Ana Lúcia Ferreira dos Santos

Licenciatura em Ensino da Matemática (Pré-Bolonha)

O ensino e aprendizagem da matemática: um relatório reflexivo sobre a prática.

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: António Manuel Dias Domingos, Professor Doutor, Faculdade de Ciências e Tecnologia

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos
Arguente(s): Prof. Doutor Filipe José Gonçalves Pereira Marques
Vogal: Prof. Doutor António Manuel Domingos

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Março 2012

O ensino e aprendizagem da matemática: um relatório reflexivo sobre a prática.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador pelo apoio prestado e pela disponibilidade mostrada no acompanhamento deste trabalho.

Agradeço aos meus alunos que têm sido o melhor da profissão de professor, é por eles que vale a pena refletir e melhorar as práticas.

Deixo uma palavra de apreço e carinho à minha família que sempre me apoia nos bons e nos maus momentos e, em especial, à a minha filha Raquel que 'não deixou' que desistisse.

Resumo

Esta dissertação consiste num relatório detalhado sobre a minha atividade profissional, na vertente ensino-aprendizagem da matemática onde são tratados dois temas, Programas de Matemática e as Metodologias implementadas. Para clarificar de que forma a minha prática segue as diretrizes do Currículo Nacional e que tipo de metodologias implemento, apresento o relato de um percurso, da planificação à avaliação, sobre um tópico do programa de Matemática A, 11º ano.

Apesar de ser um trabalho baseado na experiência pessoal, procurei fundamentação teórica num conjunto de referências onde são tratados temas como o currículo, o conhecimento matemático e as questões da didáctica em geral.

Constitui um trabalho de natureza reflexiva cujo objetivo é relatar, discutir, questionar, expressar pontos de vista, exemplificando e desenvolvendo argumentos que fundamentem eventuais posições.

Palavras chave:

Ensino-Aprendizagem da Matemática, Metodologia, Planificação, Prática, Programas de Matemática.

Abstract

This essay presents a detailed report on my professional activity in the branch of teaching and learning of the mathematics, developing the themes of the Mathematics Syllabus and Implemented Methodologies. To clarify in which way my practice follows the *curricula* directions and what kind of methodologies are used, a report on a topic of the 11^{th} grade/year Mathematics program is kept.

Despite being a work based on personal experience, I tried a set of theoretical references where subjects are treated as the curriculum, mathematical knowledge and teaching issues in general.

In its whole is meant to be a reflexive work with the purpose to report, debate, question and expressing points of view, exemplifying and developing arguments that may base personal positions.

Key Words:

Mathematical Teaching and Learning, Mathematics Syllabus, Teacher Planning, Teaching Experiment, Teaching Methods.

Índice

Índice de figuras

Prólogo

Em 1988, acabada a licenciatura em Ensino da Matemática, com um ano de experiência em ensino – o estágio pedagógico – muito estava ainda por aprender e todos os desafios estavam em aberto. Lembro-me do nervosismo gerado pela insegurança, fruto da inexperiência, e a estratégia de deixar os apontamentos detalhados em papel (plano de aula) sobre a secretária, para que as folhas não me denunciassem com o seu tremer. Hoje, com mais de vinte anos de serviço, o tal nervosismo há muito que desapareceu mas os desafios persistem.

A alternativa possibilitada pela Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade Nova de Lisboa, de obter o grau de Mestre sendo uma Licenciada "pré-Bolonha", pela Faculdade de Ciências de Lisboa, da Universidade de Lisboa, através da apresentação de um relatório detalhado da minha atividade profissional, incluindo a discussão da experiência e competências adquiridas, a par de uma reflexão aprofundada, sistematizada e fundamentada, representa uma oportunidade de valorização profissional, através de um exercício de dissertação.

Embora tal dissertação não tenha como base um trabalho de investigação, desenvolvido com o carácter científico, apoiado por uma metodologia convencional, considero que a experiência vivida e a reflexão sobre a prática letiva – a planificação, o desenvolvimento das atividades, os métodos e técnicas educativas, a sua pertinência e adequação a um ensino de qualidade, em particular o da Matemática – podem constituir material suficiente para o desenvolvimento deste trabalho. Desta forma, o relatório terá o desenvolvimento idêntico aos da unidade curricular de dissertação, na medida em que não se limitará à descrição exaustiva das atividades profissionais desenvolvidas mas antes utilizará as mesmas como matéria de dissertação.

As duas vertentes, *a Matemática* e *o ensino e a aprendizagem da Matemática,* mencionadas no perfil de desempenho profissional específico dos docentes de Matemática do 3º Ciclo do Ensino Básico e Secundário em vigor na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, embora distintas, complementam-se, completam-se e têm por base especialmente duas dimensões, *a profissional, social e ética,* bem como *a de desenvolvimento do ensino e da aprendizagem*, referidas no perfil geral do educador e dos professores dos ensinos básico e secundário, aprovado em diploma próprio (Decreto-Lei n.º 240/2001, de 30 de Agosto).

Considerando que a minha atividade profissional se centralizou principalmente no ensino-aprendizagem da Matemática, estando fundamentado o propósito deste trabalho e feita a sua contextualização, proponho tratar dois temas num relatório que pretende ser, também, uma reflexão na vertente – *o ensino-aprendizagem da Matemática*: Programas de Matemática e as Metodologias implementadas.

Finalmente, para clarificar de que forma a minha prática segue as diretrizes do currículo e que tipo de metodologias implemento, apresento o relato de um percurso, que pretende descrever a dinâmica das aula de matemática, relativo a um tópico do programa.

1. Programas de Matemática

Uma reflexão que pretende ser uma visão da prática, pela necessidade de operacionalizar o que está teorizado nos programas.

Esta reflexão incide sobre os programas em vigor, de Matemática A e de Matemática B, ambos homologados em 2001 no âmbito da reforma do Ensino Secundário que foram objeto da minha atividade docente desde essa data. Lecionei, nos últimos anos, Matemática A, a turmas dos Cursos Científico-humanísticos de Ciências e Tecnologias, e Matemática B, a turmas de Artes Visuais, em continuidade pedagógica, sempre que possível. Os programas destas disciplinas concretizam o papel da Matemática no atual desenvolvimento curricular do Ensino Secundário, cujo ciclo de estudos se desenvolve por três anos, 10º, 11º e 12º. A Matemática A é uma disciplina da componente de formação específica e é trienal, a Matemática B, sendo uma disciplina da mesma componente, é bienal e de opção. Os cursos Científico-humanísticos são vocacionados para o prosseguimento de estudos de nível superior, sendo as disciplinas mencionadas sujeitas a avaliação sumativa externa (exame), para efeitos de aprovação nas mesmas, a Matemática A no 12º ano e a Matemática B no 11º ano.

Esclarecido o objeto e âmbito desta reflexão, planificar implica necessariamente conhecer os programas das disciplinas a lecionar e implica, antes de mais, ponderar sobre o que é um currículo. Encontra-se o que se entende por currículo nacional no Decreto-Lei n.º 74/2004 de 26 de Março, Artigo 2.º, que passo a transcrever:

> 1 — Para efeitos do disposto no presente diploma, entende-se por currículo nacional o conjunto de aprendizagens a desenvolver pelos alunos de cada curso de nível secundário, de acordo com os objectivos consagrados na Lei de Bases do Sistema Educativo. 2 — O currículo nacional concretiza-se em planos de estudo elaborados com base nas matrizes curriculares anexas ao presente diploma, do qual fazem parte integrante.3 — As aprendizagens a desenvolver pelos alunos de cada curso de nível secundário têm como referência os programas das respectivas disciplinas, homologados por despacho do Ministro da Educação, bem como as orientações fixadas para as áreas não disciplinares. 4 — As estratégias de desenvolvimento do currículo nacional são objecto de um projecto curricular de escola, integrado no respectivo projecto educativo.

Já de acordo com Gimeno (2000), o currículo é

> ... algo que adquire forma e significado à medida que sofre uma série de processos de transformação dentro das atividades práticas que o têm mais diretamente por objeto. As condições de desenvolvimento e realidade curricular não podem ser entendidas senão em conjunto (p.9).

Este autor apresenta também algumas definições de currículo, elaboradas por alguns pensadores da educação, como Grundy (1987),

> O currículo não é um conceito, mas uma construção cultural. Isto é, não se trata de um conceito abstrato que tenha algum tipo de existência fora e previamente à experiência humana. É, antes, um modo de organizar uma série de práticas educativas (p. 5).

A definição de currículo de Gimeno (2000) baseia-se num modelo subdividido em seis níveis de desenvolvimento curricular que interagem entre si: o *currículo prescrito* definido pelas equipas de especialistas por proposta do Ministério de Educação (Governo); o *currículo apresentado*, constituído pelos programas, manuais e outros documentos/materiais de apoio à prática letiva onde surgem as principais linhas do currículo prescrito; o *currículo moldado* pelos professores nas planificações de forma a colocar em prática o currículo prescrito; o *currículo em ação* como o conjunto de contextos de aprendizagens que o professor coloca em prática; o *currículo realizado* que traduz aquilo que os alunos aprendem e o *currículo avaliado* aquilo que é avaliado.

Uma vez estabelecido o currículo nacional, a dinâmica entre o que se estabelece num programa de uma disciplina e a sua aplicabilidade prática, que neste caso se traduz em planear as aulas, isto é, as aprendizagens a desenvolver pelos alunos à luz de um programa, merece naturalmente uma reflexão. Mesmo porque, não pretendendo encontrar respostas, pode levantar algumas questões quanto à implementação de novas metodologias do ensino da disciplina de Matemática e também, necessariamente, quanto à avaliação e ao (in)sucesso em Matemática.

A leitura dos programas em vigor, quer do básico, quer do secundário, conduz a uma perspetiva sobre *planear ensinar Matemática* que ultrapassa a simples intenção de enunciar listas de conteúdos a lecionar, em função do número de aulas disponíveis ao longo do ano letivo, para nos posicionar no *como ensinar a fazer Matemática*. Tal posição não é independente do contexto ou da realidade a que se aplica, por isso, a planificação, sendo uma referência importante e necessária, deve ser flexível e adaptável ao contexto sociocultural. Portanto, não pode ser imutável.

> (...) na perspectiva construtivista a planificação passa pela criação de ambientes estimulantes que propiciem actividades que não são à partida previsíveis e que, para além disso, atendam à diversidade das situações e aos diferentes pontos de partida dos alunos. Isso pressupõe prever actividades que apresentem os conteúdos de forma a tornarem-se significativos e funcionais para os alunos, que sejam desafiantes e lhes provoquem conflitos cognitivos, ajudando-os a desenvolver competências de aprender a aprender (Zabala, 2001). (Braga et al. 2004. p. 27)

Partindo deste pressuposto, organizo o meu trabalho de planificação em três fases, a planificação a longo prazo, a médio prazo e a curto prazo. A primeira permite uma visão global dos temas e do seu "peso" ao longo do ano letivo, articulado como tempo disponível, determinado pelo calendário escolar. A segunda permite uma visualização do desenvolvimento desses mesmos temas, de acordo com o tempo disponível em cada período letivo e um primeiro plano sobre a avaliação. A terceira permite-me um trabalho mais personalizado, de acordo com o grupo de alunos a que se destina (turma), com o

Projeto Educativo da Escola, com o Plano de Atividades (atividades planeadas em Grupo Disciplinar/Departamento ou Conselho de Turma) e com os recursos disponibilizados.

A planificação a longo prazo antecede normalmente o início da atividade letiva e é realizada em conjunto, pelos professores que lecionam a mesma disciplina, desse ano (Anexo 1). Tem por objetivo, assegurar uma gestão global e equilibrada do programa da disciplina, ao longo do ano letivo, de forma a serem lecionados todos os conteúdos e cumpridos os objetivos estabelecidos no programa.

A planificação a médio prazo é feita ao longo do ano, por período letivo, tem por objetivo uma visão mais detalhada do trabalho a desenvolver, nomeadamente em relação aos tópicos/conteúdos que compõem os temas ou unidades temáticas a lecionar e às diferentes modalidades de avaliação a implementar (formativa e sumativa). É realizada em conjunto, pelos professores que lecionam a mesma disciplina, desse ano. Permite, contudo, a cada professor fazer as adaptações necessárias, em cada período, de forma a resolver questões como atrasos no cumprimento do programa ou atividades extra, de remediação, de complementação ou de enriquecimento curricular (Anexo 2).

A planificação a curto prazo/plano de aula é a que permite a adequação à realidade e contexto escolar do grupo de alunos a que se destina. Ao contrário das anteriores é, por isso, individual e da responsabilidade de cada professor. Tal não impede a troca de informação ou a articulação com a planificação de outros professores, da mesma ou de outra disciplina. Será o caso de planear aulas ou atividades que se justifiquem oportunas ou necessárias como as atividades de caráter interdisciplinar ou que visam tópicos transversais. Um exemplo concreto é a noção de derivada de uma função. Trata-se de num tópico abordado pelas disciplinas de Matemática A e de Física e Química A, no 11º ano (Anexo 3). Permite também integrar atividades constantes do Plano Anual de Atividades da Escola, das quais são exemplos os trabalhos para a disciplina no âmbito da Semana da Matemática (Anexo 4).

A questão dos temas transversais é um aspeto importante a ter em conta na planificação. As editoras e os autores dos manuais compreenderam este problema e oferecem um conjunto de recursos diversificados que ultrapassou, há muito, o conceito tradicional de manual escolar, sendo possível encontrar todos os temas transversais, enquadrados nos conteúdos a lecionar e em atividades propostas (Anexo 6), embora haja que ponderar a sua pertinência no desenvolvimento do programa. Por exemplo, de acordo com os objetivos gerais, parece evidente que o tópico *Aplicações e Modelação Matemática* merece mais atenção e é prioritário em relação ao tópico *História da Matemática*. Sendo que, mais uma vez, cabe ao professor fazer uma gestão equilibrada do programa, fazendo opções que não deixem de ter em conta esses mesmos objetivos e também, se for o caso, a avaliação feita através dos exames nacionais.

Antes de iniciar qualquer intenção de planificação ou de passar, particularmente, à leitura do desenvolvimento do programa em cada ano do ensino secundário, torna-se necessário e pertinente, o trabalho de leitura e análise dos programas na íntegra, para assegurar uma visão global do programa, relativo a todo o ciclo de estudos do secundário, e o conhecimento da filosofia a si subjacente. Na leitura do programa, tal filosofia clarifica-se à medida que são esclarecidos, de forma mais sistemática, quais as suas finalidades, quais os objetivos gerais, qual a visão geral dos temas e conteúdos, quais as sugestões metodológicas gerais, como deve ser implementada a avaliação, quais os recursos necessários e qual a tecnologia a ser utilizada.

A leitura do desenvolvimento do programa por ano surge posteriormente, num contexto já estabelecido, citando exaustivamente todos os conteúdos obrigatórios e facultativos. No entanto, no programa de Matemática A, só em alguns casos se referem objetivos específicos e verifica-se que no caso do programa de Matemática B os objetivos específicos estão completamente ausentes.

A problemática dos Objetivos Específicos

Autores de livros sobre didática como Menegolla e Sant'anna, (1993), afirmam, resumidamente, que objetivos específicos são aqueles que expressam uma ideia particular, que estabelecem e indicam objetivamente as características e particularidades de algo. Os objetivos específicos, são o desdobramento de objetivos gerais, são objetivos mais concretos e mais explícitos para que possam ser observados e avaliados com mais segurança. São concretos, delimitados e observáveis a médio e curto prazo. Estes autores consideram e descrevem ainda objetivos operacionais como sendo aqueles que podem ser executados e atingidos através de uma ação concreta e objetiva. Decorrem do objetivo específico e, pode-se dizer, serão os que vão ser trabalhados concretamente, na sala de aula, através de tarefas bem determinadas. Na minha prática estes objetivos são concretizados nas planificações a curto prazo, nos planos de aula (Anexo 5).

Esta problemática surge introduzindo um fator de subjetividade no desenvolvimento curricular, nomeadamente, no *currículo moldado*, no momento em que se planifica e, portanto, necessariamente nos níveis seguintes. Gimeno (2000) afirma que

> Se o currículo é ponte entre a teoria a ação, entre intenções ou projetos e realidade, é preciso analisar a estrutura da prática onde fica moldado. …
>
> Mas a prática é algo fluído, fugaz, difícil de apreender em coordenadas simples e, além disso complexa enquanto nela se expressam múltiplos determinantes, ideias, valores e usos pedagógicos (p. 202).

A questão da referência explícita dos objetivos específicos relativos a cada tema é, portanto, importante. Estabelecidos objetivos específicos para todos os temas, pode-se diminuir as dúvidas que surgem quanto aos conhecimentos e instrumentos essenciais a proporcionar ao aluno ou quanto ao nível de aprofundamento dos conteúdos lecionados.

Os programas de que são alvo esta reflexão são ambiciosos, tendo em conta os objetivos e competências gerais a que se propõem mas, considerando também tratarem-se de programas de disciplinas com exame nacional obrigatório (que é prova de ingresso para a maioria dos cursos de nível superior da área de estudos frequentada por estes alunos), carecem da definição de objetivos específicos. A clarificação do que se pretende concretamente que o aluno conheça ou que capacidades deve revelar no final de cada tema (lecionado, trabalhado e avaliado) torna-se assim, do ponto de vista de quem os implementa na sala de aula, pertinente.

