



**Cláudia Sofia Lopes de Sousa**

Licenciatura em ensino de Matemática

## **O Ensino de Matemática no CPES**

### **Análise de Manuais**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Doutor José Manuel Leonardo de Matos,  
Universidade Nova de Lisboa

Júri: *(Font: Arial, 10 pt normal)*

Presidente: Prof. Doutor(a) [Nome Completo]  
Arguente(s): Prof. Doutor(a) [Nome Completo]  
Vogal(ais): Prof. Doutor(a) [Nome Completo]

*(Tipo de letra: Arial, 10 pt normal)*



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Setembro de 2012**





FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

# **O ensino de Matemática no CPES**

## **Análise de manuais**

Cláudia Sofia Lopes de Sousa

Mestrado em Ensino de Matemática

Lisboa

2012



**O ENSINO DE MATEMÁTICA NO CPES  
ANÁLISE DE MANUAIS**

**COPYRIGHT**

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



## **AGRADECIMENTOS**

A realização desta investigação só foi possível devido à colaboração e ao apoio de diversas pessoas. Destaco pelo valioso contributo no desenvolvimento deste estudo:

O Professor Doutor José Manuel Matos, meu orientador, pela disponibilidade que lhe foi possível, pelos recursos que me facultou, por todo o apoio à reflexão colaborativa e crítica e pelo ânimo que me transmitiu, fatores decisivos à consecução deste projeto.

A Professora Doutora Cecília Monteiro pela sua generosa disponibilidade em ajudar-me neste projeto, bem como pelo material que me facultou.

A Mária Almeida, a Cristolinda Costa, a Paula Teixeira e o Carlos Carvalho pelos documentos e conselhos fornecidos, que se revelaram de extrema importância na realização deste estudo.

Os meus amigos e colegas por todo o apoio que me deram.

Dirijo um agradecimento muito especial à minha família pelo seu apoio incondicional nos momentos de angústia, pela compreensão e estímulo permanentes.

**O professor deverá ser, cada vez mais, um professor de matematização; em vez de ensinar matemática no sentido clássico do termo (ensinar) deve, sim, auxiliar os alunos a reconstruir as estruturas da matemática.**

**Joaquim Redinha**

## RESUMO

Na investigação aqui apresentada pretende-se conhecer as principais alterações introduzidas nos conteúdos do programa de Matemática e na forma de ensinar esta disciplina, com a criação do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário em 1968, até à introdução de novos programas em 1974.

No enquadramento histórico desta investigação, baseei-me essencialmente nos trabalhos de António Teodoro e Rómulo de Carvalho, fazendo uma análise do estado do ensino em Portugal desde o século XIX, passando por todas as mudanças socioeconómicas ao longo do regime salazarista incidindo, no âmbito educacional, essencialmente nos ministérios de Leite Pinto, Galvão Telles e Veiga Simão, este já no regime de Marcelo Caetano.

O estudo realizou-se analisando a legislação, os programas oficiais que constam da Portaria 23601 de setembro de 1968 e três manuais escolares de Matemática do 1º ano do CPES, para além do manual único do 1º ano dos liceus, anterior à criação do CPES.

Consta no currículo do CPES, que se deviam introduzir alterações no ensino da Matemática ao nível da forma e do conteúdo pelo que defini dois objetivos principais neste estudo.

O primeiro prende-se com a descrição dos aspetos ideológicos, pedagógicos, de estrutura e organização dos manuais. Neste sentido, construí um guião de análise inspirado num trabalho de José Carlos Morgado e resultante de várias leituras dos manuais, bem como do currículo, da legislação e da literatura consultada.

O segundo objetivo é a comparação de conteúdos matemáticos dos manuais do CPES entre si e em relação ao manual único.

Com a publicação do decreto-lei nº 48572 e da Portaria 23601 de 9 de setembro de 1968 foram introduzidas alterações significativas no currículo da disciplina de Matemática, retirando-se o papel de destaque concedido à Geometria com a pretensão de simplificar os programas, e colocando a ênfase na linguagem dos conjuntos. Esta nova forma de comunicação matemática foi a característica mais marcante do ensino desta disciplina no CPES, preconizada pela Reforma da Matemática Moderna, e veio revolucionar toda a forma de abordagem dos conteúdos algébricos e aritméticos. Deste modo, optei por concentrar esta investigação na análise dos capítulos “Conjuntos e Números”, “Operações com números inteiros” e “Números Racionais” dos manuais selecionados.

Com a leitura de trabalhos de Monteiro, Pinto & Figueiredo, foram detetados paradigmas e caracterizadas abordagens significativas no âmbito da multiplicação e divisão de números inteiros, e do alargamento do conceito de número ao conjunto dos números racionais, que serviram de referência à análise dos manuais nesses conteúdos.

A metodologia de investigação adotada é de natureza qualitativa e esta escolha prende-se pelo facto de todos os dados a recolher serem diretamente observados dos manuais. A metodologia aqui adotada

enquadra-se em algumas características apontadas por Bogdan & Biklen, bem como nas teorias de análise de conteúdo segundo Alain Chopin e Laurence Bardin.

Foi possível observar que, de um modo geral, os manuais do CPES cumprem as indicações do programa, incluindo por vezes outros conceitos e formas de representação, bem como vários termos para designar o mesmo conceito, sendo a linguagem de conjuntos efetivamente utilizada em praticamente todas as abordagens. São ainda atribuídos diferentes significados na abordagem da multiplicação, divisão e do conceito de fração, apresentando diversos exemplos, geralmente ligados ao quotidiano ou ao conhecimento geral dos alunos.

**Palavras-chave:** Currículo de Matemática, Conjuntos, Multiplicação, Divisão, Fração.

## ABSTRACT

In the research presented here is intended to meet the major changes in the contents of the mathematics program and on how to teach this discipline, with the creation of the Preparatory Cycle of Secondary Education in 1968, until the introduction of new programs in 1974.

In the historical context of this research I relied mainly on the work of Antonio Teodoro and Rómulo de Carvalho, making an analysis of the state of education in Portugal since the nineteenth century, through all socioeconomic changes over the Salazar regime focusing on the educational essentially the ministries of Leite Pinto, Galvão Telles and Veiga Simão, now this regime of Marcelo Caetano.

The study was conducted by reviewing the legislation, official programs contained in Portaria 23601 September 1968 and three textbooks of Mathematics 1st year of CPES, in addition to the manual only the 1st year of liceus, prior to the establishment of CPES.

It consists in the resume of the CPES, that if had to introduce alterations in the education of the Mathematics to the level of the form and the content for what I defined two main objectives in this study.

The first one is about the description of the ideological, pedagogical aspects, of structure and organization of manuals. In this direction, I constructed to a guião of analysis inspired by a work of Jose Carlos Morgado and resultant of some readings of manuals, as well as of the resume, the legislation and consulted literature.

As the objective one is the comparison of mathematical contents of manuals of the CPES between itself and in relation to the only manual.

With the publication of Decree-Law No. 48572 and Portaria 23601 of 9 September 1968 significant changes were made in the curriculum of the 1st year of Mathematics, removing the prominent role given to geometry with the intention of simplifying programs and putting emphasis on the language of sets. This new form of mathematical communication was the most striking feature of the teaching of this subject in CPES, advocated by the Reform Math, and revolutionized the whole way of approaching content algebraic and arithmetic. Thus, I chose to focus this research on the analysis of chapters "Sets and Numbers", "Operations with whole numbers" and "Rational Numbers" of selected textbooks.

With the reading of works of Monteiro Pinto & Figueiredo, were detected paradigms and characterization of significant approaches in the context of multiplication and division of whole numbers, and the extension of the number concept to all rational numbers, which served as a reference to the analysis of manuals such content.

The research methodology adopted is qualitative in nature and this choice relates to the fact that all the data collected being directly observed the manuals. Qualitative methodology adopted here fits in

some features pointed out by Bogdan & Biklen, as well as the theories of content analysis according to Alain Chopin and Laurence Bardin.

It was observed that, generally, the textbooks for CPES comply with the instructions of the program, sometimes including other forms of representation and concepts, as well as various terms to describe the same concept, and sets language is effectively used in practically all approaches. They are also assigned different meanings in approaches of the concepts of multiplication, division and fractions, as various examples, usually linked to everyday or general knowledge of the students.

Keywords: Curriculum Mathematics, Sets, Multiplication, Division, Fraction.

## INDICES

<b>Agradecimentos</b> .....	I
<b>Resumo</b> .....	III
<b>Abstract</b> .....	V
<b>Indices</b> .....	VII
Índice de matérias .....	VII
Índice de figuras .....	X
Índice de quadros .....	XIII
Índice de tabelas .....	XIV
Siglas utilizadas .....	XV

## Índice de Matérias

<b>CAPÍTULO 1 – PROBLEMA E QUESTÕES DE ESTUDO</b> .....	1
1.1. INTRODUÇÃO .....	1
1.2. PERTINÊNCIA DO ESTUDO .....	2
1.3. FUNÇÕES DOS MANUAIS ESCOLARES .....	3
1.4. OBJETIVOS .....	5
<b>CAPÍTULO 2 – ENQUADRAMENTO HISTÓRICO</b> .....	9
2.1. O ENSINO DURANTE A MONARQUIA E A PRIMEIRA REPÚBLICA .....	9
2.2. VISÃO GERAL DO ENSINO DURANTE O ESTADO NOVO .....	11
2.3. CRIAÇÃO DO CPES .....	15
2.4. REFORMA VEIGA SIMÃO .....	18
2.5. A MATEMÁTICA NO CPES .....	23
<b>CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA</b> .....	29
3.1. INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA .....	29
3.2. ANÁLISE DE CONTEÚDO .....	30

3.3. ETAPAS DE INVESTIGAÇÃO .....	34
<b>CAPÍTULO 4 – DESCRIÇÃO GERAL E COMPARAÇÃO DOS MANUAIS .....</b>	<b>37</b>
4.1. Os manuais .....	37
4.2. Os autores dos manuais do CPES .....	38
4.3. Aspectos ideológicos de âmbito transdisciplinar .....	39
4.4. Modelo pedagógico subjacente .....	41
4.5. Estrutura e organização dos conteúdos .....	45
4.6. Atividades propostas .....	50
<b>CAPÍTULO 5 – ABORDAGEM DE TÓPICOS MATEMÁTICOS SELECIONADOS .....</b>	<b>53</b>
5.1. CONJUNTOS E NÚMEROS .....	53
5.1.1. Linguagem dos conjuntos .....	54
5.1.2. Correspondência biunívoca .....	57
5.1.3. Conjuntos finitos e infinitos .....	60
5.1.4. Relação entre os manuais do CPES e o currículo .....	62
5.1.5. Atividades .....	63
5.2. OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS .....	65
5.2.1. Reunião e interseção de conjuntos .....	65
5.2.2. Adição de números inteiros .....	68
5.2.3. Subtração de números inteiros .....	76
5.2.4. Multiplicação .....	88
5.2.5. Divisão .....	97
5.2.6. Relação entre os manuais do CPES e o currículo .....	111
5.2.7. Atividades .....	113
5.3. NÚMEROS RACIONAIS .....	115
5.3.1. Noção de número fracionário .....	116
5.3.2. Equivalência e simplificação de frações .....	128
5.3.3. Comparação de frações .....	133
5.3.4. Adição e subtração de frações .....	134

5.3.5. Multiplicação de frações .....	138
5.3.6. Divisão de números racionais .....	144
5.3.7. Relação entre os manuais do CPES e o currículo .....	146
5.3.8. Atividades .....	147
<b>CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO</b> .....	149
6.1. QUADRO HISTÓRICO DA CRIAÇÃO DO CPES .....	149
6.2. OBJETIVO 1: DESCRIÇÃO DOS ASPETOS IDEOLÓGICOS, PEDAGÓGICOS, DE ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO DOS MANUAIS .....	151
6.3. OBJETIVO 2: COMPARAÇÃO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS .....	153
6.4. BALANÇO DA FASE INICIAL DA CRIAÇÃO DO CPES .....	156
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	159
<b>ANEXOS</b> .....	161
ANEXO 1 - Quadro de manuais analisados e sua localização na Biblioteca Nacional de Portugal ...	162
ANEXO 2 - MANUAL A .....	163
Capa .....	163
Contracapa .....	165
Prefácio .....	167
Índice .....	169
Índice expandido .....	170
ANEXO 3 - MANUAL B .....	172
Capa .....	172
Contracapa .....	174
Prefácio .....	175
Índice .....	177
Índice expandido .....	179
ANEXO 4 - MANUAL C .....	183
Capa .....	183
Contracapa .....	184

Índice .....	185
Índice expandido .....	187
ANEXO 5 - MANUAL D.....	189
Capa .....	189
Contracapa .....	190
Índice .....	191
Índice expandido .....	191
ANEXO 6 - GUIÃO DE ANÁLISE .....	195
ANEXO 7 - CURRÍCULO .....	198
ANEXO 8 - SÍNTESE DOS DADOS RECOLHIDOS .....	201

## Índice de figuras

<b>Gráfico 2.1</b> – Evolução das taxas de analfabetismo em Portugal, Espanha, Itália, Bélgica e França, entre 1875 e 1925. Valores aproximados. ....	9
<b>Gráfico 2.2</b> – Evolução do número de matriculados nos ensinos oficial e particular, na 4ª classe, nos 5º e 6º anos, nos 7º, 8º e 9º anos, nos 10º e 11º anos, no 12º ano e no ensino superior. 1937 – 1992 .....	21
<b>Fig. 4.1</b> – Exemplo do ênfase dado à imagem neste manual (B, p. 71) .....	48
<b>Fig. 4.2</b> - Exemplo da ênfase dada à imagem no capítulo “Conjuntos e Números” (B, p. 100) ..	48
<b>Fig. 5.1</b> – Correspondência biunívoca entre irmãos e irmãs. (B, p. 30) .....	58
<b>Fig. 5.2</b> – Correspondência biunívoca entre as folhas e as linhas e entre folhas e colunas. (B, p. 30)..	58
<b>Fig. 5.3</b> –Representação de vários conjuntos para relacionar a possibilidade de correspondência biunívoca entre dois conjuntos com o número de elementos desses conjuntos. (C, p. 30) .....	59
<b>Fig. 5.4</b> - Representação de cardinais por meio de “barras numéricas” (C, p. 33) .....	60
<b>Fig. 5.5</b> – Representação de dois conjuntos não disjuntos para estudo da interseção e reunião (C, p. 51) .....	67
<b>Fig. 5.6</b> – Representação em extensão da interseção de dois conjuntos (C, p. 49) .....	68
<b>Fig. 5.7</b> – Representação em extensão da reunião de dois conjuntos. (C, p. 51) .....	68
<b>Fig. 5.8</b> –Determinação do cardinal da reunião de dois conjuntos disjuntos por contagem do total de elementos (B, p. 82) .....	70

<b>Fig. 5.9</b> – Representação da propriedade comutativa da adição usando retângulos a cores. (B, p. 87) .....	71
<b>Fig. 5.10</b> – Cardinal do conjunto reunião de dois conjuntos disjuntos como soma dos cardinais desses dois conjuntos, recorrendo à representação de cardinais por “barras numéricas” e segmentos de reta (C, p. 56) .....	72
<b>Fig. 5.11</b> – Representação da propriedade comutativa da adição usando segmentos de reta (C, p. 59) .....	73
<b>Fig. 5.12</b> – Propriedade associativa da adição representada com esquemas de “máquinas de adição” (C, p. 61) .....	74
<b>Fig. 5.13</b> – Representação dos lados de um triângulo sobre uma reta de modo a calcular a sua soma (perímetro do polígono) (D, p. 37) .....	74
<b>Fig. 5.14</b> – Representação do conjunto complementar. (B, p. 101) .....	79
<b>Fig. 5.15</b> – Representação de um conjunto e do seu complementar. (C, p. 69) .....	83
<b>Fig. 5.16</b> – Determinação de uma diferença usando o esquema de segmento de reta. (C, p. 70) .....	83
<b>Fig. 5.17</b> – Representação de operações inversas do dia a dia e utilização de operadores inversos num esquema com “máquinas de adição”. (C, p. 71) .....	84
<b>Fig. 5.18</b> – Propriedade da invariância do resto (C, p. 72) .....	85
<b>Fig. 5.19</b> – Diferença entre uma soma e um número (C, p. 73).....	85
<b>Fig. 5.20</b> – Diferença entre duas somas (C, p. 75) .....	86
<b>Fig. 5.21</b> – Resolução de equações por meio de “barras” (C, p. 76) .....	86
<b>Fig. 5.22</b> – Abordagem da subtração (D, p. 47) .....	87
<b>Fig. 5.23</b> – Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (A, p. 78) .....	89
<b>Fig. 5.24</b> – Aplicação das propriedades no cálculo mental e no algoritmo da multiplicação (A, p. 79) .....	89
<b>Fig. 5.25</b> – Multiplicação como soma de parcelas iguais recorrendo ao cardinal da reunião de conjuntos mutuamente disjuntos como soma dos cardinais desses conjuntos (C, p. 78) .....	92
<b>Fig. 5.26</b> – Produto como soma de parcelas iguais representados em segmentos de reta (C, p. 79) .....	93
<b>Fig. 5.27</b> – Esquema de apoio na abordagem da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (C, p. 87) .....	94
<b>Fig. 5.28</b> – Esquema de apoio à abordagem da propriedade associativa da multiplicação (D, p. 58) .....	95
<b>Fig. 5.29</b> – Decomposição de um conjunto de 12 flores em subconjuntos equicardinais (A, p. 89) .....	98
<b>Fig. 5.30</b> – Representação da divisão inteira de 17 caramelos por 3 amigos (à esquerda) e por	

5 amigos (à direita) (A, p. 141) .....	103
<b>Fig. 5.31</b> – Algoritmo IM (B, p. 155) .....	105
<b>Fig. 5.32</b> – Equipartição de um conjunto em conjuntos disjuntos equicardinais (C, p. 95) .....	105
<b>Fig. 5.33</b> – Operadores inversos com esquemas de máquinas de calcular (C, p. 96).....	106
<b>Fig. 5.34</b> – Esquema síntese da adição e subtração, multiplicação e divisão, como operações inversas, respetivamente (C, p. 97) .....	106
<b>Fig. 5.35</b> – Frações como operadores partitivo- multiplicativos, decompostos em partição e multiplicação (C, p.103) .....	108
<b>Fig. 5.36</b> – Frações inversas recorrendo a tabelas de razão (C, p. 104) .....	109
<b>Fig. 5.37</b> – Representação de dois tabuleiros de pastéis para abordar a divisão de um produto por um número, sendo um dos fatores igual ao divisor (D, p. 67) .....	110
<b>Fig. 5.38</b> – Partilha equitativa de 3 barras de chocolate por 7 pessoas. Fração como relação parte-todo e como um quociente exato. (A, p. 101) .....	116
<b>Fig. 5.39</b> – Partilha equitativa de 4 bolos por 3 pessoas. Fração como um quociente exato. (A, p. 101) .....	117
<b>Fig. 5.40</b> – Representação de uma fração na forma mista (A, p. 103) .....	118
<b>Fig. 5.41</b> – Partilha equitativa de 3 barras de chocolate por 4 pessoas considerando a barra como unidade (conjunto contínuo) (B, p. 158) .....	119
<b>Fig. 5.42</b> – Partilha equitativa de 3 barras de chocolate por 4 pessoas considerando o quarto de barra como unidade (conjunto discreto) (B, p. 158) .....	119
<b>Fig. 5.43</b> – Partilha equitativa de 4 bolos por 5 pessoas (B, p. 158) .....	120
<b>Fig. 5.44</b> – Fração como relação parte-todo num conjunto discreto de 7 copos, sendo 3 brancos e 4 castanhos (C, p. 109) .....	122
<b>Fig. 5.45</b> – Fração como relação parte-todo representada por um quarto de barra de chocolate (C, p. 110) .....	122
<b>Fig. 5.46</b> – Fração como relação parte-todo na representação de três quartos de barra (C, p. 110) .....	122
<b>Fig. 5.47</b> – Partilha equitativa de 3 barras de chocolate por 4 pessoas. (C, p. 111) .....	123
<b>Fig. 5.48</b> –Decomposição de um numeral partitivo-multiplicativo em multiplicação e partição (generalização) (C, p. 113) .....	124
<b>Fig. 5.49</b> – Decomposição de um operador partitivo-multiplicativo em partição seguida de multiplicação (C, p. 112) .....	124
<b>Fig. 5.50</b> - Divisão com resto e sem resto de 7 bolos por 3 pessoas (C, p. 114) .....	125
<b>Fig. 5.51</b> - Divisão exata e não exata de 11 unidades por 4 (C, p. 115) .....	125
<b>Fig. 5.52</b> - Conversão de formas inteiras e mistas a fracionárias usando um esquema de régua graduada (C, p. 115) .....	126

<b>Fig. 5.53</b> – Fração como relação de uma parte com o todo considerando dois quintos de uma barra de chocolate (D, p. 177) .....	126
<b>Fig. 5.54</b> – Representação de frações equivalentes numa unidade circular (A, p. 105) .....	128
<b>Fig. 5.55</b> – Representação de frações equivalentes numa unidade retangular designada por R (B, p. 162) .....	129
<b>Fig. 5.56</b> – Divisão equitativa de um bolo em 8 partes (B, p. 162) .....	130
<b>Fig. 5.57</b> – Representação de frações equivalentes tomando o mesmo retângulo como unidade (C, p. 117) .....	131
<b>Fig. 5.58</b> – Representação de frações equivalentes tomando o mesmo retângulo como unidade dividida em 7 faixas horizontais e dividida em 63 quadrículas. (D, p. 192) .....	131
<b>Fig. 5.59</b> – Representação gráfica de frações equivalentes (C, p. 120) .....	132
<b>Fig. 5.60</b> – Comparação de frações com o mesmo denominador (A, p. 107) .....	133
<b>Fig. 5.61</b> – Comparação de frações com o mesmo denominador (C, p. 121) .....	133
<b>Fig. 5.62</b> – Comparação de frações com o mesmo numerador (C, p. 121) .....	134
<b>Fig. 5.63</b> – Adição de números fracionários (A, p. 109) .....	135
<b>Fig. 5.64</b> – Adição e subtração de frações com o mesmo denominador usando um círculo e um segmento de reta como unidades (C, p. 123) .....	136
<b>Fig. 5.65</b> – Multiplicação de frações usando o esquema de um campo agrícola retangular (A, p. 110) .....	138
<b>Fig. 5.66</b> – Partições sucessivas – representação de metade da terça parte ou terça parte da metade (B, p. 173) .....	139
<b>Fig. 5.67</b> – Operador partitivo-multiplicativo em conjunto contínuo – representação do dobro de um quinto (B, p. 173) .....	140
<b>Fig. 5.68</b> – Multiplicação de frações: dois quintos de cinco sétimos (B, p. 174) .....	140
<b>Fig. 5.69</b> – Multiplicação de frações: dois terços de cinco sextos (B, p. 174) .....	141
<b>Fig. 5.70</b> – Partições sucessivas – analogia às multiplicações sucessivas (C, p. 126) .....	143
<b>Fig. 5.71</b> – Multiplicação de frações – tabela de razão (C, p. 127) .....	143
<b>Fig. 5.72</b> – Algoritmo IM usando tabelas de razão (C, p. 132) .....	146

## Índice de Quadros

<b>Quadro 5.1</b> – Comparação do conteúdo do manual A com as indicações do currículo (Conjuntos) .....	62
<b>Quadro 5.2</b> – Comparação do conteúdo do manual B com as indicações do currículo	

(Conjuntos) .....	62
<b>Quadro 5.3</b> – Comparação do conteúdo do manual C com as indicações do currículo	
(Conjuntos) .....	63
<b>Quadro 5.4</b> – Comparação do conteúdo do manual A com as indicações do currículo (Números inteiros) .....	111
<b>Quadro 5.5</b> – Comparação do conteúdo do manual B com as indicações do currículo (Números inteiros) .....	112
<b>Quadro 5.6</b> – Comparação do conteúdo do manual C com as indicações do currículo (Números inteiros) .....	112
<b>Quadro 5.7</b> – Comparação do conteúdo do manual A com as indicações do currículo (Números Racionais) .....	146
<b>Quadro 5.8</b> – Comparação do conteúdo do manual B com as indicações do currículo (Números Racionais) .....	147
<b>Quadro 5.9</b> – Comparação do conteúdo do manual C com as indicações do currículo (Números Racionais) .....	147

## Índice de tabelas

<b>Tabela 2.1.</b> – Evolução do número de alunos inscritos no ensino primário. 1911 – 1955. ....	13
<b>Tabela 4.1</b> – Estudo estatístico sobre a percentagem que cada manual dedica às diferentes temáticas .....	46
<b>Tabela 4.2</b> – Estudo estatístico sobre o grau de solicitação ao envolvimento do aluno na realização de tarefas, atividades e exercícios nos diferentes capítulos dos manuais .....	46
<b>Tabela 5.1</b> – Dados estatísticos para construção de gráfico de barras. (A, p. 42) .....	64
<b>Tabela 5.2</b> – Dados estatísticos para construção de gráfico de barras. (A, p. 42) .....	64
<b>Tabela 5.3</b> – Multiplicações cuja memorização é sugerida ao aluno (D, p. 60) .....	96

## **SIGLAS UTILIZADAS**

**CPES** – Ciclo Preparatório do Ensino Secundário

**OECE/OCDE** – Organização Europeia para a Cooperação Económica / Organização para a  
Cooperação Desenvolvimento Económico

**CERI** – Centre for Educational Research and Innovation

**NATO/OTAN** – Organização do Tratado do Atlântico Norte

**EUA** – Estados Unidos da América

**ONU** – Organização das Nações Unidas

**UNESCO** - Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

**CIEAEM** - Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement dès  
Mathématiques



## **CAPÍTULO 1 – PROBLEMA E QUESTÕES DE ESTUDO**

### **1.1. INTRODUÇÃO**

Ao longo do século XX, e arriscarei dizer que mesmo nos nossos dias, a aprendizagem tem sido um processo rígido de simples acumulação de conhecimentos, fragmentados por disciplinas, em que o conhecimento dos conteúdos constitui um fim em si mesmo, não obstante tudo o que tem sido legislado para contrariar essa tendência. Consideram-se as teorias científicas como verdadeiras, inquestionáveis e consensuais, sendo os programas fechados e inamovíveis. O aluno é considerado um sujeito passivo, mero recetor de informação e o processo ensino-aprendizagem favorece o trabalho individual e a mecanização de processos para a resolução de problemas.

Nas sucessivas reformas educativas verificou-se oficialmente uma tendência progressiva em considerar a aprendizagem como um processo de construção dinâmico, cujos principais obreiros são os próprios aprendentes (Morgado, 2004, p. 19). De facto, é necessário atender aos diferentes interesses e ritmos de aprendizagem dos alunos.

As políticas educativas pretendem que se parta do conhecimento dos alunos e das suas vivências, sendo que os conteúdos sejam meios de aprendizagem e não fins. Os alunos devem ser incentivados a questionar, a pesquisar noutras fontes, a desenvolver o seu espírito crítico, enfim a ter um papel ativo na construção dos seus saberes.

Neste sentido, a interdisciplinaridade, o trabalho coletivo e o debate de ideias devem ser bastante valorizados. Pressupõe-se, deste modo, que exista “uma concepção interactiva, evolutiva e construtivista” de aprendizagem, por oposição à “concepção estática, linear, tecnicista e burocrática” que imperou durante muito tempo (Helena Peralta, 2002, p. 18, in Morgado, 2004, p. 20).

Independentemente das transformações que se têm verificado no sistema educativo, o manual escolar assume-se até aos nossos dias como o instrumento mais utilizado pelos professores em aula. A hegemonia alcançada por estes justifica-se por constituírem um instrumento estruturante dos conteúdos a trabalhar, uma materialização do currículo apresentado aos professores.

Na medida em que contém as informações consideradas úteis e imprescindíveis para os alunos, propondo também exercícios de consolidação e problemas, os manuais constituem ainda uma base de trabalho para que o discente estruture, consolide e avalie os seus conhecimentos.

Deste modo, torna-se importante que o docente assuma uma atitude crítica do ponto de vista científico, pedagógico, discursivo e sociológico em relação aos manuais sem cair num uso excessivo, que conduziria à desprofissionalização docente. Deve produzir recursos alternativos que complementem os manuais, recorrer frequentemente às vivências dos alunos, estimular-lhes a curiosidade, a pesquisa noutras fontes e o espírito crítico, enfim refletir sobre a sua prática letiva, procurando despertar o interesse e a motivação dos seus alunos.

Uma vez que os manuais constituem o principal suporte de trabalho nas atividades escolares de professores e alunos, é necessário estar atento aos efeitos perversos que, segundo Morgado, poderão ser induzidos por uma utilização excessiva, tendo em conta os seguintes aspetos:

- Embora os manuais escolares sejam instrumentos de trabalho muito utilizados por docentes e estudantes, são construídos e dirigidos, preferencialmente, aos primeiros, uma vez que é ao colectivo docente que compete decidir o manual a adoptar em cada escola. (Morgado, p. 46). Por questões financeiras e comerciais, as editoras idealizam um “produto que possa ser vendido ao maior número possível de professores”, (...) procurando facilitar ao máximo o trabalho do docente na sala de aula. (Morgado, p. 47).
- Também pelo facto de ser destinado a um público globalizado, os manuais muitas vezes não tem em conta as diferenças de cada um e por vezes também utilizam uma linguagem demasiado abstrata.

Existem manuais escolares que são construídos como se todos os alunos fossem iguais, isto é, como se tivessem idênticos conhecimentos prévios, iguais necessidades, características similares e os mesmos interesses. (Morgado, p. 43)

No seu uso excessivo, o ensino torna-se impessoal e destituído de sentido para os discentes, os seus conhecimentos não são mobilizados, não se analisam pareceres distintos em relação a um determinado assunto.

- Os manuais tendem a valorizar mais o produto final do que o processo de ensino-aprendizagem, não se reconhece a importância do debate, do questionamento, passando a ideia de que o que mais interessa são as respostas e não as perguntas.
- A lógica de sequencialização dos conteúdos pode ainda comprometer a flexibilização do currículo, tendo em conta os interesses, as vivências, os ritmos e as formas de aprendizagem dos alunos.

Muitos manuais também não promovem a interdisciplinaridade e não incentivam o espírito crítico dos alunos ou a procura de informação complementar noutras fontes.

Nesta ótica, os docentes devem proceder a uma análise minuciosa dos manuais que lhes são apresentados pelas diversas editoras para que a sua seleção seja cuidadosa e consciente, e adaptar a sua utilização em função das necessidades dos seus alunos e tendo em conta o meio envolvente.

## **1.2. PERTINÊNCIA DO ESTUDO**

Nos nossos dias é frequente encontrar nas opiniões correntes que a qualidade atual de ensino é inferior à de outras gerações. Segundo a opinião pública, o processo de ensino-aprendizagem tem

vindo a degradar-se devido à indisciplina nas escolas, à perda de autoridade por parte dos professores e à simplificação dos programas que se revelam menos exigentes. A escola tem-se tornado mais anárquica e os alunos menos sabedores, sendo a disciplina de Matemática uma das que evidenciam maiores taxas de insucesso no nosso país.

Revela-se deste modo importante proceder-se a uma análise da história do ensino da matemática para se fundamentar este tipo de questões e compreender de que modo se poderá melhorar a qualidade das aprendizagens dos nossos alunos.

Atendendo ao papel privilegiado dos manuais no processo de ensino-aprendizagem, torna-se igualmente importante proceder-se a uma análise exaustiva dos livros escolares ao longo da História do Ensino do nosso país, reconhecer os seus contributos, as suas limitações, analisar as informações explícitas e implícitas, a carga ideológica e os valores que se pretendem transmitir, tanto para que a escolha do manual adoptado seja consciente e responsável, como para compreender como este deve ser utilizado em sala de aula.

Estes estudos também não deveriam ser descurados na tomada de decisões por parte da administração central e da concepção dos livros didáticos.

Todos os agentes envolvidos no sistema de ensino têm interesse em conhecer o contexto político e as concepções ideológicas que suportam a elaboração dos manuais, analisar os vários modos de utilização dos mesmos em sala de aula, o tipo e natureza das relações que os alunos estabelecem com o manual escolar, para que o processo de ensino-aprendizagem seja realmente eficaz.

Neste sentido, a análise desses recursos didáticos não se deve dissociar da sua evolução histórica, sendo importante estudar as transformações verificadas em diferentes épocas ou em edições sucessivas.

### **1.3.FUNÇÕES DOS MANUAIS ESCOLARES**

Atualmente existem uma multiplicidade de editoras que produzem manuais escolares, cuja seleção é da responsabilidade de uma escola e realizada pelos docentes dos vários grupos disciplinares. Porém, houve períodos da nossa História em que vigorava o manual escolar único. Na época em estudo, nos anos terminais do Estado Novo, já era concedida aos conselhos escolares a responsabilidade de seleção de um manual para cada disciplina, de entre aqueles que tinham sido aprovados em Diário de Governo ou, segundo o que consta do artigo 359º do decreto-lei nº 48 572, “Enquanto não houver livros superiormente aprovados para o ensino do ciclo preparatório, os conselhos escolares procederão à escolha dos livros de texto e compêndios, de entre os indicados pela Inspeção.”.

Para Chopin (p. 552), a natureza da literatura escolar é complexa, uma vez que resulta do cruzamento de três gêneros que participam no processo educativo:

- Inicialmente, a literatura religiosa, que deu origem à literatura escolar. No Ocidente cristão, os livros estruturados por “pergunta e resposta” eram semelhantes aos catecismos;
- Seguidamente, a literatura didática, técnica ou profissional que foi progressivamente introduzida nas escolas;
- A literatura de lazer cujo dinamismo e características têm sido incorporadas nos livros didáticos.

Têm-se realizado diversos estudos sobre estes recursos educativos de grande utilidade.

Chopin (p.553) considera que os livros didáticos exercem quatro funções essenciais, que podem variar por vários fatores: Função referencial; instrumental; ideológica e cultural; e documental.

Na sua **função referencial**, os manuais assumem-se como fonte de informação e um apoio a docentes e alunos na medida em que são recursos estruturantes dos conteúdos a trabalhar na aula, contribuindo para se transmitir e legitimar o conhecimento considerado útil e imprescindível para a formação de base das novas gerações.

A **função instrumental** consiste em facilitar a aquisição de conhecimentos através da proposta de exercícios e atividades que favorecem a memorização e o desenvolvimento de técnicas e procedimentos, bem como a aquisição de competências disciplinares ou transversais, nomeadamente a capacidade de raciocínio e de resolução de problemas, a apropriação de métodos de análise, entre outros. Neste sentido, são instrumentos úteis e eficazes para que o aluno possa estruturar, adquirir e avaliar os seus conhecimentos. Permite-lhe ainda um estudo fora da sala de aula e o envolvimento das famílias na aprendizagem do aluno.

Chopin considera ainda a **função documental** dos livros quando estes fazem referência a assuntos que enriquecem os conteúdos curriculares ou contém indicação de outras fontes de informação, estimulando a pesquisa e o espírito crítico dos alunos. Esta é a função que mais recentemente surgiu na literatura escolar.

Por último, a **função ideológica e cultural** que é a mais antiga. Sendo os manuais dirigidos a um público jovem e sendo o recurso mais utilizado em sala de aula, assumem um papel de destaque na formação de mentalidades, na medida em que veiculam valores e princípios, ideologias e perspectivas, ao mesmo tempo que ajudam a fixar e a moldar memórias, inclusive a própria memória histórica e mesmo a(s) identidade(s) (Mendes; in Morgado, 2004, p. 37).

Os manuais escolares podem exercer deste modo algum controlo social porque se baseiam, nas palavras de Jurjo Torres (1998a, p.170) em “concepções ideológicas e políticas dominantes” (Morgado, 2004, p. 27).

Há muitos manuais escolares que não consideram certas culturas mais desfavorecidas e minoritárias, conduzindo à construção de estereótipos sobre as realidades humanas. Há também tendência a modelar

a realidade de forma favorável, ocultando sistematicamente aspetos negativos da sociedade (violência, conflitos sociais, etc). Enquanto, em alguns casos as concepções ideológicas são explícitas no texto e nas imagens, noutras elas estão presentes de forma sub-reptícia, tornando-se importante, na análise dos manuais, estar atento não só ao que os autores escrevem (de forma explícita ou implícita), como também ao que tentam ocultar.

#### **1.4. OBJETIVOS**

Nesta investigação, serão estudados e comparados o manual único de Matemática do 1º ano que vigorava no 1º ciclo liceal nos anos que antecederam a criação do CPES, em 1968, e os que foram aprovados e utilizados no início da implementação do CPES.

A época em que se enquadra O CPES foi muito rica em mudanças, dado que ocorreram transformações sociais profundas, que abalaram conceitos e valores e essas mudanças também se refletiram nas políticas, com grande destaque para o setor da Educação.

Com a criação do CPES foram decretadas várias mudanças no ensino da Matemática, tanto ao nível dos conteúdos programáticos e da linguagem matemática, como das metodologias em sala de aula, impulsionadas pelo Movimento da Matemática Moderna.

A teoria de conjuntos assume um papel preponderante no ensino da matemática do CPES e é utilizada na abordagem aos números racionais positivos, tema central do programa do 1º ano.

Pretendo então, com este estudo, compreender as novas formas de ensinar Matemática, veiculadas pelos manuais escolares, desde a implementação do CPES, em 1968 até à introdução dos novos programas em 1974.

Para o efeito, este estudo incidirá na descrição e comparação entre três dos primeiros manuais de Matemática usados no 1º ano do CPES, e também relativamente ao manual único de Matemática usado no 1º ano dos liceus, antes da criação do CPES.

Serão portanto considerados dois objetivos gerais:

##### **OBJETIVO 1 – Descrição dos aspetos ideológicos, pedagógicos, de estrutura e organização dos manuais.**

Tendo em conta este objetivo, construí um guião de análise, inspirado num trabalho de José Carlos Morgado, procurando encontrar resposta para as seguintes questões relacionadas com uma análise geral dos manuais ao nível ideológico e epistemológico:

- **De que forma se transmitem os valores morais da época? Qual a carga ideológica contida nos livros?**

- **Qual o grau de fidelidade do manual escolar ao currículo prescrito?**
- **Qual o modelo de ensino-aprendizagem subjacente ao manual escolar?**
  - De que forma estavam presentes nos manuais didáticos as metodologias preconizadas como viáveis para trabalhar a Matemática Moderna, nomeadamente o destaque do papel do aluno no processo ensino-aprendizagem, o trabalho de grupo, o recurso a outros materiais, a abordagem de conteúdos com base no quotidiano?
  - Qual a relação do manual com o aluno: os textos adequam-se à sua faixa etária? O aluno é solicitado regularmente a realizar tarefas ou exercícios?
  - As atividades são globais, estabelecendo conexões entre vários temas ou restringem-se apenas aos assuntos tratados no capítulo em que se inserem?
- **Como se pode avaliar o tipo de informação veiculada pelo manual?**
  - Os desenhos, esquemas e fotografias que integram o manual são pertinentes?
  - Os conteúdos são claros e rigorosos do ponto de vista científico?
- **Quais as formas de seleção do conhecimento utilizadas?**
  - Recorre-se com frequência às experiências dos alunos? Que exemplos são utilizados?
  - Recorre a conteúdos transversais? Inclui informações de carácter complementar?

## **OBJETIVO 2 – Comparação de conteúdos matemáticos.**

Tendo em conta que é este o meu objetivo principal, a maior parte das páginas desta dissertação será dedicada à descrição e comparação entre os três manuais de Matemática do 1º ano do CPES selecionados, e também relativamente ao manual único de Matemática usado no 1º ano dos liceus, antes da criação do CPES, no que se refere aos seguintes tópicos: Conjuntos, Operações com Números Inteiros e Números Racionais.

A escolha destes tópicos prende-se com o facto de me parecerem ser aqueles onde as influências da Matemática Moderna mais se fizeram sentir. Para comparar as diferentes formas de abordagem, no caso da Multiplicação, da Divisão e das Frações, utilizei os paradigmas de Monteiro, Pinto & Figueiredo.

No âmbito deste objetivo, formulei as seguintes questões:

- **Como são apresentados os capítulos em estudo, na mesma época por autores diferentes? E quais as diferenças em relação ao manual único anterior à criação do CPES?**
  - Como interpretavam os autores dos manuais do CPES os programas relativamente à teoria de conjuntos e ao desenvolvimento do conceito de número?
  - Quais os aspetos relevados na linguagem de conjuntos? Quais as terminologias utilizadas? Como se relacionam a linguagem matemática e a Língua Portuguesa?
  - Como e quando eram formalizados os conceitos relacionados com Aritmética e a Álgebra?

- Qual a importância concedida à linguagem dos conjuntos na abordagem das Operações com Números Inteiros? E na abordagem às frações?
- Terá sido a linguagem de conjuntos uma via eficaz para a compreensão de tópicos matemáticos?
- Quais os significados atribuídos às frações na sua abordagem?
- Quais os significados atribuídos à multiplicação e à divisão, na sua abordagem?
- Nos vários exemplos, a informação é acompanhada por esquemas ou simplesmente se utiliza uma linguagem formal?
- O manual é rico em exemplos, abrangendo diferentes contextos e significados?
- O significante e o significado apresentam-se devidamente diferenciados?

Na perspectiva da investigadora, que converge com o que é referido por Chopin, a análise de manuais só fará sentido depois de se estudar o currículo, o contexto legislativo e regulador que condiciona a estrutura e a produção do manual didático, bem como o contexto histórico da época no âmbito político, económico-social e das sucessivas reformas educativas. Estes assuntos serão aprofundados no capítulo 2 desta dissertação.



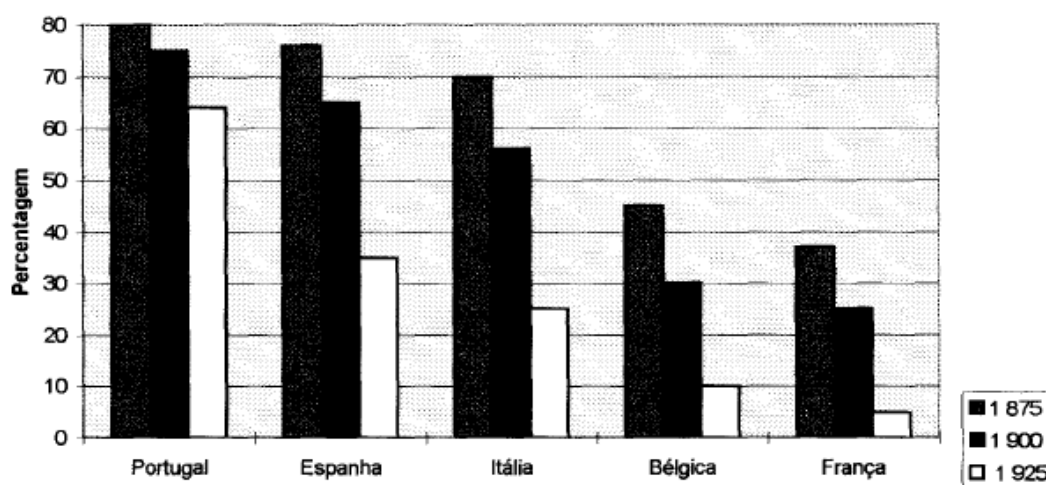
## CAPÍTULO 2 – ENQUADRAMENTO HISTÓRICO

### 2.1. O ENSINO DURANTE A MONARQUIA E A PRIMEIRA REPÚBLICA

Portugal foi o quarto país europeu a decretar o princípio da escolaridade obrigatória, concretamente em 1835, e o primeiro a lançar as bases para um sistema estatal de ensino. Porém, na prática, a esmagadora maioria das crianças e jovens portugueses não frequentavam a escola. O estado limitava-se a legislar mas descurava a execução das medidas anunciadas.

Deste modo, até ao segundo quartel do século XX, período de vigência da Monarquia e da Primeira República, as taxas de analfabetismo eram elevadíssimas, como se pode verificar no gráfico 2.1. Este permite ainda comparar a nossa situação com a de outros países europeus e constatar o atraso do sistema educativo português.

**Gráfico 2.1 – Evolução das taxas de analfabetismo em Portugal, Espanha, Itália, Bélgica e França, entre 1875 e 1925. Valores aproximados.**



Fonte: A. Nóvoa. História da Educação. Lisboa, 1994, in Teodoro, 1999, p. 84

As taxas de analfabetismo eram mais gritantes nos países do Sul e Leste europeu, mais pobres e rurais, onde predominava a religião católica ou ortodoxa. Porém, enquanto países como a Itália, Espanha e Grécia revelaram progressos no combate ao analfabetismo dos seus povos no início do século XX, Portugal estagnou, acentuando o seu atraso em relação aos restantes países europeus.

Jaime Reis tentando encontrar explicações que estivessem na base desse atraso, concluiu que as causas não se deviam a entraves materiais ou à falta de recursos humanos.

Pode-se mesmo dizer que não seria necessário sequer um esforço excepcional da vontade política nacional para ultrapassar uma barreira de tão reduzida dimensão [elevar para um nível sul-europeu], pois isso se conseguiria plausivelmente sem aumento de encargos fiscais (...) em 1907 existiam mesmo cerca de 1000 professores devidamente habilitados que não tinham colocação. (Reis, in Teodoro, 1999,p. 188)

As barreiras colocadas pelo Estado português na escolarização do seu povo, desde o século XVIII, deviam-se ao facto de se temer que uma população instruída pudesse revoltar-se contra as injustiças sociais. Conforme afirmava, em 1907, António José de Almeida, autor da primeira reforma republicana do ensino primário e futuro Presidente da República,

À Monarquia convém a ignorância e o boçalismo do povo. Depois dos crimes que ela tem praticado, instruir o povo é o mesmo que incitá-lo a que se revolte. [...] com a República e com a Liberdade está sempre a instrução e só com a reacção monárquica se dá bem e adapta a ignorância e a degradação intelectual dos povos. (citado em Teodoro, 1999,p. 184)

Durante a Primeira República, foram afastados do ensino membros de Ordens Religiosas, como a Companhia de Jesus, e pretendia-se que este fosse direccionado na inculcação de valores como o amor à Pátria inerentes ao espírito liberal republicano. Deu-se nesta altura a criação da instrução militar preparatória para jovens a partir dos 7 anos de idade e os assuntos relacionados com a Educação passaram da dependência do Ministério do Interior para o Ministério da Instrução Pública, criado em 1913. Na Primeira República, com a reforma da instrução primária, pretendia-se criar escolas infantis de frequência gratuita para crianças dos 4 aos 6 anos, escolas primárias elementares em todas as freguesias do país, tornar a sua frequência obrigatória sob penas aplicadas aos pais e chegou-se mesmo a criar escolas móveis para adultos.

Contudo, perante o estado de degradação das escolas, as dificuldades económicas sentidas pelas Câmaras Municipais responsáveis por parte da gestão dos estabelecimentos de ensino, e a própria vida das crianças e adultos das pequenas povoações que, pela sua ocupação diária em trabalhos rurais, facilmente esqueciam o que aprendiam, a execução dos projetos governamentais não teve as consequências positivas desejadas.

## 2.2. VISÃO GERAL DO ENSINO DURANTE O ESTADO NOVO

Apesar dos esforços dos governantes da Primeira República para aumentar as taxas de escolarização das crianças, a situação económica do país impediu que muitos dos projetos tivessem avançado.

Esse incremento só se terá verificado de modo significativo, nos primeiros níveis de ensino, durante o Estado Novo com António de Oliveira Salazar no cargo de Presidente do Conselho de Ministros desde 1932, apesar do orçamento do país permanecer reduzido.

O aumento significativo das taxas de escolarização verificado nos anos 30 ao nível do ensino primário só foi exequível graças à austeridade das medidas que Salazar aplicou com pulso de ferro:

- Redução da escolaridade obrigatória fixada em 5 anos desde 1919 na Reforma de Leonardo Coimbra, progressivamente para 4 anos em 1927 e finalmente para 3anos em 1930, que correspondia ao 1º grau do ensino primário.
- Desvalorização do estatuto profissional dos professores do ensino primário, diminuindo os seus vencimentos, proibindo organizações sindicais, associativas e mutualistas do professorado, reduzindo os planos de estudo das escolas que formavam docentes, recrutando livremente professores (regentes escolares) para leccionar nos diferentes postos escolares criados, a troco de uma pequena gratificação mensal, “que corresponde, no final da década de trinta, a 39% do vencimento mais baixo de um professor” (Adão, in Teodoro, 1999, p. 209).

Para Salazar, as crianças deviam frequentar a escola mais numa perspetiva de se moldarem ao regime, aprenderem a doutrina cristã e as bases do nacionalismo, do que propriamente para sua instrução. Deste modo, foi também decretada a simplificação dos programas de ensino em 1929, para entrar definitivamente em vigor em 1936, na reforma do ministro Carneiro Pacheco, de modo a poder enfatizar-se nas escolas o desenvolvimento de valores morais e o patriotismo.

Mas se foram tomadas medidas para elevar as taxas de escolarização no ensino primário, o mesmo não se pode dizer em relação aos outros graus de ensino. Por exemplo, o acesso ao ensino liceal era altamente selectivo, “correspondendo ao que João Barroso (1995) designa de uma política de "obstrução à procura do ensino liceal oficial, com a redução da oferta e o reforço dos mecanismos de selecção dos que pretendem matricular-se neste tipo de ensino"” (Teodoro, 1999,p. 92).

Após a Segunda Guerra Mundial, dada a grave crise económica em que os países da Europa mergulharam, a burguesia industrial-financeira em Portugal começou a ganhar algum domínio no plano de interesses até que a década de 60 do século passado foi apontada como “a década de ouro do crescimento económico” (Teodoro, 1999, p. 272).

A partir da Segunda Guerra Mundial, a administração central consciencializou-se de que seria necessário instruir a população, criar mão de obra qualificada profissionalmente, formar técnicos, especialistas, investigadores.

A evolução da estrutura social e as necessidades do mercado de trabalho obrigaram a uma crescente procura de educação no nível subsequente ao primário, “designada por expansão escolar” (Almeida & Matos, 2011).

Apesar de se reconhecer a importância do papel da Educação para fazer face a essas novas exigências, as políticas educativas foram cautelosas, temendo que a escolarização provocasse o abandono dos campos pela população agrícola ou a aspiração a um nível de vida melhor por parte da população escolarizada. Justificam-se assim as políticas de difusão dos postos escolares nos meios rurais para travar a polarização demográfica para os centros urbanos, o que colocaria em causa o setor agrícola.

Os Ministérios de Mário de Figueiredo (1940-1941) e Caeiro da Mata (1944-1947) caracterizaram-se, desse modo, por uma continuidade das políticas educativas dos anos 30. Já nos governos de Pires de Lima (1947-1955) e Francisco Leite Pinto (1955 – 1961), ocorreu uma viragem nos objetivos das políticas de Educação, substituindo-se a concepção de sistema de ensino centrada na doutrinação ideológica e no patriotismo, pela visão da sua utilidade na qualificação de recursos humanos num país predominantemente industrializado.

Três momentos ilustram essa *viragem*: (1) a reforma do ensino técnico profissional, de 1948; (2) o Plano de Educação Popular (1952-1956), nas suas vertentes de cumprimento da obrigatoriedade escolar pelas crianças e de combate ao analfabetismo adulto; e, (3) a acção política geral do ministro Leite Pinto (1955-1961) e, em particular, o seu discurso mobilizador na defesa de uma *educação para todos* enquanto condição do desenvolvimento económico. (Teodoro, 1999, p. 223, itálico no original)

O primeiro momento de viragem das políticas educativas do Estado Novo é referente à criação do ciclo preparatório do ensino técnico, de carácter geral, que preparava os alunos para um 2º grau composto por vários cursos de aprendizagem, de formação e de aperfeiçoamento profissional.

O segundo momento corresponde à publicação e aprovação, em 1952, do Plano de Educação Popular que considerava dois objetivos: diminuir as taxas de analfabetismo da população adulta e tornar exequível o cumprimento efetivo da escolaridade obrigatória, fixada em 3 anos. Para a sua consecução, aplicaram-se várias medidas, nomeadamente, uma melhor regulamentação e funcionamento dos serviços relacionados com a Educação, atribuição de abono de família apenas aos que cumprissem a escolaridade obrigatória, admissão a exame de condução automóvel apenas a quem possuísse exame da 3ª classe; impedimento da admissão na função pública a quem não se tivesse submetido a exame da 3ª ou da 4ª classe, entre outras.

Graças a estas medidas, conseguiu-se que, em 1955, apenas uma taxa residual de 1% das crianças resistisse a frequentar a escola, como consta na tabela (Carvalho, 2001, p. 793):

**Tabela 2.1 – Evolução do número de alunos inscritos no ensino primário. 1911 – 1955.**

Anos	População de 7 a 11 anos	Crianças sem ensino dos 7 aos 11 anos	Porcentagem
1911	670 168	532 112	79,4
1930	707 971	517 604	73,1
1940	813 230	376 018	46,2
1950	768 271	156 219	20,3
1955	858 800	8 891	1,0

Porém, o país continuava a evidenciar uma triste realidade no respeitante ao analfabetismo nos adultos, ao insucesso escolar e à frequência reduzida noutros graus de ensino.

O terceiro momento de viragem dá-se já no Ministério de Leite Pinto em que “A Educação surge agora como factor decisivo da evolução progressiva da Economia” (Carvalho, 2001, p. 795).

“Embora perfeitamente identificado com o Estado Novo e os seus valores, Francisco de Paula Leite Pinto era uma personalidade com características substancialmente diferentes das dos seus antecessores no Ministério da Educação Nacional” (Teodoro, 1999, p. 238).

Leite Pinto projetou a elaboração do Plano do Fomento Cultural, solicitando o auxílio técnico e financeiro à Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económicos (OCDE, que se designava por OECE até 1961), propondo ainda a extensão desse projeto a vários países mediterrâneos (Espanha, Itália, Grécia, Turquia e Jugoslávia), também atrasados no seu sistema educativo. Com a cooperação dos vários países envolvidos foi então elaborado um plano comum designado “Projecto Regional do Mediterrâneo”.

Segundo Ferreira (2003, p. 16), a partir dos anos 50, verificou-se uma crescente concentração de capital estrangeiro em Portugal, principalmente com a entrada na NATO e na OECE e com o acordo bilateral estabelecido com os EUA em 1948. Fizeram-se sentir os efeitos dessas organizações internacionais também no campo educacional, sobretudo com a origem do Projeto Regional do Mediterrâneo, impulsionado por Leite Pinto. Esta integração e participação de Portugal nas organizações internacionais, a par da industrialização do país, motivou o surgimento de setores desenvolvimentalistas no seio de Regime de Ditadura do Estado Novo (Matos, 2009), que conduziram à expansão escolar e escolarização das massas, com aumento da escolaridade obrigatória, e posteriormente à democratização da educação. As recomendações internacionais da ONU, através da Declaração Universal dos Direitos do Homem (1948) e da Convenção Europeia dos Direitos do Homem (1956), apelavam ao direito e dever da educação de todos, como sendo um meio de libertação do homem e de justiça social (Ferreira, 2003, p. 17).

O Ministro Leite Pinto apenas conseguiu estender a escolaridade obrigatória de 3 para 4 anos, inicialmente só para indivíduos do sexo masculino, com o decreto-lei nº 40 964, de 31 de Dezembro de 1956, conseguindo que a frequência de rapazes no ensino primário estivesse rapidamente “muito

próxima da universalidade” (Teodoro, 1999, p. 240). Quatro anos depois, esse princípio foi também alargado às raparigas com o decreto-lei nº 42 994, de 28 de Maio de 1960.

Também alargou até à 4ª classe o ensino de adultos, não obstante as suas intenções generosas.

“ Mesquinha vitória essa de quem pretendia captar a atenção, a simpatia e o auxílio das entidades estrangeiras para que nos ajudassem a aproximar-nos do mundo ocidental!” (Carvalho, 2001, p. 796). Deve-se isto ao facto de as políticas de Leite Pinto não terem sido muito do agrado de Salazar. O Ministro da Educação representava o setor desenvolvimentalista do Regime (Sampaio, in Ferreira, 2003, p. 17) e a sua política emancipadora da sociedade civil (Ferreira, 2003, p. 15) era vista como desviante da conduta de orientação do Estado Novo.

Para repor o tradicionalismo e o fechamento ideológico do Regime, Salazar voltou a procurar os seus Ministros da Educação entre os setores mais conservadores das Universidades. Sucedem então os Ministros Lopes de Almeida (1961-1962) e Inocêncio Galvão Teles, catedrático de Direito na Universidade de Lisboa, empossado em 1962.

Dando continuidade ao relatório de carácter introdutório designado “Análise Quantitativa da Estrutura Escolar Portuguesa”, que reportava a 1950-1959, foi elaborado e tornado público, em 1964, outro relatório do Projeto Regional do Mediterrâneo, “Evolução da Estrutura Escolar Portuguesa”, novamente com o auxílio técnico e financeiro da OCDE., onde se constatou o estado crítico do ensino em Portugal:

(...) elevada taxa de analfabetismo, reduzida frequência de alunos em todos os graus, baixíssimo aproveitamento escolar, falta de professores, de instalações e de material, e tudo o mais que possa imaginar-se, sem haver um único aspecto em que a situação se pudesse considerar aceitável. A *Análise* reportava-se aos anos de 1950 a 1959; A *Evolução* actualizava os dados aí colhidos, acrescentava-lhes os que se tinham obtido de 1959 a 1964 e, a partir de todos eles, previa as necessidades para 1975, a fim de que nessa data se tornasse possível alcançar os níveis europeus em matéria de ensino. (Carvalho, 2001, p. 806, itálico no original).

Dada a caducidade do sistema escolar, os números que davam resposta a questões que se levantavam, nomeadamente no que dizia respeito ao sucesso escolar dos alunos, à formação de professores, ao investimento a efetuar com a Educação, à criação de novos estabelecimentos de ensino para comportar o crescente número de alunos, eram alarmantes, mediante as metas propostas para 1975. Tornava-se então necessário reformar o sistema de ensino e traçar objetivos concisos, reunindo todos os esforços para alcançar essas metas.

O Ministro da Educação, Galvão Teles, considerava dois aspectos distintos, relativamente ao planeamento proposto:

(...)um, qualitativo, cujo objectivo principal seria a promulgação de um Estatuto da Educação Nacional, “ carta magna do ensino”, “fiel às grandes constantes do Cristianismo e da Lusitanidade, mas modernizado em função das exigências do presente e das tendências do provir”; e outro, quantitativo, onde estariam inseridas, com predominância, as preocupações de índole económica. (Carvalho, 2001, p. 798)

O ênfase dado às questões do “Cristianismo e da Lusitanidade” devem-se à preocupação de todo esse processo de modernização no campo educacional não se desviar das ideologias do Estado Novo. Nesse sentido, Galvão Teles salvaguarda na introdução ao Projecto Regional do Mediterrâneo, que “Não deve a educação subordinar-se inteiramente à economia, porque tem fins superiores que transcendem a mera produção de bens, e deve tender, primeiro que tudo, ao enriquecimento espiritual da personalidade.” (in Carvalho, 2001, p. 799)

Porém, o Sistema Educativo via-se confrontado com a necessidade de procurar novas formas de inculcação ideológica através, nas palavras de Ralph Turner, de “uma maior competição e selecção, de modo a favorecer uma representação meritocrática da hierarquia social”, e motivando a transição de uma “mobilidade social herdada para uma mobilidade social conseguida”, rompendo com o princípio “Deus, Pátria, Família”, materializado na Reforma Carneiro Pacheco (1936) (Ferreira, 2003, p. 17).

Em 1964, ainda no Ministério de Galvão Teles, foi publicado o decreto-lei nº 45810 que decretou o alargamento da escolaridade obrigatória para 6 anos, que se estendia agora a ambos os sexos. O Ensino Primário, estruturava-se em dois ciclos: o elementar, de 4 anos, e o complementar, com mais 2 classes. Este último estruturava-se em três vias diferentes: o 1º ciclo liceal, que preparava os alunos para o prosseguimento de estudos, com acesso ao curso geral do ensino liceal; o ciclo preparatório do ensino técnico; e o ciclo complementar do ensino primário, destinado apenas aos alunos que não pretendiam prosseguir os seus estudos no ensino secundário.

### **2.3. CRIAÇÃO DO CPES**

Com a publicação do decreto-lei nº47480 de 2 de Janeiro de 1967, o Ministro Galvão Teles pretendia unificar o 1º ciclo liceal e o ciclo preparatório do ensino técnico. No decreto supra-citado, as razões da criação do CPES radicam na necessidade de “completar e ampliar a formação de base obtida no ciclo elementar do ensino primário, em ordem a fornecer uma preparação geral adequada ao prosseguimento de estudos em qualquer ramo do ensino secundário;” e “orientar os alunos na escolha dos estudos subsequentes a partir da observação de suas tendências e aptidões” (p. 2).

Esta intenção fora manifestada inicialmente pelo ministro Leite Pinto (1955-1961).

Nos anos 40, Leite Pinto integrava a Comissão de reforma do ensino técnico e foi apontado como o principal mentor das propostas então apresentadas. Destas, a mais relevante foi a “criação do ciclo preparatório, com um carácter preponderante de formação geral e de orientação, na perspectiva de um futuro prolongamento e unificação da escolaridade obrigatória para 6 anos” (Teodoro, 1999, p. 224).

Segundo Grácio, “não deixa de ser notável se levarmos em conta que a reforma é concebida numa época em que, como sabemos, a restrição nas despesas e a modéstia das realizações são ainda a regra, e em que levará ainda muito tempo para que a 4ª classe - necessária para o ingresso no ensino técnico - seja definitivamente incluída na escolaridade obrigatória.” (in Teodoro, 1999, p. 224).

Para Leite Pinto, o progresso e crescimento económico verificado em diversos países europeus após a Segunda Guerra Mundial, devia-se essencialmente ao investimento realizado na massificação da educação e no prolongamento da escolaridade obrigatória.

sendo o desenvolvimento económico no fundo a busca do aumento da produtividade, ou seja a baixa dos custos, tem de se assegurar pela melhoria das técnicas e pela melhoria da aptidão da mão-de-obra. [...] Não se confia a um homem boçal o manuseamento de uma máquina projectada, elaborada e fabricada por centenas de homens inteligentes e competentes.

Por isso todos, absolutamente todos, os países desenvolvidos se esforçam por alargar o período do ensino obrigatório. (Leite Pinto, in Teodoro, 1999, p. 239)

Segundo a orientação apontada por Leite Pinto ao Diretor do Centro de Estudos de Estatística Económica do Instituto de Alta Cultura, Alves Martins, para a elaboração do Projecto Regional do Mediterrâneo, o prolongamento da escolaridade obrigatória para 6 anos implicava necessariamente a criação de um “ciclo comum aos ensinos secundários” (citado em Teodoro, 1999, p. 241), ou seja, a unificação dos ciclos preparatórios dos ensinos secundários.

Como já foi referido, as condições políticas não permitiram a concretização dos projetos de Leite Pinto, de modo que apenas conseguiu o alargamento da obrigatoriedade escolar para 4 anos.

O prolongamento para 6 anos verificou-se posteriormente, em 1964, no Ministério de Galvão Telles, mas em condições substancialmente distintas das que eram defendidas por Leite Pinto. Após o cumprimento da 4ª classe, mantinham-se as duas tradicionais vias, o 1º ciclo liceal e o ensino técnico elementar, tendo-se acrescentado uma terceira via, o ciclo complementar do ensino primário. Segundo Galvão Telles “a ascensão cultural das massas [...] pode fazer correr o sério risco de estrangulamento ou abafamento do escol intelectual” (Telles, in Teodoro, 1999, p. 241).

Porém, é ainda no Ministério de Galvão Telles que é finalmente decretada a unificação dos Ciclos. Com base na literatura analisada, permito-me apontar duas causas que terão levado Galvão Telles finalmente a decretar o CPES: evitar que o aluno fosse obrigado a optar, em idade tão precoce, pelo ramo técnico ou de prosseguimento de estudos no ensino secundário (Decreto-lei nº47480 de 2 de Janeiro de 1967); e o facto de a Telescola, criada em 1964 para alunos de meios mais rurais, conter no

seu plano de estudos disciplinas do Ciclo Preparatório do Ensino Técnico mas também a disciplina de Francês que apenas pertencia ao currículo do 1º ciclo liceal.

A Portaria nº 21.113, de 17 de Fevereiro de 1965, estabelece que o curso ministrado na Telescola deverá ser composto pelas disciplinas (e respectivos programas) que constituíam o Ciclo Preparatório do Ensino Técnico Profissional, acrescidas pelo Francês (com o programa do 1.º ciclo liceal) e a Portaria nº 21.358, de 26 de Junho de 1965, deu-lhe a designação de *Curso Unificado da Telescola* (CUT) que se vai manter até 1968 (Matos& Almeida, 2012, p. 7).

Por ser a Telescola uma inovação do ensino em Portugal, e, por constituir uma via comum de acesso ao ensino secundário, induziu a título experimental a unificação do 1º ciclo dos liceus e do ciclo preparatório do ensino técnico.

O Estatuto do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário é então aprovado, com a publicação do decreto-lei nº 48572 de 9 de Setembro de 1968, já no Ministério da Educação Nacional de José Hermano Saraiva. Note-se que entre as intenções de Leite Pinto na criação do CPES e a sua efetiva implementação decorreram pelo menos 8 anos. As razões deste atraso, permitem Ferreira (2003, p. 15) apontar, de modo especulativo, o facto de se temer que uma reforma a esse nível pudesse desencadear debates de ideias que comprometessem a “unidade nacional”, numa época de instabilidade política motivada pela guerra colonial. Explicar-se-á deste modo, o corte social e epistemológico com a política emancipadora da sociedade civil que Leite Pinto iniciara (Ferreira, 2003, p. 15).

A partir de 1 de Outubro de 1968, as escolas técnicas elementares e secções dos liceus que funcionavam fora da escola sede, seriam transformadas em “escolas preparatórias”, de modo a existir pelo menos uma por concelho. Estas começaram então a funcionar em edifícios próprios ou integradas nos edifícios das escolas Secundárias.

O Ciclo Preparatório do Ensino Secundário era composto por 2 anos e para lhe acederem, os alunos teriam de ser aprovados no exame da 4ª classe. Na maioria das escolas havia separação de sexos, todavia, nas escolas mistas salvaguardava-se que as turmas fossem constituídas por elementos do mesmo sexo.

