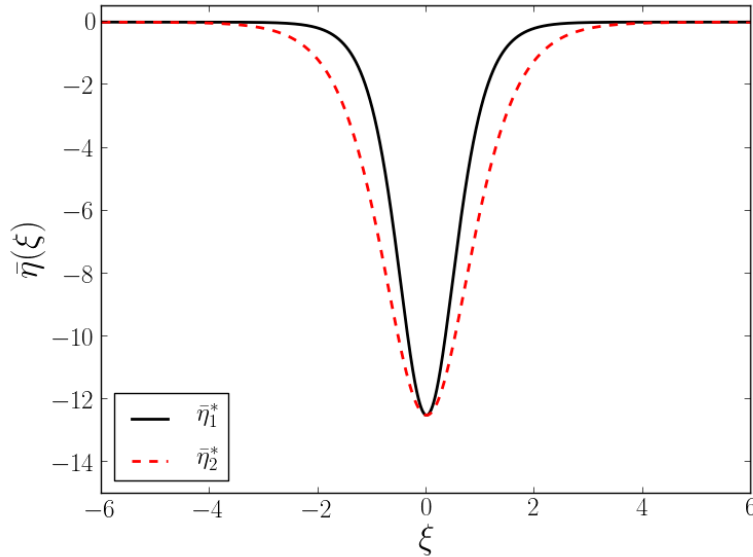
$$Y^3 - \tilde{Q}_2 Y^2 + (\tilde{Q}_1 \tilde{Q}_3 - 4\tilde{Q}_0)Y + (4\tilde{Q}_2 \tilde{Q}_0 - \tilde{Q}_1^2 - \tilde{Q}_3^2 \tilde{Q}_0) = 0. \quad (5.195)$$

Note-se que uma vez calculado  $\tilde{\theta}$ , o valor de  $\theta$  é obtido por meio da equação seguinte:

$$\theta = \frac{\tilde{\theta}^2 + 735}{960}. \quad (5.196)$$

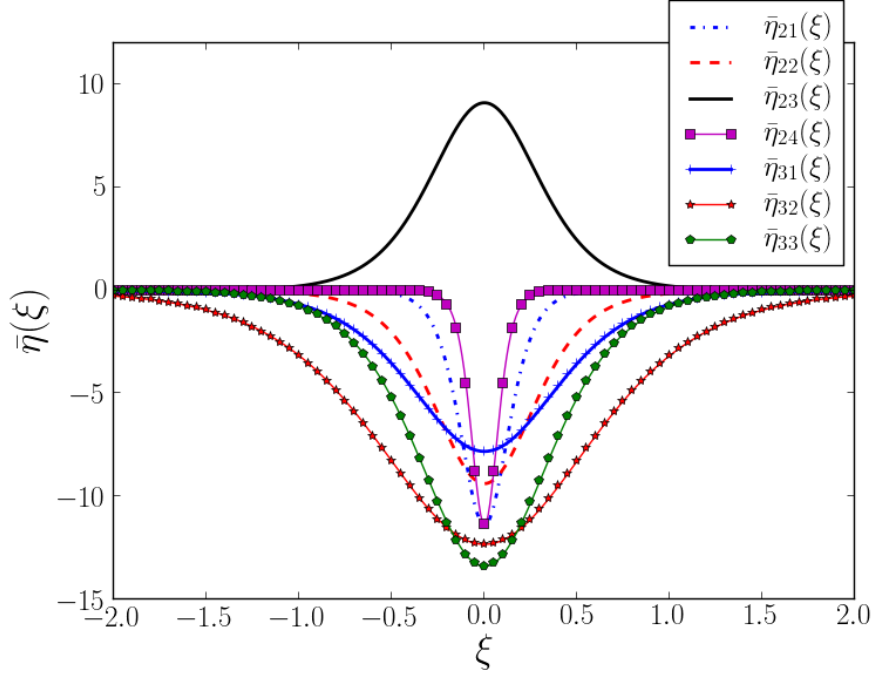
Salienta-se que nos casos iii), iv) e v) a existência de soluções reais para  $\theta$  pode ser comprovada pela análise dos discriminantes associados às equações polinomiais de graus 2, 3 e 4, respectivamente. Deste modo, pode-se mostrar que existem soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  de (5.172) que satisfazem (5.75) associadas aos conjuntos  $S_2^\pm$  e  $S_3^\pm$  e aos casos iii), iv) e v).

Na figura (5.14), representamos duas soluções de (5.172) associadas ao conjunto  $S_1^+$ . Estas soluções são denotadas por  $\bar{\eta}_i^*(\xi)$  ( $i = 1, 2$ ). Para a solução  $\bar{\eta}_1^*(\xi)$  os valores dos parâmetros são dados por  $\alpha \cong 0.552786$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$  e  $\tau_s \cong 0.416251$ . Por outro lado, para a solução  $\bar{\eta}_2^*(\xi)$  os valores dos parâmetros são dados por  $\alpha = 1$ ,  $\beta_1 \cong -2.222222$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$  e  $\tau_s = 0$ . Em ambos os gráficos, os valores para os restantes parâmetros e para  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $c^2 = 0.85$ ,  $\varepsilon = 0.06$ ,  $\mu = 0.4$  e  $K = 0$ . Note-se que nestes exemplos, ondas de depressão são obtidas.



**Figura 5.14:** Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Nesta figura representam-se duas soluções de (5.172) que satisfazem (5.75). Estas soluções estão associadas ao conjunto  $S_1^+$  e são denotadas por  $\bar{\eta}_i^*(\xi)$  ( $i = 1, 2$ ). Para a solução  $\bar{\eta}_1^*(\xi)$  os valores dos parâmetros são dados por  $\alpha \cong 0.552786$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$  e  $\tau_s \cong 0.416251$ . Por outro lado, para a solução  $\bar{\eta}_2^*(\xi)$  os valores dos parâmetros são dados por  $\alpha = 1$ ,  $\beta_1 \cong -2.222222$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$  e  $\tau_s = 0$ . Em ambos os gráficos, os valores para os restantes parâmetros e para  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$ ,  $c^2 = 0.85$ ,  $\varepsilon = 0.06$ ,  $\mu = 0.4$  e  $K = 0$ .

Na figura (5.15), várias soluções de (5.172) que satisfazem (5.75) são apresentadas. Estas soluções estão associadas aos conjuntos  $S_2^+$  e  $S_3^+$ , as quais são denotadas por  $\bar{\eta}_{2i}(\xi)$  e  $\bar{\eta}_{3i}(\xi)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), respectivamente. Refere-se que a solução  $\bar{\eta}_{21}$  é dada através do caso iii) correspondente à equação polinomial de grau 2. Por sua vez, as soluções  $\bar{\eta}_{22}$  e  $\bar{\eta}_{31}$  são deduzidas através do caso iv), correspondente à equação polinomial de grau 3. As restantes soluções estão associadas ao caso v), correspondente à equação polinomial de grau 4. Os parâmetros respeitantes às soluções representadas nesta figura são dados na tabela 5.1. Em todos os gráficos, os valores de  $a_c^2$  e de  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$  e  $K = 0$ .



**Figura 5.15:** Soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Várias soluções de (5.172) que satisfazem (5.75) são apresentadas. Estas soluções estão associadas aos conjuntos  $S_2^+$  e  $S_3^+$ , as quais são denotadas por  $\bar{\eta}_{2i}(\xi)$  e  $\bar{\eta}_{3i}(\xi)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), respectivamente. Note-se que  $\bar{\eta}_{21}$  é dada através do caso iii). Por sua vez,  $\bar{\eta}_{22}$  e  $\bar{\eta}_{31}$  são deduzidas através do caso iv). As restantes soluções estão associadas ao caso v). Os parâmetros respeitantes às soluções representadas nesta figura são dados na tabela 5.1. Em todos os gráficos, os valores de  $a_c^2$  e de  $K$  são dados por  $a_c^2 = 1$  e  $K = 0$ .

$\bar{\eta}(\xi)$	$\alpha$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\tau_s$	$c^2$	$\mu$	$\varepsilon$
$\bar{\eta}_{21}(\xi)$	0.552786	0	1	0	0.405846	0.9	0.1	0.01
$\bar{\eta}_{22}(\xi)$	1	-1.174491	0	0.973856	0.2	0.765625	0.2	0.05
$\bar{\eta}_{23}(\xi)$	0.552786	-1.054068	1	0.1	0	1.1	0.1	0.01
$\bar{\eta}_{24}(\xi)$	1	-0.224083	0	0	0.333333	0.9	0.1	0.01
$\bar{\eta}_{31}(\xi)$	1	-0.833333	1	1	0.214577	0.765625	0.4	0.06
$\bar{\eta}_{32}(\xi)$	0.552786	-1.655362	-0.1	0.1	0.2	0.843750	0.4	0.06
$\bar{\eta}_{33}(\xi)$	1	-1.822222	0	0.1	0	1	0.2	0.07

**Tabela 5.1:** Valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\tau_s$ ,  $c^2$ ,  $\mu$  e  $\varepsilon$  associados às soluções  $\bar{\eta}(\xi)$  de (5.172) que satisfazem (5.75) as quais são apresentadas na figura 5.15. Note-se que os valores com seis casas decimais são aproximados.

## 2) Sistema algébrico para a solução da forma $\bar{\eta}(\xi) = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2 \cosh^2(\mathcal{B}\xi + K) + 1}$

Relativamente às soluções da forma (5.157), um sistema algébrico composto por cinco equações não lineares é obtido. Note-se que a equação associada ao termo  $\bar{\eta}_2^5(\xi)$  é dada por

$$\mu^4 a_c^4 (C_2 \theta + C_3) \frac{(\mathcal{A}_2 + 1)^2}{\mathcal{A}_1^4} \mathcal{B}^4 = 0. \quad (5.197)$$

Desta equação e assumindo-se que  $C_2\theta + C_3 \neq 0$  resulta que as soluções admissíveis para este sistema algébrico apenas permitem os valores de  $\mathcal{A}_2 = -1$  ou  $\mathcal{B} = 0$ . Deste modo, conclui-se que não existem soluções não constantes da forma dada por (5.157) e de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  para a equação (5.172).

## 5.7 Algumas soluções das equações não lineares do tipo Boussinesq de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ , $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$ e $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon\mu^2)$ usando o método de expansão $G'/G$

Nas secções 5.4, 5.5 e 5.6 soluções analíticas do tipo onda de translação foram deduzidas para as equações não lineares de Boussinesq de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$ . Para tal, utilizou-se o método de integração directa assim como o método analítico descrito na secção 5.6. Contudo, tivemos que transformar a equação com derivadas parciais (5.52) nas equações diferenciais ordinárias (5.76), (5.117), (5.160) e (5.172). Para tal usaram-se grupos apropriados de transformações (ver subsecções 5.4.1, 5.5.1 e 5.6.1).

Nesta secção, usamos o método de expansão  $G'/G$  (ver, e.g., Wang et al. (2008a), Ozis e Aslan (2010) assim como Zuo e Zhang (2011)) para determinar soluções para as equações de Boussinesq de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon\mu^2)$ . Este método tem a vantagem de ser suficientemente genérico para poder ser aplicado a uma grande classe de equações não lineares de ordem arbitrária. No entanto, o método de expansão  $G'/G$  requer a utilização de ferramentas computacionais para o cálculo simbólico e para a resolução de sistemas algébricos não lineares. Mais concretamente, todas as soluções apresentadas nesta secção são obtidas usando-se o programa computacional Maple e confirmadas, posteriormente, por substituição nas respectivas equações. Salienta-se que o conjunto de soluções encontrado depende da eficiência dos algoritmos implementados para a resolução dos sistemas algébricos não lineares e da capacidade computacional disponível.

### 5.7.1 Equação diferencial ordinária de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon\mu^2)$

Usando-se (5.46a), a transformação de variáveis de onda de translação  $\xi = a_c X - cT$  ( $a_c \neq 0$ ) e assumindo-se que  $\eta(X, T) = \eta(\xi)$  assim como  $u(X, T) = u(\xi)$ , obtém-se a equação seguinte:

$$u'(\xi) = \frac{c}{a_c} \eta'(\xi) + O(\mu^2, \varepsilon). \quad (5.198)$$

Integrando-se (5.198) com respeito a  $\xi$ , temos que

$$u(\xi) = \frac{c}{a_c} \eta(\xi) + K_e + O(\mu^2, \varepsilon), \quad (5.199)$$

em que  $K_e$  é uma constante arbitrária de integração. Note-se que quando  $a_c = 0$  um regime de onda apenas dependente do tempo é obtido, o qual não tem interesse físico no contexto deste trabalho. Assim, usando-se (5.46a) e (5.199) assim como a transformação de variáveis de onda de translação  $\xi = a_c X - cT$ , a equação integro-diferencial não linear e completa (5.52) pode ser transformada numa equação diferencial ordinária e não linear. Como anteriormente, assume-se que as funções arbitrárias de integração dependentes do tempo são de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$ . A

equação resultante para a elevação da superfície da onda pode ser escrita da forma seguinte:

$$\begin{aligned} & (c^2 - a_c^2) \eta'' + \mu^2 a_c^2 (C_0 c^2 - C_1 a_c^2) \eta^{(IV)} + \mu^4 a_c^4 (C_2 c^2 + C_3 a_c^2) \eta^{(VI)} - \\ & - \varepsilon \left( (2c^2 + a_c^2) (\eta')^2 + 3a_c^2 \eta'' \eta \right) - \varepsilon^2 \left( 2(a_c^2 - c^2) (\eta')^2 \eta + 3a_c^2 \eta^2 \eta'' \right) + \\ & + \varepsilon \mu^2 \left( a_c^2 (C_4 c^2 + C_6 a_c^2) (\eta'')^2 + a_c^2 (C_5 a_c^2 + C_4 c^2) \eta''' \eta' + \right. \\ & \left. + a_c^2 (C_7 a_c^2 + C_8 c^2 - C_8 c a_c) \eta^{(IV)} \eta \right) - \varepsilon \mu^2 C_8 K_e a_c^2 (a_c^2 - c a_c) \eta^{(IV)} = 0. \end{aligned} \quad (5.200)$$

No que segue, usa-se o método de expansão  $G'/G$  para deduzir classes de soluções do tipo onda de translação para as equações (5.200) truncadas nas ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon \mu^2)$ .