A resposta à anterior questão pode ser encontrada no próprio programa de Matemática A, onde se refere que

> A subdivisão dos Objetivos e Competências Gerais em *Valores/Atitudes*, *Capacidades/Aptidões* e *Conhecimentos* é uma característica fundamental do programa de Matemática do Ensino Secundário. Para a generalidade dos cidadãos e especialmente para aqueles que vão utilizar conhecimentos matemáticos secundários, convém esclarecer que o ensino da Matemática não deve limitar-se a desenvolver a capacidade de usar as ferramentas do ofício: símbolos, regras lógicas e cálculos. Se é legítima a preocupação em ensinar a manejar as ferramentas, ela não pode prejudicar o essencial da aprendizagem da Matemática que deve ser procurado ao nível das ideias (Silva et al, 2001, p.5).

Tal pode justificar a ausência de objetivos específicos na maioria dos temas, revelando uma opção dos autores do programa que afaste o professor e autores de manuais da tendência de focarem o ensino da Matemática na transmissão simples procedimentos e técnicas matemáticas, traduzidas em exercícios repetitivos da aplicação das mesmas, sem contextualização ou aplicação prática. Contudo, a existência de um exame nacional que visa avaliar todos os alunos, em condições de o realizar, para efeitos de aprovação da disciplina e, na maioria dos casos, para efeitos de candidatura ao ensino superior, levanta a questão essencial da *igualdade de condições*, supostamente proporcionada pela escola pública para a sua realização. Este é um facto de que nenhum professor consegue ou pode alhear-se.

A leitura da Lei n.º 46/86, de 14 de outubro (Lei de Bases do Sistema Educativo) e Lei n.º 115/97, de 19 de setembro, em particular do artigo 12.º, ponto 2, com referência à obediência do princípio de *democraticidade, equidade e igualdade de oportunidades* pode justificar a necessidade de uma maior objetividade dos programas para garantir este princípio evitando interpretações díspares dos mesmos. Uma breve análise dos resultados dos exames nacionais de Matemática e dos *rankings* das escolas só vem reforçar este argumento. Embora sejam vários os fatores associados aos resultados obtidos, tanto pelas escolas públicas como pelas privadas, os que se destacam são especialmente as diferenças na origem social dos alunos. Tal argumento, à luz do princípio de equidade de oportunidades, cria a necessidade de pensar ou repensar esta problemática. Por outro lado, os professores, enquanto agentes do ensino público, têm a responsabilidade de garantir que as diferenças se possam esbater sem comprometer a qualidade desse mesmo ensino, pelo que os referenciais mínimos de conhecimentos e capacidades devem ser claros.

Esta preocupação com a necessidade de orientações materializadas em objetivos específicos também é justificável pelo facto deste problema se tornar evidente quando os professores se confrontam com a escolha dos manuais, o *currículo apresentado*. Mais uma vez, no desenvolvimento curricular, surge a problemática da subjetividade presente na interpretação do que é apresentado.

Nos primeiros manuais editados de Matemática A a diferença de interpretação do programa era evidente. Havendo nos próprios manuais uma *modelagem* do programa oficial apresentado. Nos novos manuais essas diferenças não são tão evidentes mas uma rápida análise dos atuais manuais de Matemática B ilustra bem o problema que coloco. É evidente a diferença de interpretação do programa pela forma como os conteúdos são abordados, pelo tipo e atividades que propõem e pelo nível de aprofundamento no tratamento dos conteúdos. Um indício da subjetividade dos programas revela-se, portanto, na dificuldade na sua interpretação o que é visível nos manuais editados, destas disciplinas.

Os manuais são um recurso importante para o professor e a sua análise é um fator a ponderar na planificação, isto é, a planificação considera muitas vezes o desenvolvimento dos programas sugerido e apresentado pelo manual adotado. Alguns recentemente editados, do 10º ou 11º ano, por exemplo, Viegas, Gomes e Lima (2011), Costa e Rodrigues (2011), Andrade, Viegas, Pereira e Pimenta (2010) indicam no início de cada tema o que se pretende ou o que se vai aprender, numa clara necessidade de se referenciar de forma mais objetiva os tópicos a desenvolver. No caso do primeiro manual referido, os autores vão mais longe e definem os objetivos específicos de cada tema, fruto da sua interpretação, como é óbvio, numa clara necessidade de sistematização para apoio ao aluno e também ao professor que o utiliza.

É possível argumentar que o manual é apenas um instrumento de apoio do professor a quem compete uma postura crítica e interventiva para que os objetivos sejam atingidos. Uma perspetiva com a qual concordo, mesmo porque é um princípio que valoriza o papel do professor. No entanto, revela-se pouco pragmática quando analisamos a realidade. Parece lícito esperar que o professor não se limite às orientações do manual e às atividades aí propostas e que, na sua planificação, elabore os materiais necessários que o completem ou complementem mas, em condições normais, torna-se difícil conciliar todos os desafios que se colocam ao professor com o tempo disponível para tantas tarefas: Interpretar o que se pretende com o programa, planear de forma crítica e adaptando à realidade, elaborar ou criar materiais adequados, elaborar instrumentos de avaliação diversificados, efetuar o trabalho de sala de aula, classificar, relatar, elaborar projetos de atividades e outras funções com carácter de coordenação, supervisão ou formação. Por isso, proporcionar recursos já pensados e elaborados de forma a permitir a sua seleção pela parte do docente, inserindo-os na planificação e organização das suas atividades, torna-se indispensável. A escolha mais adequada poderá ser a que conduz a uma maior eficácia do processo ensino-aprendizagem. Por outro lado, tal escolha será definitivamente facilitada se forem conhecidos os objetivos específicos do currículo apresentado.

Apesar de não ser objetivo deste trabalho discutir os programas do ensino básico, cabe aqui a sua menção pois uma evidência do reconhecimento da necessidade de serem conhecidos os objetivos específicos está presente no novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007). Em cada ciclo, na introdução de cada tema matemático e das capacidades transversais, é apresentada a articulação entre o programa do ciclo em questão e o do ciclo anterior relativa a esse tema ou capacidade. Seguem-se o propósito principal do ensino e os objetivos gerais de aprendizagem (desse tema ou capacidade), as indicações metodológicas (específicas do tema ou capacidade) e os respetivos tópicos e objetivos específicos de aprendizagem. O Programa do Ensino Básico é um documento que contrasta claramente com o que apresenta o Programa de Matemática B. Ao contrário deste, percebe-se objetivamente o que se pretende atingir. Simultaneamente, existe um conjunto de notas na coluna da direita que ajudam a clarificar, do ponto de vista prático, como atingir esses mesmos objetivos (objetivos operacionais).

Vejamos um exemplo a propósito dos tópicos *Teorema de Pitágoras* e *Trigonometria no triângulo retângulo* (Programa de Matemática do Ensino Básico, p. 54):

Tópicos	**Objectivos específicos**	**Notas**
Teorema de Pitágoras • Demonstração e utilização	• Compor e decompor polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros. • Decompor um triângulo por uma mediana e um triângulo rectângulo pela altura referente à hipotenusa. • Demonstrar o Teorema de Pitágoras. • Resolver problemas no plano e no espaço aplicando o Teorema de Pitágoras.	• Obter uma fórmula para calcular a área de um trapézio a partir da sua decomposição. • Relacionar os triângulos obtidos na decomposição de um triângulo rectângulo pela altura referente à hipotenusa e na decomposição de um triângulo por uma das suas medianas. • Na demonstração do Teorema de Pitágoras, recorrer, por exemplo, à decomposição de quadrados. • Fazer uma referência ao recíproco do Teorema de Pitágoras. • Solicitar a determinação da área do hexágono regular e do comprimento da diagonal espacial do cubo e do paralelepípedo.
Trigonometria no triângulo rectângulo • Razões trigonométricas de ângulos agudos • Relações entre razões trigonométricas	• Identificar o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo agudo dado como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo rectângulo. • Estabelecer relações trigonométricas básicas entre o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo agudo. • Resolver problemas utilizando razões trigonométricas em contextos variados.	• Propor a determinação das razões trigonométricas de um dado ângulo agudo por construção geométrica, recorrendo à calculadora ou conhecida uma razão trigonométrica do mesmo ângulo. • A partir das respectivas definições, estabelecer as relações trigonométricas $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ • Propor a determinação de distâncias a locais inacessíveis (como a largura de um rio num certo troço ou a altura de um edifício).

Figura 1 - Exemplo de objetivos específicos relativos a um tópico.

Em conclusão, no que diz respeito ao estrito trabalho de planificação, não desvalorizando outros aspetos que podem servir esta discussão, como a necessidade de autonomia das escolas e dos educadores, para garantir a capacidade de inovação e de intervenção em função da realidade circunstancial do seu grupo de alunos/escola, insisto nesta ideia de que a existência de referências, concretizadas em objetivos específicos, que possibilitem a exequibilidade e equidade na aplicação dos programas é muito importante para a prática de planificação do professor.

À partida, poderá parecer incompatível a existência de objetivos específicos e referências universais, que diminuam o efeito de *modelagem* dos currículos, com a capacidade de autonomia das escolas ou dos professores mas os referenciais de que falo apenas garantem maior objetividade e equidade. A autonomia das escolas ou dos professores está na capacidade de intervenção e implementação de estratégias adequadas à resolução dos problemas que surjam, no decorrer da sua ação – a escola como instituição promotora da educação e o professor como agente ativo e interventivo nessa mesma educação.

Para o êxito desta ação contribui, naturalmente, a formação contínua de professores e a existência, nas organizações escolares, de lideranças que facilitem o trabalho das organizações educativas para que cumpram bem a sua missão. Como afirma num artigo *online* Alves (2011) "Nas organizações escolares é relativamente consensual a vantagem da existência de uma liderança transformacional e inspiradora, que combata a ameaça da balcanização, da desconexão e as múltiplas forças centrífugas." Mas, não é objetivo desta reflexão a discussão deste tema.

A problemática dos Pré-Requisitos

Uma outra questão importante na planificação a curto prazo prende-se com os pré-requisitos e a articulação do Ensino Secundário com o Ensino Básico. A minha experiência como professora é essencialmente no Ensino Secundário e considero o conhecimento do programa de cada ano a lecionar, neste ciclo, tão importante como o conhecimento global do programa do Ensino Secundário para garantir uma abordagem correta das conexões estabelecidas entre os diversos temas. Não menos importante é ter uma perspetiva integradora do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), tomado como referência, de forma a garantir a existência dos pré-requisitos necessários à continuação dos temas do Ensino Secundário. Neste caso, em particular, o Programa do 3º Ciclo.

O Programa do 3º Ciclo está organizado em cinco temas: Números e Operações; Geometria e Medida; Álgebra; Organização e Tratamento de Dados e Capacidades Transversais. Estes temas são apresentados e abordados numa perspetiva de desenvolvimento ao longo dos três ciclos do ensino básico, de forma articulada de modo a perceber a relação e importância dos conceitos e pré-requisitos em cada ciclo de estudos.

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), no 3º Ciclo os temas podem resumir-se do seguinte modo:

- Números e operações.
- Geometria.
- Álgebra.
- Organização e tratamento de dados.

No que diz respeito às capacidades transversais:

- Resolução de problemas.
- Raciocínio matemático.
- Comunicação matemática.

À semelhança do programa do terceiro ciclo, o Programa do Ensino Secundário de Matemática A está organizado, nos três anos do ensino secundário, em quatro grandes temas:

- Cálculo diferencial
- Geometria (no plano e no espaço);
- Funções e sucessões;
- Estatística e probabilidades (com análise combinatória).

No que diz respeito às capacidades transversais:

- Comunicação matemática
- Aplicações e modelação matemática
- História da Matemática
- Lógica e raciocínio matemático
- Resolução de problemas e atividades investigativas
- Tecnologia e matemática

Este resumo evidencia a necessidade de se planificar um conteúdo novo, quase sempre, tendo em conta os pré-requisitos, a par de uma avaliação de diagnóstico (Anexos 5 e 6). Em particular, no anexo 6 mostra-se uma proposta de trabalho que envolve um tema transversal que é a História da Matemática e que exemplifica como os temas transversais podem surgir na planificação. Isto significa que na introdução de um novo conteúdo estão quase sempre presentes um conjunto de conhecimentos e conceitos que constituem pré-requisitos importantes para a sua compreensão. Muitos dos temas desenvolvidos no ensino secundário já foram abordados no ensino básico, como é exemplo o tema — Trigonometria. Quando volta a ser abordado, no 11º ano, precisa de uma planificação que tenha em conta esse facto. Torna-se simultaneamente importante uma abordagem dos pré-requisitos e o diagnóstico dos conhecimentos relativos ao tema para se poder desenvolver este conteúdo programático no 11º ano. Neste caso, do 8º ano: teorema de Pitágoras e do 9º ano: semelhança de triângulos, razões trigonométricas de um ângulo agudo, relações entre as razões trigonométricas de um ângulo e uso da calculadora no cálculo de razões trigonométricas.

Na questão do insucesso escolar em geral, e em Matemática em especial, é frequentemente apontada como uma das causas a falta de pré-requisitos dos alunos. Em relação ao aluno, Fernandes e Silva (1999) citam "Fonseca (1999) … destaca a importância da criança possuir as pré-aptidões e pré-requisitos necessários à aprendizagem, enquanto forma de superar o insucesso". Por isso, a importância da avaliação diagnóstico e de uma postura do professor que podemos chamar de "preventiva", considerando na sua planificação os pré-requisitos essenciais à introdução de novos tópicos a tratar na aula. Assumindo a importância dos pré-requisitos no (in)sucesso dos alunos na Matemática então a planificação a curto-prazo não os pode ignorar se quisermos, à partida, prevenir um dos fatores de insucesso.

Em conclusão, à luz dos programas em vigor, duas questões se impõem: O que planificar? e Como planificar?

As respostas não são imediatas nem independentes mas a experiência permite-me afirmar que planificar de acordo com um currículo apresentado é uma tarefa que exige capacidade crítica sobre esse mesmo currículo, flexibilidade em função das circunstâncias determinadas pela realidade da escola e dos alunos a que se aplica e sentido de responsabilidade, tendo em consideração a importância da disciplina lecionada para o desenvolvimento pessoal e social dos alunos.

Planificar é definir com clareza o que se pretende do aluno, da turma, ou do grupo, é uma atividade que consiste em definir e sequenciar os objetivos do ensino e da aprendizagem dos alunos, determinar processos para avaliar se eles foram bem conseguidos, prever algumas estratégias de ensino-aprendizagem, onde os pré-requisitos não podem ser ignorados, e selecionar recursos/materiais auxiliares.

Planificar implica opções que podem ser facilitadas pelos recursos proporcionados pela escola, pelos manuais adotados, pela definição de objetivos específicos no programa da disciplina lecionada (tomados como referência, garantem uma maior objetividade e equidade) e pela experiência e formação contínua dos professores, com vista a otimização desses mesmos recursos.

Planificar tem em conta, necessariamente, as metodologias a implementar, assunto que constituirá o objeto do segundo ponto desta dissertação.

2. As Metodologias Implementadas

Uma reflexão sobre as Indicações Metodológicas e a prática letiva.

Relativamente às Indicações Metodológicas dos programas de Matemática, já estando aí definidas e fundamentadas, interessa-me sobretudo relatar e discutir as ações que visam operacionalizar essas mesmas metodologias. Os programas de Matemática A e de Matemática B distinguem-se nos conteúdos mas, sobretudo, distinguem-se nas metodologias e no nível de aprofundamento dos conceitos matemáticos tratados. Por isso, nesta reflexão apresento a discussão das metodologias implementadas referindo os programas em separado, embora as ações desenvolvidas em sala de aula possam ser vistas em paralelo.

O programa de Matemática A

A Matemática A é uma disciplina da componente de Formação Específica dos Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias e Ciências Socioeconómicas e lê-se na introdução no seu programa (Silva et al., 2001):

> A componente de Formação Específica destina-se a promover uma formação científica e técnica sólida, no domínio do conhecimento do respectivo curso, em que a Matemática é considerada uma das disciplinas essenciais do domínio do conhecimento respectivo e está concebida de forma a respeitar o princípio de continuidade pedagógica, contrariando a fragmentação e atomização de saberes, facilitando e exigindo uma gestão mais integrada dos programas (p.2).

Destacado este parágrafo, compreende-se que no mesmo programa se apresentem as seguintes Sugestões Metodológicas Gerais:

> As finalidades e objetivos enunciados determinam que o professor, ao aplicar este programa, contemple equilibradamente:
> • o desenvolvimento de atitudes;
> • o desenvolvimento de capacidades;
> • a aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização.
> Tendo como pressuposto ser o estudante agente da sua própria aprendizagem, propõe-se uma metodologia em que:
> • os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;
> • os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;
> • se estabelece maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar conhecimento numa perspetival histórico-cultural.
> Neste contexto, destaca-se a importância das atividades a selecionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir,

> conjeturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação. Cabe ao professor, de acordo com a realidade da turma, encontrar o equilíbrio entre o número de trabalhos individuais, trabalhos de grupo, trabalhos de projeto e atividades investigativas, a realizar dentro e fora da aula, assim como o espaço para a sua própria intervenção: dinamizando, questionando, fazendo sínteses, facultando informação … (p.10).