A obtenção da habilitação correspondente ao Ciclo Preparatório era feita mediante a aprovação em exame de final de ciclo, caso o aluno não pretendesse prosseguir estudos, ou por aprovação em exame de aptidão a um ramo do ensino secundário (liceal ou técnico).

Para além do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, a frequência dos dois anos que sucediam a 4ª classe para cumprimento da escolaridade obrigatória também podia ser feita pela via do Ciclo Complementar do Ensino Primário, para quem não pretendesse prosseguir os estudos. Os alunos podiam permutar do Ciclo Preparatório para o Ciclo Complementar do Ensino Primário livremente. Porém, o contrário só se tornava possível por aprovação em exame de acesso.

## 2.4. REFORMA VEIGA SIMÃO

Até ao momento, o Estado era totalitário, e o poder centrava-se na figura de Salazar, através do controlo das finanças públicas.

Dada a incapacidade física de Salazar para continuar a governar o país, o Chefe de Estado, Américo Tomás indigitou, em 1968, para o cargo de Presidente do Conselho de Ministros, o professor catedrático da Faculdade de Lisboa, Marcelo Caetano, uma figura de destaque na política nacional. Ao contrário do seu antecessor, o poder de Caetano era exercido a partir de um planeamento económico moderno, visando tornar Portugal num país mais competitivo: defendia a iniciativa privada, apostava no incremento da industrialização do país, e na criação de fortes grupos económicos.

Embora se manifestasse contra as políticas liberais, Marcelo também discordava da concentração do poder na figura do Chefe de Estado.

Marcello Caetano, no seu ensino universitário de Ciência Política e de Direito Constitucional, criticava claramente as "democracias liberais" e, mais ainda, os "Estados totalitários", procurando encontrar um meio termo entre esses dois modelos, que correspondia ao Estado autoritário, corporativista, sem partidos, respeitador das "liberdades essenciais" (vida, religião, família, propriedade privada, etc.), mas assente na negação ou forte condicionamento das chamadas "liberdades instrumentais" (liberdade de imprensa, partidos políticos, sindicatos livres, etc.). Esse tipo de Estado não cairia nos excessos desumanos do totalitarismo - por isso teria de ser um "Estado da legalidade" -, mas também não permitiria que Portugal voltasse a cair na desordem anarquizante da Monarquia constitucional e da República liberal - e por isso seria um Estado forte, não parlamentar, não liberal, sem partidos e com censura a imprensa e polícia política. (Amaral, in Teodoro, 1999, p. 278)

No campo educacional, o Ministro da Educação José Hermano Saraiva abandona o projecto de "Estatuto de Educação Nacional" de Galvão Telles, por discordar do seu carácter fortemente doutrinário, com uma visão demasiado formalista e uma excessiva carga ideológica e religiosa, bem como do seu carácter genérico. A Reforma de Hermano Saraiva assentava, segundo Protes da Fonseca, na "prévia identificação e posterior tratamento específico das questões nucleares da Educação" (in Teodoro, 1999, p. 295), manifestando-se contra uma lei global de toda a Educação.

Em 1970 ocorreu o afastamento do Ministro Hermano Saraiva por não estar em condições de fazer da Educação "um sector emblemático da evolução" (Teodoro, 1999, p. 296), como pretendia o Presidente do Conselho de Ministros, Marcelo Caetano e sobretudo devido às divergências entre Saraiva e Caetano pelo facto do ensino universitário não constituir uma prioridade para o Ministro da Educação. Na opinião de Hermano Saraiva, a universidade representava apenas "a última etapa do

caminho", situando-se os "problemas fundamentais do nosso sistema de ensino" nos "níveis primário, secundário e médio" (Saraiva, in Teodoro, 1999, p. 299).

Estas intenções estavam em total desacordo com Marcelo Caetano que “como professor e antigo reitor universitário, fosse sensível às críticas de sectores universitários que não viam com bons olhos que uma personalidade não oriunda dos meios universitários estivesse a frente do Ministério da Educação Nacional.” (Teodoro, 1999, p. 298).

Sucedo então a Hermano Saraiva, para a pasta de Ministro da Educação Nacional, José Veiga Simão, professor da Universidade de Coimbra e antigo Reitor da Universidade de Lourenço Marques, em Moçambique.

O principal propósito do novo Ministro era a democratização do Ensino.

A educação é o problema cimeiro, a alma motora, o meio consciencializante, por excelência, desse espírito revolucionário. Na verdade, ele procura, na sua plena democratização, uma estrutura criadora e dinamizante, em que se apoie uma sociedade mais justa e mais perfeita. (Simão, in Teodoro, 1999, p. 299)

Veiga Simão retoma o projecto de reforma geral do ensino de Galvão Teles, mas ao contrário deste, que se elaborou de “porta fechada” apenas pela Junta de Educação Nacional e por especialistas convidados pelo então Ministro, Veiga Simão submeteu o seu projeto a uma análise crítica por parte de todos os portugueses.

Veiga Simão divulgou dois documentos: o Projecto do Sistema Escolar e Linhas Gerais da Reforma do Ensino Superior. Os objetivos destes projetos eram “fomento da educação pré-escolar, prolongamento da escolaridade obrigatória, reconversão do ensino secundário, expansão e diversificação do ensino superior” (Teodoro, 1999, p. 302).

Uma das prioridades da política de Veiga Simão foi o Ensino Preparatório, pelo facto de, na sua lei nº5/73 de 25 de Julho, o Ministro pretender o aumento da escolaridade obrigatória para 8 anos, acompanhando já com um certo atraso as tendências europeias.

O sistema de educativo passaria então a abranger a educação pré-escolar, institucionalizada por este decreto; a educação escolar que era composta pelo ensino básico, constituído por 4 anos de Ensino Primário e outros 4 anos de Ensino Preparatório, ambos com uma estrutura unificada, ou seja, com o mesmo plano de estudos para todos os alunos; o ensino secundário (composto por um ciclo de carácter geral e outro complementar, com a duração de 2 anos cada um); o ensino superior e a formação profissional.

Veiga Simão chegou a lançar em 1972-1973 o 3º ano experimental em 19 escolas, cada uma com 3 turmas, sob o pretexto de experiências pedagógicas.

Em 1973-1974 lançou também o 4º ano experimental, envolvendo as mesmas turmas das 19 escolas, e alargou o 3º ano para 38 escolas.

Veiga Simão recorreu ainda a um grupo de trabalho constituído na sua maioria por professores no activo para preparar o lançamento do 3º e 4º anos do ensino preparatório, seleccionados, não pelas suas crenças políticas, mas pela competência científica e pedagógica. A esse grupo de docentes foram atribuídas as responsabilidades de elaborar uma proposta de plano curricular; definir objetivos, conteúdos, indicações metodológicas, meios e instrumentos de aprendizagem; planificar ações de apoio aos docentes, nomeadamente colóquios, textos e fichas; indicar bibliografias, etc, registando-se inovações significativas nos programas e nas metodologias.

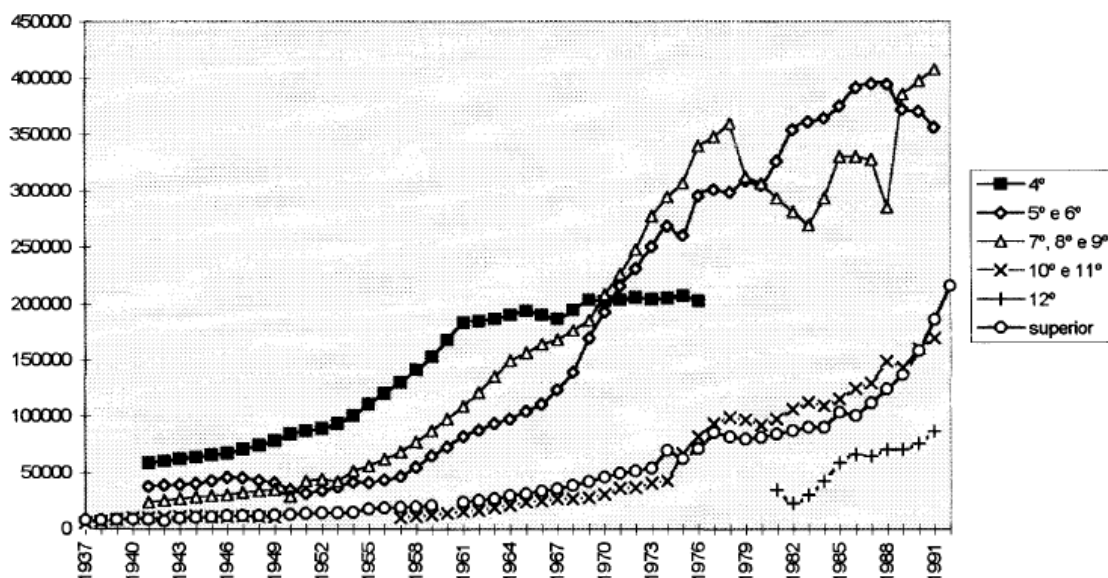
Da *experiência* não foi feita avaliação rigorosa, mas certas observações empíricas - designadamente as comunicadas em um seminário da OCDE/CERI sobre a *gestão da inovação na educação* -, permitem registar inovações significativas nos programas e nos métodos, nas atitudes e comportamentos dos professores e dos alunos. Nestes foi realçada a capacidade de intervenção crítica em relação a escola e a sociedade, o recuo do espírito de competição em favor do de cooperação, as práticas de actividades de pesquisa (observação de campo, análise documental e bibliográfica). (Grácio, in Teodoro 1999, p. 307, itálico no original)

A Reforma Veiga Simão revelou-se de grande importância no impulsionar do desenvolvimento da Educação, para a consecução dos objetivos delineados para 1975. Num balanço feito em 1973, Veiga Simão afirmou:

Nos últimos quatro anos criaram-se 6400 escolas do ensino primário, 180 do Ciclo Preparatório directo, 280 postos oficiais da Telescola, 79 liceus ou secções do ensino liceal, 51 escolas ou secções do ensino técnico e 9 escolas do magistério primário; que nos últimos três anos tinham entrado mais de 100 000 alunos no conjunto dos estabelecimentos de ensino nacionais e se tinham formado mais de 1100 professores do ensino primário; que entre 1969 e 1972 o número de professores que tinham adquirido anualmente a sua formação pedagógica nos estágios fora de 170 para 732 no Ciclo Preparatório, de 164 para 435 no ensino liceal, e de 121 para 264 no ensino técnico; que se previa, para breve, a fundação de mais 4 Universidades, 11 Institutos Politécnicos e 9 Escolas Normais Superiores; que o orçamento global do Ministério da Educação fora de 1 900 000 contos em 1967, e era de 6 000 000 em 1973. (Carvalho, 2001, p. 812)

O gráfico 2.2 ilustra o crescimento de escolarização dos jovens portugueses, permitindo comparar a evolução durante a Reforma Veiga Simão, a época que a antecedeu e os anos subsequentes.

**Gráfico 2.2 – Evolução do número de matriculados nos ensinos oficial e particular, na 4ª classe, nos 5º e 6º anos, nos 7º, 8º e 9º anos, nos 10º e 11º anos, no 12º ano e no ensino superior. 1937 - 1992**



Fonte: S. Grácio. Destinos do Ensino Técnico em Portugal (1910-1990). Lisboa, 1992. In Teodoro, 1999, p. 259

Denota-se uma subida acentuada na frequência do Ciclo Preparatório e do 7º, 8º e 9º anos de escolaridade. O mesmo não se registou nas últimas etapas do ensino, bem como na frequência da 4ª classe, possivelmente devido à perseverança de Veiga Simão em relação ao alargamento da escolaridade obrigatória até aos 8 anos, sendo canalizados os investimentos naqueles níveis de ensino.

A lei nº5/73 não chegou a ser regulamentada devido à revolução do 25 de Abril de 1974, mantendo-se a escolaridade obrigatória nos 6 anos, conforme o modelo anterior.

No entanto, a Reforma Veiga Simão colocou a Educação no centro dos debates sobre o desenvolvimento e modernização do país, abalando as estruturas do Estado Novo. O discurso e as ações do Ministro da Educação provocaram grande alarmismo entre os defensores mais ortodoxos do Regime Ditatorial, que tentaram dificultar o avanço das reformas anunciadas.

Além disso, alguns peritos portugueses e estrangeiros manifestaram-se apreensivos relativamente ao carácter contraditório da Reforma, cujos objetivos não se coadunavam no contexto político e social português. Deste modo, foram muitas as vozes críticas que se levantaram:

O reformismo oficial raciocinou como se se pudesse isolar a escola do contexto sociopolítico do país, como se a condição económica das famílias fosse indiferente ao acesso à escola, como se o trabalho infantil fosse hábito sem raízes, como se se dispusesse de uma eficiente rede de transportes, como se a precariedade higiénica do meio e a subalimentação fossem conciliáveis com um bom rendimento escolar, como se os irresistíveis recursos técnicos da televisão não

estivessem assegurando ao poder um crescimento rápido da deseducação institucionalizada, como se a opressão social traduzisse realidade despicienda quando se trata de colocar a pedagogia ao serviço da emancipação do homem, como se a discriminação política se compatibilizasse com a cultura ou se tomasse susceptível de escamoteamento por via de declarações oficiais, como se um clima de liberdade houvesse de inspirar as escolas de um país sujeito a violenta ditadura. (Cardia, in Teodoro, 1999, p. 311)

“Ao nível das diferentes correntes da Oposição Democrática, a acção de Veiga Simão fora recebida, desde cedo, com o sublinhado da sua contradição insanável: "a democratização do ensino só pode efectivar-se numa sociedade democrática" (Santos Simões, 1971, p. 24), ou, "uma democratização sem democracia" (J. Amaral Nogueira, in Nogueira, Lopes, Castro & outros, 1976, p. 28), ou ainda, como didacticamente explicava Rui Grácio (1980 [1973]), "entre nós o problema essencial do sistema de ensino é o político"(p.19)” (Teodoro, 1999, p. 311).

Mais do que uma reforma radical da estrutura do ensino, pretende-se, pois, reajustar o sistema ao nível das exigências da expansão económica, embora, pelo menos no plano das intenções, alguma concessão se tenha feito às reclamações do pensamento democrático. (Femandes, in Teodoro, 1999, p. 312)

Perante o carácter contraditório desta Reforma e o efeito não desejado pelo sistema político do Regime, Marcelo Caetano foi abandonando aos poucos o apoio à acção de Veiga Simão e os seus propósitos de democratização do ensino. O isolamento político de Marcelo levou-o à aceitação das pressões para a substituição do Ministro da Educação. Assumiu então este cargo, o Reitor da Universidade de Lisboa, Veríssimo Serrão, um conservador e crítico feroz da liberalização do ensino.

Mas a crescente onda de revolta silenciosa contra o Regime de Ditadura já não podia ser abafada. A Reforma Veiga contribuiu bastante para a abertura de alguns diques, na sua intenção de democratizar o ensino, dando voz ao povo e pondo em causa a infalibilidade das autoridades que presidiam a Nação, ou seja, tornando evidente a necessidade de democratização da sociedade.

Foi nestas circunstâncias que se deu a revolta de 25 de Abril de 1974. A Reforma Veiga Simão foi portanto um importante impulsor da mudança, atuando essencialmente ao nível do Ciclo Preparatório,

as medidas inovadoras neste troço da escolaridade constituem "um fio de continuidade na rotura que separa a ditadura da democracia" não apenas na "analogia do sopro da inspiração" mas também na "identidade, palavra a palavra, de muitas das proposições verbais". (Grácio, in Teodoro, 1999, p. 307).

## 2.5. A MATEMÁTICA NO CPES

A lei nº5/73 publicada aquando do Ministério de Veiga Simão, pouco acrescenta ao que já fora decretado em 1967 e 1968, para além da extensão do Ciclo Preparatório para 4 anos de escolaridade, que implicava que a escolaridade obrigatória se prolongasse para 8 anos, e da formalização da democratização do ensino numa perspetiva meritocrática, ou seja, “assegurar a todos os Portugueses o direito à educação(...) sem outra distinção que não seja a resultante da capacidade e dos méritos de cada um” e “tornar efectiva a obrigatoriedade de uma educação básica generalizada” (lei 5/73, Base II, a, b).

aquela escola que Galvão Teles queria como selecção do “escol intelectual” e mantenedora do racionalismo académico foi-se transformando, lentamente, em Escola de Massas, pela subversão que a sociedade civil operara, a nível cultural, estabelecendo o princípio de que a educação básica não só era fundamental na obtenção de emprego e de posição social, mas também que era um bem essencial a todos os indivíduos. Isto permitiu a deslocação da função ideológica da educação para a sua função económica, abrindo o caminho à democratização da educação e da sociedade. (Ferreira, 2003, p. 21-22)

No século XX, a matemática leccionada nas escolas tornou-se mundialmente o centro das atenções de vários matemáticos, evidenciando-se a necessidade de repensar o seu ensino.

No final da década de 50 do século XX, foi criada uma proposta de internacionalização do ensino da Matemática designada Movimento da Matemática Moderna, que contou com o apoio da UNESCO e da OECE.

Neste sentido, os vários países envolvidos, incluindo Portugal, realizaram uma série de experiências pedagógicas e estimularam a produção de livros didáticos e compêndios para apoiar essas experiências.

Segundo Matos (2009), a Reforma da Matemática Moderna em Portugal divide-se em três períodos:

- O **início** da sua implementação, de 1957 a 1963. Foram nomeados pelo governo português para participar no 11º encontro da *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM) quatro delegados, nomeadamente: José Sebastião e Silva, que se veio a tornar o mais conhecido líder da Reforma da Matemática Moderna em Portugal; José Calado; Jaime Furtado Leote; e Santos Heitor, aos quais foi atribuída a competência de metodólogos, ou seja, a responsabilidade de promover os cursos para docentes de Matemática, bem como a redacção dos manuais e compêndios de apoio a essas experiências.

- A fase de **experimentação** decorrida entre 1963 e 1968, apesar de já se terem realizado experiências pedagógicas em 1961, numa escola privada do ensino primário. As experiências prosseguiram em 1963 no 3º ciclo liceal cuja Comissão era constituída por Sebastião e Silva, Jaime Leote, Manuel Augusto da Silva e Augusto Lopes. Em 1964, foi criada a Telescola, na qual se experimentou a Matemática Moderna, constituindo “a primeira generalização de um programa de Matemática Moderna dedicado a ciclos pós-primário” (Matos & Almeida, 2012, p. 2), e finalmente, nas escolas técnicas em 1968.
- A **disseminação** da Matemática Moderna, desde 1968, com a criação do CPES que incluía os princípios da Matemática Moderna no seu programa.

Joaquim Simões Redinha, inspetor do 4º Grupo disciplinar que incluía Matemática e Ciências da Natureza, num texto enviado para as escolas preparatórias em Janeiro de 1969, designado “Algumas notas de pedagogia da matemática”, identifica como “Causas dos fracassos escolares directamente ligados à escola: 1) Insuficiência do conhecimento das estruturas básicas”, referindo que um dos erros cometidos pelo ensino tradicional da Matemática se devia à sobrevalorização da mecanização do processo de resolução de certo tipo de problemas; “2) a atitude passiva do aluno”, em que não se estimulava a sua reflexão e espírito crítico; “3) a falta de coordenação entre os níveis mentais e os assuntos ensinados; 4) descoordenação entre o pensamento e a escrita” (Wielewski & Matos, 2009, p. 8)

Segundo José M. Matos (2009), a Matemática Moderna provocou transformações na cultura matemática de escola em 4 dimensões:

- **Na natureza da aprendizagem**, segundo uma perspectiva construtivista, apesar de esta já ser estudada na formação de professores em Portugal pelo menos desde os anos 30. Segundo Calado (in Matos, 2009), o ato de aprendizagem deve ser um ato criativo, não meramente recetivo de informação.
- **Nos conteúdos da matemática escolar**, que serão analisados com mais detalhe nesta dissertação.
- **Nas metodologias de ensino da Matemática**: era enfatizado o método heurístico que, segundo Jaime Leote (in Matos, 2009), desperta o desenvolvimento intelectual do aluno, levando-o a construir as suas próprias aprendizagens, não se limitando a aceitar o que lhe é imposto como verdadeiro por parte do professor. O recurso a materiais manipuláveis, bem como o trabalho em grupo foram também princípios metodológicos impulsionados pela Matemática Moderna.
- **No papel da Matemática na sociedade**. Segundo Sebastião e Silva (in Matos, 2009), uma Nação moderna precisa de cientistas e técnicos com uma boa formação matemática. Ocorreram também alterações ao nível da linguagem que Calado defendia referindo que se deve familiarizar

desde logo os estudantes com o rigor da linguagem matemática evitando que o estudante se depare com termos totalmente desconhecidos ao ingressar no ensino superior. (in Matos, 2009).

A difusão e implantação da Matemática Moderna nas escolas implicou a formação do pessoal docente nesse sentido, através de cursos anuais com a duração de 15 dias. Esses cursos e a publicação do Decreto-Lei nº 47 587 de 10/3/1967 que oficializa a realização de experiências pedagógicas em Portugal, conduziram à elaboração de um novo programa de Matemática.

A Portaria nº 23 601, publicada no diário do Governo em 1968, aprova os novos programas para o CPES instituído pelo Decreto-Lei nº 47 480. Consta daquele documento que “a actualização do ensino de uma disciplina terá que ser encarado sob um duplo aspecto: o da forma e o do conteúdo”.

O decreto nº 48 572 de 9 de Setembro de 1968, estruturava as disciplinas do CPES em conjuntos letivos (artigo 5º):

A – “Formação espiritual e nacional” (Língua Portuguesa, História e Geografia de Portugal e Moral e Religião);

B – “Iniciação científica” (Matemática e Ciências da Natureza);

C – “Formação plástica” (Desenho e Trabalhos Manuais);

D – “Actividades musicais e gimnodesportivas” (Educação Musical e Educação Física);

E – “Línguas estrangeiras” (Francês ou Inglês).

Legitimava-se, deste modo, a rutura com os preconceitos que distinguiam as disciplinas académicas (atividades intelectuais) das técnicas e práticas (atividades manuais), considerando-se ambas as vertentes fundamentais para o desenvolvimento da personalidade dos alunos.

Segundo o Decreto-Lei nº48 572 de 9 de Setembro de 1968 (artigo 7º), o ensino das diferentes disciplinas deve obedecer aos seguintes princípios orientadores, tanto ao nível da execução dos programas como nas metodologias:

- Ter um carácter essencialmente activo e prático visando desenvolver as capacidades do aluno, o seu espírito de observação, a imaginação, o empreendedorismo, o reconhecimento do valor do trabalho e do esforço pessoal. O método de ensino deve ser um “método activo, tanto quanto possível heurístico” (*PORTUGAL, Diário do Governo, 09/09/1968, p.1395-96*). “O professor de matematização “deveria ensinar o aluno a traduzir situações concretas em modelos matemáticos e vice-versa” (Pinto, 2007, p. 116), articulando teoria com experiência e ciência com aplicação” (Wielewski & Matos, 2009, p. 9).
- Adequar-se aos interesses e experiências dos alunos, bem como à sua faixa etária e ao meio envolvente, não se resumindo a uma sistematização lógica de conteúdos.
- Desenvolver o espírito de cooperação, enfatizando o trabalho de grupo
- Rentabilização das aulas de modo que o trabalho dos alunos fora da sala de aula seja apenas de carácter complementar (estimulando o gosto pela reflexão, leitura e observação)

- Promover a interdisciplinaridade, principalmente nas disciplinas que constituem o mesmo conjunto letivo. “A fim de facilitar a coordenação do ensino deverá confiar-se ao menor número possível de professores, em cada turma, o ensino das disciplinas dos conjuntos A, B e E.” (artigo 13º).
- Fomentar a capacidade de expressão, a manifestação e fortalecimento das aptidões especiais nos alunos de modo a orienta-los para um ramo do prosseguimento de estudos
- Adaptar-se às características e às perspectivas de progresso de cada região.

O referido decreto prevê ainda a concessão às escolas e aos docentes de alguma autonomia e espírito de iniciativa na flexibilização do currículo e abordagem dos assuntos, não sendo obrigatório obedecer a uma sequencialização rígida de matérias, bem como às indicações metodológicas que nele se apresentam, devendo o ensino “ ser adequado aos interesses e às experiências dos alunos, (...) não se determinando exclusivamente, pela sistematização lógica das matérias” (artigo 7º, b) e “adaptar-se às características e às perspectivas de progresso da região onde é ministrado” (artigo 7º, g). Além disso, a escolha dos manuais passa a ser da responsabilidade do Conselho Escolar, segundo o artigo 16º da Portaria 22944, e o artigo 359º do DL 48 572.

O decreto sugere ainda que os conceitos não sejam apresentados aos alunos desprovidos de significado, abordando-se sempre os assuntos com base em exemplos do quotidiano destes.

O manual deve ser encarado como um instrumento importante de trabalho mas os docentes devem recorrer a outros materiais (o referido decreto sugere que, se possível, os mesmos se construam na disciplina de Trabalhos Manuais).

As normas de elaboração dos novos programas são explicitadas pelos seus autores na Portaria 23 601 de 9 de Setembro de 1968 e, no caso da disciplina de Matemática, resumem-se a dois grandes eixos (Wielewski & Matos, 2009, p. 3):

Eixo de Adequação às novas políticas educativas:

- Abordar os conteúdos com base nas vivências dos alunos, em exemplos que lhes sejam familiares, conduzindo-os por “declive suave”, a um grau de abstração que será reciprocamente aplicado em situações concretas do quotidiano, “adequadas ao clima de rápido desenvolvimento técnico-científico, que caracteriza a época presente”. (Portaria 23601, p. 1395)
- “Estabelecer, nas suas linhas gerais, um esquema de repetições periódicas e sistematizadas”, atendendo ao facto de o conhecimento matemático, como a aprendizagem de qualquer Língua, se adquirir através da repetição e aperfeiçoamento progressivo. (Portaria 23601, p. 1396)
- Atribuir ao ensino da matemática uma orientação mais próxima das aplicações técnicas orientando os alunos para o prosseguimento de estudos no que se refere ao ramo a seguir.

### Eixo didático:

- Reordenar os conteúdos de modo a obter o máximo de rendimento do estudo dos números racionais (exceptuando o cálculo com números negativos) que se assume como o tema central deste ciclo de ensino, tanto pela sua importância na estruturação da Matemática, como pela sua aplicação no relacionamento de grandezas físicas.
- Modernizar a linguagem matemática, introduzindo novos conceitos na teoria de conjuntos, nomeadamente, “conjunto”, “intersecção”, “reunião”, “inclusão”, etc.
- Simplificar os programas, eliminando os assuntos considerados prematuros para essa faixa etária, com base na “experiência de ensino” e na “comparação com os programas para as mesmas idades em países estrangeiros”. Note-se que a experiência é enfatizada como fator importante para o aperfeiçoamento do sistema de ensino (Portaria 23601, p. 1395). Assim, “o lugar privilegiado que a geometria explicitamente tinha no anterior programa dos liceus desaparece e em seu lugar surge uma proposta curricular em que a linguagem da teoria dos conjuntos é colocada desde o início como via para a compreensão dos tópicos matemáticos” (Wielewski & Matos, 2009, p. 5)
- Introduzir moderada e progressivamente o uso de letras em igualdades simples (na definição de operações inversas, propriedades das operações, fórmulas, proporções, etc), “por se ter verificado, em experiências conduzidas com êxito, não só no estrangeiro mas também já entre nós, que esse recurso facilita consideravelmente ao aluno a aprendizagem da matemática, colocando-o, além disso, em condições muito mais favoráveis para a iniciação no estudo da álgebra, que se fará posteriormente.” (Portaria 23601, p. 1396).

A introdução dos novos conteúdos foi um processo gradativo e cauteloso. No que consta da Portaria nº 23 601 (p. 1395), “a introdução de novos conteúdos deverá ser feita, por enquanto, com prudência e parcimónia atendendo a que é necessário, primeiro que tudo, actualizar os agentes de ensino”.

Já as novas metodologias foram introduzidas com alguma confiança, por se considerar a experiência como fator importante de melhoria do sistema de ensino. Note-se a ênfase dada à experiência nas duas últimas normas supra-referidas.

Apesar da Matemática Moderna ter preconizado mudanças significativas ao nível de conteúdos e metodologias em aula, no intuito de acompanhar o progresso internacional, denota-se preocupação em manter os princípios ideológicos do Regime, numa tentativa de preservação dos valores e da tradição cultural da sociedade portuguesa.

Segundo o decreto-lei nº 48 572, o ensino deve “orientar-se pelos princípios da doutrina e moral cristãs tradicionais do País e promover a integração nos valores espirituais e culturais permanentes da Nação, estimulando a devoção à Pátria, o sentido da unidade nacional, a valorização da pessoa humana” (PORTUGAL, Diário do Governo, 09/09/1968, artigo 2º).

Também na lei nº5/73 é referido, de entre as finalidades do sistema educativo,

assegurar a todos os Portugueses, além do revigoração físico, o aperfeiçoamento das suas faculdades intelectuais, a formação do carácter, do valor profissional e de todas as virtudes morais e cívicas, orientadas pelos princípios da moral e doutrina cristãs tradicionais no país;” e “ Estimular o amor da Pátria e de todos os seus valores. (lei nº5/73, p. 1316, base III 2a) e b))

Neste âmbito, Ferreira refere alguns pontos de fricção na criação do CPES pelo menos a dois níveis:

- a) a um nível político-económico, caracterizado pela tentativa de perpetuar os valores e a tradição cultural da sociedade portuguesa das décadas de 50 e 60 mas condicionada pela necessidade de acompanhar o progresso económico internacional face aos constrangimentos dos sistemas económico e educativo;
- b) ao nível da concepção do processo educativo enquanto agente mantenedor da ordem social e do saber humanista tradicional, mas com necessidade de pensar factores de activação pedagógica da Escola e dos processos de aprendizagens, de modo a dinamizar as condições de evolução da sociedade Portuguesa. Ferreira (2003, p. 16)

A fase de introdução dos novos programas do CPES não decorreu da forma esperada. Constataram-se problemas ao nível dos manuais existentes, do reduzido número de professores habilitados para a docência no quarto grupo e da extensão dos programas, que induziu a reformulação dos programas do 1º e 2ºanos.

## CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA

Nesta investigação foi adotada uma abordagem qualitativa, mais particularmente, foi realizada uma análise de conteúdo, escolha que se prendeu com a natureza dos objetivos e o facto de todos os dados serem recolhidos por observação direta de documentos oficiais e manuais escolares. Por observações sucessivas dos mesmos e tendo por base a literatura consultada, foi elaborado um guião de análise. Neste capítulo são apresentadas as fundamentações teóricas e é justificada a metodologia adotada.

### 3.1. INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA

Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 47 - 51), uma metodologia de investigação qualitativa apresenta cinco características, sendo que alguns estudos são desprovidos de uma ou mais características. Neste estudo, considero importantes as características 1, 2 e 4:

***1. Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.***

No caso da análise de documentos oficiais, os investigadores devem conhecer o contexto histórico em que se inserem, como e em que circunstâncias reguladoras foram elaborados ou quais os movimentos de que fazem parte.

***2. A investigação qualitativa é descritiva.***

Os dados recolhidos não são numéricos, mas sim na forma de texto ou imagens, apresentados de forma narrativa, contendo citações que fundamentam essa apresentação e preservando tanto quanto possível a sua forma original. Os dados são apresentados de forma minuciosa, tendo em conta que tudo o que se observa é importante para a compreensão do objeto em estudo. Deste modo, e para que não escape nenhum detalhe, recorre-se à descrição como método de recolha dos dados.

***3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.***

É importante enfatizar os processos, uma vez que os resultados são muitas vezes modificados pelas expectativas que se criam e que podem influenciar a forma de atuar.

***4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.***

Os dados não são recolhidos no intuito de confirmar ou infirmar hipóteses previamente formuladas.

No decorrer da investigação, só no decorrer da recolha e agrupamento dos dados é que o investigador vai formulando as suas conjeturas e direcionando a sua teoria, que Glaser e Strauss (in Bogdan e Biklen, 1994, p. 50) designam de “teoria fundamentada”, que se constrói “de baixo para

cima”, com base na inter-relação entre as várias “peças” de informação recolhida. À medida que se recolhem e examinam as partes, o processo de análise dos dados assemelha-se a “um funil”: inicialmente, as coisas estão abertas, tornando-se mais fechadas e específicas no extremo.

### **5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.**

O investigador qualitativo baseia-se em teorias e resultados de estudos anteriores que lhe fornecem pistas para dirigir o seu estudo e contextualizar novos resultados.

## **3.2. ANÁLISE DE CONTEÚDO**

O objetivo do investigador é apenas construir conhecimento e não tecer críticas sobre a abordagem dos assuntos em estudo. No caso dos manuais, trata-se de analisar e comparar os manuais, compreendendo como eram abordados os temas, o tipo de atividades que contêm, a linguagem utilizada, a sequência de conteúdos, bem como as metodologias de ensino subjacentes, e não uma análise da qualidade dos mesmos. No entanto, tornou-se difícil para mim contornar essa questão, tendo em conta o rumo tomado nesta investigação, não sendo contudo esse o meu objetivo primordial.

O investigador utiliza ainda um conjunto de técnicas e procedimentos desenvolvidos ao longo de anos para a recolha e análise dos resultados.

Segundo Chopin (2004, p. 555), a análise científica dos conteúdos é marcada por duas grandes tendências, que são indissociáveis, apesar de muitas vezes serem tratadas de forma independente e excludente:

- **A crítica ideológica e cultural dos livros didáticos.**

As questões abordadas frequentemente referem-se à formação da identidade nacional, quer em países que conquistaram ou recuperaram a sua autonomia, quer naqueles em que o poder político se preocupa com a inculcação do sentimento de nacionalismo (no caso português, devido à guerra colonial, o poder político pretendia reforçar a unidade nacional); também são tidas em conta questões relacionadas com a aprendizagem da língua e com inserção social, como regras de boas maneiras e educação para a cidadania.

Enquanto diversas crenças são explícitas nos textos, outras podem ser totalmente ignoradas por falta de liberdade de expressão dos autores ou editoras. É necessário por isso atender não só ao que os livros trazem escrito mas também ao que os autores silenciam. Por exemplo, os livros didáticos de ciências evidenciam uma visão consensual e normalizada do estado da ciência, eliminando-se deliberadamente toda a controvérsia existente entre as comunidades científicas (Chopin, 2004, p. 557).

Muitas vezes, a imagem da sociedade é modelada de modo favorável, apresentando-se mais como aqueles que concebem o manual gostariam que ela fosse. “O livro didático não é um simples espelho:

modifica a realidade para educar as novas gerações, fornece uma imagem deformada, esquematizada, modelada, muitas vezes de forma favorável: as acções contrárias à moral são quase sempre punidas exemplarmente; os conflitos sociais, os actos delituosos ou a violência quotidiana são sistematicamente silenciados” (Chopin, 2004, p. 557).

No estudo desta tendência, privilegia-se a análise de livros destinados à educação popular uma vez que: foram os que tiveram maior difusão e por isso são considerados mais influentes e mais importantes na formação de mentalidades; eram destinados aos mais jovens, população mais vulnerável. Este aspeto motivou a preferência dos investigadores por manuais que registaram grandes tiragens e seguiam um modelo padronizado, o que justifica o facto de se analisarem sempre os mesmos.

Na análise dos manuais escolares de disciplinas científicas, o estudo da carga ideológica e cultural transcende a própria especificidade da disciplina. Essa análise focaliza-se no enunciado de problemas por exporem situações concretas, remetendo-se a uma certa imagem da sociedade ou difundindo propositadamente uma mensagem ideológica ou moralizante (Chopin, 2004, p. 558).

- **A análise epistemológica ou didáctica.**

Nos anos 70, devido às dificuldades vividas pelos principais sistemas educativos no Ocidente europeu, os investigadores preocuparam-se progressivamente com as finalidades do ensino, os seus conteúdos e métodos, colocando questões dessa natureza na análise dos manuais antigos, nomeadamente: que métodos de aprendizagem (indutivo, expositivo, dedutivo, etc) eram apresentados nos manuais, quais os conhecimentos, teorias científicas ou doutrinas linguísticas privilegiados, ou como estavam organizados os tópicos.

Contrariamente à análise ideológica, na análise didáctica considera-se a especificidade da disciplina no que se refere às finalidades, conteúdos e métodos de aprendizagem.

Também têm sido negligenciadas questões que se prendem com a tipografia e paginação dos livros didáticos: organização interna e divisão em capítulos, parágrafos, as diferenciações tipográficas (fonte, corpo do texto, grifos, tipo de papel, bordos, cores, etc), a distribuição e disposição espacial dos elementos textuais ou icónicos numa página.

Segundo Bardin (1977, p. 31, itálico no original), a análise de conteúdo é um *conjunto de técnicas de análise das comunicações*.

Para este autor (p.29), a metodologia de análise de conteúdo procura responder aos seguintes objetivos:

- **A ultrapassagem da incerteza** que consiste no questionamento por parte do investigador se as suas perspetivas são válidas e generalizáveis. Este tem de estar consciente de que o processamento dos dados na sua mente por vezes é sujeito a um certo grau de subjetividade. Deste modo, o investigador deve confrontar constantemente as suas opiniões e preconceitos com os dados e a forma como os interpreta, tentando reconhecer e ter em conta os seus

enviesamentos, embora se considere que não é possível retirar toda a subjetividade na análise dos dados (Bogdan e Biklen, 1994, p. 67).

- **Enriquecimento da leitura** – “Se um olhar imediato, espontâneo, é já fecundo, não poderá uma leitura atenta, aumentar a produtividade e a pertinência? Pela descoberta de conteúdos e de estruturas que confirmam (ou infirmam) o que se procura demonstrar a propósito das mensagens, ou pelo esclarecimento de elementos de significações susceptíveis de conduzir a uma descrição de mecanismos de que *a priori* não detínhamos a compreensão”(Bardin, 1977, p. 29, itálico no original).

Bardin (1977, p. 30) define ainda duas funções da análise de conteúdo:

- **Heurística** uma vez que enriquece a tentativa exploratória e enriquece a propensão à descoberta.
- **“Administração da prova”**. Hipóteses que servem como diretrizes apelam para o método de análise sistemática de modo a obter a sua confirmação (ou infirmação).

A análise de conteúdo é um método experimental e, deste modo, como afirma Carlos Carvalho (2006, p.76-77), não existe um modelo metodológico, mas um conjunto de regras base que o investigador deve seguir.

Para Bardin (1977, p. 95, itálico no original) as fases da análise de conteúdo organizam-se cronologicamente em três pólos:

- A **pré-análise** que pode ser constituída por 3 etapas: *a escolha dos documentos* a serem submetidos à análise; a formulação de *hipóteses* e dos *objetivos*; e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final (seleção de índices tendo em conta as hipóteses formuladas).
- A **exploração do material** é uma etapa longa e fastidiosa que consiste essencialmente em codificar, decompor e enumerar, em função das regras previamente estabelecidas.
- O **tratamento dos resultados, inferência e interpretação** consistindo num tratamento dos resultados em bruto, de modo a torna-los válidos e significativos. Pode-se recorrer a pequenos estudos estatísticos, para a construção de quadros, diagramas, figuras e modelos que condensem e relevem informações recolhidas na análise.

A **codificação** é uma transformação dos dados textuais em bruto, que por recorte, agregação e enumeração permite atingir uma representação do conteúdo que possa esclarecer o analista acerca das características do texto (Bardin, 1977, p. 103).

Os sistemas de codificação permitem ao investigador qualitativo organizar os dados segundo uma característica que tenham em comum. Bogdan e Biklen (1994, p. 221) enumeram várias etapas a seguir:

- Procurar regularidades e padrões ou tópicos presentes nos dados, constituídos por memorandos, notas, diagramas, compreensão adquirida e registada;

- Escrever palavras ou frases que representem esses tópicos e padrões (categorias de codificação). Algumas categorias de codificação poderão surgir à medida que vai sendo feita a recolha de dados.
- Desenvolver uma lista de categorias de codificação depois de concluída a recolha dos dados e estando o investigador preparado para os organizar.

A **Categorização** é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o género (analogia), com os critérios previamente definidos. As categorias são rubricas ou classes que reúnem um grupo de unidades de registo, com base em características comuns, sob um título genérico.

As categorias têm como objetivo principal obter uma representação simplificada dos dados em bruto. O critério de categorização pode ser semântico (por exemplo, por temas), sintático, léxico ou expressivo.

Segundo Bogdan e Biklen, deve ser feita tendo em conta os objetivos do estudo. Consiste em duas etapas:

- O **inventário**, em que se isolam os elementos
- A **classificação**, ou seja a fragmentação dos elementos, reagrupando-os em categorias, visando a organização das mensagens. Para Bardin (1977, p. 119-120), as categorias devem possuir 5 qualidades:
  - ❖ **Exclusão mútua** - as categorias devem ser construídas de modo que um elemento não possa ser inserido em mais do que uma delas.
  - ❖ **Homogeneidade** – a organização das categorias deve seguir um único princípio. Um mesmo conjunto de categorias só pode funcionar com um só registo e uma só dimensão da análise.
  - ❖ **Pertinência** – as categorias devem adaptar-se ao material de análise escolhido e devem pertencer ao quadro teórico definido. O sistema de categorias deve refletir os objetivos e questões de estudo do analista.
  - ❖ **Objetividade e fidelidade** – sendo elaborada uma grelha categorial, as diferentes partes do material recolhido devem ser codificadas da mesma forma, mesmo quando são submetidas a várias análises.
  - ❖ **Produtividade** – as categorias devem fornecer resultados férteis em índices de referências, em novas hipóteses e em dados exatos.

A **Inferência** é o que Bardin apelida de “interpretação controlada” uma vez que “ a análise de conteúdo fornece informação ao leitor crítico de uma mensagem (...) desejando distanciar-se da sua leitura “aderente”, para saber mais sobre esse texto” (Bardin, 1977, p. 133).

Os pólos de inferência numa análise de conteúdo são: o emissor e o recetor, a mensagem e o *media* utilizado. A mensagem constitui o principal objeto de estudo, sem a qual a análise não seria possível.

A mensagem pode ser analisada ao nível do código (estrutura da mensagem e seu conteúdo) ou da sua significação.

### **3.3.ETAPAS DA INVESTIGAÇÃO**

Nesta pesquisa histórica sobre os manuais escolares, analisei os temas “Conjuntos e Números”, “Operações com números inteiros” e “Números Racionais” do 1º ano do CPES. Consegui encontrar dois desses manuais junto de pessoas conhecidas. O outro manual foi encontrado na Biblioteca Nacional de Portugal, bem como o Compêndio de Matemática do 1º ano do curso liceal, livro único anterior ao CPES.

De forma a poder responder às questões deste estudo e organizar a análise, procedi à elaboração de um guião, que se encontra em anexo, tendo por base um exemplo de guião de análise de Morgado e os objetivos delineados. O guião foi várias vezes reformulado nas sucessivas observações que realizei.

A metodologia de investigação foi evoluindo gradualmente, à medida que aprofundava a análise através de sucessivas recolhas de dados dos manuais.

Inicialmente, procedi a uma leitura flutuante de todos os manuais, numa análise geral do seu conteúdo e estrutura. Fui registando notas e recolhendo imagens de tudo o que entendi ser importante, seguindo a regra da exaustividade para que nenhum pormenor escapasse ao escrutínio, mesmo que não estivesse diretamente relacionado com as questões que inicialmente colocara. Foi um processo que se arrastou por muito tempo, sendo essa leitura muito aberta a novas questões, novas hipóteses, ideias, e resultou num documento muito extenso e repleto de texto e imagens.

Houve então necessidade de reler os meus registos, tentando direcionar a leitura para os aspetos realmente pertinentes, de forma indutiva, partindo do geral para o particular, assemelhando-se o processo de análise “a um funil”.

Procedi então a uma segunda análise mas, desta vez, a leitura foi transversal, ou seja, fui analisando todos os manuais, por capítulos, direcionando já a minha atenção para os assuntos que permitiam responder às questões e objetivos do estudo, e fui ainda comparando com as indicações programáticas.

Nesta análise, fui agregando as observações efetuadas em cada capítulo (sob a forma de texto e imagem) em tabelas (anexo 8), fazendo também uma primeira categorização em vários grupos na abordagem dos conteúdos (exemplos, esquemas, formalizações, tipo de atividade etc).

Nesta fase, o guião de análise foi várias vezes reformulado, à medida que me fui apercebendo dos aspetos que seriam relevantes na busca de respostas às questões e objetivos do meu estudo. A análise dos capítulos “Operações com números inteiros” e “Números Racionais” foi feita de acordo com paradigmas apresentados por Cecília Monteiro, Hélia Pinto e Nisa Figueiredo.

Fiz ainda pequenos estudos estatísticos, sintetizados em tabelas, para fundamentar alguns aspetos relacionados com a estrutura e organização dos textos.

Reformulei definitivamente o guião de análise. Foi com base nos registos efetuados a partir desta grelha, nas tabelas-síntese (anexo 8), que procedi à redação de um texto informal, que foi também por várias vezes relido e melhorado.



## **CAPÍTULO 4 – DESCRIÇÃO GERAL E COMPARAÇÃO DOS MANUAIS**

A criação do CPES marcou alterações significativas ao nível da forma de ensinar e aprender matemática, reforçando as ideologias da Escola Nova, já pensadas e discutidas desde o início do século XX. Os avanços verificados nos campos da psicologia e das ciências, nomeadamente na medicina, pós a 2ª guerra mundial, mudaram a forma de ver a escola e, no caso da matemática, reconheceu-se a importância do seu papel na sociedade e nas vertentes profissionais.

Surge por esta altura o chamado Movimento da Matemática Moderna, dada a necessidade de repensar o ensino desta disciplina. A criação do CPES dá-se numa altura em que decorriam várias experiências pedagógicas ao nível da Matemática, no âmbito da Reforma da Matemática Moderna, tendo sido o programa do CPES elaborado com base nessas experiências.

Pretendendo investigar as principais alterações introduzidas na forma de ensinar e a forma como os autores apresentam o novo currículo aos professores, procedi primeiro a uma análise geral dos manuais selecionados, comparando as suas características ao nível dos valores que veiculam, do seu modelo pedagógico, estrutura e organização. Com a descrição apresentada neste capítulo, pretendo, portanto, encontrar respostas para o primeiro objetivo geral que delineei no primeiro capítulo.

Foi então feita uma apreciação global, tendo como base um guião de análise adaptado de José Carlos Morgado.

### **4.1. OS MANUAIS**

Selecionei para análise três manuais do CPES e para efeitos comparativos com a matemática ensinada no 1º ciclo liceal, também analisei o manual único do 1º ano de Álvaro Sequeira Ribeiro. (ver anexo 1).

Os manuais A e B foram aprovados para o território continental português em Diário do Governo n.º 177, II.ª série, de 1 de Agosto de 1970 para o quinquénio que englobava os anos letivos de 70/71 a 74/75.

O manual C foi rejeitado pela Inspeção em Portugal embora tenha sido aprovado posteriormente para Portugal e seus domínios em Diário do Governo n.º 168, III.ª série, de 21 de Julho de 1970, para o quinquénio 70/71 a 74/75, sendo o preço de cada volume 50\$00.

Na edição analisada foram corrigidas diversas imperfeições apontadas por Joaquim Redinha na crítica que redigiu, porém algumas ainda persistem.

Neste estudo, foram portanto analisados todos os manuais do CPES aprovados em Diário de Governo de 1970, à exceção do manual “Matemática”, para o 1º ano, de António Oliveira Pegado, António Argel de Melo e Silva Aires Biscaia, Victor Manuel de Jesus Pereira e Jorge Fernando de

Andrade Monteiro, aprovado para as províncias do Ultramar, em Diário do Governo n.º 168, III.ª série, de 21 de Julho de 1970, cujo acesso não me foi possível.

## **4.2. OS AUTORES DOS MANUAIS DO CPES**

Apresentam-se aqui informações sobre parte da biografia de alguns dos autores dos manuais analisados do CPES.

### **Maria Natália da Graça Martins de Almeida D’Eça**

Autora do manual A, estagiou no 1º grupo na Escola de Artes Decorativas Soares dos Reis, no Porto. Em 1968/ 69 encontrava-se a lecionar na Escola Preparatória de Gomes Teixeira (Porto), sendo docente efetiva do 4º grupo disciplinar, e frequentou o “Curso de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática” de 25 a 30 de Novembro, a convite da DSCPES, e o “Curso de Matemática de 1968” do CPES, onde deveria receber 1200\$00.

Provavelmente terá lecionado no Curso de Actualização de Matemática do CPES, no final de 1969, uma vez que a sua remuneração foi superior à de outros professores, ou seja, 3000\$00. Participado em reuniões de professores orientadores de cursos de atualização de ensino na Escola Preparatória Marquesa de Alorna (Lisboa).

Foi designada para a elaboração do ponto de Matemática do exame de admissão ao 2º ano do CPES.

Em 1970, encontra-se na Escola Preparatória Ramalho Ortigão (Porto).

### **António Augusto Lopes**

António Augusto Lopes, autor do manual B, era metodólogo do Liceu Normal de D. Manuel II, no Porto, e fazia parte, desde 1963, da Comissão de Revisão do Programa do 3º Ciclo Liceal, presidida por Sebastião e Silva. Lopes participou ativamente na experiência de introdução da Matemática Moderna no 3º Ciclo Liceal e apresentou a disciplina de Matemática do Curso Unificado da Telescola (CUT) a partir do ano letivo 1965/66 (Almeida e Matos, CIHEM 2011).

### **António Oleiro dos Santos Heitor**

Este autor do manual C, era Engenheiro mas lecionava na Escola Industrial Marquês de Pombal (Lisboa), onde era efetivo.

Em 1958, apresentou uma comunicação (4ª secção - ensino industrial, temática da metalomecânica) no I Congresso Nacional do Ensino Técnico Profissional. Era metodólogo desde 1962, tendo sido um dos orientadores do Colóquio na escola Marquês de Pombal. No ano letivo de 1968/69 lecionou Matemática em turmas-piloto do 1º ano dos Cursos Industriais e do 2º ano de Cursos Comerciais.

Dirige ainda a “Comissão de estudos de reorganização do ensino da Matemática dos cursos de formação industrial” formada em 1968.

Em 1971 terá orientado os Cursos de formação e de atualização para professores pós-primário, realizados em Lisboa, Porto, Coimbra, Ponta Delgada, Viseu e Évora, e organizados com o patrocínio do GEPAE. Nesses cursos foram tratados conjuntos e lógica, relações binárias e funções, conjuntos numéricos e estruturas, topologia e medida, cálculo vetorial e transformações geométricas.

### **Francelino Ângelo Gomes**

Co-autor do manual C, pensa-se que será natural de Cabo Verde. Licenciou-se em Ciências Matemáticas e estagiou na escola Marquês de Pombal. Lecionou durante 3 anos na Escola Fonseca Benevides e efetivou em Tomar, onde permaneceu por mais 3 anos.

Em 1966 lecionava na Escola Industrial e Comercial de Vila Franca de Xira, onde se manteve muitos anos. Foi nesse período que terá sido um dos orientadores do Colóquio na Escola Marquês de Pombal.

Esteve na Gulbenkian a apoiar um projeto para o ensino primário e foi várias vezes a França visitar escolas. Foi membro da “Comissão de estudos de reorganização do ensino da matemática dos cursos de formação industrial”, formada em 1968.

Em 1968, terá orientado o “Curso de Matemática”, realizado de 25 a 30 de Novembro, na Escola Preparatória de Marquesa de Alorna.

No ano letivo de 1968/69 lecionou Matemática em turmas-piloto do 1º ano dos Cursos Industriais e do 2º ano de Cursos Comerciais em Vila Franca de Xira.

Orientou também, em 1971, os Cursos de formação e de atualização para professores pós-primário, realizados em Lisboa, Porto, Coimbra, Ponta Delgada, Viseu e Évora, e organizados com o patrocínio do GEPAE. Nesses cursos foram tratados conjuntos e lógica, relações binárias e funções, conjuntos numéricos e estruturas, topologia e medida, cálculo vetorial e transformações geométricas.

Foi ainda co-autor do programa de Matemática do 7º, 8º e 9º anos do ensino unificado.

Faleceu em 2010.

## **4.3. ASPETOS IDEOLÓGICOS DE ÂMBITO TRANSDISCIPLINAR**

Segundo Jurjo Torres, os manuais são considerados “produtos políticos” que, por norma, supõem concepções ideológicas e teorias acerca da realidade em que vivemos. (in Morgado, p. 39, aspas no original).

Também nas palavras de Chopin (p. 556), é frequente encontrar essas concepções ideológicas naqueles em que o poder político se preocupa em consolidar ou alimentar — por razões diversas — o sentimento de nacionalidade.

A época da nossa História onde se enquadra a criação do CPES é muito rica em mudanças no âmbito político, socioeconómico e cultural. No plano político, decorria a guerra colonial, sendo uma preocupação do regime de Salazar incutir o sentimento de patriotismo e a coesão nacional aos cidadãos.

Nos programas oficiais do CPES é referido expressamente que

o ensino do ciclo preparatório, como a educação em geral, deve orientar-se pelos princípios da doutrina e moral cristãs tradicionais do país e promover a integração nos valores espirituais e culturais da Nação, estimulando a devoção à Pátria, o sentido da unidade nacional, a valorização da pessoa humana, dentro de um espírito de justiça social, de respeito das sãs tradições, de adaptação às circunstâncias dos tempos modernos e das várias parcelas do território português, de compreensão e solidariedade internacionais. (DL 48572, cap. I, artigo 2º)

Nos manuais analisados, os aspetos religiosos são praticamente inexistentes. Há apenas um princípio do catolicismo implícito num exemplo dado: “Se quisermos repartir, igualmente, 59 moedas por 7 pobres (...)” (A, p. 92)

Denota-se porém uma forte intencionalidade no âmbito do nacionalismo e sentimento de pertença das colónias portuguesas nos manuais A e B.

Cito por exemplo um excerto da página 8 do manual A, “Consideremos um novo conjunto (U): as *províncias de Portugal Ultramarino*.”. Note-se o destaque em itálico no documento original, bem como a utilização de iniciais maiúsculas para destacar a expansão portuguesa ao Ultramar.

Ainda no manual A, refere-se que “Com rios de Portugal organizemos, por exemplo, este conjunto: R= {Tejo, Zaire, Zambeze}” (A, p. 19)

Novamente se reforça a pertença de rios africanos do Ultramar como “rios de Portugal”.

Na página 28 do manual B, usa-se como exemplo a correspondência de todos os portugueses à Bandeira Nacional. Novamente se utilizam iniciais maiúsculas para, a meu ver, salientar a importância deste símbolo, acentuando a união nacional.

No exercício nº3 da página 23, consta a expressão “*Portugal é uma nação! Seja P o conjunto das províncias de Portugal.*” (itálico no original), e usam-se exemplos como Angola, Cabo Verde ou Guiné.

No exercício nº4 da mesma página consta que “O *Exército Português* é um conjunto de valentes e destemidos soldados.”. Note-se mais uma vez o destaque em itálico e as iniciais maiúsculas para esta instituição do Estado. Acompanhando esta frase há uma ilustração de um soldado a combater num ambiente que lembra uma selva, estando subjacente a referência à guerra colonial que decorreu entre 1961 e 1974.

Os manuais A e B estão portanto repletos de referências a províncias, cidades, rios portugueses do Ultramar, essencialmente no capítulo Conjuntos e Números, quer em exemplos quer no próprio enunciado dos exercícios.

Já no manual C curiosamente detetei apenas uma pequena alusão ao Ultramar. Sendo um manual da mesma época e sendo a guerra colonial uma preocupação do Estado, bem como a necessidade de incutir valores patriotas na população portuguesa para uma maior coesão nacional, não deixa de ser curioso este alheamento por parte dos autores do manual C.

No manual A existem ainda algumas frases relacionadas com a formação cívica dos alunos, nomeadamente:

“Habitua-te a arrumar, no estirador, o material da disciplina de Desenho (...)” (p. 10), que pretende a meu ver incutir regras de arrumação nos alunos.

“Tu conheces alguns: contador de água, de gás, de electricidade, conta-quilómetros, etc. Habitua-te a fazer a *leitura* nos mostradores dos que houver em tua casa ou na Escola.” (p. 46), que na minha ótica pretende incutir autonomia e incentivar os alunos a observar o que os rodeia. Numa época em que se inicia a utilização destes instrumentos, é natural a importância que lhes foi concedida.

“Na casa dessa menina consomem-se, em média, mensalmente, 20 m<sup>3</sup> de água, (...) qual é a *despesa anual* feita com o precioso líquido?” (p. 46), o que a meu ver transparece uma preocupação ecológica e ambiental, pretendendo incutir nos alunos a importância de poupar um bem essencial como a água.

#### **4.4. MODELO PEDAGÓGICO SUBJACENTE**

As metodologias que se pretendem implementar no CPES, pressupõem colocar em prática, nas escolas, aspetos defendidos já desde o início do século XX, como o processo de ensino-aprendizagem centrado no aluno, partindo das suas experiências e interesses. Consta na Portaria 23601 (p. 1395), que:

tem-se vindo a registar, há vários anos, nas escolas normais do nosso ensino secundário, uma atitude de crítica construtiva e um esforço permanente no sentido de dar novos rumos à forma por que deva processar-se o ensino da Matemática, desde os primeiros anos, inclusive no que se refere à linguagem e às relações professor-aluno. Trata-se portanto, agora, de activar e, porventura, imprimir novos aspectos a esse movimento(...)

É portanto uma das normas que presidiram à elaboração dos novos programas de Matemática:

Dar a todo o ensino da matemática uma base tanto quanto possível intuitiva e concreta, tentando fazer surgir naturalmente os conceitos de exemplos familiares ao aluno, e conduzindo este por declive suave, quase insensível, a elaborar por si os esquemas abstractos da matemática, que depois irá, reciprocamente, aplicar em situações concretas da vida corrente, e adequadas ao clima de rápido desenvolvimento técnico-científico, que caracteriza a época presente. (Portaria 23601, p. 1395)

No programa oficial recomenda-se ainda que não se deve separar o significativo do significado. “Um dos grandes erros no ensino tradicional da matemática (não apenas entre nós, mas também no estrangeiro) consistia em introduzir(...) o sinal antes do conceito, a gramática antes da semântica – o cálculo antes da ideia e ocultando a ideia” (Portaria 23601, p. 1396).

As metodologias de ensino que os autores dos manuais A e B se propõem adotar vão ao encontro das indicações programáticas e são explícitas nos prefácios, onde se referem a um projeto ambicioso de ensino centrado no aluno.

No manual A, os autores enaltecem o aluno como figura central no processo de ensino-aprendizagem e referem-se a uma aprendizagem autónoma por parte do aluno. Consta ainda neste manual, uma citação do Professor Veiga Simão, então Ministro da Educação Nacional que se refere explicitamente à democratização do ensino (ver anexo).

Também no manual B é apresentada a “Posição do Autor” (ver anexo) acerca de vários aspetos relacionados com o processo de ensino-aprendizagem da matemática que vão também ao encontro das novas indicações metodológicas e dos princípios da matemática moderna. Aqui se enaltecem os avanços na medicina e nas tecnologias, e o papel fundamental da Matemática numa sociedade em constante evolução e a sua interligação com outras áreas do saber. O autor releva ainda o papel do aluno, enaltecendo a aprendizagem da matemática em relação ao seu ensino: “a Matemática deverá ser ensinada (perdão, aprendida!) cada vez menos como disciplina em si mesma e cada vez mais como suporte das outras disciplinas escolares” (B, p. 3)

Neste manual, o autor refere-se claramente a uma perspetiva que hoje denominamos de construtivista da aprendizagem, com base nas vivências do quotidiano dos alunos.

Na sua perspetiva, a matemática não deve favorecer a memorização ou mecanização de processos, mas estimular a destreza de raciocínio e a reflexão, propondo ao aluno a resolução de problemas do dia-a-dia em situações novas.

Ao contrário do que se verifica nos manuais A e B do CPES, o manual C não inclui prefácio ou notas introdutórias por parte dos autores.

No que diz respeito a referências bibliográficas ou indicação de outras fontes relacionadas com assuntos matemáticos, nada foi encontrado nos manuais analisados. Existem, no entanto informações

que complementam os conteúdos específicos da Matemática e estimulam a curiosidade, sendo algumas delas indicações metodológicas do programa.

Por exemplo, no manual A, e apenas neste, faz-se uma breve referência às biografias e obras de matemáticos antigos como Georg Cantor (p. 7), Pedro Nunes (p. 138) e Euler (p. 149). Há ainda referência a outros instrumentos de medição de ângulos para além do transferidor e do esquadro, nomeadamente, o teodolito, o sextante e o octante (p. 184).

Já no manual B não há qualquer referência à História da Matemática. No entanto, são acrescentadas algumas notas de cultura geral, especialmente no capítulo Conjuntos e Números:

- Na página 11 o autor refere que os primeiros aviadores a atravessar o Atlântico Sul foram portugueses; esta frase poderá também reforçar o sentido de patriotismo nos alunos.
- Na mesma página, há ainda um apontamento acerca dos três primeiros astronautas que entraram em órbita lunar relativamente à sua nacionalidade, nome da nave, data da ida e regresso, e êxito do programa.
- Na página 29 do manual B explica-se que a palavra *cálculo* deriva da palavra latina *calculus* que significa *pedra*.
- Na página 35 apresenta-se a imagem de dois ábacos romanos, nas palavras do autor “*a máquina de calcular dos Romanos*” (itálico no original). Explica-se o seu funcionamento e refere-se que, antes dos Romanos, o ábaco já era utilizado pelos Chineses, Japoneses e Egípcios.

No manual C, também não há referências à história da matemática e os aspetos relativos a curiosidades e conhecimento geral são praticamente inexistentes.

Os manuais A e B revelam ainda uma preocupação em interligar os saberes matemáticos com os de outras disciplinas, seguindo assim as diretrizes dos novos programas que constam do decreto-lei nº48 572 no que diz respeito à interdisciplinaridade.

No capítulo relativo aos Conjuntos, nos manuais A e B, abundam exemplos relacionados com a disciplina de História e Geografia de Portugal, nomeadamente, cidades, rios, províncias portuguesas (incluindo o Ultramar), países, capitais, serras, pontos cardeais, reis portugueses. No manual A apresentam-se ilustrações de meios de transporte dos séculos XVIII, XIX e XX.

Utilizam-se também nos manuais A e B conceitos de Ciências da Natureza como nomes de animais, planetas do sistema solar, ossos; estado físico dos corpos, características de um corpo líquido ou gasoso, variação de forma ou volume de um corpo sólido por ação de forças exteriores como o calor e a compressão.

Há ainda referência a instrumentos musicais e a desportos nos elementos de conjuntos representados em extensão ou em diagrama com ilustrações.

Porém no manual C só se estabelece uma relação entre a Matemática e a Língua Portuguesa.

A Língua Portuguesa é frequentemente envolvida na abordagem dos conteúdos estabelecendo-se constantemente a relação entre a linguagem simbólica e a linguagem corrente, com particular destaque para certas estruturas gramaticais. Geralmente são apresentadas várias expressões verbais para um símbolo matemático. Os manuais A e C apresentam ainda exemplos de substantivos coletivos a propósito dos conjuntos, utilizando exemplos do dia a dia.

Também se denota apenas nos manuais A e B certa preocupação em atribuir à matemática uma vertente lúdica e solicita-se o recurso a materiais manipuláveis, em particular nos capítulos Conjuntos e Números e de Geometria. No manual A consta uma atividade que consiste na construção de objetos em LEGO (p. 23).

No manual B solicita-se várias vezes ao aluno que pinte as figuras. Há atividades nas páginas 21, 24 e 135 que consistem na manipulação de materiais para formar conjuntos, conjecturar e obter conclusões.

No capítulo da Geometria recorre-se frequentemente às construções com régua e compasso em cartolina, utilização de papel vegetal e diversas experiências: utilização de uma vela e cartões para verificar a propagação da luz em linha reta; processo da régua e processo do fio esticado para verificar que 3 pontos do espaço podem estar ou não em linha reta; método da estaca para construir circunferências no solo; utilização de fio de prumo e esquadro para visualização de retas e planos.

Muitas destas aplicações práticas, envolvem conhecimentos e a destreza desenvolvida nas disciplinas de Desenho e de Trabalhos Manuais, mas pretendem também imprimir ao ensino uma orientação mais próxima das aplicações técnicas, segundo as indicações do programa oficial.

Um exemplo deste aspeto também será o enunciado de um problema do manual A: “Três pátios iguais, de forma quadrada, foram vedados com tubo de ferro. Se cada lado de um pátio medir 5 metros, quantos *metros* de tubo se utilizaram?” (A, p. 81, itálico no original).

Problemas deste tipo multiplicam-se nos vários manuais do CPES que foram analisados. Em geral, nos enunciados dos problemas os autores dos três manuais procuram abordar uma grande diversidade de situações que evidenciem a utilidade da matemática e suas aplicações no dia a dia ou em diversas profissões.

Também no conteúdo do texto informativo, especialmente nos manuais A e B, encontram-se exemplos que evidenciam essas aplicações no real: é o caso da importância da rigidez dos triângulos em construções triangulares como andaimes, guindastes, pontes, cúpulas geodésicas, etc; bem como da referência à utilização do esquadro na construção de ângulos retos em marcenaria e arquitetura; ao fio de prumo e nível de bolha de ar para verificação de superfícies planas verticais ou horizontais, respetivamente, usados na construção civil por marceneiros, pedreiros, etc; apresentação de gráficos cartesianos com a variação da temperatura da febre de um doente ou com o consumo de água e energia elétrica lidos nos contadores de uma casa, ou ainda a produção de cloreto de sódio nas salinas de

Aveiro de 1954 a 1960; gráficos de variação da produção anual de trigo e do consumo de energia elétrica, estruturas geométricas em obras de arte e monumentos.

O objetivo de dar a conhecer as aplicações técnicas da Matemática também estará subjacente nas referências que os manuais fazem aos contadores de água e eletricidade, conta-quilómetros e à própria máquina de calcular digital.

Apesar de ser uma das indicações do Decreto-Lei nº48572, que criou o CPES, não foi encontrada nos capítulos estudados qualquer referência a trabalho em grupo, embora algumas das atividades propostas se adaptem a uma exploração desse tipo, mas essa opção dependerá exclusivamente do professor.

Os manuais analisados são de texto e, deste modo, constituem recursos estruturantes do currículo apresentado aos professores e aos alunos. A apresentação dos conteúdos é portanto expositiva, apesar de alguns incluírem atividades que motivam o aluno para a reflexão e o orientam na obtenção de conclusões.

