A MEDIAÇÃO SEMIÓTICA COM A CALCULADORA GRÁFICA NA ARTICULAÇÃO DOS DOMÍNIOS DE GEOMETRIA E FUNÇÕES

Manuela Subtil

Agrupamento de Escolas Fragata do Tejo, UIED

mm.pedro@campus.fct.unl.pt

António Domingos

Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, UIED, DCSA

amdd@fct.unl.pt

Resumo: Esta comunicação retrata a análise da resolução de uma tarefa no 7.º ano de escolaridade, com o apoio do artefacto mediador calculadora gráfica, onde se pretendeu fazer uma conexão entre os domínios de Geometria e Funções. No ambiente social da aula, objetivou-se percecionar os esquemas de uso e esquemas de ação instrumentada que emergiram na resolução da tarefa e como os mesmos contribuíram para o desenvolvimento do potencial semiótico da calculadora gráfica, consolidando-se a aprendizagem, tendo em conta a orquestração da professora na discussão coletiva. Metodologicamente optou-se por um paradigma qualitativo, de natureza interpretativa e descritiva, fundamentado num processo de Design Research, na modalidade de experiência de ensino, tendo-se apoiado num estudo de caso. A análise dos dados mostrou que os alunos transitaram facilmente entre as várias representações: geométrica, tabular, gráfica e algébrica. No entanto, a monitorização da discussão coletiva pela professora foi imprescindível para a construção do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Calculadora gráfica; Esquemas de ação intrumentada; Esquemas de uso; Potencial semótico; Ciclo Didático.

Introdução

Segundo os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007), as calculadoras e os computadores são dispositivos que possibilitam a visualização das ideias matemáticas, propiciam a organização e análise de dados, fazem cálculos de forma eficiente e exata e poderão servir de apoio a investigações dos alunos em qualquer área da Matemática, nomeadamente na geometria, estatística, álgebra, medida e números. Por outro lado, permitem suavizar algumas fronteiras existentes nessas áreas, possibilitando que os alunos usem as suas ideias sobre uma determinada área para melhor compreenderem outra área da matemática. Para o NCTM (2017), um programa de Matemática de excelência exige um ensino efetivo com recurso ao uso de ferramentas matemáticas e de tecnologia de forma a envolver os alunos em experiências individuais e colaborativas, que promovam a aprendizagem significativa e entendimento de ideias matemáticas e consequente comunicação dos seus raciocínios.

De acordo com as metodologias definidas no documento do Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2013), a calculadora não deve de ser usada de forma generalizada. A mesma é apenas recomendada em situações pontuais de resolução de problemas que impliquem um elevado número de cálculos, a utilização de valores aproximados, operações de radiciação ou a determinação de razões trigonométricas ou de amplitudes de ângulos dada uma razão trigonométrica. No entanto, para Lopes e Domingos (2015) existem condições para que no Ensino Básico se utilize de forma eficiente a calculadora gráfica, propiciando ambientes ricos e motivadores de aprendizagem.

Este estudo realizou-se no 7.º ano de escolaridade, no primeiro ano de uma experiência de ensino, que ocorreu nos anos letivos de 2016/17 e 2017/18, numa escola pública do distrito de Setúbal. Num nível de ensino onde não é usual a utilização da calculadora gráfica, recorreu-se a um ambiente de aprendizagem inovador de natureza exploratória, com a integração deste artefacto, seguindo a perspetiva de Freire (2000), "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção" (p. 25).

Na análise dos dados, no âmbito da Génese Instrumental, objetivou-se percecionar como é que na resolução da tarefa, com a calculadora gráfica, os *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada* criados pelos alunos, contribuíram para o desenvolvimento do *potencial semiótico* desse artefacto e consequentemente, como é que a professora orientou a evolução de significados pessoais para significados matemáticos, que foram o objetivo da intervenção didática. Neste sentido, teve-se o objetivo de percecionar como é que a evolução da génese instrumental (Rabardel 1995) promoveu o desenvolvimento das várias fases do *Ciclo Didático* (Figura 1) e por sua vez, o papel da professora no processo de mediação semiótica, de acordo com as categorias de ações[8] descritas por Mariotti (2018), numa tarefa em que se pretendeu fazer uma conexão entre os domínios de Geometria e Funções.

Quadro teórico

Génese Instrumental - Esquemas de Uso e Esquemas de Ação Instrumentada

A génese instrumental identifica-se como sendo um processo através do qual o sujeito se apropria de um artefacto e o transforma num instrumento, na resolução de tarefas (Drijvers et al, 2010). A construção de um instrumento caracteriza-se por uma entidade mista, composta pela apropriação de um artefacto, material ou simbólico, e pelo sujeito, através de esquemas de utilização[9] (Rabardel, 1995). Drijvers e Trouche (2008) consideram que esse processo de apropriação é o que permite que o artefacto seja "responsável" pela mediação da atividade. Por outro lado, os mesmos autores fazem a diferenciação entre dois tipos de esquemas de utilização: os *esquemas de uso*, direcionados para a gestão do artefacto, como por exemplo, ligar ou ajustar o contraste do ecrã de uma calculadora e os *esquemas de ação instrumentada*, como sendo ações direcionadas para a realização da tarefa, como por exemplo, calcular o limite de uma

[8] *"Ação de retorno à tarefa e Ação de focalização"* e *"Solicitar uma síntese e Oferecer uma síntese"*.

[9] Para Rabardel (1995) os esquemas de utilização de um artefacto, tratam-se de um conjunto de procedimentos necessários para a realização de uma tarefa.

função. Trata-se de esquemas mentais, coerentes e significativos, que são construídos a partir dos *esquemas de uso*, por meio da génese instrumental.

Teoria da Mediação Semiótica - Potencial Semiótico do Artefacto e Ciclo Didático

A Teoria da Mediação Semiótica (TSM) foi elaborada por Bartolini Bussi e Mariotti (2008) e tem como objetivo descrever e explicar o processo desencadeado por um aluno, que se inicia com o uso de um artefacto específico para realizar uma tarefa e leva-o à apropriação de um determinado conteúdo matemático específico (Mariotti, 2018).

Na realização de uma tarefa, o significado matemático incorporado num artefacto pode ser acessível através do processo da génese instrumental. Isto é, ao dar-se a transformação do artefacto num instrumento, podem emergir signos[10] associados aos esquemas de utilização (Mariotti, 2002). Neste sentido, o artefacto desempenha um duplo papel: tanto como um meio de realizar uma tarefa, como uma ferramenta de mediação semiótica para cumprimento de um objetivo didático (Mariotti, 2018).

