



CESAR AUGUSTO SANTANA BARBOSA

Licenciado em Engenharia Civil

Algoritmo 'p'-adaptativo com indicadores de erro globais e locais para problemas de elasticidade

MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL – ESTRUTURAS E
GEOTECNIA

Faculdade de Ciência e Tecnologia - Universidade NOVA de Lisboa
Novembro, 2021

Algoritmo 'p'-adaptativo com indicadores de erro globais e locais para problemas de elasticidade

CESAR AUGUSTO SANTANA BARBOSA

Licenciado em Engenharia Civil

Orientador: Professor Doutor Ionuț Dragroș Moldovan
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa

Coorientadora: Professora Doutora Ildi Cismașiu,
Faculdade de Ciência e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa

Júri:

Presidente: Professora Doutora Maria Teresa Grilo Santana,
Professora Auxiliar, Departamento de Engenharia Civil da Faculdade
de Ciência e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

Arguente: Professor Doutor Corneliu Cismașiu,
Professor Associado, Departamento de Engenharia Civil da
Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

Vogal: Doutor Ionuț Dragroș Moldovan,
Investigador do Instituto Superior Técnico da Universidade de Lisboa

Algoritmos 'p'-adaptativos com indicadores de erro globais e locais para problemas de elasticidade

Copyright © Cesar Augusto Santana Barbosa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Dedico esta dissertação à minha família, que me deu um apoio incondicional para mais
essa conquista.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de estender um agradecimento especial a minha mãe Antonia Santana, ao meu pai Milton Barbosa e aos meus irmãos Luís Barbosa e Paulo Barbosa e as minhas cunhadas Gabriela Barbosa e Vitória Azevedo por todo o incentivo e apoio para que pudesse tornar esse meu sonho possível. Agradeço ao meu primo Albertoni Martins Junior e sua família que mesmo de longe também não mediram esforços para me apoiar. Agradeço a todos os meus irmãos e minha família por ter de algum modo contribuído e me dado forças durante essa jornada.

Agradeço à Professora Ildi Cismasiu e ao Professor Válder Lúcio que me ajudaram bastante durante os meus primeiros dias em Portugal, e que me deram todas as orientações necessárias para que eu conseguisse avançar no curso e tirar o máximo proveito dos conhecimentos adquiridos.

Agradeço novamente a Professora Ildi Cismasiu e o Professor Ionut Moldovan por toda a orientação, atenção, dedicação e paciência no processo de elaboração desta dissertação de mestrado e por todos os conhecimentos passados de forma didática resultando em um trabalho que contribuirá e perdurará para o avanço da ciência, tecnologia, dos métodos numéricos para a solução dos problemas de engenharia e também da área da Engenharia Civil em si.

Agradeço também a cada um que conheci durante esse processo e que me ajudaram de alguma forma e se tornaram uma família durante os anos em que morei fora do meu país de origem, são eles: Mafuca Oliveira, Divaldo Valente, Nycolas Glerean, Daniela Bendea, André Vilhena, Ernani Lucena Neto, Kamila Borges, Paulo Nava, Rafael Menezes, Ingrid Firmino, Mariana Rossi, Luís Prado, entre outros que permanecerão sempre na jornada de crescimento comigo. Gostaria de agradecer também a Thaís Dragon pelo companheirismo me dando todo o apoio durante essa minha jornada de crescimento acadêmico e pessoal.

Por fim, agradeço à todos os professores do departamento de Engenharia Civil (DEC) da Faculdade de Ciência e Tecnologia (FCT) da Universidade NOVA de Lisboa (UNL) por serem sempre presentes e disponíveis para contrubuir com o crescimento de todos os seus estudantes.

"O maior inimigo do conhecimento não é a ignorância, mas sim a ilusão da verdade."
(Stephen Hawking).

RESUMO

O presente trabalho consiste no desenvolvimento e implementação de um algoritmo capaz de realizar um refinamento 'p'-adaptativo em problemas de elasticidade plana utilizando elementos finitos híbridos-Trefftz de deslocamento.

A formulação híbrida-Trefftz com elementos de deslocamento aproxima dois campos independentes, são eles o campo dos deslocamentos no domínio e o campo das forças nas fronteiras cinemáticas dos elementos. As aproximações realizadas satisfazem localmente as condições do domínio. Por outro lado, há a imposição da forma fraca das condições de fronteira de compatibilidade.

O refinamento 'p'-adaptativo em problemas cujo elementos são baseados nas formulações híbrida-Trefftz permite a seleção de locais específicos onde o refinamento será feito (domínios e fronteiras) aproveitando as características hierárquicas presentes nas bases das funções de aproximação deste tipo de formulação. Além disso, a condição de Trefftz imposta na formulação, possibilita que todos os termos que constituem o sistema resolutivo sejam calculados através de integrais na fronteira.

Este tipo de refinamento possibilita a seleção dos graus das funções das bases de aproximação de maneira automática, tanto para os campos de deslocamento no domínio e das forças nas fronteiras cinemáticas. Foram definidos dois critérios de convergência, são eles: o da variação da energia de deformação (critério global) e a densidade máxima do resíduo na fronteira (critério local).

A implementação de um algoritmo 'p'-adaptativo tem o objetivo de facilitar a utilização dos elementos finitos híbridos-Trefftz por parte de usuários inexperientes com esse tipo de formulação, tornando o software mais amigável e de fácil utilização.

Três problemas de elasticidade plana são utilizados para validar o algoritmo implementado e entender o seu comportamento diante das diferentes características de cada problema.

Os resultados obtidos revelaram que os graus de aproximação obtidos ao final do processo de refinamento automático produzem soluções fidedignas, comparadas com os resultados de referência em termos de energia, deslocamento e tensões.

Palavras chave: Problemas de elasticidade plana bidimensionais, Elementos finitos híbridos-Trefftz, Refinamento 'p'-adaptativo.

ABSTRACT

The present work consists on the development and implementation of an algorithm capable of performing a 'p'-adaptive refinement in plane elasticity problems using hybrid-Trefftz displacement finite elements.

The hybrid-Trefftz formulation with displacement elements approximates two independent fields, these are the field of displacements in the domain and the field of forces at the kinematic boundaries of the elements. The approximations performed locally satisfy the domain conditions. On the other hand, there is the imposition of the weak form of the compatibility boundary conditions.

The 'p'-adaptive refinement in problems whose elements are based on hybrid-Trefftz formulations allows the selection of specific locations where the refinement will be done (domains and boundaries) taking advantage of the hierarchical characteristics on the bases of the approximation functions of this type of formulation. Furthermore, the Trefftz condition imposed in the formulation allows all terms that constitute the solving system to be calculated through boundary integrals.

This type of refinement allows automatically selection of the degrees of the functions of the approximation bases, both for the displacement fields in the domain and for forces at the kinematic boundaries. Two convergence criteria were defined, namely: the variation of the strain energy (global criterion) and the maximum density of the residue at the edges (local criterion).

The implementation of a 'p'-adaptive algorithm aims to simplify the usage of hybrid-Trefftz finite elements by inexperienced users, making the software more friendly and easy to use.

Three plane elasticity problems are used to validate the implemented algorithm and understand its behavior in face of the different characteristics of each problem.

The results obtained revealed that the degrees of approximation obtained at the end of the 'p'-refinement process returns reliable solutions, compared with the reference results in terms of energy, displacement and stresses.

Keywords: Two-dimensional plane elasticity problems, Hybrid-Trefftz finite elements, 'p'-adaptive refinement.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação e objetivos	1
1.2	Revisão bibliográfica	4
1.3	Organização do documento	9
2	PROBLEMAS DE ELASTICIDADE PLANA.....	11
2.1	Introdução	11
2.2	Equações governativas	11
2.2.1	Equações no domínio.....	12
2.2.2	Condições de fronteira	18
3	ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS-TREFFTZ DE DESLOCAMENTO	21
3.1	Discretização do meio	21
3.2	Aproximações.....	22
3.3	Formulação.....	23
3.3.1	Equações no domínio.....	23
3.3.2	Equação nas fronteiras.....	25
3.4	Condição de Trefftz	26
3.5	Funções de aproximação	27
3.6	Indeterminação estática e cinemática	31
3.7	Energia de deformação.....	32
4	REFINAMENTO 'P'-ADAPTATIVO	33

4.1	Introdução	33
4.2	Bases hierárquicas.....	34
4.3	Refinamento 'p'-adaptativo na fronteira.....	34
4.4	Refinamento 'p'-adaptativo no domínio.....	37
4.5	Estabilidade do sistema resolutivo.....	38
4.6	Procedimento para o refinamento 'p'-adaptativo.....	39
4.6.1	CrITÉRIOS de refinamento	39
4.6.2	CrITÉRIOS de paragem.....	41
5	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO ALGORITMO PARA REFINAMENTO 'P'-ADAPTATIVO.	45
5.1	Introdução	45
5.2	Sistemas de referência	46
5.3	Pré-processamento	47
5.3.1	Interface gráfica.....	47
5.3.2	Gerador de malha.....	51
5.3.3	Dados topológicos e estrutura de dados	53
5.4	Processamento.....	58
5.4.1	Mapeamento do sistema resolutivo.....	58
5.4.2	Integração numérica.....	62
5.4.3	Pré-condicionamento do sistema resolutivo	63
5.4.4	Construção e resolução do sistema.....	64
5.4.5	Descrição do algoritmo	65
5.5	Pós-processamento.....	70
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	73
6.1	Introdução	73
6.2	Placa em L.....	74
6.3	Consola curta.....	82
6.4	Placa com orifício circular	89

7	CONCLUSÃO	99
7.1	Conclusões.....	99
7.2	Desenvolvimentos futuros.....	101

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Elemento diferencial sujeito a um estado biaxial de tensão	12
Figura 2.2: Deformação normal de um elemento diferencial	14
Figura 2.3: Distorção de um elemento diferencial	15
Figura 2.4: Exemplo de uma estrutura sob o estado de tensão plana.	17
Figura 2.5: Exemplo de uma estrutura sob o estado plano de deformação.	17
Figura 2.6: Condições de fronteira do tipo fronteiras do tipo Dirichlet (ru), Neumann ($r\sigma$) num problema plano	18
Figura 3.1: Meio com 2 elementos finitos i e j , fronteiras do tipo Dirichlet (rue), Neumann ($r\sigma e$) e interior ($rinte$)	21
Figura 5.1: Sistemas de referência e indicação dos sentidos positivos	46
Figura 5.2: Fluxograma da rotina de pré-processamento	47
Figura 5.3: Fluxograma das interfaces gráficas (GUI). Adaptado de [34].....	48
Figura 5.4: GUI 1 - Campo para a seleção do tipo de análise.....	49
Figura 5.5: GUI 4 - Definição dos parâmetros para o refinamento 'p'-adaptativo	50
Figura 5.6: Exemplo de uma estrutura com malha regular	52
Figura 5.7: Exemplo de uma estrutura com malha irregular	52
Figura 5.8: Mapeamento do sistema de um modelo com 4 elementos e 12 fronteiras, sendo 6 fronteiras essenciais (1, 2, 3, 4, 8 e 11) todas com aproximações na direção normal e tangencial, de acordo com a malha apresentada na Figura 5.6.	59
Figura 5.9: Mapeamento das fronteiras essenciais nas suas componentes normal e tangencial para um modelo de 4 elementos e 12 fronteiras, sendo 6 essenciais (1, 2, 3, 4, 8 e 11) todas com aproximações na direção normal e tangencial, de acordo com a malha apresentada na Figura 5.6. Adaptado de [4]	60
Figura 5.10: Vetorização das matrizes de rigidez K	63

Figura 5.11: Fluxograma da análise única ou inicial	66
Figura 5.12: Fluxograma da rotina de refinamento do tipo 'p'-adaptativo	67
Figura 5.13: Campo de deslocamentos, tensões e deformada.	71
Figura 5.14: Gráficos de convergência.....	71
Figura 5.15: Tabela com o resumo do processo de refinamento 'p'-adaptativo.	71
Figura 6.1: Modelo do problema da placa em L	75
Figura 6.2: Malha com 6 elementos triangulares da placa em L	76
Figura 6.3: Energia de deformação (a), (c) e (e) e a densidade máxima do resíduo na fronteira (b), (d) e (f) em função do número de graus de liberdade e da tolerância de seleção para a placa em L.....	79
Figura 6.4: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento e paragem baseados na energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) para a tolerância de seleção de 10 – 5	81
Figura 6.5: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento e paragem baseados na energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 0.5.....	81
Figura 6.6: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento e paragem baseados na energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 0.9.....	82
Figura 6.7: Modelo do problema da consola curta.....	83
Figura 6.8: Malha com 4 elementos retangulares para a consola curta	83
Figura 6.9: Energia de deformação (a), (c) e (e) e a densidade máxima do resíduo na fronteira (b), (d) e (f) em função do número de graus de liberdade e da tolerância de seleção para a consola curta	87
Figura 6.10: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento da energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 10 – 5	88
Figura 6.11: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento da energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 0.5.....	88
Figura 6.12: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento da energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 0.9.....	89
Figura 6.13: Modelo do problema da placa com orifício circular.....	90

Figura 6.14: Malha com 60 elementos triangulares para o problema da placa com orifício circular.....	90
Figura 6.15: Energia de deformação (a), (c) e (e) e a densidade máxima do resíduo na fronteira (b), (d) e (f) em função do número de graus de liberdade e da tolerância de seleção para a placa com o orifício circular.....	94
Figura 6.16: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento da energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 10 – 5	96
Figura 6.17: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento da energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 0.5.....	97
Figura 6.18: Tensões máximas na região do ponto A - (a) e (b) - tolerância de seleção 10 – 5, para os critérios de refinamento e paragem baseado na energia de deformação e densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente. (c) e (d) - tolerância de seleção 0.5, para os critérios de refinamento e paragem baseado na energia de deformação e densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente.....	98
Figura 7.1: Modelo da malha da placa em L	111
Figura 7.2: Modelo da malha para a consola curta.....	114
Figura 7.3 Modelo da malha para a placa com orifício circular (imagem virada à 90 graus)	116

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.1: Comparação dos elementos finitos convencionais e híbridos-Trefttz. Adaptado de [4]	8
Tabela 5.1: Dados topológicos	53
Tabela 5.2: Variáveis da estrutura Edges.....	54
Tabela 5.3: Variáveis da estrutura Loops	54
Tabela 5.4: Variáveis da estrutura BConds	55
Tabela 5.5: Variáveis locais da estrutura List	55
Tabela 5.6: Variáveis globais da estrutura List	56
Tabela 6.1: Parâmetros essenciais para o funcionamento do algoritmo 'p'-adaptativo ..	74
Tabela 6.2: Motivo de paragem em função da tolerância de seleção e do critério de refinamento para a placa em L.....	77
Tabela 6.3: Energia de deformação ($U\Delta u$), erro (EU), número de iterações e número de graus de liberdade (NGL) em função da tolerância de seleção e critério de refinamento para placa em L	77
Tabela 6.4: Motivo de paragem em função da tolerância de seleção e do critério de refinamento para a consola curta.....	84
Tabela 6.5: Energia de deformação ($U\Delta u$), erro (EU), número de iterações e número de graus de liberdade (NGL) em função da tolerância de seleção e critério de refinamento para a consola curta.	85
Tabela 6.6: Motivo de paragem em função da tolerância de seleção e do critério de refinamento para a placa com orifício circular.....	92
Tabela 6.7: Energia de deformação ($U\Delta u$), erro (EU), número de iterações e número de graus de liberdade (NGL) em função da tolerância de seleção e critério de refinamento para a placa com orifício circular.....	93

Tabela 7.1: Ordens finais das bases de aproximação do domínio da placa em L.....	112
Tabela 7.2: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção normal da placa em L	112
Tabela 7.3: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção tangencial da placa em L	113
Tabela 7.4: Ordens finais das bases de aproximação do domínio para a consola curta	114
Tabela 7.5: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção normal para a consola curta	115
Tabela 7.6: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção tangencial para a consola curta	115
Tabela 7.7: Ordens finais das bases de aproximação do domínio para a placa com orifício circular.....	117
Tabela 7.8: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção normal para placa com orifício circular	119
Tabela 7.9: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção tangencial para a placa com orifício circular.....	121

SIGLAS

MEF	Método dos elementos finitos
EFHT	Elementos finitos híbridos-Trefftz.
RBM	Modos de corpo rígido

SÍMBOLOS

$\emptyset$	Conjunto vazio
U	União de conjuntos
$\cap$	Interseção de conjuntos
V	Área do plano mediano de um corpo
Γ_u^e	Fronteiras do tipo Dirichlet
Γ_σ^e	Fronteiras do tipo Neumann
Γ_{int}^e	Fronteiras interiores
ds, dx e dy	Comprimento de um elemento diferencial de fronteira e as suas componentes nos eixos de um referencial Cartesiano
$L, \Delta x$ e Δy	Comprimento da fronteira de um elemento genérico e as respectivas componentes nos eixos de um referencial Cartesiano
α	Valor da indeterminação estática
β	Valor da indeterminação cinemática
U	Energia de deformação
n_D	Ordem das funções de aproximação contidas na base do domínio
n_Γ	Grau dos polinômios incluídos na base da fronteira essencial
W_i	Funções de peso
a_i	Coefficientes das funções de aproximação
D	Operador diferencial de equilíbrio

D^*	Operador diferencial de compatibilidade
∇	Operador gradiente
∇^2	Operador Laplaciano
∇^T	Operador divergência
$\tilde{\nabla}$	Operador rotacional
u	Campo de deslocamentos
ε	Campo de deformações
σ	Campo de tensões
t	Forças aproximadas nas fronteiras essenciais
u_Γ	Deslocamento imposto na fronteira de Dirichlet de um corpo
t_Γ	Força exterior aplicada na fronteira de Neumann de um corpo
Ψ_h, Ψ_b e Ψ_r	Bases de aproximação de deslocamentos
E_h, E_b	Bases de aproximação das deformações
S_h, S_b	Bases de aproximação das tensões
Z	Base polinomial de aproximação das forças na fronteira essencial
q_h, q_b e q_r	Deslocmentos generalizados
p	Forças generalizadas
k	Matriz de rigidez do material
K	Matriz de rigidez do elemento finito
B	Matriz de fronteira
$\bar{t}_\Gamma$	Vetor das forças aplicadas na fronteira de Neumann do elemento finito
$\bar{u}_\Gamma$	Vetor dos deslocamentos impostos na fronteira de Dirichlet do elemento finito
n	Normal unitária
E	Módulo de Young
ν	Coeficiente de Poisson

G Módulo de distorção

I Momento de inércia

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e objetivos

A área da Engenharia Civil tem como principal objetivo atender as necessidades dos seres humanos na construção de diversos tipos de estruturas. Os tipos de estrutura podem ser moradias (residências ou edifícios), prédios e complexos comerciais para o mundo dos negócios e eventos. No âmbito de construções de infraestruturas, estas vão desde vias de transporte de pessoas e cargas, seja por rodovias, ferrovias através de vias terrestres ou subterrâneas. Indo um pouco além, ainda pertencem a este grupo as usinas geradoras de energia para atendimento dos residentes de uma certa localidade (hidroelétricas, usinas fotovoltaicas, usinas termoeletricas, etc.), indústrias as quais produzirão os insumos necessários para subsistência e manutenção da vida da comunidade, e por fim, sendo ainda mais abrangente, a área da engenharia civil também é responsável por resolver problemas que otimizam e melhoram a vida dos habitantes de uma cidade através da criação de pontes e outros tipos de soluções estruturais dos tipos mais diversos. Um engenheiro civil é profissional capacitado e responsável para conceber, projetar e construir essas soluções necessárias para o bem-estar e contribuir com o desenvolvimento da sociedade.

O desenvolvimento dessas soluções deve garantir a segurança das estruturas concebidas com o principal propósito de mitigar todo e qualquer tipo de risco para os seus usuários e, ao mesmo tempo essas soluções devem ser sustentáveis, eficientes e garantir a vida útil dessas estruturas com primor, aliadas ao melhor custo benefício possível.

O avanço dos estudos nessa área e a crescente demanda de projetos cada vez mais complexos, requer o constante desenvolvimento de novas práticas e a preparação dos profissionais para terem a competência e os conhecimentos necessários com o objetivo de

atender as diferentes necessidades da área, com a elaboração de projetos mais precisos aliado às tecnologias disponíveis para sua concepção.

O principal objetivo na concepção dos projetos é garantir que as estruturas apresentem uma boa resposta estrutural quando finalizada a etapa de construção e iniciada a fase de utilização, sendo assim expostas aos reais efeitos e comportamentos anteriormente previstos na fase de projeto, além de suportar as condições de fatores externos, como por exemplo eventos sísmicos e outros fatores que possam implicar na segurança estrutural.

Os avanços dos estudos nessa área, dão-se pelo entendimento do comportamento da estrutura e a forma como esta responde às condições estáticas e dinâmicas. Para isso, o desenvolvimento de um modelo matemático que traduz tais efeitos é de extrema importância, pois a qualidade da construção acaba por depender disto.

Os problemas de interesse para a área da engenharia civil, relacionados à análise do comportamento estrutural e dos materiais que compõe cada parte da construção, bem como sua interação com o meio externo, são formulados a partir de princípios matemático e das leis da Física.

Os princípios matemáticos e leis da Física, permitem a determinação da solução para diversos tipos de problemas. Existem problemas simples, ou seja, problemas de engenharia que podem ser simplificados em modelos que não requerem uma análise muito complexa e podem ser resolvidos através de soluções analíticas ou semi-analíticas, as quais retornam soluções exatas e, por outro lado, existem problemas mais complexos em que os métodos anteriores não são aplicáveis. Nesses casos é preciso o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos avançados para a elaboração de um modelo em que seja possível obter soluções aproximadas do real comportamento da estrutura.

A matemática avançada, bem como o profundo conhecimento do comportamento dos materiais, fornecem um método de obter as soluções aproximadas e essas são feitas através dos chamados métodos numéricos que se apresentam como uma alternativa interessante face as anteriormente citadas. Este método está em constante desenvolvimento devido ao avanço acelerado dos meios computacionais, e que por sua vez, facilitam cada vez mais a sua aplicação nos dias de hoje, mesmo que estas teorias tenham sido desenvolvidas ininterruptamente desde o início do século XX. Através dos métodos numéricos é possível particionar o domínio do problema em pequenos elementos, os quais permitem obter uma solução aproximada. Os métodos numéricos comumente conhecidos são os métodos das diferenças finitas, o método dos volumes finitos, o método dos elementos finitos, entre outros.

Dentre os diversos métodos numéricos anteriormente citados, o método dos elementos finitos (MEF) é um dos mais difundidos mundialmente e que resolve problemas transversais para as diversas áreas da engenharia. Este consiste na solução de equações diferenciais também para problemas estruturais o qual será o foco do presente trabalho e permitirá conhecer a fundo os mais variados problemas relacionados a teoria da elasticidade e prover a recuperação de uma possível solução do comportamento real da estrutura, permitindo assim sua utilização prática.

Os métodos numéricos resolvem essencialmente problemas de valores de fronteiras que são característicos da mecânica dos sólidos e da análise estrutural. Esses são compostos por uma ou mais equações diferenciais e que inclui aspectos representativos para a obtenção dos campos dos deslocamentos, deformações e tensões que são regidas pelas leis constitutivas dos materiais, as relações de equilíbrio e as relações de compatibilidade. As condições de fronteira (de cada subdomínio), sejam forças ou deslocamentos, completam este problema típico de valores de fronteiras.

Apesar de bastante difundido, o método dos elementos finitos utilizando os elementos da forma convencional, apresenta diversas limitações e algumas desvantagens que ocasionaram na ampliação do estudo de outros tipos de elementos, nomeadamente os métodos dos elementos finitos não convencionais. Os elementos finitos não convencionais, contam com diferentes tipos de formulações que podem ser classificadas em três classes: elementos finitos híbridos, elementos finitos híbridos mistos e elementos finitos híbridos-Trefftz.

O algoritmo desenvolvido e implementado neste trabalho utilizando os elementos finitos híbridos-Trefftz, toma partido do conceito de variáveis generalizadas (não-nodais) presentes na estrutura das funções que compõem as bases de aproximação, conferindo uma qualidade de serem hierárquicas. Essa qualidade permite o desenvolvimento de algoritmos em que seja possível realizar o enriquecimento seletivo (refinamento 'p'-adaptativo) das bases de aproximação e como consequência, possibilita a sua utilização por usuários menos experientes.

No presente trabalho é implementado um algoritmo utilizando a formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz no seu modelo de deslocamento, para resolver problemas elastoestáticos em estado plano de tensão ou deformação com o processo de refinamento 'p'-adaptativo. Esta implementação converge com o objetivo deste trabalho de forma a dispor de novas ferramentas para a comunidade científica e possibilitar o contínuo aprimoramento da área.

Os problemas de estruturas bidimensionais são de grande relevância e aplicabilidade nos projetos da engenharia civil, como por exemplo paredes resistentes, consolas curtas (presentes em estruturas pré-moldadas), túneis, barragens, muros de suporte, entre outros.

Com essa implementação, pretende-se estender as funcionalidades do programa existente FreeHyTE – Structural HTD, possibilitando a resolução de problemas estruturais com elementos de deslocamento em que seja possível realizar um refinamento automático das funções que compõe as bases de aproximação no domínio e nas fronteiras dos elementos, utilizando critérios de refinamento que priorizam regiões de interesse para a entrega de uma melhor solução. O processo de refinamento 'p'-adaptativo, tem como principal propósito minimizar o erro associado à aproximação do método e controlar o processo de convergência com o intuito de obter a melhor solução aproximada possível.

Para a implementação do modelo é utilizado o programa FreeHyTE que é um software público, desenvolvido em ambiente Matlab [1], de código aberto e amigável para a solução de problemas de valores de fronteira hiperbólicos, parabólicos ou elípticos utilizando o método de Trefftz [2] e foi desenvolvido por I. D. Moldovan, I. Cismasiu e outros investigadores que ao longo dos últimos anos têm realizado trabalhos com o objetivo de tornar mais abrangente as funcionalidades do programa. Atualmente este já conta com a possibilidade de solução de problemas acústicos, térmicos e estruturais. Dentre eles estão os problemas transitórios definidos em meios porosos e saturados (bifásicos), problemas de transferência de calor, por condução[3], problemas estruturais elastoestáticos com elementos de deslocamento (HTD – “Hybrid Trefftz Displacement”) [4] e que posteriormente foi desenvolvido também para elementos de tensão (HTS - “Hybrid Trefftz Stress”) [5] e mais recentemente problemas em meio sólido sujeito a cargas transitórias (estruturas sujeitas a ações dinâmicas) [6], entre outros. Nota-se que não existe atualmente, nenhuma outra plataforma computacional publicamente disponível que realize solução de problemas utilizando este tipo de elemento finito.

1.2 Revisão bibliográfica

O método dos elementos finitos (MEF) é agora uma parte importante e indispensável nos projetos de engenharia para a análise de estruturas, sólidos e fluidos [7]. O desenvolvimento e utilização do MEF ganhou força de estudo, notoriedade e aplicação prática com a melhoria do processamento de dados dos computadores, desencadeada pela evolução tecnológica exponencial das últimas duas décadas.

Este método é utilizado de forma a obter numericamente respostas aproximadas e aceitáveis de problemas que seriam muito complexos ou impossíveis de serem resolvidos através de uma fórmula analítica. A base dos elementos finitos consiste em subdividir um problema que se pretende analisar em vários subdomínios de dimensões finitas. Em cada problema é definido um comportamento aproximado, local, para a definição das incógnitas. Um exemplo de aplicação é em problemas estruturais os quais se desejam analisar as tensões e deslocamentos de um corpo.

R. L. Courant [8], é considerado um dos precursores dos elementos finitos por ter publicado o primeiro artigo oficial sobre uso desta técnica, em 1942. O trabalho foi de grande contribuição, pois o autor demonstrou pela primeira vez como o uso dos métodos variacionais, primeiramente descritos por Lord Rayleigh poderiam ter uma aplicação mais ampla na teoria do potencial, utilizando elementos triangulares com funções lineares e assim ele traçou alguns exemplos bidimensionais.

Posteriormente a ideia foi ampliada com mais bases matemáticas por J. L. Synge, em 1957 [9]. Neste trabalho o autor introduziu a ideia de problemas utilizando equações diferenciais de valores de fronteiras. As suas teorias foram utilizadas no trabalho de R. J. Duffin [10], que compilou os trabalhos realizados por Courant e Synge e os aplicou em funções lineares no interior dos elementos de modo que satisfizessem condições de fronteiras pré-definidas para problemas de condutibilidade. R. Clough, por sua vez, em 1960 apresentou o primeiro estudo realizado para problemas de elasticidade plana [11].

Em 1965 e 1970, Zienkiewicz e Cheung publicaram livros de grande relevância sobre os métodos dos elementos finitos [12,13] e sua aplicação transversal em diversas áreas da engenharia.

Os primeiros modelos de elementos finitos para a resolução de problemas estruturais baseiam-se na aproximação direta do campo dos deslocamentos e na verificação das condições de compatibilidade. As equações de equilíbrio, por sua vez, são caracterizadas pela sua imposição na forma fraca, originando um sistema composto por equações cuja solução indica o equilíbrio das forças nodais equivalentes. Como consequência deste modelo, os resultados apresentados asseguram uma solução conforme em termos de deslocamento (soluções compatíveis), mas não equilibrada. Em outras palavras, pode-se dizer que há uma boa aproximação da solução para os campos dos deslocamentos, no entanto, a aproximação para o campo das tensões acabam por não apresentar uma qualidade equivalente. Outra consequência, está na concepção da malha do problema, pois esta exige um refinamento em determinadas zonas as quais podem sofrer altos gradientes de deslocamentos ou tensões

(comum em pontos de singularidade), o que torna o processo complexo e difícil e ainda nos dias de hoje esta prática é habitual, inclusive em softwares de uso comercial. Com o objetivo de contornar as consequências mencionadas anteriormente, foi desenvolvido mais tarde uma nova formulação dos problemas em elementos finitos. Esta permite criar um modelo que conta com a possibilidade de fazer duas aproximações de maneira independente, sendo um no domínio e outro na fronteira de cada elemento e que recebem, por essa característica, o nome de elementos finitos híbridos ou comumente conhecidos como não convencionais [14].

A formulação dos elementos finitos híbridos conta ainda com um tipo específico de formulação chamada de Método de Trefftz. Os fundamentos da formulação dos elementos finitos híbridos-Trefftz foram estabelecidos por E. Trefftz em 1926 [15]. Esta formulação é concebida com funções que satisfazem todas as equações governativas no domínio (equilíbrio, compatibilidade e as leis constitutivas), o que possibilitou obter soluções com um melhor equilíbrio entre as qualidades das aproximações dos campos dos deslocamentos e das tensões. Neste caso, os pesos contidos nas bases das funções de aproximação são as principais incógnitas do problema, ao contrário dos valores nodais dos campos aproximados, que são característica dos elementos finitos convencionais. Contudo, a falta de meios computacionais para os cálculos de problemas em larga escala não estavam disponíveis na época.

Em 1978, quatro formulações híbridas-Trefftz foram estabelecidas por J. Jirousek, com a aplicabilidade na resolução de problemas mecânicos [16]. O diferencial nas formulações estava na forma de aproximar os campos nos domínios e nas fronteiras dos elementos, e também como eram impostas as condições de continuidade nas fronteiras interelementares.

Na década de 80, I. Herrera conduziu novas investigações do método de Trefftz publicando uma série de artigos os quais definiu os fundamentos matemáticos para a construção das bases de Trefftz de forma completa [17].

Nas últimas três décadas foram realizados mais estudos para o desenvolvimento da formulação híbrida-Trefftz e que resultaram em trabalhos expressivos, principalmente na área da elasticidade plana o qual conta com grupos de investigações liderados por J. Jirousek e J. Freitas e que são de grande contribuição para o desenvolvimento da área em questão.

J. Jirousek propôs o método indireto na formulação de Trefftz alicerçado na utilização de aproximações convencionais nas fronteiras, onde os pesos das mesmas são os próprios deslocamentos nodais. Por outro lado, na década de 90, J. Freitas utilizou do método indireto para propor a imposição da formulação na sua forma fraca na continuidade das fronteiras, onde os pesos das funções de aproximação passam a não ter um significado físico. Assim, diversos trabalhos com este modelo foram publicados na sequência, para a solução de

problemas elastostáticos planos e este é o mesmo método utilizado no presente trabalho. Na segunda metade da década de 90, trabalhos de grande notoriedade e contribuição foram publicados. Em 1996, os modelos duais de deslocamento [18] e em 1998 os de tensão [19]. Além disso, foram ainda apresentadas as formulações tridimensionais elastostáticas [20] e elastoplásticas [21], bem como formulações elastodinâmicas nas referências [22] e [23]. A Tabela 1.1 resume a diferença dos elementos finitos convencionais e os elementos finitos híbridos-Trefftz.

Em relação aos elementos híbridos, existem duas formas de como podem ser realizadas as aproximações e diferenciam-se em dois tipos de formulações: híbridos de deslocamento e híbridos de tensão. Nos elementos finitos híbridos de deslocamento, são feitas aproximações dos deslocamentos no domínio dos elementos e de forças nas fronteiras. Ambas de forma independente e a continuidade inter-elementar é imposta na forma de deslocamento. De outro modo, nos elementos finitos híbridos de tensão, são aproximadas as tensões no domínio dos elementos, os deslocamentos nas fronteiras e a continuidade inter-elementar é imposta explicitamente na forma de tensões. Em ambos os modelos, a aproximação no domínio é forçada a satisfazer localmente todas as equações governativas, uma característica típica dos elementos finitos híbridos-Trefftz, como discutido anteriormente [24].

Ainda, com o aprimoramento do método dos elementos finitos foram criados procedimentos para a melhoria da solução obtida através de refinamentos. O mais comumente aplicado é o refinamento do tipo 'h', através do qual aplica-se um aumento da quantidade de elementos da malha [25,26].

Ultimamente, tem sido desenvolvido diversos trabalhos utilizando aplicações de procedimentos de refinamento 'p'-adaptativos (ou enriquecimento seletivo) para problemas estruturais com elementos de deslocamento [27, 28, 29] e para problemas de calor em regime estacionário [3], nos quais são enriquecidas as bases das funções de aproximação que compõem elementos e fronteiras.

Tabela 1.1: Comparação dos elementos finitos convencionais e híbridos-Trefftz. Adaptado de [4]

Elementos finitos convencionais	Elementos finitos híbridos-Trefftz
Implementados em programas de cálculo automático comerciais.	Não existem programas de cálculo automático comerciais.
Funções de aproximação definidas em função dos nós do modelo.	Funções de aproximação 'desligadas' dos nós do modelo. Escolha das funções livre.
Os pesos expressam quantidades físicas.	Os pesos não expressam quantidades físicas.
Pouco flexíveis, fácil utilização. Necessária a escolha da geometria da malha e do tipo de elemento.	Bastante flexíveis, difícil utilização pelo utilizados inexperiente. Necessária a escolha da geometria da malha, do tipo de elemento, e da base das funções de aproximação para o domínio e para e fronteiras essenciais de cada elemento.
Elementos localmente compatíveis.	Elementos nem localmente compatíveis nem localmente equilibrados.
Refinamento 'p' obriga a recalcular todo o sistema resolutivo do elemento.	Refinamento 'p' localizado sem perda de dados.
Assemblagem do sistema requer o somatório das matrizes de rigidez e vetores do sistema resolutivo.	Assemblagem do sistema não requer o somatório das matrizes e vetores do sistema resolutivo.
As aproximações dos campos de deslocamentos oferecem melhores estimativas que as aproximações aos campos de tensões.	Qualidade equivalente das estimativas obtidas pelas aproximações dos campos de deslocamento e tensões.