Denota-se também nos três manuais analisados do CPES uma preocupação metodológica em centrar o processo de ensino-aprendizagem no aluno, partindo quase sempre de exemplos concretos que fazem parte do quotidiano dos jovens estudantes e dos seus interesses como equipas desportivas, alunos de uma turma, elementos de uma família, jogos didáticos, natureza, etc.

Além disso, existem espaços em branco para o aluno completar ao longo dos textos e os autores dirigem-se ao aluno na 2ª pessoa do singular.

No capítulo introdutório do manual B, por exemplo, o autor exprime-se como se redigisse uma carta, dirigindo-se expressamente ao aluno:

1. Meu jovem estudante:

1.1. Sabes nomear as coisas que conheces ou de que falas, sabes representá-las (...) E que conheces tu? Começando pelo que te é familiar, em casa, na escola ou na rua, dirás: (...)

Meu amigo! Tu sabes, afinal, quase tudo quanto é preciso para aprenderes a Matemática; mas, para que nos entendamos, devemos usar a mesma linguagem.” (B, p. 5).

#### **4.5. ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO DOS CONTEÚDOS**

No manual único destaca-se a importância concedida à Geometria no ensino da Matemática nos liceus. Segue-se um pequeno estudo estatístico que relaciona a percentagem que cada manual dedica a cada uma das unidades temáticas:

**Tabela 4.1 – Estudo estatístico da percentagem que cada manual dedica às diferentes temáticas.**

Temáticas Manual	Conjuntos	Números inteiros	Números Racionais	Geometria	Outras
A	21%	27%	8%	25%	19%
B	22%	30%	9%	22%	17%
C	15%	23%	16%	30%	22%
D	0%	17%	28%	26%	29%

Nota: Em “Outras” incluí os tópicos relacionados com Medidas de comprimento, de massa, de superfície, de tempo e de velocidade.

Apesar do número de páginas dedicadas à Geometria, no manual D, não diferir significativamente do número de páginas sobre outras temáticas, em relação aos manuais do CPES, denota-se que a linguagem da Geometria é utilizada frequentemente na abordagem de outros tópicos matemáticos, e os capítulos de Geometria encontram-se ao longo do manual. Já nos manuais do CPES que eu analisei, os dois capítulos dedicados à Geometria encontram-se no final do livro, sendo os que geralmente ficam por lecionar em caso de incumprimento do programa por falta de tempo.

Relativamente ao esquema da sequência de cada tema, o programa oficial inclui recomendações aos autores dos manuais escolares de Matemática, apelando a uma maior interação com o aluno:

Convirá que os compêndios se aproximem do tipo de cadernos, com espaços a preencher pelo aluno, procurando introduzir todos os conceitos de modo operacional(...) e adaptando-se às exigências de um método activo, tanto quanto possível heurístico. A linguagem dos textos deverá ser simples, adequada à idade dos alunos, constituída essencialmente por frases breves e, sempre que possível, apoiada em gravuras sugestivas. (Portaria 23 601, p. 1396)

Para avaliar a relação manual-aluno, recorri a pequenos estudos estatísticos que utilizo como evidência das características de cada livro relativamente ao esquema de estruturação dos conteúdos.

**Tabela 4.2 – Estudo estatístico sobre o grau de solicitação ao envolvimento do aluno na realização de tarefas, atividades e exercícios nos diferentes capítulos dos manuais.**

Manual	Capítulo	Nº de páginas sem espaços para preencher	Nº de pág. sem qualquer tarefa para o aluno	Total de exercícios de aplicação/revisão	Total de páginas
A	Conjuntos e números	18	15	33 (sem solução)	42
	Operações com números inteiros	16	12	105 (sem solução)	54
	Números racionais	7	4	58 (sem solução)	18
B	Conjuntos e números	50	31	40	61
	Operações com números inteiros	62	44	44	88
	Números racionais	24	16	12	27
C	Conjuntos e números	3	2	68	41
	Operações com números inteiros	7	4	70	61
	Números racionais	1	0	34	32

<b>D</b>	Conjuntos e números	-	-	-	-
	Operações com números inteiros	14	11	80	36
	Números racionais	1	1	41	19

O manual A apresenta uma organização clara. Os capítulos são divididos em subcapítulos devidamente identificados, sublinhados a cor. Além disso, as sínteses são apresentadas com destaque, em parágrafos isolados, com letra de cor diferente, negrito e/ou itálico. Para destacar os exercícios de aplicação, usa-se letra mais pequena e dois traços a cor no lado esquerdo.

Os parágrafos dos textos não são demasiado longos, não havendo qualquer parágrafo com mais de 5 linhas, em todo o manual. Além disso, normalmente deixam-se linhas em branco a separar os parágrafos, evitando que as páginas fiquem muito sobrecarregadas de texto.

A informação textual é normalmente acompanhada por esquemas ou imagens, sendo que apenas 80, das 192 páginas do manual, não contém qualquer imagem ou esquema.

Os textos são regularmente intercalados por breves sínteses, e questões de completamento ou exercícios de aplicação.

Neste manual, o capítulo “Conjuntos e Números” contém 57 espaços em branco para preenchimento, ao longo do texto informativo; apenas 18 das 42 páginas que constituem o capítulo não contém qualquer espaço em branco para preencher, sendo que apenas 15 não solicitam qualquer tarefa ao aluno.

Há ainda um total de 33 exercícios de aplicação, no final das secções, demarcados com dois traços a cor no lado esquerdo da página, mas não se apresentam as soluções no manual.

O capítulo “Operações com números inteiros” contém 105 exercícios de aplicação ou revisão, também sem solução, no final das secções, e ao longo do texto existem diversos espaços para preencher.

O capítulo “Números Racionais” tem apenas 18 páginas, também com diversos espaços para preencher, sendo que em apenas 4 dessas páginas, o aluno não é solicitado para a realização de qualquer tarefa. Os 58 exercícios de aplicação, que aparecem com regularidade no final das secções deste capítulo, também não apresentam solução.

No manual B, os capítulos também aparecem divididos em secções, numeradas e identificadas com título a negrito e cor diferente.

Este manual é mais detalhado em informação, primando pelo rigor. Os textos apresentam-se, por vezes, muito extensos, tornando-se de leitura difícil. Ao longo do manual, foram contabilizados 23 parágrafos com mais de cinco linhas e em 18 páginas do manual existem textos com mais de seis linhas consecutivas, sem qualquer espaço em branco ou destaque.

As atividades são por vezes colocadas após longos textos, com grande volume de informação. Por exemplo, entre as páginas 142 e 150 ou entre as páginas 163 e 172, não se solicita qualquer tarefa ao aluno. Nos capítulos “Conjuntos e Números”, “Operações com números inteiros” e “Números

racionais”, aproximadamente 51%, 50% e 59% das páginas, respetivamente, não apresentam qualquer tarefa proposta, sendo ainda que 82%, 70% e 89% das páginas daqueles capítulos, respetivamente, não contêm espaços em branco para preencher.

Nas atividades que apresentam espaços para preenchimento, em geral, o autor pede ao aluno para transcrever para o caderno, evitando que se escreva no livro.

As imagens por vezes são exageradas em tamanho e quantidade, em particular no capítulo “Conjuntos e Números”, embora, atendendo à idade dos alunos, seja conveniente incutir-lhes alguma motivação através da imagem.

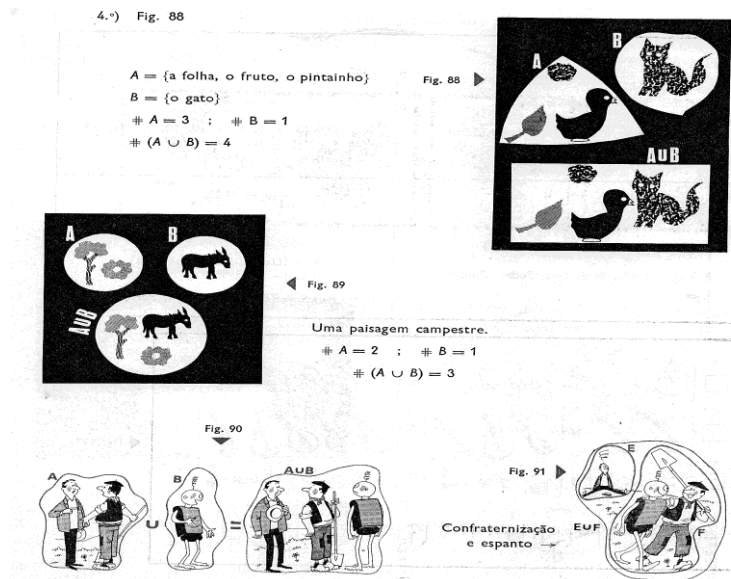


Figura 4.1 – Exemplo do ênfase dado à imagem neste manual (B, p. 71)

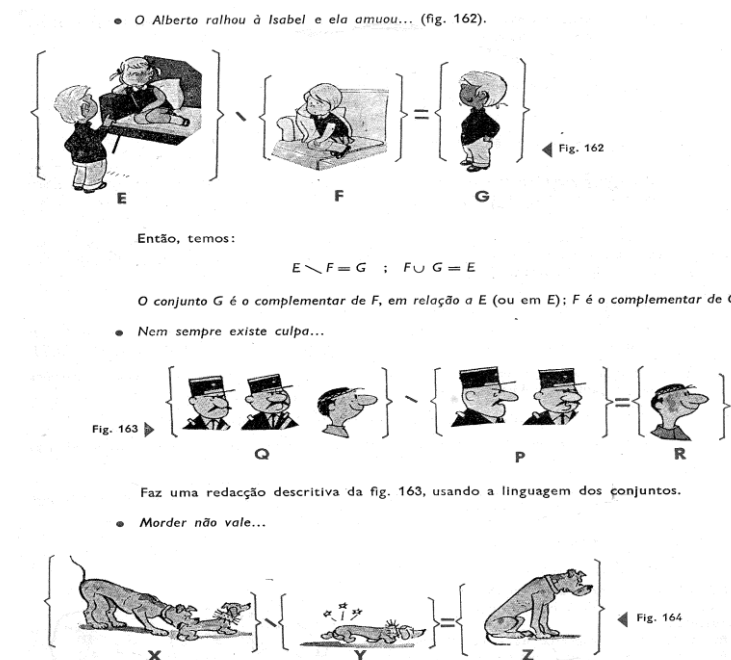


Figura 4.2- Exemplo do ênfase dado à imagem no capítulo “Conjuntos e Números” (B, p. 100)

No manual C, os textos em geral não são muito extensos. Há apenas dois parágrafos com mais de cinco linhas, em todo o manual.

Os textos são intercalados frequentemente por espaços de preenchimento, por vezes em número exagerado, e exercícios. Por exemplo, no capítulo Conjuntos e Números, as primeiras 11 páginas contém um total de 46 espaços para o aluno preencher; além disso, dos 68 exercícios de aplicação que se apresentam neste capítulo, apenas 4 não são de completamento.

Note-se ainda que nas 35 páginas do capítulo Números Racionais, todas contém tarefas dirigidas ao aluno, sendo que apenas uma não inclui questões espaços para preencher.

No manual C, a sequência de subcapítulos não coincide com a do índice. Como os autores referem imediatamente antes da apresentação do índice (em anexo), a ordenação do mesmo é referente aos números das rubricas do programa, não correspondendo à sequência que é apresentada no manual.

A organização sequencial de conteúdos no manual D, o único que se utilizava no 1º ciclo liceal anteriormente à criação do CPES, é muito diferente da que constatei nos outros três analisados. Nestes, seguem-se as orientações programáticas relativamente à sequência das matérias, reordenando-as segundo uma nova hierarquia, tendente a obter o máximo rendimento do assunto que, neste ciclo, se apresenta com carácter central (...): o estudo dos números racionais (Portaria 23601, p. 1395).

No manual D, a Geometria era o capítulo mais importante e, na abordagem de conteúdos de Aritmética e Álgebra, a linguagem de conjuntos é praticamente inexistente. Também não contém nenhum capítulo dedicado à Teoria de Conjuntos.

No manual D, parte-se normalmente da representação gráfica e visualização de esquemas, que muitas vezes são construídos pelo próprio aluno, conduzindo-o gradualmente à utilização de regras e algoritmos. Porém, alguns exemplos são exíguos não havendo um suporte para um estudo autónomo por parte do aluno. A informação dos textos nem sempre se revela suficiente para a resolução dos exercícios.

O estímulo do cálculo mental com a exposição de técnicas detalhadas e a apresentação de diversos exercícios de cálculo com números grandes é também notório neste manual.

O autor exprime-se numa linguagem impessoal e muito formalizada, dirigindo-se ao aluno na 3ª pessoa e as gravuras são escassas. Também, nesta época, não se utilizava ainda a cor na conceção dos manuais.

Os textos são por vezes densos, existindo 54 páginas com mais de seis linhas de texto, sem qualquer espaço em branco ou destaques.

Porém, são frequentemente entremeados de exercícios de aplicação, normalmente com espaços para preencher, e alguns levam o aluno a obter conclusões antes da informação nesse sentido ser apresentada. Nas páginas referentes aos capítulos dedicados às Operações com Números Inteiros, apenas cerca de 31% não solicitam qualquer atividade ao aluno. É também relevante que apenas 1 das 19 páginas do capítulo Números Fracionários não contém qualquer tarefa dirigida ao aluno.

## 4.6. Atividades propostas

No manual A, os exercícios são por vezes repetitivos. Insiste-se basicamente em questões de linguagem e aplicação direta de conhecimentos, sendo a grande maioria dos itens de completamento ou resposta curta. Os problemas relacionados com a vida ativa, que exijam raciocínio, são escassos. Porém, recorre-se frequentemente a exemplos do dia a dia nos enunciados dos exercícios de aplicação, com maior incidência nos que se relacionam com a linguagem de conjuntos. Alguns exercícios exigem também conhecimentos de outras disciplinas, nomeadamente Geografia e História.

Há vários exercícios de aplicação que entremeiam os textos e, em regra no final de cada secção dos capítulos, existem exercícios de aplicação em maior quantidade. Estes exercícios não apresentam solução no manual e incluem apenas os conteúdos da secção a que se referem.

No manual B, os exercícios primam pela diversidade em estilo e no tipo de resposta. Foram encontrados itens de completamento, resposta curta, verdadeiro ou falso, justificações e resolução de problemas.

As tarefas ou questões que são propostas ao aluno, ao longo da informação dos textos, são também diversificadas, desde a pintura de figuras, a manipulação de materiais e registo de esquemas e conclusões, justificação de afirmações, ou simples questões de resposta curta ou completamento.

O teor é diversificado, desde os de aplicação direta de conhecimentos adquiridos aos que exigem um nível de raciocínio por vezes elevado.

Os enunciados dos problemas incluem situações do quotidiano e relações entre números.

Os exercícios por vezes são escassos, apresentando-se no final de um volume considerável de informação. Existe porém, um livro prático de exercícios deste manual.

O manual apresenta exercícios de revisão no final dos capítulos “Conjuntos e Números” e “Números Racionais”, englobando todo o capítulo, mas não integrando conhecimentos de capítulos anteriores. No capítulo “Operações com números inteiros”, os exercícios não estão designados como exercícios de revisão. Contudo, no final de algumas secções dos capítulos, constam em maior quantidade e é ainda dada a solução. Aqui, as questões também não assumem um carácter integrador, restringindo-se aos conteúdos da secção correspondente.

No manual C os exercícios são muito repetitivos, sendo a esmagadora maioria questões de completamento com aplicação direta de conhecimentos. Visam a assimilação da linguagem simbólica de conjuntos, tradução em linguagem corrente e repetição de procedimentos.

Denota-se ainda certa ambiguidade em questões de preenchimento, não se percebendo claramente o que se deve responder. Por exemplo, encontram-se as seguintes questões:

Com uma faca, um garfo e uma colher, forma um conjunto. Este ..... chama-se um .....

(...) Na expressão “alunos hoquistas”, hoquistas é um ..... que qualifica ..... (C, p. 10)

Nos enunciados, recorre-se a situações ligadas ao real, mas também se usam com muita frequência contextos abstratos com a utilização de figuras geométricas e relações numéricas. Apesar de, na informação textual, se evitar o uso de variáveis, mesmo nas generalizações, aquelas constam com alguma frequência nos enunciados dos exercícios.

O manual C só apresenta exercícios de revisão no final da secção “Adição”, contemplando apenas conteúdos dessa primeira parte do capítulo. Os exercícios de aplicação surgem ao longo do texto, devidamente numerados, e as soluções encontram-se no final do manual.

O manual D inclui muitos exercícios ou tarefas que orientam o aluno na obtenção de conclusões. Contém exercícios de revisão no final de cada capítulo, apresentando só algumas soluções.

Como se verifica em todos os manuais do CPES que analisei, os exercícios do manual D também não têm carácter integrador.



## CAPÍTULO 5 – ABORDAGEM DE TÓPICOS MATEMÁTICOS SELECIONADOS

Nas alterações ao programa de Matemática, com a criação do CPES, verifica-se uma subvalorização da Geometria, que até aí assumia um papel preponderante, sendo atribuída ênfase à linguagem de conjuntos para a abordagem de conteúdos de aritmética e álgebra. É referido no programa oficial da disciplina de Matemática, de entre as normas que presidiram à elaboração do mesmo, que se devem eliminar todos os assuntos que sobrecarregavam o anterior programa do 1º ciclo liceal (especialmente em geometria) (Portaria 23601, p. 1395).

Nas alterações introduzidas pela Matemática Moderna, destaca-se a Teoria dos Conjuntos e suas operações como a linguagem básica da matemática.

Matos & Almeida (2012, p. 9) destacam dois tipos de alterações dos conteúdos matemáticos provocados pela ênfase atribuída à linguagem de conjuntos:

- Recurso aos conjuntos como uma nova forma de comunicação matemática
- Utilização de conjuntos e suas operações na introdução de tópicos matemáticos

Por exemplo, as operações aritméticas de adição e subtração, que já tinham sido abordadas no ensino primário, são retomadas com base no cardinal da reunião de conjuntos disjuntos e no do conjunto complementar.

Optei por analisar os capítulos “Conjuntos e Números”, “Operações com Números Inteiros” e “Números racionais” do 1º ano do CPES, tendo em conta que é nestes que se verificam as mudanças mais marcantes ao nível da linguagem e da estrutura do próprio currículo, sendo que alguns tópicos não figuravam no programa anterior. Nesta análise, baseei-me em modelos específicos relacionados com a aprendizagem.

Neste capítulo, pretendo portanto responder ao segundo objetivo geral delineado no capítulo 1 desta dissertação.

### 5.1. CONJUNTOS E NÚMEROS

A Teoria de Conjuntos assumiu um papel preponderante nos novos programas. Introduziram-se mudanças significativas em termos de linguagem, o que vem alterar profundamente a abordagem dos conteúdos relacionados com o conceito de número.

Algumas noções da “matemática moderna”, tais como as de “conjunto”, “elemento de um conjunto”, “inclusão”, “reunião”, “intersecção” e “conjunto complementar” estão já a entrar nos hábitos de ensino de grande número de professores. Trata-se de noções muito simples, que é fácil e conveniente introduzir desde já neste ciclo. (Portaria 23601, p. 1395)

Percebe-se aqui a pertinência da análise do capítulo Conjuntos e Números. Neste estudo, irei debruçar-me sobre a linguagem e terminologia utilizadas, a relação entre a linguagem simbólica e a linguagem corrente, os conceitos considerados relevantes, bem como os exemplos utilizados na abordagem dos conteúdos.

Vou analisar especificamente a linguagem de conjuntos, as correspondências biunívocas e os conjuntos infinitos.

### 5.1.1. LINGUAGEM DE CONJUNTOS

Nos manuais A e B, todos os conteúdos deste capítulo são introduzidos com base em situações familiares ao aluno, partindo do concreto e conduzindo-o a um grau de abstração. No manual C, também se parte várias vezes de exemplos concretos mas são frequentes os exemplos com figuras geométricas na abordagem de conceitos (por exemplo, nas páginas 19, 20, 21 e 30 até 34).

No manual A, o subcapítulo “Noção de conjunto e elemento” é uma introdução ao conceito de conjunto. São apresentadas várias imagens de conjuntos formados por elementos do quotidiano do aluno ou do seu conhecimento geral, nomeadamente, animais, equipas desportivas e o arquipélago de Cabo Verde. Faz-se referência a vários substantivos coletivos ou coleções de objetos que indicam conjuntos e aos seus elementos como substantivos próprios.

No subcapítulo “Representação de um conjunto. Relação de pertença”, apresentam-se conjuntos definidos em extensão e estabelecem-se relações de pertença e não pertença usando diversos elementos. Ao símbolo  $\in$  atribuem-se várias relações verbais, nomeadamente “pertence a”, “é elemento de” e “existe em”, bem como ao símbolo  $\notin$  as respetivas negações.

Segue-se a representação de conjuntos através de um diagrama associando-se as relações de pertença/não pertença a pontos interiores ou exteriores.

No subcapítulo “Determinação de um conjunto” designa-se que são determinados “em extensão” os conjuntos representados entre chavetas com os seus elementos enumerados um a um, após mais exemplos da vida real representados dessa forma. Esse modo de representação é sintetizado no final da página 12, destacado com cor diferente e encostado ao lado direito.

A determinação e designação de conjuntos em compreensão é abordada através do exemplo de conjuntos em extensão que pretendem incluir, respetivamente, todos os rios que banham África e todas as povoações de Portugal continental. Dada a dificuldade evidente em representa-los dessa forma, são ambos representados em compreensão.

Nos subcapítulos “Conjunto singular. Conjunto vazio”, “Relação de inclusão” e “Identidade entre conjuntos” são sempre utilizados exemplos familiares aos alunos nomeadamente, as iniciais dos dias da semana, rios e cidades portuguesas na abordagem desses novos conceitos. Estabelece-se

constantemente uma relação entre a linguagem simbólica da matemática e a sua tradução em linguagem corrente.

Por exemplo, para o símbolo  $\subset$  são utilizadas várias expressões verbais, nomeadamente, “está incluso em”, “é uma parte de”, “está contido em” e “é subconjunto de”. Para o símbolo  $\not\subset$  utilizam-se as respetivas negações e para o símbolo  $\supset$  a expressão “contém”.

Na página 23 do manual A, destaca-se uma nota para que o aluno não confunda uma palavra (“Dili”) com uma expressão verbal (“Capital de Timor”). Esta nota surge a propósito de um exemplo em que se considera que “Dili é a capital de Timor”. O manual pretende transmitir ao aluno que em Língua Portuguesa trata-se de duas expressões distintas mas na linguagem matemática de conjuntos são iguais, ou seja

Dili = Capital de Timor

mas

“Dili”  $\neq$  “Capital de Timor” (A, p. 23)

Observa-se ainda, na página 25, em nota de rodapé, que o verbo “ser” pode indicar, dependendo dos casos, uma relação de pertença, de inclusão ou de identidade.

São ainda introduzidos os conceitos de subconjunto, parte plena, parte própria e conjuntos idênticos, nos mesmos moldes, ou seja, recorrendo a exemplos empíricos e generalizando-os em síntese.

No manual B, também se parte geralmente de exemplos empíricos para introduzir conceitos abstratos.

A informação do manual inicia-se com um capítulo Introdutório designado “Os primeiros termos do vocabulário” introduzindo os conceitos de universo ou conjunto base (representados por letra maiúscula) e elementos de um conjunto (que se representam com letra minúscula). Esta introdução é feita com base em gravuras que representam conjuntos de pessoas, animais e objetos da vida real, em grande quantidade.

O Capítulo I designado “Conjuntos e Números” estrutura-se em três subcapítulos rotulados por ordem alfabética.

No subcapítulo A, “Noções de base”, apresentam-se ilustrações em abundância, principalmente nas primeiras páginas.

Parte-se da representação informal de conjuntos constituídos por objetos ilustrados em diagrama ou com as ilustrações entre chavetas para progressivamente se representar os elementos dos conjuntos pelos seus nomes em extensão ou por meio de uma propriedade comum aos seus elementos. Porém, o autor não faz qualquer referência à designação dessas diferentes representações, ou seja, em extensão, em compreensão ou em diagrama.

Na abordagem aos símbolos das relações de pertença e de inclusão são utilizadas várias expressões verbais, tal como nos outros dois manuais analisados.

Neste manual utilizam-se os conceitos de parte plena e parte própria ou parte estrita para designar um subconjunto que seja ou não o próprio conjunto.

O manual C insiste bastante na assimilação dos novos termos da linguagem de conjuntos dedicando algumas páginas a exercícios gramaticais. Por exemplo, nas páginas 11, 23 e 24 reescrevem-se frases trocando a ordem dos termos e solicita-se ao aluno que as complete mudando as formas verbais ou negando uma afirmação.

Verifica-se também a atribuição de várias designações na introdução de termos novos. Por exemplo, para além da abordagem aos conceitos que são referidos nos manuais A e B, utiliza-se ainda a designação de “Referencial”, “Conjunto de Referência” ou “Universo” (parece-me desnecessária a apresentação de três designações diferentes para o mesmo conceito), os termos “Atributo” e “Conjunto par”. Segundo Redinha, não há qualquer interesse no uso desta última expressão, que poderá, mais tarde, criar confusões com a noção de par.

O manual C começa por fazer uma abordagem ao conceito de conjunto e elementos de um conjunto usando exemplos da vida real e diagramas com desenhos. Utilizam-se ainda este tipo de exemplos para introduzir o conceito de conjunto singular e de conjunto vazio e as notações  $\{ \}$  e  $\emptyset$  para a representação deste. Esta notação é também apresentada no manual B, mas no manual A só se dão os conceitos e as respetivas designações destes casos particulares.

Também com um exemplo real introduzem-se no manual C as relações pertença e não pertença usando as expressões “pertence” e “é um elemento de” para o símbolo  $\in$ . Seguem-se as representações de conjuntos em extensão, compreensão e diagrama de Venn, usando estas designações. Refere-se várias vezes neste manual que na representação em extensão é irrelevante a ordem pela qual se escrevem os elementos. Na página 14 deste manual utiliza-se já o conjunto  $\mathbb{N}$  como exemplo de conjunto infinito. Também já se faz referência, nesta fase, ao conceito e notação de conjunto complementar, embora ainda não se utilize esta designação.

Seguem-se as noções de subconjunto ou “parte de” usando diagramas cujos elementos são figuras geométricas.

Este tipo de exemplos também é utilizado na introdução da relação de inclusão. Ao símbolo  $\subset$  atribuem-se as expressões “está contido em”, “é um subconjunto de” e “está incluso em” e introduzem-se ainda os símbolos  $\not\subset$  e  $\supset$ , tal como nos outros dois manuais analisados.

É ainda apresentado o conceito de conjuntos iguais usando como exemplos

$\{\text{Países da Península Ibérica}\}$  e  $\{\text{Portugal, Espanha}\}$ .

### 5.1.2. CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA

No manual A, uma correspondência biunívoca define-se como uma “correspondência um a um” ou “correspondência unívoca nos dois sentidos” (p. 27).

A abordagem do conceito é feita através de um exemplo da vida corrente em que se associa cada aluno de uma turma à sua carteira (em igual número). Em ambas as correspondências unívocas distinguem-se os antecedentes dos consequentes.

De seguida supõe-se a ausência de um aluno concreto (o Fernando), mostrando-se que nesse caso existirá apenas uma correspondência unívoca dos alunos para as carteiras. Os autores concluem, desse modo, que só é possível estabelecer uma correspondência biunívoca se ambos os conjuntos tiverem igual número de elementos.

Nesta sequência, são apresentados os conceitos de cardinal de um conjunto, que se representa simbolicamente por #, e de conjuntos equicardinais.

Na p. 29 do manual A, mostra-se que conjuntos idênticos são equicardinais mas conjuntos equicardinais nem sempre são idênticos, usando exemplos de conjuntos formados por igual número de figuras geométricas, distintas de um para o outro.

Através de ilustrações com objetos do senso comum que representam conjuntos com 1, 2, 3 ou 4 elementos, estabelece-se a relação com o respetivo cardinal, concluindo-se que “o número de elementos de um *conjunto singular* é indicado pelo *número um*.” e acrescenta-se que “o número de elementos de um *conjunto vazio* é indicado pelo *número zero*.”.

Introduzida a noção de cardinal, estabelecem-se as relações “menor do que” e “maior do que”, recorrendo a dois conjuntos A e B constituídos por planetas do sistema solar, sendo que  $B \subset A$ , que simbolicamente se traduz em  $\#B < \#A$  e  $\#A > \#B$ .

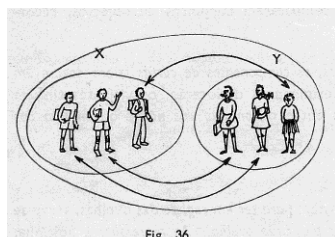
No manual B, a informação deste subcapítulo é regularmente intercalada com exercícios de completamento, contrariamente ao que acontece na primeira secção.

Tal como no manual A, usam-se vários exemplos, familiares ao aluno, de correspondências biunívocas e de correspondências unívocas num só sentido, concluindo-se que se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca, então ambos os conjuntos têm igual número de elementos. Introduzem-se então os conceitos de cardinal e conjuntos equicardinais.

O autor do manual B enriquece ainda a explicação dos conteúdos com algumas curiosidades acerca dos processos de contagem primitivos como correspondências biunívocas entre duas coleções de objetos, uma vez que não se conheciam os números.

O autor tenta ainda mostrar ao aluno que se existe correspondência biunívoca entre dois conjuntos, eles são equicardinais, mesmo que se desconheça o número de elementos de cada um, apresentando os seguintes exemplos:

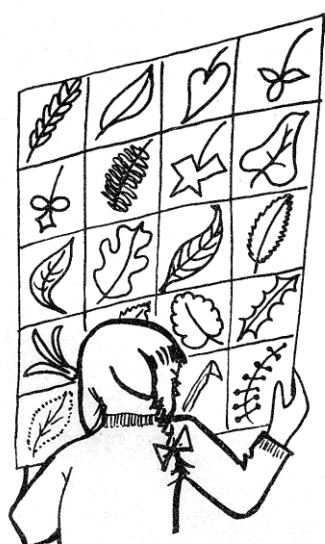
Fig. 36: cada rapaz (elemento de X) tem uma irmã (elemento de Y). (...) Não sabemos quantos são os elementos de qualquer dos conjuntos X e Y, mas sabemos afirmar, que os dois conjuntos têm o mesmo número de elementos. (B, p. 30)



**Fig. 5.1 – Correspondência biunívoca entre irmãos e irmãs. (B, p. 30)**

Porém, na ilustração estão representados um número concreto de elementos em cada conjunto, o que poderá confundir o aluno.

O mesmo se pode constatar na seguinte gravura, contradizendo o texto. Note-se, neste exemplo, a densidade e extensão dos parágrafos que acompanham a figura.



◀ Fig. 38

8. 4. Se me perguntas quantas são as elementos de um conjunto, eu não sei responder... Sei, porém, dizer-te se tem ou não tantos elementos como outro; e sei também dizer-te que o número de elementos de qualquer conjunto é igual ao número de elementos de outro conjunto que possa ser posto em correspondência biunívoca com o primeiro.

Assim, não sei quantas são as folhas que a Joaquina observa. Sei, como tu, que as folhas estão distribuídas em conjuntos chamados linhas e em conjuntos chamados colunas; e reconheço que as linhas têm todas o mesmo número de folhas e que o número de folhas de uma coluna é igual ao número de folhas de qualquer outra das colunas.

Em face dos exemplos e das considerações anteriores, podemos afirmar que

**Fig. 5.2. –Correspondência biunívoca entre as folhas e as linhas e entre folhas e colunas. (B, p. 30)**

A relação “menor do que” é introduzida com base na comparação de cardinais de dois conjuntos. A abordagem do manual A nesta secção baseia-se num só exemplo. Em contrapartida, no manual B, apresentam-se vários exemplos.

No manual B é ainda apresentado o conceito de conjunto complementar, enquanto no manual A só é introduzido no capítulo “Operações com números inteiros” na introdução do tema “Subtração”.

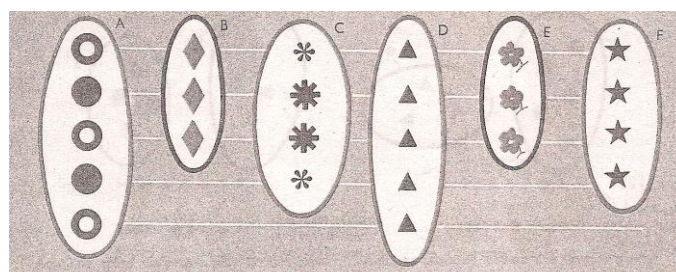
Este tópico é introduzido no manual C apresentando como título “Correspondência entre elementos de conjuntos”. Segundo a Inspeção, este título não está de acordo com o conceito matemático de correspondência, uma vez que a correspondência é definida entre conjuntos e não entre elementos.

O exemplo usado para abordar o conceito de correspondência unívoca também está relacionado com o real. De um conjunto de 5 cães e outro com 3 meninos, faz-se corresponder cada cão a um menino, designando essa correspondência de unívoca. Novamente aqui se relewa a gramática portuguesa pedindo ao aluno para reparar no prefixo uni.

Usando o mesmo exemplo, estabelece-se a correspondência recíproca e, uma vez que a alguns meninos correspondem mais do que um cão, refere-se que esta correspondência não é unívoca.

Com base no exemplo anterior, altera-se o número de elementos de cada conjunto, sendo agora um deles formado por 3 cães e o outro por 3 meninos. Desta vez, existe uma correspondência biunívoca que o livro apresenta também como “correspondência um a um nos dois sentidos” (C, p. 28).

No entanto, a conclusão de que a correspondência biunívoca só existe entre conjuntos com o mesmo número de elementos só se expõe com um novo exemplo, após uma página com exercícios de aplicação. Desta vez, usam-se imagens de flores ou figuras geométricas sem qualquer ligação ao real.



**Fig. 5.3 – Representação de vários conjuntos para relacionar a possibilidade de correspondência biunívoca entre dois conjuntos com o número de elementos desses conjuntos. (C, p. 30)**

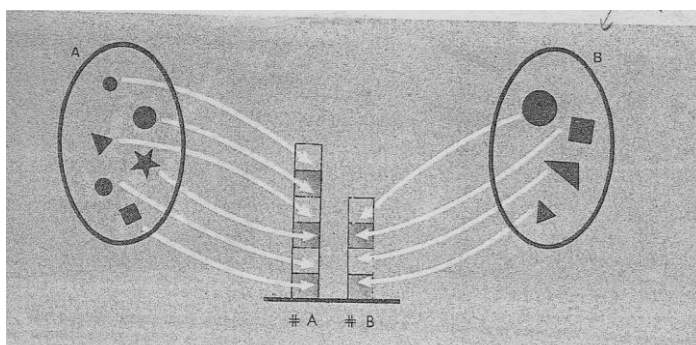
Os vários conjuntos são diferentes. Tomando dois deles, C e F, diz-se que é possível estabelecer correspondência biunívoca porque têm o mesmo número de elementos.

O manual C, ao contrário dos outros dois, não designa estes conjuntos de equicardinais, mas sim de conjuntos “iguais em número”, que segundo Redinha, poderá causar alguma confusão com o conceito de conjuntos iguais.

As relações “menor que” e “maior que” (e respetivos símbolos de desigualdade) são abordados neste tópico, tomando exemplos de dois conjuntos disjuntos e também um conjunto e seu subconjunto, tal como no manual B. Nos vários exemplos, os elementos dos conjuntos são sempre figuras geométricas.

Os autores do manual C explicam também as relações de igualdade e desigualdade entre cardinais nos dois sentidos, trocando os membros. Nos manuais A e B também se mostra esta relação nos dois sentidos, apenas para a desigualdade e, apenas nestes dois, também acompanhada da respetiva leitura.

A representação de cardinais por meio de retângulos ou régua a cores é feita exclusivamente no manual C.



**Fig. 5.4 - Representação de cardinais por meio de “barras numéricas” (C, p. 33)**

Redinha refere não concordar com a motivação da representação de números por meio de retângulos. De facto, na figura observa-se uma correspondência biunívoca entre o conjunto A (ou B) e um conjunto de quadrados, sendo que os quadrados não representam o cardinal de A, mas um conjunto equipotente de A.

O enunciado “Escreve por extenso as relações indicadas (...)” (C, p. 34), segundo Redinha, não está formulado com clareza. Os autores pretendem aqui que o aluno traduza em linguagem corrente o que está representado em linguagem simbólica.

O manual C estabelece ainda a relação analógica entre os símbolos  $\subset$  e  $\supset$ , e os símbolos  $<$  e  $>$ , respetivamente.

### 5.1.3. CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

No subcapítulo “Conjuntos finitos. Conjuntos infinitos” os autores do manual A mostram que um número inteiro é o cardinal de um conjunto finito, usando vários exemplos de conjuntos finitos definidos em extensão cujos elementos são países, cidades, rios ou serras.

Note-se que, segundo as indicações do programa do CPES para o 1º ano, “a expressão “número inteiro”, na acepção em que é aqui usada, será mais tarde substituída pela expressão “número inteiro absoluto” quando forem introduzidos os números negativos.” (portaria 23601, p. 1397, aspas no original).

Com a apresentação de exemplos também da vida real, como o conjunto de árvores do globo terrestre ou de todos os peixes, os autores lembram que nem sempre se torna fácil definir alguns conjuntos em extensão, dado o elevado número de elementos, apesar de se tratar de conjuntos finitos.

Segue-se então a referência ao conjunto dos números inteiros como um exemplo de conjunto infinito.

A abordagem dos números muito grandes no manual B, apresenta um longo texto. O autor conta uma história sobre gotas de água num dia de chuva. Nessa história, um professor questiona os seus alunos acerca do número de gotas de água que terão caído no jardim, ao que os discípulos respondem o número cem, dado ser o maior número que conheciam. Então o professor questionou-os acerca das gotas que teriam caído no bairro ou mesmo em toda a cidade levando-os a concluir que seria um número muito superior a cem. Então, um dos meninos foi escrever no quadro um número que lhe parecesse suficientemente grande e parou quando obteve o número 1 seguido de cem zeros. Desta forma, o autor refere-se ao googol. Também com o exemplo dos grãos de areia que há no mar, o autor apresenta o googolplex referindo que “É, na verdade, não apenas um número muito grande, mas *um número muitíssimo grande*, sem, contudo, ser o maior de todos...” (B, p. 56), procurando assim intuir no aluno a noção de infinito.

A propósito destes dois novos números, introduzem-se as potências de base 10 e apresenta-se o conjunto dos números inteiros como exemplo de conjunto infinito.

O autor refere-se ainda ao conceito de sucessão e à sucessão dos números inteiros, o que me parece prematuro neste nível de aprendizagem e só vem acrescer o volume de informação e a introdução de termos novos que o manual B contém.

À semelhança dos outros dois, o manual C apresenta exemplos realistas de conjuntos finitos com um número muito elevado de elementos: número de azeitonas de um olival, número de astros da Via Látea (que, segundo o manual C corresponde a 100 000 000 000).

A história do googol é fictícia, porém permite que o aluno se possa consciencializar da grandiosidade do googol:

Imagina o conjunto de todos os astros (estrelas, planetas e cometas) (...) Um cientista calculou que para “encher” estes astros e os espaços intermédios seria necessário um número aproximado de grãos de areia expresso pelo algarismo 1 seguido de cem zeros (C, p. 45)

A definição de googolplex é de um número formado pelo algarismo 1 seguido de um googol de zeros (C, p. 45), transmitindo a ideia de que se trata de um número grandioso e muito maior que o próprio googol.

Como exemplos de conjuntos infinitos é apresentado o conjunto de pontos de uma reta, bem como os conjuntos  $\mathbb{N}$  (dos números naturais) e  $\mathbb{Z}$  (dos números inteiros). Estes dois últimos exemplos também são apresentados no manual B, sem que o autor utilize esta notação e o manual A só faz referência ao conjunto dos números inteiros. Apenas o manual C utiliza a notação para estes conjuntos, contrariando as indicações programáticas que referem que “*não será ainda oportuna a introdução de símbolos para designar universos numéricos.*” (portaria 23601, p. 1397, itálico no original).

### 5.1.4. RELAÇÃO ENTRE OS MANUAIS DO CPES E O CURRÍCULO

Os manuais analisados do CPES cumprem os aspetos essenciais do currículo. Há porém algumas indicações que são omitidas e outras que vão para além daquilo que é referido no programa de Matemática do CPES (anexo 7).

<b>MANUAL A (Natália Almeida D’Eça &amp; outros)</b>	
Aspetos não contemplados no manual	Papel dos adjetivos na definição de conjuntos por meio de propriedades;
	Exemplos da relação de inclusão entre conjuntos representados em compreensão;
	Exemplo do processo primitivo de contagem dos animais de um rebanho por correspondência biunívoca com pedras ou riscos;
	Uso da letra N como abreviatura da expressão “número de elementos de”;
	Exemplos recreativos de números muito grandes como o do googol e do googolplex;
Aspetos que não constam no programa	Troca do sinal de uma desigualdade com a troca da ordem dos termos (pp. 31).

**Quadro 5.1 – Comparação do conteúdo do manual A com as indicações do currículo (Conjuntos)**

<b>MANUAL B (Augusto Lopes)</b>	
Aspetos não contemplados no manual	Coordenação com o estudo da Língua Portuguesa: substantivos próprios, comuns e coletivos; papel dos adjetivos na definição de conjuntos por meio de propriedades;
	O verbo “ser” na linguagem corrente e as relações “pertença”, “inclusão” e “igualdade”;
	Uso da letra N como abreviatura da expressão “número de elementos de”;
Aspetos que não constam no programa	Troca do sinal de uma desigualdade com a troca da ordem dos termos (pp. 33);
	Noção de sucessão: sucessão dos números inteiros e sucessão dos números naturais (pp. 58-59);
	Conjunto dos números naturais(pp. 59).

**Quadro 5.2 – Comparação do conteúdo do manual B com as indicações do currículo (Conjuntos)**

<b>MANUAL C (Santos Heitor, Francelino Gomes &amp; Raúl Heitor)</b>	
<b>Aspetos não contemplados no manual</b>	Noção de parte própria ou parte estrita;
	O verbo “ser” na linguagem corrente e as relações “pertença”, “inclusão” e “igualdade”;
<b>Aspetos que não constam no programa</b>	Noção de atributo oposto (pp. 10);
	Noção intuitiva de conjunto complementar e terminologia (pp. 13)
	Troca do sinal de uma desigualdade com a troca da ordem dos termos (pp. 32);
	Conjunto dos números naturais(pp. 45);
	Representação do conjunto dos números inteiros e do conjunto dos números naturais, respetivamente por $\mathbb{IN}_0$ e $\mathbb{IN}$ .

**Quadro 5.3. – Comparação do conteúdo do manual C com as indicações do currículo (Conjuntos)**

### 5.1.5. ATIVIDADES

Os exercícios do manual A, no Capítulo “Conjuntos e Números” inicialmente são repetitivos, no tipo de questão e no tipo de resposta, sendo geralmente de completamento ou resposta curta.

Comprovando a importância concedida à linguagem de conjuntos pelos novos programas, na sua maioria os exercícios favorecem a memorização de símbolos e designações, solicitando-se inúmeras vezes a representação de conjuntos e subconjuntos em extensão, indicação do cardinal, completamento com símbolos no âmbito de relações de pertença, inclusão, etc. Há muitas questões similares, de aplicação direta dos conhecimentos adquiridos sobre linguagem e representação de conjuntos, diferindo apenas no contexto do enunciado.

É ainda solicitada uma justificação ao aluno na questão 29b da p. 44 o que lhe permitirá desenvolver a capacidade de comunicar em linguagem matemática.

Há, embora em quantidade muito reduzida, alguns exercícios que estimulam o raciocínio, a criatividade e a capacidade de resolução de problemas. É o caso dos exercícios 24 da p. 38 e 33b da p. 46.

Alguns exercícios são ainda um pouco trabalhosos. É o caso do nº 27 e 28 da página 42 em que se solicita ao aluno a representação dos dados de uma tabela num gráfico de barras. No intuito de conferir um carácter realista ao estudo da matemática, são fornecidos os valores relativos ao parque automóvel entre 1962 e 1967 e à população de diversas províncias ultramarinas obtida nos censos de 1960. Tendo

em conta a escala a considerar, em ambos os casos, revelam-se tarefas complexas e trabalhosas. Seguem-se as tabelas dos exercícios 27 e 28, respetivamente.

**Tabela 5.1 – Dados estatísticos para construção de gráfico de barras. (A, p. 42)**

Anos	Automóveis ligeiros de passageiros	Outros tipos de veículos motorizados
1962	180 000	110 000
1963	198 000	117 000
1964	211 000	120 700
1965	243 500	134 300
1966	280 000	143 800
1967	316 000	152 900

**Tabela 5.2 – Dados estatísticos para construção de gráfico de barras. (A, p. 42)**

Províncias	População (censo de 1960)	Arredondamento para a dezena de milhar
Cabo Verde	201 549	200 000
Guiné	568 300	570 000
S. Tomé e Príncipe	63 676	60 000
Macau	169 299	170 000
Timor	517 079	520 000

*Escala : 1 mm — 5 mil habitantes.*

Os exercícios práticos do manual B relativos ao subcapítulo A, Noções de base, encontram-se apenas no final do mesmo. Na minha perspetiva, deveriam surgir exercícios com maior regularidade para uma melhor apreensão de conteúdos por parte do aluno, dada a grande quantidade de novos conceitos e símbolos que são introduzidos na parte inicial do livro.

O tipo de questões é bastante diversificado, variando entre o completamento, a resposta curta, a indicação do valor lógico de afirmações, apresentação de justificações ou de exemplos. Há também uma questão de resposta aberta que permite ao aluno a manipulação de material solicitando-lhe exemplos de conjuntos e registo de conclusões.

Pretende-se que o aluno assimile os novos símbolos e conceitos mas também que desenvolva o raciocínio e a sua capacidade de comunicação em linguagem matemática. Alguns exercícios exigem conhecimentos relacionados com outras disciplinas.

No manual C, são poucos os enunciados relacionados com a realidade. Usam-se, na maioria dos casos, figuras geométricas, números ou letras para representar os elementos dos conjuntos. Há um exagero na quantidade de questões de completamento, tratando-se essencialmente de questões de resposta curta, de aplicação direta dos novos conteúdos: completamento com símbolos, indicar o cardinal de um conjunto, indicar se se trata de um número ordinal ou cardinal, de um conjunto finito ou infinito, traduzir em linguagem simbólica ou corrente, ou preencher os elementos de um conjunto numa representação em extensão.

## **5.2. OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS**

Na análise deste capítulo pretendo estudar a nova forma de abordagem das operações aritméticas, tendo por base a linguagem de conjuntos, conforme as indicações dos novos programas.

### **5.2.1. REUNIÃO E INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS**

Apesar deste tópico se relacionar com a teoria de conjuntos, resolvi inclui-lo nesta parte, uma vez que, no currículo prescrito, é no capítulo “Operações com Números inteiros” que se encontra inserido, sendo também abordado apenas nesta parte em todos os manuais do CPES que analisei. Esta organização justifica-se pelo facto de a introdução das operações aritméticas de adição e subtração de inteiros positivos ser agora feita com base nos conceitos de reunião e intersecção de conjuntos.

Os três manuais abordam este tópico associando regularmente a linguagem corrente aos símbolos matemáticos que se utilizam. Associam a intersecção e a reunião de conjuntos às conjunções “e” e “ou”, respetivamente.

Os conjuntos são apresentados de diferentes formas, mas os três manuais privilegiam a representação em diagrama de Venn, mostrando exemplos de conjuntos disjuntos e não disjuntos.

No manual A, a abordagem dos conceitos de reunião e intersecção é feita com base num exemplo da vida real.

Recorre à representação em diagrama de Venn de dois conjuntos que se intersejam em alguns elementos, formados pelos nomes dos engenheiros e dos professores no universo dos elementos de

uma família, e estabelecem-se relações de pertença dos elementos aos conjuntos, indicando depois a reunião.

Neste contexto, dispõem-se ainda o conjunto dos engenheiros e dos professores de diferentes formas (como subconjunto um do outro, como conjuntos idênticos ou disjuntos), determinando-se a reunião para cada caso. Aqui é apresentado o conceito de conjuntos disjuntos.

A intersecção é introduzida com a apresentação de um outro exemplo ligado ao real com dois conjuntos não disjuntos em diagrama e em extensão, representando-se a intersecção após a análise de várias relações de pertença dos respetivos elementos.

São ainda feitas, destacando-se com letra de cor diferente e negrito, analogias entre a linguagem simbólica de conjuntos e a linguagem corrente. Atribui-se a conjunção disjuntiva “ou” à reunião de conjuntos e a conjunção copulativa “e” à intersecção. Além disso, também se destacam outras preposições da linguagem corrente que se relacionam com a reunião e intersecção:

**A reunião de dois conjuntos X e Y é o conjunto dos elementos que pertencem pelo menos a um dos conjuntos X e Y.** (A, p. 49, itálico e negrito no original)

(...) **A intersecção de dois conjuntos X e Y é o conjunto dos elementos que pertencem, simultaneamente, a X e a Y.** (A, p. 50, negrito no original).

Refere-se ainda neste tópico que a intersecção de dois conjuntos disjuntos é um conjunto vazio, apenas em linguagem corrente.

A informação é entremeadada de alguns espaços em branco e exercícios para o aluno completar.

No final desta secção encontram-se vários exercícios de aplicação em que já são utilizados, para além de situações da vida real, também conjuntos numéricos em extensão ou definidos por uma propriedade.

O manual B, na abordagem destes conceitos, recorre essencialmente a desenhos ligados ao real na representação de elementos dos conjuntos. Os exemplos deste tipo apresentam-se em grande quantidade (19 figuras apenas neste tópico). Em alguns exemplos, o autor recorre também ao uso de letras, figuras geométricas e números para representar elementos de conjuntos.

São também apresentadas situações diversas: reunião de conjuntos disjuntos e reunião de conjuntos não disjuntos; reunião de conjuntos, sendo um deles singular ou vazio.

Apenas no manual B se representam a reunião ou intersecção de conjuntos definidos em compreensão.

Também no manual B, o autor relaciona constantemente a linguagem simbólica de conjuntos com a linguagem corrente.

Define reunião relevando a conjunção disjuntiva “ou” da seguinte forma:

Se A e B são *dois conjuntos* (num universo dado), *qualquer elemento do conjunto  $A \cup B$  é, ou elemento de A, ou elemento de B ou, então, elemento dos dois conjuntos; cada elemento de*

$A \cup B$  tem a propriedade de pertencer a um dos conjuntos (A ou B) ou aos dois (B, p. 74, itálico no original).

Num dos exemplos apresentados no manual B, o autor exprime com grande detalhe todas as situações possíveis para os elementos da reunião de dois conjuntos no universo dos alunos de uma escola. Sendo F o conjunto dos futebolistas e B o conjunto dos basquetebolistas, o autor refere:

(...) a conjunção disjuntiva ou e a conjunção copulativa e servem para separar os elementos do conjunto  $F \cup B$ , tendo em conta as propriedades *ser futebolista* (praticar o futebol), *ser basquetebolista* (praticar o basquetebol).

Um elemento do conjunto  $F \cup B$  é

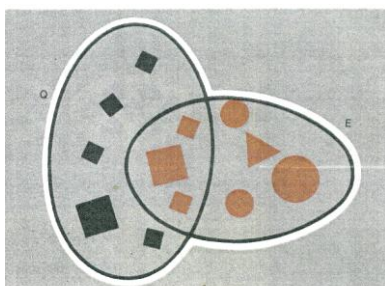
- ou futebolista e não basquetebolista
- ou basquetebolista e não handebolista
- ou handebolista e basquetebolista (B, p. 75, itálico no original)

Note-se que, nesta citação, existe um lapso que poderá causar confusão aos alunos: onde se lê “handebolista” deve ler-se “futebolista”.

O manual B, para além dos conceitos de reunião, intersecção e conjuntos disjuntos ou separados, apresenta as designações de conjunção copulativa e conjunção disjuntiva, referindo ainda que a reunião e a intersecção são operações binárias (pois a partir de dois conjuntos determina-se outro conjunto).

Nas 10 páginas de texto referentes a esta secção, há apenas um pequeno exercício de completamento. O aluno só é novamente solicitado a realizar tarefas no final deste tópico, onde se encontram diversos exercícios de aplicação.

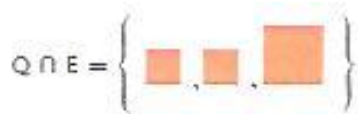
No manual C, é usado o mesmo exemplo na abordagem dos conceitos de reunião e intersecção. Este exemplo é destituído de contexto real:



**Fig. 5.5 – Representação de dois conjuntos não disjuntos para estudo da intersecção e reunião. (C, p. 51)**

Tratam-se de dois conjuntos não disjuntos Q e E e, em cada um deles, existem elementos iguais, bem como na própria intersecção. Embora o exemplo, desta forma, aparente alguma complexidade,

permite ao aluno compreender que os elementos repetidos também se representam na interseção e na reunião, embora os elementos comuns só se escrevam uma única vez.



**Fig. 5.6 – Representação em extensão da interseção de dois conjuntos (C, p. 49)**



**Fig. 5.7 – Representação em extensão da reunião de dois conjuntos. (C, p. 51)**

O manual C sintetiza os conceitos de interseção e reunião, respectivamente com as seguintes frases:

O conjunto interseção  $Q \cap E$  é constituído pelos elementos que pertencem a Q e também pertencem a E.

O conjunto reunião  $Q \cup E$  é constituído pelos elementos que pertencem, pelo menos, a um dos dois conjuntos Q e E. (C, p. 49)

As conjunções copulativa e disjuntiva são apresentadas numa Observação dos autores, relacionando-as respetivamente com a interseção e a reunião de conjuntos.

A distinção entre conjuntos disjuntos e não disjuntos é feita com recurso a dois novos exemplos, ambos com figuras e contextualização real. Aqui, os autores mostram que a interseção de conjuntos disjuntos é um conjunto vazio, formalizando de seguida em linguagem corrente e simbólica.

Ao longo das três páginas de informação que constituem esta secção, aparecem com frequência diversos exercícios e espaços em branco para o aluno completar.

### 5.2.2. ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Nos três manuais analisados, utiliza-se a linguagem de conjuntos para introduzir o conceito de Adição: o cardinal da reunião de dois conjuntos disjuntos é igual à soma dos cardinais desses dois conjuntos.

No manual A utilizam-se três exemplos de conjuntos disjuntos, relacionados com o real, para os quais se determina o cardinal do conjunto reunião, sendo que nos dois últimos, os elementos de ambos os conjuntos não são da mesma natureza.

É então referido que se podem somar os cardinais de dois conjuntos disjuntos, ou seja, determinar o cardinal da reunião, mesmo que a natureza dos elementos, de um para o outro, seja diferente.

É ainda apresentado um exemplo ligado ao real com a reunião de três conjuntos, disjuntos dois a dois,  $A \cup B \cup C$ , determinando-se também a soma dos cardinais desses três conjuntos, começando por determinar o cardinal da reunião de A e B.

Apresenta-se ainda no manual A parte da Tabuada da Adição em tabela de dupla entrada, donde se observa com letra de cor diferente, após alguns exemplos com recurso à notação dos pares ordenados, que “a cada par de elementos do conjunto dos números inteiros a adição faz corresponder outro número inteiro.” (A, p. 55).

As propriedades da adição são explicadas com base na teoria de conjuntos. Recorre-se ao cardinal da reunião de conjuntos disjuntos, tomando esquemas com cartas, em que cada uma representa um conjunto e os seus elementos são os naipes desenhados.

A propriedade comutativa é introduzida através da reunião dos conjuntos X, carta com 3 copas, e Y, carta com 4 ouros. Trocando a ordem das cartas, mostra-se que  $X \cup Y = Y \cup X$ . Por conseguinte,  $\#(X \cup Y) = \#(Y \cup X)$ , ou seja,  $3 + 4 = 4 + 3$ . A informação é então generalizada, após este único exemplo.

Para introduzir a propriedade associativa, usa-se um exemplo semelhante, recorrendo à imagem de cartas. Consideram-se, desta vez, três conjuntos: X, carta com 3 copas, Y, carta com 5 ouros e Z, carta com 2 paus, e ilustra-se a reunião  $X \cup Y \cup Z$ .

Uma vez que já foi explicado que  $X \cup Y \cup Z = (X \cup Y) \cup Z$ , ou seja que,  $\#(X \cup Y \cup Z) = \#(X \cup Y) + \#Z$ . Conclui-se então que  $3 + 5 + 2 = (3 + 5) + 2$ .

O manual refere que a reunião supramencionada se pode fazer de outro modo, não explicando devidamente por que razão isso pode ser feito:

$$X \cup Y \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

$$\text{Deste modo, } \#(X \cup Y \cup Z) = \#X + \#(Y \cup Z)$$

$$\text{ou seja, } 3 + 5 + 2 = 3 + (5 + 2). \quad (\text{A, p. 57})$$

Conclui-se que  $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$  e a informação é generalizada.

Novamente se recorre a imagens com cartas para exemplificar a existência de elemento neutro da adição. Desta vez, consideram-se um conjunto X, carta com 5 copas, e Y, carta branca. A ilustração permite mostrar que  $X \cup Y = X$ , e considerando os cardinais de ambos os membros da igualdade, tem-se que  $5 + 0 = 5$  ou, pela propriedade comutativa,  $0 + 5 = 5$ . A generalização é novamente apresentada na sequência deste único exemplo.

O manual mostra ainda algumas aplicações das propriedades comutativa e associativa para facilitar o cálculo mental ou para tirar a prova por inversão ou a prova por adições parciais, usando exemplos.

No primeiro caso, considera-se por exemplo, a soma  $23 + 16$ , que é calculada, decompondo as parcelas na soma das dezenas com as unidades, à semelhança do que se faz no algoritmo da adição, que também é explicado ao lado:

$$\begin{aligned} 23 + 16 &= (20 + 3) + (10 + 6) = \\ &= (20 + 10) + (3 + 6) = \\ &= 30 + 9 = 39 \end{aligned}$$

Disposição prática

$$\begin{array}{r} 23 \\ + 16 \\ \hline 39 \end{array}$$

$\begin{array}{l} \text{Linha superior: } 3 \text{ e } 9 \\ \text{Linha inferior: } 3 + 6 \\ \text{Linha inferior: } 20 + 10 \end{array}$

(A, p. 59)

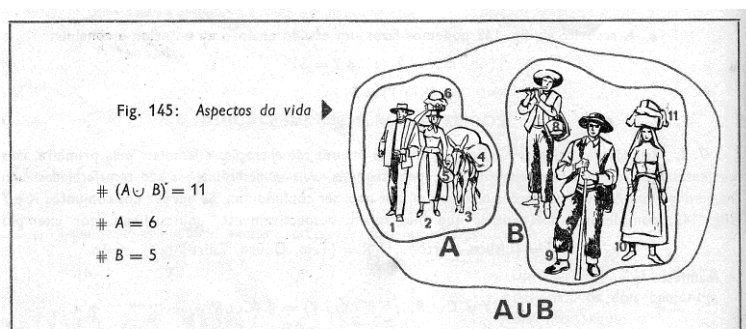
É ainda apresentada como exemplo, outra técnica de cálculo mental, nos casos em que é possível obter, adicionando duas parcelas, um número cujo algarismo das unidades é zero e que, neste caso concreto, envolve a propriedade comutativa (p. 60):

$$\begin{aligned} 27 + 75 + 3 &= \\ &= 27 + 3 + 75 = \\ &= 30 + 75 = \dots \end{aligned}$$

O autor do manual B pretende que os alunos associem a soma à contagem dos elementos de dois conjuntos disjuntos, como um todo. Por exemplo, tomando um conjunto F com 3 elementos e um conjunto B com 4, obtém-se o número de elementos de  $F \cup B$  enumerando os elementos de F e estendendo a contagem aos elementos de B, recorrendo à seguinte notação (B, p. 82):

(1, 2, 3) ; (4, 5, 6, 7)

Os elementos de cada conjunto também são enumerado nos diagramas, como se observa na figura:



**Fig. 5.8 –Determinação do cardinal da reunião de dois conjuntos disjuntos por contagem do total de elementos (B, p. 82)**

A nomenclatura para a soma é idêntica nos três manuais, utilizando-se três formas diferentes de representação, como consta, por exemplo, da p. 80 do manual B:

$$\#A = 3; \#B = 1; \#(A \cup B) = 4$$

$$\begin{array}{r} (3, 1) \quad 4 \\ \quad \quad \quad \curvearrowright \\ 3 + 1 = 4 \end{array}$$

O manual B também apresenta uma tabela de dupla entrada que representa parte da tabuada da adição.

A propriedade comutativa da adição é introduzida com base na tabela da adição, tomando como exemplo inicial o cruzamento da linha 5 com a coluna 8 e o cruzamento da linha 8 com a coluna 5. Observa-se então que a soma é igual e recorre-se à notação em par ordenado:

$$\begin{array}{l} (5, 8) \quad \curvearrowright \quad 5 + 8 = 13 \\ (8, 5) \quad \curvearrowleft \quad 8 + 5 = 13 \end{array} \quad (\text{B, p.87})$$

O autor apresenta exemplos da referida propriedade com outras parcelas, usando também retângulos a cores:

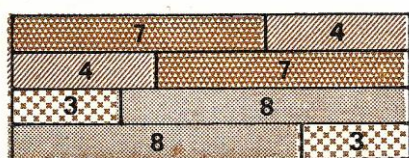


Fig. 152

**Fig. 5.9 – Representação da propriedade comutativa da adição usando retângulos a cores. (B, p. 87)**

A propriedade é enunciada em linguagem corrente. Estende-se a propriedade comutativa à soma com mais de duas parcelas, mostrando a sua aplicação para facilitar o cálculo mental.

A propriedade associativa é introduzida recorrendo à linguagem dos conjuntos, através de uma atividade que consiste em recortar 5 discos azuis, que formam o conjunto A; 4 vermelhos, formando o conjunto B; e 3 amarelos, conjunto C.

O aluno é solicitado a agrupar os discos de modo a formar os conjuntos  $A \cup B \cup C$ ,  $(A \cup B) \cup C$  e  $A \cup (B \cup C)$ . Em cada caso, o aluno terá de contar os elementos obtidos e constatar que esse número é sempre igual.

Formalizam-se então o número de elementos dos três conjuntos obtidos por reunião, concluindo-se que  $5 + 4 + 3 = (5 + 4) + 3 = 5 + (4 + 3) = 12$ .

A propriedade associativa é então generalizada na sequência deste único exemplo, o que não é habitual neste livro. A generalização é feita usando figuras geométricas a substituir variáveis.

A propriedade de existência de elemento neutro da adição é também introduzida, partindo da reunião de conjuntos. Verifica-se, com vários exemplos, que reunindo um conjunto qualquer com o conjunto vazio, independentemente da ordem, se obtém o próprio conjunto. Formaliza-se então a propriedade, com exemplos de somas de duas parcelas, sendo uma delas igual a zero e destaca-se que “o zero é elemento neutro, a respeito da adição dos números inteiros.” (B, p. 91).

O autor explica ainda que se pode eliminar uma parcela nula da expressão de uma soma.

Destaca-se ainda que a adição de números inteiros é uma operação universal e uniforme, respetivamente porque quaisquer que sejam os inteiros, a soma existe e é um número inteiro único.

O manual B mostra de seguida algumas aplicações das propriedades comutativa e associativa cálculo de somas.

Começa por explicar o processo usual do cálculo de uma soma, por decomposição aditiva das parcelas, por ordens decimais. Somam-se os números da mesma ordem, usando as propriedades supramencionadas e por fim somam-se os números das várias ordens.

O autor faz ainda alusão às máquinas de somar do tipo digital, apresentando uma fotografia acompanhada de um texto explicativo do seu funcionamento.

Mostra-se ainda a aplicação das propriedades comutativa e associativa na prova real da adição. A primeira propriedade, na prova por inversão e a segunda na prova por adições parciais, referindo-se a sua utilidade no caso em que há muitas parcelas a adicionar.

Também se evidencia a utilidade das propriedades no cálculo mental, recorrendo a diversos exemplos e vários processos para a mesma soma: decomposição aditiva e escolhas diferentes de parcelas na execução das somas parciais.

Na secção “Adição de números inteiros”, no manual B, o aluno é frequentemente solicitado a realizar tarefas, nomeadamente, preencher espaços em branco, resolver exercícios de aplicação, realizar atividades que envolvem manipulação de materiais.

Os três manuais distinguem “soma” de “adição”, respetivamente como resultado e operação. Também distinguem “reunião” de “soma”.

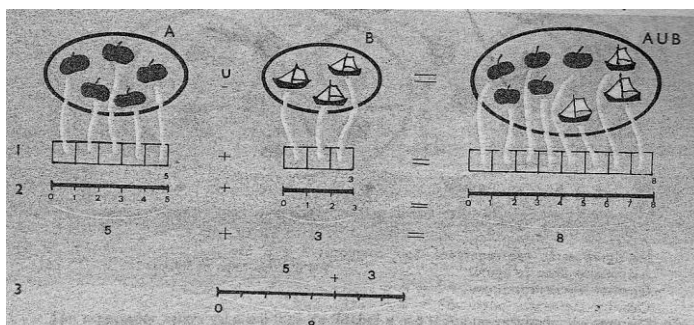
Os manuais A e B recorrem a imagens familiares aos alunos na representação dos elementos dos conjuntos em extensão ou diagrama, embora apenas o manual A os contextualize.

Já no manual C, a adição é introduzida com um esquema onde se representa novamente o cardinal de cada um de dois conjuntos disjuntos usando “barras numéricas” (que os autores assim designam entre aspas). O número de quadrados que compõem cada barra é igual ao cardinal do respetivo conjunto, sendo que o número de quadrados da barra correspondente ao conjunto reunião (cardinal da reunião) é a soma dos quadrados das barras correspondentes aos dois conjuntos disjuntos que se reuniram.

É ainda focado o caso do cardinal da reunião de dois conjuntos não disjuntos. Dados dois diagramas A e B, não disjuntos e formados por figuras geométricas, refere-se que

$$\#A + \#B > \#(A \cup B)$$

Volta-se ao exemplo inicial, apresentando-se agora um novo processo de determinação da soma:



**Fig. 5.10 – Cardinal do conjunto reunião de dois conjuntos disjuntos como soma dos cardinais desses dois conjuntos, recorrendo à representação de cardinais por “barras numéricas” e segmentos de reta (C, p. 56)**

Acrescenta-se então que o processo de contagem também pode ser feito através de “rectas numéricas” (também entre aspas no original), não se tratando, na verdade, de retas mas de segmentos de reta. As expressões “barras numéricas” e “rectas numéricas” aplicadas nestes esquemas foram apontadas como bizarras e incorretas pela Inspeção. Contudo, mantem-se nesta edição do manual C, repetindo-se noutros locais desta obra.