A principal dificuldade na implementação desta metodologia foi, e é, encontrar o equilíbrio de que fala a última frase desta citação, isto é, encontrar um conjunto equilibrado de atividades diversificadas que deverão ser adequadas a um grupo de alunos. Tal significa que o professor deverá ter a capacidade e a experiência suficiente para discernir o momento mais oportuno para intervir, terá a formação adequada e fará um trabalho de avaliação constante dos resultados, paralelo com a planificação e execução dessas mesmas atividades.

Nestas indicações pressupõe-se ainda que um aluno ao longo da sua escolaridade venha progressivamente a elevar o seu grau de autonomia. Ora, a realidade tem vindo a mostrar-me que muitos alunos chegam ao Ensino Secundário, 10º ano, com falhas ao nível dos conhecimentos (pré-requisitos), fraca autonomia e fraca capacidade de concentração e cooperação. Esta constatação não constitui uma tentativa de culpabilizar os níveis anteriores de ensino para justificar, em última análise, possíveis insucessos e, muito menos, para justificar uma atitude derrotista perante os problemas diagnosticados. Constitui apenas um diagnóstico de problemas que, necessariamente, há que ter em conta para o desenvolvimento de ações/estratégias que permitam resolvê-los ou menorizar os seus efeitos.

A reflexão sobre a pertinência das ações que promovo na minha prática passa necessariamente por alguma reflexão sobre o que é o conhecimento matemático e a construção dos conceitos matemáticos.

Com o objetivo de explicar a construção do conhecimento matemático, o termo compreensão tem sido abordado por vários autores. Domingos (2003) refere, entre outros, Herscovics e Bergeron que apresentam um modelo onde são considerados quatro modos de compreensão: intuitiva, de procedimentos, abstracção matemática e formalização; já Carpenter e Lehrer, mais preocupados com o ensino, consideram que há cinco formas de actividade mental de onde pode surgir a compreensão matemática: construção de relações, prolongar e aplicar o conhecimento matemático, reflexão sobre experiências, comunicar o que sabemos e desenvolver um conhecimento matemático próprio.

Sobre a construção dos conceitos matemáticos Domingos (2003) destaca as teorias cognitivas de Anna Sfard, David Tall, Ed Dubinsky e Shlomo Vinner, pelo seu contributo para a compreensão da construção dos conceitos matemáticos. Sfard sobre a dupla natureza dos conceitos matemáticos e a teoria da reificação, Tall sobre a transição do pensamento processual para o pensamento conceptual, Dubinsky sobre a teoria APOS (*actions, processes, objects, schemas*) e Vinner principal impulsionador das noções de conceito definição e conceito imagem.

Em todas elas procura-se perceber como são construídos os conceitos matemáticos e como se manifesta a sua compreensão. Assim a problemática dos pré-requisitos, por exemplo, encontra razão de ser à luz de qualquer uma destas teorias, na medida em que para todas elas os conceitos matemáticos são construídos de forma dependente de outros conceitos matemáticos. Portanto, o conhecimento matemático evolui seja de forma sequencial como defende a teoria da reificação de Sfard ou a conceção proceptual dos conceitos matemáticos de Tall, seja como resultado da ação entre dois tipos de conceitos, o conceito definição e o conceito imagem, segundo Vinner. Como refere Domingos (2003)

> Parece claro que para Vinner o processo de formação dos conceitos assenta numa acção recíproca entre o conceito definição e o conceito imagem (p. 30).
>
> (…)
>
> A teoria da reificação dá-nos uma explicação bastante completa da forma como podemos conceber os objectos matemáticos, tendo como pressuposto a existência de uma concepção operacional antes de uma concepção estrutural. As fases da interiorização, condensação e reificação mostram-nos um percurso que agrega os objectos e processos em unidades cada vez mais compactas até se tornarem num novo objecto matemático (p. 344).
>
> (…)
>
> Da mesma forma Tall admite que os novos conceitos são formados a partir de uma sequência que tem início na realização de procedimentos que vão evoluindo para se tornarem processos e por fim proceitos. Esta evolução traduz-se numa sofisticação cada vez maior, terminando na capacidade de pensar sobre um dado conceito simbolicamente (p. 344).

Para um teórico do ensino e investigador, estas questões são fulcrais, para um professor do ensino básico ou secundário também são importantes pois permite-lhe compreender o processo ensino aprendizagem de forma mais aprofundada e ter uma assim uma postura crítica informada. Contudo, na sua prática, porque está sujeito ao currículo prescrito e apresentado e porque faz parte de um conjunto de organismos, que constitui o sistema de ensino, importa corresponder aos objetivos aí apresentados e às metas propostas pelos organismos escolares onde está inserido. É, por isso, importante o uso da margem de autonomia possível e o seu próprio desenvolvimento pessoal e profissional para encontrar respostas para os desafios e problemas que encontra.

Assim, no que diz respeito às metodologias implementadas, optei por ser "cautelosa" aliando a procura de formação adequada às minhas necessidades (Anexo 7) à prática curricular, de acordo com as orientações do programa, mas de forma crítica, tendo em conta o progresso e resposta dos alunos em termos de resultados práticos. Por resultados práticos entendo os níveis de motivação e interesse pelos conteúdos lecionados e os níveis de sucesso na avaliação interna e externa. As ações de formação que frequentei permitiram, entre outros aspetos a salientar, uma atualização na área da utilização dos recursos tecnológicos e de comunicação no processo ensino-aprendizagem.

Tendo presente a avaliação resultante do progresso dos alunos, reservando a necessária flexibilidade, determinada pelas circunstâncias, especificidades dos temas abordados e das características do grupo de alunos, segui as sugestões metodológicas usando uma estratégia que passa pela implementação de várias **Ações**, tidas como objetivos operacionais, no desenvolvimento de cada tema programado e que se podem resumir nos seguintes pontos, não necessariamente sequenciais ou hierarquizados:

- promover os pré-requisitos, sempre que necessário;
- introduzir conceitos a partir de exemplos, contextualizados ou não, se adequado;
- apresentar exemplos diversificados (não esquecendo o papel dos contraexemplos);
- efetuar demonstrações, questionar sobre conclusões e elaborar sínteses;
- propor exercícios de aplicação, com enunciados breves, de resolução curta ou resposta breve, isto é, de aplicação direta dos conceitos, fórmulas ou propriedades;
- propor tarefas que envolvam a resolução de problemas e atividades de interpretação, com enunciados elaborados, que impliquem a pesquisa ou seleção de dados, a elaboração de esquemas ou gráficos e estratégias de resolução e organização;
- utilizar instrumentos diversos de apoio às tarefas propostas.

Promover os pré-requisitos, sempre que necessário permite uma rápida avaliação diagnóstico, em tempo de aula, relativamente ao domínio dos conceitos necessários para o desenvolvimento do tópico programado. Simultaneamente, permite uma revisão de conceitos importantes, facilitando o desenvolvimento de outros, e a recuperação de conhecimentos para os alunos que, por algum motivo, não os adquiriram.

Tomando como exemplo a introdução dos tópicos sobre Trigonometria, no 11º ano, integrado no tema “Geometria no Plano e no Espaço II”, em Matemática A, como a “Resolução de problemas que envolvam triângulos”, é necessário rever e retomar os conceitos já tratados no 9º ano: Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, razões trigonométricas de um ângulo agudo, seno, cosseno e tangente, algumas fórmulas trigonométricas e cálculo de razões trigonométricas recorrendo à calculadora. Esta abordagem permite rever e reforçar conceitos, eventualmente esquecidos, preparando assim os alunos para a resolução de problemas mais complexos como os previstos no desenvolvimento do tema no 11º ano.

Tem ainda a intenção de evitar resultados negativos para a autoestima e motivação dos alunos quando se adota argumentos como "Isto já foi dado no 9º ano" ou "Já deviam saber isso dos anos anteriores". Percebe-se quando ouvimos comentários dos alunos como "Não me lembro de dar isso" ou "Nunca percebi disso" que é mais profícuo partir do princípio que é sempre possível recuperar um assunto e discuti-lo do que culpabilizar alguém ou sujeitar os alunos à constatação de que não sabem ou que nunca vão perceber porque já deviam saber. Transmite-se a imagem de que estamos do lado da solução e não do problema quando a abordagem começa por esclarecer um assunto que podia estar apenas esquecido, nunca tinha sido compreendido ou, simplesmente, nunca tinha sido abordado, sem necessidade de apurar responsabilidades e mitigando culpas. É, por isso, uma atitude que coloca o professor do lado do aluno, conseguindo com isso maior probabilidade de obter a sua colaboração.

Introduzir conceitos a partir de exemplos, contextualizados ou não, se adequado, é muitas vezes útil pois é uma forma de concretizar, focando assim a atenção dos alunos, mas requer cuidado para evitar más interpretações ou más práticas. Entenda-se por más interpretações as falsas conclusões ou falsas generalizações e por más práticas as que se limitam aos exemplos sem valorizar a necessidade da demonstração ou da abstração. Coloca-se aqui um problema – devemos sempre partir da abstração para o concreto ou do concreto para a abstração? Os exemplos contextualizados são sempre necessários ou úteis?

Roldão (2000) afirma:

> Parece hoje caminhar-se para o reconhecimento de que o desenvolvimento da cognição constitui um processo de permanente interacção entre concreto e abstracto, evoluindo em complexidade e articulação, mas que está longe de poder diluir-se numa sequência hierárquica em que as categorias abstractas só operariam nos níveis mais avançados de formalização (p. 6).

Esta afirmação, fundamentada ao longo do desenvolvimento do seu artigo, vai ao encontro daquilo que a experiência tem vindo a demonstrar-me. No ensino secundário, que é o âmbito desta reflexão, ambas as abordagens são possíveis dependendo do tema a tratar. Existem temas como a "Introdução à Programação Linear" que, neste nível, só pode ser abordado a partir de exemplos, existem outros como o "Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço" cuja aplicação na Física, por exemplo, na determinação do trabalho realizado por uma força, pouco ou nada ajuda na introdução da definição desta operação entre vetores. Não deverá um aluno do secundário "aceitar" que a definição de uma operação não necessita de um exemplo ou aplicação prática como ponto de partida? Será que este exemplo facilita a sua compreensão?

Se é certo que um problema de Física contextualiza a aplicação do produto escalar, também é certo que o conceito de trabalho enquanto grandeza física cuja unidade é o *joule* já é em si bastante abstrato. Senão, basta ver a definição de *joule*: "Um *joule* é o trabalho realizado por uma força de um newton quando desloca o seu ponto de aplicação um metro na sua própria direção."[1]. Para introduzir a definição de produto escalar de dois vetores já implica conhecer o conceito de vetor, norma de um vetor, ângulo de dois vetores e cosseno de um ângulo. Se na introdução desta definição começarmos por usar um exemplo que envolve conceitos também eles bastante abstratos, o uso desta contextualização aumenta a complexidade da atividade cognitiva e a necessidade de articulação do conceito matemático com o conceito físico. Tal não significa que não deva ser referido como um exemplo de

[1] Infopédia, Enciclopédia e Dicionários Porto Editora

aplicação da Matemática num contexto concreto. Neste caso, quando num problema de Física surge a necessidade de usar o produto escalar, a articulação é feita. A operação pode ser reconhecida e entendida como instrumento de cálculo cuja aplicação se evidencia, em particular, na determinação do trabalho realizado por uma força, em certas condições. Portanto, o exemplo contextualizado, como ponto de partida, nem sempre representa uma boa estratégia para a compreensão do conceito. Ao nível do ensino pré-universitário, como são os alunos de Matemática A, atrevo-me a defender que o ponto de partida não seja sempre o exemplo (com ou sem contextualização).

Apresentar exemplos diversificados (não esquecendo o papel dos contraexemplos) evita conclusões ou generalizações erradas pois é frequente os alunos pensarem que os exemplos justificam os métodos ou as conclusões. Para definir o que é uma função racional é tão importante mostrar exemplos de funções racionais como é mostrar exemplos de funções não racionais. Também é importante que os alunos reconheçam o poder do contraexemplo nas generalizações "precipitadas". O exemplo não demonstra, ilustra, o contraexemplo demonstra que determinada generalização não é válida. Quando na sequência de vários exemplos que parecem conduzir às mesmas conclusões os alunos começam a perguntar "Isso é sempre assim?" então é porque começam a perceber o papel do exemplo e a necessidade da demonstração.

Com o mesmo objetivo de clarificar os conceitos e justificar os métodos, a apresentação de exemplos diversificados cria no aluno a necessidade de pensar no significado do que está a fazer e pode contrariar a tendência de resolver mecanicamente os exercícios ou as tarefas propostas.

Um exemplo, voltando a falar do tema Trigonometria do 11º ano em Matemática A, é na resolução das equações trigonométricas elementares do tipo $sin(x)=a$; $cos(x)=a$ e $tan(x)=a$, com a número real, onde é importante começar por encontrar uma solução particular, visualizar o círculo trigonométrico e ter em conta como variam as razões trigonométricas ao longo dos quadrantes.

Numa fase inicial, quando se pede para resolver equações como $sin(x)=-\frac{1}{2}$ ou $tan(x)=-\sqrt{3}$ cujas soluções particulares são $-\frac{\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{3}$, respetivamente, facilmente os alunos generalizam e na equação $cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ concluem que a solução particular é $-\frac{\pi}{4}$, esquecendo que o cosseno de um ângulo do 4º quadrante é positivo e que a solução particular é $\frac{3\pi}{4}$, solução do 2º quadrante, onde o cosseno é negativo.

Este caso ilustra a necessidade de se explorarem exemplos diversificados para se consolidar a aplicação dos conceitos e propriedades. O facto dos alunos se confrontarem com um exemplo que não encaixa naquilo que parecia ser uma regra leva-os a "repensar" as conclusões, isto é, leva-os a revisitar os conceitos e as propriedades associados às razões trigonométricas e ao círculo trigonométrico. O erro não terá efeito negativo se for entendido como um estímulo para a reflexão. Neste caso, consolidam-se com exemplos diversificados os conhecimentos sobre a resolução de equações trigonométricas elementares.

Efetuar demonstrações, questionar sobre conclusões e elaborar sínteses é indispensável para a aquisição de conhecimentos, técnicas para a sua mobilização e para o desenvolvimento das capacidades de análise e síntese, contribuindo assim para uma melhor estruturação dos conhecimentos.

É frequente encontrar alunos que na abordagem inicial de um tópico revelam bom desempenho na aula, participando de forma ativa nas tarefas propostas, de construção de resultados ou descoberta de resultados, mostrando capacidade de resolução das tarefas, num nível básico do desenvolvimento de um tema ou aplicação de conceitos, mas que vão piorando, em termos de desempenho, à medida que se exige progressivos níveis de rigor e formalização. Estes alunos, normalmente, não atingem tão bom desempenho nos testes escritos. Tal não significa que as tarefas propostas nos testes sejam diferentes do que é proposto na aula. Significa que, por exemplo, a visualização de um gráfico pode ajudar a perceber o conceito de função injetiva mas, em rigor, não é suficiente. É importante que os alunos percebam que não podemos afirmar que uma função de domínio IR, por exemplo, é injetiva só por visualização do seu gráfico na calculadora já que não é possível visualizar todo o seu gráfico. Embora, reciprocamente, se possa afirmar que não é injetiva se parte do seu gráfico mostrar que não o é. Estes alunos têm, muitas vezes, dificuldade em perceber a necessidade da demonstração analítica e aceitam o exemplo como método demonstrativo. A experiência mostra-me que nestes alunos parece falhar a sistematização/estruturação dos conhecimentos e que ficam "perdidos" fora do âmbito da experimentação ou da visualização do concreto, quando se trata de aplicar conhecimentos em âmbitos mais complexos ou abstratos. Nestes casos, torna-se necessário trabalhar com os alunos exercícios onde a necessidade da demonstração e da abstração prevaleçam ou tendam a prevalecer.

Propor exercícios de aplicação, com enunciados breves de resolução curta ou resposta breve, isto é, de aplicação direta dos conceitos, fórmulas ou propriedades permite uma abordagem objetiva da aplicação de um conceito que é recente para os alunos e que, num contexto mais alargado, porque mais complexo, como o da resolução de problemas, pode perder-se. São exemplo os exercícios de escolha múltipla ou exercícios onde se pede simplesmente, por exemplo, "Resolve a equação…".

Retomando o exemplo do tópico "Resolução de equações trigonométricas elementares", se estamos numa fase onde o objetivo é apenas aprender a resolver estas equações, os exercícios mais elementares permitem focar o aluno nesse objetivo. O exercício: "Indica as soluções da equação $cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, no intervalo $[0, 2\pi[$." é um exercício que como outros do mesmo tipo, envolvendo o seno e a tangente, constituem exercícios de rotina e que têm pertinência. Passo a explicar:

A abordagem deste tópico, a resolução das equações trigonométricas, faz-se partindo da discussão de casos particulares, dos quais se conhecem soluções particulares. Com o apoio da visualização do círculo trigonométrico, desenvolve-se questionando os alunos com perguntas como "Quantas soluções existem em $[0, 2\pi[$?", "Quantas soluções existem em IR?" e espera-se que os alunos consigam concluir qual a expressão geral das suas soluções, embora para a maioria seja necessário recordar que "a um ângulo com o mesmo lado origem e mesmo lado extremidade correspondem infinitas amplitudes". Só depois se generaliza explicando e apresentando a forma geral das soluções. Este processo é feito para cada tipo de equação. Seguem-se deste modo as indicações metodológicas do programa mas verifico que sem a rotina de resolução de vários exercícios os alunos têm dificuldade em consolidar esses conhecimentos, comprometendo o seu desempenho em situação de avaliação.