É de grande importância salientar a preocupação que R. Clough registrou em um dos seus trabalhos em 1990 [30]. O resultado das análises em elementos finitos não pode ser melhor que os dados de entrada e o julgamento utilizado na modelação da formulação matemática. Os engenheiros que fazem o uso do MEF devem aplicar um bom julgamento baseado nos conhecimentos da engenharia para a análise dos resultados, aliado ao

conhecimento profundo da formulação e dos tipos dos elementos finitos utilizados, bem como suas limitações.

1.3 Organização do documento

O presente trabalho é organizado e dividido em 7 capítulos.

No atual capítulo 1, apresentam-se motivações e objetivos que culminaram na elaboração deste trabalho e também a origem e contextualização dos temas que serão abordados.

No capítulo 2 são apresentados os conceitos teóricos relacionados a teoria da elasticidade plana e as equações governativas que regem os problemas estruturais em duas dimensões.

No capítulo 3 são abordadas as bases das formulações dos elementos finitos híbridos-Trefftz de deslocamento, e apresentam as aproximações aplicadas ao domínio e às fronteiras dos elementos, bem como estabelece a condição de Trefftz, sendo esta última primordial para o desenvolvimento e aplicação do algoritmo de forma prática e otimizada. Para além disso, são definidos os conceitos da indeterminação estática e cinemática e o conceito da energia de deformação.

No capítulo 4 são apresentados os conceitos bases para a aplicabilidade do procedimento 'p'-adaptativo na formulação dos elementos finitos híbridos-Trefftz e que compõem a base do algoritmo desenvolvido neste trabalho. São definidos os conceitos, vantagens e as funcionalidades das bases hierárquicas, característica deste tipo de elemento e é o principal fator que possibilita a implementação de tal procedimento de enriquecimento seletivo. Posteriormente, são estabelecidas as diretrizes para o refinamento das bases de aproximação nas fronteiras e no domínio dos elementos durante processo 'p'-adaptativo. Por fim, são definidos os critérios de refinamento do problema e de paragem do algoritmo.

No capítulo 5 é apresentada a implementação do algoritmo nas fases de pré-processamento, processamento e pós-processamento. Na etapa de pré-processamento são elencados os dados de entrada necessários para o funcionamento do algoritmo e como são feitas a estruturação dos dados. Na fase de processamento, são demonstrados o processo do mapeamento do sistema e como o algoritmo realiza a integração numérica e consolida os dados processados de forma a manter a estabilidade numérica do sistema resolutivo. É apresentado também, um passo a passo da lógica do algoritmo desenvolvido e da maneira em que é formatado o processo de refinamento 'p'-adaptativo, com a apresentação de

fluxogramas para a elucidação de cada fase do processo para o leitor. Para terminar, são demonstrados os métodos de apresentação das soluções obtidas para o utilizador na fase de pós-processamento.

No capítulo 6, são resolvidos três problemas para a validação do algoritmo 'p'-adaptativo e o seu desempenho nas análises de erros e processos de convergência, comparando os resultados obtidos com a solução conhecida e apresentadas por outros autores.

No capítulo 7 são pontuadas as conclusões obtidas no processo de desenvolvimento do presente trabalho, bem como a recomendação de possíveis trabalhos futuros com o objetivo de ampliar os conhecimentos obtidos neste trabalho para outras utilizações práticas.

PROBLEMAS DE ELASTICIDADE PLANA

2.1 Introdução

Os conceitos básicos da teoria da elasticidade são descritos neste capítulo: relações de equilíbrio, relações de compatibilidade e relações constitutivas.

Consideremos seguintes hipóteses simplificativas para um problema de elasticidade plana em 2 dimensões:

- O material é homogêneo e uniforme em partes;
- Linearidade física: material é elástico linear, o que significa que todas as deformações produzidas por forças exteriores desaparecem quando essas são retiradas;
- Linearidade geométrica e hipótese dos pequenos deslocamentos: deslocamentos e deformações são pequenos e as condições de equilíbrio se apresentam para o sistema não deformado.
- O material é isotrópico, portanto exhibe as mesmas propriedades elásticas em qualquer direção do plano;
- As forças que atuam no domínio (e.g. forças de massa) são desprezáveis.

2.2 Equações governativas

Um corpo com propriedades elásticas e que está submetido a um conjunto de forças e sujeito a deslocamentos impostos na sua superfície compõe um cenário de um problema que se pode resolver através da Teoria da Elasticidade, tornando-se possível encontrar os campos de tensões (esforços internos), deformações e deslocamentos por ele sofrido.

A resolução desse problema conta com a definição das equações que regem o comportamento e a resposta do material no domínio em consequência daquilo que o corpo está sujeito nas suas fronteiras e a garantia do equilíbrio e compatibilidade entre ambos.

2.2.1 Equações no domínio

No domínio desse corpo, o problema é definido pelas equações de equilíbrio de um elemento diferencial, as relações de compatibilidade, que definem a cinemática da sua deformação e as relações constitutivas, que estabelecem a proporcionalidade entre tensões e deformações.

Relações de equilíbrio

A partir de um elemento diferencial com área de dimensão $dx dy$ sujeito a um estado de tensão genérico (Figura 2.1), é possível deduzir as equações diferenciais de equilíbrio das tensões. Considera-se uma variação diferencial dos campos de tensão ao longo do elemento e, portanto, a tensão normal na faceta 1 não é igual a da faceta 3.

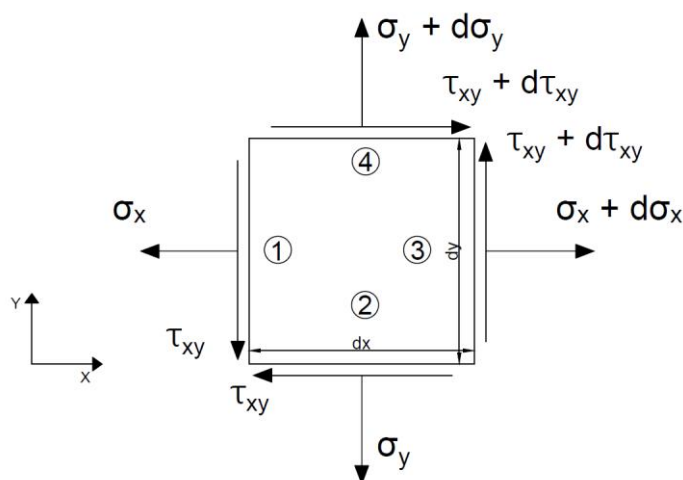


Figura 2.1: Elemento diferencial sujeito a um estado biaxial de tensão

Desse modo, é expresso o equilíbrio das forças na direção x (2.1) através da equação (2.2).

$$\sum F_x = 0 \quad (2.1)$$

$$-\sigma_x dy - \tau_{yx} dx + \sigma_x dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy + \tau_{yx} dx + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy = 0 \quad (2.2)$$

Obtém-se, a equação diferencial de equilíbrio das tensões para a direção x , expressa pela equação (2.3):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

Da mesma forma, ao calcular o equilíbrio das forças para a direção y , obtemos a equação diferencial de equilíbrio das tensões para a direção y , expressa pela equação (2.4):

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Ambas as equações, (2.3) e (2.4) compõem um sistema o qual expressa o equilíbrio das tensões de um corpo num problema de elasticidade, expresso pela equação (2.5):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

A partir daí, é possível definir o operador diferencial de equilíbrio $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$, o qual permite escrever as equações de equilíbrio na sua forma compacta conforme a equação (2.6)

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ as tensões atuantes no elemento.

Relações de compatibilidade

A deformação de um corpo é medida pelo rácio entre a dimensão deformada e a dimensão original.

Um corpo sujeito a esforços e que possui restrições suficientes para provocar uma alteração nas suas dimensões originais, ou seja, um deslocamento que não seja de corpo rígido provoca deformações extensões (ε) e/ou distorções (γ), e não apresenta descontinuidades [31].

A partir de um elemento diferencial no plano com dimensões $dx dy$, Figura 2.2, e com propriedades de um corpo elástico que está sujeito a ações que provocam deformações normais nas direções x e y , pode-se deduzir as componentes ε_x dado pela equação (2.7) e ε_y dado pela equação (2.8) e que expressam as deformações nessas direções, respetivamente.

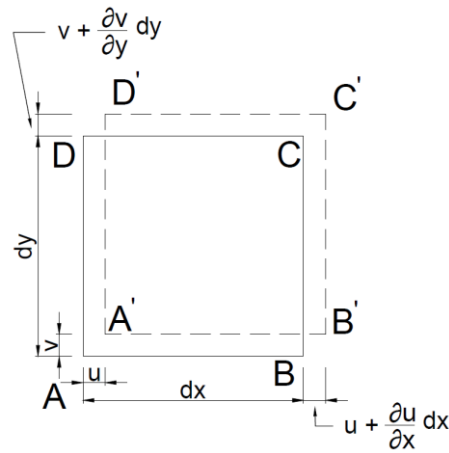


Figura 2.2: Deformação normal de um elemento diferencial

$$\varepsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.8)$$

A partir de um elemento diferencial sujeito a ações que induzem deformações tangenciais representado pela Figura 2.3, é possível deduzir essa deformação através da equação (2.9) a qual expressa a variação angular total em que corpo deformado está sujeito e é denominado de distorção [32].

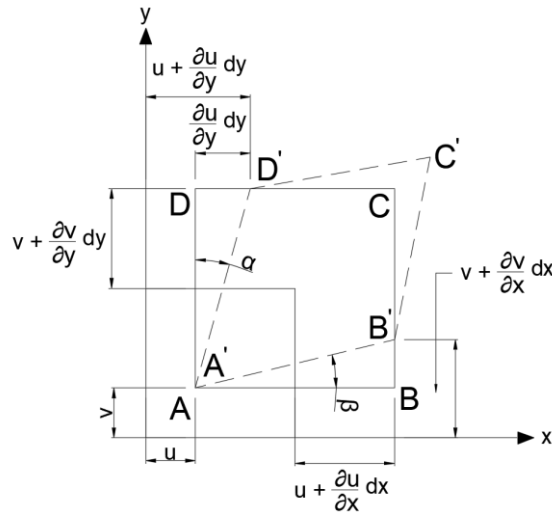


Figura 2.3: Distorção de um elemento diferencial

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.9)$$

O sistema que traduz as componentes normais e tangenciais do vetor das deformações e estabelece a relação de compatibilidade é expresso pela equação (2.10).

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (2.10)$$

Com o uso do operador diferencial $\mathbf{D}$, é possível reescrever equação de compatibilidade também na sua forma compacta dada pela equação (2.11)

$$\mathbf{D}^* \mathbf{u} = \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.11)$$

onde $\mathbf{D}^*$ representa o operador diferencial de compatibilidade, que em coordenadas Cartesianas é o transposto do operador diferencial de equilíbrio, $\mathbf{u}$ o alongamento do elemento e $\boldsymbol{\epsilon}$ a deformação normal.

Relações constitutivas

As relações constitutivas na Teoria da Elasticidade são igualdades que relacionam o campo de tensões com as deformações através da matriz de rigidez do material $\mathbf{k}$ conforme a equação (2.12).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.12)$$

O modelo do material elástico linear, dentre diversos modelos existentes, tem como característica o mesmo caminho linear de carga e descarga. As relações entre as componentes das tensões e as componentes das deformações foram estabelecidas experimentalmente para cada tipo de material [33].

Uma placa submetida a tensões nas direções x e y apresenta, geralmente, componentes de deformações em ambas as direções. Os experimentos mostram que essas componentes são obtidas através da sobreposição das deformações produzidas por cada uma das duas tensões. O coeficiente de Poisson é uma constante que permite equacionar e sobrepor as componentes da deformação [33].

Como dito anteriormente, o estado plano explora a simplificação que ocorre quando se espera tensões principais ou deformações nulas numa direção Cartesiana de uma estrutura tridimensional, o que implica na redução de um problema tridimensional em um problema bidimensional.

Estado plano de tensão

Admite-se uma placa fina com um carregamento aplicado a sua fronteira na direção paralela ao plano na placa e distribuída de maneira uniforme na sua espessura, conforme ilustrado na Figura 2.4. As componentes da tensão σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} são zero em ambas as faces da placa e por consequência de ser uma placa fina, assume-se que essas tensões são zero ao longo da espessura da placa. Portanto, resultam as tensões existentes σ_x , σ_y e τ_{xy} que também não variam ao longo da espessura.

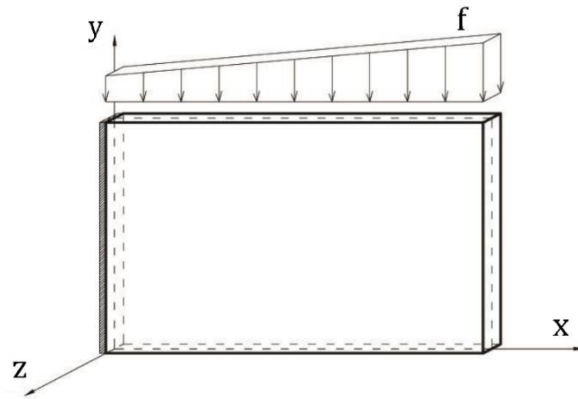


Figura 2.4: Exemplo de uma estrutura sob o estado de tensão plana. Adaptado de [34]

Assim, a matriz de rigidez é expressa pela equação (2.13)

$$\mathbf{k} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

sendo E o módulo de Young do material e ν o coeficiente de Poisson.

Estado plano de deformação

Da mesma forma o estado plano de deformação conta uma simplificação ao assumir que as deformações ao longo da direção z são nulas, devido ao fato de a dimensão nesta direção ser muito grande contanto que toda a seção transversal esteja sobre a mesma condição de esforços. Sua utilização dá-se em análises de muro de suporte, de secções de túneis, entre outras e um modelo é ilustrado na Figura 2.5.

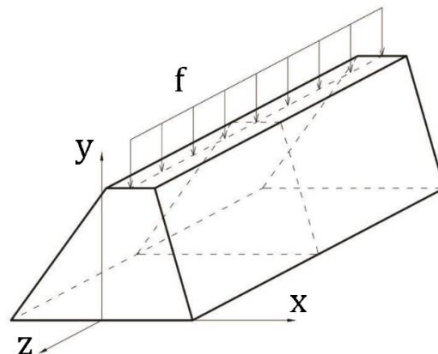


Figura 2.5: Exemplo de uma estrutura sob o estado plano de deformação. Adaptado de [34]

Assim, a matriz de rigidez é expressa pela equação (2.14):

$$\mathbf{k} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Equação de Navier

A partir das relações estabelecidas, é possível escrever a relação constitutiva em termos da relação de compatibilidade, expressa pela equação (2.15).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k} \mathbf{D}^* \mathbf{u} \quad (2.15)$$

Reescrevendo a relação de equilíbrio (2.7) em termos do deslocamento, obtemos a equação de Navier expressa pela equação (2.16).

$$\mathbf{D}(\mathbf{k} \mathbf{D}^* \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

2.2.2 Condições de fronteira

Estabelecidas as condições que devem ser satisfeitas no domínio, é preciso observar as condições de fronteira que devem ser atendidas no problema. As componentes das tensões variam ao longo da placa e precisam estar em equilíbrio com as forças exteriores atuando na fronteira, além também dos deslocamentos estarem de acordo com as condições cinemáticas impostas.

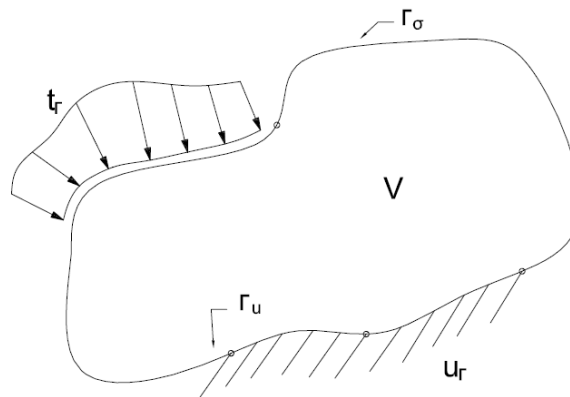


Figura 2.6: Condições de fronteira do tipo fronteiras do tipo Dirichlet (r_u), Neumann (r_σ) num problema plano

Serão considerados neste trabalho dois tipos de condições de fronteira:

- **Dirichlet ou cinemática:** condições de fronteira onde os deslocamentos são especificados, conforme equação (2.17):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r \quad (2.17)$$

sendo $\mathbf{u}_r$ o vetor dos deslocamentos impostos.

- **Neumann ou estática:** condições de fronteira onde as forças são especificadas, conforme equação (2.18)

$$\mathbf{t}_r = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.18)$$

sendo $\mathbf{t}_r$ a força atuante na fronteira e $\mathbf{n}$ a matriz que contém as componentes da normal unitária ao plano da fronteira tal que $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{pmatrix}$.

ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS-TREFFTZ DE DESLOCAMENTO

3.1 Discretização do meio

Um meio cujo domínio possui uma área V dividida em dois elementos por uma fronteira interior (Γ_{int}^e), com condições de fronteira do tipo Dirichlet (Γ_u^e) onde tem um deslocamento imposto $\Gamma_u^e: \mathbf{u} = \mathbf{u}_r$ e também condições de fronteiras exteriores do tipo Neumann (Γ_σ^e) onde tem as forças aplicadas $\mathbf{t}_r = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$, conforme ilustrado na Figura 3.1.

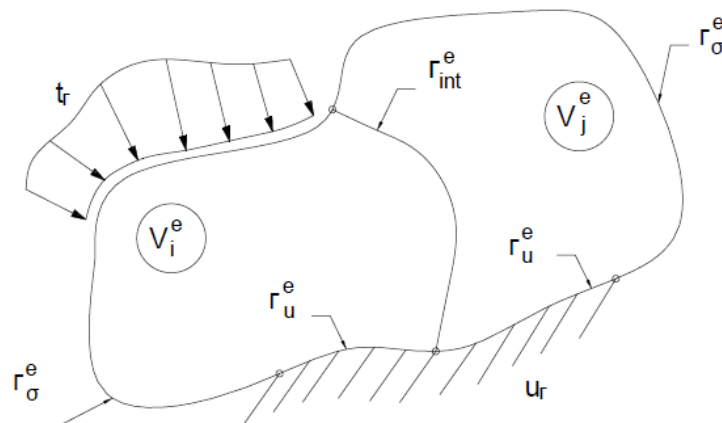


Figura 3.1: Meio com 2 elementos finitos i e j , fronteiras do tipo Dirichlet (Γ_u^e), Neumann (Γ_σ^e) e interior (Γ_{int}^e)

Ao dividir o meio em elementos finitos, aparecem as fronteiras interiores e consequentemente condições adicionais nas fronteiras entre os elementos finitos. Estas são nomeadamente as condições que garante a compatibilidade dos deslocamentos e o equilíbrio

das forças entre os elementos vizinhos. Tal garantia busca soluções em que os campos dos deslocamentos e das tensões sejam contínuos de um elemento a outro, não havendo descontinuidades na solução.

A colagem entre elementos adjacentes i e j é definida pela expressão (3.1):

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^j \quad (3.1)$$

O equilíbrio das forças entre elementos adjacentes i e j é definido pela expressão (3.2):

$$\mathbf{n}^i \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbf{n}^j \boldsymbol{\sigma}^j = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ a tensão atuante na fronteira.

3.2 Aproximações

A seguir são definidas as aproximações dos campos dos deslocamentos, deformações e tensões, que ocorrem no domínio dos elementos, utilizando a base $\boldsymbol{\Psi}$.

- Aproximação dos campos dos deslocamentos, definida pela expressão (3.3)

$$\mathbf{u}(x, y) = \boldsymbol{\Psi}(x, y) \mathbf{q}, \text{ em } V^e \quad (3.3)$$

sendo $\boldsymbol{\Psi}$ a base das funções de aproximação e $\mathbf{q}$ o vetor dos coeficientes que traduz os deslocamentos generalizados associados à respetiva base.

- Através da relação de compatibilidade, definida pela equação (2.11) escreve-se a aproximação do campos das deformações, definida pela expressão (3.4):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{E}(x, y) \mathbf{q}, \text{ em } V^e \quad (3.4)$$

sendo $\mathbf{E}(x, y) = \mathbf{D}^* \boldsymbol{\Psi}(x, y)$.

- Através da relação da elasticidade dado pela equação (2.12) escreve-se a aproximação do campo das tensões, definida pela expressão (3.5):

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \mathbf{S}(x, y)\mathbf{q}, \text{ em } V^e \quad (3.5)$$

sendo: $\mathbf{S}(x, y) = \mathbf{kE}$.

- Para além dos campos no domínio, aproximam-se as forças nas fronteiras de Dirichlet e interiores $r_e^e = r_u^e \cup r_i^e$, definida pela equação (3.6)

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{p}, \text{ em } r_e^e \quad (3.6)$$

sendo $\mathbf{Z}$ a base das funções de aproximação das fronteiras, expressa na coordenada local da fronteira (s) tal que $s \in [-1, 1]$ e $\mathbf{p}$ o vetor das forças generalizadas.

3.3 Formulação

A formulação é expressa através da imposição em forma fraca das equações no domínio e na fronteira, através do método do Método dos Resíduos Pesados proposto por Garlekin. Esse método basicamente consiste em utilizar como peso as mesmas funções que usam para aproximar os campos tendo como consequência um sistema simétrico e esparso.

3.3.1 Equações no domínio

A partir da equação de equilíbrio no domínio estabelecida pela equação (2.6) escreve-se a equação (3.7)

$$\int_{V^e} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} dV^e = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

sendo $\boldsymbol{\Psi}^T$ a base transposta e V^e o domínio do elemento.

As relações de compatibilidade (2.15) podem ser substituídas na equação (3.7) e obtém-se a equação (3.8):

$$\int_{V^e} \boldsymbol{\Psi}^T [\mathbf{D} \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}] dV^e = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Escrevendo a equação (3.8) em termos dos deslocamentos, obtém-se a equação de Navier na forma fraca, expressa pela equação (3.9):

$$\int_{V^e} \boldsymbol{\Psi}^T [\mathbf{D}(\mathbf{kD}^*\mathbf{u})] dV^e = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Aplicando o teorema da divergência na equação (3.9) o qual coloca em evidência as fronteiras, obtém-se a equação (3.10)

$$\int_{V^e} \boldsymbol{\Psi}^T [\mathbf{D}(\mathbf{kD}^*\mathbf{u})] dV^e = \int_{\Gamma^e} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{n}(\mathbf{kD}^*\mathbf{u}) d\Gamma^e - \int_{V^e} (\mathbf{D}^*\boldsymbol{\Psi})^T \mathbf{k}(\mathbf{D}^*\mathbf{u}) dV^e \quad (3.10)$$

sendo Γ^e as fronteiras do elemento.

A integral na fronteira da equação (3.10) inclui todas as fronteiras, sendo essas as de Neumann e essenciais e que por sua vez incluem as fronteiras do tipo Dirichlet e interiores. Então, é possível reescrevê-la conforme a equação (3.11):

$$\int_{V^e} \boldsymbol{\Psi}^T [\mathbf{D}(\mathbf{kD}^*\mathbf{u})] dV^e = \int_{\Gamma_\sigma^e} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{n} \sigma d\Gamma_\sigma^e + \int_{\Gamma_\epsilon^e} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{n} \sigma d\Gamma_\epsilon^e - \int_{V^e} (\mathbf{D}^*\boldsymbol{\Psi})^T \mathbf{k}(\mathbf{D}^*\mathbf{u}) dV^e \quad (3.11)$$

sendo Γ_σ^e as fronteiras do tipo Neumann e Γ_ϵ^e as fronteiras essenciais

Uma vez conhecida a força imposta nas fronteiras do tipo Neumann ($\bar{\mathbf{t}}_\Gamma$) é possível substituir na equação (3.11). Nas fronteiras essenciais, por não ser conhecidas as forças, é feita a aproximação com a base $\mathbf{Z}$ e o peso $\mathbf{p}$ (3.6). O deslocamento, também é substituído pela sua aproximação estabelecida anteriormente na equação (3.3). Assim, obtém-se a equação (3.12)

$$\int_{V^e} \boldsymbol{\Psi}^T [\mathbf{D}(\mathbf{kD}^*\mathbf{u})] dV^e = \int_{\Gamma_\sigma^e} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{t}_\Gamma d\Gamma_\sigma^e + \int_{\Gamma_\epsilon^e} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{Z} d\Gamma_\epsilon^e \mathbf{p} - \int_{V^e} (\mathbf{D}^*\boldsymbol{\Psi})^T \mathbf{k}(\mathbf{D}^*\boldsymbol{\Psi}) dV^e \mathbf{q} \quad (3.12)$$

A equação (3.12) define a formulação no domínio do problema e a partir dos seus termos fazem-se as definições expressas nas equações (3.13), (3.14) e (3.15).

$$\mathbf{K} = \int_{V^e} (\mathbf{D}^*\boldsymbol{\Psi})^T \mathbf{k}(\mathbf{D}^*\boldsymbol{\Psi}) dV^e \quad (3.13)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\Gamma_\epsilon^e} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{Z} d\Gamma_\epsilon^e \quad (3.14)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_r = \int_{\Gamma_\sigma^e} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{t}_r d\Gamma_\sigma^e \quad (3.15)$$

Posto isto, origina-se a primeira equação do sistema resolutivo, expressa pela equação (3.16):

$$\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{B}\mathbf{p} = \bar{\mathbf{t}}_r \quad (3.16)$$

Na equação (3.16), $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez do elemento finito, definida no domínio, $\mathbf{B}$ a matriz de fronteira, definida nas fronteiras essenciais, e $\bar{\mathbf{t}}_r$ o vetor das forças aplicadas, definido nas fronteiras de Neumann.

3.3.2 Equação nas fronteiras

A condição de compatibilidade (2.17) é imposta em forma fraca nas fronteiras essenciais, utilizando as funções contidas na base das forças $\mathbf{Z}$ para ponderação. Sendo assim, é obtida a equação (3.17):

$$\int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{u} d\Gamma_u^e = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{u}_r d\Gamma_u^e \quad (3.17)$$

Aplicando a aproximação dos deslocamentos no domínio (3.3), a equação (3.17) assume a forma da equação (3.18):

$$\int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Psi} d\Gamma_u^e \mathbf{q} = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{u}_r d\Gamma_u^e \quad (3.18)$$

Portanto, substituindo a definição (3.14) na equação (3.18), obtém-se a segunda equação do sistema resolutivo, expressa pela equação (3.19):

$$-\mathbf{B}^T \mathbf{q} = -\bar{\mathbf{u}}_r \quad (3.19)$$

tal que $\bar{\mathbf{u}}_r$, pode ser expresso pela equação (3.20):

$$\bar{\mathbf{u}}_r = \int_{\Gamma_u^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{u}_r d\Gamma_u^e \quad (3.20)$$

A imposição em forma fraca nas fronteiras essenciais interiores, conforme a definição (3.1), a considerar dois elementos adjacentes i e j , é dada pela expressão (3.21):

$$\int_{\Gamma_{int}^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{u}^i d\Gamma_{int}^e = \int_{\Gamma_{int}^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{u}^j d\Gamma_{int}^e \quad (3.21)$$

Aplicando a aproximação dos deslocamentos no domínio (3.1) na equação (3.21), obtém-se a equação (3.22):

$$\int_{\Gamma_{int}^e} \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Psi}^i d\Gamma_{int}^e \mathbf{q}_i = \int_{\Gamma_{int}^e} \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\Psi}^j d\Gamma_{int}^e \mathbf{q}_j \quad (3.22)$$

Escrevendo a equação (3.22) na forma matricial, obtém-se a terceira equação que compõe o sistema resolutivo, dada pela expressão (3.23):

$$-\mathbf{B}^{iT} \mathbf{q}^i + \mathbf{B}^{jT} \mathbf{q}^j = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

Juntando as equações estabelecidas no domínio (3.16) e nas fronteiras (3.19) e (3.23) escreve-se o sistema resolutivo na forma matricial dada pela equação (3.24):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_r \\ -\bar{\mathbf{u}}_r \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

3.4 Condição de Trefftz

O sistema governativo (3.24) é obtido através de duas aproximações de maneira independente, nomeadamente no domínio e nas fronteiras. Para além das habituais restrições de independência linear, não há limitações em termos do tipo de funções a serem inseridas nas bases $\boldsymbol{\Psi}$ e $\mathbf{Z}$.

A condição de Trefftz (3.25) é uma particularidade dos elementos finitos híbridos-Trefftz. Tal condição impõe o uso funções de aproximação das bases $\boldsymbol{\Psi}$ que satisfaçam a equação de Navier (2.16).

$$DkD^*\Psi = 0 \quad (3.25)$$

Assim, aplica-se o teorema da divergência na equação (3.13), obtendo assim a equação (3.26)

$$\begin{aligned} K &= \int_{V^e} (D^*\Psi)^T k (D^*\Psi) dV^e = \int_{V^e} (D^*\Psi)^T S dV^e \\ &= \int_{V^e} \Psi^T n S d\Gamma^e - \int_{V^e} \Psi^T D S dV^e \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sabendo que as bases no domínio satisfazem a condição de Trefftz, a expressão da matriz de rigidez é expressa conforme equação (3.27):

$$K = \int_{\Gamma^e} \Psi^T (nS) d\Gamma^e \quad (3.27)$$

O uso desta condição na expressão da matriz de rigidez K , possui uma vantagem que é o desaparecimento das integrais no domínio e todos os blocos do sistema resolutivo são definidos apenas com integrais nas fronteiras dos elementos.

3.5 Funções de aproximação

A partir da condição de Trefftz (3.25) encontram-se as funções da base Ψ que satisfaçam a equação de Navier que se apresenta na equação (3.28) na sua forma explícita:

$$\nabla(k_{12} + k_{33})\nabla^T\Psi + k_{33}\nabla^2\Psi = 0 \quad (3.28)$$

sendo ∇ o operador gradiente expresso na equação (3.29):

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

e ∇^T , o operador divergência, expresso na equação (3.30):

$$\nabla^T = (\partial x \quad \partial y) \quad (3.30)$$

e ∇^2 , o operador Laplaciano, expresso na equação (3.31)

$$\nabla^2 = \partial x^2 + \partial y^2 \quad (3.31)$$

sendo k_{ij} , o termo da linha i da coluna j das matrizes de rigidez do material correspondentes aos estados planos de tensão ou deformação. Os termos k_{11} e k_{22} são eliminados conforme o sistema (3.32)

$$\begin{cases} k_{22} = k_{11} \\ k_{11} = k_{12} + 2k_{33} \end{cases} \quad (3.32)$$

A equação explícita de Navier (3.28) admite duas classes de soluções, obtidas utilizando funções potenciais harmônicas e bi-harmônicas, que correspondem às parcelas Ψ_h e Ψ_b da base dos deslocamentos Ψ . As soluções das funções do tipo harmônicas são obtidas assumindo que o campo de deslocamentos $\mathbf{u}$ é definido como o gradiente de uma função potencial φ_h , conforme expresso na equação (3.33)

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi_h = \begin{pmatrix} \varphi_{,x} \\ \varphi_{,y} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Ao substituir a equação (3.33) na equação (3.28), obtém-se a equação (3.34)

$$\nabla[(k_{12} + k_{33})\nabla^2 \varphi_h] + k_{33}\nabla\nabla^2 \varphi_h = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

Portanto, para satisfazer a equação explícita de Navier, basta que o Laplaciano das funções potenciais seja igual a zero $\nabla^2 \varphi = 0$. As famílias de funções potenciais harmônicas que respeitam essa condição estão expressas na equação (3.35):

$$\varphi(r, \theta) = (r^{n+1}\sin(n+1)\theta \mid r^{n+1}\cos(n+1)\theta \mid \ln(r) \mid \theta) \quad (3.35)$$

sendo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$.

Na definição (3.35), a restrição $n \geq 1$, justifica-se pelo fato de que valores menores que zero, retornam campos de deslocamentos e tensões singulares, respetivamente.

Apesar de todas as funções da equação (3.35) satisfazerem a equação harmônica, as funções $\ln(r)$ e θ possuem particularidades. A primeira é um potencial singular em $r = 0$ e quando inserida na base de aproximação providencia campos de deslocamentos e tensões com valores infinitos, chamados também de campos singulares. A segunda, quando inserida na base de aproximação possui a capacidade de expressar campos descontínuos que pode haver em problemas estruturais, como por exemplo em elementos fendilhados. No entanto, ambos os cenários não serão trabalhados no âmbito desta tese e as soluções serão buscadas somente pelas duas primeiras famílias de funções expressas na equação (3.36).

Nota-se que as famílias de funções potenciais são expressas nas coordenadas polares e não Cartesianas. Esta opção é justificada pelos resultados de estudos anteriores [3], que revelaram que os potenciais em coordenadas polares produzem soluções mais estáveis.

$$\varphi(r, \theta) = (r^{n+1} \text{sen}(n+1)\theta \mid r^{n+1} \text{cos}(n+1)\theta) \quad (3.36)$$

Sendo assim, a base Ψ_h é dada pela expressão (3.37):

$$\Psi_h(r, \theta) = r^n \begin{pmatrix} \text{sen}(n+1)\theta & \text{cos}(n+1)\theta \\ \text{cos}(n+1)\theta & -\text{sen}(n+1)\theta \end{pmatrix}, n \geq 1 \quad (3.37)$$

Em relação à segunda classe de funções, a solução é obtida assumindo que o campo de deslocamentos é da seguinte forma expressa na equação (3.38):

$$\Psi_b = [(k_{12} + k_{33})\tilde{\nabla} \tilde{\nabla}^T \varphi] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_{33} \nabla^2 \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

sendo $\tilde{\nabla}$ o operador rotacional, conforme expresso na equação (3.39):

$$\tilde{\nabla} = \begin{pmatrix} -\partial y \\ \partial x \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

tal que $\tilde{\nabla}^T \tilde{\nabla} = \nabla^2$ e $\tilde{\nabla}^T \nabla = 0$.

Para satisfazer agora a equação explícita de Navier com a definição (3.38), as soluções precisam ser tal que $\nabla^4 \varphi = 0$. As famílias de funções potenciais bi-harmônicas que respeitam a condição são expressas na equação (3.40).

$$\varphi(r, \theta) = (r^{n+1} \text{sen}(n-1)\theta \mid r^{n+1} \text{cos}(n-1)\theta \mid r^2 \ln(r) \mid r^2 \theta) \quad (3.40)$$

Pelo mesmo motivo explicado anteriormente, das quatro famílias serão utilizadas apenas as seguintes expressas na equação (3.41):

$$\varphi(r, \theta) = (r^{n+1} \text{sen}(n-1)\theta \mid r^{n+1} \text{cos}(n-1)\theta) \quad (3.41)$$

Portanto, as funções potenciais inseridas na base do campo dos deslocamentos para as funções bi-harmônicas são expressas na equação (3.42)

$$\Psi_b(r, \theta) = r^n \begin{pmatrix} a \text{sen}[(n-1)\theta] & a \text{cos}[(n-1)\theta] \\ b \text{cos}(n-1)\theta & b \text{sen}[(n-1)\theta] \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

sendo, $a = [k_{33}(n-3) + k_{12}(n-1)]$, $b = [k_{33}(n+3) + k_{12}(n+1)]$ e $n \geq 1$. Nota-se que para o caso das funções potenciais bi-harmônicas, $n = 1$ é uma situação particular, pois resulta num

deslocamento de corpo rígido para uma dessas famílias e por consequência subtrai-se um modo das funções bi harmônicas, de modo a ficar inserido na base (3.49) os deslocamentos de corpo rígido.