Também no manual se utiliza a notação de correspondência de um par ordenado à soma, referindo que “a adição passa-se *internamente*, dentro do conjunto dos números inteiros.” (C, p. 57, itálico no original).

Distingue-se ainda soma de adição e apresenta-se parte da tábua de adição, com parcelas compreendidas entre 0 e 5, solicitando ao aluno o seu completamento.

O zero é apresentado como elemento neutro da adição, partindo da representação de uma reunião de um conjunto de 4 elementos com um conjunto vazio. Este conjunto continua apresentado em diagrama, como um círculo em branco, aspeto apontado por Redinha como desaconselhável. Ao cardinal da reunião apresentada iguala-se a soma dos cardinais dos dois conjuntos disjuntos. Após mais dois exemplos formais, generaliza-se a propriedade de existência de elemento neutro, mas apenas à direita.

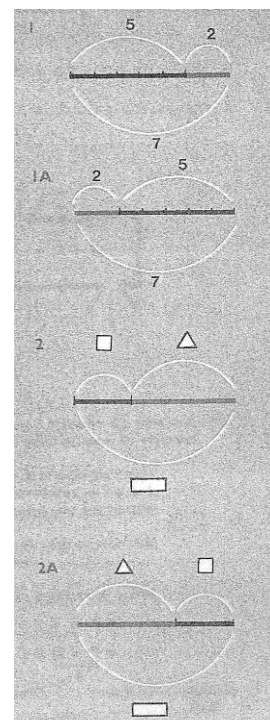
Segue-se a propriedade comutativa, introduzida com esquemas de segmentos de reta como consta na figura 13.

A propriedade comutativa é generalizada em linguagem corrente e simbólica, com figuras geométricas.

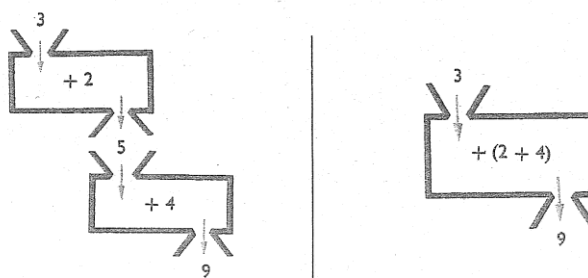
Segue-se a noção de variável. Aqui os autores substituem as figuras geométricas da generalização anterior por letras, ou seja,  $x + y = y + x$ , concretizando-as em dois exemplos e explicando o conceito de variável.

O conceito de soma como cardinal da reunião de conjuntos mutuamente disjuntos, estende-se a mais de dois conjuntos, explicando-se então a propriedade associativa.

Para o efeito, usam-se esquemas de duas “máquinas de adição” que procedem ao cálculo da soma  $3 + 2 + 4$  de duas formas diferentes: começando por somar as duas primeiras parcelas, ou por somar a segunda e a terceira, respetivamente:



**Fig. 5.11 – Representação da propriedade comutativa da adição usando segmentos de reta**



**Fig. 5.12 – Propriedade associativa da adição representada com esquemas de “máquinas de adição” (C, p. 61)**

Generaliza-se, usando novamente figuras geométricas como símbolos, e apresentam-se exercícios em que se pede ao aluno para esboçar uma máquina de calcular para substituir as apresentadas e completar cálculos onde se usam parênteses.

Mostram-se então algumas aplicações das propriedades comutativa e associativa na resolução de problemas e nas técnicas de cálculo mental, recorrendo-se à decomposição aditiva das parcelas.

É ainda recordado o algoritmo da adição, já estudado na escola primária, mas o processo envolvido neste não é explicado ao aluno.

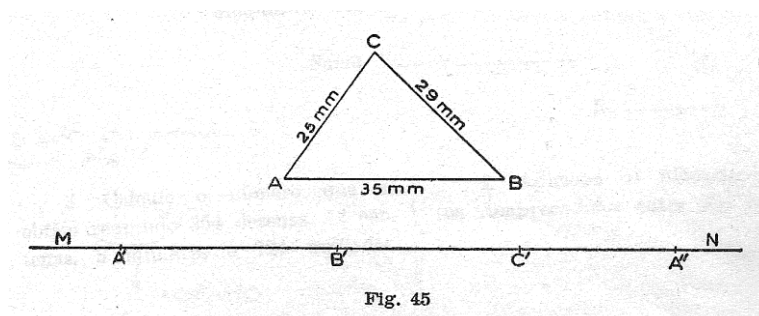
Mostram-se ainda a aplicação das propriedades comutativa e associativa, respetivamente, na prova real da adição por inversão e por adições parciais.

O manual C apresenta ainda o cálculo de uma soma com muitas parcelas, usando múltiplos de 10 com aproximações para as parcelas, para estimar o valor da soma e verificar se é aceitável.

No manual D, a abordagem da adição e subtração reflete a importância concedida à área temática da Geometria antes da criação do CPES.

O conceito de soma é introduzido com base no cálculo do perímetro de um polígono ou linha poligonal, numa situação não contextualizada no real.

Marcam-se sucessivamente os segmentos de reta que constituem a poligonal sobre uma reta e determina-se o comprimento do segmento obtido.



**Fig. 5.13 – Representação dos lados de um triângulo sobre uma reta de modo a calcular a sua soma (perímetro do polígono) (D, p. 37)**

O autor designa por perímetro a reunião desses segmentos sobre a reta, referindo ainda que o segmento obtido é a soma dos vários segmentos, que designa por parcelas. O conceito de soma é assim atribuído a um conjunto de pontos e não a um número (medida do segmento).

Da mesma forma se confunde soma com reunião quando o autor refere, no enunciado de um exercício: “Calcule o número que se obtém reunindo 354 dezenas, 42 centenas (...)”. (D, p. 39)

Na secção “Adição de números”, o autor distingue os conceitos de soma e adição referindo que “a determinação da soma de vários números tem o nome de **adição**.” (p. 38, negrito no original).

A propriedade comutativa é introduzida a partir do problema:

João comprou um livro por 18\$, depois uma lapiseira por 21\$ e por último um esquadro por 15\$. O António comprou os mesmos objetos pelas mesmas quantias, mas por ordem diferente: primeiro o esquadro, depois o livro e por último a lapiseira.

Quanto gastou cada um? (D, p.41)

Traduzindo o enunciado nas respetivas somas, o autor verifica a obtenção do mesmo valor, e regista a propriedade comutativa em linguagem corrente.

Para introduzir a propriedade associativa, usa-se uma soma de quatro parcelas, partindo de um problema do real:

Duas condiscípulas, Isabel e Beatriz, compraram os seguintes objectos:

Um estojo de desenho por 80\$

Uma régua por ..... 12\$

Um tubo de guache por 6\$

Um canivete por ..... 20\$

Isabel comprou tudo no mesmo dia, mas Beatriz comprou num dia o estojo e os restantes objetos no dia seguinte.

Quanto gastou cada uma? (D, p. 42)

Como ambas gastaram a mesma importância, o autor mostra que

$$80 + 12 + 6 + 20 = 80 + (12 + 6 + 20)$$

e enuncia a propriedade associativa, também após um só exemplo.

De seguida, o autor refere-se às provas da adição por inversão da ordem das parcelas e por adições parciais, apresentando um exemplo de cada e a respetiva descrição. Enquanto no primeiro caso, a soma é constituída por 3 parcelas, no segundo exemplo utiliza 7 parcelas. O autor indica algumas questões que levarão o aluno a refletir acerca das propriedades envolvidas nesta última prova e o cálculo de somas, tirando ambas as provas.

Partindo de problemas concretos, são ainda explicadas algumas técnicas para facilitar o cálculo mental.

O primeiro exemplo, por decomposição aditiva, adição primeiro das dezenas e depois das unidades, estando implícita a propriedade associativa, e por fim os dois resultados, à semelhança dos manuais do CPES.

No segundo exemplo, usa-se a propriedade comutativa, associando depois as quatro parcelas, duas a duas, uma vez que dessa forma se obtém múltiplos de 10, mais fáceis de adicionar. Esta técnica também é explicada nos manuais do CPES.

Neste capítulo, os textos são entremeados de atividades ou exercícios, sem solução, não havendo mais de duas páginas sem exercícios.

### 5.2.3. SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Na abordagem da subtração os três manuais partem de um conjunto em diagrama e um seu subconjunto, usando exemplos familiares, e introduzem o conceito de subtração com base no cardinal do conjunto complementar. Enquanto no manual A são utilizados dois exemplos com nomes de cidades e de oceanos, no manual B recorre-se novamente a vários exemplos com gravuras como elementos dos conjuntos. Há ainda neste manual um conjunto mais abstrato, onde apenas figuram letras, sem qualquer contextualização real.

O conjunto complementar é representado nos três manuais por  $Y \setminus X$ , sendo que  $X \subset Y$ . Utiliza-se ainda o símbolo  $\overline{X}$  para essa representação, apenas nos manuais A e C.

Os manuais estabelecem regularmente uma relação entre linguagem simbólica e linguagem corrente e apelam com frequência à intervenção do aluno com questões de completamento.

Os manuais A e B utilizam a expressão adverbial “não” para a operação de complementação. Nos manuais A e C, a expressão matemática  $T \setminus P$  lê-se “T menos P”.

O manual B acrescenta ainda que  $X$  e  $Y \setminus X$  são conjuntos disjuntos e o manual C indica também que  $\overline{P} \cap P = \emptyset$  e  $\overline{P} \cup P = T$ , sendo T o universo.

A noção de diferença é então introduzida como sendo o cardinal do conjunto complementar.

No manual A, são dados dois conjuntos M e N cujos elementos são planetas do sistema solar. Com espaços para o aluno preencher pretende-se induzi-lo a descobrir que a diferença dos cardinais é igual ao cardinal do conjunto complementar, pedindo-lhe para: justificar que  $N \subset M$ ; definir  $\overline{N}$ ; traduzir simbolicamente “M menos N é igual a  $\overline{N}$ ”; indicar o número de elementos de M, N e  $\overline{N}$ , concluindo-se depois que  $\#M - \#N = \# \overline{N}$ , ou seja,  $7 - 3 = 4$ .

Segue-se uma síntese que a meu ver carece de rigor: “A diferença entre dois números é o cardinal do conjunto complementar.” (A, p. 62)

Nesta definição não se explicitam os dois conjuntos envolvidos na determinação do complementar nem qual a relação entre os números dos quais se determina a diferença com esses conjuntos.

Destaca-se então a subtração como operação inversa da adição.

Para o efeito, é dado um problema real cujo enunciado é:

A Cidália tinha no frigorífico 22 ovos e, depois guardou *mais* 8; ficou, portanto, com 30. Mas, como para a preparação de um bolo tirou 8 ovos, no frigorífico ficou o número que estava inicialmente” (A, p. 64).

Este problema aparece acompanhado de um esquema, mostrando que

$$22 + 8 = 30$$

$$30 - 8 = 22$$

Introduz-se então a variável  $x$ , numa progressiva formalização para equações do tipo  $x + a = b$ , sendo  $a$  e  $b$  inteiros.

Noutra situação, é dada a equação  $x + 3 = 7$ , designada como tal. Os autores referem que há apenas um valor para a *incógnita*  $x$  que torna verdadeira essa igualdade (A, p. 65, itálico no original).

Usando a figura de uma balança como esquema (p. 65), consta no manual que

$$x = 7 - 3$$

Sob o título “Propriedades da subtração”, começa-se por considerar a diferença entre uma soma e um número, ligada a uma situação concreta do real:

No dia de anos, José recebeu do pai *sete* livros e, da madrinha, *quatro* – mas, depois, ofereceu a um dos irmãos *dois* desses livros. Com quantos ficou? (A, p. 66, itálico no original)

O enunciado é traduzido na expressão  $(7 + 4) - 2$ , retirando-se os livros oferecidos pelo José à soma dos livros que recebeu. O valor representado é calculado igualando a expressão a  $11 - 2 = 9$ .

No manual, são ainda considerados outros dois raciocínios para responder à questão, tendo em conta, respetivamente, a possibilidade do José ter retirado os dois livros dos quatro que a madrinha lhe deu, ou dos sete que o pai lhe deu. Isto leva a concluir que para subtrair um número a uma soma pode-se subtrair esse número a uma das parcelas. Esta informação é generalizada desta forma e também recorrendo ao uso de letras em linguagem simbólica, após o exemplo apresentado.

A diferença entre uma número e uma soma é introduzida e generalizada após um só exemplo da vida corrente, em que também se utilizam raciocínios diferentes na obtenção do valor pretendido:

Elisa tem *vinte e quatro* lápis de cor, mas entregou *cinco* à Maria e *nove* à Manuela. Quantos lhe restaram? (A, p. 67, itálico no original).

Tendo em conta que a Elisa pode entregar logo os 14 lápis, que se traduz em  $24 - (5 + 9)$ , ou pode entregar primeiro 5 e depois 9, que se traduz em  $(24 - 5) - 9$ , ou simplesmente  $24 - 5 - 9$ ,

conclui-se que para subtrair uma soma a um número, pode-se subtrair, sucessivamente, as diversas parcelas, ou seja, suprimir os parênteses, trocando os sinais.

Através de uma nova situação problemática, mostra-se por raciocínio análogo que para obter a diferença entre duas somas, pode-se subtrair da primeira, sucessivamente, as parcelas da segunda. A generalização é apresentada novamente após um único exemplo, em linguagem corrente e simbólica, usando variáveis.

O manual alerta, nestes dois últimos casos, que a supressão dos parênteses, mantendo os sinais, dá lugar a uma expressão com valor diferente, apresentando o devido exemplo.

É ainda abordada a propriedade da invariância do resto, partindo de um exemplo que se prende com a atividade lúdica dos alunos. Recorrendo à imagem de um tabuleiro de damas com 8 peças, ilustra-se que retirando 5 peças, se obtém 3. O esquema é acompanhado da subtração  $8 - 5 = 3$  e generalização com uso de variáveis  $a - b = c$ .

Considerando a imagem do mesmo tabuleiro, na situação inicial mas acrescentando mais duas peças, perfazendo  $8 + 2$ , retiram-se agora  $5 + 2$  peças, obtendo-se novamente 3.

O esquema é acompanhado da subtração  $(8 + 2) - (5 + 2) = 3$  e da generalização com variáveis,  $(a + d) - (b + d) = c$ .

De modo análogo, se mostra que  $(8 - 2) - (5 - 2) = 3$ , generalizando.

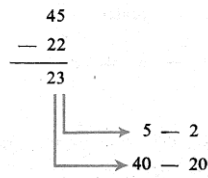
A informação é sistematizada no final da página 68, em linguagem simbólica, usando letras, e em linguagem corrente.

O manual explica ainda algumas aplicações das propriedades da subtração no cálculo mental, estabelecendo uma analogia com o algoritmo da subtração (A, p. 69):

II  $45 - 22 = (40 + 5) - (20 + 2) =$

$$= 40 + 5 - 20 - 2 =$$

$$= (40 - 20) + (5 - 2) =$$

$$= 20 + 3 = 23$$


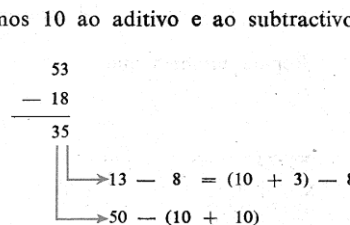
III  $53 - 18 = (50 + 3) - (10 + 8) =$

adicionamos 10 ao aditivo e ao subtrativo

$$= (50 + 13) - (20 + 8) =$$

$$= 50 + 13 - 20 - 8 =$$

$$= (50 - 20) + (13 - 8) =$$

$$= 30 + 5 = 35$$


As equações tipo  $a - x = b$  e  $x - a = b$  são dadas após as propriedades da subtração, com base na prova real da subtração, tendo em conta que a subtração é a operação inversa da adição. Usando como exemplo a diferença  $1968 - 379$  (que é igual a 1589), e que os autores do manual designam de forma imprecisa por subtração, mostra-se que

subtrativo + resto = aditivo, o que permite resolver equações do tipo  $x - a = b$   
 e aditivo – resto = subtrativo, o que permite resolver equações do tipo  $a - x = b$ .

Neste caso, não se parte de situações concretas do real e a informação inclui apenas símbolos matemáticos acompanhados de breves explicações em linguagem corrente.

Ao longo do texto, há diversos espaços para preencher e, no final deste tópico são dados vários exercícios de aplicação.

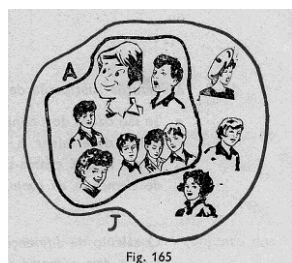
A abordagem da Subtração de inteiros positivos, no manual B, também se baseia na teoria de conjuntos, recorrendo a diversos exemplos e formalizando em linguagem corrente e simbólica:

Se são dados dois conjuntos X e Y, supondo que X está contido em Y, sabemos, a partir deles, determinar o conjunto  $Y \setminus X$ . À operação que consiste em formar o conjunto  $Y \setminus X$  chama-se, como já dissemos, *complementação*. Querendo saber o número de elementos do conjunto  $Y \setminus X$ , temos de calcular a *diferença*

$$\#Y - \#X \quad (\text{B, p. 102})$$

Na citação acima existe um erro tipográfico no texto original. Assim, onde se lê “está contido em X”, deveria ler-se “está contido em Y”. Também na página 103 deste manual, onde se lê “ $15 = 9 + 5$ ” deveria ler-se “ $15 = 9 + 6$ ”.

No primeiro exemplo (p. 101), a figura 165 representa um conjunto J e um seu subconjunto A em diagrama, formados por imagens de pessoas, sem qualquer contexto.



**Fig. 5.14 – Representação do conjunto complementar. (B, p. 101)**

Refere-se então que

$$\#J = 10 ; \#A = 7$$

Ora, o conjunto  $J \setminus A$  é o complementar de A (em J), sendo certo que

$$J = A \cup (J \setminus A)$$

e que A e  $J \setminus A$  são conjuntos disjuntos, já sabemos que

$$\#J = \#A + \#(J \setminus A)$$

ou seja

$$10 = 7 + \#(J \setminus A)$$

(...) A figura mostra que  $\#(J \setminus A) = 3$ ; então podemos escrever,

$$3 = 10 - 7$$

Esta igualdade significa exactamente que

$$10 = 3 + 7 \quad (\text{B, p. 101})$$

Denotam-se aqui algumas imprecisões de sintaxe e pontuação, mas a linguagem é rigorosa do ponto de vista científico. Neste exemplo já se induz a noção de subtração como operação inversa da adição, que só será tratado em páginas posteriores.

Seguem-se outros exemplos, representando os conjuntos em extensão, cujos elementos são números ou palavras.

O autor analisa ainda, de forma explícita e devidamente identificadas por títulos, a possibilidade da subtração e a subtração como operação inversa da adição.

No primeiro caso, dá-se um exemplo cujo resto é nulo, uma vez que o aditivo e o subtrativo são iguais.

Segue-se o exemplo da subtração  $15 - 9 = 3$  (note-se, novo lapso), pedindo ao aluno para identificar o aditivo e o subtrativo.

O autor refere então que  $15 - 9$  e  $9 - 15$  são expressões diferentes, sendo que a segunda diferença não existe no conjunto dos números inteiros, sintetizando esta informação em destaque num retângulo colorido. Sendo de grande importância o reconhecimento de que a subtração não goza de propriedade comutativa e da impossibilidade, no conjunto dos números inteiros (não negativos), de se obter uma diferença onde o aditivo é inferior ao subtrativo, curiosamente este aspeto só é focado no manual B.

Na abordagem da subtração como operação inversa da adição, o autor solicita ao aluno a seguinte atividade: de um conjunto A de 15 selos ou botões, o aluno deve destacar um conjunto B de cardinal 6, obtendo  $A \setminus B$ , e reuni-lo de novo com o conjunto  $A \setminus B$ , refazendo o conjunto A.

O autor explica então que, ao formar o conjunto  $A \setminus B$  tem-se que

$$15 - 6 = 9$$

e com a recomposição do conjunto A tem-se

$$15 = 9 + 6$$

O autor conclui, usando o símbolo de equivalência, mas não se referindo ao seu significado:

$$15 - 6 = 9 \Leftrightarrow 15 = 9 + 6$$

O autor evidencia assim o facto de subtração e adição serem operações inversas e utiliza ainda operadores inversos na igualdade

$$(15 - 6) + 6 = 15$$

Segue-se a generalização:

$$\text{Aditivo} - \text{subtrativo} = \text{resto} \Leftrightarrow \text{aditivo} = \text{resto} + \text{subtrativo} \quad (\text{B, p. 104})$$

De modo formal, tendo em conta esta equivalência, solicita-se a resolução de equações do tipo  $a + x = b$ .

As propriedades da subtração são introduzidas partindo geralmente de um problema concreto.

Para a subtração de um número a uma soma enuncia-se o seguinte:

Fui ao meu jardim. Colhi flores: 7 rosas, 9 túlipas, 8 gladiolos. Dei 6 das flores, todas da mesma qualidade. (B, p. 104)

O número de flores com que fiquei traduz-se na expressão  $(7 + 9 + 8) - 6$ .

Considerando que as 6 flores retiradas eram da mesma qualidade, poderá subtrair-se 6 das 7 rosas, das 9 túlipas ou dos 8 gladiolos, que originam respetivamente as expressões  $(7 - 6) + 9 + 8$ ,  $7 + (9 - 6) + 8$  e  $7 + 9 + (8 - 6)$ . Solicitando ao aluno o cálculo do valor de cada uma, verifica-se que são equivalentes.

Supondo ainda que as 6 flores retiradas correspondem a duas de cada qualidade, a expressão  $(7 - 2) + (9 - 2) + (8 - 2)$  também representa o mesmo valor.

São então apresentadas várias expressões equivalentes para obtenção do número de flores com que o ramo ficou.

Os procedimentos não são sistematizados, deixando outros em aberto. Questiona-se o aluno acerca da existência de outros procedimentos para obter a resposta pretendida e segue-se um exercício onde o aluno terá de calcular a diferença entre uma soma e um número escolhendo qualquer procedimento que seja do seu agrado.

Para a subtração de uma soma a um número, considera-se o seguinte problema:

“Eu tenho um ramo com 25 flores; quero dar 8 ao Carlos, 5 à Isabel e 4 à Maria. Com quantas vou ficar?” (B, p. 106).

Novamente se mostra a equivalência entre expressões que levam à obtenção da resposta pretendida: supondo que se retiram as 17 flores de uma só vez, tem-se  $25 - (8 + 5 + 4)$ ; e se retirar as flores por vezes sucessivas para cada pessoa, tem-se  $[(25 - 8) - 5] - 4$  ou  $25 - 8 - 5 - 4$ .

Não se sistematiza a regra mas pede-se ao aluno para explicar como se podem suprimir os parênteses numa subtração de uma soma a um número e seguem-se exercícios.

A subtração de duas somas é abordada partindo da seguinte situação:

“No meu jardim, *colhi rosas*: primeiro 15, depois 8 e mais 10. *Dei algumas das rosas*: primeiro 5, depois 7 e ainda 6.” (B, p. 107, itálico no original)

Supondo que se colheram as 33 rosas e se deram as 18 rosas, de uma só vez, o número de rosas que restaram é representado pela expressão  $(15+8+10) - (5+7+6)$ , que é igual a 15.

O autor explica que também irão restar 15 rosas se se forem dando as rosas à medida que se vão colhendo, ou seja, que a expressão  $(15 - 5) + (8 - 7) + (10 - 6)$  tem o mesmo resultado, 15, pedindo ao aluno para verificar os cálculos.

Apresentam-se algumas expressões numéricas que representam a diferença entre duas somas, e pede-se ao aluno para refletir e registar no caderno o procedimento para de uma soma subtrair outras cujas parcelas sejam ordenadamente iguais ou menores que as da primeira.

Pede-se ainda ao aluno para verificar que uma diferença entre duas somas, dada como exemplo, tem o mesmo valor que outras expressões apresentadas (diferentes, mas equivalentes). Aqui o aluno possivelmente constatará que a supressão dos parênteses na segunda soma, implica a troca dos sinais dessas parcelas.

A invariância do resto é já apresentada com recurso apenas a exemplos formais. Num deles, determina-se apresenta-se a subtração  $15 - 6 = 9$ . Somam-se 8 unidades ao aditivo e ao subtrativo e comprova-se a obtenção do mesmo resultado. Noutros exemplos, também se mostra a propriedade da invariância do resto, subtraindo a mesma unidade ao aditivo e ao subtrativo.

A informação é então generalizada, em destaque, usando linguagem corrente.

Mostram-se depois as aplicações das propriedades da subtração no algoritmo usual da subtração, que os alunos já conheciam da escola primária, tanto quando o subtrativo tem apenas um algarismo, como nos casos em que aditivo e subtrativo têm vários algarismos. Efetua-se a decomposição aditiva das parcelas e subtraem-se os números da mesma ordem decimal.

A prova real da subtração apresenta-se sem explicação ou base intuitiva. O autor apenas a enuncia, referindo que se a soma do subtrativo com o resto for igual ao aditivo, a operação está provavelmente certa (B, p. 110). Esta igualdade já tinha sido explicada na página 104.

Após as propriedades da adição e subtração, o manual aborda as equações do tipo  $x - a = b$ . É apresentado um problema de contexto real:

“Eu colhi rosas, no meu jardim. Dei 25; fiquei com 15. Quantas colhi?” (B, p. 110)

O manual traduz o enunciado na equação  $x - 25 = 15$ , concluindo que  $x = 15 + 25$ , ou seja,  $x = 40$ .

São ainda abordadas as equações do tipo  $a - x = b$  com o seguinte problema:

“Dos seus 125 escudos, o Carlos só tem 38. Quanto já gastou?” (B, p. 111)

Neste exemplo, o autor substitui a letra  $x$  por um  $\square$ :

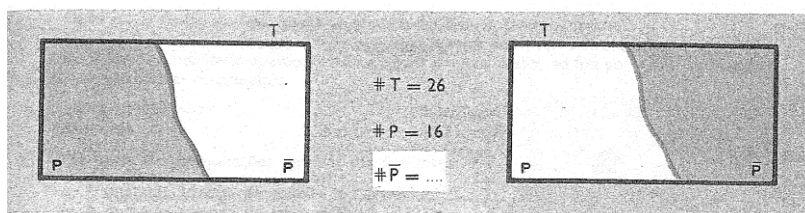
$$125 - \square = 38$$

O autor reformula a questão, perguntando que número deve subtrair-se a 125, para ter 38 (p. 111), obtendo-se:

$$\square = 125 - 38 = 87$$

No manual B, existem regularmente tarefas para o aluno realizar ao longo da informação textual. No final desta secção há diversos exercícios de aplicação.

À semelhança dos manuais A e B, também no manual C se estabelece a igualdade entre o cardinal do conjunto complementar,  $\overline{P}$ , e a diferença entre os cardinais de T e P, recorrendo-se ao seguinte esquema, em que T representa uma turma e P um seu subconjunto de alunos que têm irmãos.



**Fig. 5.15 – Representação de um conjunto e do seu complementar. (C, p. 69)**

Escreve-se que  $26 - 16 = 10$ , associando-se este resultado ao cardinal do conjunto complementar de P em T.

A figura da direita sugere também que é possível trocar o subtrativo e o resto, ou seja,

$$26 - 10 = 16.$$

Esta questão também é abordada no manual A.

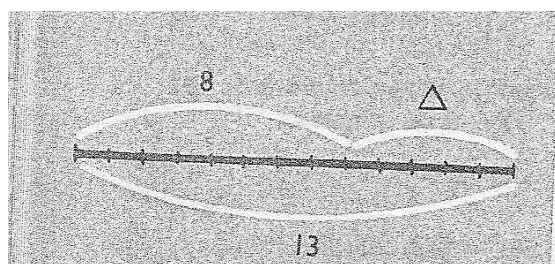
O manual C começa por fazer referência ao conjunto complementar de P, indicando de seguida que o cardinal de  $\bar{P}$  é igual à diferença entre os cardinais de T e P; depois refere-se novamente ao assunto da complementação mostrando que

$$p \notin P \Rightarrow p \in \bar{P}$$

voltando posteriormente ao conceito de subtração.

Os autores utilizam o símbolo de implicação explicando que significa “se...então” (C, p. 70). Porém, denominam de 1º membro e 2º membro as condições utilizadas, de forma imprecisa e sem que os alunos conheçam esses conceitos.

O manual C utiliza a “recta numérica” também no cálculo de uma diferença, como se observa na seguinte figura:



**Fig. 5.16 – Determinação de uma diferença usando o esquema de segmento de reta. (C, p. 70)**

Novamente se apresenta um segmento de reta que se designa no manual por “recta numérica” (p. 70), não se tratando apenas de um lapso uma vez que isso se repete várias vezes no manual. Apesar da utilização das aspas, não se podem confundir os dois conceitos.

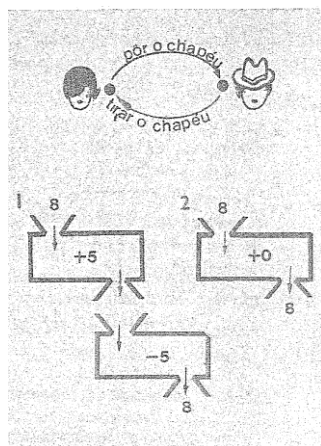
A respeito do esquema acima o manual coloca as seguintes questões:

“Quanto falta a 8 para obter 13?

Ou: qual o complemento de 8 para 13?” (C, p. 70)

Os autores usam assim duas formas de se expressarem matematicamente na mesma questão.

A subtração é também apresentada como operação inversa da adição, tal como nos manuais A e B. Utilizam-se no manual C situações reais que correspondem a “operações inversas”, nomeadamente, pôr e tirar o chapéu, subir e descer, dar e receber a mesma quantia. Utilizam-se também aqui os habituais esquemas de máquinas de calcular para explicar esta relação entre as duas operações.



**Fig. 5.17 – Representação de operações inversas do dia a dia e utilização de operadores inversos num esquema com “máquinas de adição”. (C, p. 71)**

Utiliza-se ainda a expressão  $\square + \Delta - \Delta = \square$ , evitando-se o uso de letras, para concluir em síntese que a subtração é a operação inversa da adição. No parecer da Inspeção, este esquema não mostra que a operação subtração é a inversa da adição, confundindo-se aqui operações inversas com operadores inversos. Segundo Redinha, para justificar que a subtração é operação inversa da adição, é necessário mostrar que as equações  $a + x = b$  e  $x + a = b$  têm a mesma solução. Esta relação deve ser explicada recorrendo apenas a trabalhos práticos baseados nessas equações, atendendo à idade dos alunos e à dificuldade que terão em perceber integralmente o conceito de operação inversa.

Verifica-se no manual C um recurso frequente a figuras geométricas, tanto para representar elementos de conjuntos, como nas generalizações que são feitas, evitando o uso de letras, embora já se tenha introduzido de forma explícita a noção de variável na p. 59 deste manual.

Este aspeto contraria as indicações do programa do CPES que recomenda a introdução moderada, e de maneira progressiva, do uso de letras em igualdades muito simples, a propósito da definição das operações inversas, das propriedades das operações, por se ter verificado, em situações conduzidas com êxito, que esse recurso facilita consideravelmente ao aluno a aprendizagem da matemática, colocando-o, além disso, em condições muito mais favoráveis para a iniciação no estudo da álgebra, que se fará posteriormente. (Portaria 23601, p. 1396).

O manual C, nesta primeira abordagem à subtração, foca ainda as equações do tipo  $a + x = b$ .

É dada como exemplo a equação  $7 + x = 10$ , onde se indicam o 1º e 2º membros, acompanhada da sua tradução em linguagem corrente:

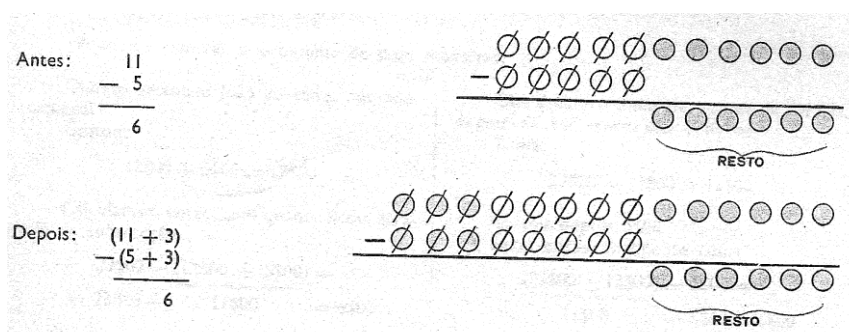
“x é o número que somado com 7 dá 10 de soma” (C, p. 71, aspas no original)

Explica-se então que  $x = 3$  para que a igualdade seja verdadeira, registando-se

$$x = 10 - 7 = 3$$

e a verificação de que  $7 + 3 = 10$

A propriedade da invariância do resto é abordada recorrendo-se a esquemas auxiliares, que representam discos de duas cores diferentes.



**Fig. 5.18 – Propriedade da invariância do resto (C, p. 72)**

A regra é registada em linguagem corrente, após este último exemplo.

É ainda explicada a aplicação do princípio da invariância do resto no processo usual de subtração.

Aplica-se ainda a prova real da subtração baseada na propriedade

$$\text{Subtrativo} + \text{resto} = \text{aditivo}$$

Seguem-se cálculos de diferenças entre uma soma e um número, entre um número e uma soma e entre duas somas.

A primeira situação é apresentada de modo formal com esquemas de calculadoras, como na figura ao lado (C, p. 73):

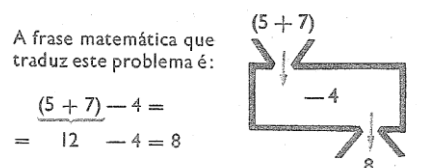
No segundo caso, recorre-se ao enunciado do problema:

O João saiu à rua com 23\$00. Foi comprar um livro, que lhe custou 12\$00, e de seguida um chocolate, que lhe custou 5\$00. Voltou depois para casa. Que dinheiro trazia ainda ao chegar a casa? (C, p. 74)

Na obtenção da resposta, seguem-se raciocínios diferentes, tal como nos manuais A e B: subtraindo a despesa total aos 23\$00, tem-se a expressão  $23\$00 - (12\$00 + 5\$00)$ ; subtraindo aos 23\$00 as duas despesas, sucessivamente, tem-se  $(23\$00 - 12\$00) - 5\$00$ . (C, p. 74).

Conclui-se então que  $23 - (12 + 5) = (23 - 12) - 5$ . Retira-se os parênteses do 2º membro por convenção. A regra não é generalizada, apenas se observa que o sinal + escrito antes do 5, foi substituído pelo sinal - no 2º membro.

Problema — «À soma de 5 e 7 subtrair 4».



**Fig. 5.19 – Diferença entre uma soma e um número (C, p. 73).**

Esta regra é aplicada ao cálculo mental de uma diferença, num exemplo onde se revela oportuna a decomposição aditiva do subtrativo em duas parcelas:

$$\begin{aligned}
 247 - 149 &= \\
 &= 247 - (147 + 2) = \\
 &= 247 - 147 - 2 = \\
 &= 100 - 2 = \\
 &= 98 \quad (\text{C, p. 74})
 \end{aligned}$$

O terceiro caso é também abordado de modo formal, recorrendo-se aos esquemas com máquinas de calcular, tal como no primeiro caso apresentado (C, p. 75):

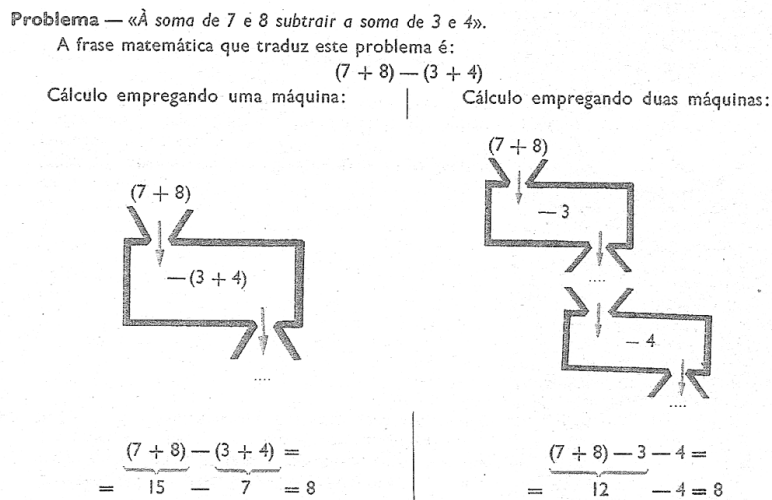


Fig. 5.20 – Diferença entre duas somas (C, p. 75).

As equações  $a - x = b$  e  $x - a = b$  aparecem após as propriedades da subtração, à semelhança dos outros manuais.

A explicação de ambas é apoiada em esquemas de barras como se mostra na figura:

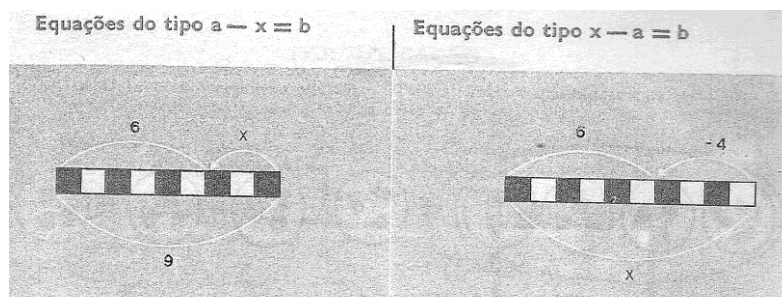


Fig. 5.21 – Resolução de equações por meio de “barras” (C, p. 76).

Considerando a figura da esquerda, evidencia-se a equivalência das equações  $9 - x = 6$ ,  $9 = x + 6$  e  $x = 9 - 6 = 3$ ; na da direita, a equivalência das equações  $x - 4 = 6$  e  $x = 4 + 6 = 10$  (sem que se utilize o símbolo ou a designação de equivalência).

Distinguem-se ainda os conceitos de “subtração” e “diferença” de forma explícita nos manuais A e B e atribuem-se aos elementos da operação de subtração as designações de aditivo ou diminuendo; subtrativo ou diminuidor; diferença, resto ou excesso. No manual C, aos dois primeiros apenas se atribui a designação de aditivo e subtrativo.

A Subtração é abordada no manual D com base em medições, conforme se pode constatar na figura:

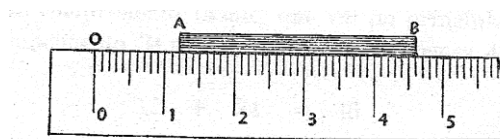


Fig. 51

**Fig. 5.22 – Abordagem da subtração (D, p. 47).**

Uma vez que, o comprimento da barra AB (utiliza-se esta notação para o segmento de reta), colocada entre os 12 mm e os 46 mm, se obtém retirando 12 unidades às contidas no número 46, a situação descrita é formalizada na operação  $46 - 12 = 34$ .

À semelhança dos manuais A, B e C, também aqui se designa esta operação por subtração, bem como os seus termos por aditivo ou diminuendo, subtrativo ou diminuidor, e resto, excesso ou diferença.

A propriedade fundamental da subtração é abordada a partir novamente da figura 51 que é reproduzida nesta secção. A figura sugere que adicionando 12 mm, que vão do princípio da escala até à barra AB, aos 34 mm de comprimento da barra, obtém-se 46 mm, donde  $46 - 12 = 34$  equivale a  $12 + 34 = 46$ , ou seja, o diminuendo é igual à soma do diminuidor com o resto.

O princípio da invariância do resto, que é explicado sem a atribuição de qualquer designação, também parte de uma ilustração semelhante à figura 51. Neste caso, a barra AB está colocada entre os 8 mm e os 33 mm. Através de questões orientadas, verifica-se que o comprimento de “AB” é  $33 - 8 = 25$  mm; deslocando a barra 9 mm para a direita, o comprimento mantém-se, donde o aluno deverá concluir que  $(33 + 9) - (8 + 9) = 25 = 33 - 8$ , e o recíproco, da segunda subtração para a primeira.

O autor regista as propriedades em linguagem corrente.

A prova da subtração é dada por um exemplo onde se aplica a propriedade fundamental.

Para o desenvolvimento do cálculo mental, no caso da subtração, parte-se do enunciado de um problema do quotidiano que se traduz no cálculo da diferença  $54 - 9$ . O autor explica em linguagem corrente que, para facilitar o cálculo, deve-se decompor o diminuidor em parcelas, que se subtraem sucessivamente, ou seja, proceder da seguinte forma:  $54 - 9 = 54 - (4 + 5) = 54 - 4 - 5 = 50 - 5 = 45$ .

A subtração de um número por uma soma é assim referida como subtração sucessiva desse número pelas parcelas, sem que essa regra seja apresentada ao aluno de forma intuitiva.

É ainda dado um exemplo em que o procedimento anterior é aplicado duas vezes. Apresenta-se, sem contextualizar, a diferença  $348 - 96$  e decompõe-se 96 nas parcelas 40 e 56. Obtém-se  $308 - 56$  e decompõe-se, desta vez, 56 em  $50 + 6$ .

O texto que integra o capítulo “Subtração de números inteiros” é entremeadado de questões orientadas e exercícios de consolidação, terminando com exercícios de revisão.

#### 5.2.4. MULTIPLICAÇÃO

A abordagem desta operação é feita, nos três manuais do CPES, com base na reunião de conjuntos equicardinais, disjuntos dois a dois, ou seja, como soma de parcelas iguais.

No manual A, apresentam-se apenas um exemplo para a soma com 2 parcelas e outro para uma soma de 3 parcelas, sendo a abordagem idêntica nos dois exemplos.

No primeiro, consideram-se dois conjuntos em extensão, A e B, formados por figuras geométricas, disjuntos e com 4 elementos cada um, observando-se que

$$\begin{aligned} \#A + \#B &= 2 \times \#A = \#(A \cup B) \\ 4 + 4 &= 2 \times 4 = 8 \end{aligned} \quad (\text{A, p. 74})$$

De modo análogo, usando agora três conjuntos disjuntos dois a dois, representados em extensão, cada um formado pelo nome de dois instrumentos musicais, faz-se equivaler o cardinal do conjunto reunião, ou seja a soma das 3 parcelas, ao triplo do cardinal de um dos conjuntos.

Os autores distinguem ainda multiplicação de produto.

É feita ainda uma breve referência aos numerais multiplicativos mostrando, numa tabela, a correspondência entre numerais cardinais e respetivo numeral multiplicativo.

Apresenta-se ainda a imagem de uma máquina de calcular do tipo digital e parte da tabuada pitagórica da multiplicação, incluindo o fator zero, e observando que esta se encontra definida no conjunto dos números inteiros.

Seguem-se as propriedades da multiplicação. A propriedade comutativa apresenta-se com um exemplo real, acompanhado de esquema, de um parque de estacionamento onde se dispõem 28 automóveis em matriz retangular. Referindo que dois amigos observam o parque de ângulos diferentes, um vê 4 filas de 7 automóveis e o outro vê 7 filas de 4, concluindo-se assim que  $4 \times 7 = 7 \times 4$ , generalizando de seguida.

A propriedade de existência de elemento neutro é explicada com base na tabuada da multiplicação, generalizando após a apresentação de dois exemplos.

A propriedade de existência de elemento absorvente é explicada considerando como exemplo o produto  $4 \times 0$  como soma de parcelas iguais, ou seja,  $0 + 0 + 0 + 0$ , que o aluno reconhece como sendo igual a 0.

Usando a propriedade comutativa, refere-se que também  $0 \times 4 = 0$  e generaliza-se de seguida esta propriedade.

Na introdução da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, parte-se de um problema ligado ao real e devidamente ilustrado:

“Numa cesta há seis peras e, noutra, há três; se duplicarmos o número de peras, quantas ficarão ao todo (fig. 42)?” (A, p. 78)

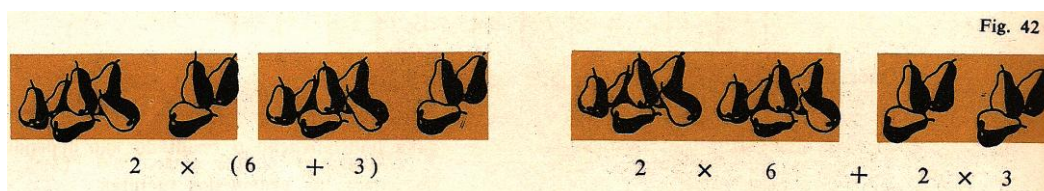


Fig. 5.23 – Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (A, p. 78).

Generaliza-se de seguida em linguagem corrente e simbólica

O recíproco da propriedade distributiva é também explicado, seguindo-se as orientações programáticas, já numa linguagem formalizada, ou seja, destaca-se o fator comum, que é colocado em evidência.

De seguida, mostram-se aplicações das propriedades comutativa e distributiva tanto no cálculo mental como no algoritmo da multiplicação:

I  $90 \times 87 = 87 \times 90 =$   
 $= 87 \times 9 \text{ dezenas} = 783 \text{ dezenas} = 7830$

II  $25 \times 694 = 694 \times 25 =$   
 $= 694 \times (5 + 20) =$   
 $= 694 \times 5 + 694 \times 20 =$   
 $= 3470 + 13880 =$   
 $= 17350$

Disposição prática :

694	
× 25	
-----	
3470	
13880	←
-----	
17350	

para simplificar, este zero não se escreve

Fig. 5.24 – Aplicação das propriedades no cálculo mental e no algoritmo da multiplicação (A, p. 79).

Segue-se a extensão das propriedades comutativa, da existência de elemento neutro e da existência de elemento absorvente à multiplicação com mais de dois fatores.

Introduz-se então a propriedade associativa da multiplicação, partindo de uma situação problemática do real:

“Três pátios iguais, de forma quadrada, foram vedados com tubo de ferro. Se cada lado de um pátio medir 5 metros, quantos *metros* de tubo se utilizaram?” (A, p. 81, itálico no original)

A quantidade de tubo é calculada multiplicando o número de lados dos 3 pátios,  $3 \times 4$ , por 5 ou multiplicando por 3 o comprimento dos lados de um só pátio,  $4 \times 5$ . Obtém-se deste modo, as expressões  $(3 \times 4) \times 5$  e  $3 \times (4 \times 5)$ , que representam o mesmo valor.

Segue-se imediatamente a generalização, em linguagem corrente e simbólica.

São depois apresentados diversos exemplos com espaços para completar, partindo, na maioria desses casos, de problemas do real que são traduzidos em expressões numéricas. Destacam-se, no final, as prioridades das operações.

Ao longo da informação textual, o manual A contém espaços em branco para o aluno preencher e encontram-se dois exercícios de aplicação no final desta primeira abordagem à multiplicação de inteiros.

No manual B apresentam-se vários exemplos de reunião de conjuntos equicardinais, disjuntos dois a dois e definidos em extensão, com desenhos. Apresentam-se espaços para completar os respetivos cardinais, determinando-se a sua soma que corresponde ao cardinal do conjunto reunião.

Num dos exemplos, sendo A e B dois conjuntos disjuntos com 3 elementos cada um, refere-se que  $\#(A \cup B) = \#A + \#B = 3 + 3 = 6$ .

O autor observa que 3 está escrito *duas vezes* como parcela: *3 está multiplicado por 2* (B, p. 116, itálico no original).

O conceito de produto aparece portanto como soma de parcelas iguais, mas já desligado da linguagem dos conjuntos.

É também apresentada a soma  $2 + 2 + 2$  que, embora represente o mesmo valor que  $3 + 3$ , é uma expressão diferente e terá uma interpretação diferente quando se procede a uma analogia à multiplicação. Aqui o autor refere que *é o número 2 que*, escrito três vezes como parcela, *está multiplicado por 3*. (B, p. 116, itálico no original).

O autor define então produto como *soma de tantas parcelas iguais ao multiplicando quantas as unidades do multiplicador*. (B, p. 116, itálico no original) e utiliza novamente a linguagem de conjuntos distinguindo  $3 \times 4$  como cardinal da reunião de três conjuntos disjuntos, cada um com 4 elementos, e  $4 \times 3$  como cardinal da reunião de quatro conjuntos disjuntos, cada um com 3 elementos.

O autor distingue ainda produto de multiplicação, sendo que o produto é uma soma de parcelas iguais e multiplicação é adição de parcelas iguais.

Segue-se a apresentação de exemplos em que a multiplicação aparece como comparação multiplicativa, usando-se operadores multiplicativos e a leitura em linguagem corrente.

O autor recorre ainda à notação de par ordenado que relaciona os fatores da multiplicação (multiplicando e multiplicador, por esta ordem no par) com o seu produto, indicando sempre nesses exemplos também a soma de parcelas iguais.

É ainda observado que o produto de dois números inteiros é um número inteiro.

É apresentada de seguida uma parte da tabuada pitagórica da multiplicação em tabela de dupla entrada.

A propriedade comutativa da multiplicação é introduzida através de um modelo retangular, dividido em 2 linhas e 3 colunas, sendo cada quadrícula ocupada por imagens de pessoas, membros de uma família. Esta, como conjunto, é considerada reunião de duas linhas, cada uma com 3 elementos, que se traduz na soma de parcelas iguais  $3 + 3$  e conseqüentemente no produto  $2 \times 3$ ; ou como reunião de três colunas, cada uma com 2 elementos, que origina a soma  $2 + 2 + 2$  e o produto  $3 \times 2$ .

Usa-se outro esquema semelhante e generaliza-se a propriedade, com destaque, em linguagem corrente e simbólica, neste caso recorrendo a figuras geométricas como símbolos.

Retomando a conclusão já apresentada anteriormente neste manual, em que, usando exemplos de produtos em que o multiplicando é 1, a sua escrita como somas de parcelas iguais a 1, resulta no multiplicador, generaliza-se que

$$\square \times 1 = \square$$

e usando a propriedade comutativa, que

$$\square \times 1 = 1 \times \square = \square \quad (\text{B, p. 120})$$

A propriedade de existência de elemento neutro para a multiplicação é também enunciada em linguagem corrente, com devido destaque.

O anulamento do produto, assim designando a propriedade de existência do elemento absorvente, é apresentada por exemplos formais, de forma análoga à anterior. Escrevem-se produtos cujo multiplicando é zero como soma de parcelas iguais a zero, concluindo que o produto é nulo. Pela propriedade comutativa, conclui-se que se um dos fatores é nulo, o produto é nulo e orienta-se o aluno a concluir o recíproco desta implicação, questionando-o sobre isso.

A propriedade distributiva da multiplicação, a respeito da adição, é introduzida, como no manual A e noutras propriedades apresentadas no manual B, a partir de situações problemáticas, resolvidas por diferentes processos. No caso do produto de um número por uma soma apresenta-se o seguinte enunciado:

“O meu jardim tem 3 canteiros.

Em cada canteiro eu colhi 4 rosas e 2 tulpas. Quantas flores colhi?” (B, p. 121)

No primeiro raciocínio, o autor multiplica por 3 o total de flores colhidas em cada canteiro, registando o produto  $3 \times (4 + 2)$ , que é igual a 18.

No segundo processo, considera que por três vezes se colheram 4 rosas e 2 tulpas, apresentando a expressão equivalente  $3 \times 4 + 3 \times 2$ , e regista a igualdade entre as duas expressões.

Segue-se a apresentação de outro exemplo análogo ao anterior.

O produto de uma soma por um número, já é apresentada apenas com exemplos formais, aplicando a propriedade comutativa da multiplicação para o transformar no produto de um número por uma soma.

A propriedade distributiva é então generalizada em destaque, usando-se linguagem corrente.

Segue-se um exemplo do recíproco da propriedade distributiva, colocando-se o fator comum em evidência. Neste caso, também se recorre apenas a linguagem formal da matemática.

O autor conclui então acerca dos dois processos de cálculo do produto de um número por uma soma: dando prioridade aos parênteses ou eliminando-os. Refere a prioridade da multiplicação sobre a adição e convencionam-se não encerrar produtos dentro de parênteses.

Segue-se a multiplicação por 10, 100, 1000, etc.

Os processos usuais de cálculo do produto, algoritmos já aprendidos na escola primária, são explicados com base nas propriedades da multiplicação: no caso em que os dois fatores têm só um algarismo, recorre-se à tabuada; se apenas um dos fatores tem 1 só algarismo, procede-se a uma decomposição aditiva do outro nas diferentes ordens decimais e aplica-se a propriedade distributiva; no caso de um dos fatores se escrever com um algarismo seguido de zeros, estes são desprezados no cálculo do produto e repostos no resultado final; sendo os fatores quaisquer, também se procede à decomposição aditiva de um deles e aplicação da propriedade distributiva.

A multiplicação com mais de dois fatores é abordada inicialmente como multiplicação sucessiva ou iterada, mas estende-se a propriedade comutativa a estes casos. Parte-se de uma situação problemática do real:

“Uma casa tem 5 andares; em cada andar há 8 janelas; cada janela tem 2 vidros. No total, quantos vidros há nas janelas da casa?” (B, p. 127)

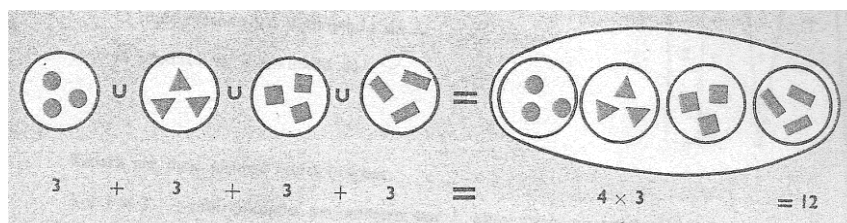
Obtém-se expressões equivalentes traduzindo o enunciado seguindo diferentes raciocínios.

Inicialmente, o autor multiplica os 2 vidros pelo total de janelas, escrevendo  $2 \times (5 \times 8)$ . No segundo processo, multiplica o número de andares pelo número de vidros por andar, escrevendo  $5 \times (8 \times 2)$ .

Igualam-se as duas expressões e, suprimindo os parênteses, conclui-se que  $2 \times 8 \times 5 = 5 \times 8 \times 2$ , generalizando em linguagem corrente, em destaque.

Introduz-se depois a propriedade associativa na multiplicação iterada, com um exemplo formal que se generaliza de seguida em linguagem corrente e simbólica, com variáveis, devidamente destacadas.

No manual C também se aborda a multiplicação como soma de parcelas iguais, recorrendo a conjuntos formados por figuras geométricas. Reunem-se os quatro conjuntos disjuntos dois a dois, todos formados por 3 elementos, apresentando-se o esquema seguinte:



**Fig. 5.25 – Multiplicação como soma de parcelas iguais recorrendo ao cardinal da reunião de conjuntos mutuamente disjuntos como soma dos cardinais desses conjuntos (C, p. 78).**

O esquema evidencia a equivalência entre a soma dos 4 cardinais e o quádruplo do cardinal de um conjunto, apresentando os elementos do conjunto reunião agrupados nos subconjuntos equicardinais que o constituem.

Tal como os restantes manuais do CPES que analisei, este designa os elementos da multiplicação por multiplicador, multiplicando e produto, distinguindo ainda os conceitos de “multiplicação” e de “produto”.

O manual C refere-se, para além do símbolo  $\times$ , ao símbolo  $.$  para representar a operação de multiplicação, utilizando-o entre dois números (na p. 108) o que não me parece correto.

Neste manual acrescentam-se ainda alguns termos novos, talvez desnecessários: na multiplicação  $3 \times 4 = 12$ , designa-se  $\times 4$  por operador, 3 por operando e 12 por transformado.

O manual C recorre ainda à “reta numérica” (que continua a ser representada por um segmento de reta) para evidenciar a equivalência da multiplicação a uma soma de parcelas iguais, como na figura 28.

A multiplicação é, à semelhança dos restantes manuais analisados do CPES, também abordada em contexto de comparação multiplicativa, referindo-se aos numerais multiplicativos acompanhados de exemplos em que são utilizados como operadores.

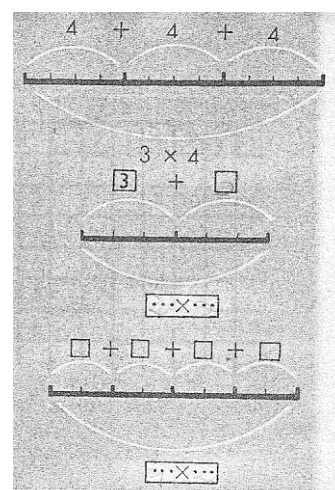
É também apresentada uma tabuada pitagórica da multiplicação com espaços para preencher.

A multiplicação de números naturais é ainda abordada, exclusivamente no manual C, em contexto de matriz retangular. Dado um retângulo dividido em quadrados unitários, determina-se o seu total multiplicando o número de quadrados existentes numa fila pelo número de filas.

A matriz retangular também é utilizada na introdução da propriedade comutativa da multiplicação. Apresentam-se duas imagens, que representam a mesma equipa de ginastas, vistos de duas perspetivas diferentes: 3 filas de 4 ginastas e 4 filas de 3 ginastas, mostrando-se assim que  $4 \times 3 = 3 \times 4$ . Generaliza-se em linguagem corrente e usando figuras geométricas como símbolos, após este único exemplo.

A propriedade associativa é dada através de exemplos formais, mostrando-se com cálculos que  $(3 \times 4) \times 7 = 3 \times (4 \times 7)$ . A generalização é apresentada usando figuras geométricas como símbolos, após este único exemplo. Segue-se um esquema com as habituais máquinas de calcular para mostrar os cálculos do exemplo dado.

A propriedade associativa estende-se a um produto de quatro fatores, apresentando-se, num exemplo, o cálculo por 3 processos diferentes, de modo formal e acompanhado por esquemas de



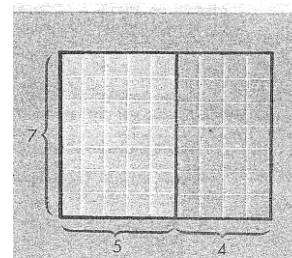
**Fig. 5.26 – Produto como soma de parcelas iguais representados em segmentos de reta (C, p. 79).**

máquinas de calcular. Noutro exemplo, mostra-se a aplicação das propriedades comutativa e associativa da multiplicação para facilitar o cálculo mental.

Segue-se uma referência às prioridades das operações.

Na abordagem da propriedade distributiva da multiplicação a respeito da adição, usa-se o esquema ao lado.

O cálculo do número total de quadrados existentes nos dois retângulos é feito de duas formas diferentes: somando o total de quadrados de cada retângulo, multiplicando-se as colunas e as linhas da matriz retangular em cada caso; ou considerando os dois retângulos juntos como um todo, multiplicando o total de colunas



**Fig. 5.27 – Esquema de apoio na abordagem da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (C, p. 87).**

pelo total de linhas. Obtêm-se respectivamente as expressões  $5 \times 7 + 4 \times 7$  e  $(5 + 4) \times 7$ , que se conclui serem iguais. Faz-se assim referência à propriedade distributiva e ao seu recíproco.

Generaliza-se com figuras geométricas, após este único exemplo, e mostra-se noutro exemplo uma aplicação ao cálculo mental, usando a propriedade distributiva após decomposição aditiva de um dos fatores.

Segue-se a multiplicação por 10, 100, 1000, etc.

O processo usual de cálculo do produto é explicado, em dois exemplos, recorrendo-se à propriedade distributiva. No primeiro, um dos fatores tem um só algarismo e o outro tem dois; no segundo exemplo, ambos os fatores têm dois algarismos.

À semelhança do que se fez no subcapítulo da Adição de números inteiros, também aqui os autores estimam um produto, substituindo os seus fatores por aproximações aos respectivos valores com múltiplos de 10.

Esta primeira abordagem contém espaços para preencher em todas as páginas, exceto na primeira, e um exercício, terminando com outro exercício.

Numa primeira abordagem à multiplicação de números inteiros, o exemplo que o autor do manual D utiliza, evidencia novamente a ênfase atribuída à Geometria antes do CPES.

É apresentada a imagem de um hexágono regular com 19 mm de lado, do qual se pretende achar o perímetro.

O autor explica que a soma  $19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19$  pode ser escrita de forma abreviada escrevendo-se só uma parcela e o número delas, ou seja  $19 \times 6$ .

A relação entre a soma de parcelas iguais e o produto com os fatores da multiplicação colocados nesta ordem não me parece tão intuitiva como a interpretação daquela soma como 6 vezes o número 19, tal como se faz nos manuais do CPES.

Além disso, ainda não foi explicada a propriedade comutativa, para que os alunos sejam capazes de reconhecer a equivalência das expressões  $19 \times 6$  e  $6 \times 19$ .

O autor distingue ainda multiplicação e produto como sendo, respetivamente, a operação e o seu resultado.

Refere também que os dois números que intervêm na multiplicação são os fatores, que se designam respetivamente por multiplicando e multiplicador.

As propriedades de existência do elemento neutro e existência de elemento absorvente da multiplicação, apresentam-se como uma convenção, seguida dos exemplos  $19 \times 1 = 19$  e  $19 \times 0 = 0$ . Estas propriedades são simplesmente enunciadas, sem que seja dada oportunidade ao aluno de refletir sobre elas para as compreender.

Seguem-se alguns exercícios de aplicação direta dos conhecimentos adquiridos (transformar adições de parcelas iguais em multiplicações e vice-versa, cálculo de produtos, e um problema da vida real que envolve o cálculo de um produto, envolvendo dinheiro).

É ainda abordada a multiplicação com mais de dois fatores, partindo de um problema do real, determinando-se o produto por iteração.

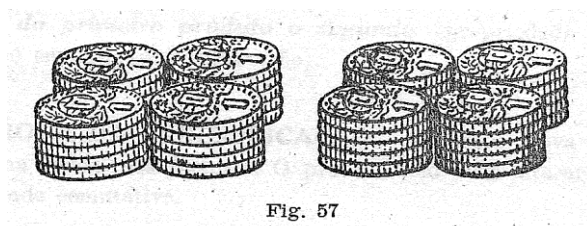
Na introdução da propriedade comutativa, apresenta-se uma imagem que representa as árvores de um pomar. As árvores estão dispostas num esquema de matriz retangular, com 4 filas paralelas à estrada e 6 perpendiculares.

Determina-se o total de árvores de duas formas distintas: considerando 4 filas de 6 ou 6 filas de 4 árvores.

Porém, os produtos não são calculados de forma direta, mas apresentam-se primeiro como soma de parcelas iguais:  $6 + 6 + 6 + 6 = 6 \times 4$ , no primeiro caso, e  $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 6$ , no segundo.

A propriedade é registada em linguagem corrente, onde é também extendida a produtos com mais de dois fatores.

A propriedade associativa da multiplicação é abordada a partir de um problema que consiste em determinar o total de moedas, agrupadas como na figura:



**Fig. 5.28 – Esquema de apoio à abordagem da propriedade associativa da multiplicação (D, p. 58).**

O problema é resolvido de duas formas.

No primeiro caso, determina-se o total de moedas de cada um dos dois grupos e multiplica o valor obtido por 2, donde resulta o produto  $(5 \times 4) \times 2$  ou  $5 \times 4 \times 2$ . O autor não justifica aqui esta simplificação dos parênteses.

No segundo caso, determina-se primeiro o total de pilhas, que se multiplica pelas 5 moedas de cada pilha. Obtém-se então a expressão  $5 \times (4 \times 2)$ .

Igualam-se as expressões obtidas em ambos os casos e generaliza-se em linguagem corrente.

Segue-se a propriedade distributiva, introduzida também por um problema ligado ao real, também este resolvido de duas maneiras distintas.

O enunciado é o seguinte:

“Uma senhora comprou 7 m de fita de veludo a 10\$ o metro, sendo 2 m de uma cor e 5 m de outra. Quanto pagou a senhora?” (D, p. 58)

Tendo em conta o custo dos 7 metros, tem-se  $(2 + 5) \times 10$ . Mas calculando separadamente o preço das duas porções de fita e adicionando-os, tem-se  $(2 \times 10) + (5 \times 10)$ . Esta expressão é apresentada assim, com parênteses, não se referindo o autor à sua omissão.

Igualam-se as expressões e enuncia-se a propriedade em linguagem corrente.

No manual D, o autor distingue ainda a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e em relação à subtração. É então apresentado outro exemplo, partindo do enunciado:

Um marceneiro precisava de tábuas para um trabalho mas não sabia exactamente de quantas.

Combinou por isso com o fornecedor que levaria 15 e restituiria depois as que sobejassem.

Cada tábua custava 20\$ e ele restituiu 4. Quanto lhe custaram as tábuas? (D, p. 59)

Considerando que se calcula o custo das tábuas gastas ou, de outro modo, que se subtrai o custo das tábuas restituidas ao custo das 15 tábuas, obtem-se a igualdade  $(15 - 4) \times 20 = (15 \times 20) - (4 \times 20)$ .

A prova da multiplicação é registada pelo autor, sem qualquer preliminar, consistindo na troca da ordem dos fatores. Segue-se um exercício de aplicação da mesma.

Como contributo para a destreza de cálculo mental, o autor apresenta uma tabela que aconselha o aluno a memorizar:

**Tabela 5.3 – Multiplicações cuja memorização é sugerida ao aluno (D, p. 60)**

		Multiplicadores				
		2	3	4	5	6
Multiplicandos	11	22	33	44	55	66
	12	24	36	48	60	72
	15	30	45	60	75	90
	16	32	48	64	80	
	18	36	54	72	90	

Não é apresentada, porém, a tabuada pitagórica da multiplicação com fatores compreendidos entre 0 e 10.

Seguem-se técnicas de cálculo de produtos sendo um dos fatores 4, 6, 8, 9, 12, etc. O autor explica que multiplicar por 4 é o mesmo que multiplicar duas vezes sucessivas por 2; multiplicar por 6 é

multiplicar por 2 e por 3; e analogamente para outros casos, decompondo esse fator num produto. São apresentados exemplos formais.

Na multiplicação por 20, 30, 40, etc, o autor explica que se pode decompor estes fatores num produto em que um dos fatores é 10, 100, etc. São também dados exemplos formais.

Segue-se a multiplicação por 5, onde o autor sugere que se multiplique por 10 e se divida por 2.