Por outro lado, para o aluno que já compreendeu o círculo trigonométrico e resolve com êxito as equações trigonométricas é expetável que numa fase mais avançada da prática deste tópico deixe de necessitar de recorrer à visualização do círculo trigonométrico para resolver as equações trigonométricas. Compreendeu e interiorizou a expressão geral das soluções de cada uma delas e usa com sucesso esse conhecimento, em contextos diversos. Atingiu um nível superior de rigor e formalização.

Propor tarefas que envolvam a resolução de problemas e atividades de interpretação, com enunciados elaborados, que impliquem a pesquisa ou seleção de dados, a elaboração de esquemas ou gráficos e estratégias de resolução e organização constitui o tipo de tarefas que são fundamentais para se atingirem os objetivos gerais propostos no programa pois permite a promoção dos conhecimentos e técnicas adquiridos em atividades com maior nível de complexidade mas também, inversamente, como ponto de partida para a introdução de conceitos. Vejamos dois exemplos:

No tema Probabilidades e Combinatória, no 12º ano, no tópico Cálculo Combinatório e Problemas de Contagem são exemplos deste tipo de atividades as composições matemáticas como a do enunciado seguinte, que normalmente proponho aos meus alunos e que foi uma questão de um exame nacional:

" Considere o seguinte problema:

Utilizando os cinco algarismos do número 41123, quantos números podem ser formados?

${}^{5}C_{2} \times 3!$ e ${}^{5}A_{3}$ são duas respostas corretas.

Numa pequena composição com cerca de dez linhas, explique o raciocínio que conduziu a cada uma dessas respostas."

Uma resposta possível para este problema é:

" ${}^{5}C_2$ é o número de maneiras de escolher a posição dos dois algarismos “1” na sequência de cinco algarismos. 3! é o número de escolher a posição dos três algarismos diferentes nos restantes três lugares (permutações de 3 elementos). O número total de escolhas é dado pelo produto ${}^{5}C_2 \times 3!$.

${}^{5}A_2$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente nos cinco lugares a posição dos três algarismos diferentes. A posição dos dois algarismos “1” fica univocamente determinada."

Neste caso, este tipo de atividade só faz sentido numa fase final do desenvolvimento do tópico em referência porque envolve vários conceitos, relações e a capacidade de comunicação, mostrar/demonstrar, na explicação do raciocínio subjacente a cada resposta. É o tipo de questão a que se recorre num teste ou na aula quando se pretende avaliar ou trabalhar o conhecimento matemático num nível mais complexo onde se relacionam vários conceitos e capacidades.

Já para a introdução de um conceito, por exemplo, "derivada de uma função num ponto" (taxa de variação num ponto) pode propor-se uma tarefa de investigação interdisciplinar, com o recurso à calculadora e ao CBR como a apresentada no Anexo 3. É uma tarefa, normalmente realizada a pares ou pequenos grupos (três ou quatro alunos), onde se recorre à experimentação e onde a análise e discussão dos resultados é a atividade fulcral para chegar ao conceito de derivada num ponto. Os objetivos da tarefa são:

- Definir a derivada num ponto e interpretar o seu significado físico e geométrico.
- Interpretar gráficos posição-tempo que traduzam situações reais e, a partir deles, estimar e determinar valores de velocidade.
- Analisar situações reais, sob o ponto de vista da conservação da energia mecânica.

Esta tarefa tem por base a recolha e tratamento de dados relativos à posição-tempo de um corpo que se desloca livremente sobre uma rampa. Recorrendo ao CBR, à calculadora gráfica e a um conjunto de questões proporciona-se vários tipos de atividades: experimentação porque se baseia numa experiência real; modelação porque se faz uso da calculadora para procurar um modelo matemático adequado aos resultados experimentais; interpretação e síntese porque os alunos são questionados sobre os resultados e as conclusões. Poderíamos dizer que apresentamos um problema que consiste em “Matematizar situações reais” (Abrantes, 1988, p.10), onde como afirma Abrantes (1988)

> Classificar estes problemas como *problemas da vida real* não significa que eles tenham que abordar situações que surgem obrigatoriamente no dia-a-dia ou nas futuras profissões dos alunos. Usa-se aqui um critério ditado pela natureza do problema, das tarefas que se propõem aos alunos e das aptidões que estes poderão desenvolver (p. 10).

Utilizar instrumentos diversos de apoio às tarefas propostas pode ser a simples utilização do papel e lápis, a utilização da calculadora gráfica para procurar, investigar, avaliar ou verificar resultados ou de *software* como o programa de matemática dinâmica GeoGebra.

O papel e lápis, a utilização da régua, do transferidor e de materiais manipuláveis, em geral, não são dispensáveis nem substituíveis pela utilização das tecnologias. Têm importância no desenvolvimento de competências (motoras, inclusive) como a representação de objetos tridimensionais no plano e, inversamente, na interpretação de dados relativos a esses objetos quando representados em perspetiva. Constato que os exercícios de representação em perspetiva de sólidos geométricos, no 10º ano, têm sido especialmente úteis para a resolução de tarefas mais exigentes como as de desenhar secções obtidas por interseção de planos nesses mesmos sólidos.

Paralelamente, a utilização das novas tecnologias como a calculadora gráfica e o computador, com as suas diversas aplicações, podem ser um aliado precioso no ensino, quando usados de forma adequada e com um objetivo claro. Por exemplo, para compreender o conceito de logaritmo e as suas regras operatórias a calculadora tem pouca utilidade mas para estudar a função logaritmo e resolver problemas em contexto, onde visualizar, investigar, testar e encontrar soluções não dispensa métodos gráficos, é um instrumento valioso do ponto de vista técnico e pedagógico.

Do mesmo modo, o *software* de matemática dinâmica como o GeoGebra que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo, constitui também um recurso interessante. Por um lado, possui todas as ferramentas tradicionais de um *software* de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e secções cónicas. Por outro lado, podem ser inseridas equações e coordenadas diretamente. Assim, tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

O programa de Matemática B

O programa de Matemática B foi homologado em 22/02/2001, destinado aos Cursos Tecnológicos e, posteriormente, de acordo com o Ofício Circular nº 19 de 23/06/2004, ao Curso Cientifico-Humanístico de Artes Visuais.

Lecionei este programa ao curso Tecnológico de Informática, 11º e 12º ano, em 05/06 e 06/07, mas nos últimos anos, na escola onde leciono, os cursos tecnológicos foram substituídos pelos cursos profissionais, pelo que continuei a lecionar o programa no curso de Artes Visuais, nem sempre em continuidade pedagógica.

Sobre a implementação deste programa partilho a opinião da Associação de Professores de Matemática, (APM, 2007), *Parecer sobre a implementação do programa de Matemática B*. Neste parecer encontra-se uma análise relativa a seis aspetos: (1) adequação da distribuição horária pelas diferentes unidades do programa; (2) adequação das metodologias e atividades propostas no programa: face aos conteúdos programáticos, nomeadamente quanto à operacionalização da componente prática e/ou experimental, face à conceção de estratégias e à produção de instrumentos de avaliação do desempenho dos aluno, face às condições e recursos existentes nas escolas; (3) grau de aprofundamento proposto para os conteúdos, considerando o nível de ensino e a finalidade do curso em que a disciplina está inserida e os objetivos do programa; (4) adequação da modalidade de avaliação externa (exames nacionais) a este programa (no seu todo e em cada uma das suas unidades); (5) descrição e balanço do envolvimento da Associação de Professores de Matemática no processo de elaboração e avaliação do Programa; (6) pontos fortes e pontos fracos do processo de elaboração e avaliação dos programas da Reforma do Ensino Secundário e destacam-se ainda algumas observações finais.

No essencial, considera-se que é um programa adequado aos cursos tecnológicos, apesar das dificuldades apontadas na sua implementação, mas o curso de Artes Visuais poderia ter outro programa, por exemplo, o programa de Matemática do Ensino Artístico. Apesar da disciplina de Matemática B, neste curso, ser uma de três opções possíveis em conjunto com as disciplinas de História da Cultura e das Artes e Geometria Descritiva, considerando o currículo deste curso e o perfil dos alunos que aí se encontram, cujo interesse pelo estudo desta disciplina é a exceção e não a regra, poderia ser mais motivador e útil para a formação destes alunos um programa da disciplina de Matemática como o do Ensino Artístico. Só se entende que persista pela existência do exame nacional que pode eventualmente possibilitar o acesso a um curso de carácter mais técnico-científico.

No programa desta disciplina é dado especial enfoque à tarefa como ponto de partida para a atividade matemática e para o uso de conceitos em contexto. Ora, na introdução de um conceito, um grupo de alunos com motivação, autonomia e sem problemas de falta de pré-requisitos pode apreciar e ser bem sucedido com um trabalho, por exemplo, de carácter investigativo mas, considerando as caraterísticas dos alunos com quem tenho vindo a trabalhar (pouco motivados, com pouca autonomia ou falta de pré-requisitos), este tipo de tarefa pode ser pouco produtiva e até frustrante porque o aluno não tem as capacidades ou os conhecimentos necessários para a desenvolver. Por isso, torna-se uma tarefa inútil para o processo ensino-aprendizagem e potencialmente desmotivadora se os alunos não estiverem preparados para a realizar.

Neste caso, a intervenção inicial do professor, com revisão dos conceitos essenciais, seguida da introdução dos conceitos pretendidos com acompanhamento de tarefas mais simples, faz com que a proposta de tarefas que impliquem progressivamente maior autonomia se torne mais eficaz. Este é, afinal, o papel do professor – adequar as estratégias e metodologias às características do seu grupo de alunos.

Assim, o diagnóstico e o reforço dos conhecimentos essenciais para a aplicação dos conceitos na resolução de problemas, a experimentação e o uso das novas tecnologias, como a calculadora gráfica, constituem a estratégia e os instrumentos essenciais da metodologia aplicada.

No Programa de Matemática B, as **ações** que prevalecem são:

- promover dos pré-requisitos, se necessário;
- introduzir conceitos a partir de exemplos contextualizados;
- propor tarefas que envolvam a resolução de problemas e atividades de interpretação, com enunciados elaborados, que impliquem a pesquisa ou seleção de dados, a elaboração de esquemas ou gráficos e estratégias de resolução e organização;
- utilizar instrumentos diversos de apoio às tarefas propostas.

As ações desenvolvidas com vista à implementação das metodologias para lecionar o Programa de Matemática B não diferem muito das do Programa de Matemática A. A diferenciação está no aprofundamento dos conteúdos, em termos de conhecimento matemático. Por isso, os exercícios de cálculo algébrico e de demonstração analítica têm pouco relevo.

Por exemplo, para determinar os extremos de uma função real de variável real um aluno de Matemática A deve saber resolver o problema analiticamente, em contexto ou não, usa as regras da derivação para determinar a função derivada, calcula os zeros da derivada, a partir dos zeros da função derivada e do domínio de validade da função, constrói um quadro onde relaciona o sinal da derivada com a monotonia da função e conclui, calculando os extremos na função de acordo com a análise da variação da monotonia da função. Se o problema for contextualizado, deverá ainda adequar a resposta e saber traduzir o resultado matemático para o significado no contexto do problema. Um aluno de Matemática B não precisa de conhecer as regras de derivação para determinar os extremos de uma função, nem é lecionada a noção de função derivada. Os problemas deste tipo são simples, em contexto, envolvendo extremos de funções racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, que são apresentadas como modelos matemáticos do contexto apresentado. O aluno deve apenas reconhecer numérica e graficamente a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia da função, a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função e usar a calculadora gráfica ou uma folha de cálculo para encontrar a ou as soluções. Um exemplo deste tipo de tarefas está ilustrado no Anexo 11.

Roldão (2000) afirma:

> (…) as dimensões associadas ao pensamento concreto e ao pensamento abstracto não podem ser apenas entendidas como fases sequenciais no processo do desenvolvimento cognitivo. Antes a abstracção, nas suas várias modalidades, constitui o elemento de atribuição de sentido a toda a realidade concreta e observável desde as formas mais simples de apreensão do real até às mais elaboradas. O que constitui efectivo crescimento e amadurecimento cognitivo será antes a capacidade de articular, em níveis cada vez mais complexos, elaborados e críticos, estas duas dimensões (p. 8).

À luz desta perspetiva, na distinção dos programas de Matemática A e B estará na capacidade de articular, em níveis mais complexos as duas dimensões associadas ao pensamento concreto e ao pensamento abstrato. Por mais aprofundado podemos então entender um nível mais complexo de articulação destes dois pensamentos.

Em resumo, na Matemática A ou B pressupõe-se a implementação de metodologias que promovam o desenvolvimento de capacidades como as de análise, síntese, organização e fundamentação das respostas, onde as tarefas propostas se baseiam em ações que proporcionem a abordagem dos conceitos sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização. Embora, no programa de Matemática B o nível de aprofundamento e formalização dos conhecimentos matemáticos seja inferior.

A problemática da comunicação

Também a importância da comunicação na aula de Matemática, como em qualquer outra, é indiscutível e determina a dinâmica de uma aula. Ponte et al. (1997) afirmam:

> Esta comunicação desenvolve-se com base na utilização de diversos tipos de materiais, bem como de diferentes modos de trabalho e na gestão do espaço e do tempo realizada pelo professor. Finalmente, o ambiente de aprendizagem e a cultura da sala de aula são elementos decisivos na aprendizagem. É na interação dos indivíduos uns com os outros que se desenvolvem as capacidades cognitivas e se promovem as atitudes e valores indicados pelas orientações curriculares (p.72).

Para caraterizar a minha prática, enquanto dinâmica que desenvolvo na aula de Matemática com os meus alunos, diria que não se enquadra necessariamente num dos dois retratos, a propósito da comunicação matemática, (Ponte et al., 1997, p. 72):

> Toca para a entrada. Faz-se a chamada. Discute-se o trabalho de casa. Resolvem-se alguns exemplos no quadro. Passa-se o trabalho para casa. O professor tira algumas dúvidas. Toca para a saída.
>
> (David Johnson, 1982. *Every Minute Counts*)
>
> É interessante salientar o interesse demostrado pelos alunos na realização dos seus trabalhos, dada a sua presença na sala de aula e participação na organização desta antes do toque da entrada (...) Encontravam-se dois grupos a trabalhar nos computadores enquanto os seus colegas trabalhavam na sala de aula (...) Como nem o Miguel nem a Dora sabiam quais os comandos necessários a introduzir para a impressão, a Dora virou-se para o outro grupo e disse “Sérgio estamos a precisar de ti” (...) Passado algum tempo, a professora surgiu na sala dando algumas orientações. Entre elas sugeriu ao grupo da Dora a outra parte do trabalho. Enquanto isso, o grupo do Pedro utilizava a máquina calculadora para fazer alguns cálculos. Achei interessante quando a professora se dirigiu ao Sérgio e perguntou: “Amanhã estás cá? Dás apoio?” Além de mostrar uma certa continuidade extra-aula no trabalho, denota por parte da professora confiança nos seus alunos, evidenciando-se um bom relacionamento professor-aluno para além de uma certa autonomia por parte dos alunos.
>
> (Registo de um observador, incluído em Paulo Abrantes, 1994. *O Trabalho de Projecto e a Relação dos Alunos com a Matemática*)

Se a primeira é pobre e evidência um papel pouco ativo por parte dos alunos a segunda evidência um papel ativo por parte dos alunos mas num ambiente que parece estar mais ligado a um projeto e não à realidade da generalidade das salas de aula das escolas portuguesas. Pressupõe um conjunto de fatores como as condições materiais e humanas da escola e o contexto social em que se insere que, à partida, é difícil de garantir.

Desejavelmente, podemos caminhar para ambientes como estes. Integro um projeto na escola onde leciono, "Sala de Estudo" (Anexo 8), uma sala aberta a todos os alunos que a queiram frequentar, para realizarem tarefas individuais ou de grupo, num horário pré-estabelecido, onde vários professores, de várias áreas disciplinares, estão disponíveis para prestar apoio aos alunos que o solicitem ou a quem foi recomendado a sua frequência. Este é um ambiente possível na escola onde exerço e onde se constata que a maior parte dos alunos que procuram a sala de estudo o fazem por autoiniciativa e não necessariamente por terem insucesso.

Exemplo sobre a importância da comunicação matemática numa aula

A propósito da *decomposição de expressões* recorrendo ao algoritmo da divisão para se obter as funções na forma $f(x)=a+\dfrac{b}{cx+d}$ e assim justificar a existência da assíntota horizontal do gráfico, $y=a$, é importante recordar a divisão inteira de polinómios e, em particular, a equivalência $D=d\times Q+R \Leftrightarrow \dfrac{D}{d}=Q+\dfrac{R}{d}$. Para ilustrar como na minha prática a comunicação pode determinar o tipo de dinâmica na aula apresento o relato de como é introduzido o tópico em referência.