Tendo as bases dos deslocamentos, as bases das deformações e das tensões podem ser obtidas aplicando as condições de compatibilidade e elasticidade para os dois tipos de funções, como mostrado nas equações (3.43), (3.44)

- Condição de compatibilidade:

$$\mathbf{E}_{h/b}(r, \theta) = \mathbf{D}^* \boldsymbol{\Psi}_{h/b}(r, \theta) \quad (3.43)$$

sendo $\mathbf{D}^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{1/r} & \frac{0}{\frac{1}{r} \partial \theta} \\ \frac{1}{r} \partial \theta & -\frac{1}{r} + \partial r \end{pmatrix}$.

- Condição de elasticidade:

$$\mathbf{S}_{h/b}(r, \theta) = \mathbf{k} \mathbf{E}_{h/b}(r, \theta) \quad (3.44)$$

Dessa forma, são estabelecidas as funções de aproximação referentes ao campo das deformações para as bases harmônica (3.45) e bi-harmônicas (3.46):

$$\mathbf{E}_h(r, \theta) = nr^{n-1} \begin{pmatrix} \begin{matrix} \text{sen}[(n+1)\theta] & \cos[(n+1)\theta] \\ -\text{sen}[(n+1)\theta] & -\cos[(n+1)\theta] \\ 2 \cos[(n+1)\theta] & -2 \text{sen}[(n+1)\theta] \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{E}_b(r, \theta) = nr^{n-1} \begin{pmatrix} \begin{matrix} a \text{sen}[(n-1)\theta] & a \cos[(n-1)\theta] \\ b \text{sen}[(n-1)\theta] & -b \cos[(n-1)\theta] \\ c \cos[(n-1)\theta] & c \text{sen}[(n-1)\theta] \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

sendo $a = [k_{33}(n-3) + k_{12}(n-1)]$, $b = [k_{33}(n+1) + k_{12}(n-1)]$ e $c = [2(k_{12} + k_{33})(n-1)]$

Do mesmo modo, são estabelecidas as funções de aproximação referente ao campo das tensões para os tipos harmônicas (3.47) e bi-harmônicas (3.48):

$$\mathbf{S}_h(r, \theta) = 2k_{33}nr^{n-1} \left(\begin{array}{c|c} \text{sen}[(n+1)\theta] & \cos[(n+1)\theta] \\ -\text{sen}[(n+1)\theta] & -\cos[(n+1)\theta] \\ \hline \cos[(n+1)\theta] & -\text{sen}[(n+1)\theta] \end{array} \right) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{S}_b(r, \theta) = 2k_{33}(k_{12} + k_{33})nr^{n-1} \left(\begin{array}{c|c} (n-3)\text{sen}[(n-1)\theta] & (n-3)\cos[(n-1)\theta] \\ -(n+1)\text{sen}[(n-1)\theta] & -(n+1)\cos[(n-1)\theta] \\ \hline (n-1)\cos[(n+1)\theta] & -(n-1)\text{sen}[(n+1)\theta] \end{array} \right) \quad (3.48)$$

Às bases Ψ_h e Ψ_b tem-se de acrescentar funções de aproximação que não envolvem as tensões, ou seja, envolvem os deslocamentos de corpo rígido. A primeira parcela representa o movimento de rotação pura, a segunda e a terceira representam o deslocamento constante em x e em y , respetivamente, conforme expresso na equação (3.49):

$$\Psi_r = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ r & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

3.6 Indeterminação estática e cinemática

As bases de aproximação nos domínios e nas fronteiras do sistema resolutivo apresentado na equação (3.24) devem ser definidas de modo a assegurar que o problema seja estaticamente e cinematicamente indeterminado. Feito isso, é possível obter uma solução possível para o problema, evitando a presença de equações linearmente dependentes e consequentemente erros numéricos na resolução do problema.

Para garantir a indeterminação estática (α), as forças generalizadas do vetor $\mathbf{p}$ não podem ser determinadas somente com as equações de equilíbrio no domínio dos elementos (3.16). Portanto, α é a diferença entre o número total de graus de liberdade presentes nas equações de equilíbrio e o número de equações do sistema que compõem as condições de equilíbrio. Por outro lado, para garantir também a indeterminação cinemática (β), os deslocamentos generalizados $\mathbf{q}$ não podem ser determinados somente pelas equações de compatibilidade nas fronteiras essenciais (3.19) e (3.23). Portanto, β é a diferença entre o número de graus de liberdade presentes nas equações de compatibilidade na fronteira e o número de equações do sistema que compõem as condições de compatibilidade.

Sendo N_D o número total de termos presentes no vetor $\mathbf{q}$ e N_F o número total de termos presentes no vetor $\mathbf{p}$, determina-se α e β através das equações (3.50) e (3.51), respetivamente

$$\alpha = (N_D + N_r - 3) - N_D = N_r - 3 \geq 0 \quad (3.50)$$

sendo 3 o valor a ser subtraído da equação, pois corresponde ao deslocamento de corpo rígido, e

$$\beta = N_D - N_r \geq 0 \quad (3.51)$$

3.7 Energia de deformação

Quando sobre um sólido deformável atuam forças exteriores e este se deforma se produz um trabalho destas forças que se armazena no corpo em forma de energia potencial elástica e, portanto, se produzirá um aumento da energia interna. O sólido se comportará elasticamente se este incremento de energia pode realizar-se de forma reversível, este caso dizemos que o sólido é elástico.

A energia de deformação é definida pela equação (3.52):

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.52)$$

Através das condições de compatibilidade (3.4) e de elasticidade (3.5) e empregando as aproximações dos campos dos deslocamentos (3.3) e aproveitando a definição (3.13), é possível obter a estimativa da energia de deformação, por meio da equação (3.53):

$$U_{FE} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (3.53)$$

REFINAMENTO 'P'-ADAPTATIVO

4.1 Introdução

Na solução de problemas de engenharia utilizando o método dos elementos finitos, o refinamento tem como objetivo melhorar a qualidade da solução. Existem três principais tipos de refinamento, são estes o 'h', o 'p' e o 'h-p'. O refinamento do tipo 'h' é o mais comum e consiste no aumento da quantidade de elementos finitos na malha e o refinamento do tipo 'p' consiste no aumento do número de funções contidas nas bases de aproximação. O refinamento do tipo 'h-p' consiste nos refinamentos do tipo 'p' e 'h' concomitantemente.

O refinamento do tipo 'h' nos elementos híbridos-Trefftz tem a vantagem de que os elementos podem se adequar a estrutura e são menos sensíveis a questões como distorção de malha, grandes gradientes de tensões entre outros, comuns nos elementos finitos convencionais [22, 31].

Nos elementos finitos híbridos-Trefftz as bases de aproximação contidas no domínio dos elementos e nas fronteiras possuem caráter hierárquico. Tal característica cria condições favoráveis à implementação do refinamento do tipo 'p'-adaptativo, de modo que é possível aproveitar a solução do problema a cada iteração do refinamento, uma vez que as novas funções adicionadas não interferem no sistema existente. Além disso, as bases são independentes dos nós, fato que confere uma flexibilidade adicional ao sistema, pois podem ser refinadas independentemente uma das outras podendo ser um recurso a ser explorado em problemas onde existem regiões as quais o enriquecimento das bases de aproximação se torna necessário para a obtenção de uma melhor solução.

Para além disso, outra vantagem é a elevada taxa de convergência da solução, tornando o refinamento 'p' fundamental para a utilização prática, como demonstrado por Silva [4]. O

refinamento do tipo 'p'-adaptativo, apresentado neste trabalho, tem como objetivo melhorar a qualidade das soluções obtidas pelos elementos finitos híbridos-Trefftz, através da determinação dos graus 'ótimos' das funções de aproximação no domínio dos elementos e nas fronteiras essenciais da malha de maneira automática.

4.2 Bases hierárquicas

Bases hierárquicas é o nome dado às bases cujo refinamento do tipo 'p' não altera as funções pré-existentes, ou seja, as novas funções são adicionadas ao final da base de cada fronteira ou elemento. Em um problema com elementos finitos híbridos-Trefftz, a utilização das bases hierárquicas é fundamental para que o refinamento 'p'-adaptativo seja feito da maneira mais otimizada possível, pois na reconstrução do sistema os novos coeficientes são adicionados de maneira independente ao fim de cada base e por consequência garantem que as informações existentes possam ser reutilizadas na busca de uma solução ótima e aproximada e acaba por tornar bastante eficiente sua implementação computacional.

O mesmo não ocorre nos elementos finitos convencionais, pois não é possível redefinir as funções em um único elemento refinável, mas sim é preciso que isso seja feito em todos os elementos da malha. A razão para isso é que é preciso manter a conformidade dos elementos da malha significando que os nós devem ser coincidentes com os elementos vizinhos. Ou seja, ao aumentar os nós no elemento a esquerda, deve-se também aumentar no elemento a direita e assim sucessivamente até que esse processo seja feito para todos os elementos da malha.

As bases de aproximação das forças de uma ou mais fronteiras a serem refinadas podem ser expressas conforme a definição

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{Z} \mid \tilde{\mathbf{Z}}] \quad (4.1)$$

sendo, $\mathbf{Z}$ a base existente e $\tilde{\mathbf{Z}}$ as funções a serem adicionadas na respectiva fronteira.

4.3 Refinamento 'p'-adaptativo na fronteira

A partir do sistema governativo retornado ao final da primeira iteração, ou no passo anterior (3.24), considera-se a adição das novas funções na(s) base(s) de aproximação das forças, originando o sistema (4.2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{B} & -\tilde{\mathbf{B}} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p} \\ \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_r \\ -\bar{\mathbf{u}}_r \\ \tilde{\mathbf{u}}_r \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

sendo $-\tilde{\mathbf{B}}$ o termo novo da matriz de fronteira adicionado ao sistema; $\tilde{\mathbf{q}}$ o coeficiente das novas bases $\tilde{\mathbf{Z}}$, referente aos novos graus de liberdade acrescentados ao sistema; $\Delta\mathbf{p}$ e $\Delta\mathbf{q}$ o adicional do coeficiente de cada termo da solução anterior o que resultará numa nova solução; $\tilde{\mathbf{u}}_r$ são as projeções dos deslocamentos impostos aplicado às fronteiras do tipo Dirichlet nas novas funções da base $\tilde{\mathbf{Z}}$.

No novo sistema (4.2), nota-se que a estrutura da matriz dos coeficientes é preservada do sistema da iteração anterior (3.24) e para simplificação esta será definida por $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. Nota-se também o novo sistema que advém do processo de refinamento acarreta em duas consequências. A primeira é o surgimento de novos termos no vetor das incógnitas, nomeadamente o $\tilde{\mathbf{q}}$, e estes são termos que são relacionados com novas bases adicionadas. A segunda consequência é a alteração das soluções do sistema da iteração anterior (3.24) e materializa-se por meio do aparecimento dos termos $\Delta\mathbf{p}$ e $\Delta\mathbf{q}$ que se somam às soluções já obtidas no passo anterior e por fim, surge um novo termo $\tilde{\mathbf{u}}_r$ no vetor livre.

Reescrevendo o sistema (3.24) e o (4.2) na forma explícita, respetivamente, obtém-se os sistemas (4.3) e (4.4).

$$\begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{p} - \mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{t}_r \\ -\mathbf{B}^T\mathbf{p} = \mathbf{u}_r \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{K}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) - \mathbf{B}(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}) - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{t}}_r \\ -\mathbf{B}^T(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = -\bar{\mathbf{u}}_r \\ -\tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = -\tilde{\mathbf{u}}_r \end{cases} \quad (4.4)$$

Ao substituir os termos conhecidos das equações do sistema (4.3) nas equações do sistema (4.4), é possível reescrever um sistema único em termos das novas quantidades (4.5):

$$\begin{cases} \mathbf{K}\Delta\mathbf{p} - \mathbf{B}\Delta\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^T\Delta\mathbf{p} = \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{B}}^T\Delta\mathbf{p} = -\tilde{\mathbf{u}}_r + \tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{p} \end{cases} \quad (4.5)$$

Na forma matricial, o sistema (4.5) fica:

$$\begin{pmatrix} K & -B & -\tilde{B} \\ -B^T & 0 & 0 \\ -\tilde{B}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{u}_r + \tilde{B}^T p \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

O termo $(-\tilde{u}_r + \tilde{B}^T p)$ do sistema (4.6) acaba por se tornar um critério de avaliação do quanto a solução da última iteração é alterada na presente iteração. Este termo representa o resíduo na equação de continuidade das forças que é corrigido na presente iteração através do aumento da ordem das bases de aproximação das fronteiras na direção normal e/ou tangencial escolhidas para serem refinadas. Caso este termo seja nulo, o aumento da ordem nas bases dessas fronteiras não provoca variação da solução e a função nesta situação é denominada de modo espúrio.

Para estruturar o processo de refinamento 'p'-adaptativo, é preciso reconhecer e aproveitar os termos já calculados. Do lado esquerdo, teremos a matriz A , o novo termo $\begin{pmatrix} \tilde{B} \\ 0 \end{pmatrix}$, o qual contém a nova matriz de fronteira associado as bases adicionadas em decorrência do processo de refinamento e que será chamado de $\tilde{B}^*$ e vetor da nova solução do sistema, $\begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{pmatrix}$, será chamada de Δx .

Com essa notação, escreve-se o seguinte sistema equivalente ao sistema (4.6) definido em (4.7):

$$\begin{pmatrix} A & -\tilde{B}^* \\ -\tilde{B}^{*T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{u}_r + \tilde{B}^T p \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Reescrevendo o sistema (4.7) em sua forma explícita, temos o sistema (4.8)

$$\begin{cases} A\Delta x = \tilde{B}^* \tilde{q} \\ -\tilde{B}^{*T} \Delta x = -\tilde{u}_r + \tilde{B}^T p \end{cases} \quad (4.8)$$

No entanto, considera-se o sistema generalizado (4.9), no qual $\tilde{B}^*$ pode ser um vetor ou uma matriz com 'c' colunas de acordo com a quantidade de 'c' funções acrescentadas e o $\dot{X}$ terá a mesma dimensionalidade do $\tilde{B}^*$.

$$A\dot{X} = \tilde{B}^* \quad (4.9)$$

sendo $\dot{X}$ o gradiente da solução anterior Δx causadas pelos novos termos $\tilde{q}$.

Nota-se que é possível reaproveitar a matriz A da equação (4.9), que advém da iteração anterior sendo possível reescrevê-la conforme a equação (4.10):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}^* \quad (4.10)$$

sendo, $\mathbf{A}^{-1}$ a inversa de da matriz dos coeficientes do passo anterior.

Posteriormente, substituindo a equação (4.10) na primeira equação do sistema (4.8), obtém-se um novo sistema que pode ser escrito na forma equivalente, conforme a relação (4.11).

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{B}}^* \mathbf{q} \leftrightarrow \Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}^* \tilde{\mathbf{q}} \quad (4.11)$$

Conhecido o $\dot{\mathbf{X}}$, equação (4.11) pode ser escrita conforme a equação (4.12):

$$\Delta \mathbf{x} = \dot{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{q}} \quad (4.12)$$

Ao substituir a equação (4.12) na segunda equação do sistema (4.8), obtém-se a equação (4.13):

$$-\tilde{\mathbf{B}}^* \dot{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{q}} = -\tilde{\mathbf{u}}_r + \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{p} \quad (4.13)$$

Por fim, é possível calcular os termos $\tilde{\mathbf{q}}$, sendo estes os novos valores relativos aos novos graus de liberdade acrescentados no sistema.

$$\tilde{\mathbf{q}} = (-\tilde{\mathbf{B}}^* \dot{\mathbf{X}})^{-1} (-\tilde{\mathbf{u}}_r + \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{p}) \quad (4.14)$$

Calculado $\tilde{\mathbf{q}}$, a variação $\Delta \mathbf{x}$ é obtida através da equação (4.12).

Por fim, resolve-se o novo sistema (4.7) e com isso a resolução do sistema governativo global não se torna necessária para avaliar o impacto da nova iteração na solução.

Dessa forma, o algoritmo foi elaborado de tal maneira que é preciso obter $\dot{\mathbf{X}}$ reaproveitando $\mathbf{A}^{-1}$ obtida no passo anterior. No passo seguinte, obtém-se as incógnitas associadas às novas bases adicionadas, e uma vez tendo as forças generalizadas contidas no vetor $\tilde{\mathbf{q}}$ obtém-se as variações $\Delta \mathbf{x}$, que contém os termos ($\mathbf{p}$) e ($\mathbf{q}$) do passo anterior.

4.4 Refinamento 'p'-adaptativo no domínio

O refinamento no domínio não é realizado de maneira independente, sendo uma consequência do refinamento das fronteiras e da avaliação da estabilidade numérica do sistema resolutivo. Três critérios de refinamento no domínio têm como objetivo evitar o

demasiado condicionamento das respectivas bases de aproximação ou quando há a presença de sistemas singulares:

- Garantir um grau de indeterminação cinemática positivo ($\beta > 0$) para todos os elementos da malha. Caso o aumento do grau das bases das fronteiras provoque um grau de indeterminação cinemática nulo em um ou mais elementos, procede-se com o refinamento das bases de aproximação destes elementos.
- Se alguma fronteira listada para o refinamento também esteja registrada como uma fronteira que causa modos espúrios, então todos os elementos adjacentes a essa fronteira são refinados.
- Se a ordem da base de aproximação do domínio de um elemento é menor ou igual à ordem das bases de aproximação das suas fronteiras adjacentes, procede-se com o refinamento do respectivo elemento.

Em relação à estabilidade numérica do sistema resolutivo, esta é verificada utilizando os critérios discutidos na próxima secção. Uma vez identificado um mal condicionamento do sistema após o processo de refinamento 'p'-adaptativo, o algoritmo procede por tentar reestabelecer a estabilidade do sistema, enriquecendo as bases de aproximação no domínio.

4.5 Estabilidade do sistema resolutivo

O controle da estabilidade numérica é de extrema importância na implementação de algoritmos que resolvem problemas numéricos para garantir a validade e a qualidade da solução obtida. Foram aplicados neste trabalho dois métodos para a mitigação desses possíveis erros.

O primeiro método empregado é o pré-condicionamento do sistema governativo através da técnica de escalonamento (scaling). Esta baseia-se em criar uma matriz em que os valores da diagonal principal são iguais a inversa da raiz quadrada do termo diagonal da matriz dos coeficientes do sistema original. O produto destas matrizes resulta num sistema simétrico equivalente e que possibilita o cálculo do sistema governativo diminuindo o risco de erros numéricos. Se um termo da matriz diagonal é nulo, o termo escalado correspondente é igual a um valor unitário e o escalonamento não é realizado na respetiva linha e coluna. Este método se mostrou bastante eficiente para diminuir o número de condição do sistema resolutivo e é explicado com mais pormenores na secção 5.4.3.

O segundo método para controlar a estabilidade do sistema é a constante avaliação do número de condição, seja na resolução do sistema sem ou com o processo de refinamento

automático do tipo 'p'. O número de condição é definido pelo quociente entre o maior e o menor valor singular da matriz dos coeficientes do sistema (3.24). Este é o parâmetro utilizado para a validação da estabilidade do algoritmo, uma vez que o sistema é considerado como mal condicionado quando a inversa do número de condição é inferior à precisão da máquina ($\epsilon_{ps} = 2.2204 \times 10^{-16}$). Se o sistema se torna mal condicionado durante o processo de resolução do problema, este é resolvido através da pseudo-inversa de Moore-Penrose.

É importante ressaltar que um número de condição maior que a precisão da máquina não assegura um sistema livre de erros numéricos, entretanto para os problemas desenvolvidos no âmbito deste trabalho, este método de controle funcionou de maneira satisfatória garantindo boas soluções e a mitigação da deterioração do sistema. Geraldès [3] também desenvolveu trabalhos utilizando EFHT e utilizou outros métodos de controle de estabilidade para além do número de condição, baseado na análise dos valores singulares, contudo não está no escopo de aplicação deste trabalho.

4.6 Procedimento para o refinamento 'p'-adaptativo

O processo de refinamento 'p'-adaptativo consiste na seleção automática das direções (normal e/ou tangencial) das fronteiras a serem refinadas através de um processo iterativo. Nesta seção estão descritas as premissas e as orientações para a execução do procedimento 'p'-adaptativo pelo algoritmo, baseado no que foi exposto nas seções 4.3 e 4.4. O procedimento de refinamento automático segue conforme os critérios de refinamento e os critérios de paragem definidos pelo usuário e se baseiam na verificação dos indicadores de erros locais e globais que orientam o processo de seleção da parte a ser refinada e de convergência da solução do problema.

4.6.1 Critérios de refinamento

A seleção automática das fronteiras a refinar pode ocorrer com base no critério de refinamento da variação da energia de deformação ou no critério da densidade máxima do resíduo na fronteira. O cálculo dos indicadores é feito aumentando em uma ordem as bases das funções de aproximação de cada fronteira para cada direção. Por fim, é feita uma hierarquização das fronteiras que causam o maior impacto na solução em termos do critério de refinamento selecionado.

Critério da variação da energia de deformação

Este critério de refinamento, também um indicador de erro global, baseia-se no cálculo da variação da energia de deformação de uma iteração para a outra, conforme equação (4.15), provocada pelo enriquecimento das bases de aproximação em cada direção (normal e tangencial) das fronteiras essenciais. As direções das fronteiras que resulta numa maior variação energética é selecionada para o refinamento

$$\Delta U = \|U_{it-1} - U_{it}\| \quad (4.15)$$

onde U_{it-1} é a energia de deformação calculada ao fim da iteração anterior do processo de refinamento e U_{it} é a energia do sistema calculada considerando o enriquecimento de uma direção de uma determinada fronteira.

Critério da densidade máxima do resíduo na fronteira

Este critério de refinamento, também um indicador de erro local, baseia-se no cálculo demonstrado na equação (4.16). O resíduo é o termo livre do sistema (4.6) dividido por um fator de escala L e que representa o comprimento da respectiva fronteira. Este critério visa escolher as direções e fronteiras em que o refinamento minimize o respetivo resíduo, conforme discutido na seção 4.3, dessa maneira a fronteira onde o resíduo normalizado mais se reduz com o acréscimo de funções na base é selecionada para o refinamento

$$\epsilon_r = \left\| \frac{-\tilde{\mathbf{u}}_r + \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{p}}{L} \right\| \quad (4.16)$$

Tolerância de seleção

Em algumas situações, como por exemplo problemas com estruturas simétricas, mais de uma fronteira pode ter os mesmos valores dos critérios de refinamento. De modo a não negligenciar a necessidade de refinamento de múltiplas fronteiras em determinados casos e evitar possíveis erros de pontos flutuantes, é definido pelo usuário uma tolerância de seleção (tol_{CS}).

Assim, as direções das fronteiras a serem refinadas são, para além daquela que causa o maior impacto em termos do critério de refinamento escolhido ($máxC_S$), as que tem o valor do critério de refinamento maior que o produto do maior valor e a tolerância de seleção, segundo equação (4.17)

$$FR \geq tol_{CS} * máxCS \quad (4.17)$$

sendo FR , as fronteiras a serem refinadas.

Contudo, a finalidade de utilização desta tolerância pode ser mais abrangente, considerando que quanto maior a tolerância definida pelo usuário, mais fronteiras serão refinadas de uma só vez. Os impactos causados nas soluções pela tolerância de seleção serão discutidos mais adiante no Capítulo 6.

4.6.2 Critérios de paragem

De modo a controlar o processo de refinamento feito pelo algoritmo, foram definidos dois critérios de paragem baseados na convergência da solução e outros três baseado nos fatores que podem acarretar o mal desempenho do algoritmo na busca de uma solução para o problema, como discutido na seção 4.5.

O refinamento 'p'-adaptativo é feito através de um processo iterativo no qual é feito um monitoramento constante da convergência e verificação se esta está de fato ocorrendo e indo ao encontro da tolerância de convergência definida pelo usuário. Os critérios de paragem por convergência são: o critério de convergência da energia de deformação e o critério de convergência da densidade máxima do resíduo na fronteira.

É importante enfatizar que o demasiado enriquecimento das bases de aproximação pode provocar um efeito contrário ao desejado, provocando erros numéricos e soluções que diverjam do real comportamento da estrutura. Esse é o motivo pelo qual é importante também estabelecer outros critérios de paragem de modo a preservar o sistema e a solução obtida.

Critério de convergência da energia de deformação

Em cada iteração, é calculada a variação do valor da energia de deformação em relação a iteração anterior através da equação (4.18).

$$\Delta U_{it} = \left\| \frac{(U_{it} - U_{it-1})}{U_{it-1}} \right\| \quad (4.18)$$

Dessa forma, quando o valor médio da variação da energia (4.18) nas últimas n iterações (pré-definido pelo usuário) é inferior a tolerância de convergência, o algoritmo para o processo de refinamento e retorna a solução obtida. Portanto, o critério de convergência da energia de deformação fica estabelecido pela equação (4.19).

$$\epsilon_{\Delta U} = \frac{(\sum_{a=it-n}^{it} \Delta U_{it})}{n+1} \leq \text{tolerância de convergência} \quad (4.19)$$

Critério de convergência da densidade máxima do resíduo na fronteira

Em cada iteração, é calculada a variação da densidade máxima do resíduo através do quociente da densidade máxima do resíduo normalizado da presente iteração e da primeira iteração, conforme a equação (4.20).

$$\Delta \epsilon_r = \frac{\|\epsilon_{rit}\|}{\|\epsilon_{r1}\|} \quad (4.20)$$

Dessa forma, quando o valor médio da variação da densidade máxima do resíduo nas últimas n iterações é inferior a tolerância de convergência o algoritmo para o processo de refinamento e retorna a solução obtida. Portanto, o critério de convergência da densidade máxima do resíduo na fronteira fica estabelecido pela equação (4.21).

$$\epsilon_{\epsilon_r} = \frac{(\sum_{a=it-n}^{it} \Delta \epsilon_r)}{n+1} \leq \text{tolerância de convergência} \quad (4.21)$$

Solução exata

Ocorre quando os valores para o critério de refinamento escolhido resultam em variações que podem ser consideradas residuais, ou seja, o valor obtido não ultrapassa o valor estabelecido, pelo usuário, como o zero numérico. Nesse caso, o processo iterativo de refinamento não provocará alteração na solução do problema face a já obtida na iteração anterior. Deste modo, o termo "solução exata" referido neste trabalho é referente ao contexto previamente citado.

Ordem máxima da base de aproximação

Ocorre quando o valor da ordem máxima das bases de aproximação, definida pelo usuário, é atingida. Sendo assim, o processo de refinamento é parado e o programa procede por retornar à solução mais refinada do problema. É importante notar que esse critério é necessário devido ao fato de que o refinamento excessivo é geralmente responsável pelo aparecimento de erros numéricos.

Instabilidade no sistema

Conforme discutido na seção 4.5, o processo de refinamento pode causar uma deterioração do sistema resolutivo e em certas situações o aumento do refinamento do

domínio pode não resolver o problema de instabilidade. Consequentemente, uma vez identificado esse cenário o algoritmo para e retorna a última solução estável para o problema

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO ALGORITMO PARA REFINAMENTO 'P'-ADAPTATIVO

5.1 Introdução

Este capítulo trata da implementação computacional do algoritmo 'p'-adaptativo descrito no capítulo 4. Para isso, são pontuadas as principais alterações na versão atual do programa FreeHyTE – Structural HTD (v1.2.2) nas fases de pré-processamento, processamento e pós-processamento, respectivamente.

A versão atual do programa foi concebida com o objetivo de resolver problemas estruturais em duas dimensões em uma única análise. Para essa análise o programa considera os parâmetros definidos pelo usuário na fase de pré-processamento observando especialmente às ordens das bases de aproximação do domínio dos elementos e das direções de cada fronteira considerando que estas não sofrem alteração na fase de processamento.

É o objetivo desta tese estender as funcionalidades desse programa através da criação de um novo módulo o qual permitirá a solução de problemas estruturais com o *processo de refinamento do tipo 'p'-adaptativo*. Tal processo baseia-se na seleção automática de fronteiras e/ou elementos a refinar e na verificação da convergência da solução a cada iteração. Além disso, foram implementados os critérios de refinamento e os critérios de paragem discutidos no capítulo anterior.

Em todas as fases são apresentados fluxogramas que facilitam o entendimento do algoritmo. Em todos eles, os itens que estão na cor azul se referem às alterações feitas em

virtude da adição de um novo módulo. Os itens que estão na cor cinza já faziam parte da estrutura do algoritmo para a realização da análise única implementada por Silva [4].

5.2 Sistemas de referência

Para a definição do problema é importante que estejam estabelecidos os sistemas de referência do modelo. A Figura 5.1, ilustra os sistemas de referência utilizado neste trabalho indicando os sentidos positivos, seguido de uma breve explicação dos referenciais.

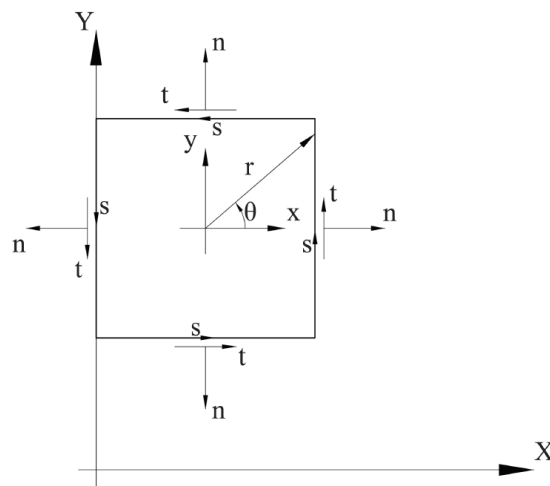


Figura 5.1: Sistemas de referência e indicação dos sentidos positivos

- No referencial global (X, Y) definem-se a geometria da estrutura, bem como as expressões paramétricas das fronteiras. É ainda um referencial necessário para a apresentação dos campos da solução.
- O referencial local Cartesiano (x, y) situa-se com a origem no centróide do elemento. Os seus eixos são orientados paralelamente aos eixos globais coordenados.
- O referencial local polar (r, θ) situa-se geometricamente na posição homóloga à do referencial local Cartesiano. É nele que ficam expressas as funções da base de aproximação do domínio dos elementos.
- O referencial normal-tangencial (n, t) da fronteira permite ao utilizador definir as condições de fronteira, expressas nas suas componentes normal e tangencial, coerentes com a convenção positiva dos sinais. Neste referencial são expressas ainda as equações de compatibilidade entre elementos.
- O referencial na fronteira (s) utiliza-se para definir as funções da base de aproximação nas fronteiras dos elementos e a localização dos pontos de Gauss-

Legendre para os processos de integração numérica necessários para calcular os coeficientes do sistema resolutivo.

5.3 Pré-processamento

O pré-processamento consiste na definição do problema estrutural a ser resolvido e na estruturação dos dados que são inseridos pelo usuário. A caracterização pode ser feita através do GUI (Graphical User Interface) ou através da programação dos dados do modelo. Este último método não será abordado neste trabalho. Posteriormente, os dados de entrada são tratados por funções as quais leem os dados de entrada e compilam os dados topológicos e os organizam para a utilização pelas demais funções.

Além disso, é feita uma verificação das ordens mínimas das bases das funções de aproximação e então o programa segue para a fase de processamento. O fluxograma da Figura 5.2 ilustra a rotina de pré-processamento realizada pelo programa.

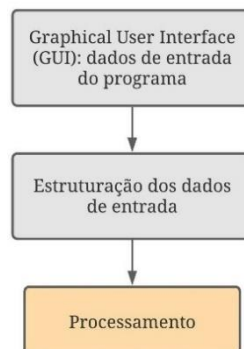


Figura 5.2: Fluxograma da rotina de pré-processamento

5.3.1 Interface gráfica

O programa conta com uma interface gráfica chamada de GUI (Graphical User Interface) através da qual o usuário define os parâmetros do problema. O GUI possui, nessa nova versão, cinco interfaces conforme apresentado no fluxograma da Figura 5.3. No anexo A estão as imagens de cada uma das interfaces (GUI 1 a GUI 5), bem como a pormenorização das informações a serem incluídas em cada campo.

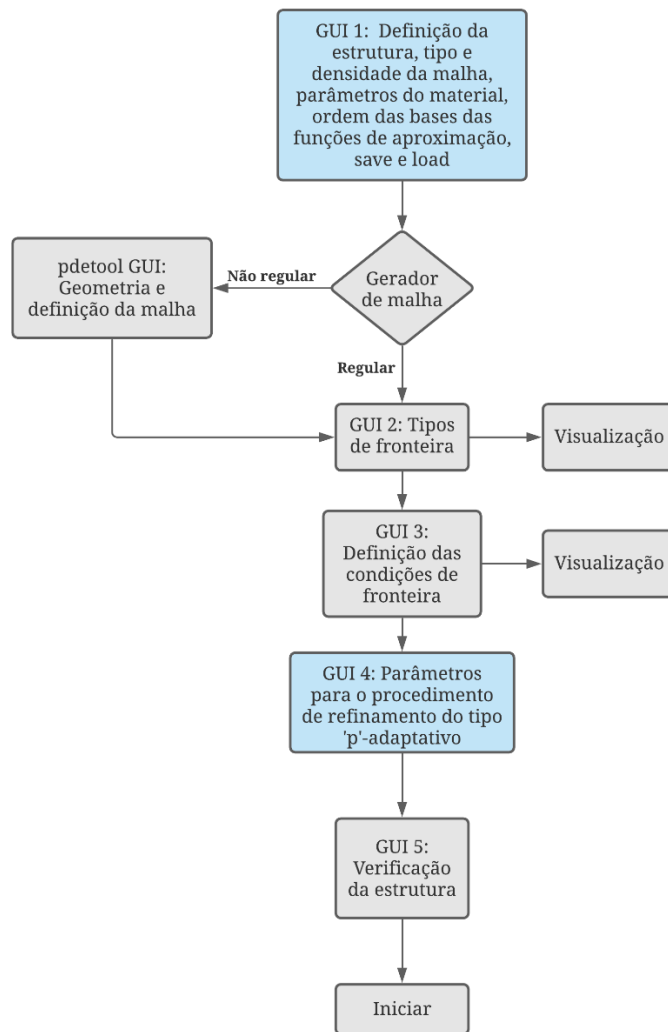


Figura 5.3: Fluxograma das interfaces gráficas (GUI). Adaptado de [34]

De maneira geral, cada interface do GUI requer a entrada dos seguintes dados:

- **GUI 1:** Define-se a geometria da estrutura, o tipo e densidade da malha, os parâmetros do material, o tipo de problema, nomeadamente o estado plano de tensão e o estado plano de deformação, as ordens iniciais das bases de aproximação do domínio e da fronteira dos elementos e a opção para salvar o problema ou de carregar um problema existente.
- **GUI 2:** Definem-se os tipos de fronteira para o problema sendo estas do tipo Dirichlet ou Neumann.

- **GUI 3:** Definem-se as condições das fronteiras sendo estas os valores das forças (para as fronteiras do tipo Neumann) ou deslocamentos (para as fronteiras do tipo Dirichlet).
- **GUI 4:** Definem-se os parâmetros para o procedimento de refinamento do tipo 'p'-adaptativo.
- **GUI 5:** Verificação da estrutura pelo usuário.