Do ponto de vista individual, surgem os significados pessoais que estão relacionados com a utilização do artefacto, nomeadamente no que respeita ao objetivo de realizar a tarefa. Por outro lado, do ponto de vista social, emergem os significados matemáticos evocados, que podem estar relacionados com o artefacto e a sua utilização. Neste sentido, existe uma dupla relação semiótica articulada pelo artefacto, denominada pelo *potencial semiótico do artefacto,* que se caracteriza pela facilidade que o mesmo possui em associar significados matemáticos evocados pelo seu uso, culturalmente determinados, com significados pessoais que cada sujeito desenvolve na utilização do mesmo (atividade instrumentada) na realização de tarefas específicas.

De acordo com a Teoria da Mediação Semiótica, cabe ao professor o desenvolvimento do *potencial semiótico do artefacto*. Na discussão coletiva, deve promover a produção de signos específicos e espontâneos pelos alunos, que estão relacionados como o uso do artefacto na realização da tarefa (*signos de artefacto*), orientando a evolução de tais signos para os esperados *signos matemáticos*[11] (Mariotti, 2018). Este processo, denominado por mediação semiótica, desenvolve-se através da iteração de *Ciclos Didáticos*.

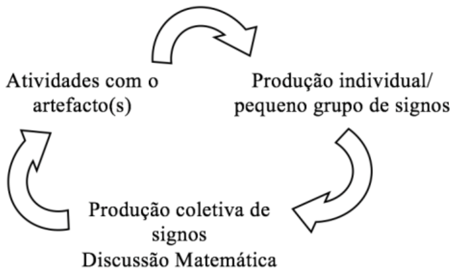


Figura 1. O Ciclo Didático (Adaptado de Mariotti, 2018, p. 23).

Metodologia

Este estudo está enquadrado numa investigação mais alargada, de natureza qualitativa, seguindo uma abordagem interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). A modalidade de

[10] O termo signo refere-se à relação indissolúvel entre significado e significante *"signified and signifier"* inspirado por Pierce.
[11] Referem-se ao contexto da matemática, estão relacionados com os significados matemáticos partilhados na sala de aula que estão relacionados com os objetivos da intervenção didática.

investigação escolhida fundamentou-se no processo *Design Research* (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003), apoiando-se numa experiência de ensino na sala de aula.

Optámos pelo *Design Research*, na modalidade de experiência de ensino, dado que se trata de uma metodologia que tem sido utilizada na educação, cujo objetivo é desenvolver, testar, implementar e difundir práticas inovadoras de ensino e aprendizagem, em que a tecnologia poderá ser um possível recurso (Kelly, 2003). Por outro lado, assumindo uma natureza intervencionista, onde se recorreu a práticas inovadoras, tivemos como objetivo produzir novas formas de aprendizagem, possibilitando melhorias no processo de ensino e aprendizagem (Cobb et al, 2003).

A experiência de ensino realizou-se no ambiente natural da aula, com todos os alunos de uma turma do 7.º ano de escolaridade. No entanto, de modo a obter uma observação mais detalhada e consequentemente dados mais consistentes, decidimos optar pela realização de um estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994), tendo a investigação recaído nas ações de quatro alunos, tendo sido adotados os nomes fictícios de Maria e Berta, para um grupo e José e Pedro, para outro grupo. As razões desta escolha devem-se ao facto destes alunos apresentarem um percurso académico similar na disciplina de Matemática, boa capacidade oral e escrita, bom comportamento, disponibilidade e motivação para participar no estudo.

Procurou-se compreender quais os *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada* que os alunos desenvolveram, na resolução da tarefa, tendo em conta os aspetos técnicos inerentes à manipulação da calculadora gráfica e os seus conhecimentos matemáticos, respetivamente (Drijvers & Trouche, 2008). Neste sentido, tendo em conta os esquemas desenvolvidos, na utilização do artefacto, procurou-se que no relatório escrito e na discussão coletiva, os alunos apresentassem significados pessoais que se articulassem com significados matemáticos, inerentes ao objetivo da tarefa, fomentando-se o processo de mediação semiótica, através da orquestração da professora titular da turma[12] (Mariotti, 2018) e da ação de um aluno *Sherpa*[13] (Drijvers & Trouche, 2008).

As técnicas utilizadas para recolher os dados fundamentaram-se nos relatórios escritos dos alunos, observação direta, imagens das representações gráficas dos ecrãs da calculadora gráfica e diário de bordo (Creswell, 2012).

A análise dos dados centrou-se na construção de um diário de bordo e gravações áudio, no que concerne à *atividade com o artefacto e produção individual/pequeno grupo de signos.* Aí fomentou-se a produção de *signos de artefacto,* através do desenvolvimento de *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada,* na comunicação desenvolvida entre os pares, entre a professora e os alunos e a na comunicação escrita na forma de relatórios. A seguir, foi feita uma análise no que concerne à *produção coletiva de signos - discussão matemática,* inerente à discussão coletiva, no ambiente social da aula, onde a professora promoveu a passagem *signos de artefacto* para *signos matemáticos,* tendo como suporte os esquemas explanados. A evolução de significados pessoais relacionados com a tarefa e o artefacto, a calculadora gráfica, para significados matemáticos, foi feita

[12] Esta professora assumiu o duplo papel de professora e investigadora.

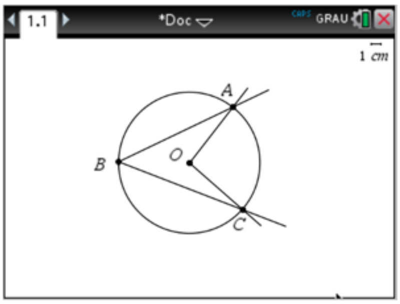
[13] Este aluno *Sherpa*, tratou-se de um aluno que fez parte do estudo de caso, tendo tido a missão de reproduzir os *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada*, na discussão coletiva, que foram desenvolvidos anteriormente, aquando da realização da tarefa. O mesmo encontrava-se sentado na secretária da professora, com a calculadora gráfica projetada no quadro interativo. Esta reprodução contou com a intervenção de todos os alunos e orquestração da professora. No entanto, na análise dos dados, focámo-nos apenas nas ações dos alunos que fizeram parte do estudo de caso.

de acordo com dois pares de ações complementares, *"ação de retorno à tarefa e ação de focalização"* e *"solicitar uma síntese e oferecer uma síntese"*. No final, foi apresentada uma síntese da análise dos resultados, onde se pretendeu responder ao objetivo do estudo.