É interessante observar a reação dos alunos quando começo por perguntar à turma "Lembram-se da divisão inteira, no 1º ciclo?", "Na divisão inteira, qual a relação entre o dividendo, o divisor, o quociente e o resto?".

As reações são diversas. Alguns ficam hesitantes, percebe-se pelos comentários/perguntas, "As contas de dividir?", que estão a descodificar o significado dos termos que usei. Outros, de imediato confessam "Nunca entendi isso!". Outros, normalmente mais expectantes, já esperam uma consequência ou relação com o assunto entretanto anunciado no sumário.

Para recuperar a atenção, posso dizer "Vamos fazer uma visita ao 1º ciclo" e ocupamos os próximos minutos, em grande grupo (turma) a falar sobre o significado da divisão inteira. Partimos, por exemplo, da divisão de 11 por 2 e para os que "Nunca entenderam isso" concretizo: "Se tiver 11 moedas de 1 euro e quiser dividir em partes iguais por 2 pessoas, quantas cabem a cada uma?". Existem sempre respostas diversas e estratégias diversas, há quem use a calculadora, ou não, e responda "5,5 €", há quem rapidamente responda que "Não dá conta certa", há quem mentalmente consiga encontrar a resposta e diga "Dá 5 a cada uma e sobra 1." e, provavelmente, há um, normalmente classificado de engraçadinho mas apenas com desejo de participação, que dirá "Eu fico com o resto".

Neste nível de ensino dificilmente haverá alguém que faça um esquema que ilustre o raciocínio mas eu convido alguém a fazê-lo no quadro, com bolinhas, por exemplo. Com sorte, alguém se lembra do algoritmo e é convidado a vir ao quadro ajudar os colegas a recordá-lo. Se não, começo por fazer o esquema e depois explico o algoritmo, apoiada nesse esquema. Algo no género, como o apresentado na figura 2:

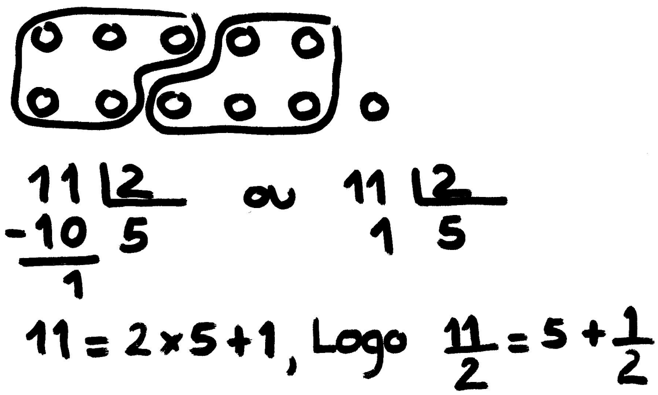


Figura 2 - Esquema recorrendo a conjuntos e algoritmo da divisão inteira.

Se não houver alguém que pergunte por algum caso mais difícil (para ele), pergunto eu "Qual o quociente e o resto a divisão inteira de 94 por 3?" e repetimos o processo. Só o algoritmo pois ninguém se atreve a desenhar 94 bolinhas.

Identificando o dividendo, o divisor, o quociente e o resto, estamos prontos para generalizar a relação $D = d \times Q + R$ e demonstrar a equivalência $D = d \times Q + R \Leftrightarrow \dfrac{D}{d} = Q + \dfrac{R}{d}$.

Poderíamos pensar que a bordagem é, de certo modo, infantil por recorrer a conceitos trabalhados em ciclos do ensino básico e que estariam, supostamente, já compreendidos. Esta introdução podia ser dispensada e recorrer-se diretamente à divisão inteira de polinómios mas normalmente verifico que, para a generalidade dos alunos, é necessária até para ajudar recordar o conceito de divisão inteira e, em particular, o algoritmo da divisão inteira de polinómios, assunto tratado no 10º ano. Deste modo, derrubam-se alguns obstáculos, conhecidos por falta de pré-requisitos. Quando a relação professor aluno é de confiança, os alunos sabem que neste tipo de diálogo, as perguntas e as estratégias têm um propósito e definem, de certo modo, o estilo do professor. Nas minhas aulas "fazemos visitas aos outros ciclos de ensino", sem complexos. Vale a pena ouvir comentários como "Finalmente percebi por que se fazia isso!".

Escolhi este exemplo porque me pareceu importante sublinhar que também se podem gerar dinâmicas de aprendizagem significativas com o uso da comunicação direta professor/aluno ou aluno/aluno, tendo como suporte material apenas o quadro e o giz. Deste modo, destaca-se a importância da comunicação no envolvimento dos alunos no processo ensino-aprendizagem, mostrando que a eficácia dos métodos está mais dependente da comunicação estabelecida entre os protagonistas do que dos suportes tecnológicos só por si.

Seria expetável que a implementação dos novos currículos, o uso de novas tecnologias e a formação de professores contribuísse para a melhoria dos resultados dos alunos em Matemática. Contudo, continuamos a assistir a elevados níveis de insucesso nesta disciplina e a dificuldades crescentes da resolução deste problema à medida que o nível de escolaridade avança, nomeadamente, no ensino secundário.

Crato (2009) refere:

> Nos últimos anos, em resultado de um debate muito alargado e em consequência de enormes progressos das ciências cognitivas e da psicopedagogia, começam a emergir algumas soluções e alguns consensos. Sabe-se melhor como a nossa mente forma a noção de número. Reconhecem-se vantagens nos automatismos e na memorização. Percebe-se que o raciocínio e a memória não são realidades mentais opostas. Questiona-se o papel ubíquo dos exemplos e reabilita-se a importância da abstração. Conhecem-se as vantagens de um ensino ativo, mas sabe-se que não se pode abandonar a transmissão estruturada de conhecimentos (p. 1).

O conhecimento matemático e os objetivos gerais, em termos capacidades e atitudes, que se apresentam nos programas para serem atingidos, pela generalidade dos alunos, no tempo programado pelos próprios currículos, não dispensa a aquilo que Nuno Crato chamou a "*transmissão estruturada de conhecimentos*", o que me faz crer que uma grande vantagem do ensino está em "não ter que reinventar a roda para perceber as leis físicas que explicam o funcionamento da roldana". Tal posição, contudo, não contradiz a importância de tarefas que proporcionem aos nossos alunos um lugar ativo no processo ensino-aprendizagem, como são exemplo as tarefas que conduzem à atividade de descoberta, mas somente se sublinha que não se pode resumir o ensino apenas a essa atividade, sob pena de "ficarmos pela descoberta da roda", ou seja, apenas pela experiência da descoberta.

Em conclusão, a par de uma transmissão estruturada dos conhecimentos, porque planeada e sistematizada, é possível desenvolver atividades que conduzem a situações de aprendizagem ricas e significativas sem resumir o ensino a um conjunto de exercícios rotineiros, onde a compreensão deixa de ser fundamental e a aplicação dos conhecimentos, em contexto ou não, é inexistente. Contudo, inversamente, sem a rotina de tarefas que consolidem e aprofundem os conhecimentos constata-se que os desempenhos dos alunos são muitas vezes inconsistentes. Por isso, a necessidade de se equilibrarem estes dois aspetos, as rotinas dos exercícios para consolidar os instrumentos necessários à progressão dos conhecimentos e as tarefas de resolução de problemas que envolvem contextos, matemáticos ou não, e que proporcionam atividades enriquecedoras e significativas para a aprendizagem.

3. Dinâmica na sala de aula – Relato de um percurso

A dinâmica estabelecida nas aulas sobre um tópico do programa de Matemática A, 11º ano, vista através de uma descrição do percurso da planificação à avaliação.

O objetivo deste capítulo é apresentar um relato que exemplifica como a minha prática se concretiza, à luz dos programas em vigor e das suas indicações metodológicas. Para isso, selecionei um tópico do programa de Matemática A, do 11º ano, e apresento o percurso que vai da sua planificação à sua avaliação.

A planificação do tópico que escolhi para esta descrição insere-se no segundo tema programado da disciplina de Matemática A, 11º ano, Introdução ao Cálculo Diferencial I, no que diz respeito ao estudo das funções racionais, nomeadamente – *Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções:*

$$f(x)=a+\frac{b}{cx+d}\text{, com } a,b,c,d\in IR\text{, } b\neq 0 \text{ e } c\neq 0\text{.}$$

Neste estudo enfatiza-se a análise dos efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções de uma mesma classe.

Como pré-requisitos, os tópicos: resolução de problemas envolvendo funções; conceito intuitivo de $+\infty$ e de $-\infty$, de limite e conceito de assíntota que já foram abordados no início do tema principal.

Na sequência do tópico em referência, assume particular importância a decomposição de expressões recorrendo ao algoritmo da divisão, é referida a simplificação de frações e é lecionado o tópico equações e inequações fracionárias.

Estimou-se ser necessário um total de 9 aulas de 90 minutos, para lecionar todos os tópicos relativos às funções racionais.

Como metodologia considerou-se as seguintes abordagens, seguindo e adaptando das sugestões fornecidas pelos recursos do manual adotado (Anexo 12):

- A resolução de problemas foi considerada ao longo do desenvolvimento do tema. Facilita o enquadramento de certo tipo de funções e permite que os alunos façam uma reflexão sobre algumas propriedades das funções em contexto matemático e em contexto não matemático.

- Retomando conceitos, já trabalhados no 10.º ano, relacionados com transformações simples de funções, segue-se o estudo de funções do tipo $f(x)=a+\dfrac{b}{cx+d}$.

- Esse estudo pode ser apoiado com a aplicação – *funcRacional* – que se encontra no CD de Aplicações Dinâmicas disponibilizado com o manual adotado, Novo Espaço 11 (Costa, Rodrigues, 2011), tendo como complemento as **tarefas 4** e **5** (páginas 22 e 25 do manual) (Anexos 9 e 10).

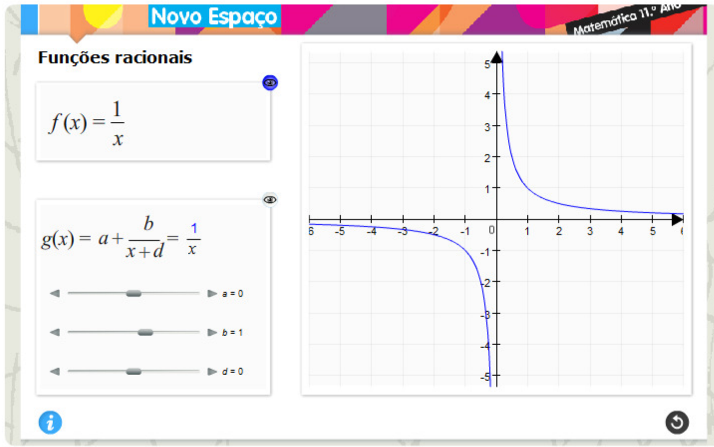


Figura 3 - Aplicação *funcRacional.*

- Os alunos são convidados a usar a sua calculadora gráfica já que as aplicações só podem ser manipuladas por uma pessoa, normalmente o professor, que as projeta num ecrã para que todos a possam observar e discutir como os parâmetros influenciam o gráfico. Com a calculadora o aluno pode trabalhar nas tarefas de forma mais autónoma.

- Fazer uma exploração interativa, como apoio e complemento, às **tarefas 4** e **5**.

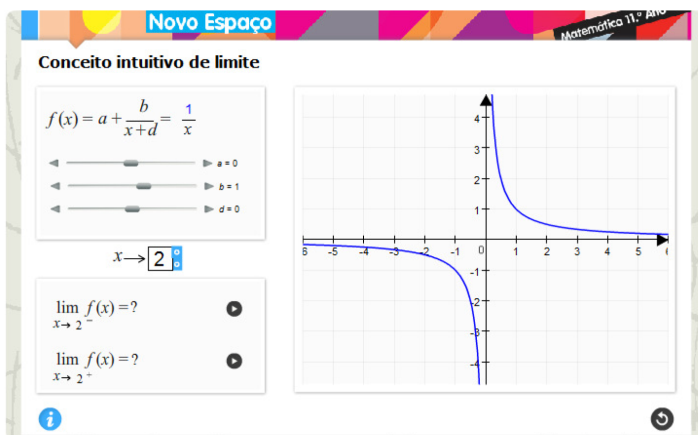


Figura 4 - Aplicação funcRacional.

- Decomposição de expressões, recorrendo ao algoritmo da divisão inteira de polinómios, para se obter as funções na forma $f(x)=a+\dfrac{b}{cx+d}$ e assim justificar a existência da assíntota horizontal do gráfico, $y=a$.

- Numa perspetiva de diversificar a contextualização da aplicação de conhecimentos, a resolução, por exemplo, das **tarefas 8**, **9**, **10** e **11** (do mesmo manual).

- Fazer sínteses sobre as principais características das funções da família $y=a+\dfrac{b}{x+d}$, com $b\neq 0$ e $y=a+\dfrac{b}{cx+d}$, com $b\neq 0$ e $c\neq 0$, questionando os alunos sobre as conclusões.

- Os exercícios apresentados nas margens do manual complementam as tarefas, reforçando as aprendizagens em contexto matemático e contribuindo para uma melhor estruturação do conhecimento.

- As propostas apresentadas no **Para Praticar** (pág. 44 do manual) permitem retomar e consolidar os conceitos trabalhados com base na diversidade de propostas, proporcionando a diferenciação de modo a que a generalidade dos alunos atinja um patamar mínimo de preparação, para dar continuidade à integração de novos conceitos no desenvolvimento do tema.

- Nas questões de escolha múltipla, os alunos são incentivados a fundamentar as opções selecionadas, como forma de trabalhar a capacidade de fundamentar e de comunicar.

A avaliação incidiu sobre:

. Transformações de funções;

. Mobilizar e aplicar conhecimentos, num contexto não matemático:

– resolução analítica de inequações;

– utilização da calculadora gráfica.

A questão proposta no teste de avaliação relativa a este tópico foi a que se segue, nomeadamente, as alíneas b) e c), já que a alínea a) tem por objetivo avaliar se o aluno compreende o conceito de variação de uma função num intervalo e sabe aplicá-lo, em contexto:

Ligando uma fonte de gás a uma esfera, de determinado material, ela dilata-se. O raio da esfera, ao fim de t minutos de aplicação do gás, é dado em *dm* por $R(t)=\dfrac{2+6t}{1+t}$.

Quando o volume desta esfera atinge os 905 *dm*^{3} a esfera despedaça-se.

a) A dilatação da esfera foi maior no primeiro minuto ou no segundo? Justifica.

b) Determina, analiticamente, os valores de t para os quais o raio da esfera é inferior a $4{,}5$ *dm*. Apresenta o conjunto solução na forma de intervalo de números reais, considerando o contexto do problema.

c) Numa pequena **composição matemática**, analisa se a esfera deste material, sujeita a este gás, se despedaça.
   - Deves identificar a equação da assíntota horizontal do gráfico e dizer qual seu significado no contexto da situação descrita.
   - Justifica, em cálculo auxiliar, a existência da assíntota.
   - Ilustra a composição com uma representação gráfica de R, no contexto indicado.

Nota: $V_{esfera}=\dfrac{4}{3}\pi\, r^3$

Comentários a algumas respostas à alínea c) deste exercício

Considerei como objetivos da avaliação desta questão que o aluno deve evidenciar conhecimentos e capacidades de forma a:

- Comunicar de forma fundamentada as suas conclusões.
- Conhecer as características do tipo das funções estudadas.
- Promover e relacionar os conhecimentos matemáticos com o contexto apresentado.

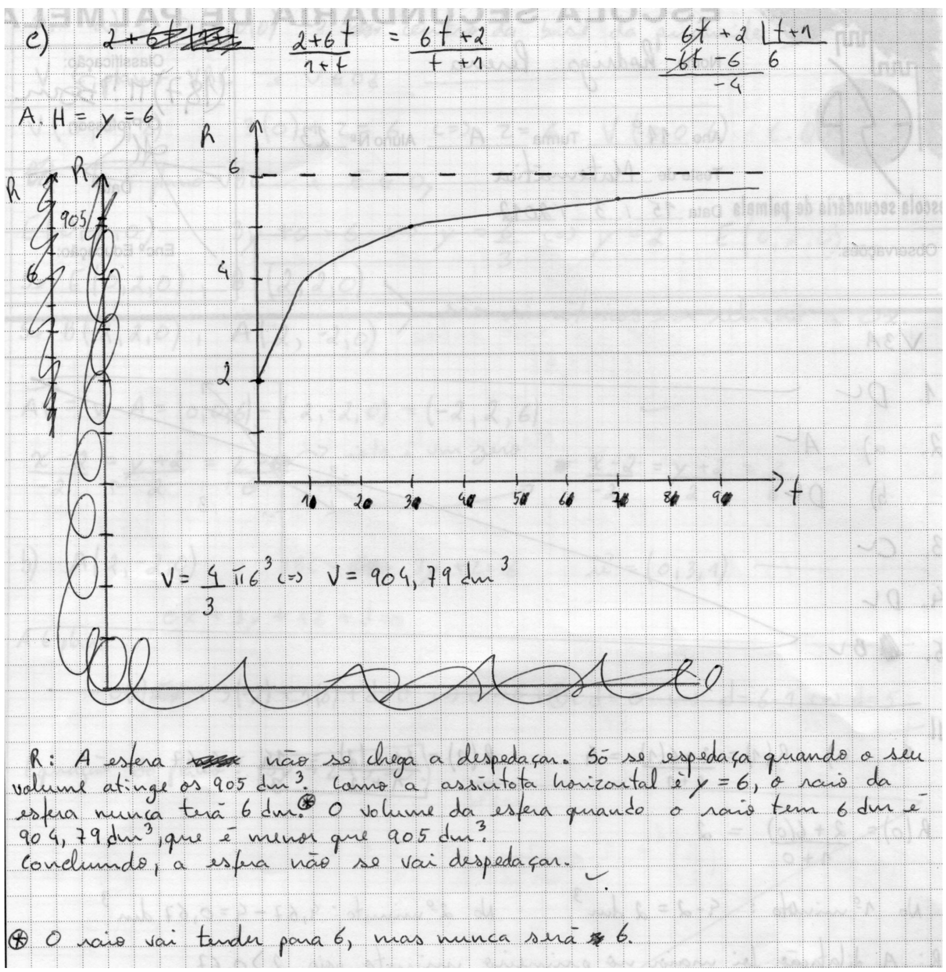


Figura 5 - Resposta do Rodrigo.