Para mais informações à respeito da definição de problemas utilizando a interface GUI, consultar o FreeHyTE Structural HTD User's Manual v 1.2 [34].

Refinamento 'p'-adaptativo

Para a ampliação das funcionalidades do programa foi incluída na interface do GUI 1 um novo campo para a seleção do tipo de análise a ser feita, nomeadamente a análise única ou a análise com refinamento 'p'-adaptativo, como ilustrado na Figura 5.4.

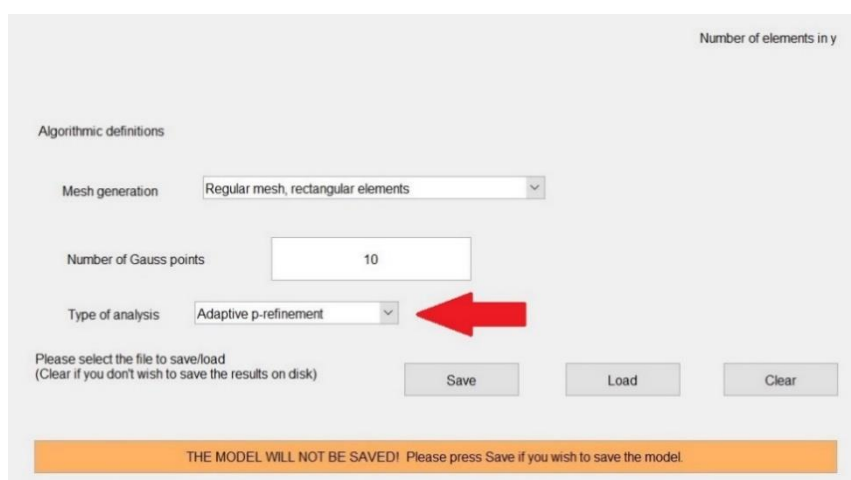


Figura 5.4: GUI 1 - Campo para a seleção do tipo de análise

Além disso, foi acrescentada uma nova interface, GUI 4, antes da interface existente para a *verificação da estrutura*. Essa nova interface permite a definição dos parâmetros para o algoritmo realizar o refinamento 'p'-adaptativo e só aparecerá caso esse tipo de análise seja escolhido pelo usuário no GUI 1, como ilustrado na Figura 5.5.

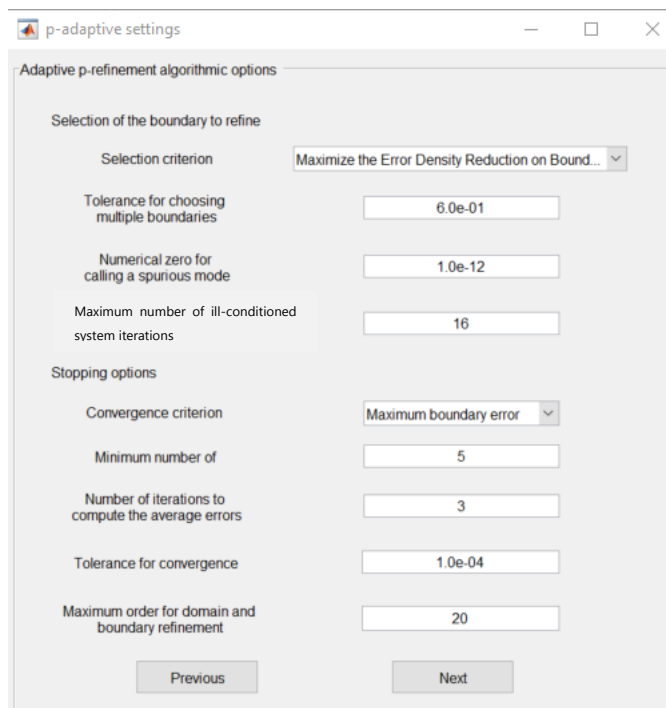


Figura 5.5: GUI 4 - Definição dos parâmetros para o refinamento 'p'-adaptativo

Descrição dos parâmetros para o refinamento 'p'-adaptativo:

- **Critério de seleção (Selection criterion):** Definição do critério de refinamento ser utilizado pelo programa, nomeadamente o da maximização do incremento da energia de deformação e a maximização da redução da densidade do resíduo na fronteira.
- **Tolerância de seleção (Tolerance for choosing multiple boundary):** Definição da tolerância de seleção de múltiplas fronteiras a serem refinadas numa única iteração, conforme discutido na seção 4.5.
- **"Zero numérico" para definição de modos espúrios (Numerical zero for calling a spurious mode):** Definição do valor em que os critérios de seleção serão considerado um zero numérico ou modos espúrios, conforme discutido na seção 4.3.
- **Número máximo de iterações com o sistema mal condicionado (Maximum number of ill-conditioned system iterations):** Definição do número máximo de iterações em que o algoritmo realize o refinamento 'p'-adaptativo de forma que o sistema deixe de ser mal condicionado (ver secção 4.6.2).

- **Critério de convergência (Convergence criterion):** Definição do critério de paragem a ser definido para o problema, nomeadamente o da energia de deformação e da densidade máxima do resíduo na fronteira.
- **Número mínimo de iterações (Minimum number of iterations):** Definição do número mínimo de iterações no processo de refinamento para prevenir convergências espúrias.
- **Número de iterações para calcular o erro médio (Number of iterations to compute the average error):** Definição do número de iterações para que seja calculado a média da variação do critério de paragem escolhido.
- **Tolerância para a convergência (Tolerance for convergence):** Definição do valor limite de convergência para o critério de paragem escolhido.
- **Ordem máxima das bases de aproximação do domínio e das fronteiras (Maximum order for domain and boundary refinement):** Definição da ordem máxima permitida a ser atingida no processo de refinamento, tanto para o domínio dos elementos quanto para as direções (normal e tangencial) das fronteiras.

5.3.2 Gerador de malha

O programa permite o utilizador seleccionar o tipo de malha a ser utilizado. A seleção deve ser baseada na característica da estrutura do problema. Existe um gerador de malhas regulares que pode ser utilizado apenas para estruturas retangulares e um gerador de malhas não-regulares que pode ser utilizado para todo o tipo de geometria.

O gerador de malha regular produz uma malha com elementos finitos retangulares e com tamanhos uniformes. Um modelo é apresentado na Figura 5.6. A opção de refinamento do tipo 'h' para este caso é disponibilizada na interface GUI 1.

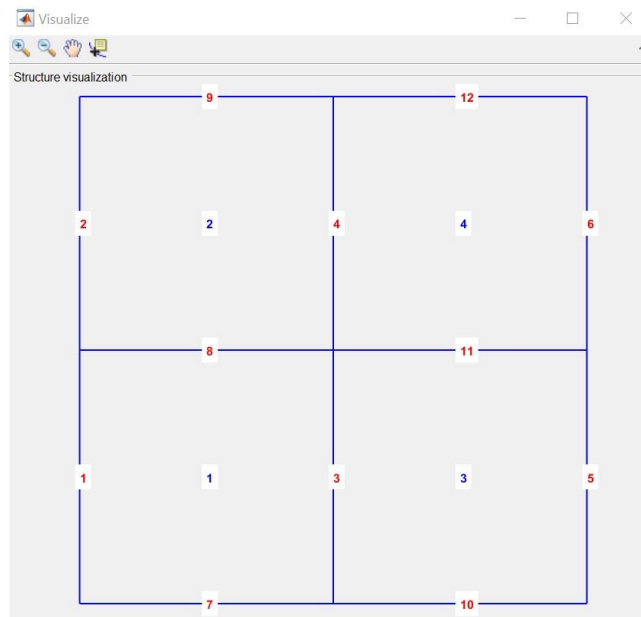


Figura 5.6: Exemplo de uma estrutura com malha regular

O gerador de malha não-regular produz uma malha com elementos finitos triangulares. Um modelo é apresentado na Figura 5.7. Nesse caso, a geração das malhas pode ser feita de duas formas, sendo a primeira programar a geometria no código do Matlab e segunda através da interface GUI pdetool.

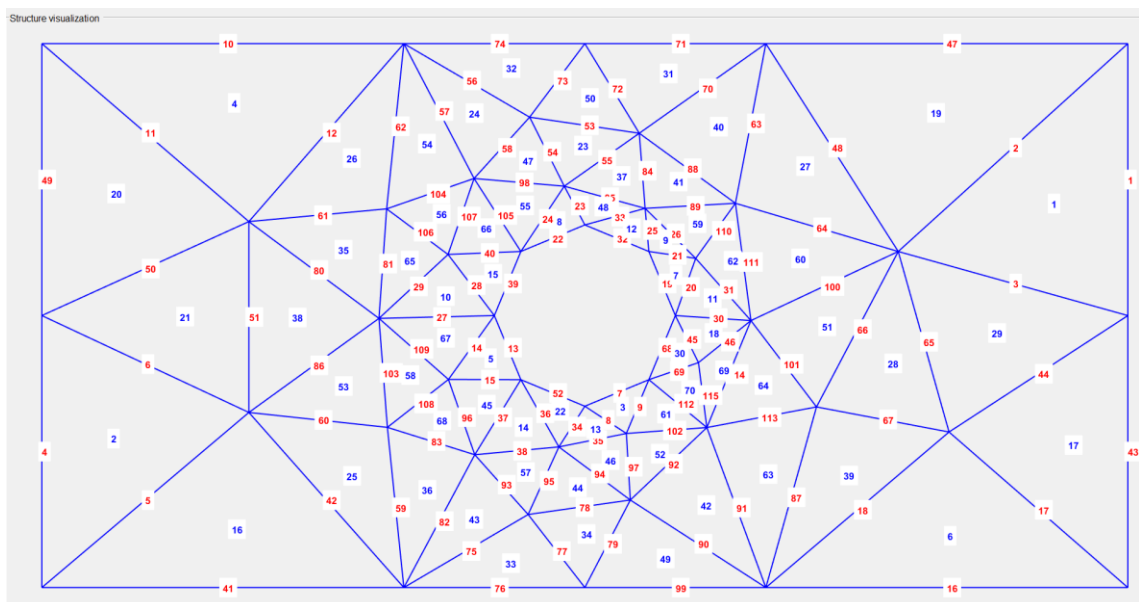


Figura 5.7: Exemplo de uma estrutura com malha irregular

Como regra geral, as dimensões dos elementos finitos híbridos-Trefftz podem ser de 10 a 30 vezes maior que um elemento finito convencional sem comprometer a qualidade dos resultados [34].

5.3.3 Dados topológicos e estrutura de dados

Após a definição do problema, os dados topológicos resultante dos geradores de malha são organizados de acordo com a Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Dados topológicos

Nodes
Loops_nodes
Edges_nodes
Edges_loops
Loops_edges

Abaixo, estão as definições das variáveis dos dados topológicos.

- **Nodes:** Matriz de dimensão igual ao número de nós por dois. Cada linha contém as coordenadas do respetivo nó, no referencial global.
- **Loops_nodes:** Matriz de dimensão igual ao número total de elementos da malha por três ou quatro colunas (a depender do tipo de malha: triangular ou retangular, respectivamente). Cada linha se refere ao número do elemento e nas colunas os índices dos nós de cada elemento.
- **Edges_nodes:** Matriz de dimensão igual ao número total de fronteiras por dois. Cada linha contém os índices dos nós inicial e final para cada fronteira.
- **Edges_loops:** Matriz de dimensão igual ao número de fronteiras por dois. Cada linha contém os índices dos elementos a esquerda e a direita de cada fronteira. Caso seja um elemento exterior, a matriz tem o índice da fronteira apenas em uma coluna, o que facilita o processo de identificação das fronteiras exteriores e das interiores.

Com base nos dados topológicos descritos na secção anterior, o programa constrói 3 estruturas de dados, são elas **Edges**, **Loops** e **BConds**. Estas estruturas estão divididas, por sua vez, em membros que ajudam a manter a simplicidade na organização do algoritmo. Pelo motivo de esta estrutura de dados já pertencer à atual versão do programa, a descrição pormenorizada dessa estrutura será tratada no Anexo A.

Estrutura Edges

A estrutura **Edges** guarda as informações sobre as fronteiras. Na Tabela 5.2 estão listadas o conjunto de variáveis nessa estrutura e no Anexo A estão explicadas a função de cada variável no código.

Tabela 5.2: Variáveis da estrutura Edges

Edges	Edges.nini
	Edges.nfin
	Edges.parametric
	Edges.lleft
	Edges.lright
	Edges.type
	Edges.order
	Edges.insert
	Edges.dim

Estrutura Loops

A estrutura **Loops** guarda as informações sobre os elementos. Na Tabela 5.3 estão listadas o conjunto de variáveis que pertencem a essa estrutura e no Anexo A estão descritas a função de cada variável no código

Tabela 5.3: Variáveis da estrutura Loops

Loops	Loops.nodes
	Loops.edges
	Loops.center
	Loops.area
	Loops.order
	Loops.material
	Loops.insert
	Loops.dim

Estrutura **BConds** guarda as informações sobre as fronteiras. Na Tabela 5.4 estão listadas o conjunto de variáveis que pertencem a estrutura a essa estrutura e no A estão descritas a função de cada variável no código.

Tabela 5.4: Variáveis da estrutura BConds

BConds	BConds.Neumann
	BConds.Dirichlet

Flexibilização do algoritmo para o refinamento 'p'-adaptativo

A implementação da rotina para o refinamento do tipo 'p'-adaptativo conta com uma alteração na estrutura de dados com o objetivo de flexibilizar as variáveis e permitir que as ordens da base das funções de aproximação das fronteiras tenham, tanto para a direção normal como para a tangencial, a possibilidade de receberem valores diferentes de modo que o refinamento do tipo 'p' possa ser executado de forma localizada para cada direção.

Para isso, foi atualizada a variável **Edges.order** que possuía anteriormente a dimensão do número de linhas igual ao número de fronteiras e apenas uma coluna a qual guardava o valor da ordem da base de aproximação que era atribuída para as duas direções para cada fronteira. Essa variável passou a ter duas colunas que guardam os valores das ordens da base das funções de aproximação para a direção normal e tangencial, respectivamente.

Estrutura de dados para refinamento 'p'-adaptativo

Para o refinamento 'p'-adaptativo foi criada uma estrutura chamada **List** e são onde os dados do processo iterativo são guardados. Esta estrutura possui variáveis de dois tipos, sendo o primeiro tipo sem o final 'It' que são variáveis locais responsáveis por armazenar determinadas informações da iteração corrente. Essas variáveis estão listadas na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Variáveis locais da estrutura List

List	List.Edge
	List.EdgesToRefine
	List.SpuriousEdges
	List.SpurEdgeToRefine
	List.LoopsToRefine

Descrição das variáveis locais:

- **List.Edge:** Matriz com o número de linhas igual ao número total de fronteiras e quatro colunas contendo: a identificação da fronteira, a direção normal ou tangencial e os valores calculados dos dois critérios de refinamento.
- **List.EdgesToRefine:** Vetor que contém os índices das fronteiras que serão refinadas, tendo em conta a tolerância de seleção, conforme discutido na seção 4.6.1.
- **List.SpuriousEdges:** Vetor de dimensão igual ao número de direções das fronteiras que tem a densidade do resíduo menor que o zero numérico definido pelo usuário. Assim, este vetor lista as direções das fronteiras cujo refinamento pode vir a causar modos espúrios no sistema resolutivo.
- **List.SpurEdgeToRefine:** Vetor que contém os índices das direções das fronteiras listadas para o refinamento e que também pode vir a causar modos espúrios. Os seus elementos correspondem à intersecção das listas **List.EdgesToRefine** e **List.SpuriousEdges**.
- **List.LoopsToRefine:** Vetor que contém os índices dos elementos a refinar conforme os critérios apresentados na seção 4.6.1.

O segundo tipo, por sua vez, possui o final 'It' e são variáveis globais responsáveis por armazenar determinadas informações de todas as iterações durante do processo de refinamento a fim de se criar um registro. Determinadas informações relevantes geradas em cada iteração são armazenadas com o propósito de gerar gráficos que expressam o processo de convergência do problema a ser resolvido e serão explicadas mais adiante na seção 5.5. As variáveis globais estão listadas na Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Variáveis globais da estrutura List

List	List.EnergyIt
	List.EnergyVariationIt
	List.ErrorEdgeNormIt
	List.ErrorEdgeVariationIt
	List.GDL_It
	List.RefinedEdgesIt

	List.EdgesOrderIt
	List.RefinedLoopsIt
	List.LoopsOrderIt
	List.BetaIt
	List.CndNolt

Descrição da função das variáveis locais:

- **List.EnergyIt:** Vetor de dimensão igual ao número total de iterações, onde é armazenada a energia de deformação em cada iteração. É usado para verificar a convergência da solução. No final do algoritmo, os seus elementos são plotados em função do número total de graus de liberdade.
- **List.EnergyVariationIt:** Vetor de dimensão igual ao número total de iterações, onde é armazenada a variação relativa da energia de deformação a cada iteração (4.18). Serve para verificar a convergência pelo critério da energia de deformação, conforme discutido na seção 4.6.2, e no final do algoritmo, é feita a sua representação gráfica em função do número total de graus de liberdade.
- **List.ErrorEdgeNormIt:** Vetor de dimensão igual ao número total de iterações, onde é guardado o valor máximo da densidade do resíduo (4.16). Os seus elementos são representados graficamente, no final do algoritmo, em função do número total de graus de liberdade.
- **List.ErrorEdgeVariationIt:** Vetor de dimensão igual ao número total de iterações onde é armazenado o quociente da redução da densidade do resíduo na fronteira a cada iteração (4.20). Serve para verificar a convergência do critério da densidade do resíduo máximo do deslocamento na fronteira, conforme discutido na seção 4.6.2, e seus elementos são representados graficamente em função do número total de graus de liberdade, no final do algoritmo.
- **List.GDL_It:** Lista onde são armazenados os números totais de graus de liberdade em cada iteração.
- **List.RefinedEdgesIt:** Lista onde são armazenadas as direções (normal ou tangencial) das fronteiras refinadas a cada iteração. Os valores são utilizados para a construção da tabela que resume o processo iterativo.
- **List.EdgesOrderIt:** Lista que armazena as ordens das bases da função de aproximação das direções das fronteiras a cada iteração. Os valores são utilizados para a construção da tabela que resume o processo iterativo.

- **List.RefinedLoopsIt:** Lista que armazena os elementos refinados a cada iteração. Os valores são utilizados para a construção da tabela que resume o processo iterativo.
- **List.LoopsOrderIt:** Lista que armazena as ordens das bases de aproximação dos elementos a cada iteração. Os valores são utilizados para a construção da tabela que resume o processo iterativo.
- **List.Betalt:** Lista que armazena os graus de indeterminação cinemática (3.51) de todos os elementos a cada iteração. Os valores são utilizados para a construção da tabela que resume o processo iterativo.
- **List.CndNolt:** Lista que armazena a inversa do número de condição do sistema governativo a cada iteração.

5.4 Processamento

A fase de processamento é responsável pelo mapeamento, construção e resolução do sistema (3.24). A resolução do problema estrutural pode ser feita através de uma análise única ou através de um processo iterativo de refinamento do tipo 'p'-adaptativo.

5.4.1 Mapeamento do sistema resolutivo

A fase seguinte após a introdução dos dados por parte do usuário na fase de processamento é o mapeamento do sistema resolutivo global.

O mapeamento do sistema tem como principal objetivo identificar e organizar o armazenamento dos dados de entrada dos coeficientes no sistema governativo e que serão utilizados no processo do espalhamento. O espalhamento consiste na alocação dos valores dos coeficientes calculados no sistema governativo global. Para a execução do espalhamento dos coeficientes, é feito um mapeamento para a definição de todos os pontos de inserção dos coeficientes de cada elemento e de cada direção da fronteira essencial no sistema. O armazenamento dos valores na matriz dos coeficientes é feito numa lógica de submatrizes (ou blocos) associados aos elementos finitos que lhes dão origem.

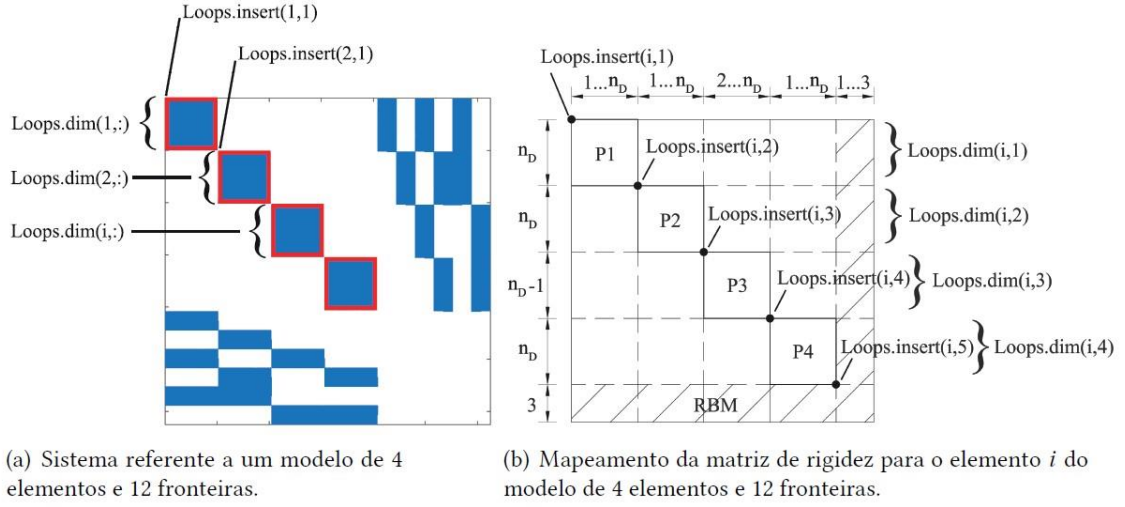


Figura 5.8: Mapeamento do sistema de um modelo com 4 elementos e 12 fronteiras, sendo 6 fronteiras essenciais (1, 2, 3, 4, 8 e 11) todas com aproximações na direção normal e tangencial, de acordo com a malha apresentada na Figura 5.6. Adaptado de [4]

Juntamente com a dimensão das submatrizes é possível estabelecer toda a dimensão do sistema governativo global e alocar a memória necessária no algoritmo. Há quatro variáveis fundamentais para que mapeamento seja feito. Estas são as variáveis **insert** e **dim** existente tanto na estrutura **Loops**, quanto na estrutura **Edges** (Figura 5.8). As variáveis **insert** são responsáveis pelo registro dos pontos de entrada dos blocos da matriz de rigidez (**K**) e de fronteira (**B**). As variáveis **dim** são responsáveis pela determinação da dimensão dos blocos para os modos de deformação (Ψ_h e Ψ_b) e corpo rígido (Ψ_r), para os elementos e para as fronteiras.

Para cada elemento e para cada fronteira essencial existem 5 blocos consoante ao número de modos existente, e por consequência 5 pontos de inserção na matriz de rigidez (P1 a P4, sendo 2 modos para Ψ_h e Ψ_b e os modos de corpo rígido Ψ_r - RBM). Cada modo assume o valor da ordem das funções de aproximação conforme estabelecido nas definições (3.37), (3.42) e (3.49).

Os blocos da matriz de rigidez que correspondem aos modos de deformação e corpo rígido (**K_{ij}**) de cada elemento (i) são inseridos na diagonal principal da matriz dos coeficientes (**LHS**) na posição **Loops.insert(i,j)**. A sua dimensão é calculada em função da ordem da base de aproximação, como ilustrado na Figura 5.8 e é guardado na variável **Loops.order(i)**. As matrizes de cada elemento são quadradas e tem a mesma quantidade de linhas e colunas conforme a quantidade de funções na base de aproximação no domínio de cada elemento para todos os modos. As variáveis n_D , $n_{r,n}$ e $n_{r,t}$ é igual a ordem da base das funções de

aproximação do domínio do elemento e das fronteiras normal e tangencial respectivamente, para cada modo.

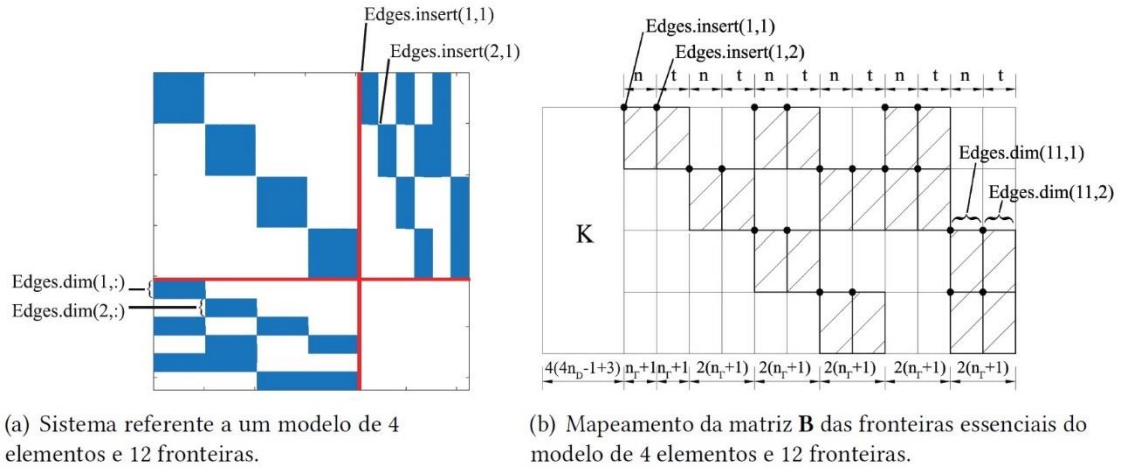


Figura 5.9: Mapeamento das fronteiras essenciais nas suas componentes normal e tangencial para um modelo de 4 elementos e 12 fronteiras, sendo 6 essenciais (1, 2, 3, 4, 8 e 11) todas com aproximações na direção normal e tangencial, de acordo com a malha apresentada na Figura 5.6. Adaptado de [4]

Cada fronteira essencial (i) possui cinco blocos **B_j** consoante com a quantidade de modos de deformação e corpo rígido para cada direção a qual é feita a aproximação no campo das forças. Esses blocos são inseridos na matriz **LHS** nas linhas que correspondem com as entradas dos blocos da matriz de rigidez dos elementos as quais as fronteiras pertencem. As entradas das colunas dos blocos **B_j** de cada fronteira corresponde ao **Edges.insert(i,1)** para a direção normal e **Edges.insert(i,2)** para a direção tangencial.

Conforme ilustrado na Figura 5.9, as matrizes das fronteiras podem ser compartilhadas com dois elementos adjacentes ou com um elemento, para o caso em que as fronteiras são interiores ou exteriores, respetivamente. Essas matrizes não são quadradas, tendo o número de linhas igual a dos elementos as quais as fronteiras pertencem, ou seja, igual à dimensão total da base das funções de aproximação do elemento. O número de colunas, por sua vez, é igual a ordem da base das funções de aproximação da respetiva direção da fronteira (normal e tangencial) mais um ($n_r + 1$). As variáveis n_D , $n_{\Gamma,n}$ e $n_{\Gamma,t}$ é igual a ordem da base das funções de aproximação do domínio do elemento e das fronteiras normal e tangencial respectivamente, para cada modo.

A disjunção entre os blocos do domínio e da fronteira, significa que bases diferentes podem ser facilmente acomodadas simplesmente atribuindo diferentes dimensões ao respetivo bloco do sistema resolutivo.

Blocos da matriz de rigidez e de fronteira

As matrizes de rigidez e de fronteira dos elementos finitos híbridos-Trefftz possuem entradas que correspondem a partes das bases geradas por potenciais harmônicos e bi-harmônicos, pares e ímpares e pelo modo de corpo rígido.

- **K11:** Bases geradas por um potencial harmônico ímpar, matriz quadrada e possui dimensão igual à ordem da base de aproximação do elemento (n_D).
- **K22:** Bases geradas por um potencial harmônico par, matriz quadrada e possui dimensão igual a ordem da base de aproximação do elemento (n_D).
- **K33:** Bases geradas por um potencial bi-harmônico ímpar, matriz quadrada e possui dimensão igual a ordem da base de aproximação do elemento menos um ($n_D - 1$).
- **K44:** Bases geradas por um potencial bi-harmônico par, matriz quadrada e possui dimensão igual a ordem da base de aproximação do elemento (n_D).
- **K55:** Modos de corpo rígido, matriz quadrada e possui dimensão igual a três, nomeadamente os movimentos de rotação pura e deslocamentos constantes no plano x e y.
- **B1n (B1t):** Bases geradas por um potencial harmônico ímpar, matriz com o número de linhas igual a (n_D) correspondente ao elemento a que aquela fronteira pertence e o número de colunas igual a ordem da base de aproximação, na direção normal (tangencial) de uma determinada fronteira mais um ($n_{r,n} + 1$) ou ($n_{r,t} + 1$).
- **B2n (B2t):** Bases geradas por um potencial harmônico par, matriz com o número de linhas igual a (n_D) correspondente ao elemento a que aquela fronteira pertence e o número de colunas igual a ordem da base de aproximação, na direção normal (tangencial) de uma determinada fronteira mais um ($n_{r,n} + 1$) ou ($n_{r,t} + 1$).
- **B3n (B3t):** Bases geradas por um potencial bi-harmônico ímpar, matriz com o número de linhas igual a (n_D) correspondente ao elemento a que aquela fronteira pertence e o número de colunas igual a ordem da base de aproximação, na direção normal (tangencial) de uma determinada fronteira mais um ($n_{r,n} + 1$) ou ($n_{r,t} + 1$).
- **B4n (B4t):** Bases geradas por um potencial bi-harmônico par, matriz com o número de linhas igual a (n_D) correspondente ao elemento a que aquela fronteira pertence e o número de colunas igual a ordem da base de aproximação, na

direção normal (tangencial) de uma determinada fronteira mais um $(n_{r,n} + 1)$ ou $(n_{r,t} + 1)$.

- **B5n (B5t):** Modos de corpo rígido, matriz com o número de linhas igual 3 correspondente ao modo de corpo rígido do elemento a que aquela fronteira pertence e o número de colunas igual a ordem da base de aproximação, na direção normal (tangencial) de uma determinada fronteira mais um $(n_{r,n} + 1)$ ou $(n_{r,t} + 1)$.

5.4.2 Integração numérica

No cálculo dos valores, para a realização do espalhamento (alocação) no sistema governativo (3.24), é utilizada a técnica de integração numérica chamada de quadratura de Gauss-Legendre, uma vez que a sua determinação utilizando a forma analítica é inviável. A intergração numérica por meio da quadratura é feito através de uma soma ponderada dos valores da função a integrar, em determinados pontos críticos pertencentes ao domínio de valores da função. Esta produz um resultado exato com n pontos de amostragem para polinômios de grau $2n - 1$ ou inferior.

Todos os domínios de integração são mapeados para o intervalo de $[-1,1]$. O valor I do intergal de uma função genérica $f(s)$ definida no referencial da fronteira é calculado através da equação (5.1)

$$I = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 f(s) ds = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^n W_i(a_i) f(a_i) \quad (5.1)$$

onde L é o comprimento da fronteira que representa o domínio, n é o número total de pontos de Gaus-Legendre (definido o usuário), a_i são as abscissas que correspondem a esses pontos e W_i os respectivos pesos.

Os elementos das matrizes e dos vetores do sistema resolutivo são calculados a partir de estrutura de dados tridimensionais e bidimensionais, repectivamente e que permitem determinar todos os coeficientes que compõem determinado bloco em uma única operação.

As estruturas de dados tridimensionais são utilizadas para calcular os blocos constituintes das matrizes de rigidez e das fronteiras **K** e **B**, sendo que as mesmas têm nas linhas e colunas os valores correspondentes aos respectivos graus de aproximação das bases envolvidas e nas páginas os correspondentes valores nas abscissas, a_i .

As estruturas de dados bidimensionais são utilizadas para calcular os blocos constituintes do lado direito do sistema resolutivo global. Nas linhas da matriz estão os valores dos graus das funções de ponderação e nas colunas os valores que correspondem às respectivas absissas.

A integração numérica é feita multiplicando os valores da função $f(a_i)$ pelos pesos $W_i(a_i)$ na direção correspondente às absissas e posteriormente feito o somatório na mesma direção, conforme ilustrado na Figura 5.10, sendo NGP o número de pontos de Gauss.

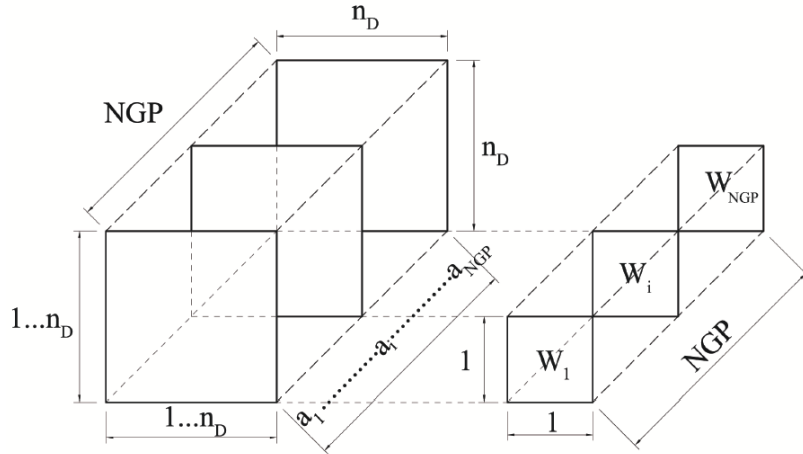


Figura 5.10: Vetorização das matrizes de rigidez K

5.4.3 Pré-condicionamento do sistema resolutivo

Na implementação do algoritmo foi feito o pré-condicionamento do sistema resolutivo com a finalidade de aprimorar a estabilidade numérica de modo a minimizar os erros que possam ocorrer durante a sua resolução. Conforme discutido na seção 4.5, o pré-condicionamento é feito através do escalonamento do sistema o qual melhora a sua qualidade uma vez que uniformiza os termos da diagonal para que fiquem próximos de um valor unitário, preservando, ao mesmo tempo, a simetria do sistema. As equações (5.2) e (5.3) expressam o escalonamento da matriz **LHS** e o vetor **RHS** do sistema resolutivo, respetivamente.

$$\mathbf{ScLHS} = \mathbf{S}^T * \mathbf{LHS} * \mathbf{S} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{ScRHS} = \mathbf{S}^T * \mathbf{RHS} \quad (5.3)$$

sendo $\mathbf{S}$ a matriz diagonal em que seus termos são a inversa da raiz quadrada dos termos da diagonal principal da matriz **LHS**. **ScLHS** e **ScRHS** são a matriz dos coeficientes e o vetor livre

escalados, respectivamente. Contudo, nota-se que os fatores de escala incidem na matriz dos coeficientes, o vetor das soluções e o vetor livre.

Sendo a solução escalada do sistema dada pela equação (5.4)

$$ScX = \frac{ScLHS}{ScRHS} \quad (5.4)$$

A solução não escalada é obtida através da equação (5.5)

$$X = Scl * RHS \quad (5.5)$$

onde $Scl = \frac{1}{\sqrt{diagonal(LHS)}}$

5.4.4 Construção e resolução do sistema

A construção do sistema resolutivo global segue conforme o exposto nas seções 5.4.1 e 5.4.2. A resolução do sistema conta com o pré-condicionamento do sistema e a verificação da estabilidade numérica conforme discutido nas seções 5.4.3 e 4.5, respectivamente.