## 5.7.2 Método de expansão $G'/G$ e soluções para as equações diferenciais ordinárias de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ , $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$ e $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon \mu^2)$

### 5.7.2.1 Método de expansão $G'/G$

Dada uma equação diferencial ordinária (EDO) e não linear, o método de expansão  $G'/G$  consiste na procura de soluções  $s(\xi)$  da EDO não linear da forma seguinte:

$$s(\xi) = \sum_{i=-m}^m \alpha_i (w(\xi))^i, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.201)$$

com  $\alpha_i$  ( $i \in \{-m, \dots, m\}$ ) incógnitas reais a determinar e a função  $w$  definida por

$$w(\xi) = \frac{G'(\xi)}{G(\xi)}. \quad (5.202)$$

Por sua vez, a função  $G$  em (5.202) é a solução geral da equação diferencial ordinária e linear de segunda-ordem dada por

$$G''(\xi) + \gamma G'(\xi) + \varrho G(\xi) = 0, \quad \gamma, \varrho \in \mathbb{R}. \quad (5.203)$$

Note-se que a solução geral  $G(\xi)$  pode ser escrita na forma  $G(\xi) = K_{n1} G_1(\xi) + K_{n2} G_2(\xi)$  com  $K_{n1}$  e  $K_{n2}$  duas constantes reais arbitrárias. Por sua vez, as duas soluções linearmente independentes  $G_1$  e  $G_2$  podem ser obtidas com base nas soluções da equação característica dada da forma seguinte:

$$r^2 + \gamma r + \varrho = 0, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (5.204)$$

Neste capítulo as EDOs não lineares em estudo são obtidas através da equação (5.200) com  $s(\xi) = \eta(\xi)$ . Salienta-se que se considera as equações (5.200) truncadas nas ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon \mu^2)$ . Para além disto, a transformação de Galileu  $\xi = a_c X - cT$  é usada aqui, onde  $c$  representa a velocidade de propagação da onda e  $a_c$  é uma constante real. De facto, a função  $w$  (ver (5.202) e (5.203)) verifica as relações seguintes:

$$w' = -w^2 - \gamma w - \varrho, \quad (5.205a)$$

$$w'' = -(2w + \gamma)w' = 2w^3 + 3\gamma w^2 + 2\varrho w + \gamma^2 w + \gamma\varrho, \quad (5.205b)$$

$$\begin{aligned} w''' &= -2(w')^2 - (2w + \gamma)w'' = \\ &= -6w^4 - 12\gamma w^3 - (8\varrho + 7\gamma^2)w^2 - (8\gamma\varrho + \gamma^3)w - 2\varrho^2 - \gamma^2\varrho, \end{aligned} \quad (5.205c)$$

$$\begin{aligned}
w^{(IV)} &= -6w'w'' - (2w + \gamma)w''' = \\
&= 24w^5 + 60w^4\gamma + (50\gamma^2 + 40\varrho)w^3 + (60\varrho\gamma + 15\gamma^3)w^2 + \\
&\quad + (22\gamma^2\varrho + 16\varrho^2 + \gamma^4)w + 8\varrho^2\gamma + \gamma^3\varrho, \quad (5.205d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^{(V)} &= -6(w'')^2 - 8w'w''' - (2w + \gamma)w^{(IV)} = \\
&= -120w^6 - 360\gamma w^5 - (390\gamma^2 + 240\varrho)w^4 - (480\gamma\varrho + 180\gamma^3)w^3 - \\
&\quad - (292\gamma^2\varrho + 31\gamma^4 + 136\varrho^2)w^2 - (136\gamma\varrho^2 + 52\gamma^3\varrho + \gamma^5)w - \\
&\quad - \gamma^4\varrho - 22\gamma^2\varrho^2 - 16\varrho^3, \quad (5.205e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^{(VI)} &= -20w''w''' - 10w'w^{(IV)} - (2w + \gamma)w^{(V)} = \\
&= 720w^7 + 2520\gamma w^6 + (3360\gamma^2 + 1680\varrho)w^5 + (2100\gamma^3 + 4200\gamma\varrho)w^4 + \\
&\quad + (3584\gamma^2\varrho + 602\gamma^4 + 1232\varrho^2)w^3 + (1848\gamma\varrho^2 + 1176\gamma^3\varrho + 63\gamma^5)w^2 + \\
&\quad + (720\varrho^2\gamma^2 + 114\gamma^4\varrho + \gamma^6 + 272\varrho^3)w + 52\varrho^2\gamma^3 + 136\varrho^3\gamma + \gamma^5\varrho. \quad (5.205f)
\end{aligned}$$

Assumindo-se que as soluções  $\eta$  são da forma (5.201) e usando-se as equações (5.205) conclui-se que a EDO não linear em causa é transformada numa equação algébrica polinomial em termos da função  $w$  da forma genérica seguinte:

$$\sum_{i=-N}^N Q_i w^i = 0, \quad (5.206)$$

com  $N \in \mathbb{N}$  e com os coeficientes reais  $Q_i$  ( $i \in \{-N, \dots, N\}$ ) a depender das incógnitas reais  $\alpha_i$  ( $i \in \{-m, \dots, m\}$ ),  $\gamma$ ,  $\varrho$ ,  $a_c$  e  $c$  bem como dos coeficientes reais  $C_i$  ( $i \in \{0, \dots, 8\}$ ) e da constante real  $K_e$ . Por sua vez, substituindo-se as expressões (5.205) em (5.201), as derivadas de  $s(\xi)$  com respeito a  $\xi$  podem ser escritas da forma que segue:

$$\frac{d^j s(\xi)}{d\xi^j} = \sum_{i=-m}^m \alpha_i \frac{d^j [(w(\xi))^i]}{d\xi^j} = \sum_{i=-m-j}^{m+j} p_{ij}(w(\xi))^i, \quad j \in \{1, \dots, 6\}, \quad (5.207)$$

onde  $j$  representa a ordem da derivada. Nas equações em estudo, o valor máximo de  $j$  é de seis. Por outro lado, os coeficientes  $p_{ij}$  ( $i = -m - j, \dots, m + j$ ) dependem das incógnitas  $\alpha_i$  ( $i = -m, \dots, m$ ) e dos coeficientes das potências de  $w$  nas equações (5.205). De forma análoga, usamos as expressões (5.205) para rescrever os termos não lineares da EDO não linear. Nos casos em estudo (ver (5.200)), os termos não lineares de ordens  $O(\varepsilon)$ ,  $O(\varepsilon^2)$  bem como  $O(\varepsilon\mu^2)$ , são denotados genericamente por  $S_\varepsilon(\xi)$ ,  $S_{\varepsilon^2}(\xi)$  e  $S_{\varepsilon\mu^2}(\xi)$ , respectivamente. Estes termos podem ser escritos da forma seguinte:

$$S_\varepsilon(\xi) = \sum_{i=-2m-2}^{2m+2} q_{i1}(w(\xi))^i, \quad S_{\varepsilon^2}(\xi) = \sum_{i=-3m-2}^{3m+2} q_{i2}(w(\xi))^i, \quad S_{\varepsilon\mu^2}(\xi) = \sum_{i=-2m-4}^{2m+4} q_{i3}(w(\xi))^i, \quad (5.208)$$

onde os coeficientes  $q_{il}$  ( $l \in \{1, 2, 3\}$ ) dependem de  $\alpha_i$  e dos coeficientes das potências de  $w$  nas equações (5.205).

Salientamos que o valor  $N \in \mathbb{N}$  corresponde à ordem da maior potência de  $w$  envolvida nas expressões (5.207) e (5.208). Consequentemente, o valor de  $N$  é dado em função do valor de  $m \in \mathbb{N}$  (ver (5.201)), o qual é calculado usando a técnica do balanço homogéneo (ver,

e.g., Wang et al. (2008a)). Mais concretamente,  $m$  é calculado comparando a maior potência de  $w$ , associada ao termo linear de maior ordem de derivação, com a maior potência de  $w$  associada aos termos não lineares da EDO não linear. De facto, resulta de (5.207) e (5.208) que para a EDO não linear de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$  se tem o valor de  $m = 4$ , resultante da equação  $m + 6 = 2m + 2$ . Consequentemente, tem-se que  $N = m + 6 = 10$ . Nos casos das equações diferenciais ordinárias e não lineares de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon\mu^2)$  tem-se que  $m = 2$ , resultante das equações  $m + 6 = 3m + 2$  e  $m + 6 = 3m + 2 = 2m + 4$ , respectivamente. Nestes dois últimos casos o valor de  $N$  é dado por  $N = m + 6 = 8$ .

Para que a equação (5.206) seja verificada é necessário que o sistema não linear  $Q_i = 0$  ( $i \in \{-N, \dots, N\}$ ) seja satisfeito. Da resolução deste sistema não linear resulta a determinação dos valores das incógnitas reais  $\alpha_i$  ( $i \in \{-m, \dots, m\}$ ),  $\gamma$ ,  $\varrho$ ,  $a_c$ ,  $c$  e  $K_e$  e conseqüentemente a caracterização das soluções  $s(\xi)$ .

### 5.7.2.2 Soluções do tipo onda de translação para a equação diferencial ordinária e não linear de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$

De (5.200) resulta a EDO não linear de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$  dada por

$$\begin{aligned} (c^2 - a_c^2) \eta'' + \mu^2 a_c^2 (C_0 c^2 - C_1 a_c^2) \eta^{(IV)} + \mu^4 a_c^4 (C_2 c^2 + C_3 a_c^2) \eta^{(VI)} - \\ - \varepsilon \left( (2c^2 + a_c^2) (\eta')^2 + 3a_c^2 \eta'' \eta \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.209)$$

Note-se que  $\eta(\xi) = K_n$  com  $K_n \in \mathbb{R}$  é uma solução constante da equação anterior. Da definição de  $w$  (ver (5.202)) e de (5.203) pode-se concluir que a solução geral  $G(\xi)$  é da forma  $K_{n1} G_1(\xi) + K_{n2} G_2(\xi)$  resultando

$$w = \frac{K_{n1} G_1'(\xi) + K_{n2} G_2'(\xi)}{K_{n1} G_1(\xi) + K_{n2} G_2(\xi)}. \quad (5.210)$$

No caso em que  $K_{n1} = 0$  ou  $K_{n2} = 0$  então  $w = \frac{G_2'(\xi)}{G_2(\xi)}$  ou  $w = \frac{G_1'(\xi)}{G_1(\xi)}$ , respectivamente. Por outro lado, assumindo-se que  $K_{n1} \neq 0$  e  $K_{n2} \neq 0$  temos que

$$w(\xi) = \frac{G_1'(\xi) + \frac{K_{n2}}{K_{n1}} G_2'(\xi)}{G_1(\xi) + \frac{K_{n2}}{K_{n1}} G_2(\xi)}. \quad (5.211)$$

Observa-se que o caso  $K_{n2} = 0$  está incluído nesta última equação. Deste modo, o número de constantes arbitrárias na definição de  $w$  pode ser reduzido sem perda de generalidade. Daqui em diante, denota-se por  $K_{21}$  a constante real dada por  $K_{n2}/K_{n1}$  com  $K_{n1} \neq 0$ .

De seguida, usa-se o método de expansão  $G'/G$  para identificar algumas soluções não triviais ou não nulas para (5.209). O sistema algébrico não linear a resolver é constituído por 21 equações ( $m = 4$  e  $N = 10$ ) a 13 incógnitas ( $\alpha_i$  com  $i \in \{-4, \dots, 4\}$  e  $\gamma$ ,  $\varrho$ ,  $a_c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ). Neste contexto, seis conjuntos de soluções não triviais ou nulas para o sistema algébrico mencionado anteriormente são deduzidos. Para além disto, para cada conjunto de soluções do sistema algébrico é obtida uma classe de soluções do tipo onda de translação  $\eta(\xi) = \eta(a_c X - cT)$ .

- O primeiro conjunto de soluções para o sistema algébrico é dado por

$$\begin{aligned} S_1 = \left\{ (a_c, c, \varrho, \gamma, \alpha_{-4}, \dots, \alpha_4) \in \mathbb{R}^{13} : a_c \in \mathbb{R}, c^2 = \frac{a_c^2 C_1}{C_0}, \varrho = 0, \gamma = 0, \right. \\ \left. \alpha_0 = \frac{C_1 - C_0}{3\varepsilon C_0}, \alpha_4 = \frac{15120\mu^4 a_c^4 (C_2 C_1 + C_3 C_0)}{\varepsilon (8C_1 + 19C_0)}, \alpha_i = 0, i \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3\} \right\}, \end{aligned} \quad (5.212)$$

desde que  $C_0 \neq 0$ ,  $\frac{C_1}{C_0} \geq 0$  e  $8C_1 + 19C_0 \neq 0$ .

No conjunto  $S_1$  tem-se que  $\gamma = \varrho = 0$ , resultando a equação característica  $r = 0$ . Esta equação característica está associada à solução geral da forma  $G(\xi) = K_{n1}\xi + K_{n2}$ . Assim, a classe de soluções do tipo onda de translação,  $\eta(\xi)$ , é dada por

$$\eta(\xi) = \alpha_0 + \alpha_4 \left( \frac{1}{\xi + K_{21}} \right)^4, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{-K_{21}\}. \quad (5.213)$$

- O segundo e terceiro conjuntos de soluções para o sistema algébrico são dados por

$$\begin{aligned} S_2^\pm = \left\{ (a_c, c, \varrho, \gamma, \alpha_{-4}, \dots, \alpha_4) \in \mathbb{R}^{13} : a_c^2 = c^2 = \frac{C_0 - C_1}{78\mu^2\varrho(C_2 + C_3)}, \varrho \in \mathbb{R}^-, \right. \\ \gamma = \pm\sqrt{-2\varrho}, \alpha_0 = \frac{32(C_1 - C_0)^2}{1521\varepsilon(C_2 + C_3)}, \alpha_1 = \pm\frac{280\sqrt{-2\varrho}(C_1 - C_0)^2}{1521\varrho\varepsilon(C_2 + C_3)}, \\ \alpha_3 = \pm\frac{280\sqrt{-2\varrho}(C_1 - C_0)^2}{1521\varrho^2\varepsilon(C_2 + C_3)}, \alpha_4 = \frac{140(C_1 - C_0)^2}{1521\varrho^2\varepsilon(C_2 + C_3)}, \\ \left. \alpha_i = 0, i \in \{-4, -3, -2, -1, 2\} \right\}, \quad (5.214) \end{aligned}$$

desde que  $C_2 + C_3 \neq 0$  e  $\frac{C_0 - C_1}{C_2 + C_3} \leq 0$ .

Nos conjuntos  $S_2^\pm$ , tem-se que  $\gamma = \pm\sqrt{-2\varrho}$  e  $\varrho < 0$ . Deste modo,  $r_1^\pm$  e  $r_2^\pm$  são duas soluções reais e distintas da equação característica (5.204). Mais especificamente, tem-se que

$$r_1^+ = \frac{-\sqrt{-2\varrho} + \sqrt{-6\varrho}}{2} \text{ e } r_2^+ = \frac{-\sqrt{-2\varrho} - \sqrt{-6\varrho}}{2}, \quad (5.215)$$

assim como

$$r_1^- = \frac{\sqrt{-2\varrho} + \sqrt{-6\varrho}}{2} \text{ e } r_2^- = \frac{\sqrt{-2\varrho} - \sqrt{-6\varrho}}{2}. \quad (5.216)$$

Nestes casos, a solução geral  $G$  é dada por  $G(\xi) = K_{n1}e^{r_1^\pm\xi} + K_{n2}e^{r_2^\pm\xi}$ . Assim, a classe de soluções do tipo onda de translação,  $\eta(\xi)$ , é descrita por

$$\eta(\xi) = \sum_{i=0}^4 \alpha_i \left( \frac{r_1 e^{r_1^\pm\xi} + r_2 K_{21} e^{r_2^\pm\xi}}{e^{r_1^\pm\xi} + K_{21} e^{r_2^\pm\xi}} \right)^i, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{r_1^\pm - r_2^\pm} \log(-K_{21}), K_{21} < 0 \right\}. \quad (5.217)$$

- O quarto e quinto conjuntos de soluções do sistema algébrico são dados por

$$\begin{aligned} S_3^\pm = \left\{ (a_c, c, \varrho, \gamma, \alpha_{-4}, \dots, \alpha_4) \in \mathbb{R}^{13} : a_c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, c^2 = a_c^2, \varrho \in \mathbb{R}, \right. \\ \gamma = \pm\frac{\sqrt{13a_c^2 W}}{13a_c^2\sqrt{C_2 + C_3}\mu}, \alpha_0 = \frac{560\mu^4 a_c^4 \varrho^2 (C_3 + C_2)}{\varepsilon} - \frac{12(C_1 - C_0)^2}{169\varepsilon(C_2 + C_3)}, \\ \alpha_2 = \frac{560(78a_c^2\mu^2\varrho(C_3 + C_2) + C_1 - C_0)\mu^2 a_c^2}{13\varepsilon}, \\ \alpha_1 = \varrho\alpha_3, \alpha_3 = \pm\frac{1120\mu^3 a_c^2 \sqrt{13a_c^2(C_2 + C_3)W}}{13\varepsilon}, \alpha_4 = \frac{560\mu^4 a_c^4 (C_2 + C_3)}{\varepsilon}, \\ \left. \alpha_i = 0, i \in \{-4, -3, -2, -1\}, W = \left( 52\mu^2 a_c^2 \varrho (C_2 + C_3) - C_0 + C_1 \right) \right\}, \quad (5.218) \end{aligned}$$

desde que  $W \geq 0$  e  $C_2 + C_3 > 0$ .