Podemos encontrar respostas como as dos exemplos apresentados nas figuras 5 e 6 que evidenciam um desempenho muito satisfatório por parte dos alunos. Cumprem os objetivos relativos à classe de funções estudada, quanto ao seu gráfico e às assintotas do gráfico. Encontram estratégias de resolução do problema e relacionam o contexto com o significado do domínio, da assintota e do valor do raio, dado o volume. Mostram capacidade de comunicar de forma fundamentada as suas conclusões.

No exemplo na figura 6 não considerei os erros cometidos graves mas era importante referir que os arredondamentos estão feitos por defeito, isto é, para volume indicado, o raio da esfera é ligeiramente superior a 6 e a aluna deveria referir que de acordo com o gráfico o raio é sempre inferior a 6.

Estas respostas foram de alunos cuja classificação final o teste de que faz parte esta questão foi 19 e 18,2 valores, respetivamente, o que é coerente com a classificação atribuída nesta alínea.

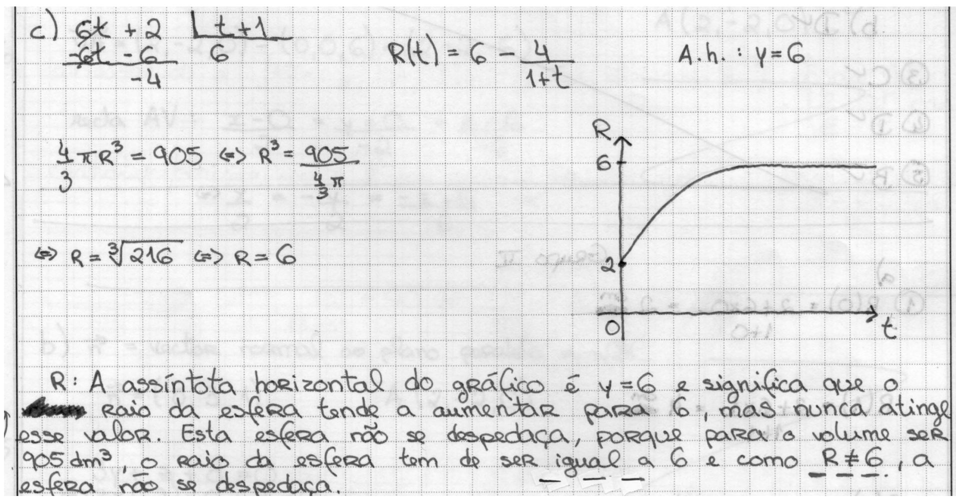


Figura 6 - Resposta da Patrícia.

Podemos encontrar respostas que evidenciam um desempenho incompleto pois como se pode observar nos exemplos das figuras 7 e 8 apenas cumprem em parte os objetivos. Em ambas as respostas existem erros. Na primeira, há erros formais nas resoluções analíticas apresentadas e falha a relação com o contexto, logo não há conclusão. A segunda, evidencia que relaciona de forma correta parte dos dados do enunciado mas não domina as características das funções estudadas logo falha a comunicação pois não sabe fundamentar corretamente a resposta. Estes alunos obtiveram 16,7 e 5,5 valores na classificação do teste, o que também é coerente. O primeiro é um aluno atento, participativo e trabalhador mas por vezes falha quando os problemas exigem um maior nível de relações entre conhecimentos e contextualização. O segundo é um aluno sem dificuldades de aprendizagem, que revela facilidade na aprendizagem, quando está atento, mas investe pouco em atitudes fundamentais ao sucesso nesta disciplina, nomeadamente, à prática de exercícios que envolvam processos analíticos.

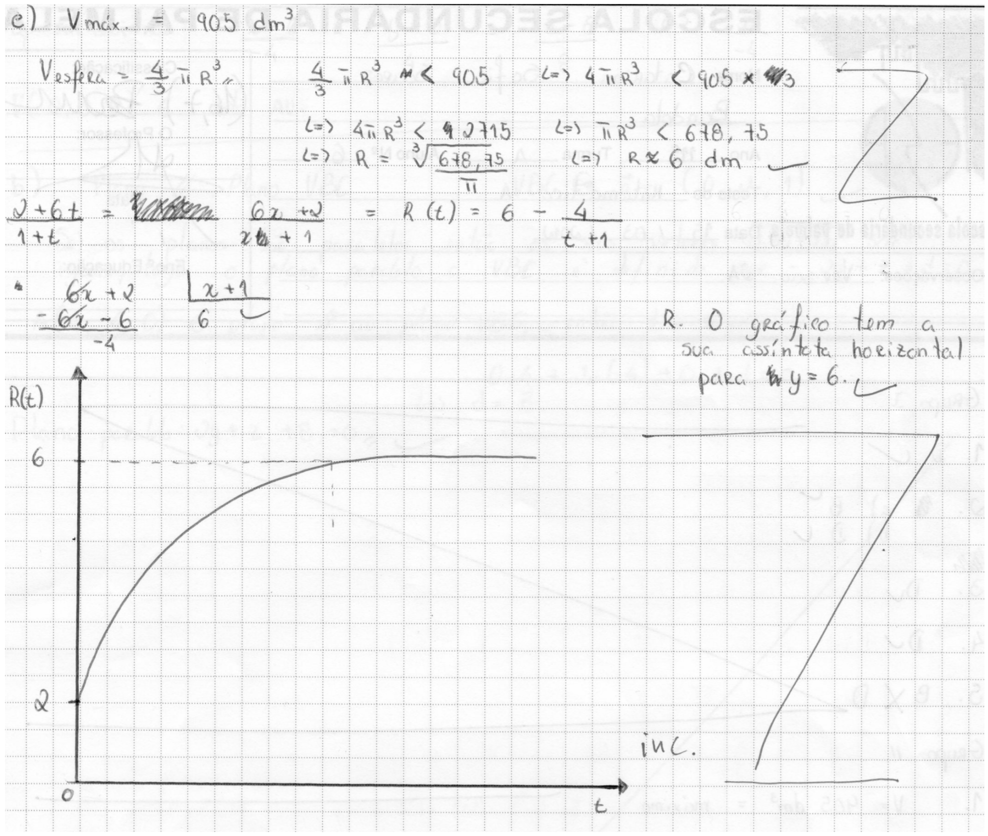


Figura 7 - Resposta da Catarina.

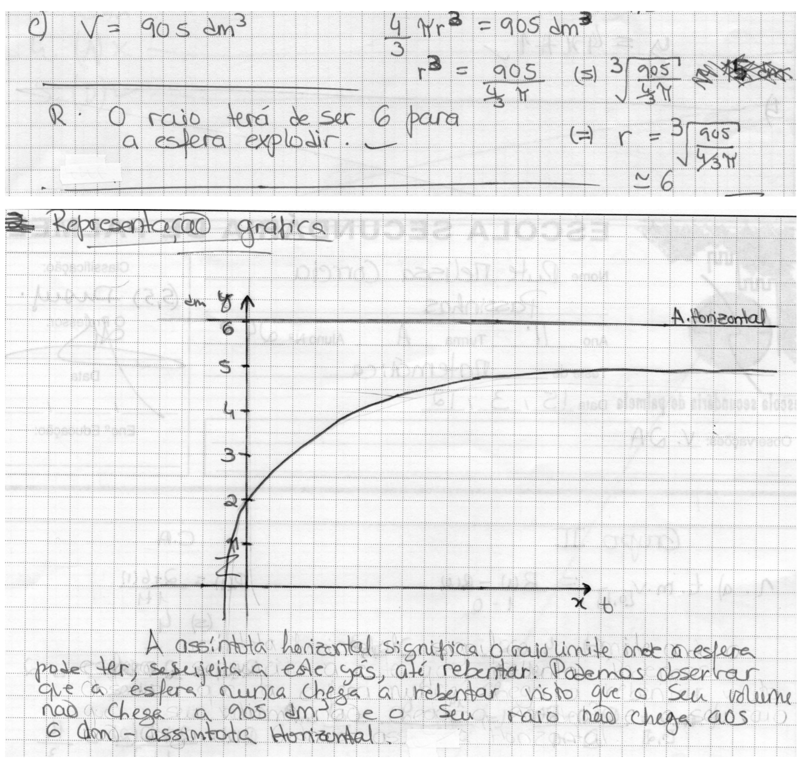


Figura 8 - Resposta da Rute.

As respostas nos exemplos das figuras 9 e 10 estão classificadas com os mesmos pontos e são ambas insatisfatórias em termos dos objetivos a atingir. Em qualquer uma delas, apenas se realizou corretamente um passo necessário à resolução do problema. Na primeira o aluno evidencia saber que deve calcular o valor do raio para relacionar com os valores da função mas comete erros em tudo o resto. Na segunda o aluno apenas evidencia saber determinar assíntotas do gráfico deste tipo de funções. As classificações obtidas no teste foram, respetivamente, 14,4 e 11,0. Apesar de não terem correspondido aos objetivos desta questão, atingiram um desempenho positivo no global da prova.

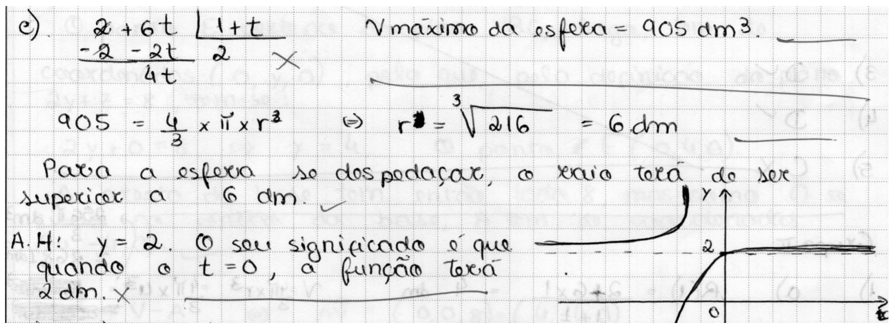


Figura 9 - Resposta Isa.

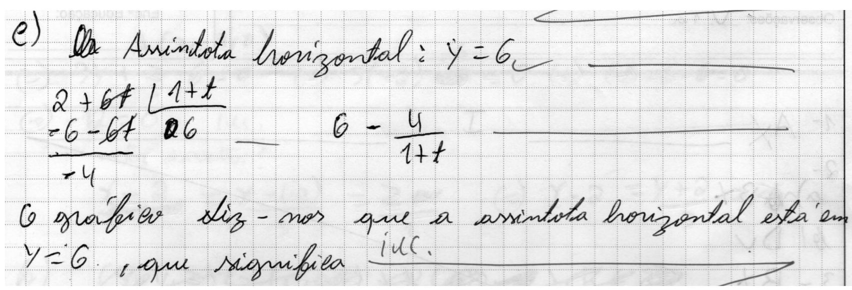


Figura 10 - Resposta do Gustavo.

No exemplo apresentado na figura 11, a resposta revela total incoerência com o gráfico desenhado e não está fundamentada, embora o aluno mostre algum tipo de intuição nas afirmações que faz. Foi atribuído um ponto pois, de acordo com os critérios de classificação que elaborei, o aluno relacionou, de algum modo, a assintota com o momento em que a esfera se despedaça. O aluno teve a classificação de 4,1 neste teste, o que revela insucesso na generalidade dos objetivos propostos.

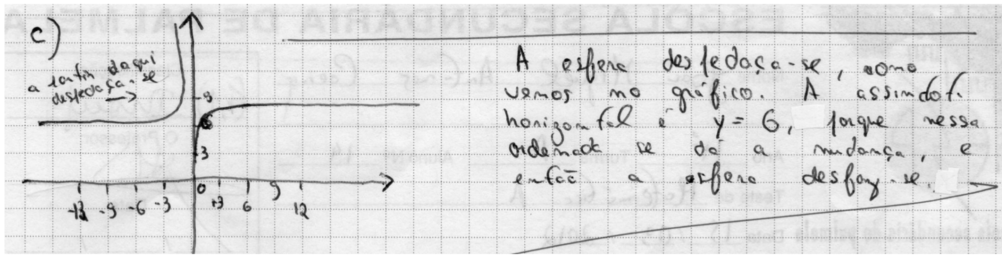


Figura 11 - Resposta do João.

Em síntese, de acordo com as abordagens e a avaliação efetuada, podemos observar que se podem encontrar respostas com vários níveis de desempenho, nas respostas das figuras 5 e 6 o nível de desempenho é muito satisfatório na medida em que, de acordo com os critérios de classificação, lhes foram atribuídos 19 e 18 pontos, em 20, respetivamente. Nas respostas das figuras 7 e 8 foram atribuídos, respetivamente, 12 e 9 pontos, em 20, o que mostra um nível e desempenho pouco satisfatório, tendo em conta os objetivos. As respostas das figuras 9 e 10 foram ambas classificadas com 5 pontos, sendo insatisfatório o desempenho dos alunos. Na figura 11 está uma resposta que reflete total insucesso relativamente aos objetivos estabelecidos, na avaliação do tópico lecionado.

Na sequência desta análise torna-se importante refletir sobre os resultados dos alunos (da turma, este são um exemplo) nesta questão em particular e na prova em geral. Na prática o que faço é usar a correção para mostrar como se encontra a resposta correta e para esclarecer o motivo de alguns erros. Neste processo os alunos que responderam de forma satisfatória são convidados a fazer a correção no quadro. Após a avaliação voltam a ser propostas questões deste tipo, como trabalho de casa ou em aula, quando oportuno, para consolidação e aprofundamento deste tópico ou de outros, que se revelem necessários, e como estratégia de recuperação para os alunos com desempenho menos satisfatório.

Em conclusão, considero que este relato ilustra o que defendi e apresentei nos anteriores capítulos relativamente à minha prática, como resultado da interpretação dos programas, da planificação dos conteúdos e da execução de ações que visaram a implementação das metodologias sugeridas nesses programas.

Considerações Finais

No final desta reflexão cabem algumas considerações finais sobre este relatório cujo objetivo foi partir da experiência profissional, que se centralizou principalmente no ensino-aprendizagem da Matemática, para refletir sobre dois temas, os Programas de Matemática e as Metodologias Implementadas. Para clarificar e completar esta reflexão, mostrando de que forma a minha prática segue as diretrizes do currículo e que tipo de metodologias implemento, apresentei o relato de um percurso que pretende descrever a dinâmica das aulas de Matemática, relativo a um tópico do programa.

Para o professor comum, teorizar sobre educação e, neste caso, sobre o ensino da Matemática é um exercício pouco eficaz, em termos de resultados, quando desligado da prática da educação. A prática da educação, quando generalizada e massificada, pode torna-se uma tarefa "hercúlea", para a escola e para os profissionais a ela ligada, se for centrada num idealismo desenquadrado da realidade. Num mundo ideal, onde todas as condições estão reunidas, o sucesso é garantido mas no mundo real a escola e os profissionais a ela ligados não controlam uma grande parte dos fatores que interferem na educação e no processo de ensino-aprendizagem logo, consequentemente, nos seus resultados. Esta reflexão, é por isso, uma tentativa de mostrar como a prática pedagógica se articula com as filosofias de educação, subjacentes aos currículos prescritos e apresentados através dos programas, numa tentativa de mostrar como podem ser operacionalizadas.

Passados mais de dez anos sobre a implementação dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e menos de cinco sobre a implementação do novos programas do Ensino Básico os desafios permanecem e ao professor é pedido um papel ativo, numa perspetiva interpretativa, reflexiva e interventiva desse mesmo currículo, de forma a adaptar-se às situações concretas. De acordo com esta realidade, torna-se necessário que o currículo apresentado, constituído pelos programas, seja claro quanto aos objetivos específicos que protagoniza. Tomados estes por referência, em conjunto com os objetivos gerais, as características do grupo de alunos em causa e a disponibilização de recursos diversificados, a tarefa de planificar a curto prazo estará facilitada. Apresentam-se assim referenciais que contribuem para a necessária equidade do ensino, seja público, seja privado. Do mesmo modo, os manuais e outros materiais de apoio à prática letiva, onde também se apresentam as principais linhas do currículo prescrito, em conjunto com a formação contínua de professores, constituem recursos indispensáveis à prática do professor e ao seu desenvolvimento profissional.