No cenário em que o usuário defina que o programa realize uma análise única para a solução do problema e o sistema seja bem condicionado, a resolução é feita utilizando o solver adaptativo *mldivide* incluído no Matlab. Entretanto, se o sistema apresenta um mal condicionamento, é possível optar por uma das seguintes soluções:

- Remodelar o problema em questão considerando a alteração de certos parâmetros como o aumento do número de elementos da malha ou a diminuição da ordem das funções das bases de aproximação dos elementos ou das fronteiras, seguindo as orientações do manual do usuário [34], ou
- Prosseguir com a solução para o problema em questão utilizando o solver baseado no cálculo da pseudo-inversa da matriz dos coeficientes, que garante a eliminação dos valores singulares muito próximos de zero, tendo em mente que a solução pode não ser necessariamente a correta, sendo necessária a avaliação da qualidade da solução dos campos dos deslocamentos e tensões.

Por outro lado, caso o usuário defina que o programa realize uma análise com o processo iterativo de refinamento 'p' para a solução do problema e o sistema seja bem condicionado, a resolução é feita da mesma maneira que na análise única. Entretanto, se durante o processo de refinamento o sistema se tornar mal condicionado, o programa procede conforme o discutido nos critérios de paragem do algoritmo (seção 4.6.2), parando o processo iterativo e retornando a última solução estável. Sobretudo, para a análise com o refinamento 'p'-

adaptativo, é estabelecido que o sistema não apresente problemas de mal condicionamento na análise inicial, sendo necessário o usuário tomar as medidas sugeridas acima caso isso aconteça.

Por fim, o algoritmo reverte o escalonamento do sistema, uma vez que a solução é encontrada, apresentando para o usuário a solução da forma não escalada.

5.4.5 Descrição do algoritmo

5.4.5.1 Análise única ou análise inicial

A análise única é parte da versão atual do algoritmo e está pode ser chamada de análise inicial para o caso do usuário definir a resolução do problema com o processo de refinamento 'p'-adaptativo. O fluxograma da Figura 5.11 ilustra as etapas executadas pelo algoritmo na análise única ou análise inicial.

Nesta análise, o algoritmo procede por fazer a rotina conforme as etapas pontuadas abaixo:

- Verificação da indeterminação cinemática do modelo inicial: a indeterminação cinemática é verificada para cada elemento da malha e caso um elemento não seja cinematicamente indeterminado, o grau do respectivo elemento é aumentado até que se verifique $\beta > 0$.
- Mapeamento do sistema resolutivo.
- Cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez e do termo livre e seu espalhamento.
- Análise da estabilidade do sistema com os graus inicialmente propostos pelo utilizador (ver seção 4.5).
 - Para a análise única: Caso o usuário defina que o programa realize apenas a análise única, está ocorrerá conforme discutido na seção 5.4.4
 - Para a análise inicial: Caso o usuário defina que o programa realize a análise com o refinamento 'p'-adaptativo, está também deverá ocorrer conforme o exposto na seção 5.4.4 e seguirá para o refinamento 'p'-adaptativo conforme será mostrado na próxima seção.
- Exclusivamente para a análise única, finalmente o programa retornará a solução obtida no formato que será discutido mais adiante na fase de pós-processamento.
- Exclusivamente para a análise p-adaptativa, o algoritmo guardará todas as informações inerentes para prosseguir com o processo de refinamento 'p'-

adaptativo, nomeadamente o vetor das soluções da análise inicial, as ordens das bases de aproximação do domínio e das fronteiras (para cada direção) e a energia de deformação.

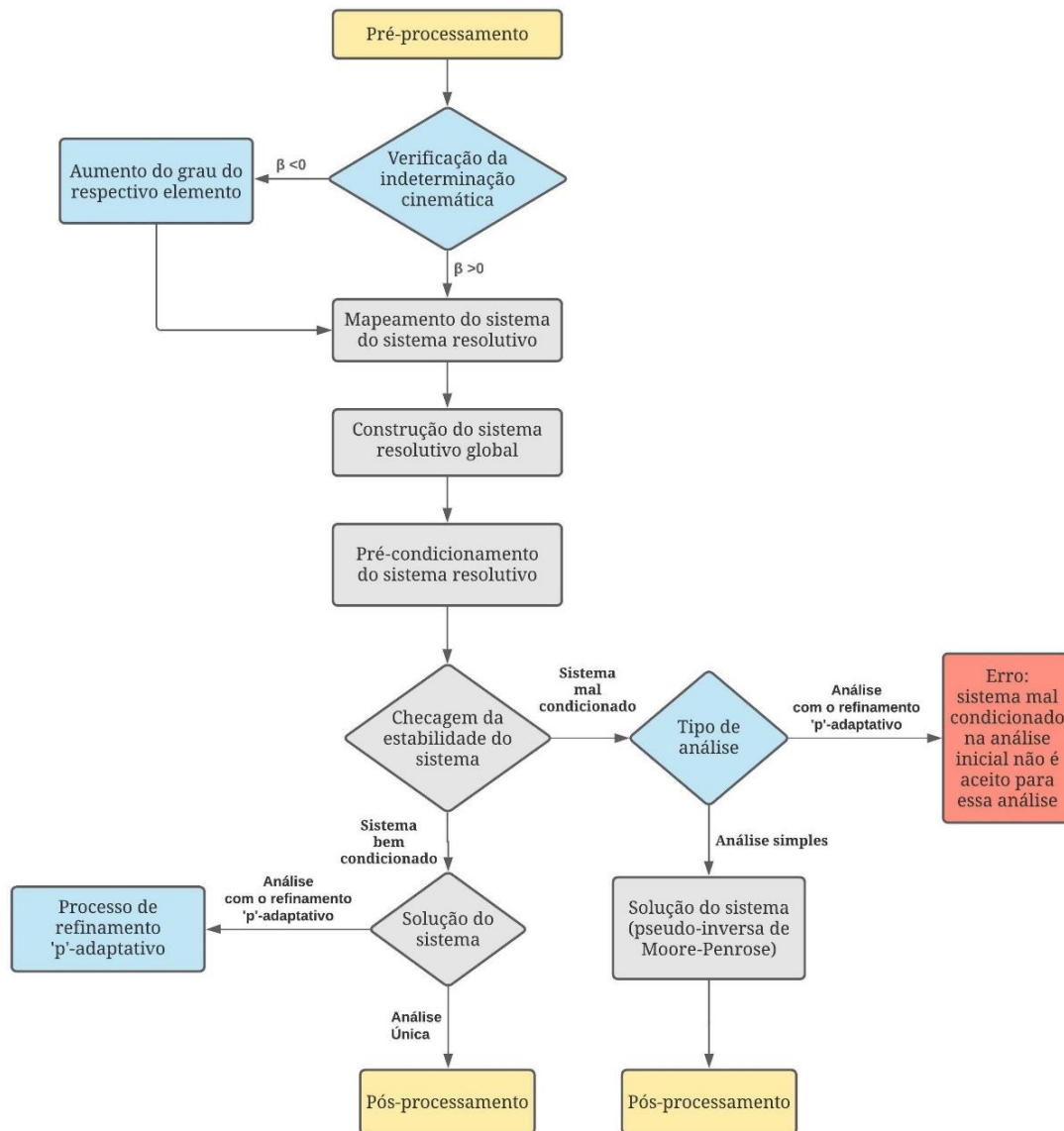


Figura 5.11: Fluxograma da análise única ou inicial

5.4.5.2 Refinamento 'p'-adaptativo

A análise com o refinamento 'p'-adaptativo consiste num processo iterativo em que o programa refina continuamente a solução, de acordo com os critérios previamente definidos,

os graus das bases das funções de aproximação das fronteiras e dos domínios até que alcance algum dos critérios de paragem discutidos na seção 4.6.2 e ilustrado na Figura 5.12.

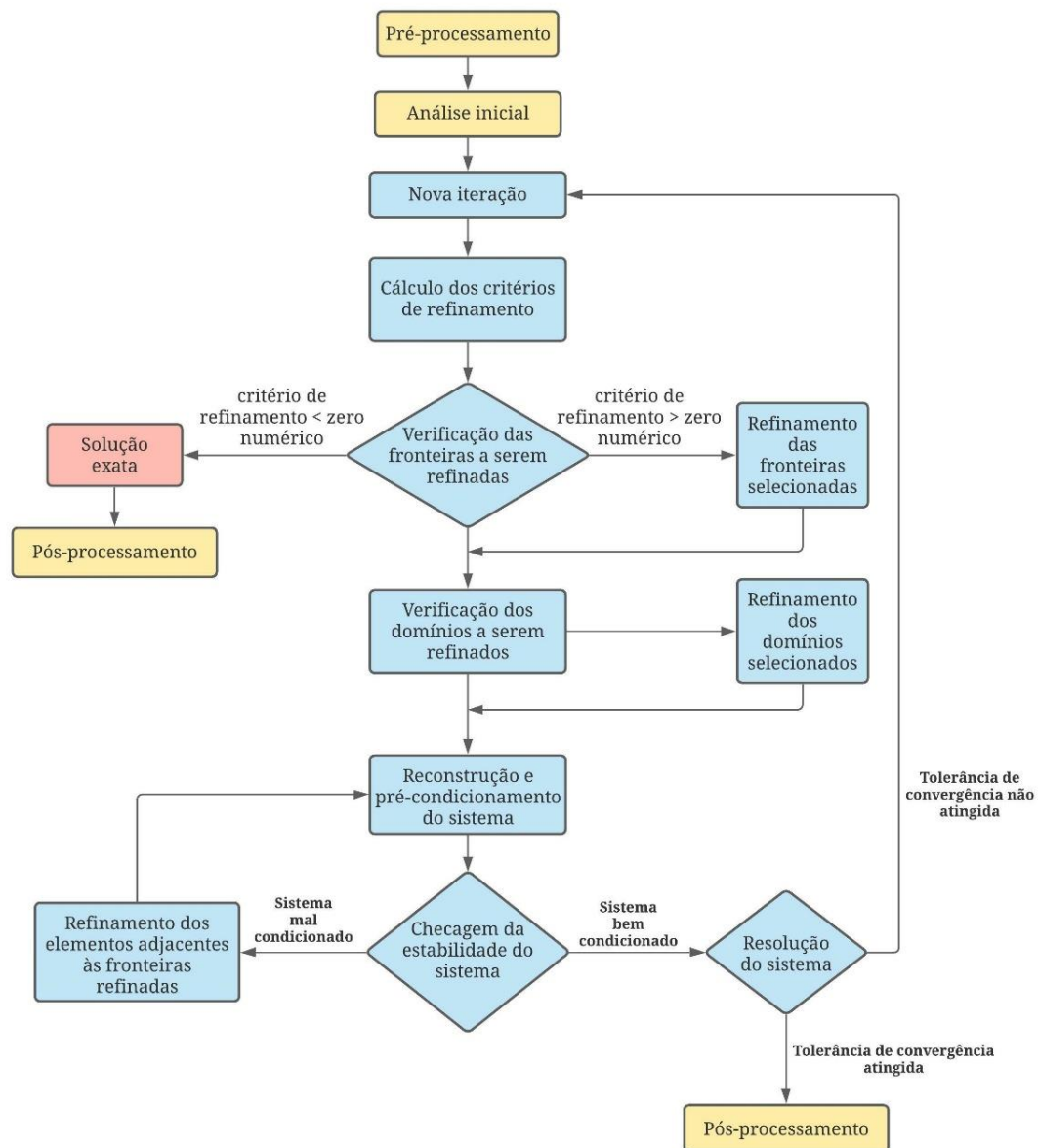


Figura 5.12: Fluxograma da rotina de refinamento do tipo 'p'-adaptativo

Nesta análise, o algoritmo procede por fazer a rotina conforme as etapas enumeradas abaixo:

- Partindo da análise inicial, o algoritmo procede por realizar o refinamento 'p'-adaptativo dando início ao processo iterativo. O primeiro passo de cada iteração é o refinamento nas fronteiras. Para construir a lista **List.Edges** (seção 5.3.3) obtém-se, para cada direção da fronteira essencial, uma estimativa da variação

da energia de deformação (4.15) e da densidade máxima do resíduo da fronteira normalizado (4.16) que o respectivo refinamento provocaria. Estes valores são ordenados de forma decrescente de acordo com o critério de refinamento escolhido pelo usuário.

- A(s) primeira(s) direção(ões) (normal e/ou tangencial), a depender do valor adotado para a tolerância de seleção, listada(s) em **List.Edges** é(são) registrada(s) na lista **List.EdgesToRefine** e os modos espúrios são guardados na lista **List.SpuriousEdges**. A intersecção das partes a serem refinadas nestas duas listas são listadas em **List.SpurEdgesToRefine**.
- Com as listas **List.EdgesToRefine** e **List.SpurEdgeToRefine** construídas, são verificados os critérios de refinamento no domínio discutidos na seção 4.4.
- É construído um novo sistema resolutivo, tendo em conta os refinamentos efetuados. Depois é feita uma checagem do mal condicionamento do sistema. Sempre que é identificado um mal condicionamento, aumenta-se um grau nas bases dos elementos adjacentes às fronteiras refinadas, conforme discutido na seção 4.4.
- É verificado o número máximo de iterações para que o sistema identificado como mal condicionado, se torne bem condicionado, além também do grau máximo das bases de aproximação, do domínio e para cada direção das fronteiras essenciais. Caso estes valores ultrapassem os definidos pelo usuário, o processo de refinamento é interrompido e a última solução estável é apresentada.
- Caso o processo iterativo não pare em decorrência dos critérios de paragem mencionados no passo anterior, é testada a convergência da solução de acordo com o escolhido pelo usuário. Quando o algoritmo pare por alcançar a tolerância de convergência definida pelo usuário, o programa apresenta a solução correspondente à última iteração.
- Após se obter a solução final, faz-se uma listagem de toda a informação referente aos refinamentos efetuados conforme será mencionado mais a frente na seção X sobre o pós-processamento.

Refinamento na fronteira

O refinamento nas fronteiras é o primeiro passo a ser realizado no processo iterativo (passos de 1 a 3 na secção 5.4.5.2).

- No início de cada iteração é testado o refinamento em cada direção de cada uma das fronteiras essenciais da malha. Para cada direção, é gerada uma nova função de aproximação nas fronteiras $\mathbf{Z}$. Desta forma, são gerados o vetor $\tilde{\mathbf{B}}$ associado à nova base e o $\tilde{\mathbf{u}}_r$.
- Posteriormente são calculados o gradiente $\dot{\mathbf{X}}$ (4.10), e a densidade do resíduo dos deslocamentos na fronteira $(-\tilde{\mathbf{u}}_r + \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{p})$. Em seguida, é calculado o deslocamento generalizado $\tilde{\mathbf{q}}$ através das equação (4.14). Se a densidade do resíduo for nula, todos os critérios de seleção são listados como sendo nulos e o programa avança para a próxima direção/fronteira. Caso contrário, é calculado o resíduo normalizado (4.16), para posterior listagem.
- É calculado o incremento da solução $\Delta \mathbf{x}$ através da equação (4.12), permitindo que se determine a variação na energia (4.15) causada pela variação da solução $\Delta \mathbf{x}$.
- É construída a matriz **List.Edges** com os valores obtidos anteriormente e que depois é utilizada para escolher a fronteira que vai ser efetivamente refinada.
- O último passo é verificar se os valores dos critérios de refinamento são inferiores à quantidade definida como zero numérico, pelo usuário. Caso sejam, o algoritmo avança diretamente para a fase de pós-processamento. No caso de os valores não serem todos os inferiores e estejam dentro da tolerância de seleção é criada a lista **List.EdgesToRefine** onde se encontram os índices das fronteiras e as direções a serem refinadas.

Refinamento no domínio

Após o refinamento das fronteiras, o algoritmo verifica a necessidade de refinamento do domínio dos elementos. Como discutido na seção 4.4, o refinamento no domínio decorre de três maneiras diferentes:

- Nessa etapa é verificado se há fronteiras selecionadas para o refinamento, e que também são detectadas como propícias a originar modos espúrios. Se houver, os elementos adjacentes à essas fronteiras são adicionados na lista **List.LoopsToRefine** e posteriormente refinados.
- Posteriormente é calculado o grau de indeterminação cinemática (β), para todos os elementos e verifica-se se são cinematicamente indeterminados. Se algum não for, os respectivos elementos são também listados para o refinamento.

- Finalmente, compara-se o grau máximo das fronteiras adjacentes a cada elemento com o grau da base do mesmo, de modo a verificar que $n_D > \max(n_I)$. Se em algum caso isso não se confirmar, lista-se para o refinamento o elemento em questão.

Juntando toda esta informação, é construída a lista final de elementos a refinar, **List.LoopsToRefine**.

Nesta etapa, procede-se à resolução do sistema com os novos graus de liberdade (GDL) acrescentados e é feito o controle da estabilidade numérica. Caso seja necessário, refinam-se os elementos adjacentes às fronteiras refinadas conforme explicado na seção 5.4.4.

Critérios de paragem

O algoritmo possui os critérios de paragem conforme discutido na seção 4.6.2 e são ilustrados nos fluxogramas da Figura 5.11, para o caso da análise única e da Figura 5.12 para o caso com o refinamento 'p'-adaptativo. Na fase final do processo de refinamento 'p'-adaptativo, o algoritmo verifica se o critério de convergência atingiu a tolerância de convergência. Caso esta não seja atingida, o programa retorna para o processo iterativo e caso contrário o programa parte para a fase de pós-processamento.

5.5 Pós-processamento

A solução do sistema resolutivo (3.24) fornece uma única estimativa para o campo dos deslocamentos, no domínio e nas fronteiras. Este campo é obtido através da aproximação dos deslocamentos (3.3). A estimativa única para o campo das tensões no domínio dos elementos é obtida através da aproximação (3.5). Entretanto, a formulação produz duas estimativas independentes para as forças nas fronteiras essenciais, uma por meio da projeção do campo das tensões (3.5) nas direções normal e tangencial à fronteira, e outra através da aproximação independente (3.6). Ambas devem convergir quando as soluções são suficientemente refinadas, podendo a sua diferença ser, eventualmente, utilizável como medida de convergência.

Na fase de pós-processamento, para a análise única o algoritmo entra na fase em que o programa retorna, com base na solução do sistema governativo, as aproximações dos campos de deslocamento, tensões e a deformada da estrutura, todas representadas graficamente conforme ilustrado na Figura 5.13. Para a análise inicial e posteriormente o refinamento 'p'-adaptativo, são retornados além das soluções anteriores, os gráficos de convergência

representados na Figura 5.14, e uma tabela com um resumo detalhado do processo iterativo representada na Figura 5.15.

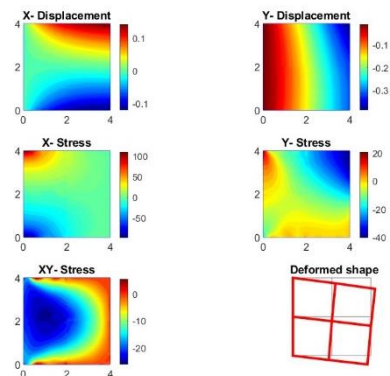


Figura 5.13: Campo de deslocamentos, tensões e deformada.

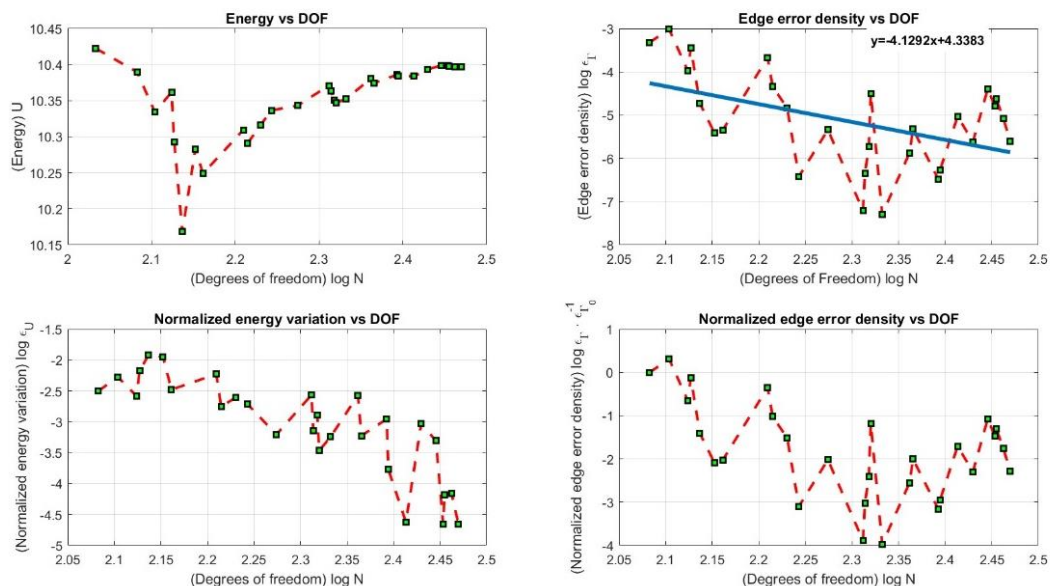


Figura 5.14: Gráficos de convergência.

Itera...	DOF	Beta	Refined Loops	Loops Order	Refined Edge Normal Dir	Refined Edge Tangential Dir	Edges Order Normal Dir	Edges Order Tangential Dir	Energy	Condition Number
1121	2 1 1 1	3 4	5 5 4 4	2	12 8 11		2 3 2 2 NaN NaN NaN 2 NaN NaN 2 NaN	3 3 2 2 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.3896	1.8014e-07
2127	1 0 5 5	2	5 6 4 4	1	2		3 3 2 2 NaN NaN NaN 2 NaN NaN 2 NaN	3 4 2 2 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.3345	6.5653e-08
3133	0 3 5 5	1	6 6 4 4		12		3 3 2 2 NaN NaN NaN 2 NaN NaN 2 NaN	4 5 2 2 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.3615	1.2763e-08
4134	4 2 5 5	None	6 6 4 4	2			3 4 2 2 NaN NaN NaN 2 NaN NaN 2 NaN	4 5 2 2 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.2925	1.901e-09
5137	2 1 5 5	None	6 6 4 4	12	1		4 5 2 2 NaN NaN NaN 2 NaN NaN 2 NaN	5 5 2 2 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.1684	3.4434e-10
6142	2 0 5 5	2	6 7 4 4	2			4 6 2 2 NaN NaN NaN 2 NaN NaN 2 NaN	5 5 2 2 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.2831	1.7054e-09
7145	1 1 5 4	None	6 7 4 4	8	24		4 6 2 2 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 2 NaN	5 6 2 3 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.2489	5.7462e-11
8162	-1 2 4 2	1 2 4	7 8 4 5	8 11	12 4		4 6 2 2 NaN NaN NaN 4 NaN NaN 3 NaN	6 7 2 4 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.3094	1.4257e-11
9164	2 1 4 6	None	7 8 4 5	12			5 7 2 2 NaN NaN NaN 4 NaN NaN 3 NaN	6 7 2 4 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.2912	7.2708e-12
10170	0 1 4 6	1	8 8 4 5	1	1		6 7 2 2 NaN NaN NaN 4 NaN NaN 3 NaN	7 7 2 4 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.3167	8.1351e-12
11175	4 0 4 6	2	8 9 4 5	2			6 8 2 2 NaN NaN NaN 4 NaN NaN 3 NaN	7 7 2 4 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.3366	1.5536e-11
12188	0 2 3 5	1 4	9 9 4 6	18	13 4		7 8 2 2 NaN NaN NaN 5 NaN NaN 3 NaN	8 7 3 5 NaN NaN NaN 3 NaN NaN 3 NaN	10.3431	2.3025e-12
13205	0 0 2 8	1 2 3	10 10 5 6	18 11	18		8 8 2 2 NaN NaN NaN 6 NaN NaN 4 NaN	9 7 3 5 NaN NaN NaN 4 NaN NaN 3 NaN	10.3711	2.7557e-13
14206	3 4 6 8	None	10 10 5 6	1			9 8 2 2 NaN NaN NaN 6 NaN NaN 4 NaN	9 7 3 5 NaN NaN NaN 4 NaN NaN 3 NaN	10.3637	2.7337e-13
15208	3 2 6 8	None	10 10 5 6	2	2		9 9 2 2 NaN NaN NaN 6 NaN NaN 4 NaN	9 8 3 5 NaN NaN NaN 4 NaN NaN 3 NaN	10.3503	1.0427e-13
16209	2 1 6 8	None	10 10 5 6		8		9 9 2 2 NaN NaN NaN 6 NaN NaN 4 NaN	9 8 3 5 NaN NaN NaN 5 NaN NaN 3 NaN	10.3468	1.0409e-13
17215	1 1 6 8	2	10 11 5 6	8	2		9 9 2 2 NaN NaN NaN 7 NaN NaN 4 NaN	9 9 3 5 NaN NaN NaN 5 NaN NaN 3 NaN	10.3527	1.392e-13
18230	0 0 6 6	1 2 4	11 12 5 7	4	4 8		9 9 2 3 NaN NaN NaN 7 NaN NaN 4 NaN	9 9 3 6 NaN NaN NaN 6 NaN NaN 3 NaN	10.3805	3.4628e-12
19232	2 2 6 10	None	11 12 5 7	8	8		9 9 2 3 NaN NaN NaN 8 NaN NaN 4 NaN	9 9 3 6 NaN NaN NaN 7 NaN NaN 3 NaN	10.3744	1.5445e-13
20247	0 1 6 9	1 2 4	12 13 5 8	8	4 8		9 9 2 3 NaN NaN NaN 9 NaN NaN 4 NaN	9 9 3 7 NaN NaN NaN 8 NaN NaN 3 NaN	10.3859	3.2459e-13
21248	3 2 6 13	None	12 13 5 8		8		9 9 2 3 NaN NaN NaN 9 NaN NaN 4 NaN	9 9 3 7 NaN NaN NaN 9 NaN NaN 3 NaN	10.3841	1.0154e-13

Figura 5.15: Tabela com o resumo do processo de refinamento 'p'-adaptativo.

Gráficos de convergência

A Figura 5.14 mostra os gráficos de convergência que são gerados pelo programa com os dados de cada iteração sendo esses:

- Energia de deformação vs. número de graus de liberdade: representa graficamente a variação da energia de deformação com o número total de graus de liberdade do modelo. Cada ponto representa uma iteração e o eixo das abscissas está em escala logarítmica. A estabilização desse gráfico é um indicador importante de convergência pela energia de deformação.
- Densidade do resíduo de deslocamento na fronteira vs. o número de graus de liberdade: representa graficamente a variação da densidade máxima do resíduo na fronteira com o número total de graus de liberdade do modelo. Ambos os eixos estão em escala logarítmica. A densidade máxima do resíduo na fronteira é usada como critério de seleção e reflete o máximo desequilíbrio de deslocamento entre dois elementos adjacentes. A linha azul neste gráfico representa a regressão linear do decréscimo da densidade do resíduo e $y(x)$ é a sua expressão matemática, em que o coeficiente da variável x serve de medida de convergência do processo de refinamento.
- Variação de energia normalizada vs. o número de graus de liberdade: representa graficamente a diferença entre as energias de deformação U_i e U_{i-1} , em duas iterações sucessivas. Ambos os eixos estão em escala logarítmica. A quantidade apresentada é usada pelo critério de convergência da energia de deformação.
- Densidade do resíduo de deslocamento normalizado vs. número de graus de liberdade: este gráfico apresenta a mesma informação que o gráfico explicado no segundo item, no entanto a densidade de resíduo máximo é normalizada em relação ao valor da primeira iteração. A informação apresentada neste gráfico é usada como critério de convergência.

Tabela com informações do processo iterativo do refinamento 'p'-adaptativo

A Figura 5.15 mostra uma tabela contendo as informações de cada iteração do processo iterativo do refinamento 'p'-adaptativo. As informações das tabelas são: número da iteração, número de graus de liberdade, o coeficiente de indeterminação cinemática (β), os elementos e fronteiras refinadas, bem como as respectivas ordens da base da função de aproximação, a variação da energia total do sistema e a inversa do número de condição.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1 Introdução

Neste capítulo são realizados três testes para a validação do desempenho do algoritmo 'p'-adaptativo descrito nos capítulos 4 e 5. A convergência da solução dos problemas é procurada através de dois critérios de paragem, nomeadamente o critério da variação da energia de deformação e o critério da densidade máxima do resíduo na fronteira.

A convergência da energia de deformação é procurada utilizando o critério de refinamento da variação da energia de deformação. Por outro lado, a convergência da densidade máxima do resíduo na fronteira é buscada utilizando o critério de refinamento baseado na densidade máxima do resíduo na fronteira. Em todos os testes foram definidos os parâmetros de controle para o funcionamento do algoritmo 'p'-adaptativo de acordo com o estabelecido na Tabela 6.1. Os parâmetros que variam nos testes são os critérios de convergência, os critérios de refinamento e a tolerância de seleção, adotando os valores indicados nesta mesma tabela.

Os parâmetros foram definidos com base nos testes apresentados neste trabalho e outros testes conduzido pelo autor na elaboração do algoritmo com o objetivo de entender o seu comportamento e obter a melhor solução em cada teste realizado. Além disso, estes estudos de parametrização serviram para conseguir definir algumas diretrizes para o usuário e orientá-lo nessas escolhas desses parâmetros.

Sendo assim, o valor máximo dos graus da base de aproximação é de 20 tanto para o domínio como para as fronteiras dos elementos, pois se identificou que graus mais elevados não alteram significativamente a convergência da solução. Da mesma forma, foi definido como 16 o número máximo de iterações em que o sistema tenta se reestabelecer após identificado

um mal condicionamento, portanto caso o sistema não se reestabeleça o programa retorna a última solução estável obtida.

O processo de parametrização do algoritmo condiz com o objetivo deste trabalho na otimização do cálculo computacional do problema e assim evitar processos de cálculos ineficientes e refinamentos desnecessários.

Tabela 6.1: Parâmetros essenciais para o funcionamento do algoritmo 'p'-adaptativo

Critério de convergência	Energia de deformação
	Densidade do resíduo na fronteira
Critério de refinamento	Variação da energia de deformação
	Densidade do resíduo na fronteira
Tolerância de seleção na escolha de fronteiras a refinar	$10^{-5}/0.5/0.9$
Tolerância de convergência	10^{-4}
Número de iterações para calcular o valor médio do critério de convergência	3
Número máximo de iterações com o sistema mal condicionado na tentativa de reestabelecer o sistema resolutivo	16
Ordem máxima das bases de aproximação	20

6.2 Placa em L

O primeiro teste realizado é de uma placa em L sujeita ao estado plano de tensão cujo principal objetivo é verificar a capacidade do algoritmo para obter soluções de problemas em que haja pontos de singularidades. Essa situação não ocorre na prática e advém das limitações da modelação numérica desse tipo de problema.

Neste problema, apresentado na Figura 6.1, a largura e a altura total da placa são 100 e as propriedades do material são definidas pelo módulo de Young $E = 10^5$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. As condições de fronteira do tipo Dirichlet são impostas nas fronteiras $y = 0$ e $x = 100$, de modo a impedir os deslocamentos nas direções verticais e horizontais,

respectivamente, mantendo livre o respectivos deslocamentos nas direções paralelas a esses bordos. As condições de fronteira do tipo Neumann são aplicadas na fronteira $x = 0$ na forma de uma carga w , unitária, uniformemente distribuída. O ponto P representado na figura é onde se espera obter concentração dos campos das tensões e a existência de um ponto de singularidade.

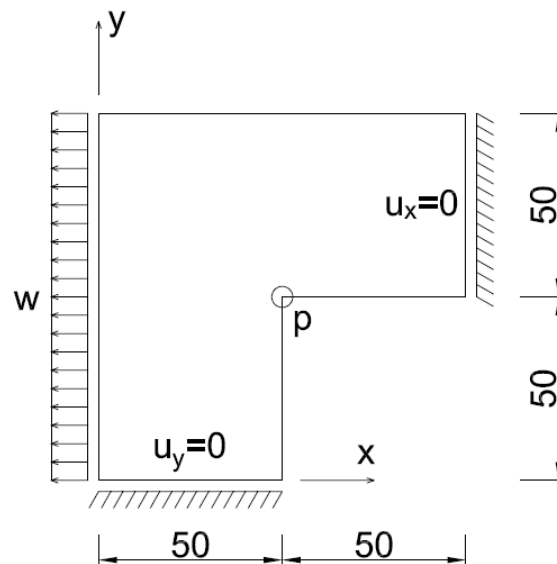


Figura 6.1: Modelo do problema da placa em L

A malha é composta por 6 elementos triangulares, conforme a Figura 6.2, e com as bases de aproximação iniciais com ordens unitárias, tanto para o domínio n_D^0 , quanto para as fronteiras na direção normal $n_{I,n}^0$ e tangencial. $n_{I,t}^0$. A energia de deformação obtida neste teste utilizando EFHT é comparada com a solução de Shephard [35] sendo esta igual a $U = 0,1556$.

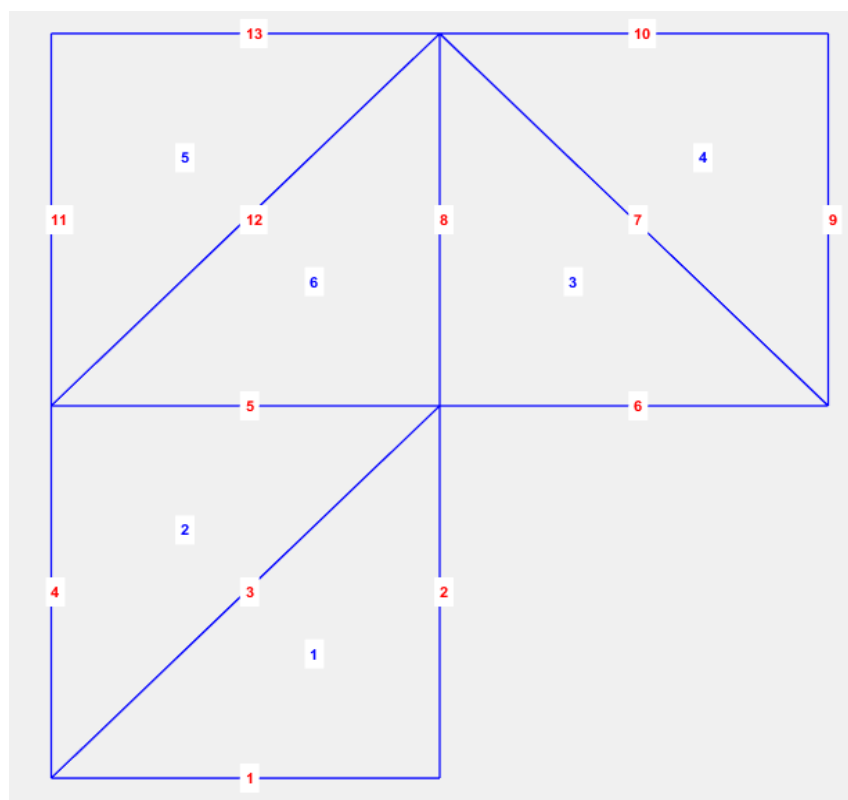


Figura 6.2: Malha com 6 elementos triangulares da placa em L

A Tabela 6.2 indica o motivo de paragem para cada teste realizado em função das diferentes tolerância de seleção e critério de refinamento adotado. É possível observar que o algoritmo conduziu muito bem o processo de refinamento 'p'-adaptativo, não mostrando qualquer tipo de paragem do tipo contencioso, ou seja, aquela cujo propósito é evitar a instabilidade no sistema (ver secção 4.6.2). Pelo contrário, nos testes realizados, quando utilizado o critério de refinamento e convergência baseado na energia de deformação o motivo de paragem se deu majoritariamente pela convergência da solução, como mostra a primeira coluna. Já os testes em que se utilizou o critério de refinamento e paragem baseado na densidade máxima do resíduo na fronteira, o motivo de paragem se deu por ter sido encontrado a solução exata (ver secção 4.6.2) durante o processo de refinamento, na fase de verificação das direções das fronteiras a serem refinadas, onde posteriormente foi identificado que todos os valores para o critério de seleção em questão apresentaram valores menores que o zero numérico estabelecido pelo usuário, sendo assim definida a solução exata.