Nos conjuntos de soluções  $S_3^\pm$ , as soluções da equação característica (5.204) denotadas por  $r_1^\pm$  e  $r_2^\pm$  são dadas da forma seguinte:

$$r_1^+ = \frac{-\sqrt{\frac{52\rho}{13} + \frac{C_1 - C_0}{13a_c^2\mu^2(C_2 + C_3)}} + \sqrt{\frac{C_1 - C_0}{13a_c^2\mu^2(C_2 + C_3)}}}{2} e$$

$$r_2^+ = \frac{-\sqrt{\frac{52\rho}{13} + \frac{C_1 - C_0}{13a_c^2\mu^2(C_2 + C_3)}} - \sqrt{\frac{C_1 - C_0}{13a_c^2\mu^2(C_2 + C_3)}}}{2}, \quad (5.219)$$

assim como

$$r_1^- = \frac{\sqrt{\frac{52\rho}{13} + \frac{C_1 - C_0}{13a_c^2\mu^2(C_2 + C_3)}} + \sqrt{\frac{C_1 - C_0}{13a_c^2\mu^2(C_2 + C_3)}}}{2} e$$

$$r_2^- = \frac{\sqrt{\frac{52\rho}{13} + \frac{C_1 - C_0}{13a_c^2\mu^2(C_2 + C_3)}} - \sqrt{\frac{C_1 - C_0}{13a_c^2\mu^2(C_2 + C_3)}}}{2}. \quad (5.220)$$

Note-se que os coeficientes  $C_i$  ( $i \in \{0, \dots, 3\}$ ) podem ser escolhidos de forma a que  $r_1^\pm$  e  $r_2^\pm$  sejam constantes reais distintas e, neste caso, a solução geral  $G$  é dada por  $G(\xi) = K_{n1}e^{r_1^\pm\xi} + K_{n2}e^{r_2^\pm\xi}$ . Isto implica que os radicandos das raízes quadradas em (5.219) e (5.220) sejam não negativos. Para além disto, os radicandos das raízes quadradas dos segundos termos nos segundos membros destas equações devem também ser não nulos. Salienta-se que isto acontece, por exemplo, se se considerarem os coeficientes  $C_i$  ( $i \in \{0, \dots, 3\}$ ) de forma a serem reproduzidos os desenvolvimentos de Padé de ordem  $[2, 4]$  ou  $[4, 4]$  do quadrado da velocidade de fase associado ao problema completamente linear de Airy (ver subsecção 5.3.2.2). Note-se que estes coeficientes são descritos pelos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e  $\tau_s$ .

Assim, a classe de soluções do tipo onda de translação  $\eta(\xi)$  é descrita por

$$\eta(\xi) = \sum_{i=0}^4 \alpha_i \left( \frac{r_1^\pm e^{r_1^\pm\xi} + r_2^\pm K_{21} e^{r_2^\pm\xi}}{e^{r_1^\pm\xi} + K_{21} e^{r_2^\pm\xi}} \right)^i, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{r_1^\pm - r_2^\pm} \log(-K_{21}), K_{21} < 0 \right\}. \quad (5.221)$$

Para além disto, se se considerar a equação (5.209) com coeficientes  $C_i$  ( $i \in \{0, \dots, 3\}$ ) genéricos, pode ainda assumir-se que as soluções da equação característica (5.204) são de uma das formas seguintes:  $r_1^\pm = r_2^\pm = \mp\sqrt{\frac{52\rho}{13}}$  ( $\rho > 0$ ) ou  $r_1^\pm$  e  $r_2^\pm$  constantes complexas conjugadas. No caso em que  $r_1^\pm = r_2^\pm \in \mathbb{R}$  temos que

$$G(\xi) = (K_{n1}\xi + K_{n2})e^{\mp\sqrt{\frac{52\rho}{13}}\xi} \quad (5.222)$$

e a classe de soluções do tipo onda de translação,  $\eta(\xi)$ , é dada da forma seguinte:

$$\eta(\xi) = \sum_{i=0}^4 \alpha_i \left( \mp\sqrt{\frac{52\rho}{13}} + \frac{1}{K_{21} + \xi} \right)^i, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{-K_{21}\}. \quad (5.223)$$

Por último, considere-se o caso em que  $r_1^\pm$  e  $r_2^\pm$  são constantes complexas conjugadas. A parte real e a parte imaginária de  $r_1^\pm$  são denotadas por  $r_{re}$  e  $r_{im}$ , respectivamente. Nestas condições, temos que  $G(\xi) = K_{n1}e^{r_{re}\xi} \cos(r_{im}\xi) + K_{n2}e^{r_{re}\xi} \sin(r_{im}\xi)$  e a classe de soluções do tipo onda de translação periódica  $\eta(\xi)$  é dada por

$$\eta(\xi) = \sum_{i=0}^4 \alpha_i \left( r_{re} + \frac{-r_{im} \sin(r_{im}\xi) + r_{im} K_{21} \cos(r_{im}\xi)}{\cos(r_{im}\xi) + K_{21} \sin(r_{im}\xi)} \right)^i,$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{r_{im}} (\operatorname{arccot}(-K_{21}) + k\pi) \right\} (k \in \mathbb{Z}). \quad (5.224)$$

- O sexto conjunto de soluções do sistema algébrico é dado por

$$\begin{aligned}
S_4 = \left\{ (a_c, c, \varrho, \gamma, \alpha_{-4}, \dots, \alpha_4) \in \mathbb{R}^{13} : a_c^2 = c^2 = \frac{C_0 - C_1}{52\varrho\mu^2(C_2 + C_3)}, \right. \\
\gamma = 0, \varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha_0 = \frac{23(C_1 - C_0)^2}{169\varepsilon(C_2 + C_3)}, \alpha_2 = \frac{70(C_1 - C_0)^2}{169\varrho\varepsilon(C_2 + C_3)}, \\
\left. \alpha_4 = \frac{35(C_1 - C_0)^2}{169\varrho^2\varepsilon(C_2 + C_3)}, \alpha_i = 0, i \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 3\} \right\}, \quad (5.225)
\end{aligned}$$

desde que  $C_2 + C_3 \neq 0$  e  $\frac{C_0 - C_1}{\varrho(C_2 + C_3)} \geq 0$ .

No conjunto de soluções  $S_4$ , temos que  $\gamma = 0$  e  $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Deste modo,  $r_1 = \sqrt{-\varrho}$  e  $r_2 = -\sqrt{-\varrho}$  são as soluções de (5.204). Se considerarmos  $\varrho < 0$  então  $r_1$  e  $r_2$  são constantes reais e distintas e, neste caso, a solução geral  $G$  é dada por  $G(\xi) = K_{n1}e^{r_1\xi} + K_{n2}e^{r_2\xi}$ . Note-se que se os coeficientes  $C_i$  ( $i \in \{0, \dots, 3\}$ ) forem calculados de forma a reproduzir os desenvolvimentos de Padé de ordem  $[2, 4]$  ou  $[4, 4]$  do quadrado da velocidade de fase associado ao problema completamente linear de Airy (ver subsecção 5.3.2.2) então  $\frac{C_0 - C_1}{\varrho(C_2 + C_3)} < 0$ . Assim, a classe de soluções do tipo onda de translação  $\eta(\xi)$  é descrita por

$$\eta(\xi) = \sum_{i=0}^4 \alpha_i \left( \frac{r_1 e^{r_1 \xi} + r_2 K_{21} e^{r_2 \xi}}{e^{r_1 \xi} + K_{21} e^{r_2 \xi}} \right)^i, \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{r_1 - r_2} \log(-K_{21}), K_{21} < 0 \right\}. \quad (5.226)$$

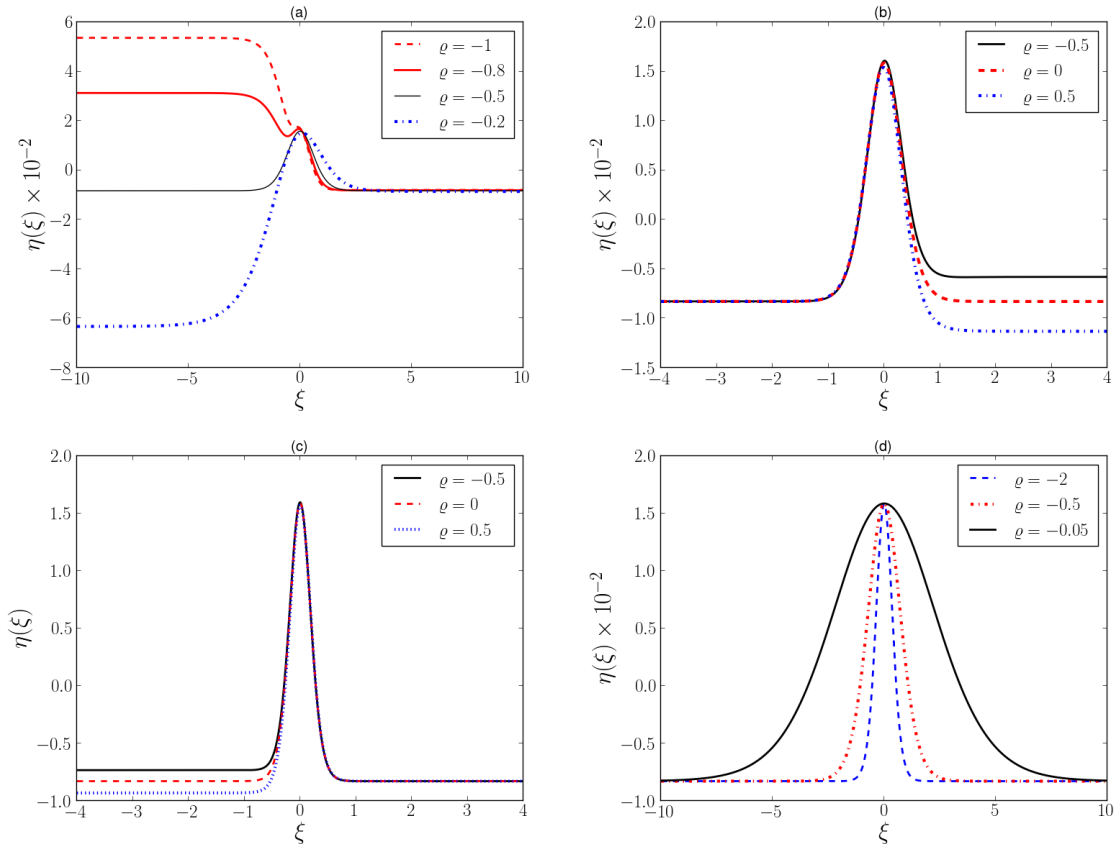
Por outro lado, se considerarmos  $\varrho > 0$  então  $r_1$  ( $r_1 = i\sqrt{\varrho}$ ) e  $r_2$  ( $r_2 = -i\sqrt{\varrho}$ ) são constantes imaginárias puras e conjugadas e, neste caso, a solução geral  $G$  é dada por  $G(\xi) = K_{n1} \cos(\sqrt{\varrho}\xi) + K_{n2} \sin(\sqrt{\varrho}\xi)$ . Resulta então a classe de soluções do tipo onda de translação periódica,  $\eta(\xi)$ , dada por

$$\begin{aligned}
\eta(\xi) = \sum_{i=0}^4 \alpha_i \left( \frac{-\sqrt{\varrho} \sin(\sqrt{\varrho}\xi) + \sqrt{\varrho} K_{21} \cos(\sqrt{\varrho}\xi)}{\cos(\sqrt{\varrho}\xi) + K_{21} \sin(\sqrt{\varrho}\xi)} \right)^i, \\
\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varrho}} (\operatorname{arccot}(-K_{21}) + k\pi) \right\} (k \in \mathbb{Z}). \quad (5.227)
\end{aligned}$$

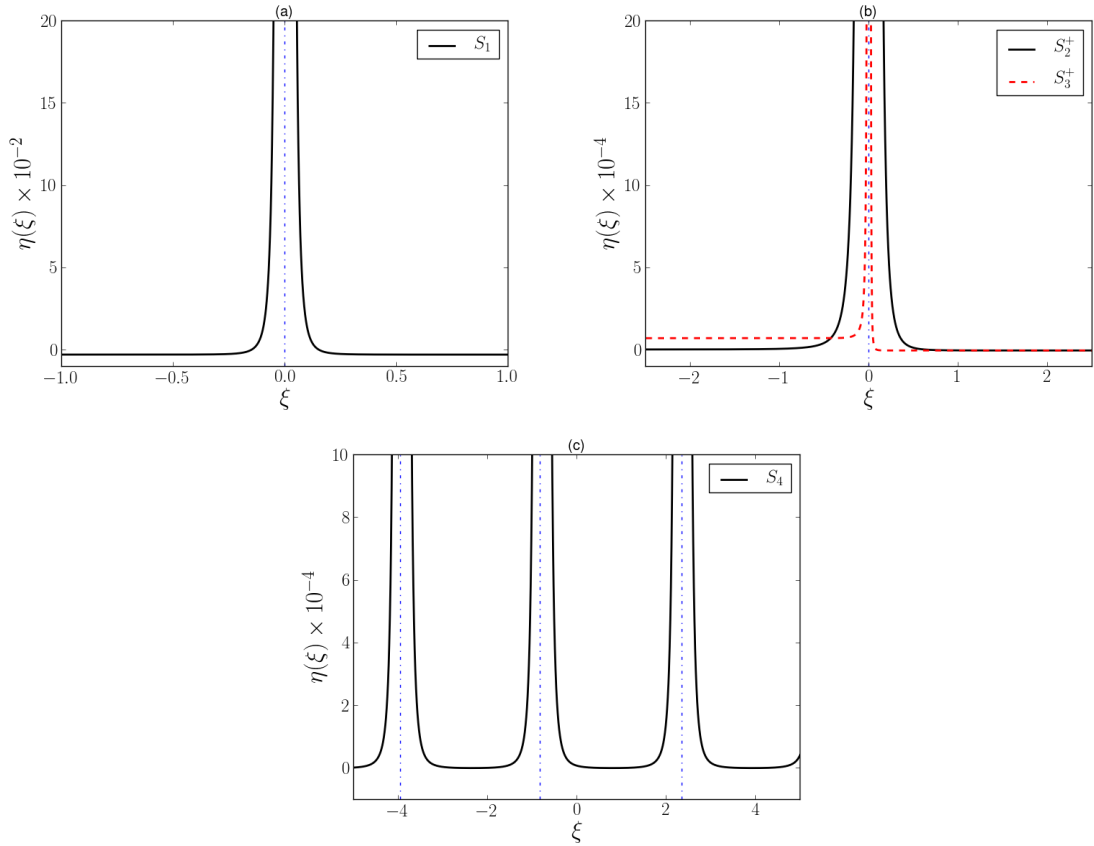
Nas figuras 5.16 e 5.17, algumas das soluções obtidas anteriormente são ilustradas. Na figura 5.16, as soluções de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  e limitadas são representadas enquanto que na figura 5.17 mostram-se algumas das soluções do tipo onda de translação com singularidades e ilimitadas. Mais concretamente, na figura 5.16 (a) mostramos as soluções associadas ao conjunto  $S_2^+$  para quatro valores de  $\varrho$  dados por  $\varrho = -1$ ,  $\varrho = -0.8$ ,  $\varrho = -0.5$  e  $\varrho = -0.2$ . Nas figuras 5.16 (b) e 5.16 (c), algumas das soluções associadas aos conjuntos  $S_3^-$  e  $S_3^+$ , respectivamente, para vários valores de  $\varrho$ ,  $a_c$ ,  $\varepsilon$  e  $\mu$  são mostradas. Em particular, na figura 5.16 (b) consideramos  $a_c = 5$ . Na figura 5.16 (c) tomamos  $a_c = 0.3$  e  $\mu = \varepsilon = 1$ . Em ambos os casos  $\varrho = -0.5$ ,  $\varrho = 0$  e  $\varrho = 0.5$ . As soluções associadas ao conjunto  $S_4$  para três valores de  $\varrho$  dados por  $\varrho = -2$ ,  $\varrho = -0.5$  e  $\varrho = -0.05$  são ilustradas na figura 5.16 (d). Em todos os gráficos desta figura, os valores dos outros parâmetros livres e de  $K_{21}$  são dados por  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = (-15/28)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$ ,  $\tau_s = 0$ ,  $K_{21} = 1$  e, com a excepção da figura (c),  $\mu = 0.1$  e  $\varepsilon = 0.01$ .