Ao estilo próprio de cada professor junta-se a natureza das tarefas propostas que determinam a dinâmica da aula de Matemática e na qual tem especial importância a comunicação matemática. A estruturação do ensino, numa planificação criteriosa que não deve esquecer os pré-requisitos, pela natureza da construção do conhecimento matemático, torna-se importante para que as atividades desenvolvidas pelos alunos sejam profícuas e se traduzam em efetivo conhecimento. Além da planificação, torna-se importante a comunicação e negociação de significados a par de uma cultura de sala de aula onde os modos de trabalho dos alunos são definidos de forma a criar um ambiente de aprendizagem onde os alunos protagonizam um papel tão importante como importante é o papel do professor na organização e estruturação do conhecimento.

Parece claro que o caminho será para a construção de uma relação de confiança entre o aluno e o professor, a par da implementação de metodologias que promovam a participação ativa do aluno na construção do seu saber, sem descuidar a transmissão estruturada do conhecimento, pelas vantagens pedagógicas que representa e pela responsabilidade partilhada que tal acarreta. Pretende-se, assim, uma dinâmica que garanta que a escola e, nomeadamente, as finalidades do ensino da Matemática assumam a sua dimensão cultural, social, formativa e política da forma mais generalizada possível a toda a população escolar.

Referências

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)… *Educação e Matemática* (8), 7-10 e 35.

Andrade, C., Viegas, C., Pereira, P., Pimenta, P. (2010). *Y - Matemática A.* Lisboa: Texto Editores.

APM. (2007). Parecer sobre a implementação do programa de Matemática B. Acedido em http://apm.pt/files/_Parecer_MatB_45d4ce709ab4b.pdf

Alves, J. M. *As Lideranças Tóxicas.* Acedido em http://correiodaeducacao.asa.pt/205917.html

Braga, F., Vilas-Boas, F. M., Alves, M. E. M., Freitas, M. J., Leite, C. (2004). *Planificações novos papéis, novos modelos*. Porto: Edições Asa.

Costa, B., Rodrigues, E. (2011). *Novo Espaço 10* (Matemática A). Porto: Porto Editora.

Costa, B., Rodrigues, E. (2011). *Novo Espaço 11* (Matemática A). Porto: Porto Editora.

Costa, B., Rodrigues, E. (2011). *Novo Espaço 11* (Matemática B). Porto: Porto Editora.

Crato, N. (2009). Melhorar o ensino da matemática com ferramentas do século XXI. Acedido em dezembro, 2011, em http://alfaebeto.org.br/profissaoprofessor/administrator/pdf/artigo_seminario_2009_nuno_crato.pdf

Fernandes, J., Silva, R., (1999). O Insucesso escolar em Matemática na perspectiva de professores de Matemática do 2.º ciclo. Acedido em http://www.educacion.udc.es/grupos/gipdae/congreso/VIIIcongreso/pdfs/336.pdf

Gimeno Sacristán, J. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática.* Porto Alegre: ArtMed.

Infopédia, Enciclopédia e Dicionários. Porto Editora

Leal, J.A.F.S. (2009) *A Escola e o Sucesso Escolar dos Jovens em Risco*. Acedido em http://www.webartigos.com/artigos/a-escola-e-o-sucesso-escolar-dos-jovens-em-risco/22812/

Menegolla, M., Sant'anna, I. M. (1993). *Por que Planejar? Como Planejar: currículo - área - aula*. Petrópolis: Vozes.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Pérez, J. F. B. (2009). *Coaching para docentes: motivar para o sucesso*. Porto: Porto Editora.

Ponte, J. P., Boavida, A. Graça, M. Abrantes, P. (1997) *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte. J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Roldão, M. C. (2000). A complexidade dos modos de aprender na sociedade da comunicação. Repensando os conceitos de concreto e abstracto. Acedido em http://ierg.net/GPEI/assets/documents/artigoELA.pdf

Silva, J. C., Fonseca, M. G. Martins, A. A. Fonseca, C. M. Lopes, I. M. C. (2001). *Programa de Matemática A, 10º Ano.* Lisboa: Ministério da Educação.

Sober E. (n.d.) O que é o conhecimento?. Acedido em dezembro, 2011, em http://criticanarede.com/fil_conhecimento.html

Viegas, C., Gomes, F., Lima, Y. (2011). *Xeqmat 11*. Lisboa: Texto Editores.

www.dgidc.min-edu.pt

www.gave.min-edu.pt

Anexos

Anexo 1

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

ESCOLA SECUNDÁRIA DE PALMELA

ANO LECTIVO 2010/2011

Planificação a Longo Prazo

10º Ano - Matemática A

Período	Temas	Blocos Previstos 90'
1.º	**Apresentação**	**1**
	Módulo Inicial	**9**
	Tema I – Geometria no Plano e no Espaço	
	✔ Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço	**6**
	✔ Geometria analítica	**17**
	Avaliação Sumativa Escrita/Correção	**5**
	Auto-avaliação/ Avaliação Final	**1**
	Total	**39**
2.º	**Tema I – Geometria no Plano e no Espaço** (conclusão)	**7**
	Tema II – Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.	
	✔ Função, gráfico e representação gráfica; estudo intuitivo de propriedades de funções e dos seus gráficos; resolução de problemas envolvendo funções polinomiais	**17**
	✔ Decomposição de um polinómio em factores	**10**
	Avaliação Sumativa Escrita/Correção	**5**
	Auto-avaliação/ Avaliação Final	**1**
	Total	**40**
3.º	**Tema II – Funções e Gráficos** (conclusão)	**4**
	Tema III – Estatística	
	✔ Generalidades; organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos)	**12**
	✔ Referência a distribuições bidimensionais	**3**
	Avaliação Sumativa Escrita/Correção	**3**
	Auto-avaliação/ Avaliação Final	**1**
	Total	**23**

Temas transversais
• Comunicação Matemática
• Aplicações e Modelação Matemática
• História da Matemática
• Resolução de Problemas e Atividades Investigativas
• Tecnologias e Matemática

Anexo 2

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

ESCOLA SECUNDÁRIA DE PALMELA

ANO LECTIVO 2010/2011

PLANIFICAÇÃO A MÉDIO PRAZO – MATEMÁTICA A – 10º ano – 1º Período

UNIDADE	CONTEÚDOS	Nº Blocos	Avaliação Observações
Módulo Inicial	• **Apresentação** • **Resolução de problemas:** ○ Teorema de Pitágoras ○ Semelhança de figuras ○ Números irracionais – Valores aproximados e arredondamentos ○ Problemas e condições	1 9	Observação de aula Questões de aula
Tema 1 Geometria no Plano e no Espaço I	• **Resolução de problemas de Geometria no plano e no espaço** - Poliedros regulares - Poliedros duais - Breve estudo sobre radicais - Cortes num poliedro por um plano dado - Poliedros obtidos por truncatura de um cubo - Relações métricas entre figuras planas e entre poliedros	6	Observação de aula Questões de aula Trabalho/Relatório (individual/grupo/pares) Teste 90'

(continua)

1

Anexo 3

ESCOLA SECUNDÁRIA DE PALMELA

Tarefa Interdisciplinar - 11º ano

Matemática A / Física e Química A

Professoras: Ana Lúcia Santos e Margarida Heliodoro

OBJECTIVOS:

- Definir a derivada num ponto e interpretar o seu significado físico e geométrico.
- Interpretar gráficos posição-tempo que traduzam situações reais e, a partir deles, estimar e determinar valores de velocidade.
- Analisar situações reais, sob o ponto de vista da conservação da energia mecânica

MATERIAL:

- Calculadora Gráfica c/ programa EasyData;
- CBR;
- Cabo de ligação da calculadora ao CBR;
- Suporte para CBR c/ 15 cm de altura, aprox.;
- Bola e Régua
- Calha c/ comprimento 160 cm, aprox.

NOTA: Na impossibilidade de todos os alunos, em grupos pouco numerosos de 2 a 3 elementos, fazerem esta experiência, sugere-se que se ligue a calculadora ao *viewscreen*.

Procedimentos para a realização da experiência:

- Colocar sobre o suporte a calha e o CBR, perpendicularmente à calha;
- Ligar a calculadora ao CBR e, em APPS, fazer correr o programa EasyData;
- Escolher SETUP – TimeGraph – Edit – definir intervalo de amostra 0.02 s e nº de amostras 50 – Ok;
- Colocar a bola no início da calha, largar a bola e precionar START, em simultâneo;
- Fazer STOP quando a bola atinge o final da calha. Aparece imediatamente, na calculadora, o gráfico dos dados recolhidos, (tempo, distância). A calculadora regista o tempo em L_1, a distância em L_6 e a velocidade em L_7.
  - Se o resultado não for satisfatório, repetir a experiência;
  - para sair da aplicação fazer Quit.
- Transferir os dados obtidos da calculadora ligada ao CBR para as restantes calculadoras.
  Para transmitir: 2nd – LINK – SEND – List – SELECT – (listas dos dados tempo e distância) – TRANSMIT – ENTER
  Para receber: 2nd – LINK – RECEIVE – ENTER

(cont.)

QUESTÕES:

1. Encontra a expressão analítica da função que melhor se ajusta ao conjunto de dados, fazendo a regressão adequada e escreve-a, usando valores aproximados a 3 c.d..

____

Instruções: STAT ► CALC (escolher a regressão adequada) (nome da lista com os valores tempo, 2nd L1, por exemplo) **,** (nome da lista com os valores distância) **,** VARS ► Y-VARS 1:Function (escolher a função onde fica editada a regressão, 1:Y1, por exemplo) ENTER Y=

a) Observa a função obtida e classifica o movimento adquirido pela bola.

____

b) Indica o significado físico dos parâmetros a, b e c, que surgem na expressão analítica.

____

2. Esboça o gráfico da função no intervalo de 0 a 1 seg.

3. Indica o espaço percorrido ao fim de 0,4 seg.; 0,5 seg.; 0,44 seg. e 0,42 seg., (usa 3 c.d.).

____

(cont.)

4. Calcula a velocidade média da bola nos intervalos [0,4; 0,5] s ; [0,4; 0,44] s e [0,4; 0,42] s.

____

____

5. Seja A o ponto de abcissa 0,4; B o ponto de abcissa 0,5; C o ponto de abcissa 0,44 e D o ponto de abcissa 0, 42. Escreve as suas coordenadas ou seja a posição da bola nos instantes 0,4; 0,5; 0,44 e 0,42 s.

____

a) Calcula o declive das rectas AB, AC e AD

m_{AB} = m_{AC} = m_{AD} =

b) Atendendo à expressão t.m.v.$_{[a,\, b]}$ =. $\frac{Y(b)-Y(a)}{b-a}$, calcula a taxa média de variação nos intervalos:

t.m.v. $_{[0,4,\ 0,5]}$ = t.m.v. $_{[0.4;\ 0,44]}$ = t.m.v.$_{[0,4;\ 0,42]}$ =

6. Compara os valores obtidos nas questões **4.** , **5.a)** e **5.b)** .

____

A **taxa média de variação** da função *f* no intervalo $[a,b]$ é o quociente entre a diferença dos valores da função *f* nos extremos do intervalo e a amplitude desse intervalo:

$$\text{t.m.v.}_{[a,\, b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Se considerarmos o intervalo $[a,a+h]$, sendo h um número real não nulo, então:

$$\text{t.m.v.}_{[a,a+h]} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Pode-se então concluir que a taxa média de variação de uma função tem duas interpretações. Escreve-as.

Interpretação física:

____

Interpretação geométrica:

____

____

(cont.)

7. Considerando a expressão $\frac{Y(0{,}4+\mathrm{h})-Y(0{,}4)}{\mathrm{h}}$ e valores de h muito próximos de zero, quando h estiver muito próximo de zero podemos concluir que o valor da velocidade média se aproxima do valor da velocidade em que instante?

____

Sugestão: Para responderes a esta questão atribui valores a h, cada vez mais próximos de zero e compara com os valores da velocidade que a calculadora registou na lista L_7.

8. Considera, por exemplo, h = 10^{-6} e, na calculadora, $Y_2 = (Y_1(x+10^{-6}) - Y_1(x))/10^{-6}$.

Ainda na calculadora, faz Y_3 = nDeriv (Y_1, x, x), a função derivada de Y1.

Observa a tabela da calculadora e compara os valores de Y_2 com Y_3, assim como os respectivos gráficos.

O que se pode concluir?

____

9. Por outro lado, as rectas que intersectam o gráfico da função Y1 nos pontos A, de abcissa 0,4, e P, de abcissa 0,4 + h, são secantes ao gráfico. Quando h tende para valores muito próximos de zero as rectas secantes ao gráfico de Y1 em A e P aproximam-se de que recta?

____

____

Qual será o declive desta recta?

____

Calcular a **taxa instantânea de variação** ou **taxa de variação** no ponto de abcissa 0,4 ou a **derivada da função** no ponto de abcissa 0,4, corresponde a calcular o valor para o qual tende $\frac{Y(0{,}4+\mathrm{h})-Y(0{,}4)}{\mathrm{h}}$ quando h tende para zero.

Definição de derivada

A **derivada de uma função *f* no ponto *a*** representa-se por ***f '*(*a*)** e é o valor real, se existir, para o qual tende $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quando *x* tende para *a*.

Portanto $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Se $x = a + h$ então $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

(cont.)

Pode-se então concluir que a derivada de uma função num ponto tem duas interpretações. Escreve-as.

Interpretação geométrica:

____

____

Interpretação física:

____

10. Relembra a que condições obedece um sistema conservativo.

a) Faz a medição da altura de que parte a bola. h = __________

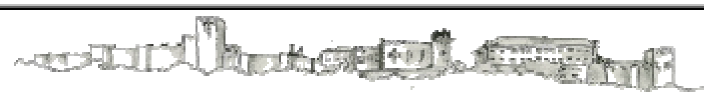
b) Verifica se o sistema é conservativo.

Anexo 4

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

ESCOLA SECUNDÁRIA DE PALMELA

ANO LECTIVO
2010/2011



10º ANO	Matemática A	Trabalho Individual

Tema:

- Geometria: As perspectivas – representação no plano de figuras do espaço

Finalidade:

- Perceber a importância das regras de perspectiva na representação de objectos tridimensionais.

Objectivos:

- Encontrar uma imagem de Escher que represente uma construção impossível na realidade.
- Analisar a figura e fazer um comentário escrito que justifique a impossibilidade de a construir em três dimensões.

Apresentação do trabalho:

- entregar na disciplina da plataforma moodle, no prazo aí estipulado;
- em PDF;
- tamanho de <u>uma página A4</u>;
- deve constar:
  - um título do trabalho
  - a figura
  - o texto
  - a identificação do aluno (primeiro e último nome, ano, turma e número).

Anexo 5

Escola Secundária de Palmela
Matemática B – 10º ano

Ano lectivo 2010/11
Prof.a Ana Lúcia Santos

Plano de aula por tópicos *

Turma: **G** Aula nº 57 Data: 21 / 03

Sumário:

Resolução de problemas que envolvam triângulos:

- Razões trigonométricas de um ângulo agudo;
- Exercícos de aplicação;
- Trabalho de pares

Notas:
Pré requisitos:

- Teorema de Pitágoras (8º ano)
- Noções de Trigonometria (9º ano)
  Semelhança de triângulos
  Razões triginométricas de um ângulo agudo
  Relações entre as razões trigonométricas de um ângulo
  Uso da calculadora no cálculo de razões trigonométricas

Tópicos:

- Recordar como calcular as razões triginométricas de um ângulo agudo α, a partir da representação de um triângulo rectângulo, sin α , cos α e tan α.
- Resolver exercícios 1 e 2, p. 96, manual.
- Usar a calculadora gráfica no cálculo das razões trigonométricas (instruções p/ Texas p.97, p/Casio p.205).
- Resolver exercícios 3 e 5, p. 98, manual. (Recordar o teorema de Pitágoras, se necessário)
- Trabalho de pares (20 min): Proposta de trabalho, p.99 – resposta numa folha à parte, para avaliação.
- Se sobrar tempo: iniciar Tarefa 1, p.100.
- T.P.C. : Tarefa 1, p.100 (toda ou finalizar).

Observações:

* Usualmente esta planificação é escrita à mão, com uma linguagem abreviada, pois é só para meu uso pessoal, em folhas A4, impressas com as caixas em branco. Neste caso está assim apresentada para melhor legibilidade e compreensão, do que entendo por planificar uma aula onde os pré-requisitos são importantes.

Pág. __

Anexo 6

Referência Histórica

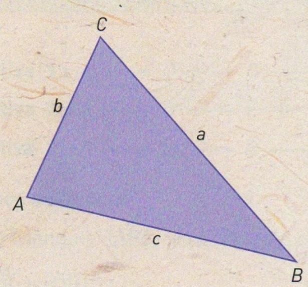
Regiomontanus (1436-1476)

Em 1436, nasce na Alemanha, na cidade de Königsberg (traduzido, significa "Monte do Rei"), Johannes Müfeler, que, em homenagem à cidade onde nasceu, assinava os seus livros, em latim, como Johannes de Regio Monte ou Johannes de Regiomontanus. Por esse motivo ficou conhecido por **Regiomontanus**.