Tabela 6.2: Motivo de paragem em função da tolerância de seleção e do critério de refinamento para a placa em L.

	Motivo de parada	
	Critério de refinamento	
Tolerância de seleção	ΔU	ε_r
1.0E-5	Solução exata	Solução exata
0.5	Convergência	Solução exata
0.9	Convergência	Solução exata

Tabela 6.3: Energia de deformação ($U_{\Delta u}$), erro (E_U), número de iterações e número de graus de liberdade (NGL) em função da tolerância de seleção e critério de refinamento para placa em L

Tolerância de seleção	Critério de refinamento							
	ΔU				ε_r			
	$U_{\Delta U}$	$E_U(\%)$	Nº iterações	NGL	$U_{\varepsilon r}$	$E_U(\%)$	Nº iterações	NGL
1.0E-5	0.1551	0.32	9	380	0.1551	0.32	9	380
0.5	0.1552	0.25	33	341	0.1552	0.25	32	392
0.9	0.1552	0.25	38	284	0.1552	0.25	78	392

Em todos os testes realizados, para os diferentes critérios de refinamento e convergência, atingiu-se um valor muito próximo da energia de deformação tomada como referência, conforme apresentado na Tabela 6.3, tendo como erro máximo para os casos testados o valor de 0,19%. O foi calculado conforme equação

$$E_U(\%) = \frac{|U_{\Delta U} - U|}{U} \quad (6.1)$$

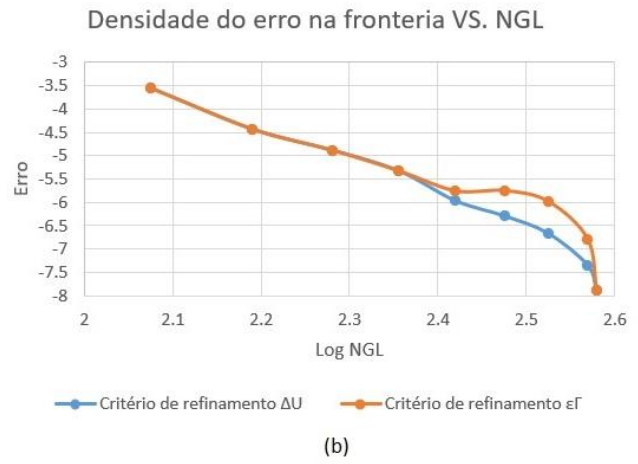
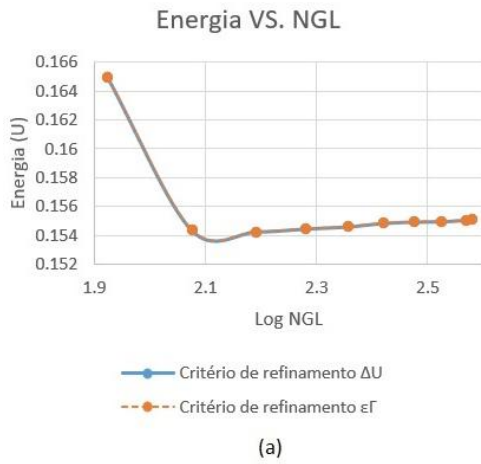
Sobretudo, analisando a mesma tabela, é visível que o algoritmo alcança uma boa aproximação da energia de deformação para todos os testes realizados inclusive para aqueles com o valor de tolerância de seleção baixo (permitindo o refinamento de multiplas fronteiras).

Os gráficos apresentados na Figura 6.3 mostram a convergência da energia de deformação e da densidade máxima do resíduo na fronteira para todo o processo iterativo até que se atinja um dos critérios de paragem, conforme discutido na seção 4.6.2, para diferentes critérios de seleção (10^{-5} , 0.5 e 0.9).

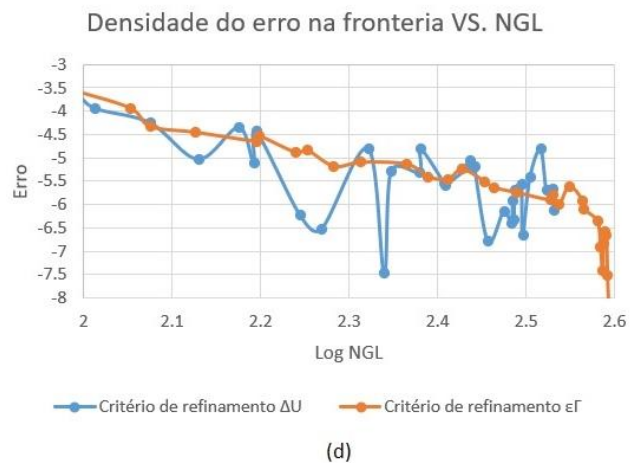
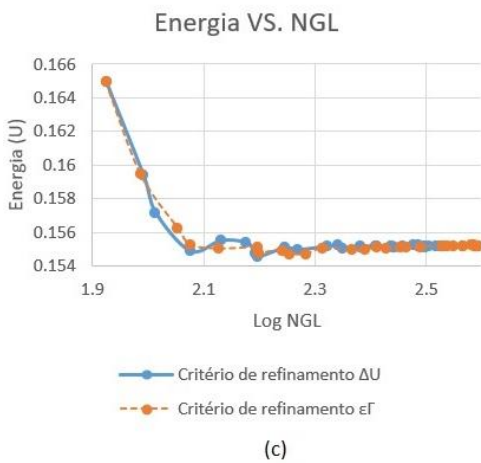
Os gráficos da Figura 6.3(a), Figura 6.3(c) e Figura 6.3(e) que expressam a variação da energia de deformação ao longo do processo iterativo para as diferentes tolerância de seleção evidenciam um padrão de convergência, independentemente do critério de refinamento adotado. A convergência pela energia de deformação se mostra para todos os casos não monótona, tal como esperado, e isso ocorre devido ao fato de os modelos de elementos finitos híbridos-Trefftz não serem nem localmente compatíveis, nem localmente equilibrados.

Os gráficos da Figura 6.3(b), Figura 6.3(d) e Figura 6.3(f) que expressam a variação da densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo para as diferentes tolerância de seleção também evidenciam um padrão de convergência para o critério de refinamento baseado na densidade máxima do resíduo na fronteira. No entanto, para o critério de refinamento baseado na variação da energia de deformação, os mesmos gráficos apresentam pontos bastantes dispersos e apontam que não há um controle deste critério de refinamento quando o algoritmo é parametrizado para controlar o refinamento baseado na densidade do resíduo da fronteira.

Tolerância de seleção: 10^{-5}



Tolerância de seleção: 0.5



Tolerância de seleção: 0.9

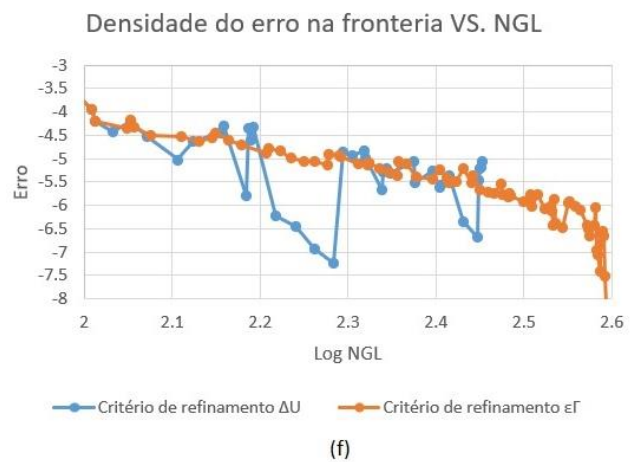
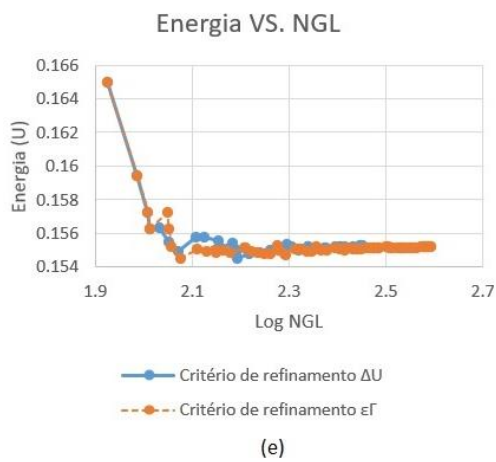


Figura 6.3: Energia de deformação (a), (c) e (e) e a densidade máxima do resíduo na fronteira (b), (d) e (f) em função do número de graus de liberdade e da tolerância de seleção para a placa em L.

Os campos dos deslocamentos e tensões nas direções Cartesianas, além da deformada da estrutura obtidos pelos dois critérios de refinamento, cada um associado ao seu respectivo critério de paragem, são apresentados na Figura 6.4, Figura 6.5 e Figura 6.6 para as tolerâncias de seleção 10^{-5} , 0.5 e 0.9, respectivamente.

A comparação dos resultados obtidos revela que não existem diferenças significativas na qualidade das soluções para as diferentes tolerâncias de seleção, verificando-se a continuidade interelementar e nas fronteiras exteriores, tanto para o campo dos deslocamento, como para o campo das tensões. A continuidade dos campos de tensões entre os elementos, não sendo imposta explicitamente na formulação, também expressa um sinal de boa convergência do modelo. Observa-se também que o campo das soluções apresentam gradientes de forma suave na região dos pontos de singularidade e que se traduz numa boa solução para este caso em particular, mesmo não utilizando bases de aproximações enriquecidas com funções específicas para tratar gradientes de tensão localmente elevados, como discutido na seção 3.5.

Por fim, foi feita uma verificação das condições de fronteiras estáticas (aplicadas nas fronteiras Neumann) e cinemáticas (aplicadas nas fronteiras Dirichlet) da solução. Para todas as tolerâncias de seleção é possível observar que a carga distribuída aplicada na fronteira $x = 0$ é bem recuperada. Além disso, as restantes fronteiras estáticas, apresentam valores condizentes com a ausência de forças aplicadas, incluindo as tensões tangenciais. A verificação das fronteiras cinemáticas, condizem com os valores definidos sendo este também um indicativo importante da validade das soluções obtidas. Portanto, para $x = 0$, tem-se $u_y = 0$ e para $y = 100$, tem-se $u_x = 0$). Os graus das funções de aproximação ao final do processo de refinamento 'p'-adaptativo, para cada elemento do domínio e fronteiras essenciais estão dispostos no Anexo B.1

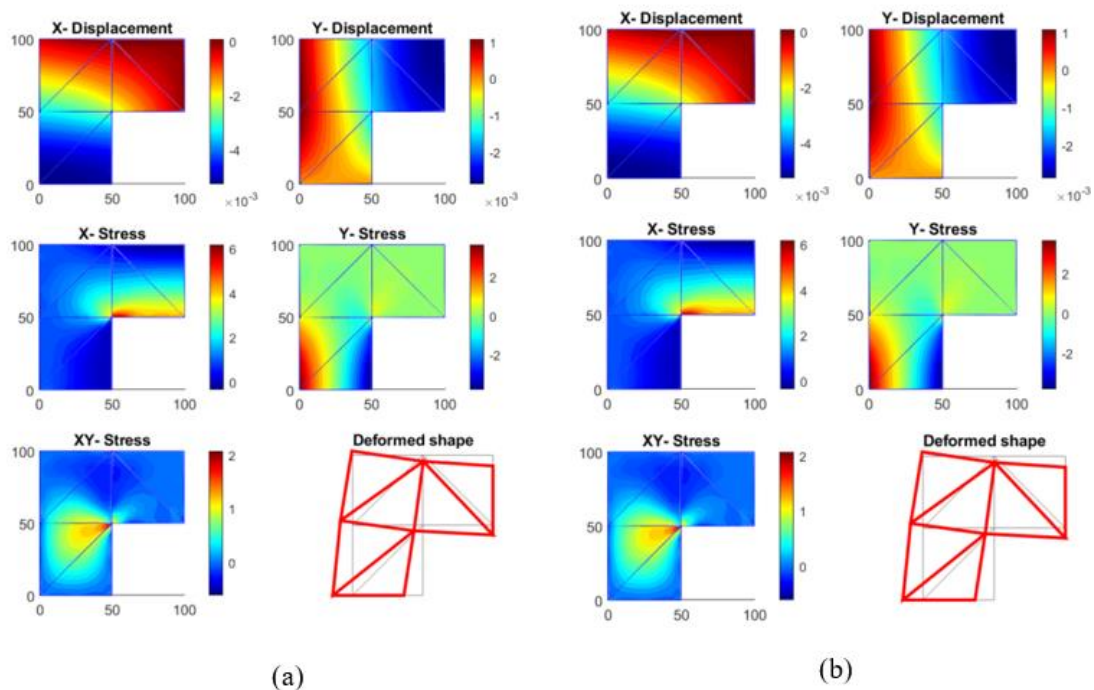


Figura 6.4: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento e paragem baseados na energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) para a tolerância de seleção de 10^{-5}

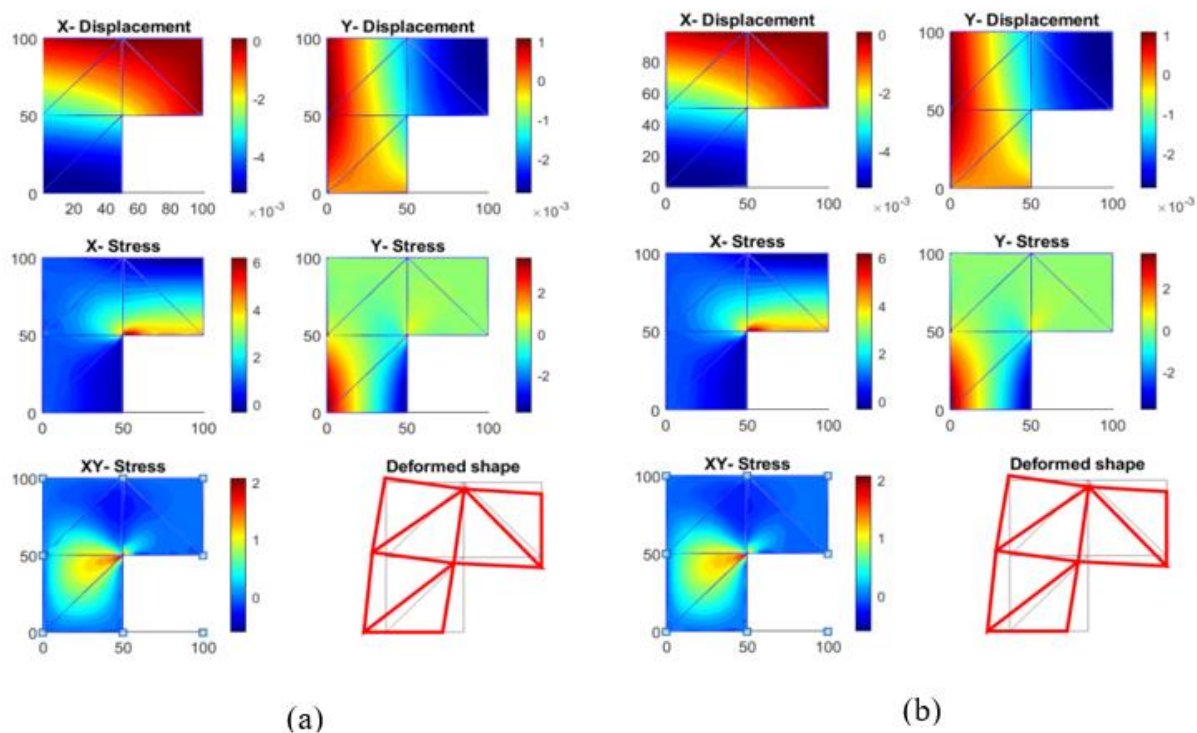


Figura 6.5: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento e paragem baseados na energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 0.5

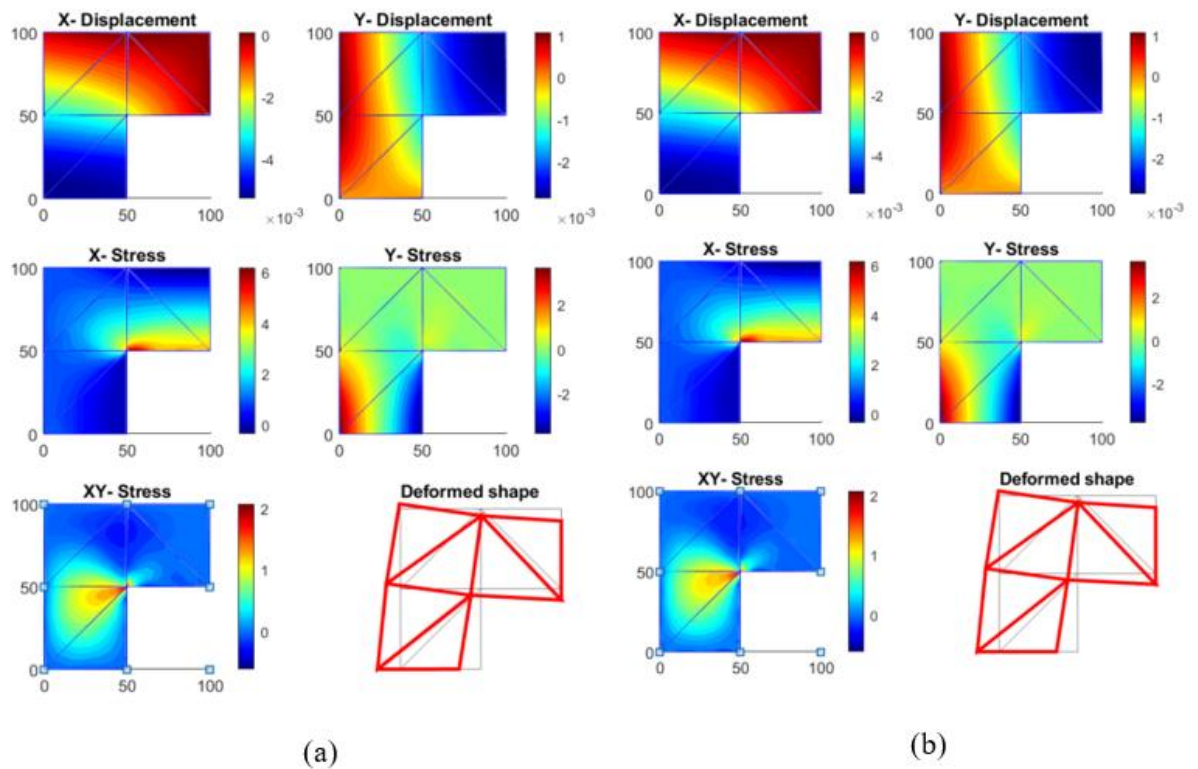


Figura 6.6: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento e paragem baseados na energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 0.9

6.3 Consola curta

O segundo teste realizado neste trabalho é feito de modo a simular um problema de consola curta que pode ser simplificado através de uma placa quadrada sujeito ao estado plano de tensão.

O problema ilustrado na Figura 6.7, possui altura e largura unitárias e propriedades do material definidas pelo módulo de Young $E = 2.6$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. As condições de fronteira do tipo Dirichlet são impostas na fronteira $x = 0$ de modo a limitar os deslocamentos verticais e horizontais. As condições de fronteira do tipo Neumann são aplicadas no bordo superior $y = 1$, na forma de uma carga unitária uniformemente distribuída.

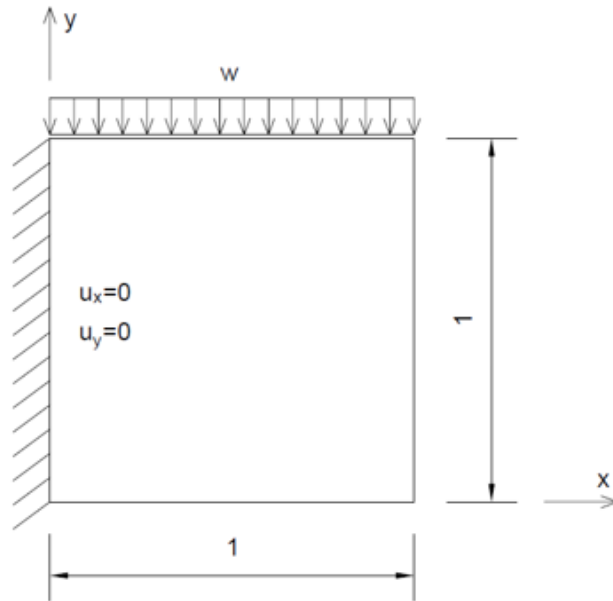


Figura 6.7: Modelo do problema da consola curta

Foram efetuados testes para a malha composta por 4 elementos retangulares e com as bases de aproximação iniciais com ordens unitárias, tanto para o domínio n_D^0 , quanto para as fronteiras na direção normal $n_{F,n}^0$ e tangencial. $n_{F,t}^0$. O valor aproximado da energia de deformação utilizada como referência é $U = 0,3779$, e é baseada no trabalho de Jesus [28].

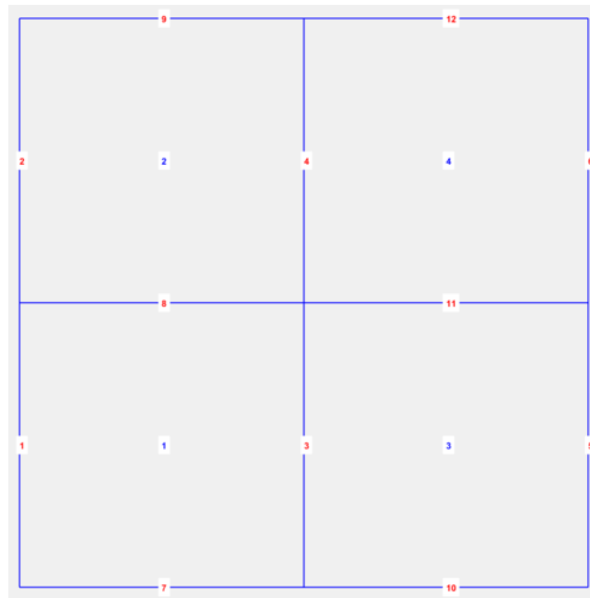


Figura 6.8: Malha com 4 elementos retangulares para a consola curta

A Tabela 6.4 indica o motivo de paragem para cada teste realizado em função das diferentes tolerâncias de seleção e critério de refinamento adotados. O fato de não se observar um padrão de convergência para o critério de refinamento baseado na energia de deformação é justificada pelo motivo de paragem ocorrer por ter sido atingida a ordem máxima das funções nas bases de aproximação. Para as tolerâncias de seleção igual a 0.5 e 0.9, é possível observar que os motivos de paragem para o critério de refinamento baseado na variação da energia de deformação foi pelo fato de ser ter atingida a tolerância de convergência. Em relação ao critério de refinamento baseado na densidade máxima do resíduo na fronteira, os critérios de paragem se deram em sua totalidade por ter sido encontrada a solução exata no processo de refinamento na fase da verificação das direções das fronteiras a serem refinadas, conforme discutido na secção 4.6.2.

Tabela 6.4: Motivo de paragem em função da tolerância de seleção e do critério de refinamento para a consola curta

	Motivo de parada	
	Critério de seleção	
Tolerância de seleção	ΔU	ε_r
1.0E-5	Ordem máxima das bases de aproximação	Solução exata
0.5	Convergência	Solução exata
0.9	Convergência	Solução exata

Em todos os testes realizados, para os diferentes critérios de refinamento e convergência, atingiu-se um valor muito próximo da energia de deformação tomada como referência, conforme apresentado na Tabela 6.5, tendo como erro máximo para os casos testados o valor de 1,80%. Sobretudo, analisando a mesma tabela, é visível que o algoritmo alcança uma boa aproximação da energia de deformação para todos os testes realizados inclusive para aqueles com o valor de tolerância de seleção baixo (permitindo o refinamento de multiplas fronteiras) e que tiveram menos iterações.

Tabela 6.5: Energia de deformação ($U_{\Delta u}$), erro (E_U), número de iterações e número de graus de liberdade (NGL) em função da tolerância de seleção e critério de refinamento para a consola curta.

Tolerância de seleção	Critério de refinamento							
	ΔU				ε_F			
	$U_{\Delta U}$	$E_U(\%)$	Nº Iterações	NGL	$U_{\varepsilon F}$	$E_U(\%)$	Nº Iterações	NGL
1.0E-5	0.3723	1.48	9	304	0.3711	1.80	8	296
0.5	0.3766	0.34	43	317	0.3766	0.34	33	328
0.9	0.3712	1.77	55	238	0.3766	0.34	75	328

Os gráficos que estão apresentados na Figura 6.9 mostram a convergência da energia de deformação e da densidade máxima do resíduo na fronteira para todo o processo iterativo até que se atinja um dos critérios de paragem, conforme discutido na seção 4.6.2, para diferentes critérios de seleção (10^{-5} , 0.5 e 0.9).

Os gráficos da Figura 6.9(a), Figura 6.9(c) e Figura 6.9(e) que expressam a variação da energia de deformação ao longo do processo iterativo para as diferentes tolerância de seleção mostram que para a tolerância de seleção igual a 10^{-5} , Figura 6.9(a), não é possível identificar um padrão de convergência para ambos os critérios de refinamento. No entanto, para as tolerâncias de seleção igual a 0.5 e 0.9, Figura 6.9(c) e Figura 6.9(e), é possível verificar um padrão de convergência, para o critério de refinamento baseado na variação da energia de deformação, mesmo que nas primeiras iterações haja grandes saltos na variação de energia que são seguidos por expressivas correções até que se atinja a convergência.

Os gráficos da Figura 6.9(b), Figura 6.9(d) e Figura 6.9(f) que expressam a variação da densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo para as diferentes tolerância de seleção evidenciam um padrão de convergência para o critério de refinamento baseado na densidade máxima do resíduo na fronteira. No entanto, igualmente ao teste anterior, para o critério de refinamento baseado na variação da energia de deformação, é possível observar que não há um controle deste critério de refinamento quando o algoritmo é parametrizado para controlar o refinamento baseado na densidade do resíduo da fronteira.

Os campos dos deslocamentos e tensões nas direções Cartesianas, além da deformada da estrutura obtidos pelos dois critérios de refinamento, cada um associado ao seu respectivo

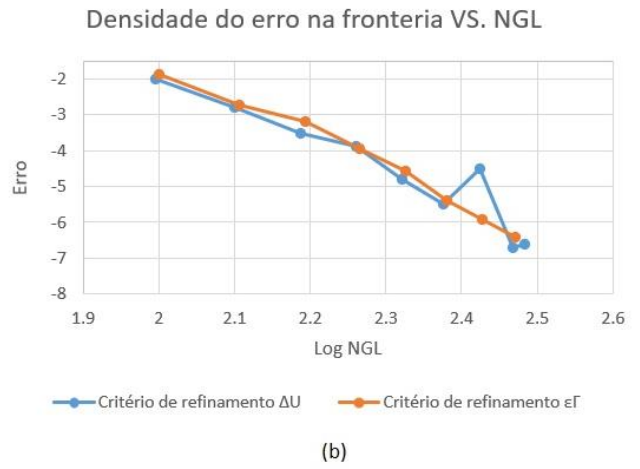
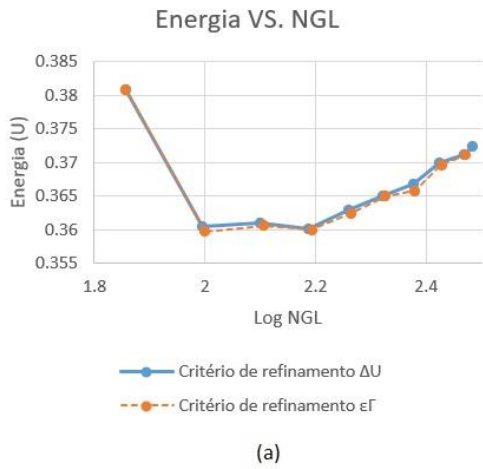
critério de paragem, são apresentados na Figura 6.10, Figura 6.11 e Figura 6.12 para as tolerâncias de seleção 10^{-5} , 0.5 e 0.9.

A comparação dos resultados obtidos revela que não existem diferenças significativas na qualidade das soluções para as diferentes tolerância de seleção. Através da análise dos mapas é possível observar a continuidade interelementar e nas fronteiras exteriores para os campos de deslocamentos na direção x e y . Nos mapas das tensões normais σ_x é possível observar zonas onde há uma continuidade interelementar e nas fronteiras exteriores, entretanto para as tensões normais σ_y e tensões tangenciais σ_{xy} , observa-se zonas de descontinuidades interelementar e um campo não gradual apresentando pequenos saltos na solução. Isso é esperado devido às condições de equilíbrio interelementar não serem de todo impostas na formulação ao contrário das condições de compatibilidade interelementar que são impostas em forma fraca e portanto recuperadas mais rapidamente que as condições de equilíbrio.

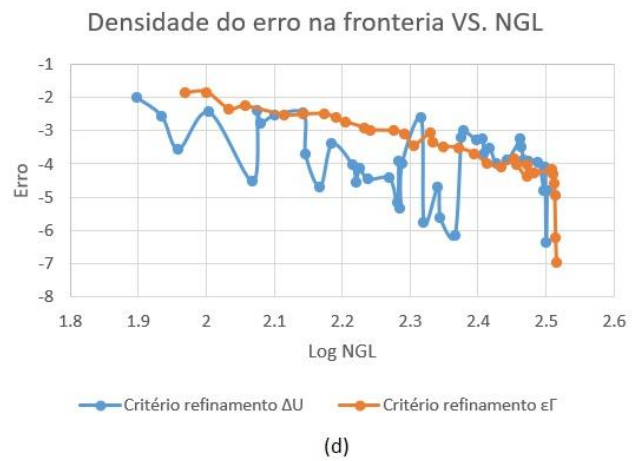
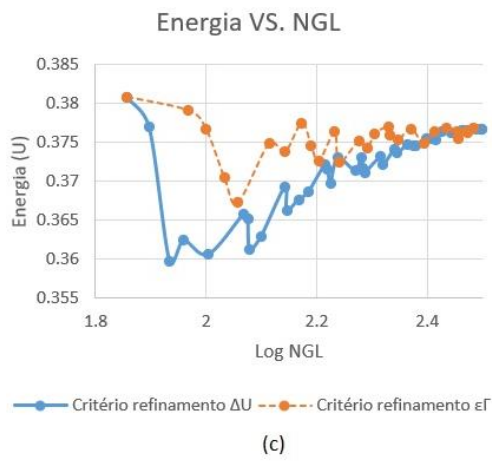
Sendo assim, esse problema poderia ter sido sanado com o aumento do refinamento do tipo 'h' , ou seja, acrescentando mais elementos ao modelo. Assim, é possível aumentar a qualidade do equilíbrio interelementar e fornecer ao algoritmo a capacidade de traduzir tais efeitos melhorando a convergência da solução de modo a traduzir melhor o campo das tensões.