As soluções associadas ao conjunto  $S_1$  para  $a_c = 1$  e  $K_{21} = 0$  são apresentadas na figura 5.17 (a). Por outro lado, as soluções associadas a  $S_2^+$  e  $S_3^+$  com  $K_{21} = -1$  e  $\varrho = -1$  são ilustradas na figura 5.17 (b). O valor de  $a_c$  para a solução associada a  $S_3^+$  é  $a_c = 1$ .

Apresenta-se uma solução periódica associada ao conjunto  $S_4$  para  $K_{21} = 1$  e  $\varrho = 1$  na figura 5.17 (c). Em todos os gráficos, os valores dos outros parâmetros livres são dados por  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = (-15/28)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$ ,  $\tau_s = 0$ ,  $\mu = 0.1$  e  $\varepsilon = 0.01$ . Note-se que os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e  $\tau_s$  aqui considerados estão associados aos coeficientes  $C_i$  ( $i \in \{0, \dots, 3\}$ ) que reproduzem os desenvolvimentos de Padé de ordem  $[2, 4]$  do quadrado da velocidade de fase do problema completamente linear de Airy (ver subsecção 5.3.2.2).



**Figura 5.16:** Algumas soluções  $\eta(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a) mostramos as soluções associadas ao conjunto  $S_2^+$  para quatro valores de  $\varrho$  dados por  $\varrho = -1$ ,  $\varrho = -0.8$ ,  $\varrho = -0.5$  e  $\varrho = -0.2$ . Nas figuras (b) e (c) apresentamos algumas das soluções associadas aos conjuntos  $S_3^-$  e  $S_3^+$ , respectivamente, para diversos valores de  $\varrho$ ,  $a_c$ ,  $\varepsilon$  e  $\mu$ . Mais concretamente, na figura (b) consideramos  $a_c = 5$ . Por outro lado, na figura (c) toma-se  $a_c = 0.3$  e  $\mu = \varepsilon = 1$ . Em ambos os casos  $\varrho = -0.5$ ,  $\varrho = 0$  e  $\varrho = 0.5$ . Na figura (d), as soluções associadas ao conjunto  $S_4$  para  $\varrho$  dado por  $\varrho = -2$ ,  $\varrho = -0.5$  e  $\varrho = -0.05$  são ilustradas. Em todos os gráficos, os valores dos outros parâmetros livres e de  $K_{21}$  são dados por  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = (-15/28)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$ ,  $\tau_s = 0$ ,  $K_{21} = 1$  e, com a exceção da figura (c),  $\mu = 0.1$  e  $\varepsilon = 0.01$ .



**Figura 5.17:** Algumas soluções  $\eta(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a) mostramos as soluções associadas ao conjunto  $S_1$  para  $a_c = 1$  e  $K_{21} = 0$ , enquanto que na figura (b) ilustramos as soluções associadas a  $S_2^+$  e  $S_3^+$  com  $K_{21} = -1$  e  $\varrho = -1$ . O valor de  $a_c$  para a solução associada a  $S_3^+$  é  $a_c = 1$ . Na figura (c), uma solução periódica é apresentada a qual está associada ao conjunto  $S_4$  para  $K_{21} = 1$  e  $\varrho = 1$ . Em todos os gráficos, os valores dos outros parâmetros livres são dados por  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = (-15/28)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$ ,  $\tau_s = 0$ ,  $\mu = 0.1$  e  $\varepsilon = 0.01$ . Também representamos as assíntotas verticais aos gráficos em todas as figuras.

### 5.7.2.3 Soluções do tipo onda de translação para a equação diferencial ordinária e não linear de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$

A equação (5.200) de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$  é escrita da forma seguinte:

$$\begin{aligned} & (c^2 - a_c^2) \eta'' + \mu^2 a_c^2 (C_0 c^2 - C_1 a_c^2) \eta^{(IV)} + \mu^4 a_c^4 (C_2 c^2 + C_3 a_c^2) \eta^{(VI)} - \\ & - \varepsilon \left( (2c^2 + a_c^2) (\eta')^2 + 3a_c^2 \eta'' \eta \right) - \varepsilon^2 \left( 2(a_c^2 - c^2) (\eta')^2 \eta + 3a_c^2 \eta^2 \eta'' \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.228)$$

Mais uma vez observamos que  $\eta(\xi) = K$  com  $K \in \mathbb{R}$  é uma solução constante da equação anterior. De seguida, procuramos soluções não constantes de (5.228). Da aplicação do método de expansão  $G'/G$  resulta um sistema algébrico e não linear de 17 equações ( $m = 2$  e  $N = 8$ ) a 9 incógnitas  $\alpha_i$  ( $i = -2, \dots, 2$ ),  $a_c$ ,  $c$ ,  $\varrho$  e  $\gamma$ . Da resolução deste sistema obtemos cinco conjuntos de soluções bem como as respectivas classes de soluções do tipo onda de translação para a equação (5.228). Note-se que através da utilização das expressões genéricas em termos dos coeficientes  $C_i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) obtêm-se conjuntos de soluções associadas a soluções constantes

ou expressões demasiadamente extensas e de difícil análise. No entanto, com a utilização directa dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  e  $\tau_s$  no cálculo computacional, conseguimos identificar cinco conjuntos de soluções para o sistema algébrico e não linear associado ao método de expansão  $G'/G$ .

- O primeiro e segundo conjuntos de soluções são dados por

$$S_1^\pm = \left\{ (a_c, c, \varrho, \gamma, \alpha_{-2}, \dots, \alpha_2) \in \mathbb{R}^9 : a_c^2 = -\frac{45\alpha\beta_1 - 10 + 30\tau_s \pm W_0}{W_1}, c^2 = \frac{5}{2}a_c^2, \right. \\ \left. \varrho = 0, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha_{-1} = \frac{(\varepsilon\alpha_0 + 3)\gamma}{\varepsilon}, \alpha_0 \in \mathbb{R}, \alpha_i = 0, i \in \{-2, 1, 2\} \right\}, \quad (5.229)$$

desde que sejam satisfeitas as condições seguintes:

$$W_1 \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{45\alpha\beta_1 - 10 + 30\tau_s \pm W_0}{W_1} \leq 0. \quad (5.230)$$

Em  $S_1^\pm$  assim como nos conjuntos seguintes  $S_2^\pm$  temos que

$$W_0 = (2025\alpha^2\beta_1^2 - 20700\alpha\beta_1 - 7820 - 11880\beta_3 - 89100\beta_3\alpha^2\beta_1 + \\ + 14850\beta_3\beta_2\alpha^2 - 29700\beta_3\alpha\beta_1 - 29700\beta_3\beta_2\alpha + 19200\tau_s + \\ + 62100\tau_s\alpha\beta_1 + 900\tau_s^2 + 11880\beta_3\beta_2 + 89100\alpha^2\beta_1)^{1/2}, \quad (5.231)$$

bem como,

$$W_1 = (-8 - 12\beta_3 - 90\beta_3\alpha^2\beta_1 + 15\beta_3\beta_2\alpha^2 + 60\tau_s\alpha\beta_1 - \\ - 20\alpha\beta_1 - 30\beta_3\alpha\beta_1 - 30\beta_3\beta_2\alpha + 20\tau_s + 12\beta_3\beta_2 + 90\alpha^2\beta_1)\gamma^2\mu^2. \quad (5.232)$$

Neste caso, as soluções da equação característica (5.204) são dadas por  $r_1 = 0$  e  $r_2 = -\gamma$ . Assim, a solução geral da equação diferencial de segunda ordem descrita por (5.203) é dada por  $G(\xi) = K_{n1} + K_{n2}e^{-\gamma\xi}$ . Consequentemente, obtemos a solução do tipo onda de translação seguinte:

$$\eta(\xi) = -\frac{\alpha_{-1}}{\gamma} \left( \frac{e^{\gamma\xi}}{K_{21}} + 1 \right) + \alpha_0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, K_{21} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (5.233)$$

- O terceiro e quarto conjuntos de soluções são dados por

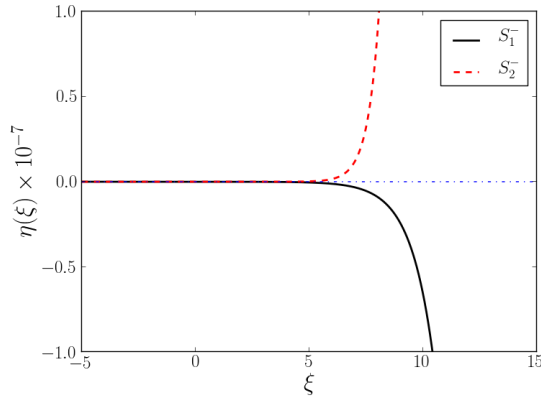
$$S_2^\pm = \left\{ (a_c, c, \varrho, \gamma, \alpha_{-2}, \dots, \alpha_2) \in \mathbb{R}^9 : a_c^2 = -\frac{45\alpha\beta_1 - 10 + 30\tau_s \pm W_0}{4W_1}, c^2 = \frac{5}{2}a_c^2, \right. \\ \left. \varrho = 0, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha_{-2} = \frac{\gamma^2(\varepsilon\alpha_0 + 3)}{\varepsilon}, \alpha_{-1} = \frac{2\gamma(\varepsilon\alpha_0 + 3)}{\varepsilon}, \alpha_0 \in \mathbb{R}, \alpha_i = 0, i \in \{1, 2\} \right\}, \quad (5.234)$$

desde que sejam satisfeitas as condições (5.230).

Mais uma vez, temos que  $\varrho = 0$  e  $\gamma \neq 0$  e as soluções da equação característica (5.204) são dadas por  $r_1 = 0$  e  $r_2 = -\gamma$ . Logo, a solução geral da equação diferencial de segunda ordem descrita por (5.203) também é dada por  $G(\xi) = K_{n1} + K_{n2}e^{-\gamma\xi}$ . A solução do tipo onda de translação  $\eta(\xi)$  é dada da forma seguinte:

$$\eta(\xi) = \alpha_0 - \frac{\alpha_{-1}}{\gamma} \left( \frac{e^{\gamma\xi}}{K_{21}} + 1 \right) + \frac{\alpha_{-2}}{\gamma^2} \left( \frac{e^{\gamma\xi}}{K_{21}} + 1 \right)^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, K_{21} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (5.235)$$

Note-se que em ambos os conjuntos de soluções a velocidade de propagação da onda de translação é dada pela relação  $c^2 = \frac{5}{2}a_c^2$ . Para além disto, frisamos que as condições de admissibilidade definidas por (5.230) são verificadas para certos valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e  $\tau_s$ . Por exemplo, se  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = (-15/28)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$  e  $\tau_s = 0$  (Padé de ordem [2, 4]; ver subsecção 5.3.2.2) os conjuntos  $S_1^-$  e  $S_2^-$  têm soluções admissíveis. Na figura 5.18 apresentamos as soluções do tipo onda de translação dadas por (5.229)–(5.232) para os conjuntos  $S_1^-$  e  $S_2^-$  e para os valores de  $\alpha$ ,  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e  $\tau_s$  dados anteriormente. Em todos os casos, consideramos  $\alpha_0 = 1$  e os restantes parâmetros livres são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $\gamma = 1$  assim como  $K_{21} = 1$ . Observamos que as soluções aqui apresentadas são de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ .



**Figura 5.18:** Soluções do tipo onda de translação,  $\eta(\xi)$ , como função de  $\xi = a_c X - cT$  dadas por (5.229)–(5.232) e associadas aos conjuntos  $S_1^-$  e  $S_2^-$  com  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = (-15/28)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = 1$  e  $\tau_s = 0$ . Em todos os casos consideramos que  $\alpha_0 = 1$  e que os restantes parâmetros livres são dados por  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $\gamma = 1$  assim como  $K_{21} = 1$ . A solução trivial ou nula é também representada.

Para além disto, pode-se também calcular um conjunto de soluções de natureza distinta das soluções obtidas anteriormente para a equação (5.228). No entanto, dada a complexidade e extensão dos conjuntos de soluções escritos na forma genérica, a apresentação das soluções só é possível considerando valores determinados para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Pelos mesmos motivos, torna-se vantajoso considerar a mudança de variável  $\bar{\eta}(\xi) = \eta(\xi) - \varepsilon\eta(\xi)^2 + \varepsilon^2\eta(\xi)^3$  na equação diferencial (5.228). Mais concretamente e com o objectivo de enfatizar a relevância destes parâmetros e de  $\tau_s$ , consideramos dois conjuntos de valores para  $\alpha$  e  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Em primeiro lugar, toma-se  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = (-15/28)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$  e  $\beta_3 = 1$ . Desta forma e assumindo-se que  $\tau_s = 0$ , reproduz-se o desenvolvimento de Padé de ordem [2, 4] da velocidade de fase do problema completamente linear de Airy (ver subsecção 5.3.2.2).

- Neste caso, o conjunto de soluções para o sistema algébrico é dado por

$$S_1^{[2,4]} = \left\{ (a_c, c, \varrho, \gamma, \alpha_{-2}, \dots, \alpha_2) \in \mathbb{R}^9 : a_c^2 = -\frac{21(40\tau_s - 3)^2}{256\varepsilon^2\alpha_{-1}^2\mu^2(69\tau_s - 2)}, \right. \\ c^2 = -\frac{105(40\tau_s - 3)^2\tau_s}{128\varepsilon^2\alpha_{-1}^2\mu^2(69\tau_s - 2)}, \varrho = \frac{16\varepsilon^2\alpha_{-1}^2}{40\tau_s - 3}, \gamma = -\frac{8\varepsilon\alpha_{-1}}{40\tau_s - 3}, \\ \left. \alpha_{-1} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha_0 = -\frac{1}{2\varepsilon}, \alpha_1 = \frac{40\tau_s - 3}{16\varepsilon^2\alpha_{-1}}, \alpha_i = 0, i \in \{-2, 2\} \right\}. \quad (5.236)$$

Deste conjunto de soluções, só resultam soluções admissíveis para a equação (5.228) no caso em que  $0 \leq \tau_s < 2/69$ . No entanto, quando o número de Bond toma o valor de  $\tau_s = 0$  a onda resultante está associada a um estado estacionário ( $c = 0$ , ver (5.236)).

Em segundo lugar, considera-se que  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = -(5/9)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$  e  $\beta_3 = (10995/10934) - (15/5467)(1 - \sqrt{5}/5)$ . Deste modo e assumindo-se que  $\tau_s = 0$ , o desenvolvimento de Padé de ordem  $[4, 4]$  da velocidade de fase do problema completamente linear de Airy é reproduzido.