Regiomontanus estudou em Viena, onde conheceu Peuerbach, com quem adquiriu conhecimentos de astronomia, realizando juntos muitas observações astronómicas.

Para divulgar no mundo ocidental, de forma compreensível, a obra de Cláudio Ptolomeu – *Almagesto* –, Peuerbach iniciou a sua tradução para latim, mas faleceu pouco depois, sendo a obra continuada e concluída por Regiomontanus, que lhe deu o nome de ***Epytome Almagesti***.

Esta obra foi importante na história da ciência, mas Regiomontanus sentiu necessidade de sistematizar os estudos sobre trigonometria, começando a ser encarada como independente da astronomia. Os seus trabalhos deram origem à obra denominada **De *Triangulis Omnimodis*** ("Triângulos de qualquer espécie"). Incluiu nesta obra o que hoje é conhecido como teorema dos senos – que estabelece a proporcionalidade dos lados de um triângulo com os senos dos ângulos opostos.



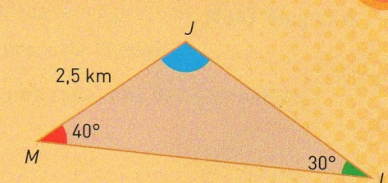
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Proposta de trabalho

Considera a figura, onde os pontos M, J e L representam as casas da Marta, do João e do Luís, respectivamente.

Utilizando o resultado da nota histórica acima referida e tendo em conta os dados da figura, determina a distância entre a casa da Marta e a do Luís, e entre a casa do Luís e a do João.

Apresenta os resultados arredondados às centésimas.



(Manual de Matemática B: *Novo Espaço 10*, Parte 2, p. 99)

Anexo 7

Formação creditada	U.crédito	Ano lectivo
"O computador na actividade docente – Aperfeiçoamento e ligação à Internet", no Centro de Formação da Comunidade Educativa do Concelho de Palmela.	2,0	1998/99
"Os audiovisuais na sala de aula – Vídeo", no Centro de Formação da Comunidade Educativa do Concelho de Palmela.	2,0	1999/00
"Desenvolvimento do programa de 10º ano de Matemática B para o Ensino Secundário", no Centro de Formação da Comunidade Educativa do Concelho de Palmela.	1,5	2001/02
"Na Internet: 'Navegar' com sentido", na ESE de Setúbal.	1,2	2002/03
"Actualização e prática da Língua Inglesa", no Centro de Formação da Comunidade Educativa do Concelho de Palmela.	2,2	2003/04
"Porfólios – Um instrumento inovador na avaliação dos alunos", no Centro de Formação da Comunidade Educativa do Concelho de Palmela.	1,0	2004/05
"As TIC em contextos inter e transdisciplinares" , no Centro de Formação da Comunidade Educativa do Concelho de Palmela.	2,0	2006/07
"Utilização de Tecnologia Gráfica e Sensores em Física, Química e Matemática", no Centro de Formação da Comunidade Educativa do Concelho de Palmela.	2,0	2008/09
"Quadros Interactivos Multimédia e Formação Contínua de Docentes" ", no Centro de Formação da Comunidade Educativa do Concelho de Palmela.	1,0	2009/10
"Questões de Fiabilidade na classificação de respostas a itens de construção no contexto de avaliação externa das aprendizagens", dinamizada pelo GAVE.	2,0	2010/11

(cont.)

Formação não creditada	Ano lectivo
Presença no 1º Encontro da Rede de Centros “Entre Tejo e Sado”: “As novas perspectivas da formação contínua”.	1996/97
Participação na acção de formação “Calculadoras gráficas e o Ensino” organizada pela ASPL e pela DISMEL.	1997/98
Participação no “14º Encontro Nacional de Professores de Matemática”, Profmat 98, em Guimarães.	1998/99
Presença no colóquio “Da Gestão Democrática à Escola do século XXI”, promovido pela Escola Secundária de Palmela.	1998/99
Participação na sessão de “Apresentação e Utilização do Laboratório CBL”, dinamizada pelos professores estagiários de Matemática da Escola Secundária de Palmela.	1998/99
Participação no “15º Encontro Nacional de Professores de Matemática”, ProfMat 99, em Portimão.	1999/00
Participação no “12º Encontro Regional de Professores de Matemática”, organizado pelo Núcleo de Almada-Seixal da APM.	2002/03
Participação na acção “Escola Virtual na Sala de Aula”, da Porto Editora.	2007/08
Seminário: “A prática da auto-avaliação e da hetero-avaliação na promoção do desenvolvimento profissional docente”, coordenado pela Professora Maria Gabriela Machado	2010/11

Anexo 8

Projecto de Sala de Estudo
(Actualização 2010/11)

Definição

A **Sala de Estudo** é um complemento pedagógico e curricular que pretende promover um trabalho mais individualizado com alunos que revelem essa necessidade
Para além de um apoio personalizado, o aluno poderá ainda estudar e realizar os seus trabalhos com possibilidade de acesso a materiais variados; manuais, gramáticas, dicionários, ou até mesmo salas de estudo virtuais e outros sites na Internet.

Numa outra vertente, a sala de estudo funcionará como um espaço de reflexão sobre a própria aprendizagem e os seus mecanismos, levando os alunos a apropriarem-se de instrumentos para melhorarem o seu desempenho e a aperceberem-se do que necessitam para melhorar a sua própria aprendizagem.

Objectivos

- proporcionar aos alunos um espaço com boas condições de trabalho e o apoio de que necessitam;
- fomentar a participação dos alunos na vida escolar através de uma ocupação construtiva dos tempos livres;
- contribuir para o desenvolvimento das competências gerais dos alunos;
- promover o desenvolvimento de métodos de estudo e hábitos de trabalho que contribuam para uma aprendizagem mais autónoma;
- esclarecer dúvidas sobre os conteúdos programáticos das diversas áreas curriculares;
- orientar os alunos na realização de trabalhos de pesquisa;
- apoiar alunos com dificuldades de aprendizagens especiais, que necessitem de acompanhamento individualizado;
- incentivar o uso das novas tecnologias como meio de desenvolvimento pessoal;
- disponibilizar materiais didácticos, nas diversas áreas de estudo, para suporte de trabalho dos alunos;
- actualizar a Página no *Moodle*;
- incitar à utilização do espaço para exposições temporárias de trabalhos realizados pelos alunos;
- dinamizar pequenas sessões de formação sobre diferentes áreas do saber;
- fomentar a realização de actividades no âmbito das Áreas Curriculares Não Disciplinares.

Actividades

Neste espaço, os alunos poderão:
- realizar trabalhos de casa;
- estudar, individualmente ou em pequeno grupo;
- realizar actividades programadas pelo professor;
- usufruir de um apoio individualizado ou em pequeno grupo com carácter permanente ou transitório;
- resolver fichas auto-correctivas;
- aceder a software educativo;
- desenvolver trabalhos em suporte informático;

Funcionamento

A Sala de Estudo funcionará em:
- Regime aberto - o aluno dirige-se a este espaço de forma autónoma
- Regime fechado – o aluno é proposto pelo professor/conselho de turma.

Horário de Funcionamento

A Sala de Estudo funcionará de segunda a sexta, conforme horário afixado.

Recursos Materiais

- Manuais, gramáticas, dicionários, enciclopédias;
- Dossiers com fichas de trabalho e outros materiais;
- Computador (Internet).

Avaliação

No final de cada período será feita uma análise da frequência da sala de estudo, assim como das observações apresentadas por todos os intervenientes, que se consubstanciará em relatórios intercalares.

No final do ano lectivo será elaborado um Relatório Final

A Equipa

Dinora Ferreira (coordenadora)
Ana Lúcia Santos
M. Margarida Heliodoro
M. Conceição Silvério

Anexo 9

22

TAREFA 4 Família de funções do tipo $y = a + \frac{b}{x+d}$, $b \neq 0$

Apoia a resolução da tarefa com a utilização da calculadora gráfica e/ou computador, fazendo várias representações gráficas.

1. Considera as funções f, g e h tais que:

$$f(x) = \frac{3}{x-2}\ ; \quad g(x) = -1 + \frac{3}{x} \quad \text{e} \quad h(x) = -1 + \frac{3}{x-2}$$

1.1 A partir da representação gráfica da função $y = \frac{3}{x}$, explica como podes obter uma representação gráfica da função:

1.1.1 f

1.1.2 g

1.1.3 h

1.2 Transcreve a tabela seguinte para o teu caderno e completa-a.

Função	Domínio	Contradomínio	Assíntotas
$y = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	A. V.: $x = 0$ A. H.: $y = 0$
$f(x) = \frac{3}{x-2}$	...	...	...
$g(x) = -1 + \frac{3}{x}$	...	...	...
$h(x) = -1 + \frac{3}{x-2}$	...	...	...

2. Considera a função j tal que $j(x) = 3 + \frac{4}{x+2}$.

Determina o domínio, o contradomínio e as assíntotas do gráfico da função i, sabendo que uma representação gráfica de j pode ser obtida a partir de uma representação gráfica de i por uma translação associada ao vetor:

2.1 $\vec{u}(-1\ ,\ 0)$

2.2 $\vec{v}(0\ ,\ 5)$

2.3 $\vec{w}(2\ ,\ -1)$

3. Seja p uma função racional, do tipo $p(x) = a + \frac{b}{x+c}$, $b \neq 0$.

Sabe-se que:

- as retas definidas pelas equações $x = \frac{3}{2}$ e $y = -4$ são assíntotas do gráfico de p;
- $p(0) = -2$.

Calcula $p\left(\frac{5}{2}\right)$, começando por determinar os valores de a, b e c.

(Manual de Matemática A: *Novo Espaço 11*, Parte 2, p. 22)

Anexo 10

TAREFA 5 Representações gráficas e expressões analíticas

1. Considera as funções racionais f, g e h, tais que:

$$f(x) = \frac{x-5}{x-4}; \quad g(x) = 1 + \frac{2x-3}{x+1} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{6x-1}{2x+1}$$

1.1 Representa $f(x)$ na forma $f(x) = a + \frac{b}{x+c}$.

1.2 Explica como podes obter uma representação gráfica da função f a partir da representação gráfica da função $y = \frac{1}{x}$.

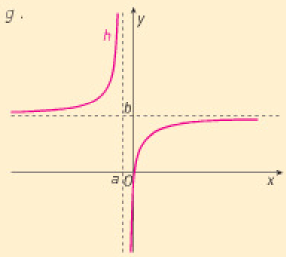
1.3 Mostra que $g(x) = 3 - \frac{5}{x+1}$.

Faz um esboço de uma representação gráfica da função g.

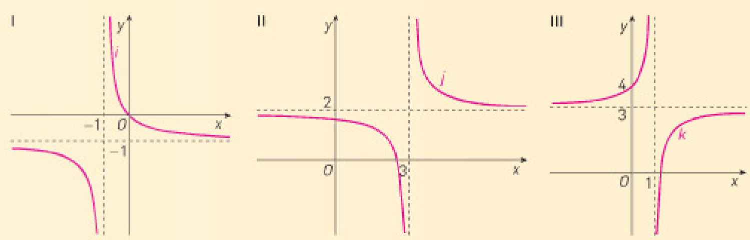
1.4 No referencial da figura está uma representação gráfica da função h.

As assíntotas do gráfico de h são as retas definidas por equações do tipo $x = a$ e $y = b$.

Determina os valores de a e b.



2. Na figura estão três representações gráficas **I**, **II** e **III** que correspondem, respetivamente, às funções i, j e k.



A função j é definida por $j(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$.

2.1 Sabe-se que $i(x) = a + j(x-b)$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Determina os valores de a e de b.

2.2 O ponto de coordenadas $(0, 4)$ pertence ao gráfico de k.

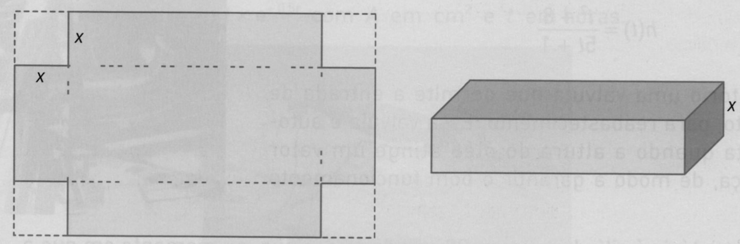
Mostra que: $k(x) = \frac{3x-4}{x-1}$.

(Manual de Matemática A: *Novo Espaço 11*, Parte 2, p. 25)

Anexo 11

TAREFA 2 A caixa

Partindo de uma folha de cartolina de 80 cm de comprimento e 60 cm de largura, pretende-se construir uma caixa, sem tampa. Para o feito, cortam-se quatro quadrados de lado x centímetros, como a figura indica.



1. Mostra que o valor do volume V da caixa é dado, em centímetros cúbicos, em função de x por $V(x) = 4x^3 - 280x^2 + 4800x$ e indica o domínio, atendendo ao contexto do problema

2. Determ na a taxa média de variação do volume da caixa quando x varia de 5 a 10 centímetros.

3. Com a ajuda da calculadora cop a para o teu caderno e preenche a tabela ao lado.
Para que valor te parece que tende $\text{t.m.v.}_{[10 \quad 10+h]}$ à medida que se consideram valores de h cada vez ma s próx mos de zero?

h	$V(10+h)$	$V(10+h)-V(10)$	$\frac{V(10+h)-V(10)}{h}$
1	...	...	...
0,1	...	...	...
0,01	...	...	...
0,001	...	...	...
0,000 1	...	...	...
0,000 01	...	...	...

4. Relativamente a V considera $\text{t.m.v.}_{[x_0 \quad x_0+h]}$ Sabe-se que, quando h tende para zero, $\text{t.m.v.}_{[x_0 \quad x_0+h]}$ tende para o valor da taxa de variação V quando $x = x_0$.
Admitindo, por exemplo, $h = 0{,}000\,001$ considera a função d definida por·

$$d(x) = \frac{V(x + 0{,}000\,001) - V(x)}{0{,}000\,001}$$

4.1 Calcula $d(10)$ e compara $d(10)$ com o valor ndicado em **3.**. O que concluis?

4.2 Admite que a reta t é tangente ao gráfico da função V no ponto de abcissa 10
Que valor propões para o declive da reta t? Justifica.

4.3 A partir de $d(x)$ estima um valor para a taxa de variação de V para $x = 15$

5. Faz um estudo da função d quanto ao sinal e relaciona-o com o estudo da variação de V

6. Determ na o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo, apresentando o resultado arredondado às centésimas. Explicita o teu procedimento.

(Manual de Matemática B: *Novo Espaço 11*, Parte 2, p. 155)

Anexo 12

Tema II – Introdução ao cálculo diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de variação e derivada		
Blocos (90 min)	**Tópicos**	**Sugestões de abordagem**
9	. Resolução de problemas envolvendo funções. . Conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e de $-\infty$. . Conceito de assíntota. . Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções: $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$ Neste estudo enfatiza-se a análise dos efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções de uma mesma classe.	A resolução de problemas deve ser considerada ao longo do desenvolvimento do tema. Facilita o enquadramento de certo tipo de funções e permite que os alunos façam uma reflexão sobre algumas propriedades das funções em contexto matemático e em contexto não matemático. Para introdução do tema, a **tarefa 1 da página 11** do manual, funciona como ponto de partida para o estudo de funções racionais, tendo como referência: domínio, contradomínio, sinal, paridade, variação, conceito intuitivo de limite, continuidade e assíntotas. Uma estratégia para o desenvolvimento do tema é partir de um contexto não matemático, fazer o estudo da função que modela a situação e complementar esse estudo com generalizações em contexto matemático. **Sugestão:** A partir da Aplicação Dinâmica – *limitesRacional* – que se encontra no respetivo CD, fazer uma exploração interativa dos conceitos de limite e de assíntota. Feita a exploração da aplicação, sugere-se que as **tarefas 2** e **3** (páginas 18 e 20 do manual) sejam trabalhadas na perspetiva de consolidação e de autoavaliação. Retomando conceitos, já trabalhados no 10.º ano, relacionados com transformações simples

		de funções, segue-se o estudo de funções do tipo $f\left(x\right)=a+\dfrac{b}{cx+d}$. Esse estudo pode ser apoiado com a aplicação – *funcRacional* – que se encontra no CD de Aplicações Dinâmicas, tendo como complemento as **tarefas 4** e **5** (páginas 22 e 25 do manual). **Sugestão** – Fazer uma exploração interativa, como apoio e complemento, às **tarefas 4** e **5**. Assume particular importância a decomposição de expressões, recorrendo ao algoritmo da divisão. Sugere-se, numa perspetiva de diversificar a contextualização da aplicação de conhecimentos, a resolução das **tarefas 8**, **9**, **10** e **11**.
As propostas apresentadas no **Para Praticar** (pág. 44 do manual) permitem retomar e consolidar os conceitos trabalhados com base na diversidade de propostas, proporcionando a diferenciação de modo a que a generalidade dos alunos atinja um patamar mínimo de preparação, para dar continuidade à integração de novos conceitos no desenvolvimento do tema. Sugere-se que, nas questões de escolha múltipla, os alunos sejam incentivados a fundamentar as opções selecionadas, como forma de trabalhar a capacidade de fundamentar e de comunicar.		

(*Novo Espaço 11*, Matemática A: materiais editáveis)