A tarefa apresentada aos alunos

A tarefa (Figura 2) foi planificada pela professora titular da turma que assumiu o duplo papel de professora e investigadora e os conteúdos explorados nas alíneas a) e b) eram específicos do 9.º ano de escolaridade e somente o assunto tratado na alínea c) estava enquadrado no currículo do 7.º ano de escolaridade, de acordo com o Programa e Metas Curriculares da Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013). A professora justifica esta iniciativa ambiciosa, fundamentada no facto de ter pretendido fazer uma conexão entre os domínios de Funções, Sequências e Sucessões (FSS7) e Geometria e Medida (GM9). Assim, esta tarefa foi proposta aos alunos no final da unidade de Funções e os mesmos tinham tido anteriormente oportunidade de realizar tarefas nos dois domínios distintos, mas nunca em conjunto.

1. Utilizando a calculadora gráfica, constrói a figura ao lado.



a) Qual é a diferença entre um ângulo inscrito *ABC* e um ângulo ao centro *AOC*, numa circunferência?

b) Qual é a relação que existe entre a medida da amplitude de um ângulo inscrito *ABC* e a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC*, que lhe corresponde?

c) Qual é o modelo matemático que se adequa a esta situação?

Sugestão:

- Na **Página 1**, da aplicação **Geometria** define a variável **b** para o ângulo *ABC* e a variável **o** para o ângulo *AOC*.
- Na **Página 2**, insere a aplicação **Listas e Folha de Cálculo** e faz uma **captura de dados** relativamente aos valores das variáveis **b** e **o**.
- Na **Página 3**, insere a aplicação **Dados e Estatística** e traça uma função tendo em conta as variáveis **b** e **o**.

Figura 2. A tarefa apresentada aos alunos.

O objetivo da tarefa inseriu-se na distinção entre ângulo inscrito e ângulo ao centro numa circunferência, e no reconhecimento que a medida da amplitude de um ângulo inscrito é metade da medida da amplitude do ângulo ao centro, que lhe corresponde, sendo solicitado um modelo matemático que se adequasse à situação.

No início da tarefa, os alunos foram informados que a tinham de resolver a pares a parte empírica da tarefa e produzir um relatório individual. Posteriormente, após a análise das produções individuais de cada aluno, desenvolveu-se a discussão coletiva, gerida pela professora, com a juda do aluno *Sherpa*, incrementando-se a evolução de significados pessoais dos alunos para significados matemáticos.

Apresentação e análise dos resultados

Quando se operacionalizou a discussão coletiva, o Pedro assumiu a função de aluno *Sherpa* e procedeu à construção da figura na calculadora gráfica conectada com o computador da secretária da professora. Tal como aconteceu com os outros alunos que fizeram parte do estudo de caso, aquando da resolução da tarefa, podemos conjeturar que surgiram os primeiros *signos de artefacto*. Os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados nos significados pessoais respeitantes ao conhecimento dos signos matemáticos, inerentes aos conceitos de circunferência e ângulo. Para colocarem em prática esses esquemas, desenvolveram também *esquemas de uso*, quando abriram a **Página 1**, recorrendo à aplicação **Geometria** e construíram a figura solicitada, sem apresentarem qualquer dificuldade.

No que respeita à alínea a), tendo em conta o potencial semiótico da calculadora gráfica inerente à funçãode arrastamento e função de visualização, os alunos conseguiram mobilizar o significado pessoal do conceito de ângulo e construíram uma definição de ângulo inscrito *ABC* e ângulo ao centro *AOC*, numa circunferência. No entanto, ao contrário da Berta (Figura 4), o José, no seu relatório escrito, não indicou a letra correspondente ao vértice de cada um dos ângulos (Figura 3).

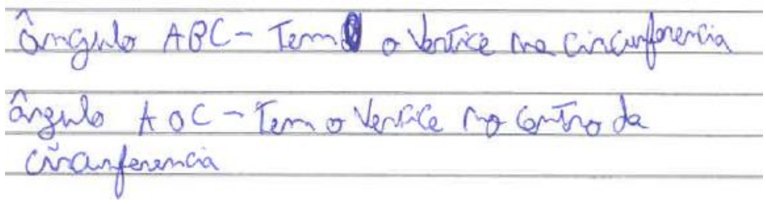

Ângulo ABC – Tem o vértice na circunferencia
ângulo AOC – Tem o vértice no centro da circunferencia

Figura 3. Resolução escrita, da alínea a) da tarefa, pelo José.

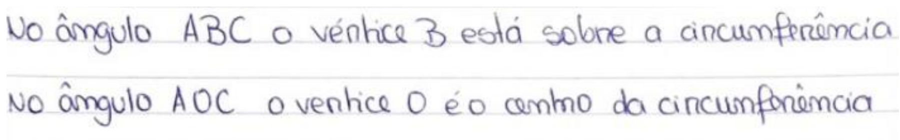

No ângulo ABC o vértice B está sobre a circunferência
No ângulo AOC o vertice O é o centro da circunferência

Figura 4. Resolução escrita, da alínea a) da tarefa, pela Berta.

Neste sentido, houve a necessidade da professora fazer um esclarecimento na discussão coletiva, tendo-se operacionalizado uma *ação de retorno à tarefa* (diálogos 5 e 6) seguida de uma ação de *focalização* (diálogos 7 até 16):

> **(…)**
>
> **5. Professora:** José ou Pedro, podem-nos dizer o que concluíram?
>
> **6. Pedro:** Então, no ângulo *ABC*, o vértice pertence à circunferência e no ângulo *AOC*, o vértice é o centro da circunferência.
>
> **7. Professora:** Mas podes identificar qual é o vértice que corresponde a cada um dos ângulos?
>
> **8. José:** O "*B*", é o vértice do ângulo *ABC* e o "*O*" é o vértice do ângulo *AOC*.

No decorrer da discussão, o José utilizou o signo pessoal: “cortam”, tendo-se movimentado para o signo matemático: “intersetam”, com a orquestração da professora, ocasionando o entendimento de que os lados do ângulo inscrito, são sempre secantes à circunferência.

> **(…)**
>
> **11. Professora:** Muito bem! E relativamente aos lados desses ângulos? O que é que vocês podem concluir?
>
> **12. José: “**Cortam” sempre a circunferência em dois pontos. Um deles é o vértice e o outro ponto também pertence à circunferência.
>
> **13. Professora:** Meninos! O que significa cortar? Não sei o que é isso?
>
> **14. José:** Oh Stora! **“**Intersetam” a circunferência em dois pontos.
>
> **15. Professora:** Ah! Ok! Assim já entendo! E o que significa intersetar a circunferência em dois pontos?
>
> **16. José:** É secante à circunferência!?