- Neste caso, tem-se o conjunto de soluções dado por

$$\begin{aligned} S_1^{[4,4]} &= \left\{ (a_c, c, \varrho, \gamma, \alpha_{-2}, \dots, \alpha_2) \in \mathbb{R}^9 : a_c^2 = -\frac{3(420\tau_s - 41)^2}{\varepsilon^2 1280 \alpha_{-1}^2 \mu^2 (285\tau_s - 11)}, \right. \\ c^2 &= -\frac{(420\tau_s - 41)^2 (1 + 105\tau_s)}{6400 \varepsilon^2 \alpha_{-1}^2 \mu^2 (285\tau_s - 11)}, \varrho = \frac{240 \varepsilon^2 \alpha_{-1}^2}{420\tau_s - 41}, \gamma = -\frac{120 \varepsilon \alpha_{-1}}{420\tau_s - 41}, \\ &\left. \alpha_{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha_0 = -\frac{1}{2\varepsilon}, \alpha_1 = \frac{420\tau_s - 41}{240 \varepsilon^2 \alpha_{-1}}, \alpha_i = 0, i \in \{-2, 2\} \right\}. \end{aligned} \quad (5.237)$$

Note-se que deste conjunto de soluções apenas resultam soluções admissíveis para a equação (5.228) no caso em que  $0 \leq \tau_s < 11/285$ . Contudo, salienta-se que se  $\tau_s = 0$  e, contrariamente ao caso anterior, temos uma onda de translação com velocidade de propagação não nula, i.e.,  $c \neq 0$  (ver (5.237)).

Em ambos os casos, pode-se mostrar que a equação característica (5.204) admite as soluções reais dadas por

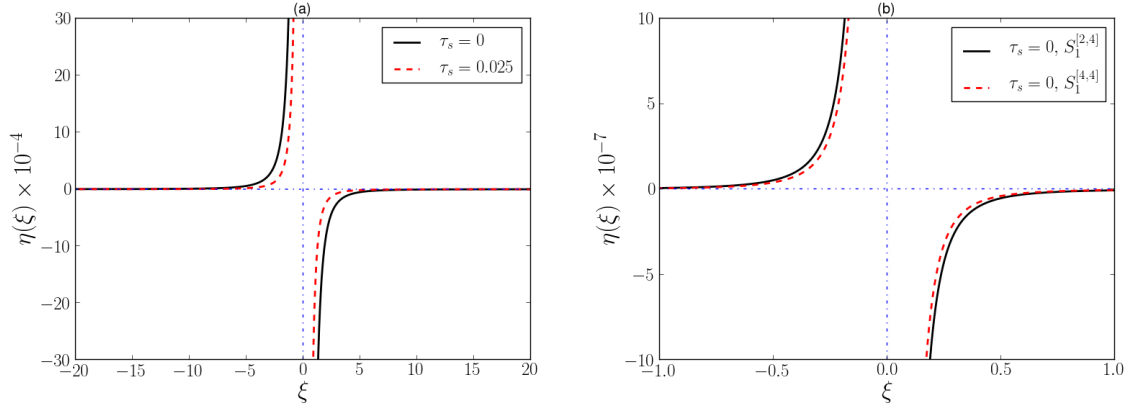
$$r_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\varrho}}{2}, \quad r_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\varrho}}{2}, \quad (5.238)$$

com  $\gamma$  e  $\varrho$  dados por (5.236) e (5.237) e com os valores de  $\alpha$  e de  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), mencionados anteriormente, para cada um dos conjuntos  $S_1^{[2,4]}$  e  $S_1^{[4,4]}$ . Consequentemente, a solução geral de (5.204) é da forma  $G(\xi) = K_{n_1} e^{r_1 \xi} + K_{n_2} e^{r_2 \xi}$ . Portanto, usando-se a transformação  $\eta(\xi) \sim \bar{\eta}(\xi) + \varepsilon \bar{\eta}(\xi)^2 + \varepsilon^2 \bar{\eta}(\xi)^3$ , obtém-se a classe de soluções do tipo onda de translação dada por

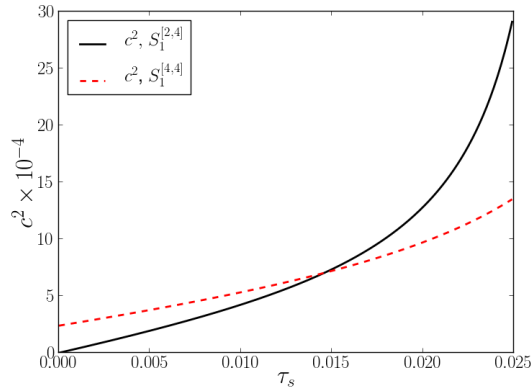
$$\begin{aligned} \eta(\xi) \sim \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \left[ \alpha_0 + \alpha_{-1} \left( \frac{e^{r_1 \xi} + K_{21} e^{r_2 \xi}}{r_1 e^{r_1 \xi} + r_2 K_{21} e^{r_2 \xi}} \right) + \alpha_1 \left( \frac{r_1 e^{r_1 \xi} + r_2 K_{21} e^{r_2 \xi}}{e^{r_1 \xi} + K_{21} e^{r_2 \xi}} \right) \right]^{i+1}, \\ \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{r_1 - r_2} \log(-K_{21}), K_{21} < 0 \right\}. \end{aligned} \quad (5.239)$$

Nas figuras 5.19 (a) e 5.19 (b), mostramos as soluções dadas por (5.236) e (5.239) bem como (5.237) e (5.239). Note-se que o limite destas soluções do tipo onda de translação quando  $|\xi| \rightarrow +\infty$  é dado por  $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \eta(\xi) = 0$ . Na figura 5.19 (a), considera-se as soluções dadas por (5.236) ( $S_1^{[2,4]}$ ) e (5.239) para  $\tau_s = 0$  e  $\tau_s = 0.025$ . Na figura 5.19 (b), comparam-se os gráficos das soluções associadas aos conjuntos (5.236) ( $S_1^{[2,4]}$ ) e (5.237) ( $S_1^{[4,4]}$ ) com  $\tau_s = 0$ . Em ambos os casos, os restantes parâmetros livres são dados por  $\alpha_{-1} = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K_{21} = -1$ .

Observamos que as classes de soluções associadas aos conjuntos dados por (5.236), (5.237) e (5.239) têm gráficos análogos. No entanto, as velocidades de propagação das respectivas ondas são diferentes. Mais concretamente, mostramos na figura 5.20 os quadrados das velocidades de propagação da onda associados aos conjuntos de soluções dados por (5.236) ( $S_1^{[2,4]}$ ) e (5.237) ( $S_1^{[4,4]}$ ) como função do número de Bond  $\tau_s$ .



**Figura 5.19:** Soluções do tipo onda de translação  $\eta(\xi)$  como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Nas figuras (a) e (b) mostramos as soluções dadas por (5.236) e (5.239) bem como (5.237) e (5.239). As soluções dadas por (5.236) ( $S_1^{[2,4]}$ ) e (5.239) para  $\tau_s = 0$  e  $\tau_s = 0.025$  são ilustradas na figura (a). As soluções associadas aos conjuntos (5.236) ( $S_1^{[2,4]}$ ) e (5.237) ( $S_1^{[4,4]}$ ) para  $\tau_s = 0$  são representadas na figura (b). Em ambos os casos, os restantes parâmetros livres são dados por  $\alpha_{-1} = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K_{21} = -1$ . As assíntotas verticais aos gráficos juntamente com a solução trivial ou nula são também ilustradas.



**Figura 5.20:** Quadrados das velocidades de propagação da onda  $c^2$  associados aos conjuntos de soluções dados por (5.236) ( $S_1^{[2,4]}$ ) e (5.237) ( $S_1^{[4,4]}$ ) como função do número de Bond  $\tau_s$ . Em ambos os casos, os parâmetros livres considerados são  $\alpha_{-1} = 1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K_{21} = -1$ .

#### 5.7.2.4 Soluções do tipo onda de translação para a equação diferencial ordinária e não linear de ordem $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon\mu^2)$

O método de expansão  $G'/G$  é aplicado aqui para deduzir soluções analíticas para a equação (5.200). Mais uma vez, através da técnica do balanço homogêneo, mencionada anteriormente, temos que  $m = 2$ . O sistema algébrico e não linear associado a (5.206) tem 17 equações ( $N = 8$ ) e 10 incógnitas. Conseguimos identificar dois conjuntos de soluções para este sistema algébrico e não linear, bem como as respectivas classes de soluções do tipo onda de translação. Uma vez que as expressões das soluções genéricas são demasiado extensas, apenas se consideram aqui valores de  $\alpha$  e de  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) tais que o desenvolvimento de Padé de ordem  $[2, 4]$  da velocidade de fase do problema completamente linear de Airy é

reproduzido (assumindo-se que  $\tau_s = 0$ ). Mais concretamente, utilizam-se os valores seguintes:  $\alpha = 1 - \sqrt{5}/5$ ,  $\beta_1 = (-15/28)(1 + \sqrt{5}/5)$ ,  $\beta_2 = 0$  e  $\beta_3 = 1$ . Deste modo, os dois conjuntos de soluções para o sistema algébrico e não linear são dados por

$$\begin{aligned}
S_1^\pm &= \{(a_c, c, \varrho, \gamma, \alpha_{-2}, \dots, \alpha_2, K_e) \in \mathbb{R}^{10} : a_c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
c^2 &= a_c^2(1 + 3\varepsilon\alpha_0 + 3\varepsilon^2\alpha_0^2), \varrho = 0, \gamma = 0, \alpha_0 \in \mathbb{R}, \alpha_2 = \frac{-2\mu^2(W_2 \pm W_3)}{21\varepsilon W_0 W_1}, \\
\alpha_i &= 0, i \in \{-2, -1, 1\}, K_e = -\frac{\mu^2(W_4 \mp W_3)}{208W_1(a_c^2 - ca_c)}, \\
W_0 &= (-5 + \varepsilon\alpha_0(4\varepsilon^2\alpha_0^2 - 10)), W_1 = (-3 + 4\varepsilon\alpha_0(1 + \varepsilon\alpha_0)), \\
W_2 &= 1080a_c^2 - 520ca_c - 912\varepsilon^4\alpha_0^4a_c^2 + 1416\varepsilon^3a_c^2\alpha_0^3 + 3420\varepsilon^2a_c^2\alpha_0^2 - \\
&- 912\varepsilon^5\alpha_0^5a_c^2 + 3300\varepsilon a_c^2\alpha_0 - 4725a_c^2\tau_s + 416a_c c \varepsilon^3\alpha_0^3 - 1040\varepsilon\alpha_0 ca_c + \\
&\quad + 3780\varepsilon^3\alpha_0^3a_c^2\tau_s - 9450a_c^2\varepsilon\tau_s\alpha_0, \\
W_3 &= \left( W_0^2(41400\varepsilon^4\alpha_0^4a_c^4 + 82800a_c^4\varepsilon^3\alpha_0^3 - 395640a_c^4\varepsilon^2\alpha_0^2\tau_s - \right. \\
&- 47424\varepsilon^2\alpha_0^2a_c^3c + 144306\varepsilon^2\alpha_0^2a_c^4 + 102906\varepsilon\alpha_0a_c^4 - 395640a_c^4\varepsilon\tau_s\alpha_0 - 47424\varepsilon\alpha_0a_c^3c + \\
&\left. + 49302a_c^4 - 44928a_c^3c + 196560a_c^3c\tau_s + 893025\tau_s^2a_c^4 - 434700\tau_s a_c^4 + 10816c^2a_c^2) \right)^{1/2}, \\
W_4 &= 416\varepsilon\alpha_0a_c c + 832\varepsilon^2\alpha_0^2a_c c + 520a_c c + 416\varepsilon^3\alpha_0^3a_c c + 420\varepsilon^3\alpha_0^3a_c^2\tau_s + \\
&\quad + 7140a_c^2\tau_s\varepsilon\alpha_0 - 870a_c^2 + 5040\varepsilon^2\alpha_0^2a_c^2\tau_s + 4095a_c^2\tau_s - 3810\varepsilon^2a_c^2\alpha_0^2 - \\
&\quad - 1486\varepsilon a_c^2\alpha_0 - 5160\varepsilon^4\alpha_0^4a_c^2 - 5912\varepsilon^3\alpha_0^3a_c^2 - 1584\varepsilon^5\alpha_0^5a_c^2 \}. \quad (5.240)
\end{aligned}$$

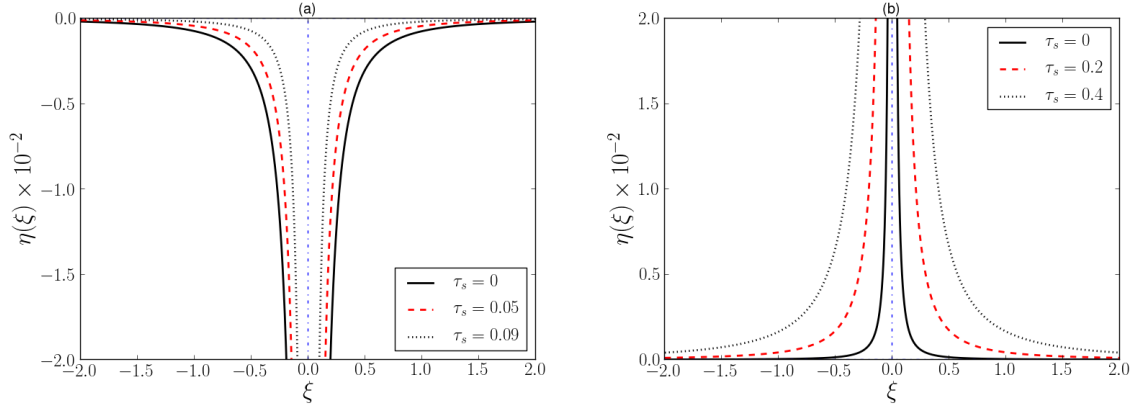
Refere-se que em  $S_1^\pm$  é necessário que  $a_c \neq c$ ,  $W_0 \neq 0$  e  $W_1 \neq 0$ . Para além disto, o radicando da raiz quadrada que se encontra na equação que define o coeficiente  $W_3$  deve ser não negativo. Salienta-se que se se considerar  $a_c = 1$  bem como  $\alpha_0 = 1/10$ , por exemplo, então pode-se garantir que  $\alpha_2$  e  $K_e$  são números reais, para certos valores de  $\tau_s$ . Note-se que em  $S_1^\pm$  tem-se que  $\varrho = \gamma = 0$ . Deste modo, a solução da equação (5.204) é dada por  $r = 0$ , resultando  $G(\xi) = K_{n1}\xi + K_{n2}$ . Consequentemente, a família de soluções do tipo onda de translação,  $\eta(\xi)$ , é dada por

$$\eta(\xi) = \alpha_0 + \alpha_2 \left( \frac{1}{K_{21} + \xi} \right)^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus \{-K_{21}\}. \quad (5.241)$$

Na figura 5.21 mostram-se as soluções do tipo onda de translação associadas aos conjuntos  $S_1^\pm$  e dadas por (5.241). Na figura 5.21 (a), algumas das soluções negativas e associadas a  $S_1^+$  para  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_s = 0.05$  e  $\tau_s = 0.09$  são ilustradas. Na figura 5.21 (b), representam-se as soluções positivas correspondentes a  $S_1^-$  para  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_s = 0.2$  e  $\tau_s = 0.4$ . Em ambos os casos, os valores dos restantes parâmetros livres e de  $K_{21}$  são dados por  $\alpha_0 = 0$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K_{21} = 0$ .