Contudo, pode-se concluir que condições de fronteiras estáticas (aplicadas nas fronteiras Neumann) e cinemáticas (aplicadas nas fronteiras Dirichlet) da solução são bem recuperadas para todas as tolerâncias de seleção. Para $x = 0$, tem-se $u_x = u_y = 0$, e para $y = 1$, tem-se $\sigma_y \approx 1$. Os graus das funções de aproximação ao final do processo de refinamento 'p'-adaptativo, para cada elemento do domínio e fronteiras essenciais estão dispostos no Anexo B.2

Tolerância de seleção: 10^{-5}



Tolerância de seleção: 0.5



Tolerância de seleção: 0.9

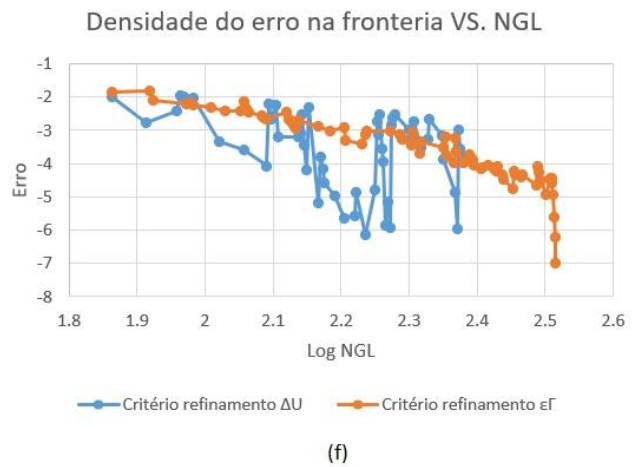
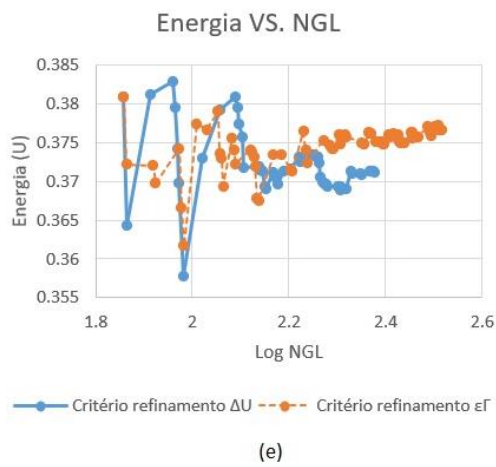


Figura 6.9: Energia de deformação (a), (c) e (e) e a densidade máxima do resíduo na fronteira (b), (d) e (f) em função do número de graus de liberdade e da tolerância de seleção para a consola curta

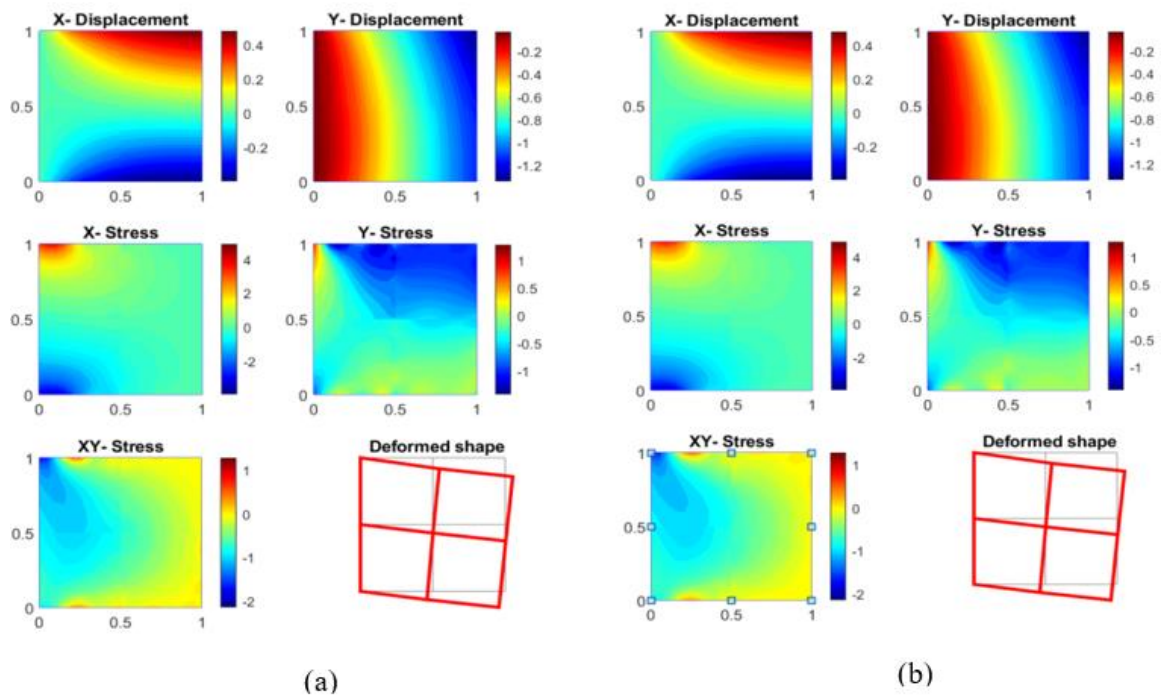


Figura 6.10: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento da energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 10^{-5}

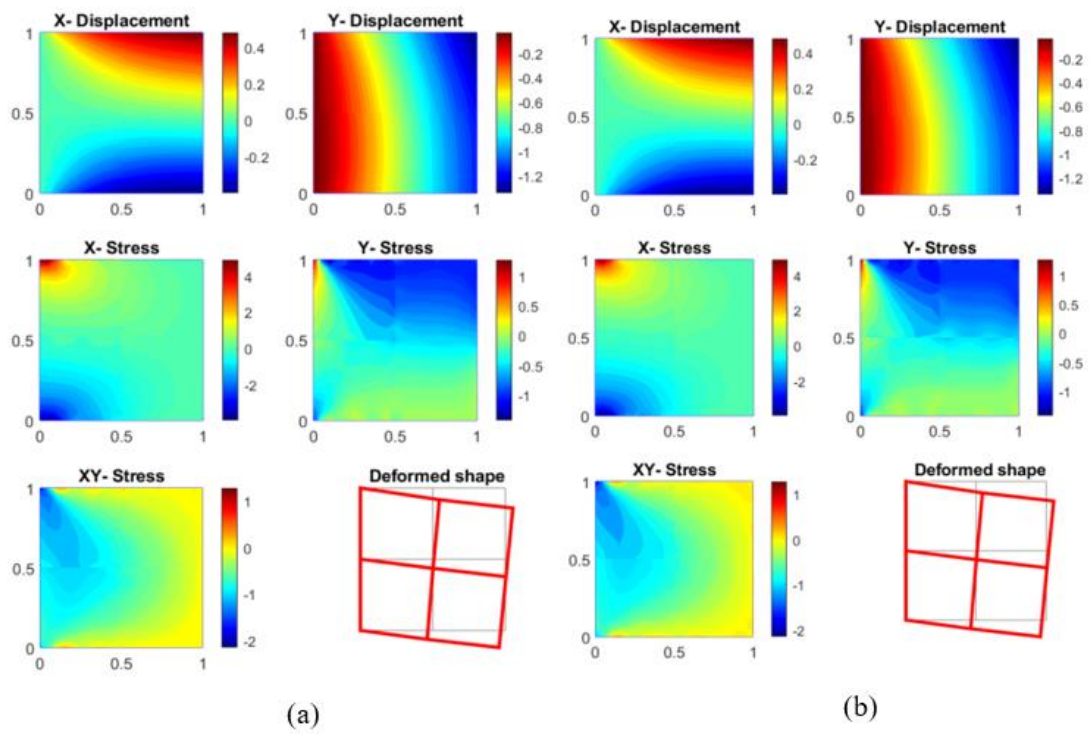


Figura 6.11: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento da energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 0.5

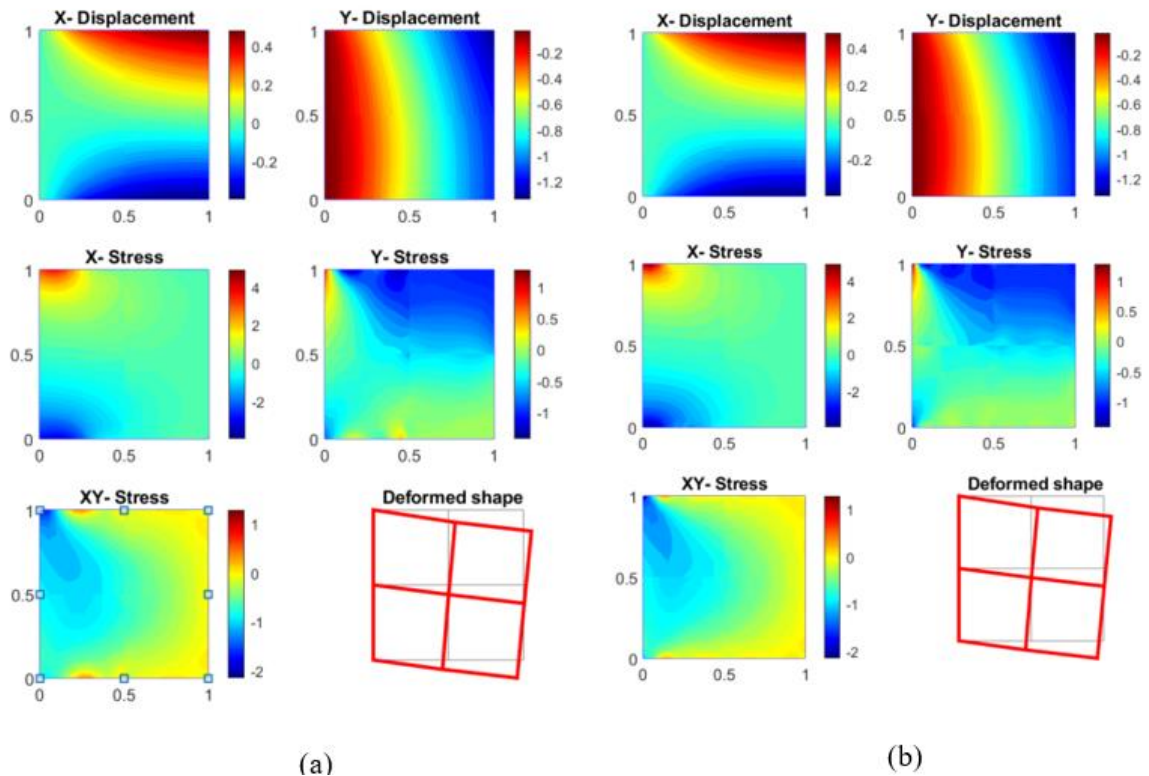


Figura 6.12: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento da energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 0.9

6.4 Placa com orifício circular

O terceiro teste realizado neste trabalho é feito de modo a simular um problema de uma placa retangular com um orifício circular sujeito ao estado plano de tensão.

O modelo possui altura igual 60, largura igual a 120 e o orifício circular com raio igual a 10 posicionado na placa conforme ilustrado na Figura 6.13. As propriedades do material são definidas pelo módulo de Young $E = 1000$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. As condições de fronteira do tipo Dirichlet são impostas no bordo esquerdo da placa em $x = 0$ de modo a limitar os deslocamentos verticais e horizontais. As condições de fronteira do tipo Neumann são aplicadas no bordo direito em $x = 1$ na forma de uma carga uniformemente distribuída igual a $w = 10$.

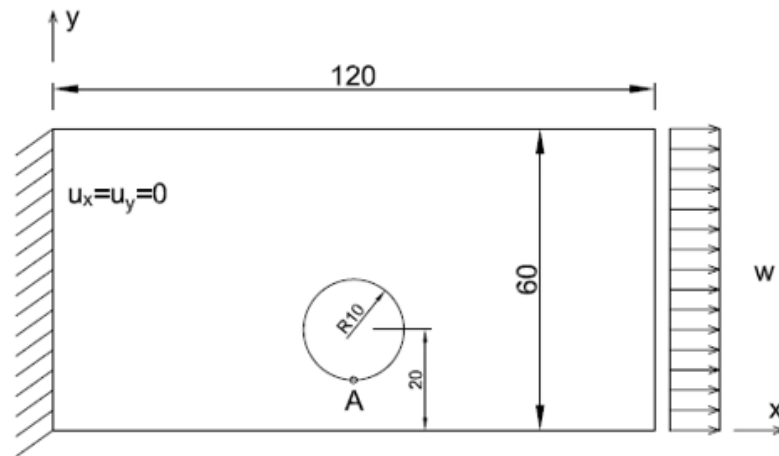


Figura 6.13: Modelo do problema da placa com orifício circular

Foram efetuados testes para uma malha composta por 60 elementos triangulares, conforme ilustrado na Figura 6.14 e com as bases de aproximação iniciais com ordens unitárias, tanto para o domínio n_D^0 , quanto para as fronteiras na direção normal $n_{r,n}^0$ e tangencial $n_{r,t}^0$. O valor aproximado da energia de deformação utilizada como referência é $U = 417.16$ e a tensão máxima no ponto A igual a $\sigma_{m\acute{a}x,A} = 41.4$. Ambos os resultados foram os obtidos por Souza [36] utilizando um programa de elementos finitos convencionais ANSYS [37]. No artigo mencionado, os autores resolveram o problema utilizando o ANSYS através de um modelo com malha de elementos triangulares de seis nós com 1278 elementos e 5428 graus de liberdade.

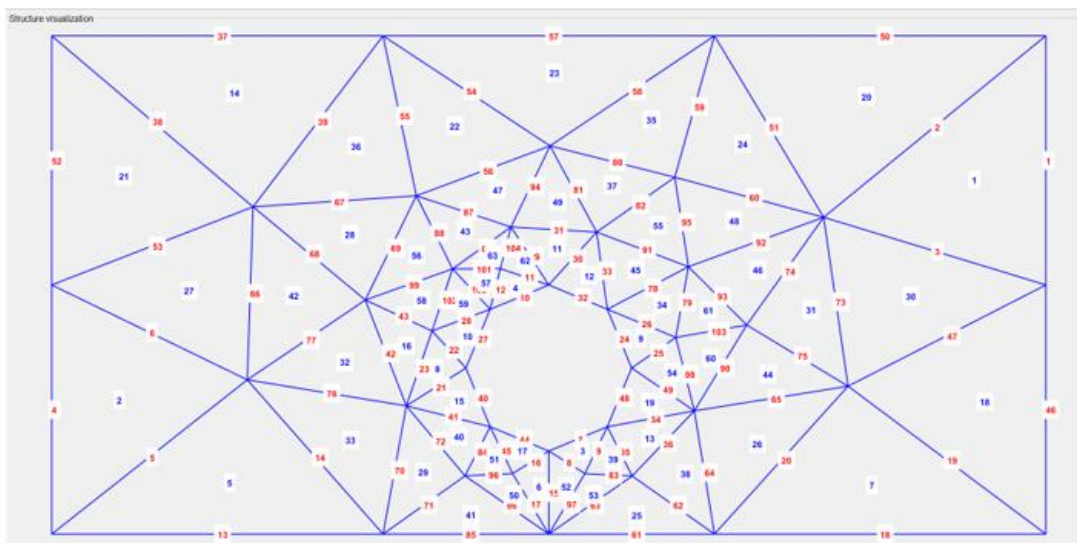


Figura 6.14: Malha com 60 elementos triangulares para o problema da placa com orifício circular

O gerador automático de malhas irregulares do algoritmo desenvolvido neste trabalho possui limitações de modo que o orifício é modelado não como uma circunferência, mas como um octógono. Como consequência dessa imprecisão geométrica, o modelo provoca erros pontuais na solução obtida no em torno do orifício no formato de concentrações espúrias de tensões. A mesma situação não foi visível no trabalho de Souza, devido capacidade do programa utilizado pelo autor de modelar o orifício como um elemento circular.

Diferentemente dos outros problemas, este contou somente com duas das três tolerâncias de seleção, pois a mais elevada (a qual restringia demasiadamente as fronteiras que seriam refinadas de uma só vez) não fazia sentido para este caso tendo como consequência muitas iterações e ao mesmo tempo muita demora para o cálculo computacional, divergindo do objetivo deste trabalho.

A Tabela 6.6 indica o motivo de paragem para cada teste realizado em função das diferentes tolerância de seleção e critério de refinamento adotado. Através dela, é possível observar que o algoritmo conduziu muito bem o processo de refinamento 'p'-adaptativo, não mostrando também qualquer tipo de paragem do tipo contencioso, ou seja, de modo a evitar a instabilidade no sistema (ver seção 4.6.2). Pelo contrário, nos testes realizados, quando utilizado o critério de refinamento e convergência baseado na energia de deformação o motivo de paragem se deu unicamente por ter atingido a tolerância de convergência, como mostra a primeira coluna. Já os testes em que se utilizou o critério de refinamento e paragem baseado na densidade máxima do resíduo na fronteira, o motivo de paragem se deu por ter sido encontrado a solução exata durante o processo de refinamento, na fase de verificação das direções das fronteiras a serem refinadas, onde foi identificado que todos os valores para o critério de seleção em questão apresentaram valores menores que o zero numérico estabelecido pelo usuário. E no segundo caso, para a tolerância de seleção igual a 0.5, também foi atingida a tolerância de convergência.

Tabela 6.6: Motivo de paragem em função da tolerância de seleção e do critério de refinamento para a placa com orifício circular

	Motivo de parada	
	Critério de seleção	
Tolerância de seleção	ΔU	ε_T
1.0E-5	Convergência	Solução exata
0.5	Convergência	Convergência

Através da Tabela 6.7, é possível verificar que para todos as tolerâncias de seleção e critérios de refinamento o problema teve uma boa convergência da energia de deformação, contando com um erro máximo de 1.58%, quando comparado com o valor de referência. Ainda, analisando a mesma tabela, é visível que o algoritmo alcança uma boa aproximação da energia de deformação para todos os testes realizados inclusive para aqueles com o valor de tolerância de seleção baixo (permitindo o refinamento de múltiplas fronteiras) e que tiveram menos iterações. Isso mostra que é possível otimizar o processo de cálculo e diminuir o esforço computacional para a obtenção de bons resultados. Verificou-se que o tempo computacional é menor se a seleção for menos restrita, ou seja, quando se permite o refinamento de mais fronteiras em simultâneo.

Fica ainda mais evidente neste problema que a restrição nas fronteiras a serem refinadas de uma só vez provoca, como pode ser visto na Figura 6.15(d) e na segunda coluna da Tabela 6.7, que há um aumento de 16 vezes nas iterações necessárias para se atingir a tolerância de convergência. Isso tem por consequência e mostra o demasiado esforço do algoritmo para alcançar a solução e um aumento considerável do tempo computacional para alcançar a tolerância de convergência definida.

Tabela 6.7: Energia de deformação ($U_{\Delta u}$), erro (E_U), número de iterações e número de graus de liberdade (NGL) em função da tolerância de seleção e critério de refinamento para a placa com orifício circular

Tolerância de seleção	Critério de refinamento							
	ΔU				ε_Γ			
	$U_{\Delta U}$	$E_U(\%)$	Nº Iterações	NGL	U_{ε_Γ}	$E_U(\%)$	Nº Iterações	NGL
1.0E-5	411.15	1.44	6	3651	411.23	1.40	9	4754
0.5	411.36	1.39	14	1624	411.29	1.41	219	5302

Os gráficos que estão apresentados na Figura 6.15 mostram a convergência da energia de deformação e da densidade máxima do resíduo na fronteira em todo o processo iterativo até que se atinja um dos critérios de paragem, conforme discutido na seção 4.6.2, para os critérios de seleção igual a 10^{-5} e 0.5, respectivamente.

Os gráficos da Figura 6.15(a) e Figura 6.15(c) que expressam a variação da energia de deformação ao longo do processo iterativo para as diferentes tolerância de seleção evidenciam um padrão de convergência, independentemente do critério de refinamento adotado.

Os gráficos da Figura 6.15(b) e Figura 6.15(d) que expressam a variação da densidade máxima do resíduo na fronteira ao longo do processo iterativo para as diferentes tolerância de seleção também evidenciam um padrão de convergência para o critério de refinamento baseado na densidade máxima do resíduo na fronteira. Entretanto, para o critério de refinamento baseado na variação da energia de deformação, os mesmos gráficos apresentam pontos bastantes dispersos e apontam que não há um controle deste critério de refinamento quando o algoritmo é parametrizado para controlar o refinamento baseado na densidade do resíduo da fronteira.

Ainda, é possível observar a convergência da solução para a tolerância de seleção igual a 10^{-5} , uma vez que a cada iteração o erro na fronteira é diminuído. Contudo, para a tolerância de seleção igual a 0.5, pode-se observar o aparecimento de uma certa instabilidade do sistema resolutivo, uma vez que começam a aparecer pontos bastante dispersos da linha de convergência e o algoritmo mantém o processo de refinamento até que se reduza o erro com o objetivo de que se atinja a tolerância de convergência. Isso ocorre conforme o esperado, pois uma vez que o refinamento conta uma tolerância de seleção menos abrangente (menos

fronteiras refinadas por iteração), são necessárias mais iterações até que se atinja a convergência da solução. Como consequência disso, é expectável que o sistema tenda a se tornar mais instável devido ao condicionamento excessivo do sistema devido ao demasiado enriquecimento das bases de aproximação.

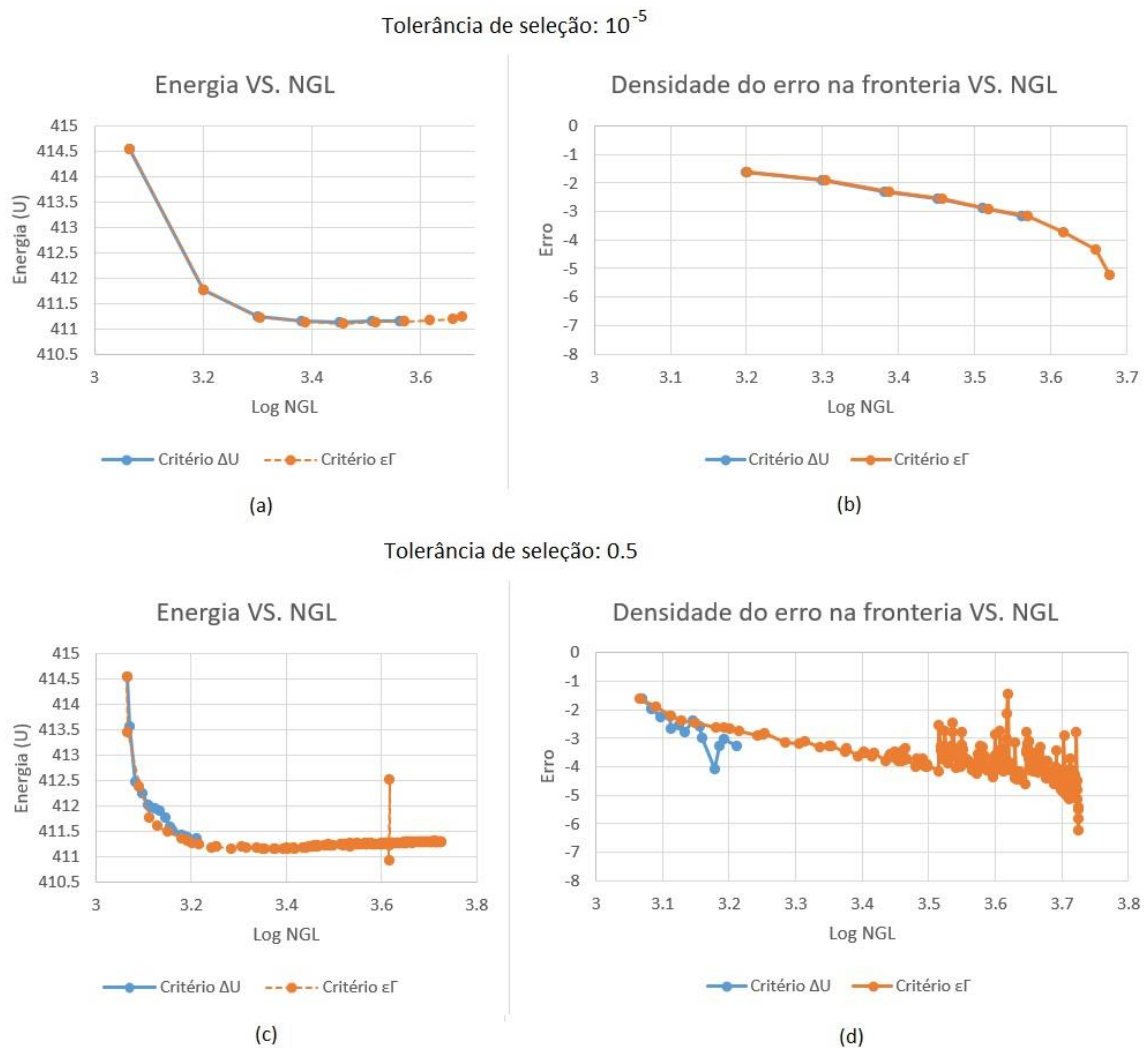


Figura 6.15: Energia de deformação (a), (c) e (e) e a densidade máxima do resíduo na fronteira (b), (d) e (f) em função do número de graus de liberdade e da tolerância de seleção para a placa com o orifício circular.

Os campos dos deslocamentos e tensões nas direções Cartesianas, além da deformada da estrutura obtidos pelos dois critérios de refinamento, cada um associado ao seu respectivo critério de paragem, são apresentados na Figura 6.16 e Figura 6.17 para as tolerâncias de seleção 10^{-5} e 0.5.

A comparação dos resultados obtidos revelam que não existem diferenças significativas na qualidade das soluções para as diferentes tolerâncias de seleção ou critério de refinamento adotado, sendo verificada a continuidade interelementar e nas fronteiras exteriores, tanto para o campo dos deslocamento, como para o campo das tensões.

Como um caso particular e discutido anteriormente, é possível notar concentrações de tensões espúrias ao redor do orifício, originadas por erros na modelação do problema. Devido a este fato não se pode fazer uma correlação direta da $\sigma_{m\acute{a}x,A}$ obtida pelo FreeHyTE e o valor obtido por Souza [36]. Entretanto, uma avaliação minuciosa da tensão feita não no ponto, mas na região do ponto A, mostra que a média do resultado obtido para todos os testes realizados foi de $\bar{\sigma}_{m\acute{a}x,A} = 38.67$, com o desvio padrão de 1,28, conforme mostrado na Figura 6.18. Isso representa um erro médio de 6.6% e relação a $\sigma_{m\acute{a}x,A}$ de referência.

Contudo, pode-se concluir que condições de fronteiras estáticas (aplicadas nas fronteiras Neumann) e cinemáticas (aplicadas nas fronteiras Dirichlet) da solução são bem recuperadas para todas as tolerâncias de seleção, sendo para $x = 0$, $u_x = u_y = 0$ e para $x = 120$, $\sigma_x = 10$. Os graus das funções de aproximação ao final do processo de refinamento 'p'-adaptativo, para cada elemento do domínio e fronteiras essenciais estão dispostos no Anexo B.3

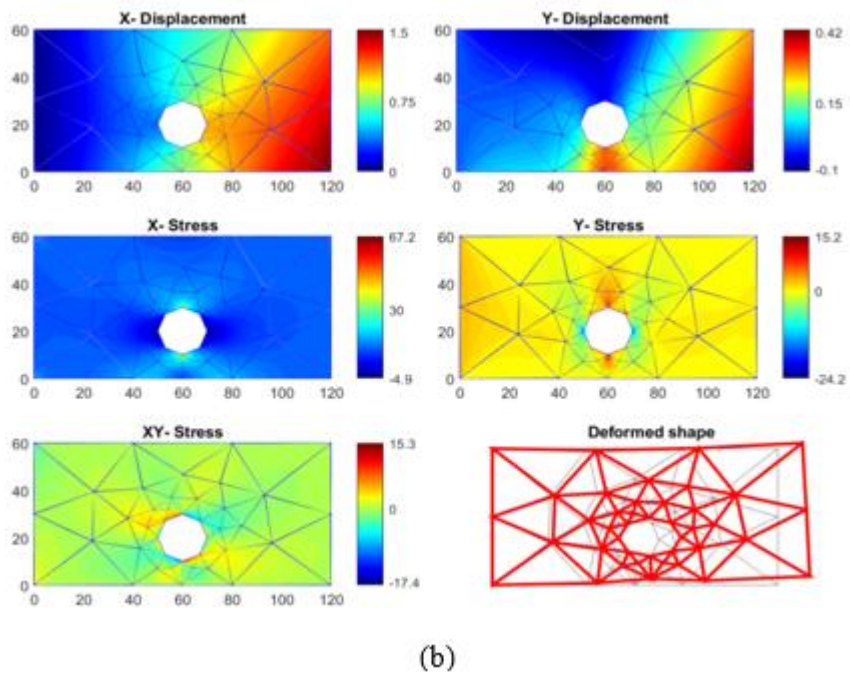
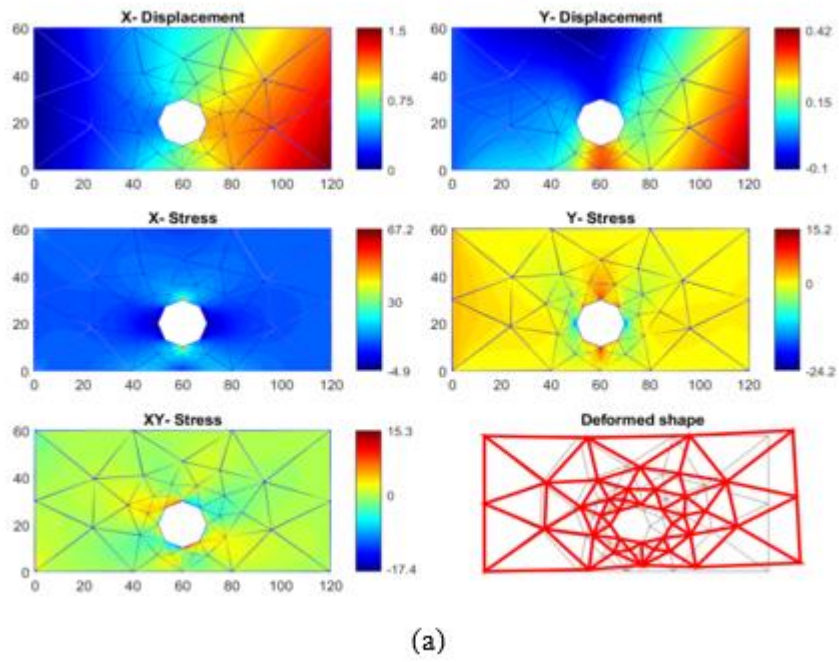
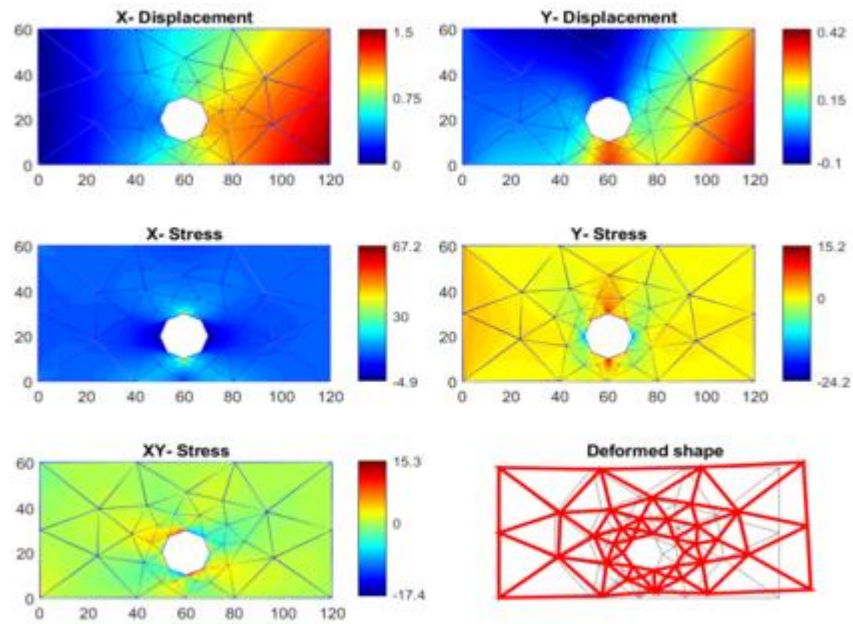
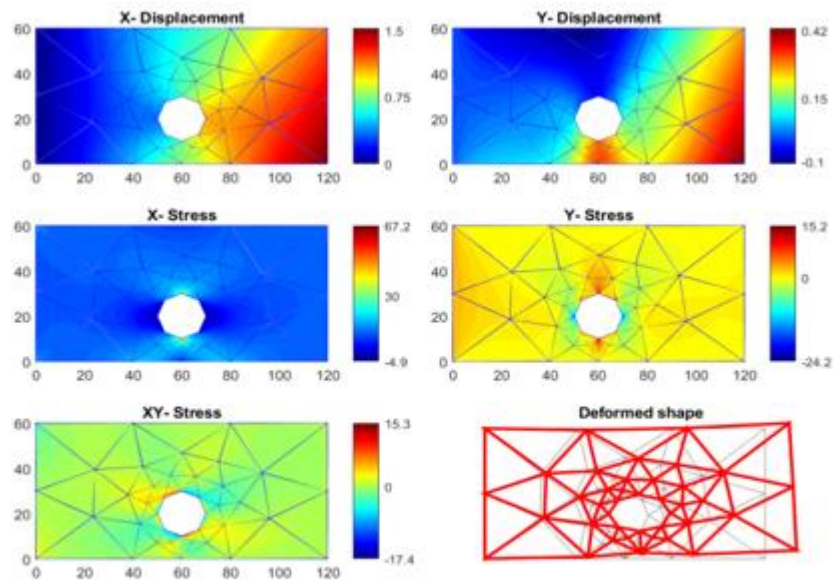


Figura 6.16: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento da energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 10^{-5}



(a)



(b)

Figura 6.17: Campos de deslocamento, tensões e deformada para o critério de refinamento da energia de deformação (a) e densidade máxima do erro na fronteira (b) e tolerância de seleção de 0.5

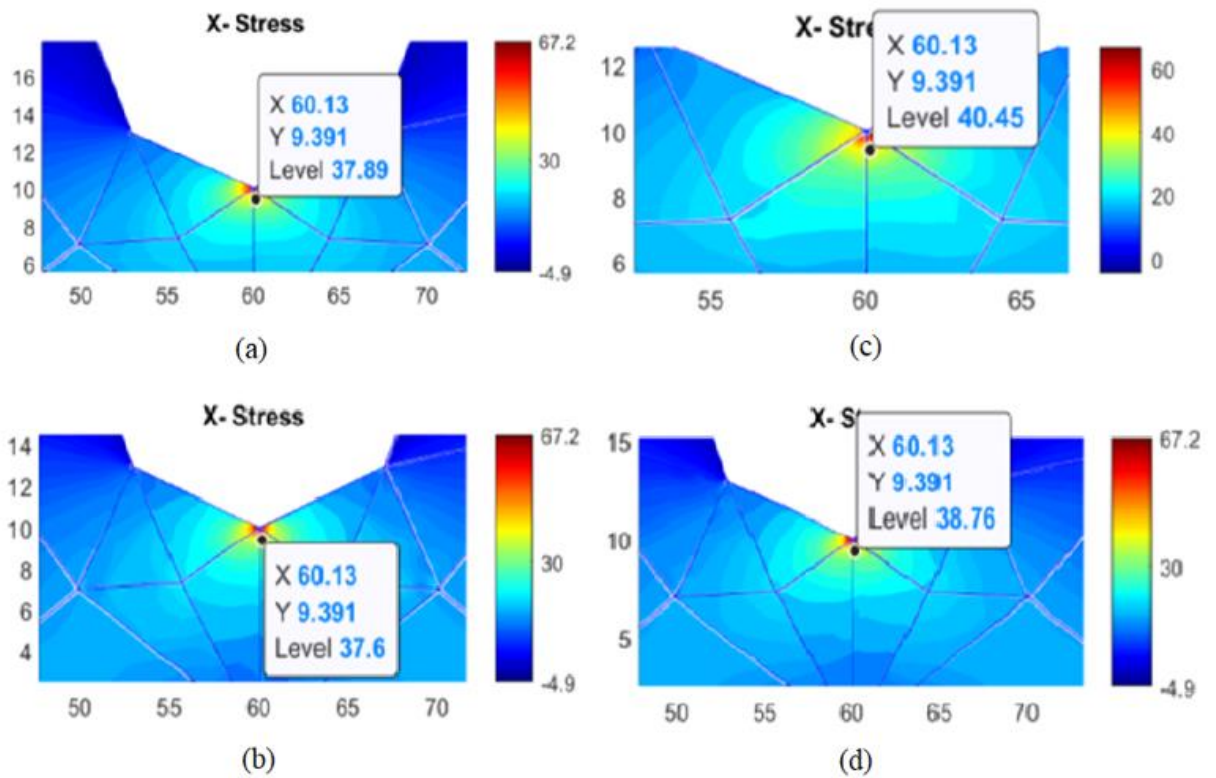


Figura 6.18: Tensões máximas na região do ponto A - (a) e (b) - tolerância de seleção 10^{-5} , para os critérios de refinamento e paragem baseado na energia de deformação e densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente. (c) e (d) - tolerância de seleção 0.5, para os critérios de refinamento e paragem baseado na energia de deformação e densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente.

CONCLUSÃO

7.1 Conclusões

O objetivo deste trabalho consistiu no desenvolvimento de um algoritmo computacional que utiliza elementos híbridos-Trefftz de deslocamento para a resolução de problemas estruturais sob o estado de tensão plana e o estado de deformação plana, utilizando procedimentos de refinamentos 'p'-adaptativos.

O motivo de escolha pela formulação híbrida-Trefftz com elementos de deslocamento ao invés dos elementos finitos convencionais é pela melhor precisão apresentada na recuperação dos campos das tensões, sendo estas informações utilizada para o dimensionamento estrutural em diferentes áreas da engenharia e é de grande importância que a solução obtida assegure uma estimativa de qualidade. Tal vantagem vem da maior qualidade das funções de aproximação que satisfazem a condição de Trefftz.

No modelo de deslocamento dos elementos finitos híbridos-Trefftz, é feita a aproximação do campo das tensões no domínio dos elementos, de modo que esta imposição faz com que o modelo respeite localmente a equação governativa do problema. O uso dessa estratégia na formulação possibilita alcançar melhores soluções com um menor número de graus de liberdade. Como vantagem adicional, os termos contidos no sistema resolutivo ficam definidos pela integral nas fronteiras. Contudo, esses elementos não satisfazem as condições nas fronteiras do elemento, tornando-se necessária a imposição explícita da condição de compatibilidade (na forma fraca), para o modelo de deslocamentos, nas fronteiras essenciais. Esta opção permite estabelecer de forma independente as aproximações dos deslocamentos no domínio dos elementos e das forças nas fronteiras essenciais da malha.

Nas formulações dos elementos finitos híbridos-Trefftz, as bases de aproximação são naturalmente hierárquicas e associadas às variáveis generalizadas (não-nodais), o que potencializou a eficiência do algoritmo 'p'-adaptativo tendo em conta que o enriquecimento das bases de aproximação não requer recalcular os termos calculados para o grau inferior. De maneira oposta, o novo sistema resolutivo obtém-se do anterior acrescentando ao sistema apenas as linhas e colunas que correspondem às funções adicionadas à(s) base(s).