Perante as afirmações dos alunos, a professora *solicitou uma síntese*:

> **17. Professora:** Ok! Então, quem é que consegue sintetizar, a diferença entre o ângulo inscrito *ABC* e o ângulo ao centro *AOC*, numa circunferência? Berta, estás tão caladinha!
>
> **18. Berta:** Oh stora! Eu já respondi! “*O ângulo inscrito ABC, o vértice B está sobre a circunferência. O ângulo ao centro AOC, o vértice O é o centro da circunferência*”. Mas, deveria ter dito, que os lados dos ângulos são secantes à circunferência, não é stora?
>
> **19. Professora:** Muito bem! Então como é que podes resumir o que acabaste de dizer?
>
> **20. Berta:** Então stora: “*No ângulo inscrito ABC, o vértice B está sobre a circunferência e os lados do ângulo são secantes à circunferência. No ângulo ao centro AOC, o vértice O é o centro da circunferência e os lados do ângulo são secantes à circunferência”*.

Quando a aluna foi questionada sobre a última parte da sua afirmação, relativamente ao facto de referir que os lados de um ângulo ao centro, são secantes à circunferência, a mesma argumentou que deveria ter mencionado que cada lado contém o raio da circunferência. No entanto, utilizou a palavra “secante” por ser sinónimo de “concorrente”, tendo conseguido percecionar, com a insistente orquestração da professora, que cada lado do ângulo ao centro é constituido por uma semireta com origem no centro da circunferência, cujo prolongamento interseta a mesma num único ponto.

Relativamente à alínea b), ainda na **Página 1,** de **Geometria**, os alunos sentiram a necessidade de recorrer a *esquemas de uso* para proceder à medição da amplitude do ângulo inscrito *ABC* e do ângulo ao centro *AOC*[14], antes de desenvolveram os *esquemas de uso,* inerentes à definição das variáveis **b**, para a amplitude do ângulo inscrito *ABC* e a variável **o**, para a amplitude do ângulo ao centro *AOC*. Posteriormente, o Pedro foi observado pela professora a utilizar o *esquema de ação instrumentada,* inerente à função de arrastamento, movendo os pontos *A*, *B*, *C* e *O*[15] (Figura 5). No entanto, na discussão coletiva, quando fez de aluno *Sherpa*, apenas movimentou os pontos *A* e *C*, ao invés do que tinha feito anteriormente, quando resolveu a tarefa. A professora questionou o aluno, relativamente ao procedimento realizado, dando-se uma *ação de focalização*.

> **23. Professora:** Pedro, porque estás a movimentar apenas os pontos *A* e *C*? Porque não movimentas os pontos *O* e *B*?
>
> **24. Pedro:** Porque o [ponto] B e o [ponto] O são os vértices dos ângulos e quando eu os arrasto, o valor não muda, porque são pontos fixos. Mas quando eu arrasto os pontos *A* e *C*, a amplitude de um ângulo é sempre o dobro da amplitude do outro.

A professora solicitou que o Pedro explicasse melhor as suas afirmações, no que respeita ao facto de afirmar que os pontos *O* e *B* eram fixos. O aluno argumentou que o ponto *O* é um ponto fixo, por ser o centro da circunferência. Quando arrastava o ponto B, o mesmo movimentava-se, mantendo inalterável as amplitudes do ângulo inscrito e do ângulo ao centro. Somente com o arrastamento dos pontos *A* e *C* é que se fomentava a alteração da amplitude do ângulo inscrito e do ângulo ao centro, isto é, variava o valor da amplitude nos vértices *B* e *O.*

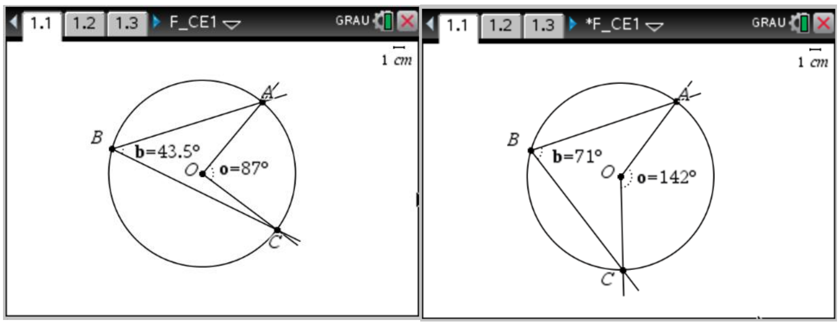


Figura 5. Resolução na calculadora gráfica (utilização da função de arrastamento), da alínea b) da tarefa, pelo Pedro (aquando da realização da tarefa).

Posteriormente, os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, baseados no significado pessoal do conceito da operação de divisão entre 2 variáveis, **o** e **b** e/ou **b** e **o**, com o propósito de relacionar a medida da amplitude entre o ângulo inscrito e a medida da amplitude do ângulo ao centro, que lhe corresponde. Com o objetivo de operacionalizar

[14] Tendo em conta a primeira sugestão do enunciado, os alunos para definirem as variáveis ***o*** e ***b***, deveriam numa primeira fase, proceder à medição da amplitude dos ângulos.
[15] A professora visualizou que o aluno apenas conseguiu movimentar os pontos *A* e *C*.

esses esquemas, recorreram a *esquemas de uso*, para calcular $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{o}}$ e/ou $\frac{\boldsymbol{o}}{\boldsymbol{b}}$[16]. Por fim, desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, fundamentados na função de arrastamento, ao proceder à alteração das dimensões da circunferência ou à movimentação dos pontos *A* e *C*, pertencentes aos lados dos ângulos, verificando que as relações $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{o}}$ e $\frac{\boldsymbol{o}}{\boldsymbol{b}}$, se aplicam a qualquer circunferência (Figura 6).

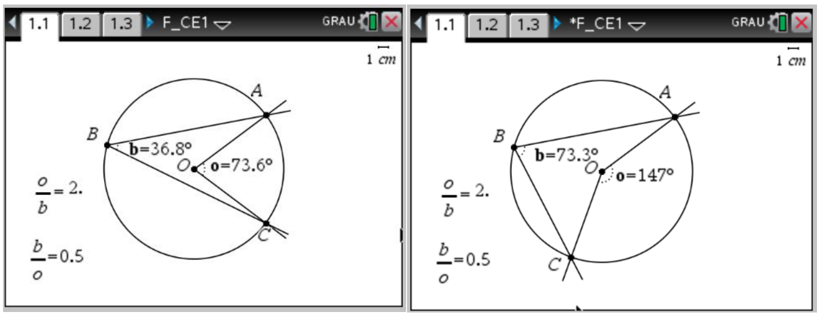


Figura 6. Resolução na calculadora gráfica (utilização da função de arrastamento) da alínea b) da tarefa, pelo Pedro (aquando da realização da tarefa – tendo procedido da mesma forma quando assumiu a função de aluno Sherpa).