## 5.8 Conclusões sumárias

Neste capítulo, propusemos uma nova equação de evolução não linear com derivadas parciais de sexta-ordem (EENLDP) do tipo Boussinesq para a elevação da superfície de uma onda. A partir da EENLDP proposta e usando-se, entre outras, uma transformação de Galileu, obteve-se uma equação diferencial ordinária (EDO) não linear de sexta-ordem também para a elevação da superfície da onda.



**Figura 5.21:** Soluções do tipo onda de translação,  $\eta(\xi)$ , como função de  $\xi = a_c X - cT$ . Na figura (a) mostram-se algumas das soluções negativas e associadas a  $S_1^+$  para  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_s = 0.05$  e  $\tau_s = 0.09$ . Soluções positivas e correspondentes a  $S_1^-$  são ilustradas na figura (b) para  $\tau_s = 0$ ,  $\tau_s = 0.2$  e  $\tau_s = 0.4$ . Em ambos os casos, os valores dos restantes parâmetros livres e de  $K_{21}$  são dados por  $\alpha_0 = 0$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$  e  $K_{21} = 0$ . A solução trivial ou nula assim como uma assíntota vertical aos gráficos também são representadas.

Métodos analíticos foram usados para deduzir soluções exactas do tipo onda de translação para esta EDO não linear. Mais concretamente, aplicou-se o método de integração directa às equações de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ . Para a equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$  deduzimos soluções exactas do tipo solitão contendo o termo clássico da forma do quadrado de uma secante hiperbólica, i.e.,  $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \operatorname{sech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K)$  com  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}_3$  constantes reais determinadas anteriormente e  $K$  uma constante arbitrária de integração. Note-se que estas soluções estão associadas a ondas de depressão para certos valores da velocidade de propagação da onda. Relativamente à equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ , deduziu-se uma nova solução do tipo solitão. Mostrou-se que esta nova solução é o limite uniforme de uma série geométrica com razão proporcional à solução clássica da forma  $\operatorname{sech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K)$ . Através da utilização do método analítico descrito na secção (5.6) também se deduziram soluções exactas de tipos predefinidos para as EDOs não lineares de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2, \mu^4)$ . Mais especificamente, deduziram-se soluções da forma  $\mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^4(\pm \mathcal{B} \xi + K)$  e  $\mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^2(\pm \mathcal{B} \xi + K)$  para as equações de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2, \mu^4)$ , respectivamente. Note-se que  $\mathcal{A}_0$  e  $\mathcal{B}$  são constantes reais que foram determinadas anteriormente e que  $K$  é uma constante arbitrária de integração. Em particular, verificou-se que a razão entre a amplitude  $\mathcal{A}_0$  desta nova onda da forma  $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^4(\pm \mathcal{B} \xi + K)$  e a amplitude  $\mathcal{A}$  do solitão clássico associado à equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$  é igual a  $\frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}} = \frac{35}{36}$  para os mesmos valores de  $\theta$  e de  $\varepsilon$ .

O método de expansão  $G'/G$  foi utilizado para obter algumas classes de soluções exactas do tipo onda de translação para as equações de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon \mu^2)$ . Também mostrámos que as famílias de soluções do tipo onda de translação aqui apresentadas estão associadas à escolha dos parâmetros livres  $\alpha$  e  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bem como do número de Bond  $\tau_s$ .



## Capítulo 6

# Conclusões finais e trabalho futuro

### 6.1 Conclusões finais

Nesta dissertação investigámos e desenvolvemos alguns modelos analíticos e numéricos para a propagação e a geração de ondas marítimas de superfície.

No segundo capítulo, estendeu-se o modelo BEP de Zhao et al. (2004) de forma a incluir efeitos dissipativos, bem como diferentes mecanismos de geração de onda. Mais concretamente, considerámos a geração de onda pelo movimento do fundo impermeável da região ocupada pelo fluido e por meio de funções de fonte externas. Estudou-se também a influência dos termos dissipativos nalgumas propriedades dispersivas, em particular, na velocidade de fase. Mostrámos a existência de valores de corte para o número de onda, de forma a que as ondas de menor comprimento não se propaguem. A partir de uma análise matricial baseada no modelo linearizado, concluiu-se também que o modelo BEP/ZTC não é susceptível a instabilidades do tipo I ou II, quando ocorrem gradientes acentuados da batimetria e quando se consideram malhas finas. Por outro lado, o modelo convencional baseado no potencial da velocidade do fluido apresenta instabilidades para certas combinações dos parâmetros  $l$ ,  $h_m$  e  $\Delta x$ . O espectro dos valores próprios deste modelo apresenta estruturas interessantes revelando altas taxas de crescimento das soluções instáveis. Assim, este modelo só deverá ser aplicado a problemas físicos associados a suaves e pequenas variações da batimetria. Uma vez que usámos a mesma discretização numérica para o modelo ZTC e para o modelo convencional do potencial da velocidade do fluido, alguns dos modos de instabilidade inerentes ao último modelo devem ser intrínsecos às equações diferenciais em causa e não aos esquemas numéricos.

As equações estendidas de ZTC foram usadas para modelar cinco problemas físicos diferentes: a evolução de ondas solitárias sobre barras submersas; a evolução de uma bossa Gaussiana numa região quadrada; a evolução de uma onda periódica num porto de abrigo; a geração e a propagação de uma onda em virtude da movimentação do fundo da região ocupada pelo fluido e, por último, a propagação de um tsunami na costa portuguesa. Estas equações foram discretizadas com respeito às variáveis espaciais usando-se elementos de Lagrange  $P_1$ . Por outro lado, a discretização da variável temporal foi feita recorrendo a um esquema de predição-correcção inicializado por um método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem.

No primeiro problema considerado, concluímos que o modelo numérico é também estável quando se dá a interacção entre a onda incidente e a onda reflectida sobre a barra submersa, bem como numa das fronteiras do domínio computacional. O efeito de empolamento da onda sobre a barra submersa foi claramente observado, tanto para a onda incidente como para a onda reflectida. Compararam-se as soluções dos modelos fracamente não lineares designados por BEP/ZTC e BEV/Nwogu, para o caso da barra triangular submersa. Concluímos que o

modelo ZTC é menos susceptível a instabilidades que o modelo de Nwogu para a discretização de elementos finitos considerada.

No segundo teste, a evolução de uma bossa Gaussiana foi simulada numa região quadrada. Uma boa concordância foi obtida entre os resultados numéricos do modelo ZTC e aqueles apresentados no manual do código FUNWAVE. Testes de refinamento das malhas foram apresentados de modo a garantir a precisão e a convergência do esquema numérico.

No problema do porto de abrigo, verificou-se que a interacção entre as ondas reflectidas e as ondas incidentes, perto da entrada do porto, pode gerar ondas com amplitudes e velocidades que podem ter valores três vezes superiores àqueles das ondas incidentes.

No quarto exemplo numérico considerado, referimos que a onda dianteira gerada pelo fundo móvel se propaga com uma velocidade superior à do fundo. Portanto, um regime subcrítico de velocidades foi observado, o qual está associado ao movimento do fundo. Uma boa concordância foi obtida entre as soluções numéricas apresentadas neste exemplo e outras provenientes de outros modelos (ver `dolfwave/demo`).

No exemplo da geração e da propagação de um tsunami na costa portuguesa, observou-se que o esquema numérico utilizado é bastante estável perante gradientes acentuados da batimetria e para fortes interacções entre ondas reflectidas e ondas incidentes. Concluiu-se que o modelo numérico baseado no método dos elementos finitos apresentado é suficientemente eficiente e robusto para a simulação de tsunamis à escala oceânica. Note-se que através da utilização de cálculo em paralelo, o tempo computacional foi substancialmente reduzido.

Dos testes numéricos apresentados, podemos concluir que as bibliotecas DOLFIN, UFL e FFC do projecto FEniCS, permitem a implementação de algoritmos robustos e eficientes apropriados à modelação de ondas marítimas de superfície.

No entanto, note-se que efeitos fortemente não lineares, e.g., ondas de depressão que se estendem até ao fundo do mar, podem causar instabilidades no modelo não linear apresentado. Estes efeitos são certamente encontrados em problemas físicos como a inundação de uma praia por um tsunami. Esquemas para fronteiras móveis para o tratamento destes problemas não estão ainda implementados no código DOLFWAVE que desenvolvemos durante este trabalho de investigação científica. Este código tem como principal objectivo a criação de uma ferramenta baseada no método dos elementos finitos, de modo a que esta forneça uma plataforma para análise, desenvolvimento e simulação de modelos numéricos para ondas marítimas de superfície. Esta aplicação é baseada nas bibliotecas do projecto FEniCS e o estado actual do código DOLFWAVE, bem como várias simulações numéricas, podem ser vistos em <http://ptmat.fc.ul.pt/~ndl> e <https://launchpad.net/dolfwave>.

No terceiro capítulo, um novo modelo para ondas marítimas de superfície foi desenvolvido. Este modelo é baseado numa classe de equações do tipo Boussinesq de ordem arbitrária incluindo um termo extra de ordem  $O(\mu^{2n+2})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Efeitos dissipativos assim como a geração de onda por meio da movimentação de um fundo impermeável e móvel da região ocupada pelo fluido foram considerados. Características melhoradas para os efeitos dispersivos e para o gradiente de empolamento da onda bem como boas propriedades de estabilidade foram obtidas. Estes melhoramentos devem-se à inclusão do termo extra de ordem  $O(\mu^{2n+2})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) no desenvolvimento assintótico do potencial da velocidade do fluido e à introdução do parâmetro livre  $\lambda_s$  no potencial transformado da velocidade do fluido. A influência de termos dissipativos nas propriedades de dispersão lineares, i.e., na velocidade de fase, foram também investigadas. Para além disto, a consistência da relação de dispersão foi estudada e uma condição do tipo CFL para o problema linearizado com batimetria constante foi deduzida.

Apresentámos um esquema C/DG-FEM para a resolução numérica do sistema melhorado de quarta ordem do tipo Boussinesq. Tanto quanto saibamos, este tipo de esquema foi utilizado

neste trabalho pela primeira vez para a resolução das equações do tipo Boussinesq. Este método usa elementos de Lagrange  $P_2$  para a discretização das equações com respeito às variáveis espaciais. Desta forma, domínios com geometrias complexas podem ser discretizados, os quais são difíceis de tratar com esquemas baseados, por exemplo, em métodos de diferenças finitas. Por outro lado, o esquema C/DG-FEM foi aplicado directamente ao sistema estendido do tipo Boussinesq aqui proposto. Deste modo, variáveis auxiliares não foram utilizadas, o que acontece, por exemplo, em formulações baseadas no método de elementos finitos mistos. Note-se que este esquema numérico pode ser dispendioso quanto ao tempo de cálculo, especialmente, nos problemas físicos com um fundo da região ocupada pelo fluido dependente do tempo. Este facto deve-se à complexidade das funções de fonte, à necessidade de agrupar e resolver os sistemas de equações em todos os passos de tempo, bem como ao cálculo dos termos de penalização. No que diz respeito à discretização das equações com respeito à variável temporal, utilizou-se um esquema de predição-correcção de quarta ordem inicializado por um método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem.

Com o objectivo de validar o método C/DG-FEM proposto, vários testes numéricos foram apresentados. Uma boa concordância foi observada entre as soluções provenientes do modelo aqui desenvolvido e as soluções obtidas através dos outros modelos discutidos neste trabalho. No primeiro teste foi simulada a evolução de uma bossa Gaussiana num domínio quadrado. Observou-se uma boa concordância entre as soluções do método aqui proposto e aquelas provenientes do modelo BEP de segunda ordem de Zhao et al. (2004) bem como do modelo BEV de Woo e Liu (2004a). Para além disto, testes de refinamento da malha foram realizados de forma a garantir a convergência e a precisão do esquema numérico. A influência dos coeficientes associados aos termos de penalização na precisão do método numérico foi também investigada. Concluiu-se que valores mais elevados dos coeficientes de penalização aumentam a estabilidade do método mas diminuem a sua precisão. Por outro lado, o modelo numérico torna-se mais preciso mas menos estável quando são considerados valores menores dos coeficientes de penalização. Uma vez que os termos de penalização dependem não só dos seus coeficientes, mas também das dimensões e da geometria dos elementos, malhas diferentes devem estar associadas a valores distintos dos coeficientes ideais de penalização  $\tau$ .

No segundo e no terceiro teste, a propagação de ondas geradas pelo deslocamento de um fundo impermeável da região ocupada pelo fluido foi considerada. Mais concretamente, no segundo teste simulámos a evolução de uma onda gerada por um deslizamento de terra subaquático. Neste caso as soluções do modelo de quarta ordem proposto e as soluções apresentadas em Fuhrman e Madsen (2009) divergem quando a onda dianteira alcança zonas de maior profundidade. Esta divergência é expectável uma vez que os modelos e condições de fronteira considerados são distintos. No terceiro e último exemplo numérico, simulou-se uma onda gerada por um objecto móvel que se desloca com uma velocidade constante num fundo horizontal. Considerámos os casos 2D e 3D. Referimos que a onda frontal se desloca com uma velocidade superior à do objecto móvel. Desta forma, um regime subcrítico de velocidades foi observado, o qual está associado ao movimento do objecto. Pudemos também concluir que o sistema de equações diferenciais não lineares e de quarta ordem proposto, o qual inclui o termo extra de ordem  $O(\mu^4)$ , é menos susceptível a instabilidades que os outros sistemas investigados e que não incluem este termo extra. Uma vez que se usaram as mesmas discretizações por elementos finitos para o modelo 4o-W-CDG-P2, com e sem o termo extra de ordem  $O(\mu^4)$ , concluiu-se que alguns dos modos de onda instáveis devem ser intrínsecos ao sistema de equações diferenciais e não ao esquema numérico. Por outro lado, podem ocorrer instabilidades provocadas pela violação de alguma condição do tipo CFL. Neste caso, o esquema C/DG-FEM parece mais estável que o método dos elementos finitos clássico aqui

usado nos modelos 2o-ZTC-P1 e 2o-ZTC-P2.

Dos testes numéricos apresentados, concluímos que o modelo por nós desenvolvido é apropriado para modelar ondas marítimas de superfície, conduzindo a algoritmos eficientes e robustos.

No quarto capítulo, deduziu-se e estudou-se uma classe de equações do tipo KdV-BBM com alguns parâmetros livres. Uma solução analítica do tipo solitão para a equação KdV-BBM proposta foi deduzida. A validade deste tipo de solução foi discutida em termos da velocidade de propagação da onda e dos valores dos parâmetros livres introduzidos na equação. Por exemplo, mostrou-se que a solução do tipo solitão para o modelo KdV-BBM com características dispersivas melhoradas ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) requer que a velocidade de propagação da onda  $c$  pertença a  $\left] -\infty, \frac{9}{19} \right[ \cup [1, +\infty[$ . Para além disto, uma onda de depressão foi obtida quando  $c \in \left] -\infty, \frac{9}{19} \right[$ . Apresentámos algumas propriedades dispersivas deste modelo linearizado. Mostrou-se ainda que existem certos valores do parâmetro de Nwogu  $\alpha$  para os quais o erro entre os potenciais da velocidade do fluido avaliados no instante inicial dos modelos lineares de KdV-BBM e de Airy é da ordem  $O(\mu^4)$ . Mais concretamente, os valores de  $\alpha$  encontrados que pertencem ao intervalo  $[0, 1]$  são  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ . A ordem deste erro é a mesma da do erro de truncatura do modelo KdV-BBM aqui proposto. Um esquema C/DG-FEM foi proposto para resolver estas equações do tipo KdV-BBM. Dois factores de peso assim como um parâmetro livre foram introduzidos no esquema C/DG-FEM de modo a obter consistência da relação de dispersão. Deduziu-se uma condição do tipo CFL para o esquema numérico associado às equações KdV e KdV-BBM linearizadas. A importância do coeficiente de penalização na relação de dispersão do esquema numérico foi analisada. Em particular, mostrou-se que o parâmetro de penalização actua como um filtro numérico para ondas de menor comprimento.