As desvantagens relacionadas ao uso dos elementos finitos híbridos-Trefftz estão na ocorrência de sistemas resolutivos mais instáveis do que nas formulações de elementos finitos convencionais, que requerem um investimento de tempo computacional significativo na sua análise e estabilização. Ao longo do desenvolvimento deste trabalho foi verificado que o controle da estabilidade do sistema pode ser feito utilizando os métodos de pré-condicionamento do sistema resolutivo antes da solução e também com a constante verificação do número de condição, e que para os problemas resolvidos neste trabalho se mostrou bastante eficiente para a obtenção de boas soluções aliada à eficácia do desempenho do algoritmo em termos do processamento do cálculo estrutural e na apresentação das soluções para os problemas.

A convergência dos elementos finitos híbridos-Trefftz foi testada sob o refinamento 'p'-adaptativo, e comparada com problemas desenvolvidos por outros autores que já tinham as soluções aproximadas conhecidas. Os testes comparados com os de outros autores abrangem não só comparações com a formulação dos elementos finitos híbridos-Trefftz, mas também com formulações dos elementos finitos convencionais, inclusive por um software com vasta utilização no campo da engenharia (ANSYS) e portanto, apresentaram resultados bastante fidedignos.

Deste modo, confirmou-se a eficiência do algoritmo desenvolvido para a obtenção de soluções com rápidas convergências e soluções cuja a modelação numérica traduziram muito bem o comportamento real da estrutura. Constatou-se que a convergência obtida não é monótona uma vez que os elementos finitos híbridos-Trefftz não são nem localmente compatíveis, nem localmente equilibrados.

Foi feita uma avaliação com relação à qualidade dos campos da solução obtidos, à qual se constatou que utilizando o algoritmo desenvolvido neste trabalho, há uma recuperação satisfatória das condições de fronteira impostas e a continuidade interelementar.

A eficiência do algoritmo 'p'-adaptativo implementado foi testada para três problemas, cada um com um diferencial. Para todos eles, foram testados dois critérios de refinamento, nomeadamente o da variação da energia de deslocamento e o da densidade máxima do

resíduo na fronteira, cada um associado ao seu respectivo critério de paragem. Além disso, foram testados diferentes valores da tolerância de seleção com relação à quantidade de fronteiras a serem refinadas de uma só vez.

Notou-se que para todos os casos há uma imensa vantagem ao utilizar uma tolerância de seleção mais abrangente e que permite o refinamento de múltiplas fronteiras a cada processo iterativo, o que se revelou numa grande vantagem em termos de esforço computacional, acarretando em menos iterações aliada à uma rapidez da convergência, retornando ao mesmo tempo campos de solução coerentes e confiáveis.

No entanto, chama-se atenção para primeiro problema em que se conseguiu ótimos resultados na representação dos campos em problemas que existem pontos de singularidade, mesmo não tendo funções específicas nas bases de aproximação para expressar tal efeito. Por outro lado, foi constatado que para a representação de campos descontínuos, como no caso do problema dois, por vezes é necessário considerar um aumento do refinamento do tipo 'h', de forma a traduzir tais efeitos com mais acuracidade.

Em suma, todos os testes anteriores mostraram o desempenho do algoritmo 'p'-adaptativo aplicado aos elementos finitos híbridos-Trefftz de deslocamento (HTD) na solução de problemas elastoestáticos lineares. Os resultados são favoráveis e demonstram acuracidade e qualidade na taxa de convergência de soluções e também no campo dos deslocamentos e tensões.

Além disso a aplicação do algoritmo para problemas com geometrias diferentes permite observar que é possível alcançar uma solução aproximada com qualidade para traduzir efeitos locais, nomeadamente os pontos de singularidades e também efeitos globais para uma ampla gama de problemas, podendo ser de grande utilidade para a implementação deste tipo de formulação em larga escala, inclusive futuramente em programas de uso comercial uma vez que a formulação estudada neste trabalho somada ao processo de refinamento 'p'-adaptativo permite o uso do programa por usuários menos experientes.

7.2 Desenvolvimentos futuros

Finalizando o trabalho desta dissertação, são apresentados em seguida alguns pontos de possível interesse para trabalhos futuros, relacionados com o tema aqui desenvolvido.

- Adaptação das formulações híbridas-Trefftz para a análise dinâmica de elasticidade plana; e

- Adaptação das formulações híbridas-Trefftz para análise estática e dinâmica de problemas de elasticidade tridimensional.

BIBLIOGRAFIA

- [1] "MATLAB Software." <https://www.mathworks.com/products/matlab.html> (accessed Nov. 25, 2021).
- [2] I. D. Moldovan, I. Cismasiu, V. V. O. B. da Silva, E. D. Bendea, A. M. E. Sequeira, and M. R. Geraldès, "FreeHyTE Software." <https://freehyte.gitlab.io/> (accessed Nov. 23, 2021).
- [3] M. Geraldès, "Elementos finitos híbridos-Trefftz ' p ' -adaptativos para problemas de condução de calor", Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa, 2016.
- [4] V. Silva, "Elementos finitos híbridos-Trefftz de deslocamento para problemas de elasticidade plana", Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa, 2016.
- [5] A. Sequeira, "Elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão para problemas de elasticidade plana", Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa, 2017.
- [6] D. Bendea, "Hybrid-Trefftz finite elements for plane structural dynamics", Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa, 2020.
- [7] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*. 2nd ed. Prentice Hall Pearson Education, Inc. 2016.
- [8] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 49, no. 1, pp. 1–23, 1943, doi: 10.1090/S0002-9904-1943-07818-4.
- [9] J. L. Synge and W. C. Rheinboldt, "The Hypercircle in Mathematical Physics," *Physics Today*, vol. 10, no. 10, pp. 45–46, 1957, doi: 10.1063/1.3060143.
- [10] R. Duffin, "Distributed and Lumped Networks," *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 8, no. 5, pp. 793–826, 1959, doi: 10.1512/iumj.1959.8.58051.

- [11] R. W. Clough, *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*. American Society of Civil Engineers, 1960.
- [12] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Science, 1965.
- [13] O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics: Numerical Solution of Problems in Structural and Continuum Mechanics*, vol. 1. McGraw-Hill, 1970.
- [14] T. H. H. Pian, "State-of-the-art development of hybrid/mixed finite element method," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 21, no. 1–2, pp. 5–20, 1995, doi: 10.1016/0168-874X(95)00024-2.
- [15] E. Trefftz, "Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren," *Proc. Int. Kongress für Technische Mechanik*, pp. 131–137, 1926.
- [16] J. Jirousek, "Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 14, no. 1, pp. 65–92, 1978, doi: 10.1016/0045-7825(78)90013-0.
- [17] I. Herrera, "Boundary methods: A criterion for completeness," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 77, no. 8, pp. 4395–4398, 1980, doi: 10.1073/pnas.77.8.4395.
- [18] J. A. Teixeira de Freitas and C. Cismasiu, "Formulation of hybrid-Trefftz displacement elements," *Advances in Finite Element Technology, Topping B.H.V. (ed.) Civil-Comp Press, Edinburgh*, pp. 195–202, 1996.
- [19] J. A. Teixeira de Freitas, "Formulation of elastostatic hybrid-Trefftz stress elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 153, pp. 127–151, 1998.
- [20] J. A. Teixeira De Freitas and F. L. S. Bussamra, "Three-dimensional hybrid-Trefftz stress elements," *Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, pp. 927–950, 1999, doi: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000220\)47:5<927::AID-NME805>3.0.CO;2-B](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000220)47:5<927::AID-NME805>3.0.CO;2-B).
- [21] F. Bussamra, P. Pimenta and J. Freitas, "Elementos finitos híbridos-trefftz para análise elastoplástica de sólidos tridimensionai", In *Computational methods in engineering - XX CILAMCE*, 1999.
- [22] C. Cismaşiu, "The hybrid-Trefftz Displacement Element for Static and Dynamic Structural Analysis Problems", Instituto Superior Técnico, 2000.

- [23] A. Teixeira De Freitas, "Hybrid finite element formulations for elastodynamic analysis in the frequency domain", *International Journal of Solids and Structures*, 36(13), 1883–1923. doi:10.1016/s0020-7683(98)00064-x.
- [24] J. A. Teixeira De Freitas, C. Cismasiu, and Z. M. Wang, "Comparative Analysis of Hybrid-Trefftz Stress and Displacement Elements," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 6, no. 1, pp. 35–59, 1999, doi: 10.1007/BF02828329.
- [25] R. E. Bank, A. Sherman, A. H. Sherman Z, and A. Weiser, "Some Refinement Algorithms And Data Structures For Regular Local Mesh Refinement," 1999, [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/2579382>
- [26] X. Tang and T. Sato, "Adaptive Mesh Refinement and Error Estimate for 3-D Seismic Analysis of Liquefiable Soil Considering Large Deformation," *Journal of Natural Disaster Science*, vol. 26, no. 2004, pp. 37–48, 2004, doi: 10.2328/jnds.26.37.
- [27] J. A. Teixeira De Freitas and C. Cismasiu, "Adaptive p-refinement of hybrid-Trefftz finite element solutions," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 39, pp. 1095–1121, 2003, doi: 10.1016/S0168-874X(02)00159-2.
- [28] A. Jesus, "Análise estrutural com elementos finitos híbridos-Trefftz e refinamento p - adaptativo," Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa, 2010.
- [29] A. H. Jesus, I. C. Cismaşiu, and J. A. T. Freitas, "Fully automatic p-adaptive hybrid-Trefftz displacement elements," *Computer Methods in Mechanics*, pp 1-16, 2011,
- [30] R. W. Clough, "Original formulation of the finite element method," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 7, no. 2, pp. 89–101, 1990, doi: 10.1016/0168-874X(90)90001-U.
- [31] I. D. Moldovan and J. A. Teixeira de Freitas, "Hybrid-Trefftz displacement and stress elements for bounded poroelasticity problems," *Computers and Geotechnics*, vol. 42, pp. 129–144, 2012, doi: 10.1016/j.compgeo.2011.12.003.
- [32] E. Arantes e Oliveira, *Elementos da Teoria da Elasticidade*, 1st ed. IST Press, 2010, p. 176.
- [33] S. Timoshenko and J. N. Goodier, "Theory of Elasticity." 1st ed McGraw-Hill Book Company, p. 506, 1951.
- [34] A. Coutinho *et al*, "FreeHyTE - Structural HTD User's Manual," vol. v 1.2, p. 60, 2016.
- [35] J. E. Flaherty, M. Shepard, P. Paslow, and D. Vasilakis, *Adaptive Methods for Partial Differential Equations*. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.
- [36] C. O. de Souza and S. P. B. Proença, "A hybrid-Trefftz formulation for plane elasticity with selective enrichment of the approximations," *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, vol. 27, no. 5, pp. 785–804, 2011, doi: 10.1002/cnm.1334.

- [37] "ANSYS | ENGINEERING SIMULATION SOFTWARE." <https://www.ansys.com/> (accessed Nov. 20, 2021).

APÊNDICE

A.1 Dados de entrada do programa e definição das variáveis

Mesh generator: permite o usuário escolher o tipo de malha para o problema trabalhado. Os tipos de malha são com elementos retangulares indicada para elementos retangulares e com elementos triangulares indicadas para elementos com uma geometria irregular ou contendo círculos, áreas arredondadas e etc.

Number of Gauss points: permite que o usuário inserira o número de pontos de Gauss para a integração numérica.

Geometry and meshing: esta secção permite que o usuário inserira as dimensões do problema e em quantos elementos o problema será dividido no plano x e y.

Initial boundary and domain orders: esta secção permite que o usuário insira a ordem inicial tanto para o domínio dos elementos, quanto para a fronteira essenciais.

Material parameters: permite que o usuário insira os parâmetros do material, nomeadamente o módulo de Young e o coeficiente de Poisson. Além disso, o usuário define se o problema é o estado plano de tensão ou estado plano de deformação.

Boundary types: esta secção permite que o usuário defina o tipo de fronteira (Neumann ou Dirichlet) para todas as fronteiras do problema.

Boundary conditions: permite que o usuário insira os valores de forças e/ou deslocamentos impostos a serem atribuídos para cada fronteira.

Structure check: permite que a estrutura do problema seja verificada pelo usuário, nomeadamente a malha, e as condições de fronteira normais e tangenciais seja de força ou deslocamentos impostos em todas as fronteiras da malha.

Type of analysis: permite que o usuário defina o tipo de análise para o problema. Os tipos de análise são: 'single run' que significa apenas a resolução do problema sem que seja feito nenhum tipo de refinamento do tipo 'p' e o 'adaptative p-refinement' que se refere a resolução do problema com iterações que visam retornar a melhor solução através do refinamento do tipo 'p', de acordo com o critério de seleção escolhido

Definição das variáveis das estruturas de dados (Edges, Loops e BConds)

Estrutura Edge

Edges.nini: Matriz com o número de linhas igual ao número de fronteiras e uma coluna referente ao nó inicial da respectiva fronteira.

Edges.nfin: Matriz com o número de linhas igual ao número de fronteiras e uma coluna referente ao nó final da respectiva fronteira.

Edges.parametric:

Edges.lleft: Matriz com o número de linhas igual ao número de fronteiras e uma coluna referente ao número do elemento que se encontra a esquerda da respectiva fronteira.

Edges.lright: Matriz com o número de linhas igual ao número de fronteiras e uma coluna referente ao número do elemento que se encontra a direita da respectiva fronteira.

Edges.type: Matriz com o número de linhas igual ao número de fronteiras e uma coluna referente ao tipo da respectiva fronteira sendo esta Neumann ou Dirichlet.

Edges.order: Matriz com o número de linhas igual ao número de fronteiras e duas colunas referente à ordem da função da base de aproximação na direção normal e tangencial respectivamente.

Edges.dim: Matriz com a quantidade de linhas igual ao número de fronteiras e duas colunas referente à dimensão total da base de aproximação na respectiva fronteira para a direção normal e tangencial respectivamente.

Edges.insert: Matriz com a quantidade de linhas igual ao número de fronteiras e duas colunas contendo a posição em que os blocos B1, B2, B3, B4 e B5 serão inseridos para a respectiva fronteira.

Edges.Edgeinsert: Guarda a coordenada que representa a coluna aonde será o começo das matrizes de fronteira no sistema resolutivo global.

Estrutura Loops (Elementos)

Loops.nodes: Matriz com o número de linhas igual ao número de elementos e com três ou quatro colunas que contém os números dos nós que o respectivo elemento possui.

Loops.edges: Matriz com o número de linhas igual ao número de elementos e com três ou quatro colunas que contém os números das fronteiras as quais delimitam o respectivo elemento.

Loops.center: Matriz com o número de linhas igual ao número de elementos e com duas colunas contendo as coordenadas x e y do centro do respectivo elemento, tendo como referência o canto inferior esquerdo da estrutura do problema trabalhado.

Loops.area: Matriz com o número de linhas igual ao número de elementos e com uma coluna contendo a área do respectivo elemento.

Loops.order: Matriz com o número de linhas igual ao número de elementos e com uma coluna contendo a ordem do respectivo elemento.

Loops.materials: Matriz com o número de linhas igual ao número de elementos e com cinco colunas contendo as propriedades do material, nomeadamente o módulo de Young, o coeficiente de Poisson, e os 3 coeficientes da rigidez do material calculado a partir da fórmula genérica da lei de Hooke K1, K2 e K3 respetivamente.

Loops.dim: Matriz com a quantidade de linhas igual ao número de elementos e cinco colunas referente à dimensão total da base de aproximação na respetiva fronteira, a considerar em cada coluna o bloco K11, K22, K33, K44 e K55, respetivamente e que são os modos que provocam deformações e de corpo rígido.

Loops.insert: Matriz com a quantidade de linhas igual ao número de elementos e cinco colunas contendo a posição em que os blocos K11, K22, K33, K44 e K55 serão inseridos para o respectivo elemento.

Estrutura BConds

BConds.Neumann: Cell array com o número de linhas igual ao número de fronteiras e com duas colunas referente aos esforços normais e tangenciais respetivamente.

BConds.Dirichlet: Matriz com o número de linhas igual ao número de fronteiras e com duas colunas referentes aos valores de deslocamentos impostos normais e tangenciais, respetivamente

RESULTADOS COMPLEMENTARES

B.1 Placa em L

Na Figura 7.1 é apresentado um modelo com a malha dos elementos finitos utilizado para a resolução do problema da seção 6.2 (Placa em L)

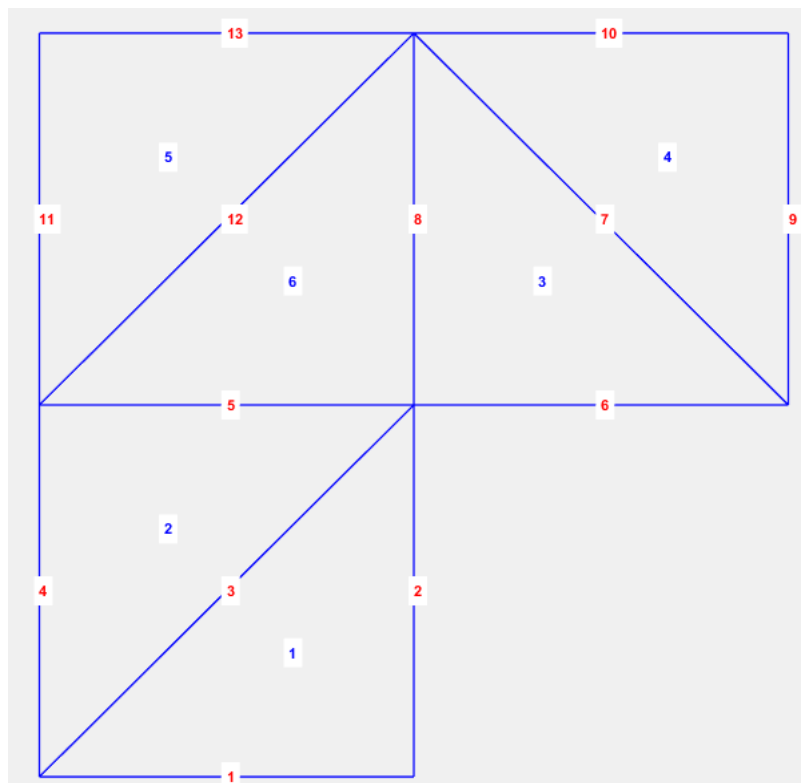


Figura 7.1: Modelo da malha da placa em L

A seguir, são apresentadas as ordens dos graus das funções de aproximação para o problema da placa em L para o domínio conforme Tabela 7.1, resolvido na seção 6.2, para os

critérios de refinamento e paragem baseados na variação da energia de deformação e na densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente.

Tabela 7.1: Ordens finais das bases de aproximação do domínio da placa em L

Loops Order						
	ΔU			ε_r		
	Tolerância de seleção					
Loops	10^{-5}	0.5	0.9	10^{-5}	0.5	0.9
1	10	10	10	10	10	10
2	10	10	10	10	10	10
3	10	10	10	10	10	10
4	10	5	5	10	10	10
5	10	10	5	10	10	10
6	12	14	10	12	15	15

A seguir, são apresentadas as ordens dos graus das funções de aproximação para o problema da placa em L para a direção normal das fronteiras conforme Tabela 7.2, para os critérios de refinamento e paragem baseados na variação da energia de deformação e na densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente.

Tabela 7.2: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção normal da placa em L

Edges Order – Direção Normal						
	ΔU			ε_{Γ}		
	Tolerância de seleção					
Edge	10^{-5}	0.5	0.9	10^{-5}	0.5	0.9
1	9	4	3	9	9	9
3	9	9	5	9	9	9
5	9	9	8	9	9	9
7	9	4	4	9	9	9
8	9	9	9	9	9	9
9	9	2	1	9	9	9
12	9	9	4	9	9	9

A seguir, são apresentadas as ordens dos graus das funções de aproximação para o problema da placa em L para a direção tangencial das fronteiras conforme Tabela 7.3, para os critérios de refinamento e paragem baseados na variação da energia de deformação e na densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente. NaN (Not a Number) significa que

não há uma aproximação para esta direção em virtude da condição de fronteira cinemática permitir o movimento na direção tangencial, logo, não há aproximação para essa direção..

Tabela 7.3: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção tangencial da placa em L

Edges Order – Direção Tangencial						
	ΔU			ε_Γ		
	Tolerância de seleção					
Edge	10^{-5}	0.5	0.9	10^{-5}	0.5	0.9
1	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
3	9	9	9	9	9	9
5	9	9	7	9	9	9
7	9	3	3	9	9	9
8	9	9	5	9	9	9
9	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
12	9	5	2	9	9	9

B.2 Consola curta

Na Figura 7.2 é apresentado um modelo com a malha dos elementos finitos utilizado para a resolução do problema da seção 6.3 (Consola curta)

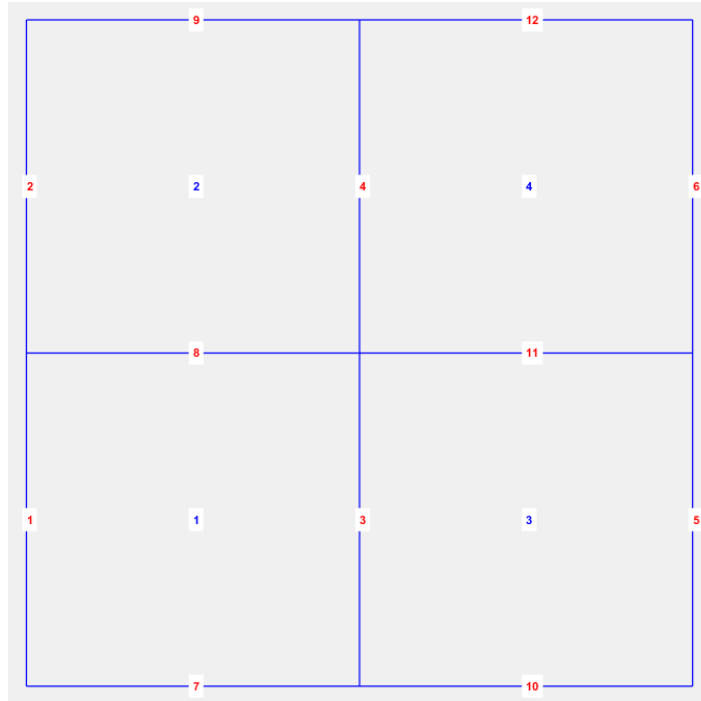


Figura 7.2: Modelo da malha para a consola curta

A seguir, são apresentadas as ordens dos graus das funções de aproximação para o problema da consola curta para o domínio conforme Tabela 7.4, resolvido na seção 6.3, para os critérios de refinamento e paragem baseados na variação da energia de deformação e na densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente.

Tabela 7.4: Ordens finais das bases de aproximação do domínio para a consola curta

Loops Order						
	ΔU			ε_r		
	Tolerância de seleção					
Loops	10^{-5}	0.5	0.9	10^{-5}	0.5	0.9
1	12	14	11	11	15	15
2	12	15	11	11	15	15
3	10	10	7	10	10	10
4	10	10	7	10	10	10

A seguir, são apresentadas as ordens dos graus das funções de aproximação para o problema da consola curta para a direção normal das fronteiras conforme Tabela 7.5, para os critérios de refinamento e paragem baseados na variação da energia de deformação e na densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente.

Tabela 7.5: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção normal para a consola curta

Edges Order – Direção Normal						
	ΔU			ε_T		
	Tolerância de seleção					
Edge	10^{-5}	0.5	0.9	10^{-5}	0.5	0.9
1	9	9	9	9	9	9
2	9	9	9	9	9	9
3	9	4	5	9	9	9
4	9	9	5	9	9	9
8	9	9	2	9	9	9
11	9	9	1	9	9	9

A seguir, são apresentadas as ordens dos graus das funções de aproximação para o problema da consola curta para a direção tangencial das fronteiras conforme Tabela 7.6, para os critérios de refinamento e paragem baseados na variação da energia de deformação e na densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente.

Tabela 7.6: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção tangencial para a consola curta

Edges Order – Direção Tangencial						
	ΔU			ε_T		
	Tolerância de seleção					
Edge	10^{-5}	0.5	0.9	10^{-5}	0.5	0.9
1	9	9	9	9	9	9
2	9	9	9	9	9	9
3	9	9	5	9	9	9
4	9	9	5	9	9	9
8	9	9	9	9	9	9
11	9	7	6	9	9	9

B.3 Placa retangular com orifício circular

Na Figura 7.3 é apresentado um modelo com a malha dos elementos finitos utilizado para a resolução do problema da seção 6.4 (Placa com orifício circular)

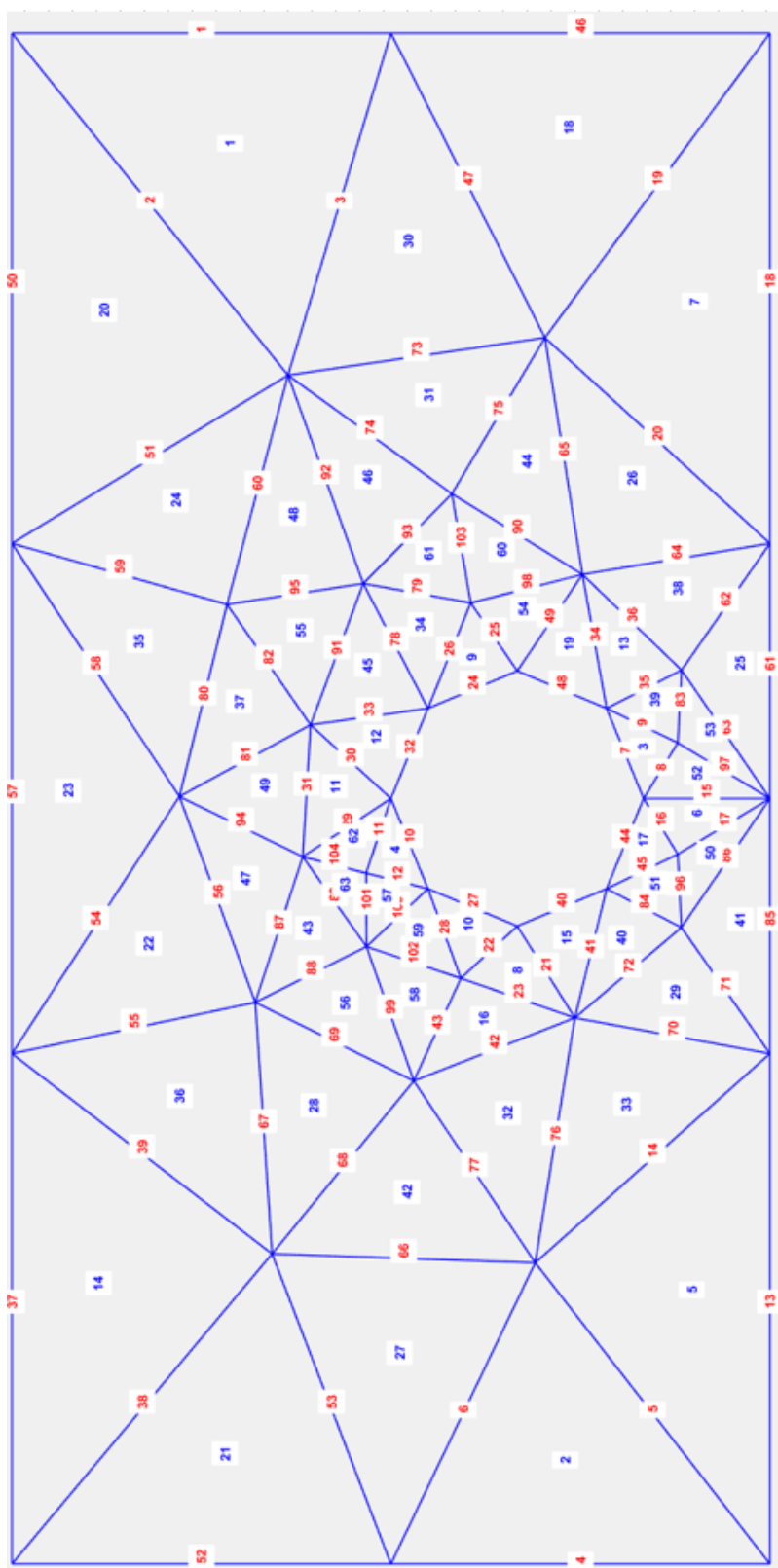


Figura 7.3 Modelo da malha para a placa com orifício circular (imagem virada à 90 graus)

A seguir, são apresentadas as ordens dos graus das funções de aproximação para o problema da placa com orifício circular para o domínio conforme Tabela 7.4, resolvido na seção 6.4, para os critérios de refinamento e paragem baseados na variação da energia de deformação e na densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente.

Tabela 7.7: Ordens finais das bases de aproximação do domínio para a placa com orifício circular

Loops Order				
	ΔU		ε_T	
	Tolerância de seleção			
Loops	10^{-5}	0.5	10^{-5}	0.5
1	7	2	10	10
2	9	6	12	15
3	8	5	10	10
4	8	5	10	10
5	8	4	10	10
6	9	10	12	15
7	8	4	10	10
8	9	5	12	15
9	8	4	10	10
10	8	4	10	10
11	9	9	12	15
12	8	9	10	10
13	9	4	12	15
14	8	5	10	10
15	8	4	10	10
16	9	3	12	15
17	8	5	10	10
18	8	3	10	10
19	8	5	10	10
20	8	3	10	10
21	9	6	12	15
22	9	4	12	15
23	7	3	10	10
24	9	4	12	15
25	8	3	10	10
26	9	4	12	15
27	9	4	12	15
28	9	3	12	15
29	9	4	12	15
30	9	3	12	15
31	9	3	12	15

32	9	4	12	15
33	9	4	12	15
34	9	5	12	15
35	9	4	12	15
36	9	3	12	15
37	9	3	12	15
38	9	3	12	15
39	9	3	12	15
40	9	4	12	15
41	8	3	10	10
42	9	3	12	15
43	9	3	12	15
44	9	3	12	15
45	9	5	12	15
46	9	3	12	15
47	9	3	12	15
48	9	3	12	15
49	9	3	12	15
50	9	3	12	15
51	9	3	12	15
52	9	10	12	15
53	9	3	12	15
54	9	5	12	15
55	9	3	12	15
56	9	3	12	15
57	9	3	12	15
58	9	3	12	15
59	9	4	12	15
60	9	3	12	15
61	9	3	12	15
62	9	7	12	15
63	9	3	12	15

A seguir, são apresentadas as ordens dos graus das funções de aproximação para o problema da placa com orifício circular para a direção normal das fronteiras conforme Tabela 7.8, para os critérios de refinamento e paragem baseados na variação da energia de deformação e na densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente.

Tabela 7.8: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção normal para placa com orifício circular

Edges Order – Direção Normal				
	ΔU		ε_T	
	Tolerância de seleção			
Edge	10^{-5}	0.5	10^{-5}	0.5
2	6	1	9	7
3	6	1	9	9
4	7	4	9	9
5	7	2	9	9
6	7	1	9	9
8	7	2	9	9
9	7	1	9	9
11	7	2	9	9
12	7	1	9	9
14	7	3	9	9
15	7	9	9	9
16	7	2	9	9
17	7	1	9	9
19	7	1	9	8
20	6	3	9	9
21	7	3	9	9
22	7	2	9	9
23	6	1	9	9
25	7	3	9	9
26	7	2	9	9
28	7	2	9	9
29	7	6	9	9
30	7	8	9	9
31	7	2	9	9
33	7	2	9	9
34	7	3	9	9
35	6	1	9	9
36	6	2	9	9
38	7	3	9	9
39	7	1	9	9
41	7	3	9	9
42	7	1	9	9
43	6	1	9	9
45	7	1	9	9
47	5	1	9	9
49	7	4	9	9

51	7	2	9	9
52	7	4	9	9
53	7	1	9	9
54	6	2	9	9
55	7	2	9	9
56	7	2	9	9
58	5	2	9	9
59	3	2	9	9
60	7	1	9	9
62	6	1	9	9
63	6	2	9	9
64	7	1	9	9
65	7	1	9	9
66	6	1	9	9
67	7	1	9	9
68	7	1	9	9
69	6	2	9	9
70	7	2	9	9
71	6	2	9	9
72	6	2	9	9
73	6	1	9	9
74	7	1	9	9
75	7	2	9	9
76	7	1	9	9
77	6	2	9	9
78	7	4	9	9
79	6	1	9	9
80	6	1	9	9
81	7	1	9	9
82	7	1	9	9
83	7	1	9	9
84	7	1	9	9
86	7	2	9	9
87	7	1	9	9
88	7	1	9	9
89	7	1	9	9
90	7	1	9	9
91	7	1	9	9
92	6	1	9	9
93	7	2	9	9
94	7	1	9	9
95	7	2	9	9
96	7	1	9	9

97	7	1	9	9
98	7	1	9	9
99	7	1	9	9
100	7	2	9	9
101	7	1	9	9
102	7	1	9	9
103	6	1	9	9
104	6	1	9	9

A seguir, são apresentadas as ordens dos graus das funções de aproximação para o problema da placa com o orifício circular para a direção tangencial das fronteiras conforme Tabela 7.6, para os critérios de refinamento e paragem baseados na variação da energia de deformação e na densidade máxima do resíduo na fronteira, respectivamente.

Tabela 7.9: Ordens finais das bases de aproximação das fronteiras para a direção tangencial para a placa com orifício circular

Edges Order – Direção Tangencial				
	ΔU		ε_r	
	Tolerância de seleção			
Edge	10^{-5}	0.5	10^{-5}	0.5
2	5	1	9	9
3	6	1	9	9
4	7	4	9	9
5	7	3	9	9
6	7	2	9	9
8	7	4	9	9
9	7	1	9	9
11	7	4	9	9
12	7	1	9	9
14	7	2	9	9
15	3	1	9	9
16	7	4	9	9
17	7	1	9	9
19	7	1	9	8
20	7	2	9	9
21	7	3	9	9
22	7	2	9	9
23	7	1	9	9
25	7	2	9	9
26	7	3	9	9
28	7	3	9	9

29	7	4	9	9
30	7	4	9	9
31	7	1	9	9
33	7	1	9	9
34	7	1	9	9
35	7	1	9	9
36	7	1	9	9
38	7	4	9	9
39	7	1	9	9
41	7	3	9	9
42	7	2	9	9
43	7	1	9	9
45	7	1	9	9
47	7	2	9	9
49	7	3	9	9
51	6	1	9	9
52	7	4	9	9
53	7	2	9	9
54	6	1	9	9
55	5	1	9	9
56	6	1	9	9
58	6	1	9	9
59	6	1	9	9
60	5	1	9	9
62	7	1	9	9
63	7	1	9	9
64	7	1	9	9
65	7	1	9	9
66	7	1	9	9
67	7	1	9	9
68	7	1	9	9
69	6	1	9	9
70	5	1	9	9
71	6	1	9	9
72	7	1	9	9
73	6	1	9	9
74	6	1	9	9
75	7	1	9	9
76	7	2	9	9
77	7	1	9	9
78	7	1	9	9
79	7	1	9	9
80	5	1	9	9

81	7	1	9	9
82	6	1	9	9
83	7	1	9	9
84	7	1	9	9
86	6	1	9	9
87	7	1	9	9
88	6	1	9	9
89	6	1	9	9
90	7	1	9	9
91	7	1	9	9
92	6	1	9	9
93	7	1	9	9
94	7	1	9	9
95	6	1	9	9
96	7	1	9	9
97	7	1	9	9
98	7	1	9	9
99	7	1	9	9
100	7	1	9	9
101	7	1	9	9
102	7	1	9	9
103	7	1	9	9
104	7	1	9	9