Surgiram *signos matemáticos* quando os alunos constataram que a medida da amplitude de um ângulo inscrito *ABC* é metade da medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC*, que lhe corresponde ou que a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC* é o dobro da medida da amplitude de um ângulo inscrito *ABC* que lhe corresponde (Figuras 6, 8 e 9).

A Maria e a Berta fizeram confusão com a escrita simbólica inerente aos signos matemáticos de ângulo, medida da amplitude de ângulo (Figuras 9 e 13) e pontos pertencentes aos lados dos ângulos[17] (Figura 8). Neste sentido, na discussão coletiva, a professora solicitou que a aluna Maria escrevesse a conclusão do Pedro (diálogo 24) no quadro negro (Figura 7), tendo ocorrido a *ação de solicitar uma síntese*.

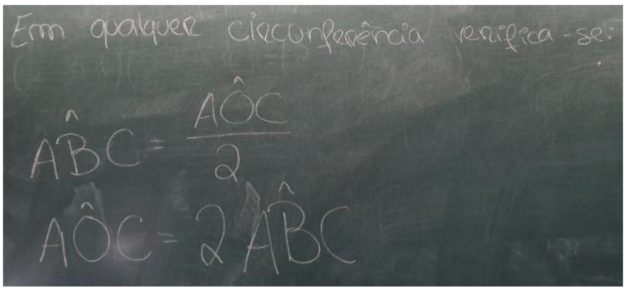
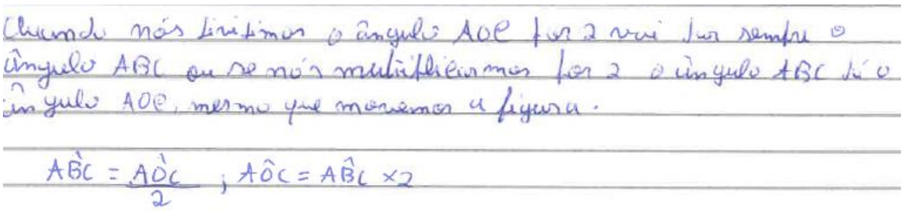


Figura 7. Conclusão da alínea b) da tarefa, evidenciada pelo Pedro (enquanto aluno Sherpa) e sintetizada posteriormente, pela Maria, no quadro negro.

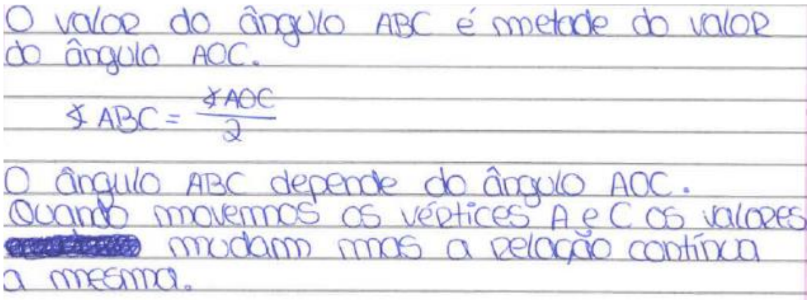
[16] O Pedro foi o único aluno que procedeu ao cálculo das duas razões, $\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{o}}$ e $\frac{\boldsymbol{o}}{\boldsymbol{b}}$, pois os outros alunos, apenas operacionalizaram uma delas.

[17] A aluna Maria, denominou por vértices, os pontos A e C, pertencentes aos lados dos ângulos, como já foi descrito anteriormente. Quando na discussão coletiva foi questionada sobre o sucedido, assumiu que a afirmação não estava correta e argumentou que o erro se deveu à celeridade com que pretendeu resolver a questão.


Quando nós dividimos o ângulo AOC por 2 vai dar sempre o ângulo ABC ou se nós multiplicarmos por 2 o ângulo ABC dá o ângulo AOC, mesmo que movemos a figura.

$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2}$; $A\hat{O}C = A\hat{B}C \times 2$

Figura 8. Resolução escrita, da alínea b) da tarefa, pelo Pedro.


O valor do ângulo ABC é metade do valor do ângulo AOC.

$\measuredangle ABC = \frac{\measuredangle AOC}{2}$

O ângulo ABC depende do ângulo AOC. Quando movemos os vértices A e C os valores ~~[illegible]~~ mudam mas a relação continua a mesma.

Figura 9. Resolução escrita, da alínea b) da tarefa, pela Maria.

No que concerne à alínea c), os alunos seguiram a sugestão do enunciado e desenvolveram *esquemas de uso*, inerentes à manipulação da calculadora gráfica, construindo a **Página 2** – **Listas e Folha de Cálculo**[18] (Figura 10) e a **Página 3** – **Dados e Estatística** (Figuras 11, 14, 15 e 17).

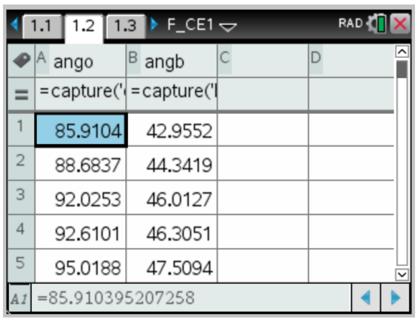


Figura 10. Resolução na calculadora gráfica (captação de dados, na aplicação Listas e Folha de Cálculo), da alínea b), pelo Pedro (aquando da realização da tarefa).

Os alunos Maria, José e Pedro, desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* quando mobilizaram o significado pessoal da representação simbólica e representação gráfica de uma função linear[19] e por conseguinte relacionaram a alínea b) (Figuras 8 e 9) com a alínea c), tendo definido um modelo linear que se ajustou à situação. Os alunos

[18] Quando os alunos capturaram os valores das variáveis **o** e **b** para a folha de cálculo, denominaram essas variáveis por **ango** e **angb**, respetivamente.

[19] Quando surgiu uma representação icónica, no ecrã da calculadora gráfica, caracterizada por pontos que representam uma reta que passa pela origem.

delinearam o modelo: $y = 0{,}5\,x$ $(\boldsymbol{b = 0,5\,o})$, colocando cuidadosamente a variável dependente e variável independente[20] (Figuras 11, 12).