As equações KdV e KdV-BBM foram usadas para modelar a evolução de uma onda solitária bem como a interacção entre dois solitões. No primeiro caso, observámos que para valores pequenos do parâmetro de penalização  $\tau$  o modelo KdV é instável e as suas soluções explodem, enquanto que para o modelo KdV-BBM isto não acontece. Também comparámos as soluções analíticas com as numéricas. Uma boa concordância entre estas soluções foi obtida. No último teste numérico, a interacção entre os dois solitões usando o modelo KdV não foi possível de simular mesmo para valores grandes de  $\tau$ . Isto pode dever-se ao facto de não ter sido satisfeita alguma condição do tipo CFL. Por outro lado, esta interacção foi bem simulada usando o modelo KdV-BBM. A partir dos testes numéricos, mostrou-se que a equação KdV-BBM com características dispersivas melhoradas ( $\hat{\delta}_1 = -\frac{19}{60}$  e  $\hat{\delta}_2 = -\frac{3}{20}$ ) é bastante menos susceptível a instabilidades do que a equação KdV ( $\hat{\delta}_1 = 0$  e  $\hat{\delta}_2 = \frac{1}{6}$ ). Para além disto, concluiu-se também que o esquema C/DG-FEM proposto é bastante robusto e apropriado para resolver o modelo KdV-BBM.

Referimos que todos os modelos e testes numéricos abordados nos capítulos 2–4 fazem parte do código DOLFWAVE. Deste modo, mostrou-se que o código DOLFWAVE desenvolvido durante este trabalho de investigação científica é apropriado para a modelação de ondas marítimas de superfície.

Finalmente, no quinto capítulo, propusemos uma nova classe de equações não lineares e de sexta ordem do tipo Boussinesq para a elevação da superfície de uma onda. Esta classe de equações modela a propagação bidireccional de uma onda a uma dimensão horizontal sobre um fundo constante da região ocupada pelo fluido. Efeitos da tensão superficial foram incluídos no modelo proposto. Algumas características dispersivas do modelo linearizado foram estudadas em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) introduzidos na classe de

equações apresentada. Através de uma escolha apropriada destes parâmetros livres foi possível reproduzir os desenvolvimentos de Padé, e.g., de ordem [2, 4] e [4, 4] da velocidade de fase do modelo completamente linear da teoria de Airy.

A partir da equação de Boussinesq proposta e usando-se, entre outras, uma transformação de Galileu, uma nova classe de equações não lineares ordinárias e de sexta ordem foi deduzida para a elevação da superfície da onda. O método de integração directa bem como o método de expansão  $G'/G$  foram utilizados para deduzir soluções exactas do tipo onda de translação para estas equações. Mais concretamente, soluções exactas para as equações não lineares ordinárias de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2, \mu^4)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2, \mu^4, \mu^2\varepsilon)$  foram obtidas. Outros métodos analíticos foram também usados para provar a existência ou a não existência de soluções de tipos predefinidos para as equações diferenciais ordinárias e não lineares de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$ .

Para a equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$ , obtiveram-se soluções exactas do tipo solitão contendo o termo clássico da forma do quadrado de uma secante hiperbólica ( $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A} \operatorname{sech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K)$  com  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}_3$  constantes reais determinadas anteriormente e  $K$  uma constante arbitrária de integração). Note-se que para certos valores da velocidade de propagação da onda conseguiram-se deduzir ondas de depressão da forma referida anteriormente. Este facto deve-se à introdução dos parâmetros livres  $\alpha$  e  $\beta_1$  bem como do número de Bond  $\tau_s$  na equação de Boussinesq aqui considerada. A equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2)$  é também integrável. Neste caso, uma nova solução do tipo solitão foi apresentada. Mostrou-se que esta nova solução é o limite uniforme de uma série geométrica com razão proporcional à solução clássica da forma  $\operatorname{sech}^2(\pm \mathcal{B}_3 \xi + K)$ . Note-se que isto só acontece para certos valores da velocidade de propagação da onda. No entanto, existem outros valores para a velocidade de propagação da onda para os quais esta nova forma de solução existe mas a estrutura composta por solitões clássicos não é preservada em certas regiões do domínio. Soluções exactas das formas  $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^4(\pm \mathcal{B} \xi + K)$  e  $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^2(\pm \mathcal{B} \xi + K)$  foram deduzidas para as EDOs não lineares de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \varepsilon^2, \mu^4)$ , respectivamente. Note-se que  $\mathcal{A}_0$  e  $\mathcal{B}$  são constantes reais determinadas anteriormente e que  $K$  é uma constante arbitrária de integração. Em particular, verificou-se que a razão entre a amplitude  $\mathcal{A}_0$  desta nova onda da forma  $\bar{\eta}(\xi) = \mathcal{A}_0 \operatorname{sech}^4(\pm \mathcal{B} \xi + K)$  e a amplitude  $\mathcal{A}$  do solitão clássico associado à equação de ordem  $O(\mu^2, \varepsilon)$  é igual a  $\frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}} = \frac{35}{36}$  para os mesmos valores de  $\theta$  e de  $\varepsilon$ . O método de expansão  $G'/G$  foi utilizado para obter algumas classes de soluções exactas do tipo onda de translação para as equações de ordens  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4)$ ,  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2)$  e  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon \mu^2)$ . Mostrou-se que as famílias de soluções do tipo onda de translação aqui deduzidas estão associadas à escolha dos parâmetros livres  $\alpha$  e  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bem como do número de Bond  $\tau_s$ .

## 6.2 Trabalho futuro

Relativamente ao segundo capítulo, pretendemos estender o modelo do tipo Boussinesq aí estudado de forma a incluir termos que modelem outros fenómenos da dinâmica das ondas marítimas de superfície. Mais concretamente, deveremos incluir modelos mais adequados à geração de ondas devido a fenómenos sísmicos bem como mecanismos de absorção da energia das ondas devido ao efeito de fricção no fundo do oceano. Com vista à minimização das ondas reflectidas nas fronteiras do domínio computacional, deverão também ser consideradas condições de fronteira de absorção e de radiação assim como do tipo transparente. Para além disto, esquemas numéricos adequados à resolução de modelos com fronteiras móveis devem também ser considerados. Estes modelos são necessários, por exemplo, para a simulação da inundação de zonas secas devido às ondas geradas por tsunamis.

Quanto ao trabalho desenvolvido no terceiro capítulo, apenas os sistemas de equações diferenciais de quarta ordem foram resolvidos numericamente. Com vista à minimização do tempo de cálculo, o código `DOLFWAVE` será estendido de forma a que o método C/DG-FEM possa ser implementado recorrendo ao cálculo computacional em paralelo. Um esquema do tipo C/DG-FEM será desenvolvido de forma a tratar apropriadamente as equações de sexta ordem. As técnicas analíticas usadas no sistema de Boussinesq aqui deduzido deverão também ser aplicadas para o desenvolvimento de modelos multi-camadas. Estes modelos serão implementados numericamente recorrendo ao esquema C/DG-FEM.

No que diz respeito ao quarto capítulo, outras leis de conservação associadas ao modelo proposto deverão ser estudadas num futuro próximo. Diferentes esquemas numéricos baseados na formulação C/DG-FEM serão ainda investigados e estudadas as suas propriedades conservativas e de estabilidade. Um estudo de estabilidade baseado na análise matricial dos modelos semi-discretos deverá também ser realizado. A extensão do trabalho apresentado neste capítulo a equações do tipo KdV-BBM de ordem superior a três encontra-se em progresso.

Quanto aos esquemas numéricos propostos no terceiro e no quarto capítulo, reforçamos o facto de ser necessário continuar a investigar as relações entre os parâmetros de penalização, passos de tempo, diâmetro e factores geométricos da malha. Desta forma, a convergência destes esquemas numéricos deverá ser estudada com mais detalhe num futuro próximo. Note-se ainda que também se pretende implementar o método C/DG-FEM para a resolução numérica de alguns modelos da classe BEV.

Os modelos analíticos e numéricos mencionados anteriormente serão incluídos no código `DOLFWAVE`, o qual continuaremos a desenvolver. Este código deverá permitir não só a modelação robusta de problemas em larga escala, mas também fornecer as ferramentas numéricas adequadas ao desenvolvimento e à comparação de vários modelos para a geração e a propagação de ondas marítimas de superfície.

Por último, o trabalho realizado no quinto capítulo deverá ser estendido com vista a uma melhor caracterização e identificação das soluções do tipo onda de translação associadas à classe de equações aqui estudadas. Num trabalho futuro, consideraremos métodos analíticos para a obtenção de soluções recorrendo, e.g., a técnicas assintóticas. Soluções do tipo cnoidal para estas equações deverão também ser estudadas. A existência e a não existência de soluções exactas de tipos predefinidos para as equações até à ordem  $O(\mu^2, \varepsilon, \mu^4, \varepsilon^2, \varepsilon\mu^2)$ , inclusivamente, encontra-se já em preparação para submissão.

# Publicações e comunicações

Do trabalho desenvolvido com vista à obtenção do grau de Doutor resultaram as publicações e as comunicações assim como o software apresentados como segue:

## Publicações

- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, *A numerical analysis of a class of KdV-BBM equations using Continuous/Discontinuous Galerkin Finite Element Method*, Proceedings of MEFTE 2012, LNEC, 2012.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, *Improved Boussinesq Equations for Surface Water Waves*, Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, Eds.: A. Logg, K.-A. Mardal and G. N. Wells, LNCSE volume **84**, pages 471–504, Springer 2012.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, *A numerical analysis of a class of generalized Boussinesq-type equations using continuous/discontinuous FEM*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2012, volume 69 (7), pages 1186–1218, John Wiley & Sons, Ltd, doi: 10.1002/fld.2631.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira e L. Trabucho, *Um método numérico para uma classe de equações de Boussinesq para ondas de superfície com batimetria dependente do tempo*, Boletim da SPM-Encontro Nacional da SPM 2010, páginas 42–46, 2011, Portugal.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, *A C/DG-FEM Solution of an Improved Boussinesq System for Surface Water Waves*, Proceedings of the Fifth European Conference on CFD, ECCOMAS CFD 2010, June 14–17, LNEC, Lisbon, Portugal.

## Comunicações

- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, “FEM solutions of some Boussinesq-type models for surface water waves”, Seminários do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal, 2012.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, “A numerical analysis of a class of KdV-BBM equations using Continuous/Discontinuous Galerkin Finite Element Method”, MEFTE 2012, IV Conferência Nacional em Mecânica dos Fluidos, Termodinâmica e Energia, LNEC, Lisboa, Portugal, 2012.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, “Solutions of some improved Boussinesq-type models for surface water waves using finite element methods”, HPDEs11; Instituto para a Investigação Interdisciplinar, Universidade de Lisboa, Portugal, 2011.

- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, “A C/DG-FEM solution of an improved fourth-order Boussinesq model for surface water waves”, First European Meeting of PhD Students in Mathematics, LAMFA, Université de Picardie Jules Verne, Amiens, França, 2011.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, “DOLFWAVE: a FEniCS Application for Water Waves Simulation”, SIAM Conference on Mathematical and Computational Issues in the Geosciences, Long Beach, Califórnia, Estados Unidos da América , 2011.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira e L. Trabucho, “Um método numérico para uma classe de equações de Boussinesq para ondas de superfície com batimetria dependente do tempo”, Encontro Nacional da SPM 2010, Leiria, Portugal, 2010.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, “A C/DG-FEM Solution of an Improved Boussinesq System for Surface Water Waves”, Fifth European Conference on CFD, ECCOMAS CFD 2010, LNEC, Lisboa, Portugal, 2010.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, “DOLFWAVE - Use of FEniCS for surface waves modelling”, CBC Workshop on Tsunami Modelling, Center of Biomedical Computing, Simula Research Laboratory, Oslo, Noruega, 2010.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira e L. Trabucho, “Aplicação do Método dos Elementos Finitos a uma Classe de Sistemas de Boussinesq”, Centro de Matemática e Aplicações, Universidade Nova de Lisboa, Monte de Caparica, Portugal, 2009.

## Software

- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, *DOLFWAVE: a library for surface water waves problems*, <http://launchpad.net/dolfwave>, 2012.

## Artigos submetidos para publicação

- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho, *A continuous/discontinuous finite element method applied to a parameterised class of KdV-BBM equations*.
- P. J. S. Pereira, N. D. Lopes and L. Trabucho, *Exact solutions of an improved class of nonlinear sixth-order Boussinesq equations*.

## Artigos em preparação para publicação

- P. J. S. Pereira, N. D. Lopes and L. Trabucho, *Existence and non-existence of some soliton-type solutions of an improved class of higher order Boussinesq equations*.

# Bibliografia

- C. Albuquerque. Ondas na água. *2000 Matemática Radical, Palestras comemorativas do ano mundial da Matemática, Textos de Matemática, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*, pages 235–251, 2002.
- M. Alnaes, A. Logg, K.-A. Mardal, O. Skavhaug and H. Langtangen. Unified framework for finite element assembly. *International Journal of Computational Science and Engineering*, 4:231–244, 2009.
- J. S. Antunes do Carmo. Comparação de soluções numéricas obtidas com diferentes modelos de equações do tipo Boussinesq. *Proceedings of MEFTE 2012, IV Conferência Nacional em Mecânica dos Fluidos, Termodinâmica e Energia*, 2012.
- J. S. Antunes do Carmo and F. J. Seabra-Santos. On breaking waves and wave-current interaction in shallow water: A 2dh finite element model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 22(5):429–444, 1996. ISSN 1097-0363.
- J. S. Antunes do Carmo, F. J. S. Santos and E. Barthélemy. Surface waves propagation in shallow water: A finite element model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 16(6):447–459, 1993. ISSN 1097-0363. doi: 10.1002/flid.1650160602. URL <http://dx.doi.org/10.1002/flid.1650160602>.
- G. G. Airy, Tides and waves. *Encyclopedia Metropolitana, 1817–1845 “Mixed Sciences”*, V.3., ed. Rose, H. J..
- P. Avilez-Valente. *Métodos de Elementos Finitos para a Modelação a Uma e Duas Dimensões Horizontais da Propagação de Ondas de Gravidade em Engenharia Costeira*. PhD thesis, Universidade de Coimbra, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2000.
- P. Avilez-Valente and F. J. Seabra-Santos. A Petrov-Galerkin finite element scheme for the regularized long wave equation. *Computational Mechanics*, 34(4), 2004. ISSN 0178-7675. doi: 10.1007/s00466-004-0570-4. URL <http://www.springerlink.com/content/raac6dmlybcq34dn/>.
- P. Avilez-Valente and F. J. Seabra-Santos. A high-order Petrov-Galerkin finite element method for the classical Boussinesq wave model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 59(9):969–1010, 2009. doi: 10.1002/flid.1846. URL <http://dx.doi.org/10.1002/flid.1846>.
- J. Behrens. The role of applied computational mathematics in the end-to-end near-field tsunami early warning system in indonesia. *SIAM Conference on Mathematical and Computational Issues in the Geosciences, Long Beach, USA*, 2011.