Na multiplicação por 11, o autor refere que basta adicionar o próprio número ao seu produto por 10; na multiplicação por 12, adicionam-se os produtos do número pretendido por 10 e por 2; na multiplicação por 15, de modo análogo se determinam os produtos por 10 e por 5, adicionando-os.

Todos estes processos são descritos e acompanhados de exemplos. A sua apresentação detalhada, revela a grande importância atribuída ao cálculo mental na fase anterior ao CPES.

### 5.2.5. DIVISÃO

A divisão de números racionais pode surgir em diferentes contextos com diferentes significados.

Segundo Pinto e Monteiro, as situações que envolvem a operação de divisão inserem-se em três categorias:

- Divisão como partilha equitativa: neste caso, o dividendo e o quociente são da mesma natureza;
- Divisão como medida: o dividendo e o divisor são da mesma natureza;
- Divisão como operação inversa da multiplicação: neste caso, há três variáveis em jogo, sendo uma delas produto das outras duas; este caso adapta-se a modelos retangulares.

Na seguinte tabela encontram-se assinalados os significados atribuídos à divisão, nos vários manuais analisados, tendo em conta estas classificações:

<b>DIVISÃO MANUAL</b>	<b>Medida</b>	<b>Partilha equitativa</b>	<b>Operação inversa da multiplicação</b>
<b>A</b>	X	X	X
<b>B</b>		X	X
<b>C</b>	X	X	X
<b>D</b>	X		

Deve então ser dada aos alunos a oportunidade de resolverem suficientes situações problemáticas onde surjam os diferentes significados da divisão, permitindo-lhes a conexão entre estes e os algoritmos e a relação com a multiplicação, de modo a proporcionar-lhes uma aprendizagem significativa (Pinto & Monteiro, 2008, p. 15).

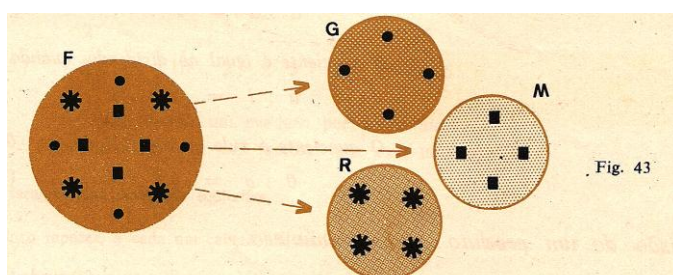
Deste modo, só depois de trabalhadas suficientes situações de divisão se deverá passar à formalização dos algoritmos, para que estes não sejam utilizados como mera manipulação simbólica, que destituídos de significado, conduzem a erros frequentes.

O manual A introduz o conceito de divisão exata recorrendo a dois exemplos que envolvem equipartições de conjuntos em conjuntos disjuntos.

No primeiro, considera-se um conjunto de 6 elementos, nomes de capitais, e procede-se a uma equipartição do mesmo em dois conjuntos disjuntos de 3 elementos.

Recorrendo novamente à linguagem de conjuntos e à multiplicação como soma de parcelas iguais, refere-se que o cardinal do conjunto inicial, conjunto reunião, é igual a  $3 + 3 = 6$  ou  $2 \times 3 = 6$ , sendo que  $6 : 2 = 3$ .

Num segundo exemplo, considera-se um conjunto de 12 flores constituído por 4 gladiólos, 4 margaridas e 4 rosas, que é decomposto em 3 subconjuntos equicardinais.



**Fig. 5.29 – Decomposição de um conjunto de 12 flores em subconjuntos equicardinais (A, p. 89).**

Considera-se aqui a divisão numa situação de partilha equitativa, que é formalizada na igualdade  $12 : 3 = 4$ , sendo que a divisão das 12 flores por 3 ramos dará 4 flores para cada ramo.

No entanto, a divisão também é abordada como medida, e formalizada na igualdade  $12 : 4 = 3$ , em que o dividendo e o divisor são da mesma natureza, considerando-se agora que na divisão das 12 flores em ramos de 4 flores, obtém-se 3 ramos.

Considerando ainda o produto  $3 \times 4$  a partir da soma  $4 + 4 + 4$ , estabelece-se a equivalência das igualdades  $3 \times 4 = 12$ ,  $12 : 3 = 4$  e  $12 : 4 = 3$ , donde os autores concluem que a divisão é a operação inversa da multiplicação.

Os autores distinguem ainda a operação de divisão e o quociente dessa operação.

Segue-se a resolução de equações do tipo  $a \times x = b$ , com exemplos formais e espaços para preencher.

São também analisados casos particulares, a partir de exemplos de equações deste tipo: quociente em que o dividendo é igual ao divisor, em que o divisor é 1 e quando o dividendo é 0, que os autores generalizam em linguagem corrente e simbólica, usando letras, e recorrendo a itálico e letra de cor diferente para destacar essa informação.

Segue-se a divisão de um produto de dois ou mais fatores por um número, partindo de exemplos concretos do real, traduzidos em expressões numéricas.

No primeiro exemplo, considera-se uma classe de ginástica formada em 10 colunas de 5 alunos. Usando um esquema em matriz retangular, determina-se o total de alunos através da multiplicação  $10 \times 5 = 50$ , que se faz equivaler a duas divisões, com significados diferentes:  $50 : 10 = 5$  alunos (partilha equitativa) e  $50 : 5 = 10$  colunas (divisão como medida).

Usando este exemplo, substitui-se  $50$  por  $10 \times 5$ , em ambas as divisões, e são abordadas algumas regras para facilitar o cálculo mental, nomeadamente, o caso em que um dos fatores do dividendo é igual ao divisor, aplicando-se a lei do corte. A generalização é feita em linguagem corrente e simbólica em destaque, usando itálico e cor diferente na letra.

Num outro exemplo, também contextualizado, obtem-se a expressão  $(10 \times 5) : 2$ . Uma vez que  $10$  é divisível por  $2$ , obtem-se  $5 \times 5 = 25$ .

Seguem-se exercícios de aplicação direta dos conteúdos referentes ao tópico “Divisão exata”: determinação de quocientes, envolvendo também os casos particulares, preenchimento do dividendo ou divisor numa divisão, resolução de equações do tipo  $a \times x = b$  e determinação do quociente na divisão de um produto por um número. Pede-se ainda para o aluno escrever um inteiro como soma de parcelas iguais. Nestes 8 exercícios, há apenas um problema em contexto real.

A divisão inteira é abordada, partindo-se de uma situação real de partilha equitativa, em que se pretende repartir, igualmente, 59 moedas por 7 pobres. Para saber se é possível distribuí-las todas, procura-se determinar o quociente  $59 : 7$ , ou seja o valor de  $x$  de modo que  $7 \times x = 59$ .

Por tentativa e erro, verifica-se que  $x$  está compreendido entre 8 e 9. Conclui-se então que se cada pobre receber 8 moedas, sobram 3 e formaliza-se na igualdade fundamental da divisão,  $59 = 8 \times 7 + 3$ , generalizada de seguida a cor diferente em linguagem corrente e simbólica, usando letras.

Os autores destacam ainda que o resto é sempre menor do que o divisor.

Num outro exemplo da vida real que também se traduz numa divisão inteira, usa-se a igualdade fundamental da divisão na prova real e conclui-se que o quociente e o resto são sempre números inteiros.

Apresentam-se depois várias divisões inteiras com espaços para completar o dividendo, o quociente, o divisor ou o resto.

É também explicado o método de subtrações sucessivas para determinar o quociente e o resto, numa divisão inteira, recorrendo a três exemplos, em linguagem formal.

Seguem-se exercícios, apenas no âmbito da divisão inteira: determinação de um quociente inteiro, dado o enunciado de um problema; determinação do dividendo, conhecidos o quociente, o divisor e o resto; determinação de um possível resto, conhecendo apenas o divisor; ou um possível divisor, dado apenas o resto; cálculo de divisões inteiras e prova real.

Tal como nos outros manuais do CPES que analisei e, de acordo com as orientações do currículo, inicia-se ainda uma abordagem aos numerais partitivos no final do capítulo da Divisão.

O manual A inicia uma abordagem aos numerais partitivos, com exemplos como:

Metade de 12  $\rightarrow 12 : 2 = 6$  (...)

Sexta parte de 12  $\rightarrow 12 : 6 = 2$  (A, p. 95)

Apresentam-se de seguida, os numerais partitivos na forma de fração, sem ainda se referir este termo, com exemplos como:

Metade ou um meio ou  $\frac{1}{2}$  (...)

Décima segunda parte ou um doze avos ou  $\frac{1}{12}$  (A, p. 95)

Relacionam-se de seguida os numerais multiplicativos com os partitivos, em situações que se traduzem em expressões numéricas que contêm operadores inversos.

*dobro da metade* de 10?  $\begin{cases} \rightarrow \text{metade de 10} - 10 : 2 \\ \rightarrow \text{dobro da metade} - 2 \times (10 : 2) = 2 \times 5 = 10 \end{cases}$

*metade do dobro* de 10?  $\begin{cases} \rightarrow \text{dobro de 10} - 2 \times 10 \\ \rightarrow \text{metade do dobro} - (2 \times 10) : 2 = 20 : 2 = 10 \end{cases}$

(A, p. 96, itálico no original)

Conclui-se assim que

Dobro da metade = metade do dobro

Com exemplos análogos, mostra-se também que

Tripla da terça parte = terça parte do triplo

Seguem-se exemplos em que se utilizam numerais partitivos multiplicativos como operadores de um número inteiro, 12. Estes numerais são decompostos numa multiplicação e numa partição, independentemente da ordem, concluindo-se que

Dobro da terça parte = terça parte do dobro

Tripla da metade = metade do triplo

Nestes últimos exemplos, mostra-se ainda que dois terços de doze é diferente de três meios de doze.

Convencionam-se então que  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{2}$  são frações inversas, seguindo-se outros exemplos de frações inversas.

Apresentam-se “Exercícios recreativos”, no final do capítulo. Num deles mostra-se que dividir um número por uma fração equivale a multiplica-lo pelo inverso.

A explicação é apenas formal. Pretendendo mostrar que  $6 : \frac{2}{3} = 6 \times \frac{3}{2}$ , os autores apresentam o seguinte problema:

$\frac{2}{3}$  de um número é 6. Qual é esse número? (A, p. 99)

Traduz-se o enunciado em linguagem simbólica,  $\frac{2}{3} \times x = 6$ .

Tratando-se de uma equação do tipo  $a \times x = b$ , escreve-se uma equação equivalente,

$$x = 6 : \frac{2}{3}$$

Como  $\frac{2}{3}$  é o dobro da terça parte, reescreve-se a equação  $\frac{2}{3} \times x = 6$  da seguinte forma:

$$2 \times (x : 3) = 6$$

e resolve-se esta equação

$$x : 3 = 6 : 2$$

$$x : 3 = 3$$

$$x = 3 \times 3 = 9$$

Como esta última operação representa o triplo da metade de 6, conclui-se que

$$x = 6 \div \frac{2}{3} = 6 \times \frac{3}{2}$$

mostrando com este exemplo, o algoritmo que consiste em inverter o divisor e multiplicar (algoritmo IM).

No manual B, o autor introduz o conceito de divisão exata, começando por retomar a equivalência de um produto a uma soma de parcelas iguais, recorrendo à linguagem de conjuntos em situações de equipartição em conjuntos disjuntos.

São também apresentados alguns exemplos de decomposição de um número inteiro em dois fatores. O autor inclui ainda uma atividade, propondo ao aluno que considere um conjunto de 20 objetos e, usando um diagrama apropriado, estude as possibilidades de equipartição do mesmo em conjuntos disjuntos.

Sugere ainda que o mesmo estudo seja realizado num conjunto com 15 elementos e noutro com 7 elementos. Note-se que, neste último caso, essa equipartição não será possível.

Seguem-se alguns exercícios em que o aluno terá de completar um dos dois fatores numa multiplicação, dado o produto e o outro fator.

Segue-se um problema em que a divisão é então abordada, num outro contexto de partilha equitativa:

“O Rui é bom rapaz; distribui equitativamente 12 dos seus rebuçados, por três dos seus amigos. Quantos deu a cada um?” (B, p. 135, sublinhado no original)

A questão é então reformulada para linguagem formal da seguinte forma:

Se o produto de dois números é 12 e um dos fatores é 3, qual é o outro? (p. 135)

que se representa simbolicamente por  $3 \times \square = 12$ .

Conclui-se então que  $\square = 4$ , recorrendo à tabuada da multiplicação.

O autor utiliza então a notação de par ordenado, fazendo corresponder ao par de números inteiros (12, 3) o número inteiro 4, que designa então por quociente exato de 12 por 3.

A noção de quociente exato é depois generalizada em linguagem corrente e simbólica:

O quociente exacto de dois números inteiros a e b, sendo o número b diferente de 0, é o número inteiro cujo produto por b é igual ao número a. (p. 136)

(...) As duas igualdades

$$a = b \times q ; q = a : b$$

têm, assim, um só significado (p. 137)

O autor acrescenta que a é divisível por b. Distingue ainda a operação de divisão do seu resultado, o quociente exato.

São ainda apresentados outros exemplos de divisões exatas e casos em que, no conjunto dos números inteiros, a divisão exata não é possível.

O autor conclui então que a divisão exata é a operação inversa da multiplicação, tendo em conta que consiste na determinação de um dos fatores de um produto, dado o produto e o outro fator, como se verificou nos exemplos apresentados.

Nesta sequência, são então abordadas as equações do tipo  $a \times x = b$ , que o autor concretiza numa linguagem formal.

Seguem-se exercícios que consistem em resolver equações deste tipo e reconhecer em alguns casos, através da tabuada da multiplicação, a impossibilidade de resolução no conjunto dos números inteiros.

São ainda apresentados alguns casos particulares em que através da resolução de equações do tipo  $a \times x = b$ , o aluno é questionado acerca do valor do quociente exato quando  $a = b$ , sendo a e b diferentes de zero, ou no caso do dividendo ser nulo; e da relação entre o dividendo e o quociente quando o divisor é igual a 1.

Abordam-se também casos em que se pretende dividir um produto de dois ou mais fatores por um dos seus fatores, lembrando que a multiplicação iterada goza da propriedade associativa, induzindo a conclusão acerca da regra prática de cálculo mental nestes casos, com espaços para o aluno preencher.

O autor também se refere à divisão de um produto por um número, sendo um dos fatores divisível por aquele, apresentando exemplos formalizados. Decompõe-se o produto de modo que um dos fatores seja igual ao divisor, suprimindo-os.

Finalmente, é dado um outro exemplo em que nenhum dos fatores do produto é divisível pelo divisor, mostrando uma alternativa para facilitar o cálculo mental:

$$(15 \times 4 \times 17) : 30 = 2 \times 17$$

Uma vez que  $15 \times 2 = 30$ , está implícita a decomposição do fator 4 em  $2 \times 2$ . Deste modo, o fator  $15 \times 2$  do dividendo e o divisor 30 são suprimidos.

Segue-se uma abordagem à divisão inteira. É apresentada uma equação impossível em  $\mathbb{IN}_0$ ,  $3 \times q = 17$ , uma vez que  $17 : 3$  não é um quociente exato.

Tal como no manual A, recorre-se à tabuada e tem-se que  $3 \times 5 = 15$  e  $3 \times 6 = 18$ , donde se toma 5 como quociente inteiro de 17 por 3, aproximado por defeito.

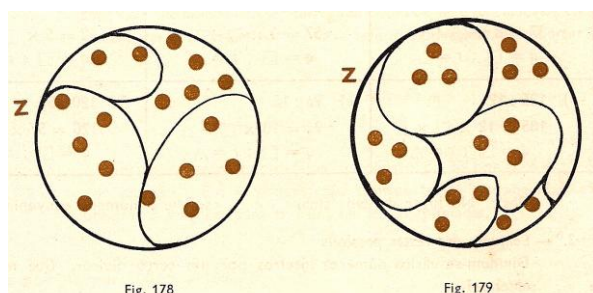
É então determinado o resto pela diferença entre o dividendo e o produto do divisor pelo quociente.

O autor conclui então que “a operação que consiste em calcular o quociente inteiro (e, portanto, também o resto) chama-se *divisão inteira*.” (B, p. 140, itálico no original).

Segue-se um problema da vida real que consiste na partilha equitativa de 17 caramelos por 3 amigos. Tendo em conta que cada um recebe o maior número de caramelos possível, constata-se que sobram 2.

Esta situação de divisão inteira é traduzida formalmente na igualdade  $17 = 3 \times 5 + 2$ .

A situação é ilustrada no seguinte esquema, à esquerda. No esquema da direita mostra-se que se divisão fosse feita por 5 amigos, então caberiam 3 a cada um, sobrando também 2, onde estará implícita a propriedade comutativa da multiplicação porque se tem também que  $17 = 5 \times 3 + 2$ .



**Fig. 5.30 – Representação da divisão inteira de 17 caramelos por 3 amigos (à esquerda) e por 5 amigos (à direita) (A, p. 141).**

O autor define então quociente inteiro: “quociente inteiro da divisão de um número **a** (dividendo) por outro número **b** (divisor) é o maior número inteiro cujo produto por **b** é inferior ao dividendo, **a**.” (B, p. 141, negrito no original) e generaliza com a igualdade fundamental da divisão inteira,  $a = b \times q + r$ ;  $r < b$ , traduzida ainda em linguagem corrente.

Seguem-se exercícios de completamento da igualdade fundamental da divisão, mas também se propõe ao aluno a determinação de todos os restos possíveis numa divisão inteira, dado o divisor.

O aluno é ainda questionado acerca da possibilidade de um quociente ser nulo, em situações em que o dividendo é menor que o divisor. Esta última reflexão será importante para que o aluno não interiorize que o dividendo terá de ser sempre superior ou igual ao divisor, o que poderá motivar alguma confusão no seu espírito no estudo da divisão de números racionais.

Também é focada a noção de quociente por excesso, mostrando-se a sua utilidade num problema concreto da realidade:

“Uma camioneta não pode ser carregada com mais de 6 toneladas de cimento. Quantas viagens devem fazer-se para, com a referida camioneta, transportar 28 toneladas?” (B, p. 143)

Neste caso, 4 viagens são insuficientes, uma vez que só será possível transportar 24 toneladas, pelo que se devem considerar 5 viagens.

São ainda estudados os casos particulares de divisão por 10, 100, 1000, etc.

Apresenta-se também o método de divisão por subtrações sucessivas, num caso concreto da vida real.

No final do capítulo, o manual B faz uma abordagem, apenas formal, aos numerais partitivos e partitivo-multiplicativos, recorrendo a jogos do tipo “adivinhar um número”.

Começa por relembrar os numerais multiplicativos como operadores, com exemplos como:

$$\text{dobro de } 18 \rightarrow 2 \times 18 = 36$$

$$\text{triplo de } 18 \rightarrow 3 \times 18 = 54$$

$$\text{sêxtuplo de } 18 \rightarrow 6 \times 18 = 108$$

Segue-se uma abordagem aos numerais partitivos, relacionando-os com a divisão em exemplos como:

$$\text{Metade de } 18 \rightarrow 18 : 2 = 9$$

$$\text{Um terço (terça parte) de } 18 \rightarrow 18 : 3 = 6$$

$$\text{Um sexto (ou sexta parte) de } 18 \rightarrow 18 : 6 = 3$$

Faz-se depois referência às frações como representação de numerais partitivos, que se escrevem em regra a preceder o número a que respeitam, separados dele pelo sinal  $\times$ :

$$\text{Metade de } 18 \rightarrow \frac{1}{2} \times 18$$

$$\text{Um terço de } 24 \rightarrow \frac{1}{3} \times 24$$

No âmbito do subtítulo Numerais partitivo-multiplicativos, refere-se que estes também são frações e obtém-se combinando um numeral partitivo com um numeral multiplicativo. Apresentam-se os exemplos:

$$\text{Dois terços ou dobro de um terço} \rightarrow \frac{2}{3}$$

$$\text{Cinco quartos ou quádruplo de um quarto} \rightarrow \frac{5}{4}$$

e utilizam-se também como operadores, com exemplos em que se efetua sempre primeiro a partição:

$$\frac{2}{3} \times 24 = 2 \times \left( \frac{1}{3} \times 24 \right) = 2 \times 8 = 16$$

Embora os alunos já saibam que a multiplicação goza das propriedades comutativa e associativa, não é evidenciado o facto de se poder proceder primeiro à multiplicação.

Salienta-se novamente o sinal  $\times$  para substituir a preposição “de” em linguagem vulgar, também no caso de operadores partitivos multiplicativos.

Noutro exemplo, introduz-se o conceito de frações inversas, partindo do enunciado do problema: “Pensa num número. Calcula os seus dois terços. Quanto deu? Se deu 16, pensaste em 24!” (B, p.154).

O autor explica o processo utilizado para obtenção daquela resposta começando por referir que se calculou um terço do número escolhido, ou seja, dividiu-se por 3, e de seguida determinou-se o dobro. Como o resultado foi 16, aplicam-se as operações inversas para descobrir o número inicialmente escolhido: calcula-se metade de 16 e determina-se o triplo deste resultado, obtendo 24.

O autor acompanha o texto com as respetivas operações aritméticas:

$$\frac{2}{3} \times 24 = 2 \times \left( \frac{1}{3} \times 24 \right) = 2 \times 8 = 16 \qquad \frac{3}{2} \times 16 = 3 \times \left( \frac{1}{2} \times 16 \right) = 3 \times 8 = 24$$

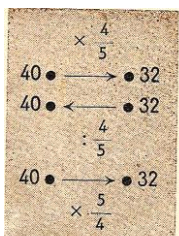
donde conclui que  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{2}$  são frações inversas.

Noutro exemplo, o autor explica o algoritmo IM, partindo do problema:

“O Rui pensou num número e disse-me que, calculando os seus quatro quintos, obteve 32.

Em que número pensou o Rui?” (B, p. 154).

A resolução do problema é acompanhada do seguinte esquema:



**Fig. 5.31 – Algoritmo IM (B, p. 155).**

Note-se que há uma imprecisão neste esquema, uma vez que a última seta deveria ter o sentido contrário.

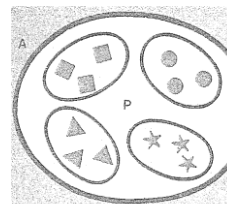
O manual C aborda a divisão exata e a divisão inteira, não utilizando porém estas designações.

A noção de divisão exata é introduzida recorrendo-se a dois exemplos, que abordam a divisão exata de inteiros com dois significados diferentes.

No primeiro, recorre-se a uma situação de equipartição de um conjunto cujos elementos são 12 figuras geométricas, em 4 conjuntos disjuntos, sendo que o

número de elementos de cada um desses subconjuntos é determinado na divisão  $12 : 4 = 3$ , como se ilustra no esquema ao lado.

O outro exemplo consiste num grupo de 12 ginastas dispostos em filas de



**Fig. 5.32 – Equipartição de um conjunto em conjuntos disjuntos equicardinais (C, p. 95)**

3, pretendendo determinar-se o número de filas. O problema é acompanhado de uma ilustração do esquema retangular da disposição dos atletas.

Sendo o total de ginastas o produto do número de filas pelo número de elementos de cada fila, que os autores formalizam na equação  $3 \times f = 12$ , a determinação de  $f$  é dada pela divisão  $12 : 3 = 4$ , evidenciando a divisão como operação inversa da multiplicação.

Tendo em conta esta relação, recorre-se a outros exemplos, já com caráter formal, acompanhados dos habituais esquemas de máquinas de calcular:

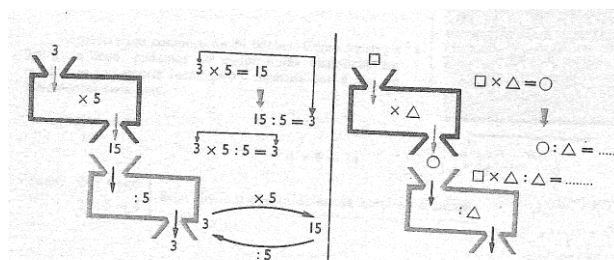
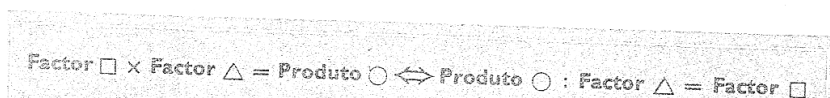


Fig. 5.33 – Operadores inversos com esquemas de máquinas de calcular (C, p. 96).

Porém, segundo Redinha, a orientação desta página não está de acordo com o título “A divisão como operação inversa da multiplicação”, uma vez que, neste esquema, se confundem novamente operações inversas com operadores inversos (por exemplo,  $\times 5$  e  $: 5$ ).

Na síntese apresentada na mesma página já se evidencia a multiplicação e a divisão como operações inversas, porém continua a evitar-se o uso de letras. Utiliza-se ainda o símbolo de equivalência, que os alunos desconhecem, não sendo explicado o seu significado.



(C, p. 96)

Os esquemas apresentados no final da página 97 sintetizam a relação entre operações inversas.

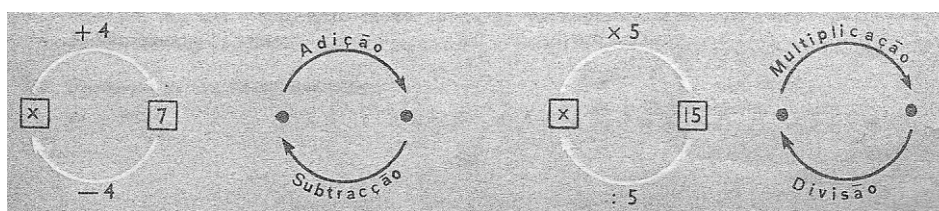


Fig. 5.34 – Esquema síntese da adição e subtração, multiplicação e divisão, como operações inversas, respetivamente (C, p. 97).

Nesta sequência, são então abordadas as equações do tipo  $a \times x = b$  e  $x : a = b$ , com um exemplo formal em cada caso.

No subtítulo referente ao primeiro tipo de equações, os autores omitem o sinal  $\times$ , escrevendo apenas  $ax = b$ , porém esta omissão ainda não foi explicada ao aluno.

Contrariamente aos manuais A e B, neste não se refere que, sendo  $q$  o quociente exato de  $a$  por  $b$ , então  $a$  é divisível por  $b$ ; além disso, também não se distinguem explicitamente os termos “divisão” e “quociente”.

Segue-se, no manual C, uma introdução à divisão inteira.

Os autores começam por distinguir quociente inteiro exato e não exato, utilizando um conjunto de 24 botões, dispostos em matriz retangular. Porém o título, “Matrizes rectangulares” não é adequado para alunos destas idades que já estão sujeitos a um número muito grande de termos novos, na opinião de Redinha.

No primeiro exemplo, formam-se 4 filas de 6 botões, situação devidamente ilustrada. O número de filas e o número de botões em cada fila são dados, respetivamente, pelas divisões  $24 : 6 = 4$  e  $24 : 4 = 6$ , tendo em conta que  $4 \times 6 = 24$  e a divisão é a operação inversa da multiplicação.

Retomando o mesmo conjunto de 24 botões, formam-se 5 filas de 4, sobrando 4 botões; e 7 filas de 3, sobrando 3 botões. Nestes casos, refere-se que  $24 : 5$  e  $24 : 7$  não são quocientes inteiros exatos. Os autores designam estas duas expressões como divisões que resultam em quocientes inteiros não exatos, de forma imprecisa, tratando-se na verdade de quocientes, não de divisões.

A igualdade fundamental da divisão, é generalizada como

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \times \text{Quociente} + \text{Resto}$$

referindo-se ainda que  $\text{resto} < \text{divisor}$ , recorrendo a um esquema, intitulado “Quociente por falta”, que também não é uma expressão habitual, segundo a Inspeção.

Nesse esquema, dispõem-se 7 bolas em 2 filas de 3, sobrando uma, concluindo-se que  $7 = 2 \times 3 + 1$ . Ao contrário dos manuais A e B, este só usa esquemas na determinação do quociente por falta. Segundo o programa, na divisão não exata devem-se tentar resolver equações do tipo  $a \times x = b$  e encontrar dois inteiros consecutivos cujo produto por  $a$  seja respetivamente menor e maior que  $b$  (portaria 23601, p. 1398), tomando o primeiro como quociente por falta.

É ainda abordado o “Quociente por excesso”, dispondo agora todas as 7 bolas em filas de 2 e concluindo que falta uma bola. Considerando a divisão  $7 : 2 = 4$ , refere-se que 4 é o quociente por excesso da divisão de 7 por 2 (C, p. 99).

Seguem-se dois exercícios de completamento que consistem na determinação do quociente e resto numa divisão inteira. Enquanto no segundo exercício se apresenta a igualdade fundamental da divisão para completar, no primeiro constam igualdades como  $11 : 3 = \dots$ ; resto.....; que depois de completadas não resultam em identidades, obtendo-se representações totalmente inadmissíveis em matemática, nas palavras de Redinha.

Apresentam-se depois alguns exemplos de divisões de um produto, com apenas dois fatores, por um número inteiro. Entre outros exemplos, mostra-se que o cálculo de  $4 \times 6 : 3$  pode ser efetuado de duas formas:  $(4 \times 6) : 3$  ou  $4 \times (6 : 3)$ , usando a propriedade associativa da multiplicação, e referindo que se deve escolher a mais fácil para simplificar o cálculo mental.

Contrariamente aos manuais A e B, não se aborda a supressão do divisor e de um dos fatores, no caso de serem iguais, nem se evidencia o facto da simplificação ser mais acessível quando um dos fatores é divisível pelo divisor da operação.

Observa-se, exclusivamente no manual C, que a propriedade associativa não se verifica se a divisão for a primeira operação na ordem da escrita, usando-se o exemplo  $40 : 5 \times 4$  para provar que a atribuição de diferentes prioridades conduz a diferentes resultados.

No final do capítulo, à semelhança dos manuais A e B, introduzem-se os numerais partitivos e os partitivo-multiplicativos como operadores, numa abordagem que é apenas formal.

Na introdução aos numerais partitivos, usam-se exemplos em que estes são relacionados com a divisão:

$$\text{um quarto de } 24: \frac{1}{4} \text{ de } 24 = 24 : 4 = 6 \quad (\text{C, p. } 102)$$

Para estabelecer a correspondência entre o sinal  $\times$  e a preposição “de”, recordam-se os numerais multiplicativos, abordados no subcapítulo “Multiplicação”:

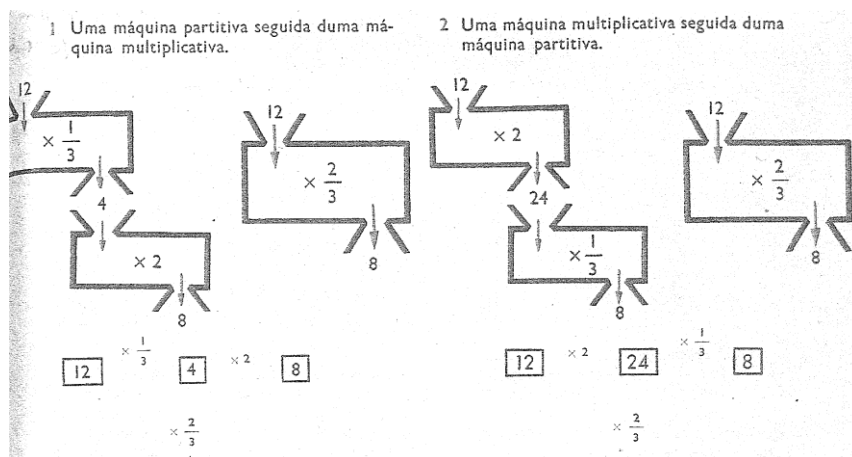
O dobro de  $\square$  é igual a  $\square \times 2$  sendo  $\times 2$  o operador multiplicativo (C, p. 102)

Os autores estabelecem então a analogia aos numerais partitivos, salientando que a multiplicação por um numeral partitivo equivale a uma divisão.

$$\frac{1}{3} \text{ de } 15 \text{ é igual a } 15 \times \frac{1}{3}$$

O operador  $\times \frac{1}{3}$  é partitivo e é igual ao operador  $: 3$ . (C, p. 102)

A “Primeira noção de fracção”, em que se faz uma abordagem aos operadores partitivo-multiplicativos, é introduzida através de esquemas de máquinas de calcular. Usam-se as expressões “máquina partitiva” e “máquina multiplicativa” para distinguir o procedimento utilizado por cada uma na resolução do mesmo cálculo. Segundo Redinha, também nesta página se abusa de uma linguagem fantasista que não poderá ser a linguagem utilizada para quem está a dar os primeiros passos em muitas destas noções.



**Fig. 5.35**  
Fracções como  
operadores  
partitivo-  
multiplicativos,  
decompostos  
em partição e  
multiplicação  
(C, p.103).

A informação que se transmite, com base nestes esquemas, é que a multiplicação por um numeral partitivo-multiplicativo consiste numa divisão e numa multiplicação, não necessariamente por esta ordem.

Utiliza-se como exemplo o cálculo de  $\frac{2}{3}$  de 12 de duas formas diferentes (p. 103):

$$12 \times \frac{1}{3} = 12 \div 3 = 4$$

$$4 \times 2 = 8$$

ou

$$12 \times 2 = 24$$

$$24 \times \frac{1}{3} = 8$$

Estas operações já envolvem frações sem que ainda se tenha explicado devidamente este conceito ao aluno, com base em experiências de aprendizagem significativas, apelando à sua intuição e às vivências do seu quotidiano.

De seguida o manual refere que  $\frac{2}{3}$  é uma fração, cujo numerador é 2 e o denominador é 3. A apresentação destes termos apenas nesta fase pode dar a entender ao aluno que as que se utilizaram anteriormente, os numerais partitivos, não são frações.

Segue-se um processo para mostrar ao aluno o que são frações inversas, recorrendo a tabelas de razão, numa abordagem apenas formal, não contextualizada. Usando como exemplos  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{4}{3}$ , mostra-se que 6 é  $\frac{3}{4}$  de 8 e 8 é

$\frac{4}{3}$  de 6, pelo processo do esquema da figura ao lado.

As generalizações com figuras geométricas repetem-se.

Seguem-se exercícios mentais recreativos, do tipo “adivinhar um número” e, uma página intitulada “Expressões numéricas muito simples”. Aqui relembram-se as prioridades das operações, com base numa expressão numérica algo extensa, com cinco operações envolvendo as quatro elementares.

No manual D, a introdução da divisão exata parte de um problema ligado ao real: A Luisinha tem 20 escudos em moedas de 1\$ e pretende saber quantas obteria se as

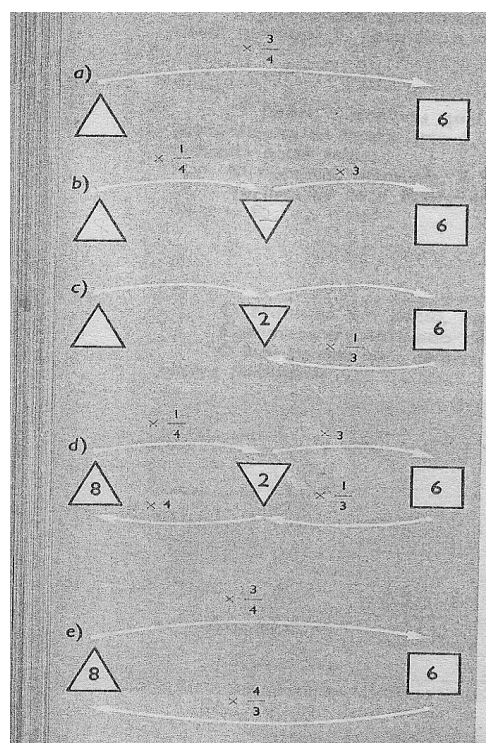


Fig. 5.36 – Frações inversas recorrendo a tabelas de razão (C, p. 104).

trocasse por moedas de 5\$. Para isso, agrupou-as em montinhos de 5, concluindo que assim seriam distribuídas em 4 grupos de 5, não sobrando nenhuma. A informação é acompanhada de uma ilustração desses 4 grupos de 5 moedas.

O autor explica que se trata de uma operação designada divisão, sendo 20 o dividendo, 5 o divisor e 4 o quociente, porém não representa simbolicamente a operação de divisão.

A divisão é portanto apresentada numa situação de distribuição equitativa, sendo que as 20 moedas dispostas em 4 grupos, resulta em 5 moedas em cada um.

O autor designa a operação por divisão exata uma vez que  $5 \times 4 = 20$ , ou seja, todas as 20 unidades do dividendo foram aproveitadas para formar os 5 grupos desejados (D, p. 64).

Na introdução da divisão não exata, usa-se novo exemplo mas do mesmo estilo, e igualmente ilustrado. Outro menino, o Artur, possui 23 moedas de 1\$ e pretende também saber em quantas moedas de 5\$ poderá trocar essa quantia. Num procedimento análogo ao da Luisinha, verifica-se que essa divisão não é exata, uma vez que lhe sobram 3 moedas. O autor designa então o número 3 por resto desta divisão e representa este caso concreto através da igualdade fundamental da divisão:

$$23 = (5 \times 4) + 3$$

O autor refere ainda que “o resto é *sempre menor que o divisor*” (D, p. 65, itálico no original) e que, “na divisão exata, o dividendo é **divisível** pelo divisor.” (D, p. 65, negrito no original).

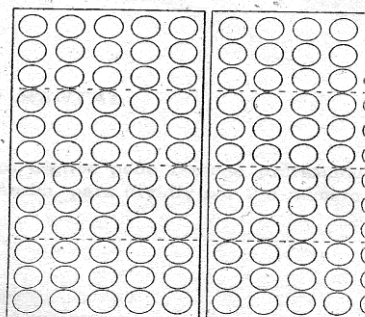
A representação simbólica do quociente  $20 : 5$  só é apresentada após o assunto da divisão não exata e do registo das observações suprarreferidas, voltando-se ao primeiro exemplo, o que denuncia uma certa desorganização sequencial.

Seguem-se dois problemas que envolvem divisões inteiras, e um exercício que consiste na determinação do quociente e do resto em divisões cujo divisor é 10, 100, 1000, etc.

O autor do manual aplica ainda o algoritmo da divisão para determinar o quociente e o resto de 72 943 por 4.

Nesta sequência, volta a apresentar um exemplo de divisão não exata, em linguagem formal, registando a propriedade fundamental, que só agora é designada como tal.

Neste manual também se abordam as técnicas de cálculo mental no caso da divisão de um produto por um número, recorrendo a situações com contexto real.



**Fig. 5.37 – Representação de dois tabuleiros de pastéis para abordar a divisão de um produto por um número, sendo um dos fatores igual ao divisor (D, p. 67).**

É apresentado um problema onde se pretende repartir equitativamente os pastéis representados na figura 39 por 12 encomendas e determinar quantos pastéis terá cada uma.

O enunciado traduz-se numa expressão numérica em que um dos fatores do dividendo é igual ao divisor:

$$(5 \times 12 \times 2) : 12.$$

Observa-se que a primeira encomenda pode ser constituída pelos 5 primeiros pastéis de cada tabuleiro, a segunda com os 5 seguintes, e assim sucessivamente, ou seja, cada encomenda terá  $5 \times 2$  pastéis.

A regra é então enunciada em linguagem corrente, referindo a supressão do fator igual ao divisor.

Considera-se depois a equipartição dos mesmos pastéis, agora por 4 tabuleiros. Obtem-se

$$(5 \times 12 \times 2) : 4$$

e sendo 12 múltiplo de 4, iguala-se aquela expressão a

$$5 \times (12 : 4) \times 2.$$

Generaliza-se esta nova propriedade.

Segue-se um exercício de cálculo mental, com aplicação imediata destas regras.

É ainda enunciada a prova real da divisão ligando à propriedade fundamental.

São dadas novas técnicas de cálculo mental, em que se explica que a divisão exata por um número pode realizar-se através de divisões sucessivas pelos divisores diferentes de 1 desse número, apresentando exemplos em linguagem formal, exercícios e problemas que consistem no cálculo de quocientes exatos.

Explica-se, por fim, a divisão por 10, 100, 1000, etc, seguida de um exercício de aplicação. Note-se que o aluno já foi solicitado a resolver um exercício deste tipo na p. 66, sendo que a explicação só é dada agora, na p. 71.

O capítulo termina com 11 exercícios de revisão, apenas no âmbito da divisão de números inteiros.

## 5.2.6. RELAÇÃO ENTRE OS MANUAIS DO CPES E O CURRÍCULO

Segue-se uma síntese dos conteúdos do programa que não foram abordados em cada manual, bem como, os conteúdos que os livros incluem, não estando expressamente indicados no currículo.

MANUAL A (Natália Almeida d'Eça & outros)		
Aspetos não contemplados no manual	<b>Reunião/ Interseção de conjuntos</b>	Reunião/ Interseção de conjuntos representados em compreensão.
	<b>Adição/ Subtração</b>	Referência a máquinas de somar do tipo digital
		Utilização do advérbio “não” associada ao conjunto complementar.
<b>Multiplificação</b>	-----	

Aspetos para além do programa	<b>Divisão</b>	Divisão por 10, 100, 1000, etc
	<b>Adição/ Subtração</b>	Distingue soma de adição (pp.52)
		Notação: correspondência de um par ordenado à soma (pp.52)
		Notação tipo $\bar{A}$ para o conjunto complementar (pp. 62)
		Distinção entre subtração e diferença (pp. 64)
		Aplicação das propriedades da subtração (pp. 69)
	<b>Multiplicação</b>	Adição e subtração de potências (pp. 86)
	<b>Divisão</b>	Divisão como medida (pp. 89)
		Distinção entre divisão e quociente (pp. 89)
		Propriedade fundamental da divisão inteira (pp. 92)
		Refere que o resto é sempre menor que o divisor

Quadro 5.4 – Comparação do conteúdo do manual A com as indicações do currículo (Números inteiros)

MANUAL B (Augusto Lopes)		
Aspetos não contemplados no manual	<b>Reunião/ Interseção de conjuntos</b>	Distinção entre conjunto de conjuntos e reunião de conjuntos.
	<b>Adição/ Subtração</b>	-----
	<b>Multiplicação</b>	Referência a máquinas de calcular do tipo digital
	<b>Divisão</b>	-----
Aspetos para além do programa	<b>Reunião/ Interseção de conjuntos</b>	Refere que reunião e interseção são operações binárias (pp. 78)
	<b>Adição/ Subtração</b>	Distingue soma de adição (pp.80)
		Notação: correspondência de um par ordenado à soma (pp.80)
		Distinção entre subtração e diferença (pp. 102)
		Resto nulo e impossibilidade de subtração (com resto inteiro não negativo) (pp. 102-103)
		Noção de equação, incógnita e solução (pp. 104)
		Aplicação das propriedades da subtração (pp. 109-110)
	<b>Multiplicação</b>	Potências de base 10 (pp. 132)
		Multiplicação de potências com bases e expoentes diferentes (pp. 132)
	<b>Divisão</b>	Distinção entre divisão e quociente (pp. 136)
		Propriedade fundamental da divisão inteira (pp. 141-142)
		Refere que o resto é sempre menor que o divisor (pp. 142)
		Divisão inteira com dividendo menor que o divisor (quociente nulo e resto igual ao dividendo) (pp. 142)
Quociente por excesso (pp. 143)		

Quadro 5.5 – Comparação do conteúdo do manual B com as indicações do currículo (Números inteiros)

MANUAL C (Santos Heitor & outros)		
não contemplados no	<b>Reunião/ Interseção de conjuntos</b>	Reunião/ Interseção de conjuntos definidos em compreensão
		Distinção entre conjunto de conjuntos e reunião de conjuntos.
	<b>Adição/ Subtração</b>	Uso do símbolo $\setminus$ na representação do conjunto complementar

	<b>Multiplicação</b>	Referência a máquinas de calcular do tipo digital
	<b>Divisão</b>	Exemplos da vida corrente que conduzem a repartições equitativas
		Casos particulares de equações do tipo $a \times x = b$ com $a = b$ , $a = 1$ ou $b = 0$
		Divisão de um produto por um dos fatores
		Divisão por 10, 100, 1000, etc
		Método das subtrações sucessivas do divisor a partir do dividendo
Relação dos numerais partitivos com os numerais multiplicativos (ex: dobro da metade, terça parte do triplo, etc)		
<b>Aspectos para além do programa</b>	<b>Adição/ Subtração</b>	Cálculo de somas ou diferenças usando esquemas de “barras numéricas” e segmentos de reta (pp. 56 e 70)
		Notação: correspondência de um par ordenado à soma (pp. 57)
		Noção explícita de variável (pp. 59)
		Notação tipo $\bar{A}$ para o conjunto complementar (pp. 69)
		Equações do tipo $a-x=b$ e $x-a=b$ usando “barras numéricas” (pp. 76)
	Aplicação das propriedades da subtração (pp. 73-74)	
	<b>Multiplicação</b>	Produto como soma de parcelas iguais recorrendo a esquemas de segmentos de reta (pp. 79)
		Estimativas (pp. 90)
	<b>Divisão</b>	Equações do tipo $x:a=b$ (pp. 97)
		Quociente por falta e quociente por excesso (pp. 99)
		Propriedade fundamental da divisão inteira (pp. 99)
		Refere que o resto é sempre menor que o divisor (pp. 99)
		Varição de um produto por aumento de um dos fatores para o dobro, triplo, etc, e manutenção do produto quando o outro fator diminui na razão inversa (pp. 105)
		Varição do quociente quando o dividendo ou o divisor aumentam para o dobro, triplo, etc, e manutenção do quociente quando o dividendo e o divisor aumentam na mesma razão (pp. 105)
	Exercícios recreativos com equações do tipo $x+a-b=c$ (pp. 106)	

**Quadro 5.6 – Comparação do conteúdo do manual C com as indicações do currículo (Números inteiros)**

### 5.2.7. ATIVIDADES

Nos manuais A e C solicita-se o envolvimento do aluno com questões de completamento ao longo do texto informativo que é também entremeado regularmente com exercícios de aplicação. No manual B, as questões de completamento são escassas. Por vezes só após um longo texto informativo é que são colocadas questões aos alunos, apresentando-se os exercícios de aplicação apenas no final de algumas secções deste capítulo.

As questões dos manuais A e B, neste tópico, são diversificadas no tipo de item, desde completamento, indicação do valor lógico de afirmações, resposta curta e justificação. Em ambos se procura essencialmente que o aluno assimile os novos conceitos, indicando a reunião e a intersecção

de dois conjuntos dados, em extensão ou em compreensão, em diversas situações, e desenvolva técnicas de cálculo mental. Também se pretende desenvolver a capacidade de comunicação matemática, com a solicitação de justificações aos alunos.

A resolução de problemas consta com maior frequência no manual B.

No manual C, o estilo dos exercícios mantém-se. A esmagadora maioria das questões são de resposta curta e aplicação direta de conhecimentos, com espaços para preencher. Para além de questões relacionadas com a linguagem e bastante insistência no cálculo mental, solicita-se ao aluno a repetição de procedimentos, por exemplo, o cálculo da soma usando “rectas numéricas” ou os retângulos, bem como a construção dos habituais esquemas das máquinas de calcular.

O manual C confunde ainda as designações “frase matemática” e “expressão numérica” em vários enunciados, nomeadamente nos exercícios 56 e 58 das p. 86 e 88, respetivamente, aspeto também criticado por Redinha.

Os contextos reais nos enunciados são escassos e usam-se frequentemente esquemas abstratos para representar conjuntos concretos, com exemplos relacionados com o real, de modo simplificado. Por exemplo, no exercício 3 da p. 50, o conjunto de animais brancos (B) é constituído pelas letras b e c.

No exercício da p. 52, é dito no enunciado que “ $M \cup P$  é o conjunto dos alunos com nota de passagem em Matemática, e dos alunos com ..... em .....””. A utilização da conjunção “e”, embora não esteja incorretamente aplicada nesta frase, pode causar alguma confusão na mente dos alunos, uma vez que é utilizada quando se trata de uma interseção de conjuntos.

O exercício 11 da p. 55 do manual C é pertinente, uma vez que permite ao aluno analisar várias situações diferentes no cálculo de uma soma: o caso de dois conjuntos disjuntos, não disjuntos e, em particular, quando um é subconjunto do outro.

Nos capítulos sobre adição e subtração de inteiros, no manual D, existem diversos exercícios ao longo da informação do texto. Esses exercícios são de aplicação, com ênfase no cálculo mental, mas também atividades que envolvem manipulação de materiais, como alfinetes, uma prancheta de madeira ou compasso e régua para determinar uma aproximação do perímetro de uma curva. No final de ambos os capítulos constam diversos exercícios de aplicação, envolvendo cálculo mental, e exercícios de revisão ao estilo dos anteriores e envolvendo apenas os conteúdos desses capítulos.

As atividades são diversificadas, mas são por vezes muito trabalhosas. Por exemplo, no exercício 3 da p. 39, pede-se o cálculo de uma soma cujas parcelas são números muito grandes.

No final de cada capítulo apresentam-se exercícios de revisão que permitem ao aluno testar os seus conhecimentos. Porém, prendem-se maioritariamente pelo desenvolvimento das técnicas de cálculo.

Os exercícios centram-se no cálculo, são bastante rotineiros e de mecanização, sendo poucos aqueles que estão ligados ao concreto e ao real.

Alguns problemas inserem-se em contextos que não estão relacionados com as vivências dos alunos. É o caso do problema 15 a p. 194. Neste enunciado são utilizados termos como quota e capital da sociedade, que o aluno certamente desconhecerá.

### 5.3. NÚMEROS RACIONAIS

Conforme indicado no programa da disciplina de Matemática, quer pela sua importância na estruturação da matemática, quer pelas suas aplicações concretas, através da medição e da relação de grandezas físicas, o estudo dos números racionais, em todas as suas formas, exceto a do cálculo com números negativos, assume-se como o assunto de carácter central no CPES. (Portaria 23601, p. 1395-1396).

Tratando-se também de um dos temas em que os alunos apresentam mais dificuldades, será pertinente analisar a forma como as frações são abordadas e quais os significados que lhe são atribuídos nos diferentes manuais do CPES e no manual de Sequeira Ribeiro.

O conceito de fração pode ter, segundo Cecília Monteiro, Hélia Pinto e Nisa Figueiredo, vários significados, dependendo do contexto em que se insere:

- Como parte de um todo (por exemplo,  $\frac{3}{4}$  de uma barra de chocolate)
- Quociente de dois números naturais (por exemplo, a partilha equitativa de 3 barras de chocolate por 4 pessoas)
- Razão (por exemplo, numa turma de 20 alunos, sendo 12 rapazes, representa-se a razão entre o número de rapazes e raparigas por 12/8).
- Operador aplicado a um conjunto discreto (por exemplo, se quisermos saber quanto é  $\frac{3}{4}$  de uma dúzia de laranjas) ou contínuo (por exemplo, se quisermos determinar o peso de  $\frac{2}{3}$  de um bolo).

Na seguinte tabela encontram-se assinalados os significados atribuídos Às Frações, nos vários manuais analisados, tendo em conta estas classificações:

DIVISÃO MANUAL	Parte de um todo	Quociente entre dois números naturais	Operador	Razão
A	X	X	X	
B	X	X	X	
C	X	X	X	
D	X		X	

Para além de ser importante analisar os diferentes significados, as frações devem surgir naturalmente da análise de situações em contexto real. Porém, é frequente encontrar nos manuais, modelos já construídos que concretizam o conceito de fração.

Na abordagem tradicional, o ponto de partida para a aprendizagem é a própria Matemática, nomeadamente o conceito matemático de fração concretizado em figuras, que funcionam como modelos visuais da estrutura matemática. Freudenthal (1973, 1991) refere-se a este aspecto de abordagem tradicional como “inversão anti-didáctica”, observando que o ponto de partida para a aprendizagem da Matemática é o produto final da actividade matemática que foi sendo desenvolvida por matemáticos excepcionais. (Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005, p. 50)

Também segundo Monteiro, Pinto e Figueiredo (p. 48), a aprendizagem das frações acaba por pôr muita ênfase nos procedimentos, nas regras e nos algoritmos, o que constitui um obstáculo ao desenvolvimento do sentido de número.

Nesta abordagem, todos os manuais apresentam modelos já construídos para explicar o conceito de fração. Tratando-se de manuais de texto, é natural que contenham esquemas elucidativos, acompanhando a exposição dos conteúdos. Caberá apenas ao professor adotar uma metodologia de modo que as aprendizagens sejam significativas para os alunos, recorrendo a um método heurístico e partindo da experiência empírica. Interessa, no entanto, estudar como é feita a abordagem ao conceito, o que é considerado mais relevante e quais os significados atribuídos às frações.

#### 4.4.1. NOÇÃO DE NÚMERO FRACIONÁRIO

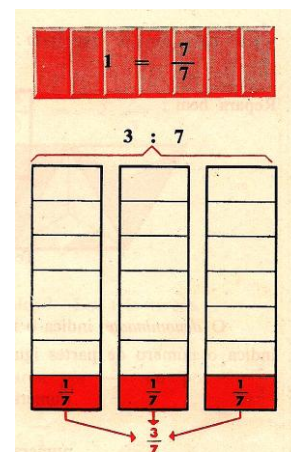
A primeira abordagem ao conceito de fração, no manual A é feita através de apenas dois exemplos. Ambos são contextualizados com situações de partilha equitativa e acompanhados de esquemas.

Considera-se inicialmente um problema em que se pretende repartir equitativamente 3 pastas de chocolate por 7 rapazes. Apresenta-se, no esquema ao lado, uma pasta dividida em 7 partes iguais, mostrando que

$$1 = \frac{7}{7}, \text{ ou seja, que a unidade (a pasta de chocolate) é igual a sete}$$

sétimos.

Estão também representadas as 3 pastas divididas igualmente em 7 partes iguais. Verifica-se no entanto uma imprecisão por não se utilizar a mesma unidade nestes dois esquemas, uma vez que cada barra, em baixo, é maior que a barra em cima.



**Fig. 5.38 – Partilha equitativa de 3 barras de chocolate por 7 pessoas. Fração como relação parte-todo e como um quociente exato. (A, p. 101)**

Uma dessas partes encontra-se colorida, em cada uma das 3 pastas, indicando  $\frac{1}{7}$ . Deste modo, as três partes coloridas correspondem à fração de chocolate que cabe a um dos rapazes, ou seja,  $\frac{3}{7}$ .

Atribuem-se aqui dois significados diferentes ao conceito de fração:

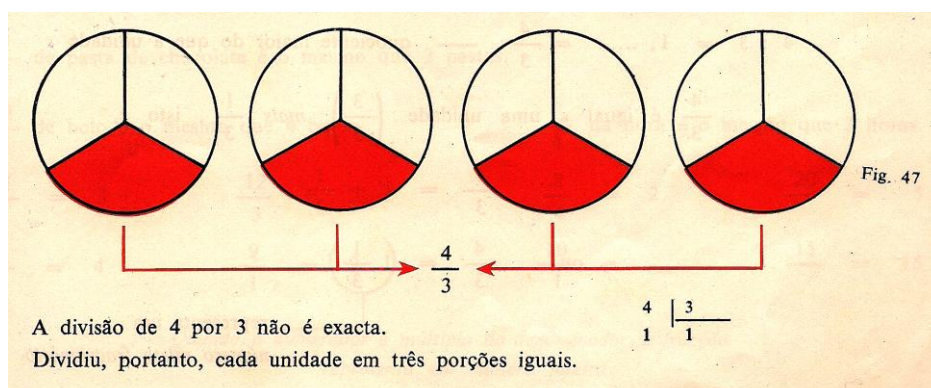
$\frac{1}{7}$  traduz a relação parte-todo;  $\frac{3}{7}$  é o quociente exato das 3 pastas pelas 7 pessoas. Fazendo equivaler as 3 unidades a vinte e um sétimos, tem-se que

$$\frac{21}{7} \div 7 = \frac{3}{7}$$

ou  $3 \div 7 = \frac{3}{7}$  (A, p. 101)

Deste modo, a fração  $\frac{3}{7}$  apresenta-se como um quociente exato entre dois números naturais.

O segundo exemplo, dá-se também num contexto de partilha equitativa. Neste caso, pretende-se repartir equitativamente 4 bolos iguais por 3 pessoas e, de modo análogo, mostra-se que cada pessoa receberá  $\frac{4}{3}$  terços, que desta vez é um número fracionário maior que a unidade.



**Fig. 5.39 – Partilha equitativa de 4 bolos por 3 pessoas. Fração como um quociente exato. (A, p. 101)**

É ainda apresentado o algoritmo da divisão inteira de 4 por 3, sendo que se obtém quociente 1 e resto 1 (cada pessoa ficará com 1 bolo e sobra 1 bolo).

O quociente exato será então obtido dividindo os doze terços por 3 pessoas, donde se obtém a fração  $\frac{4}{3}$ , de um modo análogo ao do exemplo anterior.

Tendo em conta os dois exemplos apresentados, acrescentam-se ainda as designações de fração própria e de fração imprópria quando o quociente é, respetivamente, menor ou maior do que a unidade. Este assunto não é abordado nos manuais B e C.

No manual A distingue-se ainda número fracionário de fração, sendo que o primeiro é uma ideia e fração é uma representação dessa ideia.

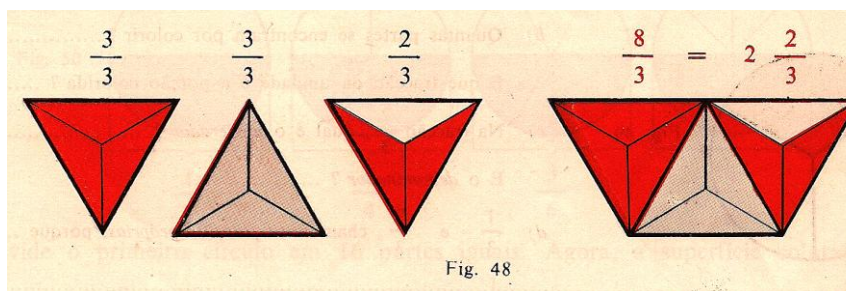
A notação de “número misto fracionário”, assim denominado na p. 102 do manual A, apresenta-se tomando como exemplo a fração  $\frac{4}{3}$ .

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

$$\text{ou } \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ (A, p. 102)}$$

À semelhança dos outros manuais, distinguem-se os termos da fração, ou seja, o numerador e o denominador. O manual A acrescenta ainda que o *denominador* indica o número de partes iguais em que se divide a unidade; o *numerador* indica o número de partes iguais que a fração representa. (p. 102, itálico no original).

A figura 48 permite ainda apreender visualmente a representação da fração  $\frac{8}{3}$  em numeral misto.



**Fig. 5.40 – Representação de uma fração na forma mista (A, p. 103)**

Estando cada um dos 3 triângulos divididos em três terços, correspondendo, na totalidade, à fração  $\frac{9}{3}$ , constata-se que a parte colorida corresponde a  $\frac{8}{3}$  ou  $2 + \frac{2}{3}$  ou  $2\frac{2}{3}$ .

No manual A ainda se refere o quilograma e a hora como unidade em que só se pode efetuar a divisão mental. Este acrescenta ainda exemplos de objetos infracionáveis pelo facto de ficarem destruídos como discos, bolas e moedas.

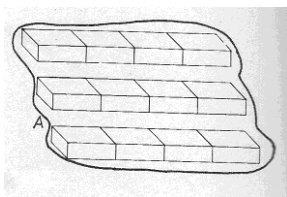
Os autores generalizam referindo que um número fracionário é um *quociente exacto* (A, p. 102, itálico no original).

Seguem-se alguns exemplos de frações que representam números inteiros, incluindo os casos em que o denominador é igual a 1, com alguns espaços para o aluno preencher, e conclui-se que *quando o numerador é múltiplo do denominador, a fracção representa um número inteiro* (A, p. 103, itálico no original).

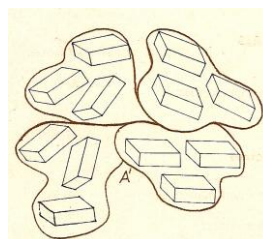
No manual B, a primeira abordagem às frações é feita recorrendo a diversos exemplos.

Inicia-se o capítulo com uma revisão acerca do quociente exato entre dois números inteiros, tomando a divisão como operação inversa da multiplicação. Após alguns exercícios em que o aluno terá de completar um dos fatores de uma multiplicação, dado o outro fator e o produto, recorda-se que o quociente exato é um número inteiro se o dividendo for múltiplo do divisor, e refere-se que no conjunto dos números racionais, um quociente exato nem sempre será um número inteiro.

Apresenta-se um problema da vida real que consiste em dividir 3 barras de chocolate por 4 pessoas. O texto é acompanhado pelos esquemas abaixo apresentados:



**Fig. 5.41 – Partilha equitativa de 3 barras de chocolate por 4 pessoas considerando a barra como unidade (conjunto contínuo) (B, p. 158)**



**Fig. 5.42 – Partilha equitativa de 3 barras de chocolate por 4 pessoas considerando o quarto de barra como unidade (conjunto discreto) (B, p. 158)**

em 4 partes iguais. Deste modo, parte-se de um conjunto contínuo, cuja unidade é a “barra”, que é transformado num conjunto discreto cuja unidade é “quarto de barra”.

Na informação textual, o autor utiliza a linguagem de conjuntos:

Do conjunto A cujos elementos são as *barras de chocolate*, obtém-se um outro conjunto A' cujos elementos são *quartas partes de barra*; como  $\#A' = 12$ , o conjunto A' é decomponível em *quatro conjuntos*, mutuamente disjuntos, cada um com 3 *elementos* (3 quartos de uma barra de chocolate), (...)

$$12 : 4 = 3. \quad (\text{B, p. 158})$$

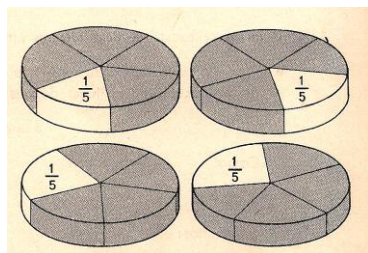
Conclui-se que caberão 3 dessas partes a cada um, o que se representa pela fração  $\frac{3}{4}$ , sendo esta um quociente de dois números naturais, em contexto de partilha equilibrada.

O quociente exacto da divisão de 3 por 4 é o número designado pela fracção  $\frac{3}{4}$ ; *é um número fraccionário*. (B, p. 158, itálico no original).

Noutro exemplo apresentado no manual B, pretende-se dividir 4 bolos por 5 pessoas, de forma equitativa. Consta um esquema que representa os 4 bolos divididos em 5 partes iguais,

cada um. Nesta imagem assinala-se a fração  $\frac{1}{5}$  numa das fatias de cada bolo, donde se

concluirá que as 4 partes correspondentes a cada pessoa constituem  $\frac{4}{5}$  de um bolo.



**Fig. 5.43 – Partilha equitativa de 4 bolos por 5 pessoas (B, p. 158)**

O conceito de fração é assim apresentado, neste contexto, com um duplo significado: A fração  $\frac{4}{5}$  aparece como quociente exato e o autor liga ao algoritmo da divisão. Os 20 quintos obtidos na divisão de cada bolo em 5 partes iguais são divididos pelas 5 pessoas, dando 4 fatias a cada uma, ou seja, 4 quintos.

$$\begin{array}{r} 20 \text{ quintos} \quad | \quad 5 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 0 \quad \quad \quad 4 \text{ quintos} \end{array}$$

Já a fração  $\frac{1}{5}$  apresenta-se aqui como relação parte-todo.

A importância do estudo dos vários significados das frações e a identificação da unidade revelam-se importantes para que o aluno os distinga com clareza. Por exemplo, numa situação similar à que é apresentada, o aluno pode representar a fatia em branco pela fração  $\frac{1}{4}$ , se considerar a razão entre a parte não sombreada e a parte sombreada. Porém, neste manual, como em qualquer dos outros manuais do 1º ano que analisei, não se atribui este último significado às frações, uma vez que esse assunto só será abordado no 2º ano.

Nos exemplos que se seguem, o autor contextualiza com situações reais mas não apresenta esquemas, ficando-se pelo processo analítico, acompanhado de uma breve explicação em linguagem corrente. Nestes casos, a fração apresenta-se como operador aplicado a conjuntos contínuos, nomeadamente, o metro, o quilograma e a hora.

Num destes exemplos pretende-se, com 14 metros de tecido, construir 5 sacos de campismo iguais. O procedimento segue as etapas:

- Divide-se cada metro em 5 partes iguais e como  $5 \times 14 = 70$ , obtém-se “70 quintas partes”. Assim, de um conjunto contínuo cuja unidade é o metro, obtem-se um conjunto discreto cuja unidade será agora o quinto de metro.

- Após a divisão  $70 : 5 = 14$ , o autor refere que caberão 14 quintos do metro para cada saco, que se representam pela fração  $\frac{14}{5}$ .
- Como  $14 = 5 \times 2 + 4$ , o autor conclui que  $\frac{14}{5}$  de metro =  $2 \text{ m} + \frac{4}{5}$  de metro.

Introduz-se aqui a notação do numeral misto, sem que no entanto o autor se refira a esta designação, abreviando aquela soma para  $2\frac{4}{5}$ .

O autor apresenta assim a divisão exata e a divisão inteira dos 14 metros de tecido pelos 5 sacos. No primeiro caso, considera “quinto de metro” como unidade e apresenta o algoritmo

$$\begin{array}{r} 70 \text{ quintos} \quad | \quad 5 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 20 \qquad \qquad \quad 14 \text{ quintos} \\ 0 \end{array}$$

No segundo caso, usa a Propriedade Fundamental da Divisão, tomando o “metro” como unidade:  $14 = 5 \times 2 + 4$

- Associa-se ainda  $\frac{4}{5}$  de metro a 8 dm, sem qualquer explicação acerca da obtenção desse valor.

Noutro exemplo, determina-se o peso de cada uma de 4 porções iguais de 23 kg de manteiga, utilizando um processo analítico semelhante ao anteriormente descrito.

Representam-se ainda frações da hora. Por exemplo, representam-se 5 minutos na forma  $\frac{5}{60}$  de hora. Segue-se a generalização referindo-se à fração como um quociente exato de dois números inteiros a e b representado por  $\frac{a}{b}$ .

O autor salienta ainda, usando cor para destacar o texto, que:

“As frações são numerais partitivo-multiplicativos e representam números inteiros ou números fraccionários, conforme o numerador é ou não é múltiplo do denominador.” (B, p. 161).

Numa primeira abordagem ao conceito de fração no manual C parte-se de situações da vida real, acompanhadas por figuras ou esquemas, analisando também diferentes significados para as frações.