O Pedro foi mais ambicioso ao utilizar *esquemas de ação instrumentada*[21] quando alterou a posição das variáveis de modo a verificar qual a relação existente entre as mesmas, nesta situação. O aluno estabeleceu o modelo $y = 2x$ $(\boldsymbol{o = 2b})$ (Figura 11), pois na alínea b) também tinha chegado a duas relações (Figura 8).

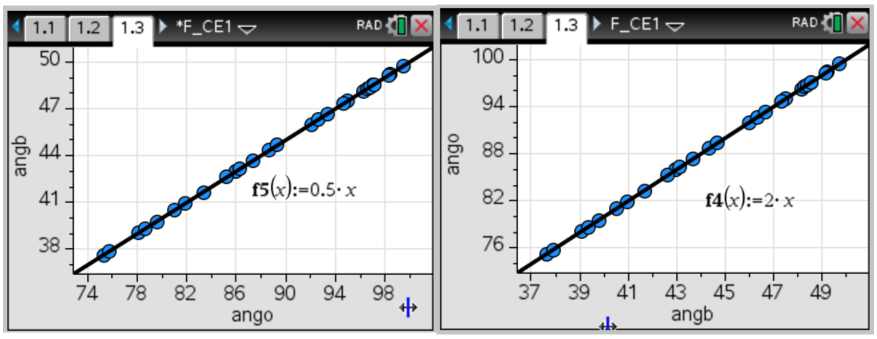


Figura 11. Resolução na calculadora gráfica, da alínea c) da tarefa, na aplicação Dados e Estatística, pelo Pedro (aquando da realização da tarefa).

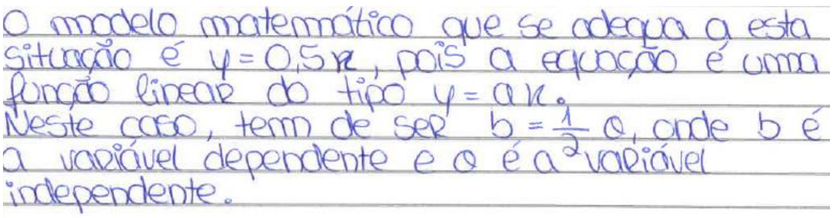
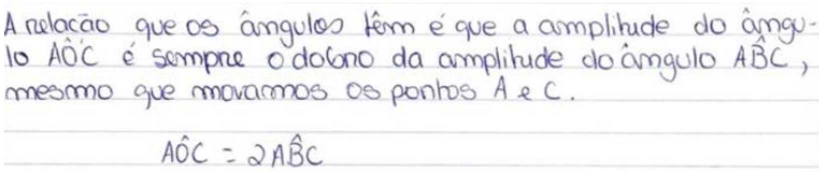

O modelo matemático que se adequa a esta situação é $y=0{,}5x$, pois a equação é uma função linear do tipo $y=ax$.
Neste caso, tem de ser $b = \frac{1}{2}o$, onde b é a variável dependente e o é a variável independente.

Figura 12: Resolução escrita, da alínea c) da tarefa, pela Maria.

Para a aluna Berta, na última página **(Página 3)** surgiram algumas imprecisões, relativamente à colocação das variáveis **b** (**angb**) e o (**ango**), como variável dependente ou variável independente (ver a segunda parte da Figura 15), respetivamente. A aluna colocou aleatoriamente as variáveis e quando surgiu uma representação no ecrã da calculadora gráfica, caracterizada apenas por pontos alinhados sobre uma reta que passa pela origem (Figura 14), desenvolveu o significado pessoal de função linear relacionando-a com a resposta que tinha dado na alínea b) (Figura 13), definindo o modelo linear, $y = 2x$ $(\mathbf{ango = 2angb})$ (Figura 15). No entanto, podemos conjeturar que a aluna demonstrou uma ausência de pensamento crítico, pois não percecionou que segundo a colocação que fez das variáveis (Figura 14), o modelo que se adaptava à situação seria $y = 0{,}5\,x$ $(\mathbf{angb = 0,5\,ango})$. A aluna não verificou a relação que existia entre a abcissa e a ordenada, nos respetivos pontos do gráfico. Apenas interpretou a imagem que

[20] Os alunos desenvolveram *esquemas de uso*, quando colocaram o *touchpad* nos vários pontos da função e verificaram que o valor da variável dependente (ordenada) era sempre metade do valor da variável independente.
[21] Estes *esquemas de ação instrumentada*, necessitaram do desenvolvimento de *esquemas de uso*, quando o aluno colocou o *touchpad* nos vários pontos da função e verificou que o valor da variável dependente (ordenada) era sempre metade do valor da variável independente (abcissa).

surgiu no ecrã da calculadora gráfica, sem tomar em consideração a relação entre as variáveis que tinha evidenciado na alínea b). Contudo, esta ambiguidade foi esclarecida na discussão coletiva.


A relação que os ângulos têm é que a amplitude do ângulo AÔC é sempre o dobro da amplitude do ângulo ABC, mesmo que movamos os pontos A e C.

$A\hat{O}C = 2A\hat{B}C$

Figura 13. Resolução escrita, da alínea b) da tarefa, pela Berta.

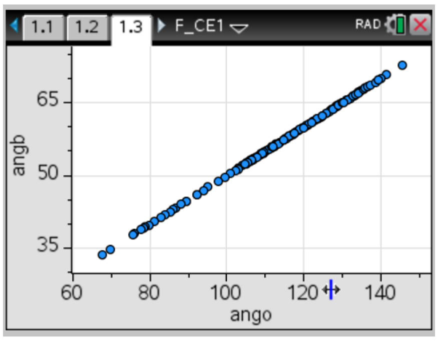


Figura 14. Resolução na calculadora gráfica, da alínea c) da tarefa, pela Berta.

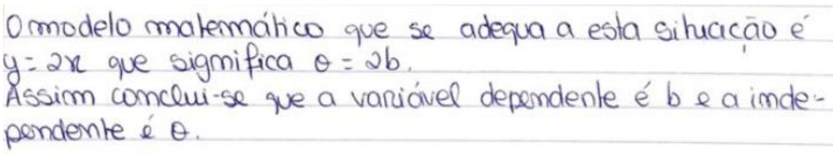

O modelo matemático que se adequa a esta situação é $y = 2x$ que significa $\theta = 2b$.
Assim conclui-se que a variável dependente é b e a independente é θ.

Figura 15. Resolução escrita, da alínea c) da tarefa, pela Berta.

Na discussão coletiva, quando o aluno *Sherpa* se preparava para definir as variáveis **b (angb)** e **o (ango)** no gráfico, (Figura 16), a professora procedeu a uma *ação de focalização*, perante as afirmações da Berta, no relatório escrito, no que concerne à relação de dependência entre a variável dependente e a variável independente (Figura 15).