- S. Beji and K. Nadaoka. A formal derivation and numerical modelling of the improved equations for varying depth. *Ocean Engineering*, 23 (8):691–704, 1996.
- T. B. Benjamin, J. L. Bona and J. J. Mahony. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 272(1220):47–78, 1972. doi: 10.1098/rsta.1972.0032. URL <http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/272/1220/47.abstract>.
- H. B. Bingham, P. A. Madsen and D. R. Fuhrman. Velocity potential formulations of highly accurate Boussinesq-type models. *Coastal Engineering*, In Press, Corrected Proof:12, 2009. ISSN 0378-3839. doi: DOI:10.1016/j.coastaleng.2008.10.012. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VCX-4VB55B3-1/2/cbeb0659195c51c51796c335e57fa86a>.
- M. J. Boussinesq. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, France*, 1871.
- M. J. Boussinesq. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, (17):55–108, 1872.
- M. J. Boussinesq. Mouvements d'un liquide pesant. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 9:273–300, 1883.
- S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2008. ISBN 978-0-387-75933-3.
- Y. Chen and P. L.-F. Liu. Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation. *J. Fluid Mech.*, 288:351–381, 1994.
- J. M. P. Conde, C. J. E. M. Fortes, E. Didier and D. R. Neves. Propagação de ondas ao longo de um canal inclinado sem rebentação: Estudo numérico e experimental. *Proceedings of MEFTE 2012, IV Conferência Nacional em Mecânica dos Fluidos, Termodinâmica e Energia*, 2012.
- A. Constantin. On the relevance of soliton theory to tsunami modelling. *Wave Motion*, 46(6):420 – 426, 2009. ISSN 0165-2125. doi: 10.1016/j.wavemoti.2009.05.002. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165212509000626>.
- A. D. D. Craik The origins of water wave theory *Annual Review of Fluid Mechanics* 36:1–28, 2004 doi: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122118.
- A. D. D. Craik George Gabriel Stokes on water wave theory *Annual Review of Fluid Mechanics* 37:23–42, 2005 doi: 10.1146/annurev.fluid.37.061903.175836.
- R. K. Dash and P. Daripa. Analytical and numerical studies of a singularly perturbed Boussinesq equation. *Appl. Math. Comput.*, 126(1):1–30, 2002. ISSN 0096-3003.
- T. Dauxois and S. Ruffo. Fermi-pasta-ulam nonlinear lattice oscillations. *Scholarpedia*, 3(8): 5538, 2008. doi: 10.4249/scholarpedia.5538.

- F. Dias, A. Dyachenko and V. Zakharov. Theory of weakly damped free-surface flows: A new formulation based on potential flow solutions. *Physics Letters A*, 372(8):1297–1302, 2008. ISSN 0375-9601. doi: DOI:10.1016/j.physleta.2007.09.027. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6TVM-4PR3G7T-6/2/a49b7306c5db89c16f5ad38631ac82e6>.
- D. Dutykh and F. Dias. Dissipative Boussinesq equations. *Comptes Rendus Mecanique*, 335: 559, 2007a. URL doi:10.1016/j.crme.2007.08.003.
- D. Dutykh and F. Dias. Water waves generated by a moving bottom. In *Tsunami and nonlinear waves*, pages 65–95. Springer, Berlin, 2007b.
- D. Dutykh, T. Katsaounis and D. Mitsotakis. Finite volume methods for unidirectional dispersive wave models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71(6): 717–736. Wiley 2013 ISSN 1097-0363. doi: 10.1002/flid.3681.
- G. Engel, K. Garikipati, T. J. R. Hughes, M. G. Larson, L. Mazzei and R. L. Taylor. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191(34):3669–3750, 2002. ISSN 0045-7825.
- A. P. Engsig-Karup, J. S. Hesthaven, H. B. Bingham and T. Warburton. Dg-fem solution for nonlinear wave-structure interaction using Boussinesq-type equations. *Coastal Engineering*, 55(3):197–208, 2008. ISSN 0378-3839. doi: DOI:10.1016/j.coastaleng.2007.09.005. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VCX-4PYRKCX-1/2/0e9ff8caa265998038e30fac1dd56079>.
- C. Eskilsson and S. J. Sherwin. Spectral/hp discontinuous Galerkin methods for modelling 2d Boussinesq equations. *Journal of Computational Physics*, 212(2):566 – 589, 2006. ISSN 0021-9991. doi: DOI:10.1016/j.jcp.2005.07.017. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6WHY-4H27CF8-1/2/d147dd5d4e31e54f3e9b98c59e4eb912>.
- C. Fortes, E. Didier, D. Neves, L. Endres e P. Teixeira. Desempenho dos modelos numéricos coulwave e fluent na simulação de ondas ao longo de um canal de ondas. *Proceedings of MEFTE 2012, IV Conferência Nacional em Mecânica dos Fluidos, Termodinâmica e Energia*, 2012.
- D. R. Fuhrman. *Numerical Solutions of Boussinesq Equations for Fully Non-linear and Extremely Dispersive Water Waves*. PhD thesis, Technical University of Denmark, 2004.
- D. R. Fuhrman and P. A. Madsen. Tsunami generation, propagation, and run-up with a high-order Boussinesq model. *Coastal Engineering*, 56(7):747 – 758, 2009. ISSN 0378-3839. doi: DOI:10.1016/j.coastaleng.2009.02.004. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VCX-4VTK5MX-1/2/52fcb1c866e6fc6ef8ba420a621d0bbb>.
- M. F. Gobbi, J. T. Kirby and G. Wei. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. II. Extension to  $O(kh)^4$ . *J. Fluid Mech.*, 405:181–210, 2000. ISSN 0022-1120.
- G. W. Griffiths and W. E. Schiesser. Linear and nonlinear waves. *Scholarpedia*, 4(6):4308, 2009.

- G. W. Griffiths and W. E. Schiesser. *Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations: Numerical and Analytical Methods with Matlab and Maple*. Academic, Amsterdam; Oxford, 2011. ISBN 9780123846525 0123846528. URL <http://www.sciencedirect.com/science/book/9780123846525>.
- E. Hairer and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations. II*, volume 14 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- A. Jeffrey. Role of the Korteweg-de Vries equation in plasma physics. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, 14:183–189, 1972.
- R. S. Johnson. *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- M. Kazolea, A. Delis, I. Nikolos and C. Synolakis. An unstructured finite volume numerical scheme for extended 2d Boussinesq-type equations. *Coastal Engineering*, 69(0):42 – 66, 2012. ISSN 0378-3839. doi: 10.1016/j.coastaleng.2012.05.008. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378383912001032>.
- J. T. Kirby. Funwave. *webpage*, 1998. URL <http://chinacat.coastal.udel.edu/programs/funwave/funwave.html>.
- R. C. Kirby and A. Logg. A compiler for variational forms. *ACM Trans. Math. Softw.*, 32(3):417–444, Sept. 2006. ISSN 0098-3500. doi: 10.1145/1163641.1163644. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1163641.1163644>.
- G. Klopman. *Variational Boussinesq modelling of surface gravity waves over bathymetry*. Ph.D. thesis, University of Twente, Department of Applied Mathematics, 2010.
- D. J. Korteweg and G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine*, 91(6):1007–1028, 2011. doi: 10.1080/14786435.2010.547337.
- N. A. Kudryashov. A note on the G'/G-expansion method. *Applied Mathematics and Computation*, 217(4):1755 – 1758, 2010. ISSN 0096-3003. doi: 10.1016/j.amc.2010.03.071. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300310003255>.
- J. D. Lambert. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1991. ISBN 0-471-92990-5.
- H. P. Langtangen and G. Pedersen. Computational models for weakly dispersive nonlinear water waves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 160(3-4):337 – 358, 1998. ISSN 0045-7825. doi: DOI:10.1016/S0045-7825(98)00293-X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V29-3WV3TR5-8/2/e1a67a14cc3962570b43c484be62994f>.
- C. Lee, Y.-S. Cho and S. B. Yoon. A note on linear dispersion and shoaling properties in extended Boussinesq equations. *Ocean engineering.*, 30(14):1849, 2003. ISSN 0029-8018.
- R. J. LeVeque, M. Berger, G. D. L. and K. L. Mandli. The geoclaw software for depth-averaged flows with adaptive refinement. *SIAM Conference on Mathematical and Computational Issues in the Geosciences, Long Beach, USA*, 2011.

- A. Logg and G. N. Wells. Dolfin: Automated finite element computing. *ACM Trans. Math. Softw.*, 37(2):20:1–20:28, Apr. 2010. ISSN 0098-3500. doi: 10.1145/1731022.1731030. URL <http://doi.acm.org/10.1145/1731022.1731030>.
- A. Logg, M. K.-A. and G. N. Wells. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*, volume 84 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, 2012.
- N. D. Lopes. PhD report: Relatório do curso de formação avançada: Alguns modelos de propagação de ondas marítimas. *Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*, 2007.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho. A numerical analysis of a class of generalized Boussinesq-type equations using continuous/discontinuous fem. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 69(7):1186–1218, 2012a. ISSN 1097-0363. doi: 10.1002/flid.2631.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho. Improved Boussinesq Equations for Surface Water Waves. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, LNCSE Vol. 84, Springer*, 2011.
- N. D. Lopes, P. J. S. Pereira and L. Trabucho. A numerical analysis of a class of KdV-BBM equations using continuous/discontinuous Galerkin finite element method. *Proceedings of MEFTE 2012*, 2012b.
- F. Løvholt and G. Pedersen. Instabilities of Boussinesq models in non-uniform depth. *International journal for numerical methods in fluids*, 61(6):606–637, 2009. ISSN 0271-2091.
- P. Lynett and P. L.-F. Liu. A numerical study of submarine-landslide generated waves and run-up. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 458(2028):2885–2910, 2002. doi: 10.1098/rspa.2002.0973. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/458/2028/2885.abstract>.
- P. Lynett and P. L.-F. Liu. A two-layer approach to wave modelling. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 460(2049):2637–2669, 2004. ISSN 1364-5021. doi: 10.1098/rspa.2004.1305. URL <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2004.1305>.
- P. A. Madsen and Y. Agnon. Accuracy and convergence of velocity formulations for water waves in the framework of Boussinesq theory. *J. Fluid Mech.*, 477:285–319, 2003. ISSN 0022-1120.
- P. A. Madsen and H. A. Schäffer. Higher-order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis. *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 356(1749):3123–3184, 1998. ISSN 1364-503X.
- P. A. Madsen and O. R. Sørensen. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. part 2. a slowly-varying bathymetry. *Coastal Engineering*, 18(3-4):183–204, 1992. ISSN 0378-3839. doi: DOI:10.1016/0378-3839(92)90019-Q. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VCX-481DV54-3V/2/ca06d1b31e31310819b5eb8d21d1fbd1>.

- P. A. Madsen, R. Murray and O. R. Sørensen. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coastal Engineering*, 15(4):371 – 388, 1991. ISSN 0378-3839. doi: DOI:10.1016/0378-3839(91)90017-B. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VCX-481DV3Y-39/2/c10916856a189598fdf0f2b5cdd8da62>.
- P. A. Madsen, H. B. Bingham and H. A. Schäffer. Boussinesq-type formulations for fully nonlinear and extremely dispersive water waves: derivation and analysis. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 459(2033):1075–1104, 2003. ISSN 1364-5021.
- C. C. Mei, M. Stiassnie and D. K.-P. Yue. *Theory and Applications of Ocean Surface Waves*, volume 23 of *Advanced Series on Ocean Engineering*. World Scientific, Singapore Hackensack NJ, expanded ed. edition, 2005. ISBN 9789812569196.
- O. Nwogu. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 119(6):618–638, 1993.
- K. B. Olgaard, A. Logg and G. N. Wells. Automated code generation for discontinuous Galerkin methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(2):849–864, 2008. ISSN 1064-8275.
- T. Ozis and I. Aslan. Application of the (G'/G)-expansion method to Kawahara type equations using symbolic computation. *Applied Mathematics and Computation*, 216(8):2360 – 2365, 2010. ISSN 0096-3003. doi: 10.1016/j.amc.2010.03.081. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300310003358>.
- G. Pedersen and F. Løvholt. Documentation of a global Boussinesq solver. Technical report, 2008. URL [http://www.math.uio.no/eprint/appl\\_math/2008/01-08.html](http://www.math.uio.no/eprint/appl_math/2008/01-08.html).
- D. H. Peregrine. Long waves on a beach. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, (27): 815–827, 1967. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112067002605>.
- Rayleigh Baron. On Waves *Scientific Papers of John William Strutt, Baron Rayleigh*, 1: 251–71, Cambridge Univ. Press, 1899.
- D. Rostamy and F. Zabihi. The general analytical and numerical solution for the modified KdV equation with convergence analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36 (8), pages 896–907, 2013.
- J. S. Russel. Report of the committee on waves. *British Association Reports*, VI:417–468, 1837.
- J. S. Russel. Experimental Researches into the Laws of Certain Hydrodynamical Phenomena that accompany the Motion of Floating Bodies. *Edin. Roy. Soc. Trans. XIV*, pages 47–109, 1840.
- J. S. Russel. Report on waves. *Report of the Fourteenth Meeting of British Association for the Advancement of Science*, pages 311–390, 1844.
- G. Sadaka. *Etude mathématique et numérique d'équations d'ondes aquatiques amorties*. PhD thesis, Université de Picardie Jules Verne, 2011.
- G. B. Stokes. On the theory of oscillatory waves *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8:441–55, 1847.

- M. Walkley. *A Numerical Method for Extended Boussinesq Shallow-Water Wave Equations*. PhD thesis, The University of Leeds, School of Computer Studies, 1999.
- M. Walkley and M. Berzins. A finite element method for the two-dimensional extended Boussinesq equations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 39(10):865–885, 2002. ISSN 0271-2091.
- M. Wang, X. Li, and J. Zhang. The  $(G'/G)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 372(4): 417 – 423, 2008a. ISSN 0375-9601. doi: 10.1016/j.physleta.2007.07.051. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960107010857>.
- S.-L. Wang, Z.-R. Wu, Y.-L. Cheng and M. Liu. Effects of surface tension and uneven bottom on surface solitary waves. *Journal of Physics: Conference Series*, 96, 2008b.
- A.-M. Wazwaz. New travelling wave solutions to the Boussinesq and the klein-gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(5):889 – 901, 2008. ISSN 1007-5704. doi: 10.1016/j.cnsns.2006.08.005. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570406001729>.
- G. Wei, J. T. Kirby, S. T. Grilli and R. Subramanya. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. I. Highly nonlinear unsteady waves. *J. Fluid Mech.*, 294:71–92, 1995. ISSN 0022-1120.
- G. Wei, J. Kirby and A. Sinha. Generation of waves in Boussinesq models using a source function method. *Coastal Engineering*, 36:271–279, 1999.
- G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974. Pure and Applied Mathematics.
- S.-B. Woo and P.-F. Liu. Finite element model for modified Boussinesq equations i: Model development. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 130(1):1–16, 2004a.
- S.-B. Woo and P.-F. Liu. Finite element model for modified Boussinesq equations ii: Applications to nonlinear harbor oscillations. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 130(1):17–28, 2004b.
- T. Y. Wu. Long waves in ocean and coastal waters. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 107(3):501–522, 1981.
- N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15:240–243, Aug 1965. doi: 10.1103/PhysRevLett.15.240. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.15.240>.
- N. J. Zabusky and M. A. Porter. Soliton. *Scholarpedia*, 5(8):2068, 2010. doi: 10.4249/scholarpedia.2068.
- M. Zhao, B. Teng, and L. Cheng. A new form of generalized Boussinesq equations for varying water depth. *Ocean Engineering*, 31:2047–2072, 11 2004. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V4F-4D8VFK-1/2/f20de8fc8ea73d8c737a74816ea82726>.

J. Zuo and Y. Zhang. Application of the  $(G'/G)$ -expansion method to solve coupled MKdV equations and coupled Hirota-Satsuma coupled KdV equations. *Applied Mathematics and Computation*, 217(12):5936–5941, Feb. 2011. ISSN 0096-3003. doi: 16/j.amc.2010.12.104. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300310013214>.