Numa introdução a esta noção, o manual C apresenta imagens de conjuntos de objetos iguais mas com diferentes cores. Por exemplo, é dado um conjunto de 7 copos, sendo 4 castanhos e 3 brancos. Indica-se a fração de cada subconjunto relativamente à reunião dos copos brancos e castanhos.



**Fig. 5.44 – Fração como relação parte-todo num conjunto discreto de 7 copos, sendo 3 brancos e 4 castanhos (C, p. 109)**

Neste exemplo, existem alguns espaços para o aluno preencher e a fração é dada como parte de um todo, recorrendo-se à linguagem de conjuntos:

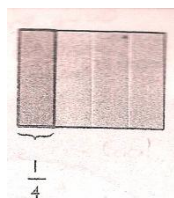
“O cardinal do subconjunto dos copos brancos (3) é  $\frac{3}{7}$  (lê-se “três sétimos” do cardinal do conjunto reunião).” (C, p. 109, aspas no original)

A fração apresenta-se como cardinal de um subconjunto dos elementos que constituem uma parte do conjunto reunião, ou seja, da unidade. Há porém, uma imprecisão neste texto, uma vez que o cardinal desse subconjunto é 3 e não  $\frac{3}{7}$ .

Os autores passam de seguida para situações de partilha equitativa.

Num outro exemplo, designado por “1º problema”, os autores também representam a fração como parte de um todo, mas recorrem a um outro exemplo da vida real.

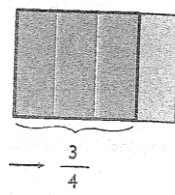
Aqui consideram um conjunto contínuo, uma “tablette de chocolate” que se toma como unidade. Pretende-se dividi-la equitativamente por 4 amigos. É então apresentada a fração  $\frac{1}{4}$  através da divisão da tablete em 4 partes iguais, o que corresponde à porção que cabe a cada um. Esta explicação é acompanhada de um esquema em que está pintada a quarta parte da unidade.



**Fig. 5.45 – Fração como relação parte-todo representada por um quarto de barra de chocolate (C, p. 110)**

Segue-se uma segunda questão também acompanhada de esquema:

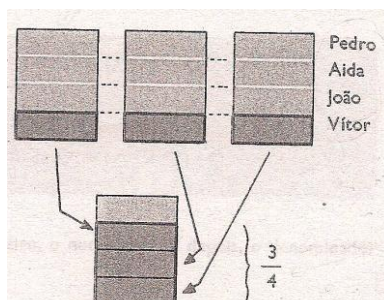
“E que porção de tablette comeram os 3 amigos do João, conjuntamente?” (C, p. 110).



**Fig. 5.46 – Fração como relação parte-todo na representação de três quartos de barra (C, p. 110)**

É então apresentada a fração  $\frac{3}{4}$  como  $3 \times \frac{1}{4}$ , evidenciando a decomposição em dois operadores: 3 como operador multiplicativo e  $\frac{1}{4}$  como operador partitivo.

Já no segundo problema, é apresentada uma situação em que se pretendem agora dividir equitativamente 3 tabletes por 4 amigos. No esquema apresentado em baixo cada uma das 3 tabletes estão divididas em 4 partes iguais. No lado direito de cada linha encontram-se os nomes dos 4 amigos, fazendo corresponder a parte de cada um.



**Fig. 5.47 – Partilha equitativa de 3 barras de chocolate por 4 pessoas. (C, p. 111)**

A parte referente a um desses amigos, o Vítor, encontra-se colorida associando-lhe a fração  $\frac{3}{4}$ .

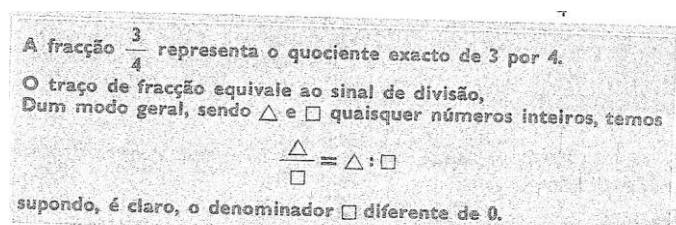
Observa-se que  $3 : 4 = \frac{3}{4}$  porque  $\frac{3}{4} \times 4 = 3$ , ou seja, se a parte que corresponde a cada amigo  $\left(\frac{3}{4}\right)$  for reproduzida 4 vezes, obtém-se as 3 tabletes.

Esta fração é igual à que se obteve em resposta à segunda questão do 1º problema. Todavia, o significado é diferente. Neste 2º problema, a fração  $\frac{3}{4}$  representa o quociente entre dois números naturais, na partilha equitativa de 3 barras de chocolate por 4 pessoas.

Os autores formalizam de seguida, destacando essa informação numa tabela, usando como símbolos figuras geométricas, evitando o uso de letras:

O traço de fracção equivale ao sinal de divisão.

Dum modo geral, sendo  $\Delta$  e  $\square$  quaisquer números inteiros, temos



(C, p. 111)

Ao longo do capítulo usa-se a designação Número Fracionário mas este conceito nunca foi devidamente explicado no manual.

O terceiro problema tem o seguinte enunciado:

“O Vítor tem uma dúzia de laranjas. Quer gastar  $\frac{2}{3}$  (dois terços) dessa dúzia, numa laranjada para os amigos. Quantas vai gastar?” (C, p. 112)

Neste caso, a fração  $\frac{2}{3}$  aparece como operador de um conjunto discreto, a dúzia de laranjas.

Incluindo espaços para o aluno preencher, é dado o processo analítico, onde se evidencia que  $\frac{2}{3}$  é o dobro de um terço, ou seja,  $2 \times \frac{1}{3}$  e, por conseguinte, procede-se ao cálculo da partição (um terço de 12) seguido da multiplicação (dobro do terço de 12, ou seja, dobro de 4), primeiro por esta ordem, mas solicitando posteriormente ao aluno que proceda pela ordem inversa.

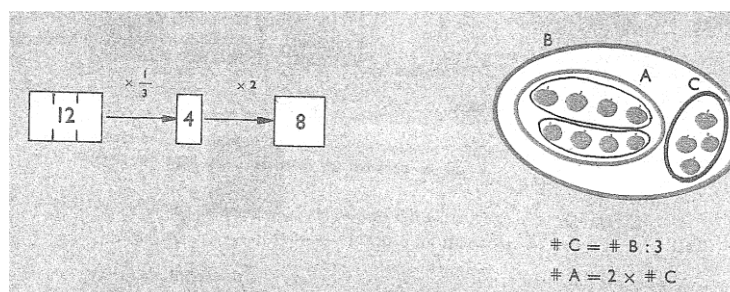
Este aspeto é generalizado em destaque, numa tabela, recorrendo-se novamente a figuras geométricas.

$$\frac{\triangle}{\square} \text{ de } \nabla = \nabla \times \frac{\triangle}{\square} \text{ ou : } \begin{cases} \frac{\triangle}{\square} \text{ de } \nabla = (\triangle : \square) \times \nabla \\ \frac{\triangle}{\square} \text{ de } \nabla = (\triangle \times \nabla) : \square \end{cases}$$

**Fig. 5.48 – Decomposição de um numeral partitivo-multiplicativo em multiplicação e partição (generalização) (C, p. 113)**

Salienta-se ainda que a unidade é a dúzia de laranjas. Com alguns espaços para preenchimento, utiliza-se novamente a linguagem de conjuntos para mostrar que a determinação da quantidade correspondente a  $\frac{1}{3}$  de 12 consiste em dividir o cardinal do conjunto unidade (12) por 3 subconjuntos equicardinais, obtendo-se assim o cardinal de cada um desses subconjuntos (4). De seguida, reúnem-se dois desses subconjuntos, obtendo um conjunto cujo cardinal é  $2 \times 4 = 8$ .

Este raciocínio é apoiado pela seguinte imagem:

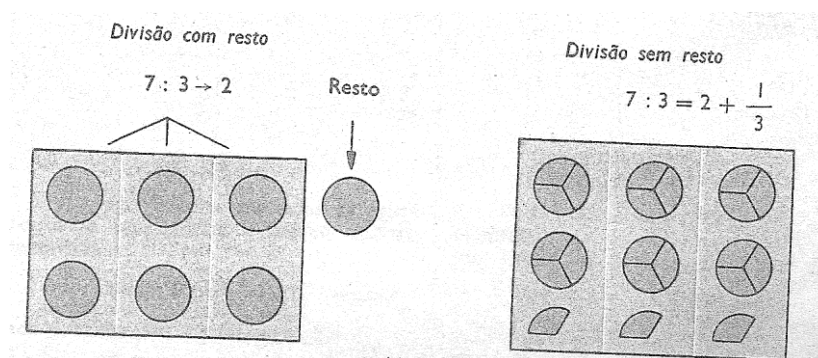


**Fig. 5.49 – Decomposição de um operador partitivo-multiplicativo em partição seguida de multiplicação (C, p. 112)**

Embora nos manuais A e B só se traduzam em linguagem corrente as frações que são usadas nos exemplos, este aspeto é mais detalhado no manual C. Este refere-se às “designações de frações” com denominador 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, 100, 1000 e também àquelas em que se designa o numerador e depois o denominador seguido da palavra avos. Segundo, Redinha as frações já são consideradas designações, pelo que o que se apresenta é uma leitura das designações, ou seja das frações usadas como exemplo.

O “quociente exato sob a forma mista”, assim designado no manual C, é introduzido com base num exemplo devidamente ilustrado.

Considerando 7 bolos, pretende-se saber a porção que caberá a cada uma de 3 pessoas, sendo essa distribuição equitativa. Para permitir uma visualização clara do procedimento, apresentam-se dois esquemas:



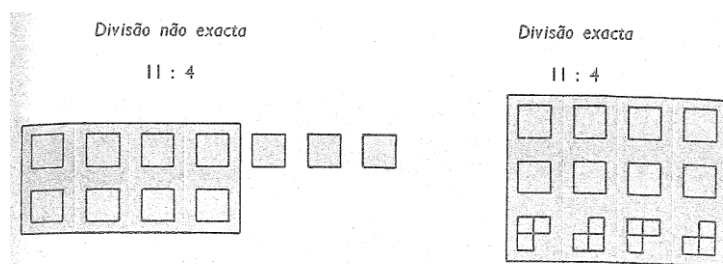
**Fig. 5.50 - Divisão com resto e sem resto de 7 bolos por 3 pessoas (C, p. 114)**

O primeiro esquema permite verificar que se podem atribuir 2 bolos a cada pessoa, sobrando um, ou seja,  $7 : 3 = 2$  com resto 1, não aludindo à Propriedade Fundamental da Divisão.

O segundo esquema mostra como se poderão dividir os 7 bolos de modo a não sobrar nenhum, ou seja, sem haver resto. Para isso, cada um desses bolos é dividido em 3 partes iguais, sendo que caberá uma terça parte do bolo sobranste a cada pessoa. Deste modo, a fração é apresentada como numeral misto:

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} \quad \text{ou, abreviadamente} \quad \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

Com dois esquemas similares aos acima apresentados, desta vez não contextualizados, distinguem-se divisão não exata de divisão exata.



**Fig. 5.51 - Divisão exata e não exata de 11 unidades por 4 (C, p. 115)**

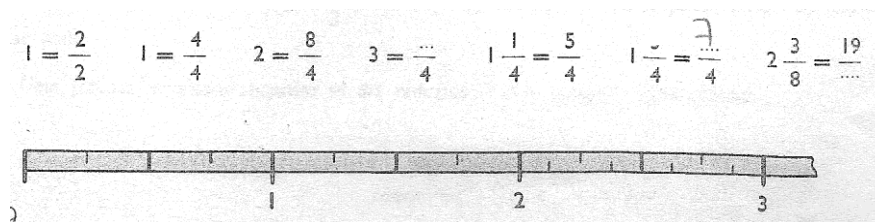
Considera-se □ como unidade e o quociente  $11 : 4$ .

No caso da divisão não exata, o esquema mostra que  $11 : 4 = 2$  com resto 3.

Já no caso, da divisão exata, mostra-se que  $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$  com base no esquema e também ligando ao algoritmo da divisão inteira (C, p. 115):

$$\begin{array}{ccc}
 11 & | & 4 \longrightarrow \text{denominador} \\
 \hline
 3 & & 2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{numerador} & & \text{Parte} \\
 & & \text{inteira}
 \end{array}$$

Somente no manual C se explica também a conversão de formas inteiras e mistas a fracionárias através do esquema da “recta numérica” que se apresenta:



**Fig. 5.52 - Conversão de formas inteiras e mistas a fracionárias usando um esquema de régua graduada (C, p. 115)**

Estando as unidades divididas em 4 e 8 partes, solicita-se o completamento de igualdades entre a fração e o número inteiro ou numeral misto que lhe corresponde.

No manual D, a abordagem às frações baseia-se apenas na relação parte-todo.

Inicialmente, apresenta-se uma barra de chocolate dividida em 5 porções iguais. Ao lado dessa figura encontram-se apenas duas dessas porções, que correspondem ao que o Carlos comeu. Refere-se que essa parte é  $\frac{2}{5}$  da barra.

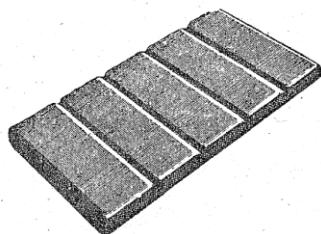


Fig. 93

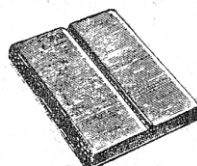


Fig. 94

**Fig. 5.53 - Fração como relação de uma parte com o todo considerando dois quintos de uma barra de chocolate (D, p. 177)**

Designa-se então por fração ou número fracionário “um conjunto de dois números inteiros representados dessa forma.” (D, p. 177). Existe aqui uma imprecisão na utilização da palavra “conjunto”.

Seguem-se as designações de denominador e numerador, explicando-se que o primeiro designa o número de partes em que se dividiu a unidade, e que o segundo indica quantas dessas partes se tomaram (D, p. 177). Ambos são designados por termos.

São apresentados mais dois exemplos da vida real, que evidenciam relações parte-todo, nomeadamente a fração que corresponde a 3 m de tecido retirados de uma peça com 34 m; as frações que representam 1, 2, 12 e 15 rebuçados de uma dúzia.

De seguida, o autor refere-se à leitura de frações com detalhe, à semelhança do manual C.

O autor distingue ainda unidade inteira de unidade fracionária, usando o exemplo da barra de chocolate. Esta distinção também é feita no primeiro exemplo do manual B, mas não de forma explícita.

Segue-se a abordagem dos três casos possíveis, em três secções, com problemas que envolvem frações: determinação da fração que representa a medida de uma grandeza dada; determinação da grandeza cuja medida é uma fração dada; determinação da unidade conhecidas uma grandeza e a sua medida fracionária. Aqui, a fração apresenta-se como operador aplicado a conjuntos contínuos, como círculo, barras e segmentos de reta, sem que lhes seja atribuído um contexto real.

Também não é apresentado qualquer exemplo nestas três secções. Após o título, são dados imediatamente exercícios de acordo com aquele.

Segue-se uma referência à representação gráfica de frações como sendo a representação de grandezas geométricas em desenhos (segmentos de reta, retângulos ou setores circulares).

O autor refere-se também aos conceitos de frações próprias e impróprias, tal como no manual A. Tomando uma barra como unidade, pedem-se as frações referentes a diferentes partes representadas. Conclui-se que uma fração é menor, igual ou maior que 1 conforme o numerador é menor, igual ou maior que o denominador, distinguindo-se fração própria e fração imprópria.

É ainda identificado, exclusivamente neste manual, o conceito de fração aparente, sendo as que são iguais a um número inteiro.

Dado um segmento “AB” como unidade, dividido em 5 porções, representa-se um outro segmento “MN” que é a representação gráfica da fração  $\frac{15}{5}$ . Daí se conclui que “MN” contém exatamente 3

unidades, o que significa que  $\frac{15}{5} = 3$ .

Observa-se que  $15 : 5 = 3$  com resto 0 para concluir que se o numerador é divisível pelo denominador, a fração é igual ao quociente do primeiro pelo segundo (p. 185).

Este registo pode levar o aluno a pensar que a fração só é um quociente no caso das frações aparentes, ou seja, na divisão exata.

Uma vez que o aluno já associa a fração aparente ao quociente, o autor solicita-o a completar várias frações que representam o número inteiro 4, concluindo que “qualquer inteiro pode transformar-se em fração de denominador arbitrário desde que se tome para numerador o produto desse inteiro pelo denominador escolhido.” (p. 187)

Só na secção seguinte é que o aluno perceberá que qualquer fração é um quociente exato, mesmo não sendo este um número inteiro, recorrendo novamente à Geometria:

Tomando [MN] como unidade, segmento dividido em 3 porções iguais, pede-se ao aluno para representar o inteiro 4 e a fração  $\frac{4}{3}$  da unidade representada por [MN]. Observa-se que o 2º segmento

que o aluno deverá representar cabe exatamente 3 vezes no 1º, concluindo-se que  $\frac{4}{3} = 4 : 3$ .

### 5.3.2. EQUIVALÊNCIA E SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

No manual A apresentam-se vários esquemas em que se divide sucessivamente o mesmo círculo em 2, 4, 6 e 8 partes iguais. Para mostrar a equivalência das frações  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{3}{6}$  e  $\frac{4}{8}$ , coloriu-se metade do círculo evidenciando, em cada caso, a relação entre a parte colorida e o todo.

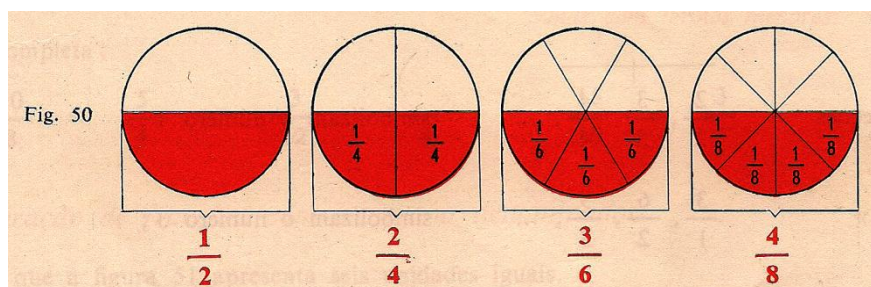


Fig. 5.54 – Representação de frações equivalentes numa unidade circular (A, p. 105)

Os autores acompanham a ilustração com a sua explicação em linguagem corrente: A fracção  $\frac{1}{2}$  a quantos *quartos* corresponde? A dois quartos. E a quantos *sextos*? A três sextos.(...) (A, p. 105, itálico no original). Além disso, os autores questionam o aluno acerca da fracção equivalente a  $\frac{1}{2}$  que deverá ficar representada dividindo o primeiro círculo em 16 partes iguais, ao que respondem prontamente “É

$\frac{8}{16}$ ”. Usando-se algumas das frações deste único exemplo, equivalentes a  $\frac{1}{2}$ , mostra-se a regra, que

é enunciada depois em linguagem corrente:

“Se multiplicares ou se dividires os dois termos de uma fracção pelo mesmo número (diferente de zero), obterás uma fracção equivalente à primeira.” (A, p. 105)

São apresentados depois outros exemplos de equivalência de frações da hora, do quilo e do litro.

Define-se o conjunto dos números racionais, usando a linguagem de conjuntos:

O conjunto dos números racionais é a reunião do conjunto dos inteiros com o conjunto dos fraccionários. (A, p. 106)

Refere-se ainda que o conjunto dos inteiros e o conjunto dos fracionários são disjuntos. Além disso, destaca-se que qualquer inteiro é um número racional, mas o recíproco não se verifica.

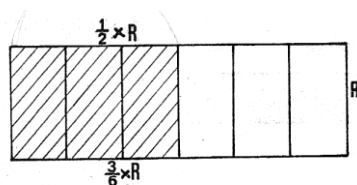
O manual B começa por destacar o papel da unidade, com uma referência ao facto de duas fracções iguais poderem representar partes diferentes, tratando-se de unidades diferentes. Exemplifica com a

igualdade  $\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$  mas refere que  $\frac{4}{5}$  de 1 bolo é diferente de  $\frac{4}{5}$  de 1 metro.

De seguida, o conceito de frações equivalentes é apresentado tomando como exemplos frações como operadores aplicados a conjuntos contínuos: as frações da hora que representam 30 minutos, ou seja,

$\frac{1}{2}$  de 1 hora e  $\frac{2}{4}$  de 1 hora, bem como a divisão de um retângulo e de um bolo.

No caso do retângulo, o autor utiliza expressões como  $\frac{1}{2} \times R$ , sendo R a representação simbólica do retângulo.



**Fig. 5.55 – Representação de frações equivalentes numa unidade retangular designada por R (B, p. 162)**

Uma vez que o retângulo se encontra dividido em 6 partes iguais, o autor relaciona a parte

sombreada com o todo, mostrando a equivalência das frações  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{6}$ , referindo que

$$\frac{1}{2} \text{ de } R = \frac{3}{6} \text{ de } R$$

A expressão “de R” utilizada pelo autor permite salientar que se trata da mesma unidade.

Num outro exemplo representa a divisão de um bolo em 8 partes, usando igualmente um esquema.

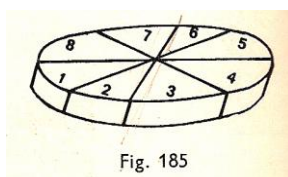


Fig. 5.56 – Divisão equitativa de um bolo em 8 partes (B, p. 162)

Refere que *cada metade compõe-se de 2 quartos e cada metade compõe-se de 4 oitavos*, (p. 162, itálico no original), concluindo sobre a equivalência das três frações, que simbolicamente o autor representa por  $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$  ;  $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$  .

Embora no texto se refira que o Rui dividiu um bolo em oito partes iguais (p. 162), o esquema, sendo tridimensional, não evidencia essa igualdade nas partes.

São apresentados outros exemplos, acompanhados de esquemas de retângulos e, com base nas frações equivalentes que se obtém, o autor conclui acerca das regras:

multiplicando os dois termos de uma fracção por um mesmo número inteiro, diferente de zero, obtém-se uma fracção equivalente.

(...) dividindo, se possível, os dois termos de uma fracção por um seu divisor comum, obtém-se uma fracção equivalente. (B, p. 166)

O conjunto dos números racionais é então definido recorrendo à linguagem de conjuntos:

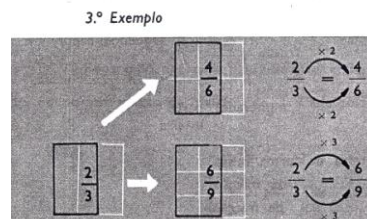
“o conjunto dos números racionais é a reunião de dois conjuntos disjuntos:  
- o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números fraccionários.” (B, p. 167)

Para explicar o conceito de frações equivalentes, o manual C começa por utilizar dois exemplos relacionados com partes da hora, usando as frações como relação parte-todo e também como operador de conjunto contínuo (C, p. 116):

<p>1.º Exemplo</p> <p>Como sabes:</p> <p>meia hora é igual a <u>dois quartos</u> de hora.</p> <p>↓</p> $\frac{1}{2} \text{ hora} = \frac{2}{4} \text{ de hora.}$ <p>ou</p> $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ <p><math>\frac{1}{2}</math> e <math>\frac{2}{4}</math> são duas <i>fracções equivalentes</i></p>	<p>2.º Exemplo</p> <p>Como sabes:</p> <p>1 mn = <math>\frac{1}{60}</math> da hora</p> $45 \text{ mn} = \frac{45}{60} \text{ da hora}$ $45 \text{ mn} = \frac{3}{4} \text{ da hora}$ <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <math>\left. \begin{array}{l} 45 \\ 60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} :15 \\ 45 \\ :15 \end{array}</math> <math>\left. \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} :15 \\ 45 \\ :15 \end{array}</math> </div> <p><math>\frac{45}{60}</math> e <math>\frac{3}{4}</math> são duas <i>fracções equivalentes</i></p>
---	--

São ainda apresentados esquemas, não contextualizados, de frações equivalentes que representam a parte destacada em relação ao mesmo retângulo que é dividido em diferentes partes iguais, como se observa no 3º exemplo.

As regras exemplificadas são então sintetizadas em linguagem corrente e em linguagem simbólica, recorrendo a figura:



**Fig. 5.57 – Representação de frações equivalentes tomando o mesmo retângulo como unidade (C, p. 116)**

Multiplicando (ou dividindo) o numerador e o denominador duma fracção pelo mesmo número inteiro (diferente de zero) obtém-se outra fracção equivalente à primeira

$$\frac{\triangle}{\square} = \frac{\triangle \times 2}{\square \times 2} = \frac{\triangle \times 3}{\square \times 3} = \frac{\triangle \times 4}{\square \times 4} = \dots = \frac{\triangle \times \circ}{\square \times \circ}$$

(C, p. 117)

No manual D, a equivalência de frações é apenas abordada na última secção do capítulo “Números fraccionários”. Subjacentes ao título “Duas propriedades das fracções”, encontram-se inicialmente dois exercícios, que não estão resolvidos e não apresentam solução, como é habitual neste livro.

No primeiro, é dada uma barra, que se toma para unidade, dividida em 5 partes iguais, que por sua vez estão divididas em 3 partes iguais.

Uma porção dessa barra encontra-se sombreada e pede-se ao aluno para indicar duas frações que a representam, respetivamente com denominador 5 e com denominador 15.

Na última alínea dessa questão, pede-se ao aluno para verificar que a primeira fração obtida pode transformar-se na segunda, multiplicando os seus termos pelo mesmo número. Reciprocamente, o autor refere-se também à divisão dos termos da fração pelo mesmo número.

No segundo exercício é também apresentado um conjunto contínuo para unidade, desta vez um retângulo.

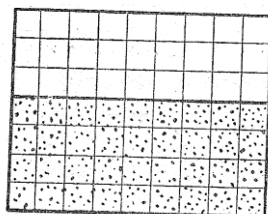


Fig. 111

**Fig. 5.58 – Representação de frações equivalentes tomando o mesmo retângulo como unidade dividida em 7 faixas horizontais e dividida em 63 quadrículas. (D, p. 192)**

Dada a região sombreada, o aluno é solicitado a exprimir a área da parte sombreada na área total do retângulo, usando novamente as frações como parte relativa a um todo, considerando a divisão da unidade em 7 faixas horizontais e considerando a mesma unidade dividida em 63 quadrículas.

Na última alínea o autor solicita o aluno a verificar que as regras também se aplicam a este caso.

A conclusão é então registada no manual:

Não muda o valor de uma fracção quando os seus dois termos são multiplicados (ou divididos) por um mesmo número, diferente de zero. (D, p. 192)

O autor não utiliza a designação de frações equivalentes, nesta generalização. Nas páginas anteriores, dá uma noção intuitiva deste conceito utilizando o termo “iguais”:

Se duas fracções são representadas graficamente pelo mesmo segmento (ou barra), a partir da mesma unidade, devemos considerá-las iguais. (D, p. 182)

No que diz respeito à simplificação de frações, os manuais analisados do CPES referem que o processo consiste em dividir os dois termos por um divisor comum e apresentam exemplos desse procedimento. Porém, este assunto não é abordado no manual D.

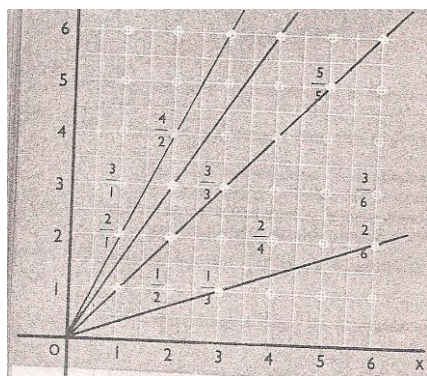
Os manuais B e C acrescentam ainda a designação de fração irredutível, apresentando um exemplo.

Enquanto o manual A se fica por casos simples, os manuais B e C apresentam também exemplos em que só se obtém a fracção irredutível por sucessivas divisões.

No manual C são utilizados dois exemplos: um é uma fracção com numerador e denominador com dois dígitos como  $\frac{12}{18}$ ; o outro é uma fracção onde um dos termos tem três dígitos,  $\frac{30}{105}$ , onde se experimenta a divisão por 2, 3, 4 e 5, verificando-se que só é possível por 3 e por 5. Aqui se observa que “se um número não é divisível por 2, não o é por 4, 6, 8, etc.” (C, p. 118).

O manual C, de forma exclusiva, apresenta o conceito de classes de frações equivalentes, envolvendo assim a linguagem de conjuntos neste tema. Os autores exemplificam com a classe de equivalência da fracção  $\frac{2}{5}$ , ou seja, com a representação deste conjunto infinito em extensão.

É ainda explicado um método gráfico para identificar frações equivalentes, cuja representação consta na figura em baixo.



**Fig. 5.59 – Representação gráfica de frações equivalentes (C, p. 120)**

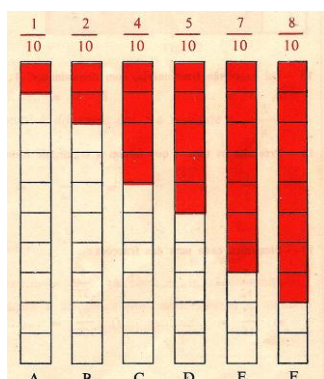
Existem algumas imprecisões de linguagem quando os autores referem

“(…) marcamos sucessivamente pontos 1, 2, 3, 4, etc.

(…) Nos “pontos cruzamento” das linhas com as colunas (…)” (C, p. 120)

Os autores definem, no final desta secção, o conjunto dos números racionais como “a reunião de dois conjuntos disjuntos: o conjunto dos inteiros,  $N_0$ , e o conjunto dos números fraccionários F.” (C, p. 120)

### 5.3.3. Comparação de frações

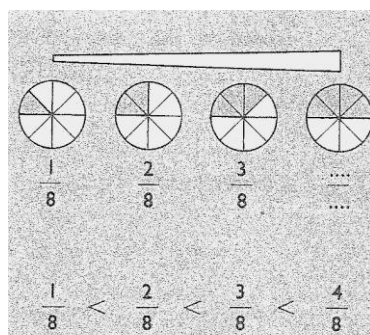


**Fig. 5.60 – Comparação de frações com o mesmo denominador (A, p. 107)**

No manual B apenas se apresentam exemplos formais como  $\frac{7}{5} > \frac{3}{5}$  (p. 168) para comparar frações

com o mesmo denominador, que não partem do concreto ou da visualização de imagens.

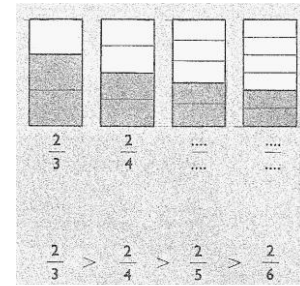
No manual C, a comparação de frações apoia-se em esquemas mostrando a relação parte-todo, à semelhança do manual A.



**Fig. 5.61 – Comparação de frações com o mesmo denominador (C, p. 121)**

Mas, no caso do manual C, para além de se tomarem frações com o mesmo denominador, também se comparam frações com o mesmo numerador. Este último caso, só é considerado nos manuais C e D.

**Fig. 5.62 – Comparação de frações com o mesmo numerador**



Apenas nos manuais B e C se apresenta ainda o procedimento para frações com denominadores diferentes, reduzindo-as ao mesmo denominador, recorrendo a processos exclusivamente analíticos.

Porém, seguem-se processos diferentes: no B multiplicam-se os termos de cada fração pelo denominador da outra, obtendo duas frações com o mesmo denominador, nas quais se comparam os numeradores; no manual C escrevem-se as classes de equivalência de ambas as frações até encontrar o primeiro par de frações com denominador igual. Este último pode tornar-se demasiado trabalhoso nos casos em que o mínimo múltiplo comum dos denominadores é um número grande.

No manual D, na secção designada Comparação de frações, o autor explica que se duas frações forem representadas pelo mesmo segmento ou barra, a partir da mesma unidade, devemos considerá-las iguais. Caso contrário, será maior a que for representada pelo segmento maior.

Seguem-se dois exercícios em que o aluno deverá representar graficamente algumas frações, dado um segmento que representa a unidade e compara-las.

No primeiro exercício comparam-se frações equivalentes e no segundo exercício comparam-se duas frações com o mesmo denominador e duas com o mesmo numerador.

A abordagem é portanto apenas apoiada na visualização gráfica e não são ainda registadas conclusões.

Sendo a secção supramencionada a oitava, este assunto só é retomado na secção número 14, o que evidencia uma certa desorganização na sequência dos tópicos.

Nesta última, volta-se a solicitar ao aluno a representação gráfica de frações, tal como anteriormente no tópico número 8, e só agora se concluem as regras.

São primeiro comparadas frações com o mesmo denominador usando frações próprias e, de seguida, com o mesmo numerador, usando frações impróprias, em secções diferentes e devidamente intituladas, com base em esquemas que permitem relacionar uma parte com o todo, considerando a mesma unidade.

Não são abordadas neste manual a comparação de frações com numerador e denominadores diferentes, a simplificação e as operações com frações.

### 5.3.4. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

A abordagem feita no manual A baseia-se na visualização do seguinte esquema, relacionando as diferentes partes coloridas com o mesmo todo (o retângulo, que é um conjunto contínuo).

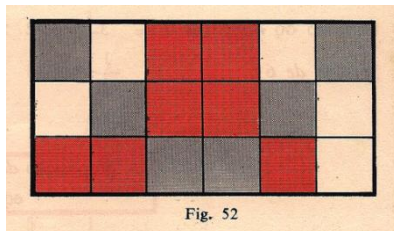


Fig. 5.63 – Adição de números fracionários (A, p. 109)

Por contagem das quadrículas coloridas e a negro conclui-se que as respetivas porções são representadas pelas frações  $\frac{7}{18}$  e  $\frac{6}{18}$ , sendo que a superfície pintada a cor e a preto resulta da adição

das duas frações:  $\frac{7}{18} + \frac{6}{18} = \frac{13}{18}$ .

A operação de subtração é abordada também com base neste esquema, determinando-se a fração da superfície não pintada em relação à unidade.

$$1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18} \quad \text{ou} \quad \frac{18}{18} - \frac{13}{18} = \frac{5}{18}$$

Os autores formalizam as conclusões em linguagem corrente, com destaque a cor e a negro.

É apresentado depois outro exemplo:

$$\frac{3}{4} \text{ de hora} + \frac{5}{4} \text{ de hora} = \frac{8}{4} \text{ de hora ou } 2 \text{ horas (A, p. 109)}$$

Seguem-se exercícios de completamento, em que a fração aparece também como operador de conjuntos contínuos.

Não é, porém, explicada no manual A, a adição de frações com denominadores diferentes.

No manual B, o único exemplo da vida real usado nesta abordagem é apresentado num problema em que uma pessoa esperou  $\frac{3}{4}$  de hora por um autocarro e mais  $\frac{2}{4}$  de hora, o que perfaz um total de  $\frac{5}{4}$

de hora. Esta situação é traduzida na operação  $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ , onde se faz a analogia aos números

inteiros: 3 rosas + 2 rosas = 5 rosas.

Seguem-se outros exemplos em que se adicionam e subtraem frações, já sem qualquer contextualização real, enfatizando os procedimentos analíticos, as regras e os algoritmos. Aqui procede-se também a adições iteradas.

É utilizada a notação de par ordenado em que se faz corresponder dois números racionais à sua soma, que, como o autor refere, é também um número racional:

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right) \hookrightarrow \frac{5}{3} + \frac{8}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right) \hookrightarrow \frac{5}{12} + \frac{7}{12} = \frac{12}{12} = 1 \quad (\text{B, p. 171})$$

Utilizam-se também frações tendo-se à redução ao mesmo denominador por processo análogo ao que foi utilizado na comparação de frações.

As regras são formalizadas em linguagem corrente.

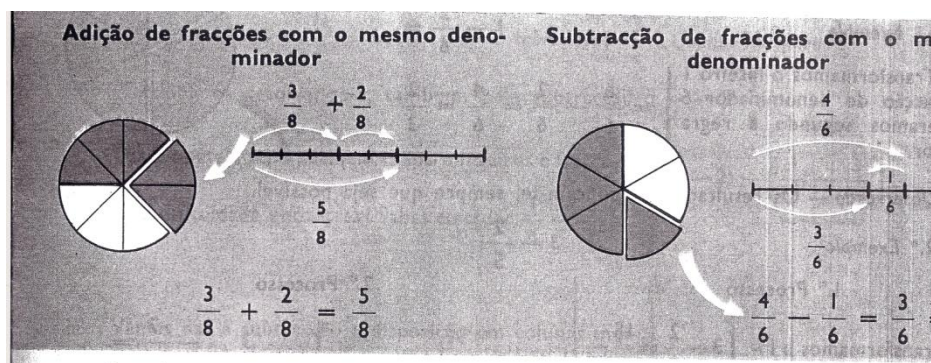
Na abordagem da subtração consideram-se inicialmente duas frações com o mesmo denominador. Comprova-se o resto obtido extendendo a prova real da subtração aos números racionais, ou seja, somando o subtrativo e o resto, obtém-se o aditivo.

Na subtração de frações com denominadores diferentes, procede-se previamente à redução ao mesmo denominador, tal como na adição.

Os procedimentos são assim apresentados aos alunos, com alguns espaços para preencher, e o autor solicita-o para enunciar as regras de cálculo da diferença de dois números racionais com o mesmo denominador ou com denominadores diferentes.

O autor questiona ainda os alunos acerca da possibilidade de subtração de dois números racionais.

No manual C, tal como no manual A, é utilizado um exemplo acompanhado de esquemas de círculos para a compreensão dos processos de adição de frações com o mesmo denominador. Neste esquema também se toma um segmento de reta para unidade.



**Fig. 5.64 – Adição e subtração de frações com o mesmo denominador usando um círculo e um segmento de reta como unidades (C, p. 123)**

Seguem-se outros exemplos de adições e subtrações de frações com o mesmo denominador, desta vez mostrando apenas o procedimento de cálculo, com espaços para preencher, e a regra é generalizada em destaque. Recorre-se novamente ao uso de figuras geométricas nessas generalizações.

No manual C explica-se ainda a subtração de um número inteiro por uma fração, tomando como exemplo  $3 - \frac{2}{5}$  e considerando dois processos diferentes:

<p style="text-align: center;">1.º Processo</p> <p>Transformamos o inteiro (3) em fracção de denominador .... e operamos segundo a regra.</p> $\left\{ \begin{array}{l} 3 - \frac{2}{5} = \frac{15}{5} - \frac{2}{5} \\ - \frac{2}{5} = \frac{13}{5} \end{array} \right.$ <p>Ao resultado deu-se a forma mista.</p> $\left\{ = 2 \frac{3}{5} \right.$	<p style="text-align: center;">2.º Processo</p> <p>Decompomos 3 em 2+1</p> $\left\{ \begin{array}{l} 3 - \frac{2}{5} = \\ = (2 + 1) - \frac{2}{5} = \end{array} \right.$ <p>A unidade (1) serve para dela subtrairmos <math>\frac{2}{5}</math></p> $\left\{ \begin{array}{l} = 2 + \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \\ = 2 + \frac{3}{5} = 2 \frac{3}{5} \end{array} \right.$
---	---

(C, p. 124)

O 1º processo é similar ao apresentado nos manuais A e B, por transformação do número inteiro numa fracção com denominador igual ao do subtrativo. Neste exemplo corta-se a expressão na mudança de linha, o que não é aconselhável.

O 2º processo é apenas utilizado no manual C e consiste em decompor o número inteiro numa soma em que uma das parcelas é 1. Deste modo, usa-se a propriedade associativa da adição e o aluno terá apenas que subtrair a fracção a 1, o que em alguns casos poderá tornar-se mais simples.

No manual C, seguem-se alguns exemplos de simplificação de expressões numéricas envolvendo adição, subtração de fracções e numerais mistos, extendendo a aplicação das propriedades comutativa e associativa ao cálculo com números racionais.

No 3º exemplo, partindo de uma situação da vida real, pretende-se determinar  $5\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4}$ . Ao escrever a expressão equivalente  $(5 - 2) + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)$ , encontra-se uma operação que este não será capaz de resolver porque resulta num número negativo. Para contornar este problema, os autores seguem então um outro processo aplicando o princípio da invariância do resto. Adicionam uma unidade ao aditivo,  $5\frac{1}{4}$ , e ao subtrativo,  $2\frac{3}{4}$ , obtendo respetivamente  $5\frac{5}{4}$  e  $3\frac{3}{4}$ . Assim, a diferença  $5\frac{5}{4} - 3\frac{3}{4}$  já poderá ser determinada pelo aluno.

Partilho a opinião de Redinha quando refere que situações como esta devem ser evitadas até que os alunos conheçam os números negativos. O processo apresentado é muito denso, e tratando-se de um processo exclusivamente analítico, não constituirá uma aprendizagem significativa para o aluno.

O manual C destaca ainda que a soma de racionais positivos é um racional e é sempre possível; já a subtração de números racionais positivos só é possível, se o subtrativo for menor ou igual ao aditivo. (C, p. 123)

Note-se que os alunos ainda não conhecem os números racionais negativos, sendo que estas observações se restringem ao conjunto  $Q_0^+$ .

### 5.3.5. MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Os manuais analisados começam por associar a preposição “de” ao sinal de multiplicação.

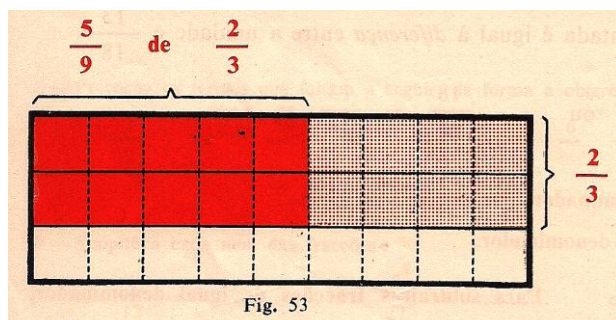
O manual A começa por ligar numerais multiplicativos por essa preposição, extendendo aos numerais partitivos e aos partitivo-multiplicativos, por convenção, tal como se indica no currículo:

O dobro de 5:  $2 \times 5$

(...) Metade de seis:  $\frac{1}{2} \times 6$

(...) Oito sétimos de dois terços:  $\frac{8}{7} \times \frac{2}{3}$  (A, p. 110)

No manual A, o procedimento para determinar um produto de frações é explicado através de um único exemplo, em contexto real e apoiado no seguinte esquema que representa um campo retangular dividido em três leiras iguais, das quais se cultivaram duas:



**Fig. 5.65 – Multiplicação de frações usando o esquema de um campo agrícola retangular (A, p. 110)**

Considera-se como nova unidade a área cultivada, que corresponde a  $\frac{2}{3}$  do retângulo. Refere-se que

$\frac{5}{9}$  da área cultivada, que na figura se destaca num tom laranja mais forte, destinou-se a sementeira de

trigo. Tem-se então que a área ocupada pelo trigo corresponde a  $\frac{5}{9}$  de  $\frac{2}{3}$  do terreno total.

Tendo em conta que o terreno é representado por uma matriz retangular dividida em 9 colunas e 3 linhas iguais, num total de  $3 \times 9 = 27$  quadrículas, e sendo a parte destinada a plantação de trigo constituída por 5 colunas e 2 linhas iguais, resultando em  $5 \times 2 = 10$  quadrículas, ao relacionar a parte

de trigo com o terreno, obtém-se a fração  $\frac{10}{27}$ .

Este raciocínio é formalizado nas igualdades:

$$\frac{5}{9} \text{ de } \frac{2}{3} = \frac{5}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{9 \times 3} = \frac{10}{27}$$

A generalização apresenta-se na sequência deste único exemplo, em linguagem corrente, destacada com letra de cor diferente.

Seguem-se exemplos de multiplicações de frações com alguns espaços para preencher.

O manual B também inicia esta abordagem lembrando a correspondência da preposição “de” ao sinal  $\times$  para ligar numerais multiplicativos.

O dobro do triplo de ... = sêxtuplo de ... = triplo do dobro de ...

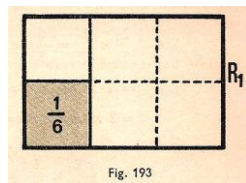
$$2 \times (3 \times 7) = (2 \times 3) \times 7 = 6 \times 7 = 3 \times (2 \times 7) \quad (\text{B, p. 172})$$

Esta convenção é estendida aos números racionais, utilizando-se entre numerais partitivos e entre numerais partitivo-multiplicativos.

A multiplicação de números fracionários é também abordada com base em esquemas cuja unidade é um conjunto contínuo, um retângulo, e onde as frações representam relações parte-todo.

O manual apresenta então dois exemplos de partições sucessivas, como o seguinte:

Metade da terça parte de ... = sexta parte de ... = terça parte da metade de ...



**Fig. 5.66 – Partições sucessivas – representação de metade da terça parte ou terça parte da metade (B, p. 173)**

O esquema ilustra a obtenção de um terço da unidade,  $R_1$ , e da metade dessa nova unidade de

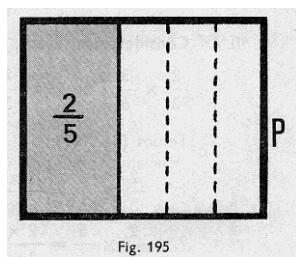
referência,  $\frac{1}{3} \times R_1$ , mostrando-se assim que  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ .

O autor formaliza este raciocínio, concretizando a área do retângulo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{3} \times 48 \right) &= \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \right) \times 48 = \\ &= \frac{1}{6} \times 48 = 8 = \left( \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) \times 48 \end{aligned} \quad (\text{B, p. 173})$$

Seguem-se dois exemplos em que se relembra que um numeral partitivo-multiplicativo se decompõe numa partição e numa multiplicação.

Por exemplo, a igualdade 2 quintos de... = dobro de um quinto de ... é evidenciada no seguinte esquema:



**Fig. 5.67 – Operador partitivo-multiplicativo em conjunto contínuo – representação do dobro de um quinto (B, p. 173)**

Dividiu-se a unidade em 5 partes iguais, sendo que cada parte corresponde a  $\frac{1}{5}$  do retângulo.

Tomando duas dessas partes, tem-se  $\frac{2}{5}$ .

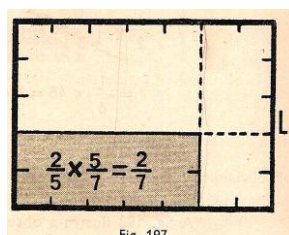
O autor formaliza este raciocínio registrando que:

$$\frac{2}{5} \times \dots = 2 \times \left( \frac{1}{5} \times \dots \right)$$

Seguem-se exemplos que abordam multiplicações de numerais partitivo-multiplicativos.

Nos dois primeiros, consideram-se multiplicações do tipo  $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ , não se generalizando porém esta regra. Estes exemplos são também apresentados ao aluno acompanhados de esquemas em que a unidade é um retângulo. Num deles, consideram-se as seguintes igualdades, acompanhadas do respectivo esquema:

$$2 \times (\text{quinta parte de cinco sétimos}) = 2 \times \text{um sétimo} = 2 \text{ sétimos}$$



**Fig. 5.68 – Multiplicação de frações: dois quintos de cinco sétimos (B, p. 174)**

O esquema mostra a obtenção de  $\frac{5}{7}$  por divisão do retângulo em 7 colunas iguais. Obteve-se assim, uma nova unidade de referência, os  $\frac{5}{7}$  do retângulo, que por sua vez é dividida em 5 linhas iguais.

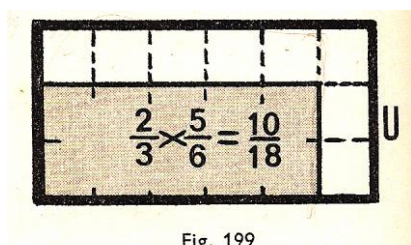
Cada uma dessas partes correspondem a  $\frac{1}{5}$  de  $\frac{5}{7}$ .

A parte colorida corresponde a 2 destas partes, ou seja,  $\frac{2}{5}$  de  $\frac{5}{7}$ , que o autor formaliza da seguinte forma:

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = 2 \times \left( \frac{1}{5} \times \frac{5}{7} \right) = 2 \times \text{um sétimo} = 2 \text{ sétimos} = \frac{2}{7}$$

A relação estabelecida na segunda igualdade seria, a meu ver, mais perceptível se a imagem apresentasse coloridas duas colunas completas.

São também apresentados dois exemplos onde se aborda a multiplicação de frações cujo numerador de uma é diferente do denominador da outra. Também estes exemplos se fazem acompanhar de esquema cuja unidade é um retângulo. Num dos exemplos, apresenta-se o seguinte esquema para determinar a fração única equivalente à expressão  $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}$ :



**Fig. 5.69 – Multiplicação de frações: dois terços de cinco sextos (B, p. 174)**

Num raciocínio análogo ao do exemplo anterior, o retângulo foi dividido em 6 partes iguais, tomando-se então apenas  $\frac{5}{6}$  da unidade.

A nova unidade é dividida em 3 partes iguais e, considerando 2 dessas partes, tem-se a região sombreada, que corresponde a  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{5}{6}$  do retângulo.

O autor formaliza dois raciocínios diferentes nesta situação, cuja justificação é pedida ao aluno, e onde se encontram implícitas algumas conexões matemáticas:

- A expressão  $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6} = \frac{3 \times 5}{3 \times 6}$  poderá ser justificada tendo em conta a contagem de quadrículas num modelo de matriz retangular. A unidade inicial foi dividida em 6 colunas e 3 linhas. Deste modo, a parte correspondente a  $\frac{5}{6}$  do retângulo corresponde a  $3 \times 5$  quadrículas num total de  $3 \times 6$ , o que resulta na fração  $\frac{3 \times 5}{3 \times 6}$  ao relacionar-se a parte com o todo. Por sua

vez,  $\frac{2}{3}$  da nova unidade (que é um retângulo com 3 unidades de quadrícula de largura e 5 de

comprimento) vão corresponder a  $2 \times 5$  quadrículas em  $3 \times 5$ , que corresponde à fração  $\frac{2 \times 5}{3 \times 5}$ .

Do ponto de vista formal, foi aplicada a propriedade de invariância do quociente.

- Também por contagem de quadrículas, num modelo de matriz retangular, o retângulo dividido em 6 colunas e 3 linhas terá um total de  $3 \times 6 = 18$  quadrículas. Sendo a parte colorida formada por 5 colunas e 2 linhas, têm-se  $2 \times 5 = 10$  quadrículas. Relacionando então a parte colorida com a unidade, tem-se que aquela corresponde à fração  $\frac{2 \times 5}{3 \times 6}$ , ou seja,  $\frac{10}{18}$ .

Daqui se deduz que  $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6}$ , a regra que consiste em multiplicar os numeradores e

multiplicar os denominadores, que é sintetizada em linguagem corrente, com destaque num retângulo colorido.

A igualdade  $\frac{2 \times 5}{3 \times 5} \times \frac{3 \times 5}{3 \times 6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 6}$ , do ponto de vista formal, também evidencia a regra  $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$

usada anteriormente.

O autor mostra ainda, recorrendo a mais exemplos, desta vez sem esquema, que o produto de dois números fracionários, que são racionais, é sempre igual a um número racional.

Nesses exemplos, encontra-se novo lapso:

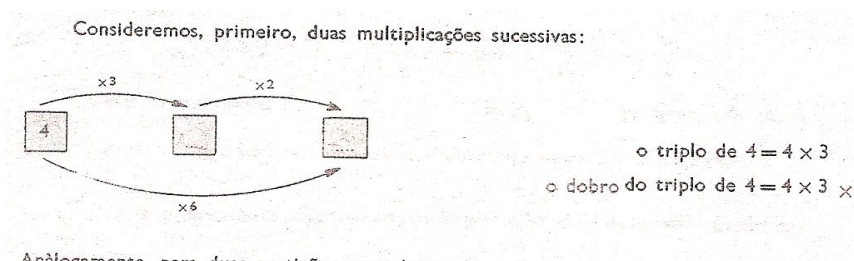
$$\frac{5}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \quad (\text{B, p. 175})$$

onde se lê  $\frac{5}{3}$  deve ler-se  $\frac{3}{5}$ .

Tal como os outros manuais do CPES analisados, o manual C começa por abordar a multiplicação de dois inteiros e a ligação de numerais multiplicativos pela preposição “de”, representados em duas multiplicações sucessivas.

Consideram-se de seguida duas partições sucessivas, também sem contexto real, nomeadamente

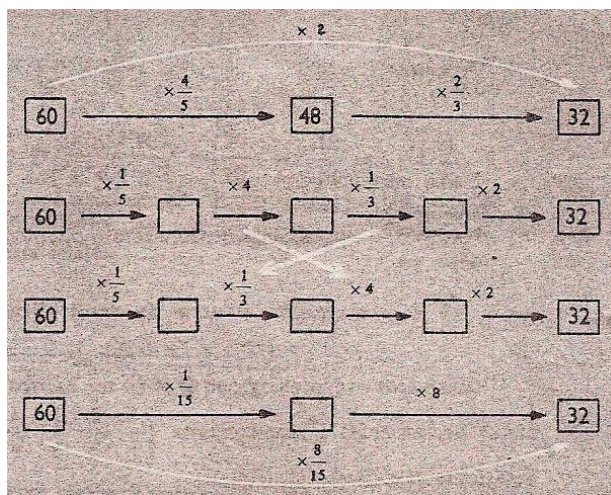
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ , estabelecendo-se a analogia com  $2 \times 3 = 6$ .



**Fig. 5.70 – Partições sucessivas – analogia às multiplicações sucessivas (C, p. 126)**

Este último esquema considera um conjunto contínuo para unidade e indica um raciocínio idêntico ao dos manuais A e B. Representa-se um terço do retângulo e, tomando esta parte como nova unidade, determina-se metade, o que se representa por  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{3}$  e corresponde a  $\frac{1}{6}$  do retângulo.

A determinação do operador único igual à aplicação sucessiva de dois operadores partitivo-multiplicativos é feita com base no esquema:



**Fig. 5.71 – Multiplicação de frações – tabela de razão (C, p. 127)**

Este esquema não se encontra inserido num contexto real e o raciocínio implícito difere do dos manuais A e B. Aqui segue-se um processo analítico, enfatizando os aspetos formais da matemática,

na medida em que se baseia na propriedade comutativa da multiplicação e na transformação de um numeral partitivo-multiplicativo em partição e multiplicação.

Conclui-se então que a transformação produzida pelos operadores  $\times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$  e  $\times \frac{8}{15}$  é idêntica, donde

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}.$$

A conclusão é generalizada, após este único exemplo, recorrendo-se às habituais figuras geométricas.

Seguindo o mesmo estilo formal, o manual refere-se à multiplicação dum inteiro por uma fração (fazendo surgir o denominador 1 no número inteiro), ao produto de dois racionais inversos e estende a propriedade de existência de elemento neutro da multiplicação e a multiplicação iterada aos números racionais. Estas regras são apresentadas na forma de alguns exemplos e depois generalizadas com figuras geométricas ou em linguagem corrente.

Os autores observam ainda que a multiplicação de números racionais positivos é sempre possível e resulta num número também racional.

Refere-se também que todas as propriedades da multiplicação de inteiros podem ser extendidas aos números racionais, apresentando exemplos onde essas propriedades permitem facilitar cálculos que envolvem números racionais.

Esta secção do manual C contem espaços em branco e/ou exercícios de aplicação em todas as páginas.

### 5.3.6. DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Os três manuais explicam que o processo de divisão de frações consiste em multiplicar a fração dividendo pelo inverso do divisor (algoritmo IM), não contextualizando os exemplos em situações da vida real, ou seja, a abordagem é apenas formal.

O manual A recorre à resolução de equações do tipo  $a \times x = b$ , através de problemas que consistem em “adivinhar um número”, como por exemplo:

Qual é o número cujo triplo é igual a  $\frac{5}{7}$ ?

$$3 \times x = \frac{5}{7}$$

$$x = \frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$$

Sucedem-se exemplos análogos, considerando o dividendo e/ou o divisor inteiros, ou produtos em que o dividendo e o divisor são números fracionários, enunciando então o algoritmo.

Usando exemplos de divisões exatas no conjunto dos números inteiros e no conjunto dos números racionais, conclui-se que, no primeiro caso, nem sempre essa operação é possível, enquanto no segundo caso é sempre possível. Existe uma imprecisão de linguagem nesta última conclusão: “A divisão exacta entre dois números racionais, diferentes de zero, é sempre possível.” (A, p. 112).

Nesta afirmação exclui-se a divisão em que o dividendo é zero, cujo quociente também é um número racional.

Através de exemplos formalizados de cálculo de quocientes, mostra-se que a divisão não goza das propriedades comutativa e associativa. Da mesma forma se mostra que a divisão só tem elemento neutro à direita.

No manual B a explicação da divisão com frações é apresentada numa sequência diferente. Começa por enunciar o algoritmo IM, sem que se recorra a situações contextualizadas e significativas para o aluno.

São apresentados dois exemplos de aplicação do referido algoritmo na determinação do quociente entre dois números fracionários, apresentando a verificação do cálculo ao lado, tendo em conta que a divisão é a operação inversa da multiplicação.

Um desses exemplos (B, p. 176) é:

$$\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{24}{35} \qquad \text{Verificação: } \frac{7}{8} \times \frac{24}{35} = \frac{3}{5}$$

O autor refere que o quociente de dois números racionais é ainda um número racional e generaliza nas equações equivalentes

$$a = b \times q ; b \neq 0 ; q = \frac{a}{b}$$

Conclui então que a divisão exata com números racionais, com divisor diferente de 0, é sempre possível, bastando dividir a fração representativa do dividendo pela fração representativa do divisor, ao contrário do que acontece com a divisão exata de dois números inteiros.

O manual C, também faz uma abordagem formal à divisão de números racionais. Tal como o manual A, recorre a uma equação do tipo  $a \times x = b$  e à sua equivalência com  $x = b : a$ . Neste, mostra-se inicialmente a analogia com os números inteiros. Partindo do problema “Qual é o número que multiplicado por 5 dá 15” escreve-se

$$\begin{aligned} 5 \times x &= 15 \\ x &= 15 : 5 = 3 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, na resposta ao problema “Qual é o número que multiplicado por  $\frac{2}{3}$  dá 4” obtém-se pela equação

$$\frac{2}{3} \times x = 4$$

$$x = 4 : \frac{2}{3}$$

Já a determinação deste quociente, neste manual, difere dos outros dois. Mostra-se que o quociente é igual a 6 recorrendo à tabela de razão ao lado, semelhante à que foi utilizada na abordagem às frações inversas, deduzindo o algoritmo IM.

Relembra-se que multiplicar por  $\frac{2}{3}$  é multiplicar por 2 e dividir por 3. Como  $:\frac{2}{3}$  operador inverso de  $\times\frac{2}{3}$ , dividir por  $\frac{2}{3}$  consistirá em dividir por 2 e multiplicar

por 3, ou seja, multiplicar por  $\frac{3}{2}$ . O processo é comprovado considerando já a solução  $x = 6$ .

Com base neste único exemplo, o algoritmo IM é generalizado, recorrendo a linguagem corrente e simbólica, com figuras geométricas a substituir as letras.

Seguem-se exercícios e conclui-se que nem sempre é possível obter um quociente exato dentro do conjunto dos números inteiros; todavia, no conjunto dos números racionais, é sempre possível, desde que o divisor seja diferente de zero.

Os manuais A e C mostram ainda, usando exemplos formais, que a divisão de números racionais não goza das propriedades comutativa e associativa e só tem elemento neutro à direita.

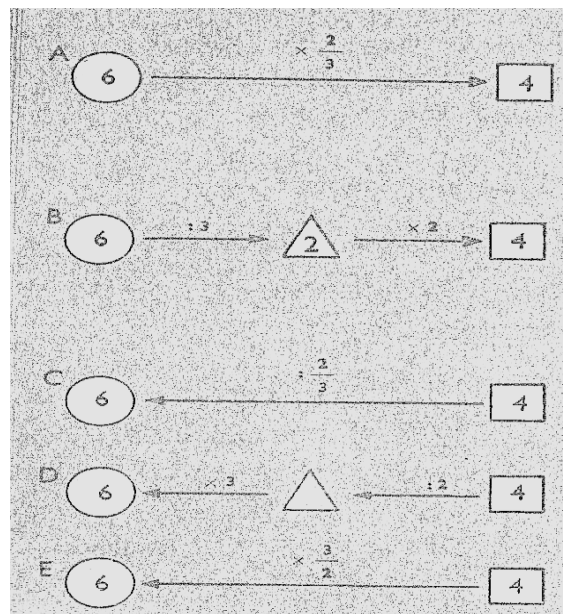


Fig. 5.72 – Algoritmo IM usando tabelas de razão (C, p. 132)

### 5.3.7. RELAÇÃO ENTRE OS MANUAIS DO CPES E O CURRÍCULO

MANUAL A (Natália Almeida d'Eça & outros)	
Aspetos não contemplados no manual	Todos os conteúdos indicados no programa foram incluídos neste manual
Aspetos para além do programa	Fração como relação parte-todo (pp. 101)
	Conceito de fração própria e fração imprópria (pp. 101-102)
	Distinção entre fração e número fracionário (pp. 102)

**Quadro 5.7 – Comparação do conteúdo do manual A com as indicações do currículo (Números Racionais)**

<b>MANUAL B (Augusto Lopes)</b>	
<b>Aspectos não contemplados no manual</b>	Casos concretos em que a unidade não pode ser fracionada (ex: discos)
	Números fracionários como operadores aplicados a conjuntos discretos
	Equações do tipo $a \times x = b$ (com $a$ e $b$ números racionais e $a \neq 0$ ), considerando primeiro casos em que $b$ e $x$ são inteiros
	Verificação de que a divisão não é comutativa, nem associativa e só tem elemento neutro à direita
<b>Aspectos para além do programa</b>	Fração como parte-todo (pp. 158)
	Define fração como quociente exato, fazendo corresponder o numerador ao dividendo e o denominador ao divisor (pp. 160)
	Observa que duas frações iguais podem designar partes diferentes se forem operadores aplicados a unidades diferentes (pp.
	Frações com numerador nulo (pp. 163)
	Notação de par ordenado para representar somas de números racionais (pp. 171)

**Quadro 5.8 – Comparação do conteúdo do manual B com as indicações do currículo (Números Racionais)**

<b>MANUAL C (Santos Heitor &amp; outros)</b>	
<b>Aspectos não contemplados no manual</b>	Casos concretos em que a unidade não pode ser fracionada (ex: discos) ou só pode ser fracionada mentalmente (ex: a hora)
	Equivalência, de forma explícita, da preposição “de” ao sinal $\times$ para ligar numerais partitivo-multiplicativos.
<b>Aspectos para além do programa</b>	Fração como parte-todo (pp. 109)
	Classes de frações equivalentes
	Uso de segmentos de reta para representar somas e diferenças de frações (pp. 123)

**Quadro 5.9 – Comparação do conteúdo do manual C com as indicações do currículo (Números Racionais)**

### 5.3.8. ATIVIDADES

Os exercícios do manual A são mais diversificados neste capítulo, em relação a outros. Existem muitos exercícios de cálculo mental, com aplicação direta de propriedades mas há também diversos problemas do quotidiano que consistem na determinação da fração de uma quantidade, da quantidade representada por uma fração ou da unidade.

No manual B também se apresentam diversos exercícios de cálculo mental, mas também muitos problemas relacionados com a realidade, alguns deles um pouco complexos.

O manual C enfatiza, na generalidade deste capítulo, o cálculo mental, sendo escassos os problemas relacionados com o dia a dia.

Os exercícios do manual C são essencialmente de aplicação direta dos conhecimentos transmitidos no texto e na esmagadora maioria são exercícios de completamento.

Neste capítulo, pede-se ao aluno para indicar a fração colorida numa figura que representa a unidade; completar igualdades representadas por frações (aplicando os conhecimentos sobre frações com denominador 1 ou numerador e denominador iguais, ou igualar a fração a uma divisão); reconstituir a unidade dada uma parte da mesma num esquema e a respetiva fração representada; determinar a quantidade relativa a uma fração (por exemplo,  $\frac{4}{5}$  de 100 ou  $\frac{5}{60}$  de 1 hora, para representar em minutos).

Solicita-se a resolução de equações do tipo  $a \times x = b$ , envolvendo frações; problemas da vida real em que se pede a determinação do total dada a quantidade correspondente a uma fração; tradução de esquemas numa fração, relacionando o todo com a parte colorida; tradução do enunciado de um problema numa expressão numérica e cálculo de expressões numéricas; tradução do enunciado de um problema numa equação do tipo  $x : a = b$  ou  $a : x = b$  e sua resolução.

Existe alguma falta de rigor nos enunciados do manual C. Por exemplo, no exercício 8 da p. 119 pede-se ao aluno para completar espaços em classes de frações equivalentes. Porém estes espaços estão representados com ||||, o que para além de não permitir ao aluno completar esse espaço, poderá causar alguma confusão no seu espírito.

Também no exercício 10 da p. 121 se pede ao aluno para representar em extensão o conjunto {Frac. de denominador 6, menores que 1}. Não me parece aconselhável a utilização de abreviaturas num manual.

## **CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO**

### **6.1. QUADRO HISTÓRICO DA CRIAÇÃO DO CPES**

O período da nossa História que antecede a Revolução do 25 de Abril foi marcado por grandes mudanças nos campos socioeconómico e cultural. Porém, numa época onde vigorava um regime de ditadura, essas transformações demoraram vários anos a ver a luz do dia.

No setor educacional verificava-se, no início do século XX, um atraso significativo no sistema educativo português comparativamente aos restantes países europeus, que se traduzia em elevadas taxas de analfabetismo.

Após a 2ª guerra mundial, o incremento da industrialização e o crescimento económico que se registou na Europa e no nosso país, fizeram surgir setores desenvolvimentistas no seio do regime salazarista e, no âmbito educacional, surgiu a necessidade de formar mão de obra qualificada, bons técnicos, especialistas e investigadores.

Gradualmente, as várias reformas por parte dos sucessivos Ministros da Educação Nacional, que sentiam vários constrangimentos por parte das alas mais conservadoras do Regime, e nem sempre convergiam nas suas visões educativas, foram abrindo caminho a um conjunto de alterações fundamentais na Educação: o alargamento da escolaridade obrigatória; a unificação de duas vias de ensino no pós-primário e anteriores ao ensino secundário, quebrando a distinção entre formação técnica e prosseguimento de estudos; a adoção da co-educação, terminando com a separação de sexos nas escolas; a reforma do ensino universitário e a formação de professores.