Figura 16. Imagem da representação gráfica do ecrã da calculadora gráfica, na aplicação Dados e Estatística, antes do Pedro definir as variáveis dependente e independente (enquanto aluno *Sherpa*).

25. Professora: Berta**,** perante a nuvem de pontos (Figura 16), que estás a ver no ecrã da calculadora gráfica e tendo em conta o modelo matemático que definiste, onde fica localizada a variável independente e a variável dependente? Quer dizer, as variáveis **b** e **o**, que o Pedro definiu na aplicação Listas e Folha de Cálculo, como, **ango** e **angb**, respetivamente.

26. Berta: Oh, stora, o modelo que eu fiz, foi $y = 2x$, porque eu vi que a reta passava pela origem do referencial, logo só podia ser uma função linear. Então, eu pensei que era $\mathbf{ango = 2angb}$, porque na alínea b) eu concluí que a medida da amplitude do ângulo ao centro é o dobro da medida da amplitude do ângulo inscrito. Devia ter dito que **ango** é a variável dependente e **angb** é a variável independente.

Mas, eu sei que me enganei! Na aplicação Dados e Estatística, o meu erro, foi ter colocado as variáveis ao contrário e não reparei que o valor da abcissa é sempre metade do valor da ordenada, nesta situação claro! E então eu deveria ter percebido que o modelo era y= 0,5 x ($\mathbf{angb = 0,5\ ango}$). Portanto, neste caso, o **angb** é a variável dependente e fica no eixo das ordenadas e **ango** é a variável independente e fica no eixo das abcissas.

A Berta sugeriu que o Pedro construísse o modelo que ela tinha evidenciado no seu relatório (Figura 15), solicitando que o aluno colocasse **ango** no eixo das ordenadas e **angb** no eixo das abcissas. De modo a confirmar que o modelo estava correto, a Berta pediu ao Pedro que colocasse o *touchpad* nos vários pontos da função, de modo a comprovar que, nestes caso, o valor da variável dependente (ordenada) é sempre o dobro do valor da variável independente (abcissa).

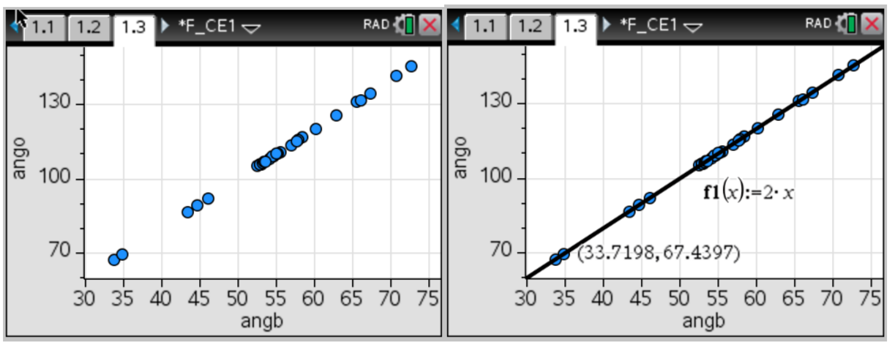


Figura 17. Resolução da alínea c), pelo Pedro (enquanto aluno *Sherpa*) com as orientações da Berta.

Por outro lado, tendo em conta a afirmação da Maria, “O ângulo *ABC* depende do ângulo *AOC* (…)” (Figura 9), que apontou para a existência de uma relação de dependência entre os ângulos, a professora operacionalizou mais uma *ação de focalização*:

27. Professora: Maria, no teu relatório, respeitante à alínea b), escreveste que o ângulo *ABC* depende do ângulo *AOC*. Como interpretas essa afirmação para a construção de um modelo matemático que se adapte a esta situação? Podes manter o modelo linear, $y = 2x$ ou no presente caso $\mathbf{ango = 2angb}$?

28. Maria: Não, nesta situação a variável **b** que representa o ângulo *ABC* é que depende da variável **o** que representa o ângulo *AOC*. Portanto, eu concluí que o modelo matemático é na mesma uma função linear, mas fica $y = 0{,}5\ x$, ou neste caso é $\mathbf{angb = 0,5\ ango}$.

Entretanto o Pedro (aluno *Sherpa*) procedeu à mudança das variáveis (**ango** e **angb**) e traçou a função linear $y = 0{,}5\ x$, de acordo com a descrição da Maria e que ele próprio já tinha esboçado anteriormente, quando realizou a tarefa (ver a primeira parte da figura 11).

Por fim, a professora *solicitou uma síntese* ao José, pois foi o único aluno que não se tinha manifestado durante a discussão coletiva e no seu relatório (Figura 18), a sua resposta foi semelhante à da Maria (Figura 12). No entanto, referiu que na discussão coletiva percebeu que $y = 2x$, era outra forma de representar a função. Portanto, de acordo com as variáveis escolhidas para variável dependente e variável independente, existem duas funções lineares que se adequam à situação ($y = 2x$ ou $y = 0{,}5\ x$).

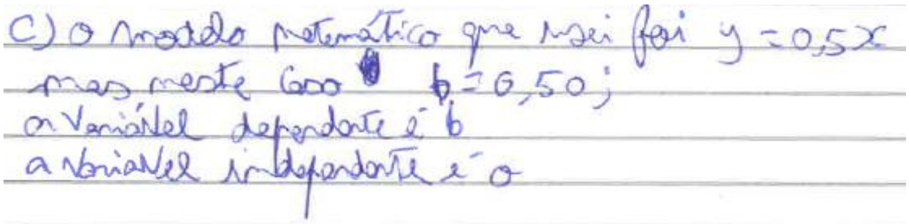

c) o modelo matemático que usei foi y = 0,5x
mas neste caso b = 0,5o;
a variável dependente é b
a variável independente é o

Figura 18. Modelo matemático encontrado pelo José, na alínea c) da tarefa.

Síntese da análise dos resultados

Na construção da figura surgiram *signos de artefacto* fundamentados no desenvolvimento de *esquemas de ação instrumentada* e *esquemas de uso*. Os *esquemas de ação instrumentada* assentaram no emergir de significados pessoais, sustentados pelo conhecimento dos *signos matemáticos*, relativos aos conceitos de circunferência e ângulo. Os *esquemas de uso* estiveram direcionados para a necessidade de utilização desses conceitos no manuseamento dos comandos da calculadora gráfica, no que concerne à aplicação **Geometria**.