Teodoro assinala três momentos de viragem das políticas educativas do Estado Novo: a Reforma do ensino técnico profissional, em 1948, com a criação do Ciclo Preparatório do Ensino Técnico; o Plano de Educação Popular, em 1952, visando diminuir as taxas de analfabetismo na população adulta e criar mecanismos para um efetivo cumprimento da escolaridade obrigatória, fixada em três anos; e toda a ação política do Ministro Francisco Leite Pinto, empossado desde 1955, no seu discurso mobilizador da defesa de uma educação para todos. Leite Pinto projetou a elaboração do Plano do Fomento Cultural, solicitando apoio técnico e financeiro à OCDE, e propondo a cooperação de outros países europeus, também atrasados no seu sistema educativo, o que motivou a elaboração do Projeto Regional do Mediterrâneo. Propôs ainda a unificação dos dois ciclos que precediam o ensino secundário, visando expandir a escolaridade obrigatória para 6 anos.

Não obstante as suas intenções generosas, Leite Pinto apenas conseguiu que a escolaridade obrigatória fosse alargada para 4 anos. Segundo Ferreira (2003, p. 15), as suas políticas emancipadoras da sociedade civil faziam possivelmente temer o desencadear de debates de ideias que pudessem comprometer a “unidade nacional” numa época de instabilidade política motivada pela guerra colonial.

Apesar de ser intenção do ministro Francisco Leite Pinto, o CPES é apenas regulamentado no Decreto-lei nº 48 572 de 9 de Setembro de 1968, no ministério de Galvão Telles, com a escolaridade obrigatória já fixada em 6 anos, e unificava o ciclo preparatório do ensino técnico e o 1º ciclo liceal.

Apesar de Galvão Telles ser uma personalidade mais conservadora e temer que a ascensão cultural das massas provocasse um estrangulamento do “escol intelectual”, o CPES terá sido criado para evitar

que as crianças tivessem de optar em idade precoce pelo ramo técnico ou de prosseguimento de estudos, e induzido pelo surgimento da Telescola, em 1964, como uma via comum de acesso ao ensino secundário, incluindo disciplinas do plano de estudos dos dois ramos.

No período de vigência do CPES, o Ministério da Educação foi liderado por José Hermano Saraiva e Veiga Simão. Este pretendia implementar uma efetiva democratização do ensino, numa perspetiva meritocrática e chegou a lançar o 3º e 4º anos do Ciclo Preparatório sob o pretexto de experiências pedagógicas, visando aumentar a escolaridade obrigatória para 8 anos.

No que diz respeito ao ensino da Matemática, os avanços no ramo da Psicologia e das Ciências motivaram a simplificação sucessiva dos programas de matemática para que se tornassem psicologicamente mais adequados às necessidades e capacidades das crianças, bem como a intenção de torna-los mais eficazes na consolidação da matemática enquanto ciência.

Paralelamente, surgiu o chamado Movimento da Matemática Moderna, a nível internacional, com a necessidade de repensar o ensino desta disciplina nas escolas. Assim, a partir da década de 60 do século XX iniciaram-se experiências pedagógicas, lideradas por Sebastião e Silva, no intuito de se proceder a uma Reforma nesse sentido em Portugal. As experiências foram inicialmente realizadas numa escola do ensino primário, na Telescola e no 3º ciclo liceal.

O programa de Matemática do CPES, aparentemente elaborado por Sebastião e Silva, foi portanto concebido com base nos preceitos da Matemática Moderna. Neste consta que a Matemática do CPES deveria introduzir alterações significativas ao nível da forma e do conteúdo.

Ao nível da forma, procurava-se uma implementação efetiva de metodologias de ensino já defendidas desde o início do século XX. Pretendia-se a prática de um método heurístico de ensino, centrado no aluno, numa perspetiva que hoje designamos por construtivista da aprendizagem. Partindo das vivências e interesses dos alunos, o professor deveria conduzi-lo “por declive suave” a um nível de abstração, que seria reciprocamente aplicado em situações concretas do quotidiano.

O programa recomendava ainda que os manuais escolares contivessem espaços em branco para o aluno preencher, procurando induzir todos os conceitos, e que o significante não fosse diferenciado do significado de modo a proporcionar ao aluno a compreensão das estruturas matemáticas.

Esta posição vai ao encontro daquilo que Pinto & Monteiro (2008, p. 19) defendem. Os algoritmos não devem ser ensinados antes da compreensão do conceito ou, pelo menos, devem ser abordados ao longo do percurso de aprendizagem, partindo das estratégias dos alunos.

O programa recomenda ainda que a linguagem dos textos seja simples, adequada à idade dos discentes, contendo frases breves e, sempre que possível, apoiadas em gravuras sugestivas.

Também se procurava evidenciar as aplicações técnicas da Matemática e a sua relação com outras áreas do saber, promover o trabalho de grupo e atividades que proporcionassem ao aluno criar conhecimento, recorrendo a material manipulável.

Porém, é ao nível do conteúdo que a disciplina de Matemática sofreu alterações mais significativas, com uma reformulação inovadora dos programas. A linguagem de conjuntos assume agora um papel preponderante na abordagem da maioria dos conceitos de Aritmética e Álgebra, sendo ainda aconselhada a introdução moderada e progressiva do uso de letras em igualdades simples.

A Geometria é simplificada, sendo a sua abordagem mais superficial.

O tema central do CPES é agora o estudo dos Números Racionais. Consideram-se apenas números racionais absolutos, uma vez que a noção de número negativo só será introduzida posteriormente.

Nesta investigação foram analisados três livros de texto do CPES, em comparação com o manual único adotado antes da criação do CPES para o 1º ano dos liceus, para compreender como o novo currículo prescrito era apresentado aos professores.

Neste sentido, foram definidos dois grandes objetivos.

## **6.2. OBJETIVO 1: DESCRIÇÃO DOS ASPETOS IDEOLÓGICOS, PEDAGÓGICOS, DE ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO DOS MANUAIS.**

À exceção do manual “Matemática”, para o 1º ano, de António Oliveira Pegado, António Argel de Melo e Silva Aires Biscaia, Victor Manuel de Jesus Pereira e Jorge Fernando de Andrade Monteiro, cujo acesso não me foi possível, foram analisados todos os manuais de Matemática do 1º ano do CPES, aprovados para Portugal e seus domínios em Diário de Governo nº168, III.ª série, de 21 de Julho de 1970, e em Diário de Governo nº177, IIª série, de 1 de Agosto de 1970, para o quinquénio que englobava os anos letivos de 1970-1971 a 1974-1975,

Nesta análise geral, os três manuais do CPES foram comparados entre si e também com o manual único de Álvaro Sequeira Ribeiro, tendo-se observado várias divergências.

No manual único, os capítulos de Geometria estão presentes ao longo da obra. Por outro lado, os capítulos referentes a esta temática encontram-se apenas no final dos manuais do CPES.

No manual único, a própria abordagem de tópicos matemáticos como as operações com números inteiros e os números fracionários, partem geralmente de exemplos relacionados com Geometria. A linguagem de conjuntos é praticamente inexistente e não contem nenhum capítulo dedicado a Teoria de Conjuntos.

Comparando com os manuais do CPES, o manual único também não contempla, por exemplo, as operações com números fracionários, equações, a explicação do algoritmo da adição e da multiplicação usando as propriedades e não faz referência a operações inversas e a operadores inversos.

Apesar de conter diversos esquemas a acompanhar o texto, o manual único tem um aspeto mais sóbrio pelo facto de ser a preto e branco e o autor dirigir-se aos alunos na terceira pessoa. Nos manuais

do CPES denota-se maior proximidade e adequação à faixa etária dos alunos, usando-se ilustrações com imagens e desenhos, cores, e recorrendo mais a exemplos do quotidiano.

Todos os manuais analisados, quer do CPES quer o manual único, incluem questões ou espaços para preencher ao longo do texto informativo, com maior ou menor regularidade, para além de alguns exercícios de aplicação que se apresentam normalmente no final das secções ou capítulos.

Porém, todos apresentam uma estrutura linear e não contém exercícios globais que permitam ao discente rever conhecimentos anteriores, dificultando uma aprendizagem individualizada. Tendo um único contacto com cada tópico, o aluno não terá oportunidade de compensar aprendizagens menos consolidadas e sentirá dificuldade em estabelecer conexões.

Apenas nos manuais A e B se observam aspetos que relacionam a Matemática com outras disciplinas ou áreas de conhecimento, incluindo exemplos, notas informativas de cultura geral e história da matemática. Há ainda, apenas nestes dois, várias referências ao Ultramar como território português e à guerra colonial, que curiosamente não foram encontradas no manual C. Estes aspetos encontram-se essencialmente no capítulo “Conjuntos e Números” de ambos os manuais.

De entre os livros do CPES analisados, e baseando-me em pequenos estudos estatísticos que realizei nesta investigação, o manual que me parece mais adequado à faixa etária dos alunos é o manual A, pelos parágrafos curtos e espaçamento entre eles, textos regularmente entremeados de exercícios ou espaços em branco para preencher, pela estrutura clara e uso de cores nos destaques e nos esquemas.

Porém, é o manual B que considero mais completo e cientificamente rigoroso, e deste modo um instrumento mais útil para o professor, dada a dificuldade sentida em relação às alterações profundas introduzidas nos novos programas.

É bastante exaustivo e detalhado nos exemplos que apresenta, procurando abordar vários significados para um conceito, colocando assim o aluno perante problemas de diferentes tipos, antes de formalizar. Já no manual A é frequente observar-se a generalização após a apresentação de um único exemplo.

O manual B contém ainda diversas atividades de investigação, recorrendo à utilização de materiais manipuláveis, e questões que levam o aluno a refletir e formular conjecturas.

Todavia, contem por vezes parágrafos longos, e várias páginas de texto sem que se solicite qualquer tipo de tarefa ao aluno.

O manual C foi rejeitado inicialmente pela Inspeção, sendo depois aprovado para Portugal e seus domínios. Porém, nesta nova versão, ainda persistem algumas imperfeições apontadas por Redinha.

Apesar de ser o único que define o conceito de variável, este manual utiliza quase sempre figuras geométricas como símbolos nas generalizações. Esta forma de representação não é aprovada por Joaquim Redinha e diverge das indicações do programa, onde se recomenda a introdução gradual de letras nos tópicos matemáticos. No entanto, os autores do manual C recorrem ao uso de variáveis no

enunciado de alguns exercícios, o que o aluno irá certamente estranhar depois de se terem evitado ao longo da informação textual.

O manual C recorre ainda sistematicamente a esquemas abstratos de máquinas de calcular para mostrar propriedades das operações que, segundo Redinha são desaconselháveis.

A utilização de vários símbolos ou designações para um só conceito é comum nos manuais B e C, o que na opinião de Redinha será desnecessário e até desaconselhável, na medida em que vêm apenas aumentar a carga teórica do manual.

Os três manuais do CPES respeitam, em geral, as indicações dos programas, acrescentando por vezes alguns conceitos não contemplados no mesmo, especialmente os manuais B e C.

### **6.3. OBJETIVO 2: COMPARAÇÃO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS**

Este foi considerado o meu objetivo principal, de modo que lhe foram dedicadas a maior parte das páginas desta dissertação.

Foram selecionados para análise os três tópicos que, a meu ver, foram mais influenciados pelos preceitos da Matemática Moderna: Conjuntos, Operações com Números Inteiros e Números Racionais.

No capítulo Conjuntos e Números, os manuais analisados seguem as indicações do currículo, articulando regularmente a linguagem simbólica com a gramática. A utilização de retângulos e régua a cores para representar números inteiros é concretizada nos manuais A e B com a apresentação de gráficos de barras. Os autores do manual C, utilizam-nas também nas operações com números inteiros, para representar cardinais de conjuntos, um dos aspetos que também terá sido criticado por Redinha.

No que se refere às operações com números inteiros e, na minha perspetiva, considero as abordagens pouco intuitivas no manual único, nomeadamente a noção de soma, diferença e produto, sendo os exemplos baseados na Geometria, ou seja, na representação de perímetros e medidas de comprimento de segmentos de reta.

Todavia, a abordagem nos manuais do CPES, baseada na linguagem de conjuntos também se revela formal, agravada pelo facto de alguns autores utilizarem entidades abstratas como figuras geométricas ou imagens não contextualizadas para representar os elementos dos conjuntos, que não derivando do senso comum, não se traduzem em aprendizagens significativas para os alunos.

A soma de números inteiros é abordada nos manuais do CPES, como sendo o cardinal da reunião de conjuntos disjuntos.

Já no manual de Sequeira Ribeiro, a abordagem da adição é através do cálculo do perímetro de um polígono, cujos lados são representados sucessivamente sobre uma reta.

A diferença, nos manuais do CPES, é o cardinal do conjunto complementar, dado um conjunto e um seu subconjunto. Aqui também se refere a subtração como operação inversa da adição e introduzem-se equações do tipo  $x + a = b$ ,  $x - a = b$  e  $a - x = b$ .

Já no manual único, a subtração é abordada através do cálculo do comprimento de uma barra colocada sobre uma régua, não coincidindo nenhuma das extremidades da barra com os 0 mm. Este manual não faz qualquer referência aos aspetos supramencionados incluídos nos manuais do CPES.

A multiplicação é abordada no manual único apenas como soma de parcelas iguais, usando o perímetro de um hexágono regular como exemplo. O produto é aqui definido sendo o primeiro fator a parcela que se repete e o segundo o número de parcelas iguais.

Já nos manuais do CPES, o primeiro fator do produto é o número de parcelas iguais e o segundo a parcela, o que fará mais sentido numa fase em que ainda não foi abordada a propriedade comutativa da multiplicação. A soma de parcelas iguais é aqui apresentada como cardinal da reunião de conjuntos equicardinais, mutuamente disjuntos.

São ainda atribuídos outros significados à multiplicação, nomeadamente em contexto de comparação multiplicativa, referindo os numerais multiplicativos, e em modelos retangulares para determinação do número de elementos que constituem as linhas e as colunas.

No manual único, denota-se ainda maior ênfase no cálculo mental, apresentando técnicas mais detalhadas, como a multiplicação por 4, 6, 8, 11, 12 e 15, propondo a memorização de uma tabela de multiplicações em que um dos fatores do produto tem dois algarismos e exercícios trabalhosos de cálculo com números grandes e expressões extensas.

Na introdução da divisão, os manuais do CPES mostram também vários significados e contextos diferentes. Na abordagem da divisão exata no conjunto dos números inteiros, partem sempre da equipartição de um conjunto em conjuntos disjuntos, mas são também apresentadas situações de partilha equitativa, em contexto real.

No manual A apresenta-se ainda uma situação concreta em que se utiliza a divisão exata como medida.

A divisão exata no conjunto dos números inteiros absolutos é também abordada como operação inversa da multiplicação, pela equivalência das equações  $a = b \times q$  e  $q = a : b$ , partindo de situações concretas que consistem na determinação de um fator desconhecido numa multiplicação. Os manuais A e C recorrem também a modelos retangulares.

Os manuais do CPES introduzem ainda equações do tipo  $a \times x = b$ ,  $x : a = b$  e  $a : x = b$ , o que não se verifica no manual único. Neste, a divisão é apenas abordada em contexto de equipartição.

Na abordagem da divisão inteira, todos os manuais partem de situações do quotidiano em que se verifica a impossibilidade de obter um quociente exato. Tentando resolver uma equação do tipo  $d \times q = D$ , sendo  $d$  o divisor e  $D$  o dividendo, procura-se encontrar dois inteiros consecutivos cujo

produto por  $d$  é respetivamente menor e maior que  $D$ . Tomando o quociente por defeito e o resto escreve-se a igualdade fundamental da divisão.

É ainda de referir que as propriedades das operações são introduzidas nos manuais do CPES, a partir da representação de conjuntos ou de situações concretas do real. Nestes tópicos o manual C utiliza ainda os habituais esquemas de máquinas de calcular e também a representação de operações usando segmentos de reta.

Os números fracionários são apresentados no manual único apenas como relação parte-todo, recorrendo a vários exemplos, em que as unidades são conjuntos contínuos ou discretos.

Já os manuais do CPES, para além de conterem exemplos de frações como relação parte-todo, também as abordam como quociente exato em situações de partilha equitativa, e, no caso dos manuais B e C, como operadores de conjuntos discretos ou contínuos. Apesar de o programa recomendar explicitamente que as frações sejam aplicadas a conjuntos discretos, observa-se que os manuais analisados recorrem na maioria dos exemplos a conjuntos contínuos para unidade.

Em investigações futuras, seria interessante estudar como se desenvolveu este conceito no 2º ano do CPES, com a introdução da proporcionalidade direta, considerando a fração como razão entre duas partes em que se divide a unidade.

Os manuais do CPES referem-se ainda à substituição da preposição “de” pelo sinal  $\times$  para ligar numerais multiplicativos, partitivos ou partitivo-multiplicativos. Estes últimos operadores são decompostos em multiplicação e partição, por esta ordem nos manuais A e B. Já no manual C, observa-se que essa decomposição pode também ser feita pela ordem inversa.

Os autores dos manuais do CPES destacam ainda que a divisão exata de racionais é sempre possível, o que nem sempre acontece no conjunto dos números inteiros.

Ao contrário do manual único, estes contém jogos que consistem em “adivinhar números”, usando operações inversas e equações que são extendidas ao conjunto dos números racionais, cumprindo as recomendações do programa nesse sentido.

Denota-se, portanto, maior preocupação em atribuir um carácter lúdico à aprendizagem da Matemática nos manuais do CPES, e maior aproximação ao quotidiano dos alunos, com exemplos acompanhados de esquemas sugestivos, na introdução das operações aritméticas, das suas propriedades e no conceito de fração.

Nestes recursos educativos, os exemplos revelam normalmente vários significados, antes da formalização do conceito. Observa-se porém, que nos tópicos referentes aos numerais partitivo-multiplicativos e à divisão de frações recorrendo ao algoritmo IM, a explicação só se apresenta de modo formal, sendo por vezes apresentada a regra ou algoritmo sem apelar à intuição dos alunos.

Além disso, a obrigatoriedade do currículo em ensinar o algoritmo IM é bastante redutora porque impede os alunos de procurarem outros processos que podem ser mais inteligíveis para eles. (Pinto & Monteiro, 2008, p. 18). Este aspeto deve ser tomado em consideração pelos docentes, atendendo à

dificuldade que os alunos sentem nesta matéria e aos diversos mal entendidos que são sistematicamente observados.

#### **6.4. BALANÇO DA FASE INICIAL DA CRIAÇÃO DO CPES**

A fase de introdução dos novos programas de Matemática do CPES com base nos preceitos da Matemática Moderna não terá decorrido da forma esperada. Aliás, esta Reforma não se encontrava ainda generalizada no nosso país quando outros já começavam a questionar-se acerca da sua eficácia.

A Reforma da Matemática Moderna fora gradualmente implementada em Portugal nos vários graus e vias de ensino, e inicialmente esperava-se que os novos programas fossem mais simples para os alunos e matematicamente mais sólidos do que os anteriores mas, aparentemente aconteceu o contrário.

As consequências traduziram-se no facto de a Geometria, deixada para o final do ano letivo, ser ensinada de forma abreviada ou simplesmente esquecida por falta de tempo. Também a adoção de uma terminologia estranha a alunos e professores, dificultava o processo de ensino-aprendizagem da disciplina de Matemática.

Em Portugal, estas limitações eram acrescidas de uma mutação acentuada das escolas, com a integração das escolas preparatórias nas escolas técnicas elementares e secções dos liceus que funcionavam fora da escola sede, atrasos na colocação de professores no início do ano letivo, e uma grande falta de docentes profissionalizados. Apesar de as consequências da falta de professores com uma licenciatura para a docência de Matemática, por limitação do acesso à formação profissional, terem sido antevistas com antecedência pelo Ministro da Educação Nacional Pires de Lima, nesta altura a maioria dos docentes de Matemática do CPES eram do ensino primário e tinham frequentado apenas uma formação intensiva de 15 dias. A sua falta de preparação para a implementação dos novos programas em sala de aula, devido às alterações estruturais profundas ao currículo e ao nível da linguagem, dificultaram bastante a tarefa de ensinar os alunos de forma adequada.

Constatou-se ainda que o programa de matemática se apresentava demasiado extenso, fazendo-se sentir um atraso significativo no cumprimento do mesmo. Neste sentido, Joaquim Redinha enviou às escolas um texto denominado “Informação nº1” datado de 7 de Janeiro de 1969, em que esclarece vários pontos relacionados com o ensino da matemática, entre os quais refere que se devem abolir problemas muito complicados e expressões numéricas muito extensas. No ofício circular nº 296 de 20 de Janeiro de 1969, Redinha sugeriu que os professores dosessem o tempo, lecionando o essencial em cada capítulo.

Este problema, considerado grave, induziu a reformulação dos programas do CPES.

Estas medidas não se revelaram suficientes e toda a conjuntura que caracteriza a introdução da Matemática Moderna no CPES acabou por traduzir-se na má qualidade das aprendizagens dos alunos.

De facto, os resultados do exame nacional realizado pelos alunos do 2º ano do CPES em 1972, foram desanimadores e revelaram que a terminologia característica da Matemática Moderna os impediu de responder melhor a algumas questões.

Em investigações futuras, seria também importante analisar quais as alterações introduzidas nos novos programas em 1974, tendo em conta os resultados dos alunos e as críticas ao programa em vigor desde 1968, bem como as mudanças ocorridas neste ciclo de ensino até 1986, ou seja, durante o período de vigência do CPES.

Finalmente, e face ao exposto gostaria de deixar algumas ideias para investigações futuras:

- Tendo sido a unificação de duas vias de ensino, iniciada em 1968 com a criação do CPES, e posteriormente alargada às escolas secundárias com a fusão do ensino liceal e do técnico, uma conquista que veio romper com a distinção entre o *homo sapiens* e o *homo faber*, por que motivo se verifica uma nova e crescente valorização da formação técnica nos dias de hoje?
- Será que a crescente competitividade entre as editoras, que tem motivado a concepção de manuais e vários materiais de apoio procurando facilitar ao máximo o trabalho do professor em sala de aula, estará a induzir uma utilização excessiva dos mesmos, valorizando-se apenas o produto final e impedindo que os alunos construam os seus próprios modelos e estratégias para compreender os conceitos?



## REFERÊNCIAS

- Bardin, L. (1977). **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, pp. 29-46, 95-139
- Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). **Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, pp. 47-51, 63-74
- Carvalho, Carlos A. B. (2006), **A calculadora gráfica na trigonometria do 11º ano – Uma análise de manuais escolares de Matemática**, pp. 70-87
- Carvalho, Rómulo (2001), **História do Ensino em Portugal**, pp. 784-819
- Choppin, A. (2004). **História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte**. Educação e Pesquisa, 30(3), pp. 549-566.
- Ferreira, H. C. (2003). **A evolução da Escola Preparatória. O conceito e componentes curriculares**. Bragança: Instituto Politécnico de Bragança., pp. 13-24, 27- 43.
- Matos, J. M. & Almeida, M. (2012), **Modelando um novo currículo – a Matemática Moderna no início da Telescola**
- Matos, J. M. (2009). **Changing representations and practices in school mathematics: the case of Modern Math in Portugal**. In K. Bjarnadóttir, F. Furingueti & G. Schubring (Eds.), "Dig where you stand" Proceedings of a Conference on On-going Research in the History of Mathematics Education, Gardabær, Iceland, June 20-24 2009. Reykjavik: University of Iceland.
- Monteiro, C., Pinto, H. & Figueiredo, N. (2005), **As fracções e o desenvolvimento do sentido do número racional, em Educação e Matemática**, (pp. 47-51)
- Morgado, José Carlos (2004), **Manuais escolares – contributo para uma análise**. Porto Editora.
- Pinto, H. & Monteiro, C. (2008). **A Divisão de números racionais**. In Brocardo, J., Serrazina, L. E Rocha, I. (org.). **O Sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática**. Escolar Editora.

Teodoro, A. N. D. (1999). **A construção social das políticas educativas. Estado, educação e mudança social no Portugal contemporâneo.** Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, pp. 61-341

Wielewski, Gladys & Matos, J. M. (2009). **A evolução do Currículo de Matemática no Ciclo Preparatório do Ensino Secundário Português (1968-69)**

### **Legislação:**

Decreto-lei nº 47 480 de 2 de Janeiro de 1967

Decreto-lei nº 48 572 de 9 de Setembro de 1968

Lei nº5/73 de 25 de Julho

Portaria nº 23 601 de 9 de Setembro de 1968

### **Fontes Primárias:**

Arquivo J. Redinha / UIED

Arquivo Sec. Geral do ME / UIED

Eça, M., Cássio, M., Costa, M. & Gomes, M. (1970). *Vamos Estudar Matemática 1º ano.* Livraria Avis (Porto), 8ª edição

Heitor, A., Gomes, F. & Heitor, R. (1971). *Matemática 1º ano.* Livraria Popular de Francisco Franco (Lisboa), 3ª edição

Lopes, A. (1971). *Matemática 1º ano.* Porto Editora, 2ª edição

Ribeiro, A. (1962). *Compêndio de Matemática para o 1º ano do Curso Liceal.* Livraria Popular de Francisco Franco (Lisboa)

# **ANEXOS**

## ANEXO 1

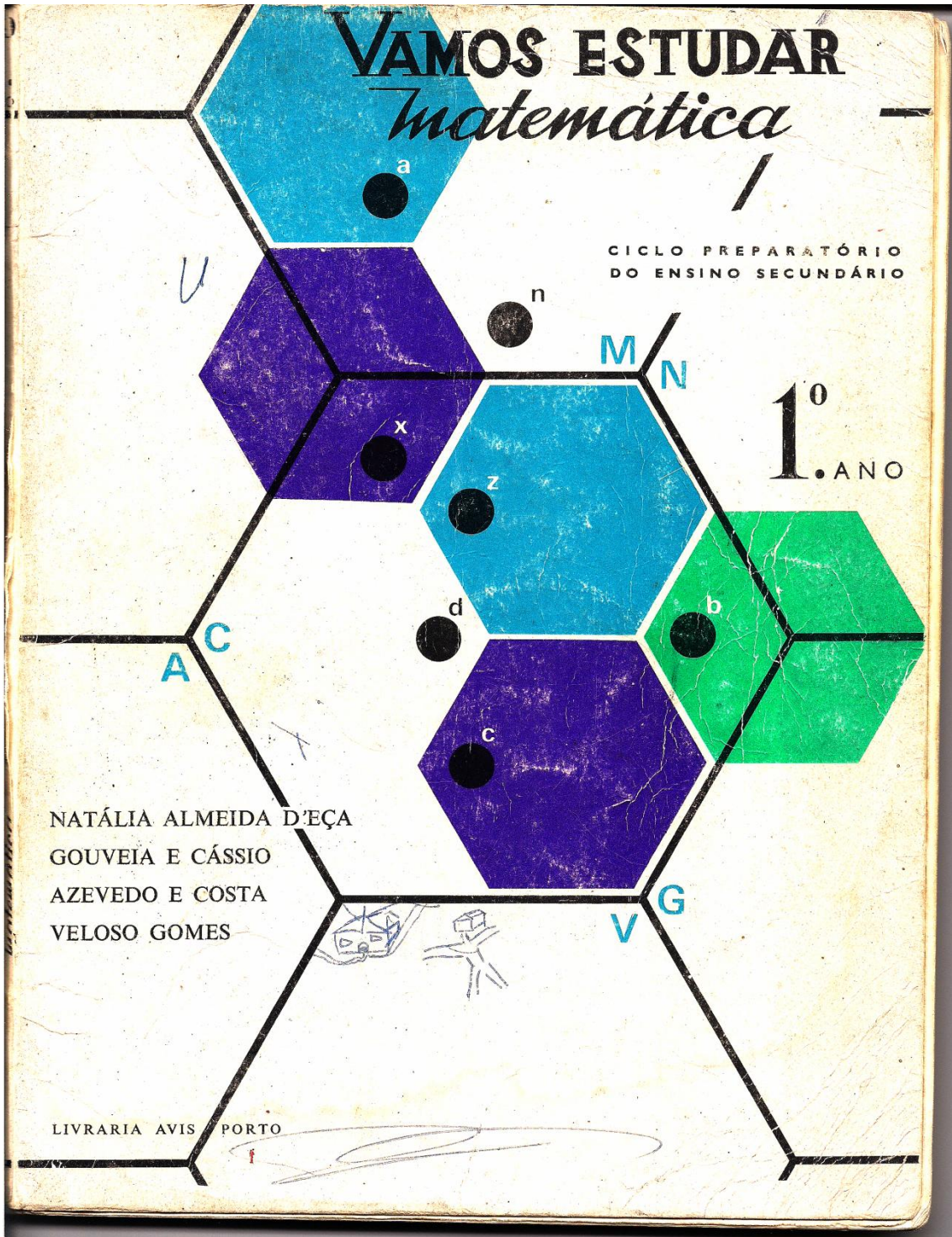
**Quadro de manuais analisados e sua localização na Biblioteca Nacional de Portugal**

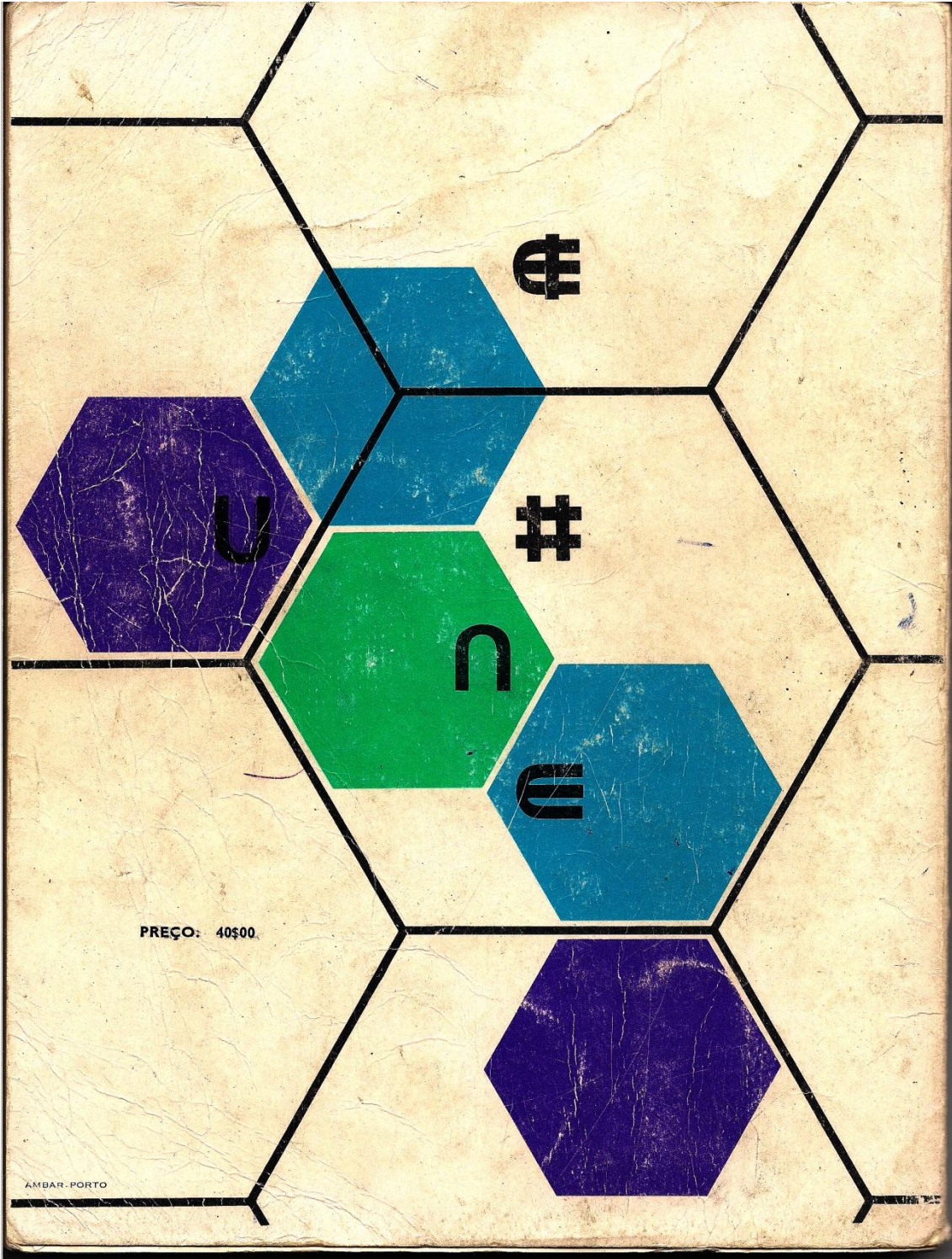
MANUAL	TÍTULO	AUTORES	EDITORIA	ANO	COTA	EDIÇÃO ANALISADA	
<b>1º ANO</b>	<b>A</b>	Vamos Estudar Matemática	Maria Natália da Graça Martins de Almeida de Eça; Manuel Otílio da Silva Gouveia e Cássio; Manuel de Azevedo e Costa; Manuel Veloso Gomes	Livraria Avis (Porto)	1970	C.G. 10274 V. (9ª edição)	8ª edição
	<b>B</b>	Matemática – 1º ano	António Augusto Lopes	Porto Editora	1971	S.A. 38839 V. (edição?)	2ª edição
	<b>C</b>	Matemática	António Oleiro dos Santos Heitor; Francelino Ângelo Gomes; Raúl Eduardo Paredes Oleiro Heitor	Livraria Popular de Francisco Franco (Lisboa)	1971	C.G. 10294 V. (3ª edição)	3ª edição
	<b>D</b>	Compêndio de Matemática 1º ano do Curso Liceal	Álvaro Sequeira Ribeiro	Livraria Popular de Francisco Franco (Lisboa)	1962	S.A. 26532 V.	

ANEXO 2

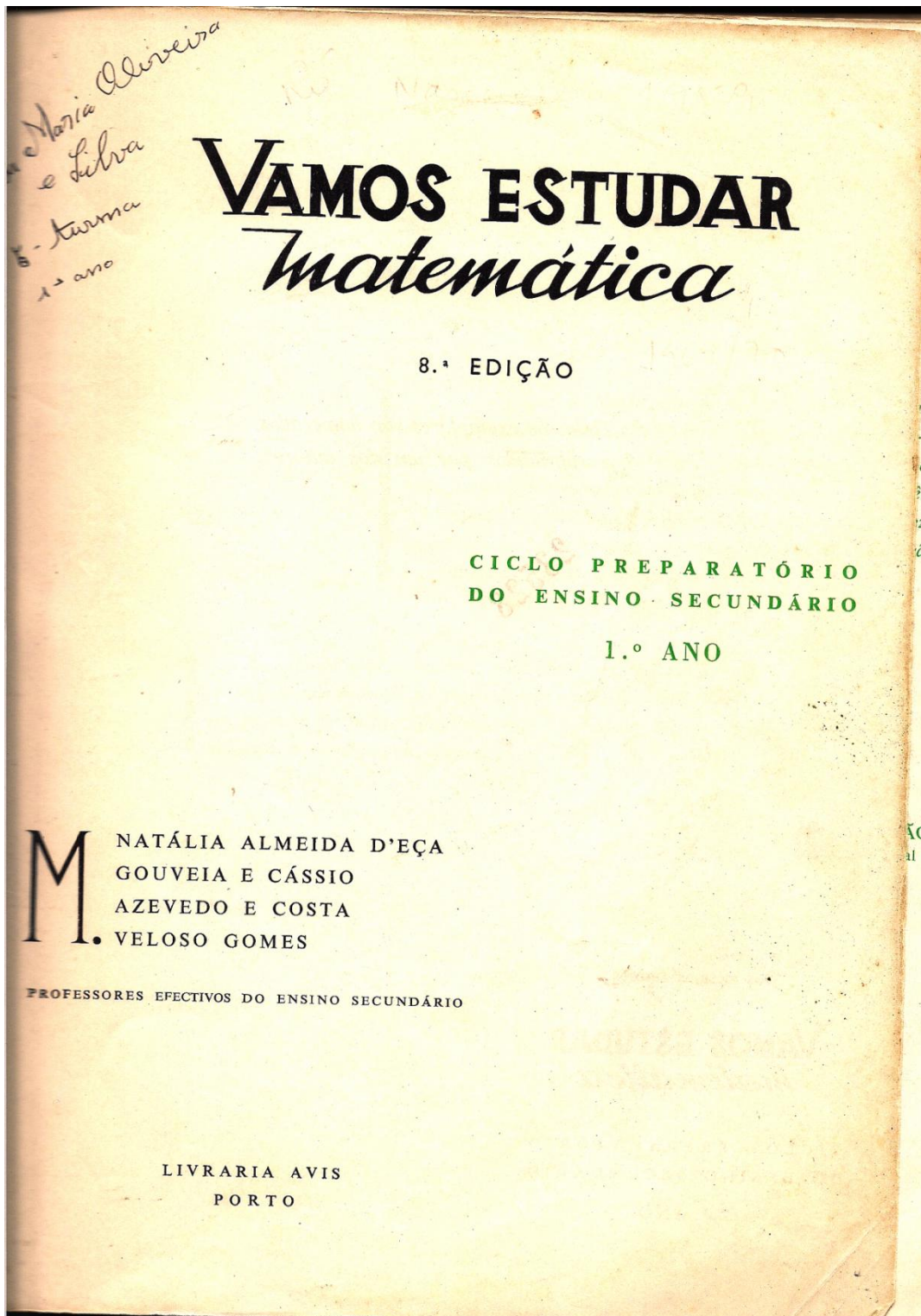
MANUAL A

CAPAS





CONTRA-CAPA:



*Manuel  
Gomes*

*Todos os exemplares vão numerados  
e rubricados por um dos autores.*

23528

Dos mesmos autores:

**VAMOS ESTUDAR**  
*matemática*

CICLO PREPARATÓRIO  
DO ENSINO SECUNDÁRIO

2.º ANO

## PREFÁCIOS:

*«... o futuro da Nação não reside apenas em elites fechadas e diminutas. Às reduzidas aristocracias da cultura contrapõe-se a educação das massas, constante preocupação dos governos de hoje, à qual até teríamos de aderir por imperativo de sobrevivência nacional. Àquela nostalgia do passado e sonhos de grandeza de antanho contrapõe-se a democratização do ensino em extensão e profundidade, factor primordial do progresso do País.»*

*«... A educação é o veículo poderoso e essencial que torna possível à vida humana ser digna de ser vivida, facilitando todo um processo de justiça social, inerente a qualquer fórmula de melhoria da condição do homem.»*

PROFESSOR VEIGA SIMÃO  
Ministro da Educação Nacional

*De todos os princípios básicos da Pedagogia, um sintetiza e terá de orientar a função docente: a figura central da Escola é sempre o aluno. Ele que solicite esclarecimentos, que realize, que investigue, que descubra... Que domine, por si, as dificuldades; que se valorize à custa de um esforço mental espontâneo — para mais proveitosamente colher e guardar os frutos que a experiência do mestre e o saber dos compêndios lhe facultam.*

*Parece-nos, por isso, mais vivo e eficiente, não o livro que já vai pronto para a aula, sim aquele que os elementos da turma organizam e completam no decorrer das lições.*

*Instrumento de trabalho, um livro didático há-de ser ferramenta que, embora humedecida, tantas vezes, pelo suor do espírito, o estudante manejará sozinho, apenas sob os olhares discretos do Professor.*

Os autores

**INDICE:**

**ÍNDICE**

<b>CONJUNTOS E NÚMEROS</b>	
<b>Conceitos de base</b>	<i>Pág.</i>
Noção de conjunto e de elemento .....	5
Representação de um conjunto. Relação de pertença .....	8
Determinação de um conjunto .....	12
Conjunto singular. Conjunto vazio.....	15
Relação de inclusão .....	19
Identidade entre conjuntos .....	23
Correspondência biunívoca .....	26
Relação menor do que .....	31
Sistemas de numeração. Representação de números inteiros .....	33
Conjuntos finitos. Conjuntos infinitos .....	43
Números ordinais .....	44
<b>OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS</b>	
<b>Adição</b>	
Reunião de conjuntos. Intersecção de conjuntos .....	47
Noção de soma .....	52
Propriedades da adição .....	56
<b>Subtracção</b>	
Conjunto complementar .....	62
Noção de diferença .....	63
Operação inversa da adição. Equações do tipo $a + x = b$ .....	64
Propriedades da subtracção .....	66
Prova real da subtracção. Equações dos tipos $a - x = b$ e $x - a = b$ .....	70
Cardinal da reunião de conjuntos não disjuntos .....	72
<b>Multiplicação</b>	
Produto de dois números. Numerais Multiplicativos .....	74
Propriedades da multiplicação .....	77
Multiplicação sucessiva. Propriedades .....	81
Noção de potência .....	84
<b>Divisão</b>	
Decomposição de um conjunto. Noção de divisão exacta .....	88
Noção de divisão inteira .....	92
Múltiplo e submúltiplo de um número .....	94
Numerais partitivos e partitivos multiplicativos .....	96
<b>NÚMEROS RACIONAIS</b>	
Noção de número fraccionário .....	101
Equivalência de fracções. Números racionais ....	105

Operações com números racionais .....	<i>Pág.</i>
Fracções com termos fraccionários .....	109
Potências de números fraccionários .....	114
<b>CÁLCULO COM DECIMAIS</b>	
Fracção decimal. Fracção ordinária .....	119
Operações com fracções decimais .....	123
Dízima finita. Dízima infinita periódica .....	125
Porcentagens .....	129
<b>MEDIÇÃO DE COMPRIMENTOS</b>	
Comparação de comprimentos .....	133
Medição de comprimentos .....	136
Unidades de comprimento .....	137
<b>MEDIÇÃO DE TEMPOS</b>	
Unidades de tempo .....	142
<b>MEDIÇÃO DE VELOCIDADES</b> .....	147
<b>INTRODUÇÃO CONCRETA À GEOMETRIA</b>	
Propriedades geométricas dos corpos .....	150
Sólidos geométricos; sua forma .....	151
Superfícies de figuras planas e de sólidos geométricos .....	154
Conceito de área .....	160
Unidades de área .....	161
Conceito de volume .....	163
Unidades de volume .....	164
Ponto material e ponto geométrico .....	166
<b>ELEMENTOS DE GEOMETRIA PLANA</b>	
Recta. Semi-recta. Segmento de recta. Plano ....	167
Noção de perímetro .....	170
Circunferência e círculo. Perímetro .....	172
Comprimento da circunferência .....	176
Noção de igualdade geométrica .....	178
Construção de triângulos .....	179
Noção de ângulo. Classificação de ângulos .....	180
Medição de ângulos .....	184
Ângulo ao centro .....	187
Ângulo interno e ângulo externo de um polígono .....	188
Classificação dos triângulos .....	189
Posição relativa de duas rectas no plano .....	190
Paralelogramo. Classificação dos quadriláteros .....	193
Rectas horizontais e verticais .....	195
Gráficos cartesianos .....	196

## INDICE EXPANDIDO:

O capítulo “Conjuntos e Números”, cujo subtítulo neste manual é “Conceitos de Base” divide-se sequencialmente em vários subcapítulos da seguinte forma:

- Noção de conjunto e elemento
- Representação de um conjunto. Relação de pertença.
- Determinação de um conjunto.
- Conjunto singular. Conjunto vazio.
- Relação de inclusão
- Identidade entre conjuntos.
- Correspondência biunívoca.
- Relação menor do que...
- Sistemas de numeração. Representação de números inteiros.
- Conjuntos finitos. Conjuntos infinitos.
- Números ordinais.

O capítulo “Operações com números inteiros” divide-se nos seguintes subcapítulos e respectivas secções:

- Adição
  - Reunião de conjuntos. Intersecção de conjuntos;
  - Noção de soma
  - Propriedades da adição
- Subtracção
  - Conjunto complementar
  - Noção de diferença
  - Operação inversa da adição. Equações do tipo  $a + x = b$
  - Propriedades da subtracção
  - Prova real da subtracção. Equações do tipo  $a - x = b$  e  $x - a = b$ .
  - Cardinal da reunião de conjuntos não disjuntos
- Multiplicação
  - Produto de dois números. Numerais multiplicativos
  - Propriedades da multiplicação
  - Multiplicação sucessiva. Propriedades
  - Noção de potência

- Divisão
  - Decomposição de um conjunto. Noção de divisão exacta
  - Noção de divisão inteira
  - Múltiplo e submúltiplo de um número
  - Numerais partitivos e partitivos multiplicativos

Já a unidade temática “Números racionais” divide-se nas seguintes secções:

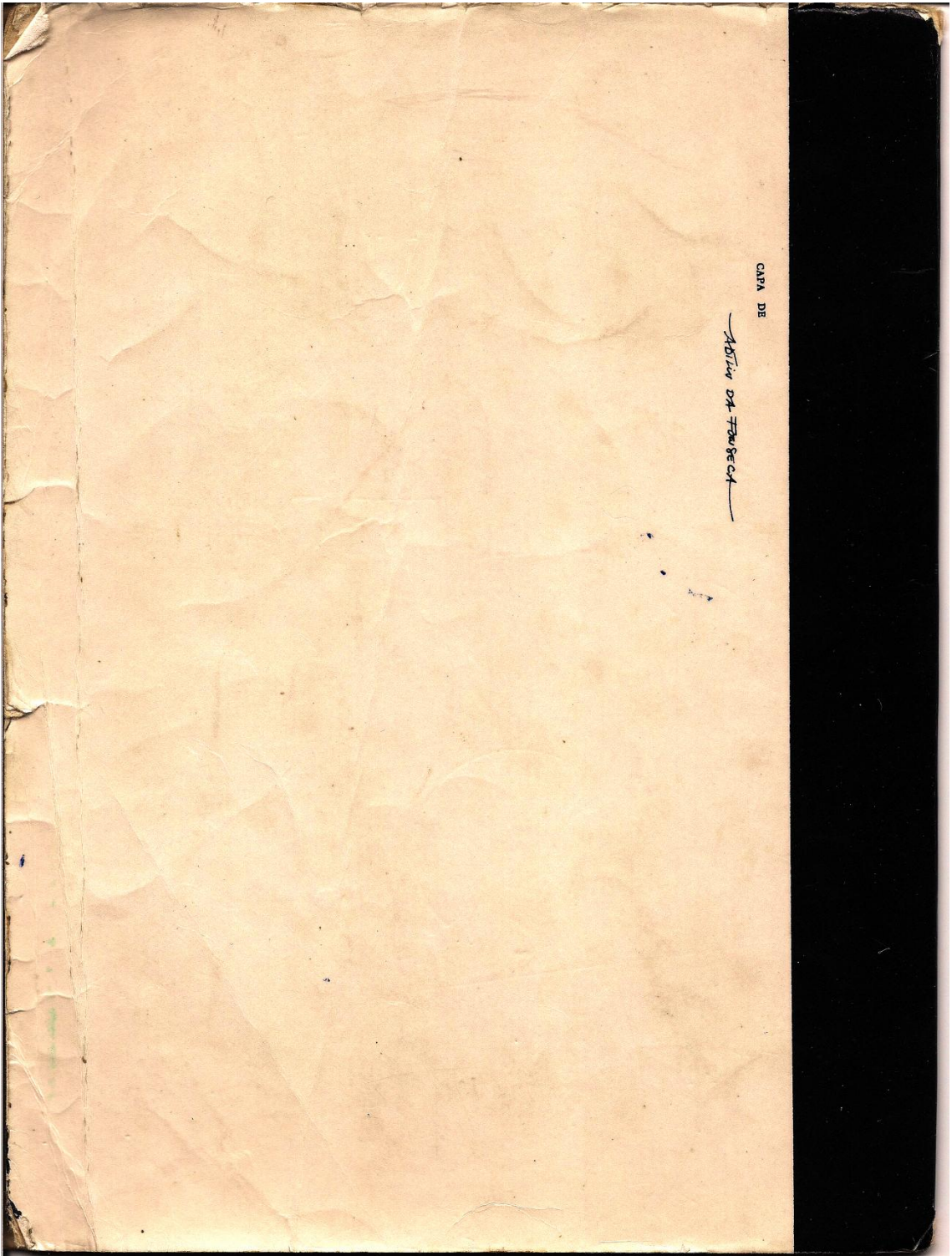
- Noção de número fraccionário
- Equivalência de fracções. Números racionais
- Operações com números racionais
- Fracções com termos fraccionários
- Potências de números fraccionários

ANEXO 3

MANUAL B

CAPAS:

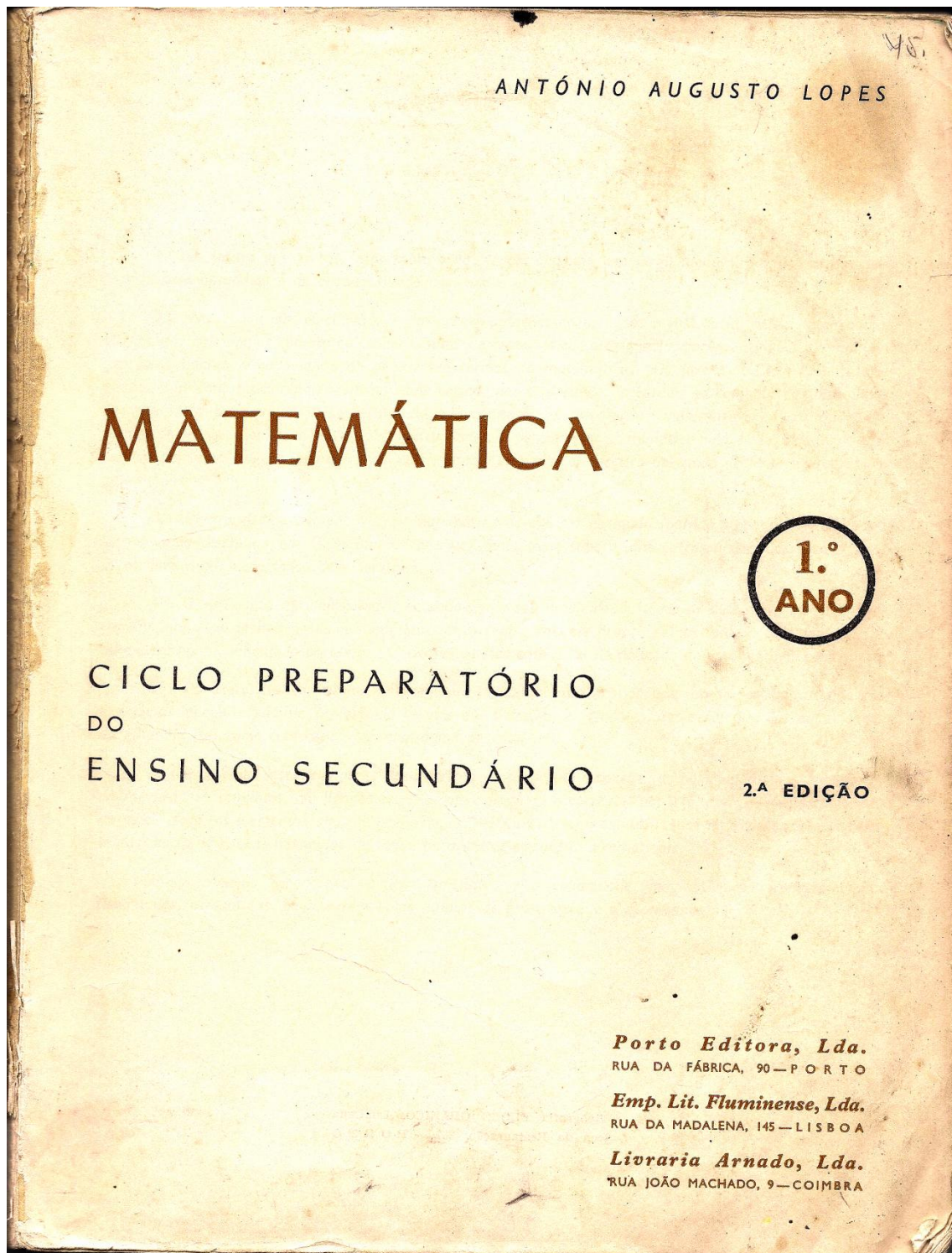




CAPA DE

Adrian DA FANSECK

CONTRA-CAPA:



## PREFÁCIO:

### POSIÇÃO DO AUTOR

1. O futuro dos jovens, e portanto o da Nação, depende, em larga medida, da Matemática que eles tenham aprendido e da engenhosidade com que a utilizem.
2. Na época da electrónica e das transplantações do coração, a vida social exige de cada um, e cada vez mais, maior número de conhecimentos de matemática; a exigência, porém, atinge a sua máxima expressão quanto à capacidade de pensar em termos de matemática. Os jovens do Ciclo Preparatório iniciam um ciclo na aprendizagem da Matemática; por esta razão, integrada no conjunto das disciplinas do ciclo, ela deve valer como estilo de pensamento em evolução, indispensável à assimilação e transferência de conhecimentos; por outro lado, o pensamento matemático não pode deixar de ser servido por uma linguagem específica cujo domínio só pode ser efectivo por meio de lenta e progressiva assimilação.
3. Dentro destas perspectivas, a Matemática deverá ser ensinada (perdão, aprendida!) cada vez menos como disciplina em si mesma e cada vez mais como suporte das outras disciplinas escolares: a todas deve servir e de todas deve servir-se.
4. O estudante aprendiz, movimentando-se no seu ambiente de todos os dias, deve tomar conhecimento dos elos de ligação da matemática com o real e vai, ele próprio, elaborando a sua matemática; aprenderá por si, vinculado ao texto. O professor fica com a tarefa delicada de acompanhar e orientar.
5. Os exercícios constituem a mola que incita o aluno a progredir no seu trabalho; não são exercícios receita; são de preferência tarefas em situação, exigindo esforço reflectido das capacidades do aprendiz, tal como ocorre na vida quotidiana de cada um.
6. A base de desenvolvimento das rubricas do programa é constituída pelas operações elementares da Álgebra dos conjuntos, em ligação estreita com a linguagem corrente; por isso, estão presentes no texto, de modo claro, os elementos que, de preferência, podem, e devem, ser utilizados na coordenação com as outras disciplinas, com particular destaque para certas estruturas gramaticais.
7. A atenção espontânea, a livre iniciativa e a capacidade imaginativa são constantemente fomentadas, e mantidas, pelo texto e pelas numerosas gravuras que o acompanham.

«O que não experimentares,  
não julgues que o sabes bem»

(SÁ DE MIRANDA)

«Os números são proprie-  
dades dos conjuntos».

(Z. P. DIENES)

**Para reflexão de quem ensina:**

1. A criança que, com tenra idade, começa a conhecer e a dominar as relações entre os seres, no universo dos seus brinquedos, é já um matemático em miniatura;
2. A matemática, ao nível escolar, é matéria fácil, mas não é matéria de facilidades;
3. Os adultos ignoram as ligações do concreto ao abstracto, embora conheçam algumas coisas concretas e outras abstractas;
4. Três degraus, no acto de aprender:
  - I. Observar; II. Experimentar; III. Reflectir; concluir.

Na escola, o professor:

1. ensina a aprender;
2. aprende a ensinar..

**INDICE:**

**ÍNDICE**

INTRODUÇÃO .....	5 a 7
<b>Cap. I — CONJUNTOS E NÚMEROS</b> .....	
A. Noções de base .....	8 a 24
B. Números inteiros. Sistemas de numeração .....	25 a 52
C. Conjuntos de números e seus cardinais .....	53 a 68
<b>Cap. II — OPERAÇÕES SOBRE NÚMEROS INTEIROS</b> .....	
Reunião e intersecção de conjuntos .....	69 a 80
Adição .....	80 a 98
Subtracção .....	98 a 114
Multiplicação. Potenciação .....	115 a 134
Divisão exacta .....	134 a 140
Divisão inteira .....	140 a 146
Múltiplos e submúltiplos de um número inteiro .....	146 a 149
Numerais partitivos. Jogos de pensar em números .....	149 a 156
<b>Cap. III — NÚMEROS RACIONAIS</b> .....	
Generalidades. Relação de equivalência .....	157 a 167
Simplificação e comparação de fracções .....	167 a 170
Adição, subtracção, multiplicação e divisão. Aplicações .....	170 a 183
<b>Cap. IV — CÁLCULO COM DECIMAIS</b> .....	
Fracções decimais e fracções ordinárias .....	184 a 188
Operações com números decimais. Aplicações .....	189 a 202

Cap. V	— MEDIÇÃO DE COMPRIMENTOS, DE TEMPOS E DE VELOCIDADES	
A.	Comprimentos .....	203 a 219
B.	Tempo .....	219 a 224
C.	Velocidades .....	224 a 228
Cap. VI	— INTRODUÇÃO CONCRETA A GEOMETRIA .....	229 a 254
Cap. VII	— ELEMENTOS DE GEOMETRIA PLANA .....	255 a 294

## ÍNDICE EXPANDIDO:

O manual inicia os seus conteúdos com uma Introdução cujo subtítulo é “Os primeiros termos do vocabulário”.

O Capítulo I designado “Conjuntos e Números” estrutura-se em vários subcapítulos rotulados por ordem alfabética, por sua vez divididos em secções numeradas:

### A. Noções de base

1. Definição de um conjunto por enumeração dos seus elementos
2. Conjuntos definidos por meio de propriedades
3. Relação de pertença
4. Relação de inclusão
5. Conjuntos idênticos ou iguais

### B. Números inteiros. Sistemas de numeração.

#### Números inteiros

6. Correspondências biunívocas
7. Exemplos de correspondências unívocas num só sentido
8. Número de elementos de um conjunto
9. Relação menor que ( $<$ )

#### Sistemas de numeração

10. Numeração falada, numeração escrita
11. Numeração romana
12. Numeração decimal
13. Referência a outros sistemas de numeração
14. Vantagens do sistema de numeração decimal sobre a numeração romana
15. Comparação de números, a partir da sua representação decimal
16. Representação de números por meio de rectângulos ou régua
17. Arredondamento de números
18. Gráficos de barras (ou colunas) e de segmentos de recta

### C. Conjuntos finitos de números e respectivos cardinais. Números muito grandes.

19. Conjuntos de números inteiros
20. Cardinal de um conjunto de números

21. Números muito grandes
22. O conjunto de todos os possíveis números inteiros
23. A operação de contagem. Números ordinais.

A unidade temática “Operações sobre números inteiros” divide-se da seguinte forma:

#### Reunião e intersecção de conjuntos

1. Reunião de conjuntos
2. Reunião de conjuntos e disjunção de propriedades
3. Intersecção de conjuntos
4. Intersecção de conjuntos e conjunção de propriedades
5. Síntese
6. Exercícios

#### Adição de números inteiros

7. Cardinal da reunião de dois conjuntos disjuntos
8. Soma de várias parcelas
9. Tabuada da adição
10. Propriedade comutativa da adição
11. Propriedade associativa da adição
12. O zero, elemento neutro a respeito da adição
13. Existência e unicidade da soma
14. As propriedades das operações e o cálculo da soma
- 14.<sup>(\*)</sup> Exercícios

#### Subtracção

##### Diferença de dois números inteiros

(\*) Por lapso, o autor repete a numeração das duas últimas secções.

15. Conjunto complementar de um conjunto dado, em relação a outro em que está contido
16. Diferença de dois números inteiros
17. Possibilidade da subtracção
18. A subtracção como operação inversa da adição

##### Propriedades da subtracção

19. Subtrair duma soma um número
20. De um número, subtrair uma soma
21. Subtrair uma soma de outra

22. Invariância do resto
23. Cálculo da diferença
24. Prova real da subtracção
25. Equações do tipo  $x - a = b$
26. Equações do tipo  $a - x = b$
27. Cardinal da reunião de dois conjuntos não disjuntos

#### Multiplicação de números inteiros

28. Reunião de conjuntos disjuntos equicardinais
29. Numerais multiplicativos
30. Tabuada pitagórica da multiplicação
31. Propriedade comutativa da multiplicação
32. Existência de elemento neutro para a multiplicação
33. Anulamento do produto
34. Propriedade distributiva da multiplicação, a respeito da adição
35. Multiplicação por 10, por 100, por 1000, ...
36. Processo usual do cálculo do produto
37. Multiplicação sucessiva ou multiplicação iterada
38. Propriedade comutativa da multiplicação iterada
39. Propriedade associativa da multiplicação iterada
40. Potência de um número inteiro
41. Multiplicação de potências

#### Divisão de números inteiros

##### I. Divisão exacta

42. Equipartição de um conjunto em conjuntos disjuntos
43. Quociente exacto de dois números inteiros
44. Equações do tipo  $a \times x = b$
45. Divisão de um produto por um dos seus factores
46. Divisão de um produto por um número

##### II. Divisão inteira

47. Extensão da noção de quociente
48. Divisão por 10, por 100, por 1000...
49. A divisão e a subtracção
50. Cálculo do quociente

### III. Múltiplos e submúltiplos de um número inteiro

51. Múltiplos de um número inteiro
52. Submúltiplos de um número
53. Divisão exacta e numerais partitivos
54. Jogos de números

O capítulo “Números racionais” divide-se da seguinte forma:

#### I. Generalidades, Relação de equivalência

1. A noção de quociente exacto de dois números inteiros
2. Fracções equivalentes
3. Os números fraccionários como operadores representados por fracções
4. Identidade dos números representados por fracções equivalentes
5. O conjunto dos números racionais

#### II. Simplificação e comparação de fracções

6. Simplificação
7. Comparação de números racionais: relações  $>$  e  $<$

#### III. Operações com números racionais

##### A. Adição e subtracção

8. Adição de números racionais
9. Subtracção de números racionais

##### B. Multiplicação e divisão

10. Definição do produto de duas fracções
11. Multiplicação de números racionais
12. Divisão de números racionais
13. Divisão exacta com números racionais (divisor diferente de zero)

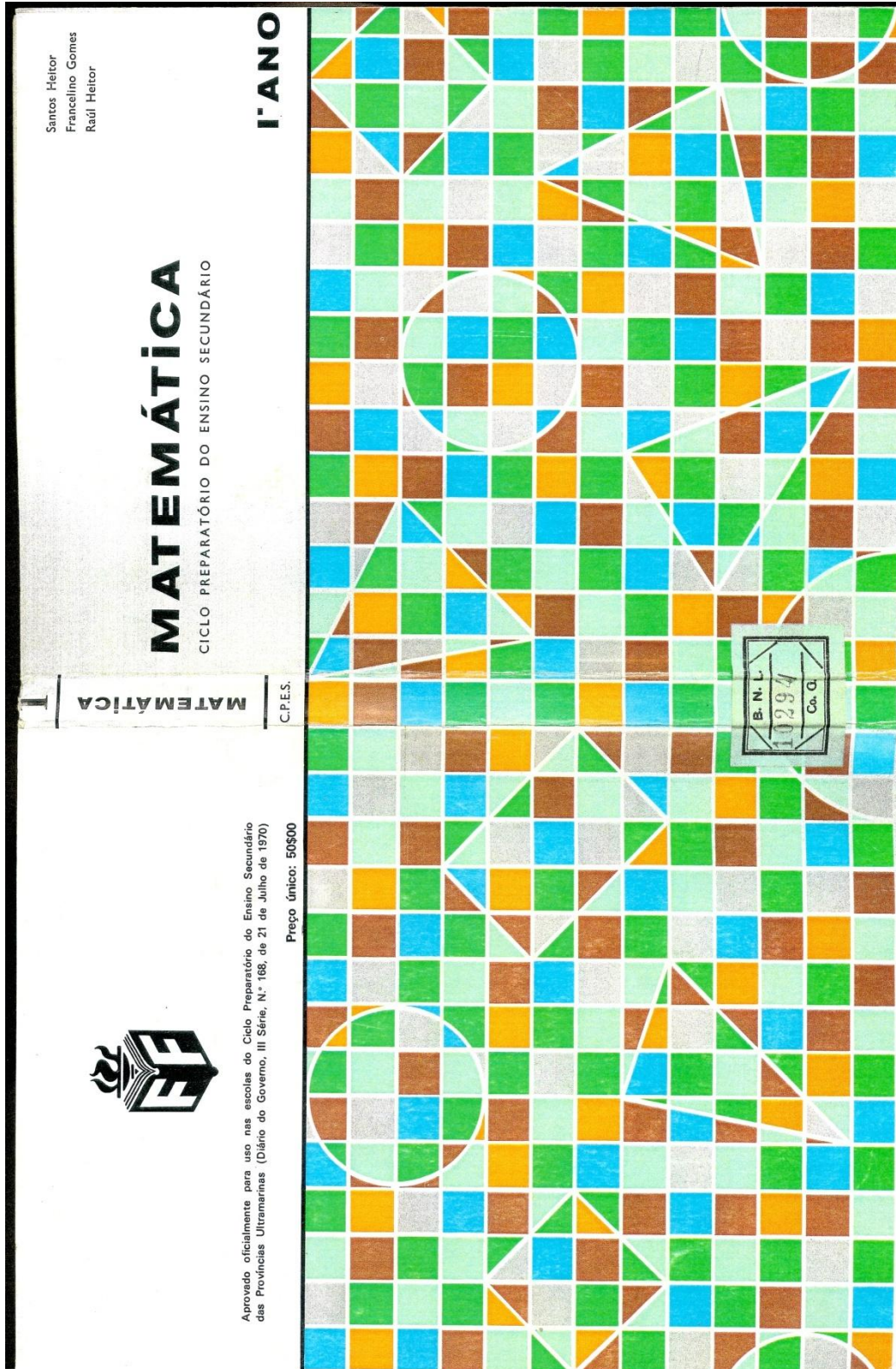
#### III<sup>(\*)</sup> Aplicações

14. Fracções de termos fraccionários
15. Equações elementares
16. (sem título)
17. Potências de números fraccionários (expoente natural)
18. Quociente de potências com o mesmo expoente
19. Quociente de potências com a mesma base

(\*) Por lapso, o autor repete a numeração dos dois últimos capítulos.

ANEXO 4  
MANUAL C

CAPA:



CONTRACAPA:

# MATEMÁTICA

1.º Ano

do

Ciclo Preparatório do Ensino Secundário

3.ª EDIÇÃO



*LIVRARIA POPULAR DE FRANCISCO FRANCO*

14 — Rua de Barros Queirós, 18 — LISBOA

## ÍNDICE:

### ÍNDICE

A ordenação deste índice vai referida aos números das rubricas do programa. Muito embora se cite, apenas, a designação inicial de cada rubrica, a matéria abrangida é a inclusa em cada número do programa.

#### I) CONJUNTOS E NÚMEROS

	Pág.
1. Noções intuitivas de conjunto e de elemento de um conjunto .....	7
2. Relações de pertença e de não pertença .....	12
3. Correspondências entre elementos de conjuntos .....	27
4. A relação menor que, entre números .....	31
5. Sistemas de numeração .....	35
6. Exemplos de conjuntos finitos de números e respectivos cardinais.....	37
7. Os números inteiros como indicativos de ordem dos objectos .....	46

#### II) OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

##### a) Adição

1. Noções intuitivas de reunião e de intersecção de conjuntos .....	49
2. Noção de soma de dois ou mais números .....	54
3. Propriedades comutativa e associativa da adição.....	59 e 61
4. Intervenção das propriedades associativa e comutativa no processo usual do cálculo da soma .....	66
5. Referência a outras aplicações das propriedades associativa e comutativa .....	65

##### b) Subtracção

6. Noção intuitiva de conjunto complementar .....	69
7. Diferença entre dois números .....	69
8. A subtracção como operação inversa da adição .....	70
9. Propriedades da subtracção .....	72
10. Processo usual do cálculo da subtracção .....	73
11. Equações dos tipos $a - x = b$ e $x - a = b$ .....	76
12. Cardinal da reunião de conjuntos não disjuntos.....	77

c) <i>Multiplicação</i>		Pag.
13.	Reunião de dois ou mais conjuntos disjuntos com o mesmo número de elementos	78
14.	Contagem dos elementos duma matriz	81
15.	Multiplicações por 10, 100, 1000	89
16.	Multiplicação sucessiva. Propriedades associativa e comutativa	82
17.	Potências	91

d) <i>Divisão</i>		
18.	Decomposição dum dado conjunto em dois ou mais conjuntos disjuntos com o mesmo número de elementos	95
19.	Divisão de um produto de dois números por um deles	96
20.	Casos em que a divisão exacta não é possível	99
21.	Noções de múltiplo e de submúltiplo de um número	101
22.	Exercícios mentais recreativos	106

III) <b>NÚMEROS RACIONAIS</b>		
1.	Casos em que a divisão exacta não é possível com quociente inteiro	98
2.	Fracções equivalentes	119
3.	Os números fraccionários definidos como operadores	102
4.	Aplicações da propriedade da equivalência de fracções	122
5.	Soma e diferença de números racionais	123
6.	Produto de dois ou mais números racionais	131
7.	Divisão dum número racional por outro	131
8.	Fracções com termos fraccionários	136
9.	Equações dos tipos $a : x = b$ e $x : a = b$	138
10.	Potências de números fraccionários	140

IV) <b>CÁLCULO COM DECIMAIS</b>		
1.	Distinção entre fracção ordinária e fracção decimal	141
2.	Adição, subtracção e multiplicação de fracções decimais	145
3.	Divisão de números decimais	146
4.	O papel do cifrão como vírgula	156
5.	Porcentagens	158

V) <b>MEDIÇÕES DE COMPRIMENTOS</b>		
1.	Comparações de comprimentos de objectos	164
2.	Segmento de recta	165
3.	Adição de comprimentos	167
4.	Medição de comprimentos	170
5.	Medição do comprimento de linhas quebradas e de linhas curvas	173
6.	Primeira definição do metro	175
7.	Comprimentos microscópicos	179
8.	Vantagens do sistema métrico	179

VI) <b>MEDIÇÃO DE TEMPOS</b>		Pag.
1.	Comparação de tempos	181
2.	Unidades de tempo	184
3.	O micro-segundo e o nano-segundo	185
4.	Cálculos de tempos em forma complexa	186

VII) <b>MEDIÇÃO DE VELOCIDADES</b>		
1.	Velocidade média	195
2.	Noção intuitiva de velocidade num dado instante	195

VIII) <b>INTRODUÇÃO CONCRETA À GEOMETRIA</b>		
1.	Propriedades geométricas dos corpos	200
2.	Observação de sólidos geométricos	205
3.	Noção de superfície	212
4.	Noção de linha	218
5.	Conceito de área de uma superfície	222
6.	Volume de um sólido	222
7.	Relatividade da noção de lugar; o movimento	230
8.	Noção de ponto material e de ponto geométrico	237
		238

IX) <b>ELEMENTOS DE GEOMETRIA PLANA</b>		
1.	A recta	239
2.	Divisão duma recta em duas semi-rectas	242
3.	O plano	242
4.	Noções de ponto exterior e ponto interior em relação a uma linha	243
5.	Circunferência; perímetro da circunferência	244
6.	Os polígonos	247
7.	Igualdade geométrica	249
8.	O triângulo	250
9.	Divisão do plano em semi-planos: o ângulo	252
10.	Soma de ângulos	254
11.	Ângulo ao centro	263
12.	Ângulos interiores dum polígono	269
13.	Posição relativa de duas rectas do plano	271
14.	Rectas horizontais e verticais	279
15.	Gráficos cartesianos	281

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS		283
-------------------------	--	-----



## ÍNDICE EXPANDIDO:

O capítulo “Conjuntos e Números” subdivide-se da seguinte forma:

- O que é um conjunto. O que são elementos dum conjunto.
- Os conjuntos e a Gramática
- Duas relações matemáticas
- Representação (notação) simbólica de conjuntos
- Referencial ou universo
- Dois processos para definir um conjunto
- Jogo de atributos
- Relação de inclusão
- Duas relações opostas
- Ainda o uso das relações em linguagem vulgar
- Conjuntos iguais. Conjuntos não iguais (diferentes)
- Correspondência entre elementos de conjuntos
- Número cardinal
- A relação de inclusão. A relação “menor que”
- Sistemas de numeração antigos
- Ideias intuitivas de conjunto finito e de conjunto infinito
- Máquinas que contam

O capítulo “Operações com números inteiros” estrutura-se da seguintes forma:

Adição

- Intersecção de conjuntos
- Reunião de conjuntos
- Operar sobre conjuntos, reunindo-os. Operar sobre números, adicionando-os
- Zero é o elemento neutro da adição
- A adição é uma operação comutativa
- Reunião de mais de dois conjuntos, disjuntos dois a dois. Soma de mais de dois números

Subtracção

- Operações inversas
- Equações do tipo  $a + x = b$

- Propriedade da invariância do resto
- Equações do tipo  $a - x = b$
- Equações do tipo  $x - a = b$

#### Multiplicação

- Propriedade associativa
- Propriedade distributiva da multiplicação a respeito da adição
- Produto de fatores iguais – potências

#### Divisão

- A divisão como operação inversa da multiplicação
- Equações do tipo  $ax = b$
- Matrizes rectangulares
- Noções de múltiplo e submúltiplo de um número
- Primeira noção de fracção (este título apresenta-se com maior destaque que os das outras secções, com uma letra cujo tamanho é idêntico ao da designação dos capítulos)
- Fracções inversas

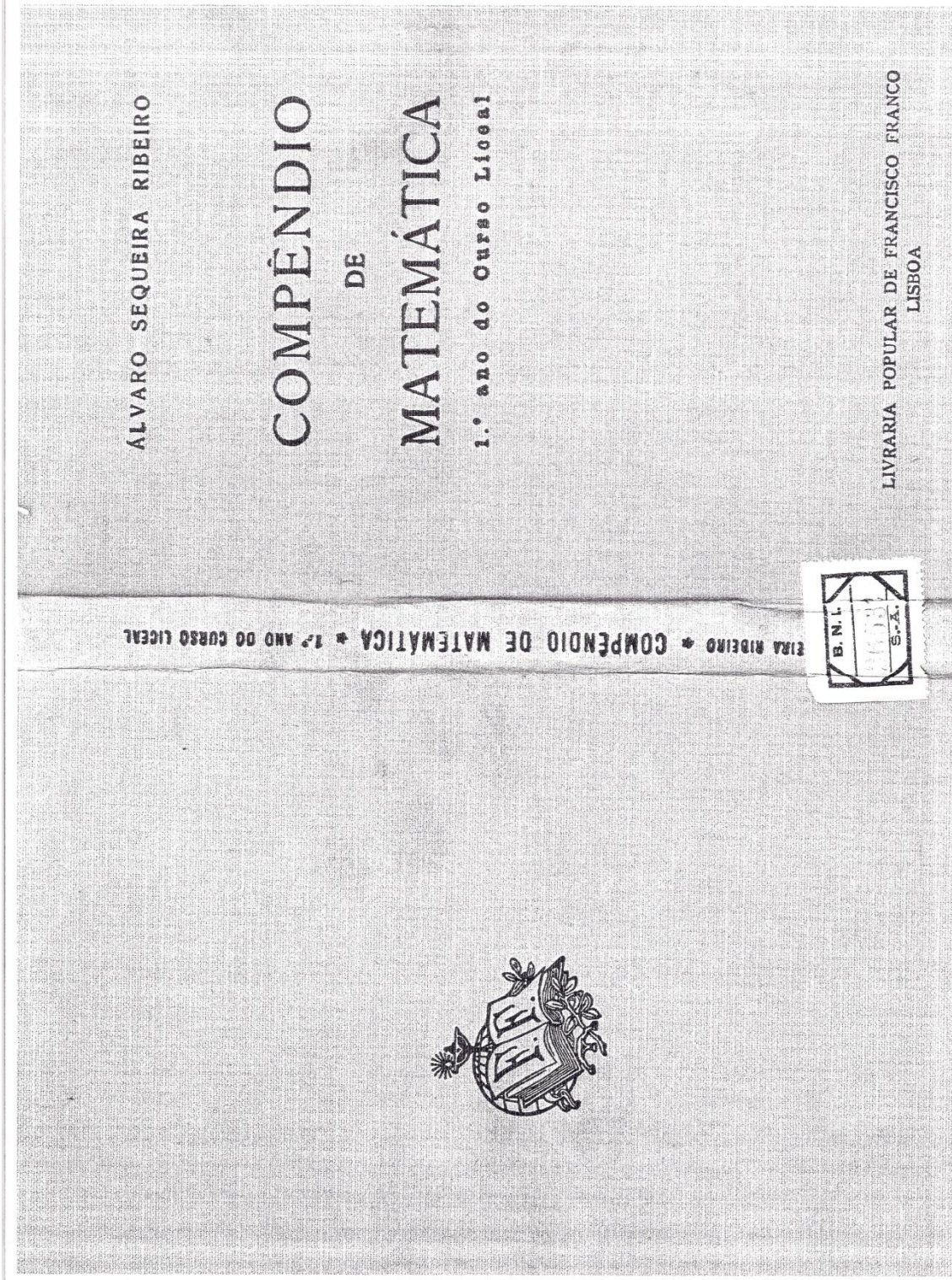
O capítulo “números Racionais” inicia-se com a apresentação do conceito de números fraccionários e quociente exacto sobre a forma mista, seguindo-se uma lista de secções que passo a citar:

- Fracções equivalentes
- Classes de fracções equivalentes
- Comparação de fracções
- Adição e subtracção de números racionais
- Multiplicação de fracções
- Produto de fracções
- Divisão de números racionais
- Cálculo de expressões numéricas fraccionárias
- Equações do tipo  $x : a = b$
- Equações do tipo  $a : x = b$
- Potências de números fraccionários
- Quociente de potências

ANEXO 5

MANUAL D

CAPA:



CONTRACAPA:

ÁLVARO SEQUEIRA RIBEIRO

COMPÊNDIO  
DE  
MATEMÁTICA

PARA O 1.º ANO DO CURSO LICEAL



LIVRARIA POPULAR DE FRANCISCO FRANCO  
14, RUA DE BARROS QUEIRÓS, 18  
LISBOA

## ÍNDICE:

## ÍNDICE

Capítulo	I — Figuras geométricas .....
Capítulo	II — Medidas de comprimento ou lineares, Números inteiros e decimais .....
Capítulo	III — Adição de números inteiros .....
Capítulo	IV — Subtração de números inteiros .....
Capítulo	V — Multiplicação de números inteiros .....
Capítulo	VI — Divisão de números inteiros .....
Capítulo	VII — Expressões numéricas .....
Capítulo	VIII — Operações com os números decimais .....
Capítulo	IX — Medidas de superfície .....
Capítulo	X — Potenciação .....
Capítulo	XI — Raiz quadrada .....
Capítulo	XII — Medidas de volume e de capacidade .....
Capítulo	XIII — Medidas de massa .....
Capítulo	XIV — Números fraccionários .....
Capítulo	XV — Ângulos e arcos .....
Capítulo	XVI — Sistemas de rectas num plano .....
Capítulo	XVII — Ângulos dos polígonos .....
Capítulo	XVIII — Números complexos .....
Capítulo	XIX — Gráficos .....

## ÍNDICE EXPANDIDO:

O capítulo III deste manual, “Adição de números inteiros”, estrutura-se nas seguintes secções, devidamente numeradas:

1. Adição de segmentos. Perímetro de uma poligonal.
2. Adição de números.
4. Perímetro de uma curva. (*por lapso o autor escreve “4”, em vez de “3” para numerar a secção*).
5. Rectificação gráfica de uma curva

Principais propriedades da adição – Provas

6. Propriedade Comutativa

7. Propriedade Associativa

8. Prova da adição por inversão da ordem das parcelas

9. Prova por adições parciais

Cálculo Mental

Exercícios de revisão

O capítulo IV, “Subtração de números inteiros” estrutura-se nas seguintes secções:

1. Não apresenta título. Aqui se introduz o conceito com base num exemplo de medições, seguido de exercícios.

Propriedades da Subtração. Provas.

2. Propriedade fundamental.
3. Outras propriedades.
4. Prova da subtração.

Cálculo mental

5. Problema.
6. Não apresenta título, mas trata-se do cálculo de uma subtração com números grandes recorrendo às propriedades da subtração como técnica de simplificação do cálculo mental.

Exercícios de revisão

O capítulo V, “Multiplicação de números inteiros” subdivide-se da seguinte forma:

1. Multiplicação de dois factores
2. Multiplicação de mais de dois factores.

Propriedades da multiplicação. Prova

3. Propriedade comutativa
4. Propriedade associativa
5. Propriedade distributiva
6. Prova da multiplicação

Cálculo mental

7. Não tem título. Trata-se de uma tabela da multiplicação de 11, 12, 15, 16 e 18 por 2, 3, 4, 5 e 6, em que se recomenda ao aluno que a memorize, salientando a importância de alguns destes produtos para quem estuda química (p. 60).
8. Multiplicações por 4, 6, 8, 9, 12, etc
9. Multiplicações por 20, 30, 40, etc.

10. Multiplicação por 5.

11. Multiplicações por 11, 12 e 15.

Exercícios de revisão.

As secções que constituem o capítulo VI, “Divisão”, são:

1. Divisão exacta
2. Divisão não exacta
3. Não tem título. Sintetiza-se a diferença entre uma divisão exacta e uma não exacta, explicam-se os conceitos de “divisível” e “termos” da divisão.
4. Trata-se de dois exercícios, sem título.
5. Ensina-se uma técnica para as divisões cujo divisor tem um só dígito que consiste em formar mentalmente os dividendos parciais.

Propriedades da divisão. Prova

6. Propriedade fundamental. Aqui enuncia-se que o produto do divisor pelo quociente, adicionado com o resto, é igual ao dividendo.
7. Duas propriedades da divisão exacta. Explica-se que um produto é divisível por um dos seus factores e o quociente pode obter-se suprimindo esse factor, e que se um dos factores de um produto for divisível por um número, pode dividir-se o produto por esse número, dividindo só aquele factor.
8. Prova da divisão.

Cálculo mental

9. Consiste na prática da técnica explicada na secção nº 5, com um exercício de aplicação. Esta secção não tem título.
10. Explica-se uma técnica de divisão através de divisões sucessivas. Por exemplo, dividir por 4 é o mesmo que dividir por 2 e por 2. Também não se apresenta título neste tópico.
11. Explica a divisão por 10, 100, 1000, etc., novamente não apresentando título.

Exercícios de revisão.

O capítulo “Números Fraccionários” estrutura-se nas seguintes secções:

1. Noção de fracção
2. Leitura dos números fraccionários
3. Unidades fraccionárias
4. Determinação da fracção que representa a medida de uma grandeza dada
5. Determinação da grandeza cuja medida é uma fracção dada

6. Determinação da unidade conhecidas uma grandeza e a sua medida fraccionária
  7. Representação gráfica das fracções
  8. Comparação das fracções
  9. Fracções próprias e impróprias
  10. Fracções aparentes
  11. Redução de inteiros à forma fraccionária
  12. As fracções representam quocientes
  13. Fracções decimais
  14. Comparação de fracções do mesmo denominador
  15. Comparação de fracções do mesmo numerador
  16. Duas propriedades das fracções
- Exercícios de revisão

## ANEXO 6

### GUIÃO DE ANÁLISE

Segue-se a apresentação do guião que elaborei para essa análise. A grelha está organizada em duas categorias principais: Estrutura e Conteúdo, subdivididas por sua vez em vários parâmetros. A grelha foi elaborada tendo em conta os objetivos delineados, que se centram nas alterações introduzidas pela Reforma da Matemática Moderna (na forma e no conteúdo), nomeadamente as alterações na linguagem matemática, a abordagem dos conteúdos e na metodologia de ensino.

#### 1. IDENTIFICAÇÃO DO MANUAL

##### 1.1. Data de análise e de publicação

Data de Análise: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

Data de Publicação: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

##### 1.2. Referência editorial

Título: \_\_\_\_\_

Subtítulo (se existir): \_\_\_\_\_

Editora: \_\_\_\_\_

Localidade: \_\_\_\_\_

Outros dados de interesse: \_\_\_\_\_

##### 1.3. Autores

Nome(s): \_\_\_\_\_

Habilitações (se referidas): \_\_\_\_\_

Localização:

Na capa

Fácil

Nas páginas interiores

Difícil

Legibilidade:

Fácil

Difícil

## **2. ESTRUTURA**

### **2.1. Índice**

#### **2.2. Esquema dos temas/ unidades didáticas**

- Informação + atividades no final
- Informação + resumo + atividades no final
- Informação + atividades + informação + atividades
- Atividades + Informação + Atividades + Informação
- Outro: \_\_\_\_\_

## **2. CONTEÚDO**

**Capítulo:** \_\_\_\_\_

### **2.1. Abordagem dos temas**

- Tipo e diversidade dos exemplos utilizados
- Utilização de esquemas e imagens (pertinência)
- Densidade dos textos
- Formalizações
- Linguagem, terminologia
- Rigor e correção
- Sequência de conteúdos
- Grau de fidelidade ao programa (introduz conceitos, tarefas ou formas de trabalho, além das previstas no currículo?)

### **2.2. Componente Ideológica**

- Exemplos (texto/ imagens): culturas e políticas dominantes, discriminação, valores.

### **2.3. Relação manual-aluno**

- Espaços para preencher com regularidade?
- Tarefas dirigidas ao aluno com regularidade?

## **2.4. Metodologia**

- Informações complementares (História da Matemática, curiosidades,...)
- Vertente lúdica
- Recurso a materiais manipuláveis
- Incentivo a pesquisa (apresentação de fontes)
- Interdisciplinaridade e relação com aplicações técnicas

## **2.5. Atividades**

- Tipo de resposta (curta, aberta, V ou F, escolha múltipla)
- Competências a desenvolver (Favorece memorização, mecanização de procedimentos ou apela ao raciocínio e à resolução de problemas?)
- Exemplos utilizados nos enunciados.
- Contém exercícios de revisão?
- As atividades interligam vários conteúdos?
- Referência ao trabalho de grupo?

## ANEXO 7

### CURRÍCULO

O programa do 1º ano de Matemática do CPES é constituído por nove unidades temáticas:

1. Conjuntos e números;
2. Operações com números inteiros (adição, subtração, multiplicação e divisão);
3. Números Racionais;
4. Cálculo com decimais;
5. Medição de comprimentos;
6. Medição de tempos;
7. Medição de velocidades;
8. Introdução concreta à geometria;
9. Elementos de geometria plana (com referência à geometria do espaço).

Foram analisados os temas 1, 2 e 3, dos quais passo a descrever o currículo que consta da portaria 23 601 de 9 de Setembro de 1968.

No tema “Conjuntos e números” o programa sugere que as noções sejam introduzidas através de “exemplos familiares, mais ou menos relacionados com os interesses e a actividade lúdica dos alunos” (p. 1396). Sugere-se ainda que exista uma coordenação com o estudo da Língua Portuguesa, relacionando as categorias gramaticais com as categorias lógicas de elemento e de conjunto.

Em vários pontos do programa, sugerem-se eventuais referências à máquina de calcular digital.

Nesta unidade devem ser abordados:

- Noções intuitivas de conjunto e seus elementos (conjuntos definidos a partir dos seus elementos e representados entre chavetas; exemplos de conjuntos definidos por meio de propriedades num universo lógico; conjuntos singulares; conjunto vazio);
- Relações de pertença, inclusão (emergindo os termos Subconjuntos (ou partes) e Partes propriamente ditas ( ou partes estritas)) e igualdade. Sugere-se a utilização do verbo “ser” para a compreensão destas relações;
- Correspondências biunívocas e o conceito de número cardinal;
- A relação *menor que* entre números, deduzida da relação de inclusão entre conjuntos;
- Sistemas de numeração (processo primitivo de sequências de riscos, numeração romana, numeração decimal); breve nota histórica sobre o sistema decimal; suas vantagens sobre a numeração romana; distinção entre número e numeral (nome de número); representação de

números inteiros através de retângulos ou régua e cores; arredondamento de números; sua representação comparativa em gráficos de barras ou colunas;

- Exemplos de conjuntos finitos e seu cardinal, bem como de conjuntos infinitos (conjunto de todos os números inteiros); exemplos recreativos do *googol* e *googolplex* como números muito grandes;
- Números ordinais e sua distinção dos números cardinais, com referência eventual a instrumentos de contagem (contadores de eletricidade, água e gás, conta-quilômetros, computadores, etc).

Neste capítulo faz-se referência a “número inteiro” como sendo qualquer número inteiro positivo. Mais tarde, com a introdução dos números negativos, os números inteiros positivos passarão a designar-se “números inteiros absolutos”.

Segue-se o tema “ Operações com números inteiros” que serão estudadas com base na Teoria de Conjuntos:

- Referência a reunião e interseção de conjuntos, fazendo, eventualmente, referência à conjunção copulativa e à conjunção disjuntiva;
- A Adição como cardinal da reunião de dois conjuntos disjuntos; propriedades da adição e eventual referência a máquinas de calcular digitais; reconhecimento dessas propriedades em tabelas de dupla entrada e exercícios de completação de fórmulas de modo a obter proposições verdadeiras.
- “Noção intuitiva de conjunto complementar de um dado conjunto em relação a um outro que o contenha; a Subtração como cardinal do conjunto complementar e como operação inversa da Adição; equações do tipo  $a+x = b$ ,  $a-x = b$  e  $x-a = b$ ; propriedades da Subtração; cardinal da reunião de conjuntos não disjuntos; diagramas de Venn;
- Introdução do conceito de multiplicação como soma de parcelas em número igual ao multiplicando, com exemplos de reuniões de dois ou mais conjuntos disjuntos com o mesmo número de elementos; propriedades da multiplicação; multiplicações sucessivas; multiplicação por um múltiplo de 10; simplificação de expressões numéricas simples com parênteses curvos; noção de potência; multiplicação de potências com a mesma base ou com o mesmo expoente, como consequência das propriedades comutativa e associativa da multiplicação;
- Introdução da divisão por decomposição de um conjunto em subconjuntos disjuntos com o mesmo número de elementos, recorrendo a exemplos da vida corrente; divisão como operação inversa da multiplicação; equações do tipo  $a \times x = b$ ; propriedade relativa à divisão de um produto por um número que seja divisor de um dos fatores; divisão por um múltiplo de 10; conceito de divisão inteira (com quociente inteiro e resto); noção de múltiplo e submúltiplo de um número; relação da divisão por 2, 3, etc, com os numerais partitivos (metade, um terço de um número, etc), e com os numerais multiplicativos (metade do dobro, triplo da terça parte,

etc); numerais partitivo-multiplicativos (dois quintos, quatro terços, etc) e sua expressão na forma de fração; exercícios mentais recreativos tratando-se de “adivinhar” um número envolvido numa operação simples, dado o resultado da mesma, ou usando as operações inversas das operações representadas por frações (por exemplo, que o inverso de  $\frac{2}{3}$  é  $\frac{3}{2}$ , etc).

Introduz-se então os Números Racionais incluindo:

- Os números fracionários, que surgem naturalmente do estudo de divisões cujo quociente não é inteiro; fração escrita na forma mista;
- Frações equivalentes;
- Conjunto dos números racionais como reunião de dois conjuntos disjuntos: o dos números inteiros e o dos números fracionários;
- Simplificação de frações; comparação de frações por redução ao mesmo denominador; exercícios de completação de fórmulas;
- Adição e subtração de frações, começando com exemplos intuitivos;
- Observar que a preposição “de” equivale ao sinal de multiplicação quando liga dois numerais multiplicativos ou partitivo-multiplicativos; produto de números racionais;
- Problemas de caráter lúdico que consistam em inverter um número inteiro ou fracionário; divisão de números racionais; tomada de consciência de que a divisão exata entre números racionais diferentes de zero é sempre possível; verificar que a divisão não é comutativa, nem associativa e só tem elemento neutro á direita mas as propriedades das operações com inteiros estendem-se aos números racionais;
- Uso do traço de fração como sinal de divisão; frações com termos fracionários; expressões numéricas muito simples envolvendo frações e apenas parênteses curvo;
- Equações do tipo  $\frac{a}{x} = b$ ,  $\frac{x}{a} = b$ ,  $a = \frac{b}{x}$  e  $a = \frac{x}{b}$  (a e b números racionais) e problemas que envolvam este tipo de equações;
- Potências de base fracionária; propriedades da divisão de potências com a mesma base ou com o mesmo expoente;

## ANEXO 8

### SÍNTESE DOS DADOS RECOLHIDOS

Para a realização deste estudo, elaborei as seguintes sínteses dos tópicos principais, que utilizei como ferramentas de trabalho:

#### Síntese dos aspetos mais relevantes encontrados na análise do capítulo Operações com Números Inteiros.

	A	B	C	D
<b>Adição/ Subtração</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Noção de soma como cardinal da reunião de conjuntos disjuntos, partindo de exemplos da vida real.</li> <li>• Exemplos com dois e com três conjuntos mutuamente disjuntos</li> <li>• Utiliza a notação de correspondência de um par ordenado à soma</li> <li>• Distingue soma de adição; reunião de conjuntos de soma de números; e conjunto de reunião de conjuntos.</li> <li>• Refere que a soma de dois números inteiros é sempre um número inteiro.</li> <li>• Apresenta a tabuada da adição.</li> <li>• Propriedades da adição partindo de exemplos ilustrados de cartas de um baralho.</li> <li>• Mostra aplicações das propriedades comutativa e associativa da adição no cálculo mental, explicando o algoritmo da adição (decomposição)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Noção de soma como cardinal da reunião de conjuntos disjuntos, usando imagens, não contextualizando.</li> <li>• Exemplos com dois e com três conjuntos mutuamente disjuntos</li> <li>• Utiliza a notação de correspondência de um par ordenado à soma</li> <li>• Distingue soma de adição; reunião de conjuntos de adição de números.</li> <li>• Refere que numa adição, dois números inteiros são transformados num número inteiro.</li> <li>• Tabuada da adição.</li> <li>• Referência a máquina de somar: construção em cartolina ou cartão.</li> <li>• Propriedade comutativa, com base na tabuada da adição e usando barras a cores.</li> <li>• Propriedade associativa recorrendo a manipulação de objetos e à linguagem de conjuntos</li> <li>• Existência de elemento neutro recorrendo à linguagem de conjuntos (reunião)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Noção de soma como cardinal da reunião de conjuntos disjuntos, usando imagens, não contextualizando</li> <li>• Usa segmentos de reta e “barras numéricas” para representar os cardinais;</li> <li>• Utiliza a notação de correspondência de um par ordenado à soma;</li> <li>• Distingue soma de adição.</li> <li>• Distingue reunião de conjuntos de soma de números</li> <li>• Refere que a cada par de números inteiros corresponde sempre, por meio de uma adição, um número também inteiro.</li> <li>• Tábua de adição;</li> <li>• Zero como elemento neutro da adição (só à direita) usando linguagem de conjuntos (reunião com conjunto vazio)</li> <li>• Propriedade comutativa da adição usando segmentos de reta;</li> <li>• Noção de variável;</li> <li>• Exemplos com dois e com três conjuntos mutuamente disjuntos</li> <li>• Propriedade associativa (formal), esquemas de máquinas de calcular;</li> <li>• Aplicações das propriedades comutativa e associativa: resolução de problemas, cálculo mental, processo usual de cálculo de uma soma, prova real</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Abordagem da adição através do cálculo do perímetro de um triângulo representando os lados consecutivamente sobre uma reta;</li> <li>• Distingue soma de adição;</li> <li>• Método de medição do perímetro de uma curva (linha, papel, alfinetes e prancheta de madeira)</li> <li>• Retificação gráfica de uma curva (com compasso);</li> <li>• Propriedade comutativa e associativa (partindo cada uma de um problema real); generalização em linguagem corrente;</li> <li>• Prova por inversão da ordem das parcelas e prova por adições parciais (formal: exemplo e explicação do processo);</li> <li>• Cálculo mental (decomposição aditiva e aplicação)</li> </ul>

	<p>aditiva por ordens decimais); e nas provas por inversão e por adições parciais.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Noção de subtração como cardinal do conjunto complementar</li> <li>• Distingue subtração de diferença.</li> <li>• Subtração como operação inversa da adição, usando um exemplo real ilustrado, ligando às equações do tipo <math>a + x = b</math>.</li> <li>• Propriedades da subtração: diferença entre uma soma e um número, entre um número e um soma e entre duas somas, partindo de problemas concretos; e invariância do resto, usando esquema de tabuleiro de damas.</li> <li>• Aplicações das propriedades da subtração ao cálculo mental e no algoritmo de subtração.</li> <li>• Prova real da subtração, apenas formal. Liga às equações <math>a - x = b</math> e <math>x - a = b</math>.</li> <li>• Cardinal da reunião de conjuntos não disjuntos, partindo de exemplos realistas de conjuntos em extensão e em diagrama.</li> <li>• Normalmente, generaliza com base num só exemplo, em linguagem corrente e simbólica (usa variáveis).</li> </ul> <p>Nº de páginas das</p>	<p>com conjunto vazio)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Existência e unicidade da soma</li> <li>• Aplicações das propriedades comutativa e associativa da adição no cálculo mental, explicando o algoritmo da adição (decomposição aditiva por ordens decimais); e nas provas por inversão e por adições parciais.</li> <li>• Noção de subtração como cardinal do conjunto complementar</li> <li>• Distingue subtração de diferença.</li> <li>• Resto nulo e casos de impossibilidade de subtração no conjunto dos inteiros absolutos</li> <li>• Subtração como operação inversa da adição estabelecendo a equivalência entre <math>a - s = r</math> e <math>a = r + s</math> (<math>a</math> é aditivo; <math>s</math> é subtrativo; <math>r</math> é resto)</li> <li>• Propriedades da subtração: diferença entre uma soma e um número, entre um número e um soma e entre duas somas, partindo de problemas concretos; e invariância do resto (só formal).</li> <li>• Explicação do processo usual de cálculo de um diferença, usando as propriedades da subtração.</li> <li>• Enuncia prova real da subtração (não explica).</li> <li>• Equações tipo <math>a - x = b</math> e <math>x - a = b</math>, partindo de problemas do quotidiano.</li> <li>• Cardinal da reunião de conjuntos não disjuntos, partindo de exemplos realistas de conjuntos em</li> </ul>	<p>por inversão e por adições parciais;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Subtração como cardinal do conjunto complementar;</li> <li>• Subtração como operação inversa da adição recorrendo a esquemas de segmentos de reta</li> <li>• Operadores inversos usando esquemas de calculadoras e generalizando com figuras geométricas.</li> <li>• Equação tipo <math>a + x = b</math> (formal, articula com a linguagem corrente)</li> <li>• Propriedade da invariância do resto, com esquema. Generaliza em linguagem corrente;</li> <li>• Aplicação do princípio da invariância do resto no processo usual de subtração.</li> <li>• Prova real da subtração aplicada a exemplo;</li> <li>• Diferença entre uma soma e um número (formal, esquema de calculadora);</li> <li>• Diferença entre um número e uma soma, partindo de problema do real;</li> <li>• Diferença entre duas somas (formal, esquemas de calculadoras);</li> <li>• Equações tipo <math>a - x = b</math> e <math>x - a = b</math>, com esquema de barras.</li> </ul> <p>Normalmente, generaliza após um único exemplo, em linguagem corrente e/ou usando figuras geométricas na linguagem simbólica;</p> <p>Nº de páginas das secções: 30  Nº de exemplos com espaços em branco: 24  Questões/ atividades investigativas ou de reflexão: 1  Exercícios de aplicação: 6 (intersecção de conjuntos) + 4 (reunião e intersecção) + 1 (cardinal da reunião/ intersecção de conjuntos) + 1 (adições, fazendo</p>	<p>das propriedades)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Abordagem da subtração com a determinação do comprimento de uma barra colocada entre os 12 mm e os 46 mm, sobre uma régua (apresenta a figura);</li> <li>• Várias designações para resto, aditivo e subtrativo;</li> <li>• Propriedade fundamental (baseada na figura usada na abordagem da subtração); generaliza em linguagem corrente;</li> <li>• Princípio da invariância do resto, com figura semelhante, sugerindo deslocamento da barra para a direita; comparam-se as duas subtrações obtidas para o comprimento da barra, nos dois sentidos;</li> <li>• Prova da subtração, usando a propriedade fundamental (formal);</li> <li>• Cálculo mental: diferença entre <math>n^\circ</math> e soma, subtraindo esse <math>n^\circ</math> sucessivamente pelas parcelas, partindo de problema concreto.</li> </ul> <p>Nº de páginas das secções: 17  Questões/ atividades investigativas ou</p>
--	--	---	---	--

	<p>secções: 27  Nº de exemplos com espaços em branco: 15  Exercícios de aplicação: 5 (reunião e interseção) + 2 (noção de soma) + 2 (propriedade comutativa da adição) + 2 (propriedade associativa) + 8 (adição e propriedades) + 7 (adição-ex. globais) + 8 (noção de diferença, equações tipo <math>a+x=b</math>) + 11 (subtração-ex. globais) + 2 (cardinal da reunião de conjuntos não disjuntos)</p>	<p>extensão e em diagrama.  Nº de páginas das secções: 46  Nº de exemplos com espaços em branco: 8  Questões/ atividades investigativas ou de reflexão: 24  Exercícios de aplicação: 5 (reunião e interseção) + 5 (noção de soma) + 1 (noção de subtração) + 9 (subtração)</p>	<p>esquemas com “barras numéricas” e segmentos de reta) + 2 (tábua de adição) + 1 (elemento neutro à direita da adição) + 1 (somadas com 3 parcelas, fazendo esquemas de “barras” e segmentos de reta) + 2 (aplicação da propriedade associativa, fazendo esquema de máquina de calcular) + 3 (variável, propriedades da adição, equações tipo <math>a + x = a</math>, tradução de enunciados em frases matemáticas) + 1 (cálculo de somas mentalmente) + 3 (descrição de exemplos do processo usual de cálculo de soma, cálculo de somas por esse processo) + 8 (exercício de revisão: adição) + 1 (exemplos intuitivos de operações inversas na vida corrente) + 1 (equações tipo <math>a + x = b</math>) + 3 (aplicação do princípio da invariância do resto) + 4 (expressões numéricas e cálculo mental) + 5 (equações tipo <math>a - x = b</math> e <math>x - a = b</math>, Problemas usando diagramas de Venn com conjuntos não disjuntos)</p>	<p>de reflexão: 3  Exercícios de aplicação: 1 (determinação de perímetro, representando lados numa reta) + 2 (determinação de perímetro, cálculo de somas com várias parcelas e números grandes) + 1 (retificação de curva) + 2 (adições e provas da adição – muitas parcelas, n.ºs grandes) + 3 (cálculo mental de somas, problemas) + 8 (ex. revisão: adição) + 3 (cálculo de diferenças) + 2 (cálculo mental de diferenças, problemas) + 14 (exercícios de revisão: subtração)</p>
--	--	--	--	---

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Produto como soma de parcelas iguais, partindo da reunião de conjuntos equicardinais, disjuntos dois a dois;</li> <li>• Alguns numerais multiplicativos e respectivos numerais cardinais sintetizados em tabela; imagem de máquina de calcular digital</li> <li>• Tabuada pitagórica da multiplicação (fatores de 0 a 10);</li> <li>• Propriedades da multiplicação. <ul style="list-style-type: none"> <li>- comutativa: matriz retangular (esquema de parque de estacionamento)</li> <li>- existência de elemento neutro: com base na tabuada</li> <li>- existência de elemento absorvente: exemplo formal – soma de parcelas iguais a 0</li> </ul> </li> <li>- Propriedade distributiva: problema real ilustrado</li> <li>• Recíproco da propriedade distributiva</li> <li>• Aplicações das propriedades comutativa e distributiva no cálculo mental e algoritmo da multiplicação;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Produto como soma de parcelas iguais, partindo da reunião de conjuntos equicardinais, disjuntos dois a dois; <ul style="list-style-type: none"> <li>- Definição de produto como soma de tantas parcelas iguais ao multiplicando quantas as unidades do multiplicador.</li> <li>- Definição de multiplicação como adição de parcelas iguais;</li> </ul> </li> <li>• Numerais multiplicativos</li> <li>• Tabuada da multiplicação;</li> <li>• Propriedade comutativa com esquemas de matriz retangular;</li> <li>• Existência de elemento neutro usando produto como soma de parcelas iguais.</li> <li>• Anulamento do produto usando produto como soma de parcelas iguais.</li> <li>• Propriedade distributiva: produto de um número por uma soma, partindo de situações problemáticas; produto de uma soma por um número (formal – usando propriedade comutativa)</li> <li>• Recíproco da propriedade distributiva;</li> <li>• Prioridade da multiplicação sobre a adição;</li> <li>• Multiplicação por 10, 100, 1000, etc</li> <li>• Aplicações das propriedades comutativa e distributiva no algoritmo da</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Produto como soma de parcelas iguais, partindo da reunião de conjuntos equicardinais, disjuntos dois a dois (conjuntos formados por figuras geométricas), e usando segmentos de reta;</li> <li>• noção de operador, operando e transformando;</li> <li>• Distinção entre multiplicação e produto;</li> <li>• Numerais multiplicativos;</li> <li>• Multiplicação por 1 e por 0, só à direita (1 como elemento neutro da multiplicação, mas só à direita);</li> <li>• Tabuada pitagórica da multiplicação;</li> <li>• Multiplicação como contagem de elementos numa matriz retangular;</li> <li>• Propriedade comutativa, usando esquema contextualizado de matriz retangular; generaliza em linguagem corrente e simbólica com figuras geométricas;</li> <li>• Propriedade associativa (só formal, esquemas de máquinas de calcular), generaliza com figuras geométricas;</li> <li>• Extensão da propriedade associativa a produtos com 4 fatores (explica as 3 maneiras diferentes) e sua aplicação ao cálculo mental (exemplos formais, esquemas de calculadoras);</li> <li>• Expressões numéricas: prioridades das operações;</li> <li>• Propriedade distributiva e recíproco partindo de esquema (matriz retangular), generalização com figuras geométricas e aplicação ao cálculo mental;</li> <li>• Multiplicação por 10, 100, 1000, etc.</li> <li>• Explicação do processo usual de cálculo do produto por decomposição aditiva do segundo fator e aplicação da propriedade</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Multiplicação como soma de parcelas iguais (mas multiplica o valor da parcela pelo nº de parcelas); parte do perímetro de hexágono regular;</li> <li>• Multiplicação por 1 e por 0 (só à direita), por convenção e sem designar as respetivas propriedades;</li> <li>• Multiplicação iterada (em contexto);</li> <li>• Propriedade comutativa (esquema de matriz retangular, contextualizado), mas determina produtos como soma de parcelas iguais;</li> <li>• Propriedade associativa com imagem contextualizada;</li> <li>• Propriedade distributiva em relação à adição e em relação à subtração em contexto real (2 problemas);</li> <li>• Generaliza propriedades em linguagem corrente;</li> <li>• Prova da multiplicação por troca da ordem dos fatores (descrição formal);</li> <li>• Cálculo mental: tabela de produtos de 11, 12, 15, 16 e 18 por 2, 3, 4, 5 ou 6; multiplicações por 4, 6, 8, 9, 12, etc; por 20, 30, 40, etc; por 5; por</li> </ul>
<p><b>Multiplicação</b></p>				

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Propriedade associativa (parte de problema concreto)</li> <li>• Expressões numéricas</li> <li>• Potências</li> <li>• Várias generalizações com base num só exemplo, em linguagem corrente e simbólica (usa variáveis).</li> </ul> <p>Nº de páginas da secção: 14  Nº de exemplos com espaços em branco: 14  Outros exercícios: 2 (numerais multiplicativos) + 10 (propriedades da multiplicação) + 10 (expressões numéricas) + 5 (noção de potência) + 7 (regras das operações com potências)</p>	<p>multiplicação (quando um fator só tem 1 algarismo; ou escreve-se com um algarismo seguido de zeros; quando os fatores são quaisquer)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Multiplicação iterada;</li> <li>• Extensão da propriedade comutativa à multiplicação com mais de 2 fatores (exemplos concretos do real);</li> <li>• Propriedade associativa (só formal)</li> <li>• Potências</li> </ul> <p>Nº de páginas da secção: 20  Nº de exemplos com espaços em branco: 7  Questões/ atividades orientadas ao longo do texto: 4  Exercícios de aplicação: 14 (final do capítulo)</p>	<p>distributiva;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Avaliação da veracidade de um produto por estimativa;</li> <li>• Potências</li> <li>• Várias generalizações com base num só exemplo, em linguagem corrente e simbólica (usa figuras geométricas).</li> </ul> <p>Nº de páginas da secção: 17  Nº de exemplos com espaços em branco: 17  Questões/ atividades de investigação ou reflexão: 1  Exercícios de aplicação: 2 (multiplicação como soma de parcelas iguais) + 1 (multiplicação como contagem em matriz retangular) + 1 (propriedade comutativa) + 2 (propriedade associativa em produtos com mais de 2 fatores) + 1 (cálculo mental de produtos) + 2 (tradução de enunciados em expressões numéricas e cálculo do resultado) + 3 (propriedade distributiva, tradução de enunciados em expressões numéricas, aplicação da propriedade distributiva ao cálculo mental) + 2 (estimativas, completamento de frases matemáticas) + 3 (potências).</p>	<p>11, 12 e 15. (descrição da regra e exemplos)</p> <p>Nº de páginas da secção: 10  Questões/ atividades orientadas ao longo do texto: 0  Exercícios de aplicação: 5 (produto como soma de parcelas iguais, problemas envolvendo cálculo de produtos pelo algoritmo, multiplicação por 10, 100, 1000, ...) + 2 (multiplicação iterada) + 1 (multiplicação e prova) + 4 (cálculo mental de produtos, usando técnicas explicadas no manual) + 14 (exercícios de revisão: multiplicação)</p>
<b>Divisão</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Divisão exata - equipartição de um conjunto em conjuntos disjuntos (produto como soma de parcelas iguais), abordando a multiplicação como operação inversa da multiplicação;</li> <li>- situação de partilha equilibrada e divisão como medida, em contexto real;</li> <li>- definição de divisão exata como operação inversa da</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Divisão exata: - equipartição de um conjunto em conjuntos disjuntos, ligando apenas ao produto como soma de parcelas iguais;</li> <li>- divisão como partilha equitativa, com exemplo concreto do real;</li> <li>- definição de quociente exato;</li> <li>- divisão como operação inversa da multiplicação: equivalência das equações <math>a = b \times q</math> e <math>q = a : b</math> (só formal)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Divisão exata: - abordagem da divisão por equipartição de um conjunto em conjuntos disjuntos (os elementos são figuras geométricas);</li> <li>- divisão como operação inversa da multiplicação com esquema de matriz retangular, contextualizado;</li> <li>- Exemplos com operadores inversos (formais, esquemas de calculadoras);</li> <li>- equações tipo <math>ax = b</math> e tipo <math>a : x = b</math> (formal, usando operadores inversos);</li> <li>- noção de quociente exato: divisão como operação</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Divisão exata: - Distribuição equitativa (situação em contexto, com esquema);</li> <li>• Divisão não exata: - Distribuição equitativa com resto (situação em contexto, com esquema); indicando igualdade fundamental da divisão inteira no exemplo concreto;</li> </ul>

	<p>multiplicação;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- distinção entre divisão e quociente;</li> <li>- equações do tipo <math>a \times x = b</math> com exemplos formais e casos particulares (<math>a=b</math>; <math>a=1</math> e <math>b=0</math>);</li> <li>- Divisão de um produto por um número (regras práticas de cálculo)</li> <li>• Divisão inteira: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Igualdade fundamental da divisão (2 exemplos em contextos reais – partilha equitativa);</li> <li>- refere que o resto é sempre menor que o divisor;</li> <li>- refere que, numa divisão inteira, o quociente e o resto são inteiros;</li> <li>-divisão por subtrações sucessivas.</li> </ul> </li> <li>• Múltiplo e submúltiplo de um número</li> <li>• Relação da divisão com os numerais partitivos (formal);</li> <li>• Relação entre numerais partitivos e numerais multiplicativos, usando operadores inversos (formal);</li> <li>• Numerais partitivo-multiplicativos e sua expressão na forma de fração, como multiplicação e partição por qualquer ordem (formal, jogos de números)</li> <li>• Frações inversas, algoritmo IM</li> </ul> <p>Nº de páginas da</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- distinção entre divisão e quociente</li> <li>- equações do tipo <math>a \times x = b</math> com exemplos formais e casos particulares; equações impossíveis no conjunto dos números inteiros</li> <li>- Divisão de um produto por um número (regras práticas de cálculo)</li> <li>• Divisão inteira: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Quociente inteiro por defeito (exemplo formal - enquadramento do produto divisor <math>\times</math> quociente, usando a tabuada)</li> <li>- Igualdade fundamental da divisão (contexto real)</li> <li>- refere que o resto é menor que o divisor;</li> <li>-definição de divisão inteira e de quociente inteiro;</li> <li>- quociente por excesso (contexto real)</li> <li>-divisão por 10, 100, 1000, ...</li> <li>-divisão por subtrações sucessivas</li> <li>- obtenção da divisão inteira multiplicando sucessivamente o divisor por 1, 2, 3, ... até encontrar o quociente inteiro por defeito, ou recorrendo ao algoritmo da divisão;</li> </ul> </li> <li>• Múltiplo e submúltiplo de um número</li> <li>• Relação da divisão com os numerais partitivos (formal);</li> <li>• Relação entre numerais partitivos e numerais multiplicativos, usando operadores inversos (formal);</li> <li>• Numerais partitivo-</li> </ul>	<p>inversa da multiplicação, usando matrizes retangulares com botões; exemplos similares que representam quocientes não exatos;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Divisão inteira: <ul style="list-style-type: none"> <li>- quociente por falta e quociente por excesso (esquemas retangulares)</li> <li>- Igualdade fundamental da divisão; liga à prova real da divisão;</li> <li>- refere que o resto é sempre menor que o divisor;</li> <li>- divisão de um produto por um número: exemplos em que um dos fatores é múltiplo do divisor (formais, esquemas de calculadoras), aplicação ao cálculo mental;</li> </ul> </li> <li>• Múltiplo e submúltiplo de um número;</li> <li>• Relação da divisão com os numerais partitivos (formal);</li> <li>• Numerais partitivo-multiplicativos e sua expressão na forma de fração, como multiplicação e partição por qualquer ordem (formal, esquemas de calculadoras)</li> <li>• Frações inversas (jogos de números, esquemas de calculadora, tabelas de razão); generaliza em linguagem corrente e simbólica com figuras geométricas;</li> <li>• Variação do produto por aumento/ diminuição proporcional do multiplicando e/ ou do multiplicador;</li> <li>• Variação do quociente por aumento/ diminuição proporcional do dividendo e/ ou do divisor;</li> <li>• Jogos de números.</li> </ul> <p>Nº de páginas analisadas: 14</p> <p>Nº de exemplos com espaços em branco: 15</p> <p>Questões/ atividades</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Refere que o resto é sempre menor que o divisor;</li> <li>• Algoritmo de divisão;</li> <li>• Propriedade fundamental: enunciado e exemplo (formal);</li> <li>• Divisão de um produto por um número: <ul style="list-style-type: none"> <li>- um fator igual ao divisor;</li> <li>- um fator múltiplo do divisor;</li> </ul> </li> <li>Contexto e esquema; generalização em linguagem corrente;</li> <li>• Prova da divisão pela propriedade fundamental (enuncia)</li> <li>• Cálculo mental: divisão por 4, 6, etc por divisões sucessivas por submúltiplos; divisão por 10, 100, 1000, etc</li> </ul> <p>Nº de páginas analisadas: 9</p> <p>Questões/ atividades orientadas ao longo do texto: Exercícios de aplicação: 2 (divisões inteiras, problemas) + 1 (cálculo mental de divisões de um produto por um número) + 1 (algoritmo de divisão e prova) + 3 (cálculo mental de divisões) + 11 (exercícios de revisão: divisão)</p>
--	--	---	--	---

	secção: 10 Nº de exemplos com espaços em branco: 5 Outros exercícios: 8 (divisão exata) + 5 (divisão inteira) + 11 (numerais partitivos e partitivo-multiplicativos).	multiplicativos e sua expressão na forma de fração (formal) • Frações inversas, algoritmo IM (abordagem formal, jogos de números)  Nº de páginas analisadas: 23 Nº de exemplos com espaços em branco: 13 Questões/ atividades orientadas ao longo do texto: 10 Exercícios de aplicação: 10 (final do capítulo)	orientadas ao longo do texto: 0 Exercícios de aplicação: 3 (operadores inversos, equações tipo $ax = b$ e $x : a = b$ ) + 2 (divisão inteira) + 1 (divisão de um produto por um número) + 2 (múltiplos e submúltiplos) + 1 (operadores partitivos) + 6 (frações como operadores partitivo-multiplicativos, frações inversas, frases matemáticas, equações) + 1 (expressões numéricas)	
--	---	--	--	--

### Síntese dos aspetos mais relevantes encontrados na análise do capítulo Números Racionais

	A	B	C	D
<b>Noção de número fracionário</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relação parte-todo</li> <li>• Situações de partilha equitativa) Dois exemplos de situações concretas do real usando esquemas.</li> <li>• Frações próprias e impróprias</li> <li>• Fração como representação de quociente exato (formalização)</li> <li>• ;</li> <li>• Distingue fração de número fracionário</li> <li>• Representação de frações na forma mista (usa esquema)</li> <li>• Exemplos de</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Situações em que o quociente exato não é um número inteiro (formal);</li> <li>• Situação real de partilha equitativa com conjunto contínuo e conjunto discreto (linguagem de conjuntos, uso de esquemas);</li> <li>• Noção de número fracionário;</li> <li>• Distingue fração de número fracionário;</li> <li>• Relação parte-todo e partilha equitativa em situação concreta (unidade: hora), com esquema;</li> <li>• Outras situações reais de partilha equitativa, sem esquema. Liga a representação na forma mista ao algoritmo de divisão inteira e à Propriedade</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teoria de conjuntos: a fração aparece como cardinal de um subconjunto dos elementos que constituem a unidade (contexto real e esquemas);</li> <li>• Segue-se uma situação de partilha equitativa que evidencia o quociente entre dois números naturais (contexto real e esquemas – conjuntos contínuos);</li> <li>• Formaliza o conceito de fração como quociente exato e generaliza em linguagem simbólica com figuras geométricas;</li> <li>• Fração com denominador 1; fração com numerador e denominadores iguais;</li> <li>• Fração como operador de conjunto discreto recorrendo à linguagem de conjuntos (problema real e esquemas);</li> <li>• Leitura das frações;</li> <li>• Divisão com resto (divisão não exata) e divisão sem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Noção de fração como relação parte-todo (situações concretas com unidades diferentes, contínuas e discretas, apenas um esquema);</li> <li>• Leitura de números fracionários (não define este conceito);</li> <li>• Unidade inteira e unidade fracionária (tomando o primeiro exemplo da abordagem);</li> <li>• Determinação da fração que representa a medida de uma grandeza; da grandeza cuja medida é uma fração; e da unidade, dadas a grandeza e a sua medida fracionária (estes tópicos apenas contém exercícios, sem solução);</li> <li>• Frações próprias e</li> </ul>

	<p>unidades infracionáveis ou fracionáveis apenas mentalmente;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Frações que representam números inteiros; frações de denominador 1;</li> <li>As unidades são apenas conjuntos contínuos</li> <li>Liga a fração ao algoritmo de divisão inteira.</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 4 Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 1 Outros exercícios: 10 (final da secção)</p>	<p>Fundamental da divisão.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Unidades que só se dividem mentalmente (ex: a hora)</li> <li>Generaliza fração como representação de um quociente exato;</li> <li>Quociente inteiro e quociente fracionário;</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 5 Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 1 Exercícios: 0</p>	<p>resto (divisão exata na forma mista) – contexto real e esquemas; liga a forma mista ao algoritmo da divisão;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Conversão de formas inteiras e mistas a fracionárias usando a “recta numérica”;</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 7 Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 6 Exercícios: 5 (frações como operadores de conjuntos contínuos, fração como quociente exato, frações de denominador 1, frações de numerador e denominador iguais, identificação da unidade, dada a parte e a fração correspondente)</p>	<p>impróprias (esquemas de barrassem relação a uma barra considerada unidade);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Frações aparentes (exemplo com esquema de segmentos de reta);</li> <li>Redução de inteiros à forma fracionária (formal);</li> <li>Frações como quocientes exatos (representação gráfica de um inteiro e de uma fração cujo numerador é esse inteiro);</li> <li>Frações decimais;</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 12 Nº de questões orientadas: 10 Exercícios: 1 (relação parte-todo) + 1 (frações próprias e impróprias) + 3 (frações aparentes) + 3 (redução de inteiros à forma fracionária) + 3 (frações decimais)</p>
<p><b>Frações equivalentes</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Relação parte-todo Usa esquemas (círculos)</li> <li>Enuncia a regra após único exemplo;</li> <li>Frações equivalentes como operadores de conjuntos/unidades contínuos (círculo, hora, litro, quilo)</li> <li>Definição de conjunto dos números racionais</li> <li>Simplificação de frações (formal). Não utiliza a</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Frações iguais que representam porções diferentes, tratando-se de unidades diferentes;</li> <li>Fração como relação parte-todo: frações equivalentes da hora; esquema retangular, esquema circular, contextualizados;</li> <li>Frações que representam números inteiros; frações de denominador 1; frações com numerador nulo;</li> <li>Frações como operadores de conjuntos contínuos (esquemas retangulares);</li> <li>Identidade dos números</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Frações equivalentes da hora (relação parte-todo)</li> <li>Frações equivalentes numa unidade contínua (esquema de retângulo)</li> <li>Formaliza as regras de obtenção de frações equivalentes com esquemas de setas curvas;</li> <li>Generaliza em linguagem corrente e simbólica, com figuras geométricas;</li> <li>Simplificação de frações e conceito de fração irredutível (formal, exemplo simples e exemplo em que se experimentam divisores os números 2, 3, 4, 5, etc);</li> <li>Observa-se que se um número não é divisível por 2, também não é por 4, 6, 8, etc</li> <li>Classes de frações</li> </ul>	<p>Frações equivalentes, abordadas com questões orientadas e esquemas (barras e retângulos)</p> <p>Nº de pág. da secção: 4 Nº de questões orientadas: 2 Exercícios: 2 (frações equivalentes) + 24 (exercícios de revisão: números fracionários)</p>

	<p>designação “fração irredutível”</p> <p>Nº de pág. da secção: 2</p> <p>Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 1</p> <p>Outros exercícios: 3 (final da secção)</p>	<p>representados por frações equivalentes;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Formalização: regras de obtenção de frações equivalentes (exemplos e linguagem corrente);</li> <li>• Definição de conjunto dos números racionais;</li> <li>• Simplificação de frações (formal);</li> <li>• Utiliza a expressão “fracção irredutível”.</li> </ul> <p>Nº de pág. das secções: 7</p> <p>Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 3</p> <p>Questões/atividades orientadas no texto: 4</p> <p>Exercícios de aplicação: 0</p>	<p>equivalentes;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Método gráfico de obtenção de números racionais, identificando frações equivalentes;</li> <li>• Definição de conjunto dos números racionais (representa o conjunto dos números inteiros por <math>\mathbb{IN}_0</math> e o conjunto dos fracionários por <math>F</math>).</li> </ul> <p>Nº de pág. das secções: 5</p> <p>Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 4</p> <p>Questões/atividades de investigação/ reflexão: 0</p> <p>Exercícios de aplicação: 1 (equivalência de frações: regra) + 2 (classes de frações equivalentes)</p>	
--	---	---	--	--

<p><b>Compara- ção de frações</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relação parte-todo.</li> </ul> <p>Usa esquema de conjunto contínuo (barra); não liga ao real.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Enuncia regra de comparação de frações com denominador igual em linguagem corrente</li> <li>• Relação “maior que” e “menor que”</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 2</p> <p>Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 1</p> <p>Outros exercícios: 10 (final da secção)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparação de frações com o mesmo denominador (formal, sem esquema)</li> <li>• Comparação frações com denominadores diferentes por redução ao mesmo denominador (formal, sem esquema)</li> <li>• Relação “maior que” e “menor que”</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 1,5</p> <p>Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 0</p> <p>Questões/atividades de investigação ou reflexão: 0</p> <p>Exercícios de aplicação: 0</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Frações com o mesmo denominador: esquemas em que a unidade é contínua (circulo que representa um queijo); generaliza em linguagem corrente;</li> <li>• Frações com o mesmo numerador: esquemas em que a unidade é contínua (retângulo que representa tablette de chocolate); generaliza em linguagem corrente;</li> <li>• Frações com numeradores e denominadores diferentes: só formal, usando classes de frações equivalentes;</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 2</p> <p>Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 3</p> <p>Questões/atividades de investigação ou reflexão: 0</p> <p>Exercícios de aplicação: 2 (comparação de frações com denominadores ou numeradores iguais) + 1 (comparação de frações com denominadores e numeradores diferentes)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparação de frações: <ul style="list-style-type: none"> <li>- primeiro intuitiva, sem sistematizar, a partir de porções de segmentos de reta;</li> <li>- denominadores iguais: representação gráfica em segmentos de reta, dada unidade, e comparação;</li> <li>- numeradores diferentes: representação gráfica em barras e retângulos, dadas as unidades, e comparação;</li> </ul> </li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 4</p> <p>Nº de questões orientadas: 6</p> <p>Exercícios de aplicação: 2 (comparação de frações com denominadores iguais) + 2 (comparação de frações com numeradores iguais).</p>
---	--	---	--	--

<p><b>Adição/subtração de frações</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relação parte-todo Usa esquema (retângulo) num exemplo não contextualizado.</li> <li>(adição – fração relativa à superfície pintada (2 cores); subtração – fração relativa à superfície não pintada, subtraindo a parte pintada à unidade)</li> <li>• Linguagem corrente (enuncia a regra para adicionar/subtrair frações com o mesmo denominador)</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 1 Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 0 Exercícios: 1 (final da página)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Efetuam-se adições/subtrações de frações com o mesmo denominador e denominadores diferentes (redução ao mesmo denominador) Usa situação real apenas no primeiro exemplo</li> <li>• Notação de correspondência de um par ordenado à soma;</li> <li>• Enuncia a regra da adição de frações em linguagem corrente;</li> <li>• Solicita ao aluno o enunciado das regras da subtração de frações;</li> <li>• Estende à soma de frações na forma mista.</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 2,5 Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 1 Questões/atividades orientadas no texto: 2 Exercícios de aplicação: 0</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Adição e subtração de frações com esquemas circulares e segmentos de reta (só frações com denominador igual);</li> <li>• Formaliza e generaliza com operadores inversos;</li> <li>• Refere que a soma de números racionais positivos é sempre possível e tem resultado racional; mas a subtração de números racionais só é possível se o subtrativo for menor ou igual que o subtrativo;</li> <li>• Subtração de inteiro e fração com esquema circular;</li> <li>• Adição e subtração de inteiros, frações e mistos: expressões numéricas onde se evidencia a extensão das propriedades comutativa e associativa da adição aos números racionais (1 exemplo formal e 2 partindo de problema concreto); técnicas de cálculo mental.</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 3 Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 5 Exercícios de aplicação: 2 (adição e subtração de frações com o mesmo denominador; equações tipo <math>x + a = b</math>, <math>x - a = b</math> e <math>a - x = b</math> com números racionais) + 1 (adição e subtração de inteiros, frações e mistos)</p>	<p>Não abordado</p>
<p><b>Multiplicação</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Convencionase que a preposição “de” equivale ao sinal <math>\times</math> para ligar numerais multiplicativos, partitivos ou partitivo-multiplicativos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Operadores multiplicativos. Estende dos números naturais para os racionais, com esquemas auxiliares (retângulos) – não contextualiza;</li> <li>• Convencionase que a preposição “de”</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Operadores multiplicativos e partitivos. Estende dos números naturais para os racionais (duas partições sucessivas), com esquemas auxiliares (retângulos e tabelas de razão) – não contextualiza;</li> <li>• Substitui a preposição “de” pelo sinal <math>\times</math> para ligar</li> </ul>	<p>Não abordado</p>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Multiplicação de frações usando esquema de retângulo, contextualizado no real.</li> <li>• Enuncia-se a regra, em linguagem corrente.</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 1  Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 1  Exercícios: 0</p>	<p>equivale ao sinal <math>\times</math> para ligar numerais multiplicativos, partitivos ou partitivo-multiplicativos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Depois formaliza, enunciando a regra em linguagem corrente.</li> <li>• Cálculo de produto de números racionais por iteração.</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 3  Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 0  Questões/atividades orientadas no texto: 2  Exercícios de aplicação: 0</p>	<p>numerais multiplicativos, partitivos ou partitivo-multiplicativos; produto de frações usando tabelas de razão (formal);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Generalização enunciando a regra em linguagem corrente e simbólica com figuras geométricas);</li> <li>• Produto de um inteiro por uma fração (formal); generaliza com figuras geométricas;</li> <li>• Estende a existência de elemento neutro à multiplicação de números racionais, só à direita (formal: exemplos e generalização com figuras geométricas);</li> <li>• Produto de dois racionais inversos (formal: exemplos e generalização com figuras geométricas);</li> <li>• Cálculo de produto de números racionais com 3 fatores (formal: exemplos e generalização com figuras geométricas);</li> <li>• Observa-se que a multiplicação de racionais é sempre possível e o produto é racional;</li> <li>• Extensão da propriedade distributiva ao conjunto dos racionais; aplicação das propriedades da multiplicação para facilitar cálculos.</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 5,5  Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 5  Exercícios de aplicação: 3 (duas partições sucessivas) + 1 (produto de dois racionais inversos) + 1 (produto de racionais, incluindo forma mista, com mais de 2 fatores) + 1 (produto de racionais usando técnicas de simplificação)</p>	
--	--	---	--	--

<p style="text-align: center;"><b>Divisão</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Problemas do tipo “adivinhar um número”, cuja resolução envolve equações do tipo <math>a \times x = b</math> (inicialmente <math>b</math> e <math>x</math> são inteiros) e algoritmo IM</li> <li>• Enuncia algoritmo IM</li> <li>• Observa-se que a divisão exata entre números racionais diferentes de zero é sempre possível;</li> <li>• Mostra-se com exemplos (só formal) que a divisão não goza das propriedades comutativa e associativa, e só tem elemento neutro à direita;</li> <li>• Frações com termos fracionários: uso do traço de fração como sinal de divisão (só formal)</li> <li>• Expressões numéricas fracionárias (formal)</li> <li>• Equações do tipo <math>x : a = b</math> e <math>a : x = b</math>, sendo <math>a</math> e <math>b</math> fracionários (formal);</li> <li>• Extensão da noção e das regras operatórias com frações a bases fracionárias</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Abordagem em linguagem formal: enuncia algoritmo IM e dá exemplos (verifica-se o cálculo ao lado)</li> <li>• Refere que a divisão exata de racionais é sempre possível e o quociente é racional.</li> <li>• Frações com termos fracionários: uso do traço de fração como sinal de divisão (só formal)</li> <li>• Equações do tipo <math>x : a = b</math> e <math>a : x = b</math>, sendo <math>a</math> e <math>b</math> fracionários (formal);</li> <li>• Extensão da noção e das regras operatórias com frações a bases fracionárias (formal)</li> </ul> <p>Nº de pág. da secção: 8  Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 0  Questões/atividades orientadas no texto: 3  Exercícios de revisão: 12 (final do capítulo)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Extensão da resolução de equações do tipo <math>a \times x = b</math> ao conjunto dos números racionais;</li> <li>• Algoritmo IM (exemplo formal acompanhado de tabela de razão); generaliza em linguagem corrente e simbólica com figuras geométricas;</li> <li>• Refere que a divisão de racionais é sempre possível, exceto se o divisor é zero; a divisão com quociente exato é sempre possível no conjunto dos racionais (divisor diferente de 0), ao contrário do que acontece no conjunto dos inteiros;</li> <li>• Mostra-se que a divisão não é comutativa com esquema de segmentos de reta;</li> <li>• Mostra-se que a divisão não é associativa com esquema retangular;</li> <li>• Mostra-se que a divisão só tem elemento neutro à direita com exemplos formais;</li> <li>• Frações com termos fracionários: uso do traço de fração como sinal de divisão (só formal); expressões numéricas fracionárias;</li> <li>• Equações tipo <math>x : a = b</math> e <math>a : x = b</math>, sendo <math>a</math> e <math>b</math> racionais (partindo de problemas concretos);</li> <li>• Extensão da noção e das regras operatórias com frações a bases fracionárias (formal)</li> </ul> <p>Nº de pág. das secções: 9,5  Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 18  Exercícios: 4 (equações <math>a \times x = b</math> e algoritmo IM, problemas para determinar o todo, dada a parte e a fração correspondente, tradução de esquemas de uma porção da unidade em divisões) + 1 (comparação de quocientes)</p>	<p style="text-align: center;">Não abordado</p>
---	---	---	--	---

	<p>(formal)</p> <p>Nº de pág. das secções: 8</p> <p>Nº de exemplos com espaços em branco para preencher: 2</p> <p>Exercícios: 1 (divisão de frações) + 20 (operações com frações e propriedades) + 2 (frações com termos fracionários) + 7 (expressões numéricas, problemas, equações) + 4 (potências)</p>		<p>trocando a ordem dos termos) + 1 (comparação de quocientes alterando a prioridade das divisões) + 5 (expressões numéricas) + 2 (equações tipo <math>x : a = b</math> e <math>a : x = b</math>) + 1 (potências de base racional)</p>	
--	--	--	--	--