Relativamente à alínea a), podemos conjeturar que o *potencial semiótico* da calculadora gráfica, inerente à função dearrastamento e à função de visualização[22], proporcionou a mobilização do significado pessoal do conceito de ângulo para o significado matemático inerente à construção da definição de ângulo inscrito *ABC* e ângulo ao centro *AOC*, numa circunferência. Na discussão coletiva, o facto de o José ter utilizado o signo pessoal (*signo de artefacto*) "cortam", que se movimentou para o signo matemático "intersetam", com a

[22] Facilitou a compreensão.

orquestração da professora, fomentou o entendimento de que os lados do ângulo inscrito teriam de ser secantes à circunferência.

No que concerne à alínea b), quando os alunos seguiram a sugestão do enunciado para, ainda na **Página 1 - Geometria**, desenvolverem *esquemas de uso* inerentes à definição da variável **b** para o ângulo *ABC* e da variável **o** para o ângulo *AOC*, verificou-se que todos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada*, ao percecionaram que antes de definir as variáveis, tinham que desenvolver *esquemas de uso*, fundamentados na medição da amplitude dos ângulos mencionados.

Seguidamente, os alunos desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* ao fazer emergir o significado pessoal inerente ao conceito da operação de divisão. Procederam à divisão das variáveis **o** e **b** e/ou **b** e **o**, utilizando *esquemas de uso*, de modo a concluir a relação existente entre a medida da amplitude do ângulo inscrito *ABC* e a medida da amplitude do ângulo ao centro *AOC*. Posteriormente alteraram as dimensões da circunferência e movimentaram somente os pontos *A* e *C*, dado que os pontos *O* e *B*, se tratavam dos vértices dos ângulos[23]. Então, ao utilizarem o *esquema de ação instrumentada* inerente à função de arrastamento, verificaram que a construção inicial foi transformada, porém a relação existente entre os ângulos permaneceu invariante. Isto é, o *potencial semiótico* da calculadora gráfica, inerente à função de arrastamento, promoveu que os alunos reconhecessem que em qualquer circunferência a medida da amplitude de um ângulo ao centro é o dobro da medida da amplitude do ângulo inscrito, que lhe corresponde. Por outro lado, na discussão coletiva foram esclarecidas algumas incongruências inerentes à escrita simbólica dos signos matemáticos de ângulo, medida da amplitude de ângulo e pontos pertencentes aos lados dos ângulos.

Na resolução da alínea c) dos alunos Pedro, Maria e José, o potencial semiótico da calculadora gráfica, inerente à função de visualização, fundamentada em pontos que surgiram no ecrã que representam uma reta que passa pela origem, desencadeou o desenvolvimento de *signos de artefacto.* Os alunos mobilizaram os significados pessoais da representação simbólica e representação gráfica de uma função linear. Por outro lado, desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* ao relacionarem a alínea b) (Figuras 8 e 9) com a alínea c) tendo definido um modelo linear que se ajustou à situação, de acordo com a posição da variável dependente e variável independente (Figuras 11, 12 e 18). Tendo em conta o modelo que delinearam, desenvolveram *esquemas de ação instrumentada* quando sentiram a necessidade de confirmar a sua conjetura, procedendo ao incremento de *esquemas de uso*, ao colocarem o *touchpad* nos vários pontos da função e verificarem a relação existente entre o valor da variável dependente (ordenada) e o valor da variável independente (abcissa).

Também a aluna Berta desenvolveu *signos de artefacto*, tendo em conta a visualização proprcionada pela calculadora gráfica que lhe permitiu o emergir do significado pessoal de representação gráfica de uma função linear, como sendo uma reta que passa pela origem. Neste sentido, a aluna desenvolveu *esquemas de ação instrumentada* ao correlacionar esta imagem com a relação encontrada na alínea b) (Figura 13) e construiu o modelo matemático sem ter em consideração a relação de dependência entre as variáveis (Figura 15). Isto é, dado que a aluna colocou aleatoriamente as variáveis na *aplicação* Dados e Estatística, não percecionou que o modelo que se ajustava à situação, seria a função linear $y= 0{,}5\ x$ e não $y = 2x$, como concluiu, quando resolveu a tarefa. Neste sentido, a aluna fez confusão entre a variável dependente e a variável independente

[23] Situação esclarecida na discussão coletiva.

(Figura 15). Esta situação foi colmatada, quando a aluna na discussão coletiva, se apercebeu do erro e ajudou o Pedro (aluno *Sherpa*) a construir corretamente o modelo que ela tinha desenvolvido (Figura 17).

Considerações finais

A análise dos dados mostrou que os alunos, ao apropriarem-se da calculadora gráfica, mobilizaram *esquemas de uso* e *esquemas de ação instrumentada*, promovendo o potencial semiótico deste artefacto e desenvolvendo o processo de mediação semiótica. O incremento da discussão coletiva, com a orquestração da professora, ajudada pelo aluno *Sherpa*, foi determinante para a construção do conhecimento matemático.

Por outro lado, tendo em consideração o objetivo didático da tarefa, os alunos evidenciaram facilidade em transitar entre as várias representações: geométrica, tabular, gráfica e algébrica, tendo-se promovido a conexão entre os domínios de Geometria e Funções.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia I.P., no âmbito do projeto PTDC/CED-EDG/32422/2017

Referências

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bruner, J. (1999). *Para uma Teoria da Educação*. Lisboa: Relógio D'Água.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Creswell, J. W. (2012). *Educacional Research, Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. (4 th ed.). Boston: Pearson.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artefacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*: *Vol. 2. Cases and perspective*s (pp. 363–392). Charlotte, NC: Information Age.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., & Meagher, M. (2010). Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives. In: C. Hoyles, & J-B. Lagrange, (Eds.), *Mathematics education and technology rethinking the terrain* (pp. 88-132). New York: Springer.

Freire, P. (2000). *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa.* (15.ª ed.) São Paulo: Paz e Terra.

Kelly, A. E. (2003). Research as design: The role of design in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 3-4.

Lopes, L., & Domingos, A. (2015). A utilização da calculadora gráfica no currículo do ensino básico: uma experiência no 8.º ano. *Educação e Matemática, 131,* 45-48.

Mariotti, M. A. (2002). The Influence of Technological Advances on Students' Mathematics Learning. In L. English (Ed), *Handbook of international research in mathematics education*, (pp. 695-723). London: Lawrence Erlbaum.

Mariotti, M. A. (2018). From using artefacts to mathematical meanings: the teacher's role in the semiotic mediation process. In Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática. Almada: Associação de Professores de Matemática.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a Ação - Assegurar a Todos o Sucesso em Matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.