

DUALIDADE CONJUGADA E QUASE CONJUGADA NAS
TEORIAS DO PRODUTOR E CONSUMIDOR

PARTE III : APLICAÇÃO ÀS TEORIAS DO PRODUTOR E CONSUMIDOR

Maximiano Reis Pinheiro

Working Paper Nº 43

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

FACULDADE DE ECONOMIA

Campo Grande, 185

1700 LISBOA

Janeiro de 1986

4.1. FUNÇÃO LUCRO COMO FUNÇÃO SUPORTE DO CONJUNTO DE POSSIBILIDADES DE PRODUÇÃO.

4.1.1. Hipóteses sobre a tecnologia da empresa

—— Por comodidade de exposição, e por forma a podermos manter a mesma notação nas restantes secções, vamos admitir a distinção artificial entre factores de produção (ou inputs) e produtos de venda (ou outputs) da empresa. Na literatura sobre o tema, muitos autores não fazem esta distinção, admitindo que a mesma mercadoria pode ser tanto input como output da empresa. Introduzem, com esta finalidade, o conceito de "netput", fazendo o seu valor positivo quando a mercadoria em questão é output líquido, e fazendo o seu valor negativo quando é input líquido. Como nota LAU (1978, p. 170), o assumirmos a distinção estanque entre input e output envolve, porém, pouca ou nenhuma perda de generalidade. De facto, se houver alguma mercadoria que seja simultaneamente input e output, basta considerá-la como componente, quer do vector dos outputs, quer do vector dos inputs, admitindo para ela, se for caso disso, o mesmo preço de venda e de compra.

—— Utilizaremos a seguinte notação:

- (i) $y \in \mathbb{R}_{0+}^m$, vector de outputs da empresa;
- (ii) $x \in \mathbb{R}_{0+}^n$, vector dos inputs utilizados para produzir o vector de outputs y .

O vector x apenas compreende aqueles inputs sobre os quais a empresa dispõe de efectivo poder de controle no período de análise. Para além de x , a produção da empresa geralmente depende também de um

conjunto de outras condicionantes, que sumariaremos através de um vector $z \in R^k$. Tais condicionantes poderão assumir formas diversas, como por exemplo:

- (i) inputs fixados em determinados níveis não modificáveis no período de análise;
 - (ii) contratos de venda previamente celebrados, ou seja, níveis mínimos de outputs a respeitar;
 - (iii) o nível de progresso técnico ou o nível de domínio da técnica de produção por parte da empresa;
 - (iv) os níveis de produção de outras empresas, no caso de a empresa estar sujeita a externalidades;
- etc., etc..

—— Definição: Conjunto de possibilidades de produção da empresa $T(z)$, é o conjunto de todos os planos de produção (x,y) admissíveis para a empresa dado um vector z de condicionantes.||

Para maior brevidade e por comodidade de escrita, vamos abstrair-nos do vector de condicionantes z e representar o conjunto de possibilidades de produção apenas por T . Deve referir-se, a propósito, que muitos dos desenvolvimentos que serão expostos neste capítulo 4 poderão ser "reaproveitados" e utilizados numa análise que admita (x,y) como constante e z como variável (desde que sejam impostas hipóteses semelhantes).⁽³⁴⁾

—— Vamos admitir as seguintes hipóteses de regularidade sobre o conjunto T :

Hipótese 4.1.1.A: $T \subset R_{0+}^{n+m}$ é não vazio, pois pelo menos $(x,0) \in T, \forall x \in R_{0+}^n$.||

Hipótese 4.1.1.B: T é um conjunto fechado.||

Hipótese 4.1.1.C: T é um conjunto convexo.||

(34) - Veja-se, por exemplo, McFADDEN (1978a)

A hipótese 4.1.1.A estabelece que será admissível, pelo menos, não produzir nada, quaisquer que sejam os inputs utilizados. É, por isso, aquilo que podemos chamar de hipótese de "admissibilidade de desperdício absoluto".

A hipótese 4.1.1.B obriga a que qualquer sucessão convergente de planos admissíveis tenha como limite ainda um plano admissível (proposição 1.1.5.II). Esta hipótese afasta, portanto, a possibilidade de serem admissíveis planos infinitamente próximos da fronteira de T, e não admissíveis os planos da própria fronteira. Finalmente, quanto à hipótese 4.1.1.C, ela impõe que haja divisibilidade da tecnologia, isto é, ela impõe que se os planos (x^1, y^1) e (x^2, y^2) são admissíveis, então também é admissível qualquer sua combinação linear convexa.

4.1.2 Função lucro como função suporte do conjunto de possibilidades de produção / principais propriedades não marginais da função lucro:

— Suponha-se que a empresa depara com uma situação concorrencial quer do mercado dos inputs, quer do mercado dos outputs. Por outras palavras, admita-se que a empresa não tem o poder de influenciar os preços nos mercados onde intervém (é "price-taker" em todos os mercados).

Definição: Sejam $w \in R_{0+}^n$ e $p \in R_{0+}^m$ respectivamente os vectores de preços dos inputs e dos outputs, e considere-se que a empresa não ^{os} pode influenciar. A função lucro da empresa é a função que dá, para cada vector (w, p) , o supremo do lucro da empresa:

$$\Pi(-w, p) = \sup \{ \langle p, y \rangle - \langle w, x \rangle \mid (x, y) \in T \} = \sup \{ \langle (-w, p), (x, y) \rangle \mid (x, y) \in T \}.$$

Proposição 4.1.2.I: Considere-se respeitada a hipótese 4.1.1.C (T convexo). A função lucro da empresa é a função suporte do conjunto de possibilidades de produção:

$$\Pi(-w, p) = \delta^*((-w, p) | T). \parallel$$

As principais propriedades não marginais da função lucro decorrem directamente desta identidade.

Corolário 4.1.2.I.1: Considere-se respeitadas as hipóteses 4.1.1.A e 4.1.1.C. A função lucro $\Pi(-w, p)$ é uma função convexa própria, fechada, linearmente homogênea e pelo menos contínua relativamente a $\text{rint dom } \Pi$.

4.1.3 Recuperação do conjunto de possibilidades de produção a partir da função lucro

Se o conjunto de possibilidades de produção for convexo fechado (hip. 4.1.1.B e 4.1.1.C), e já que a função lucro é a respectiva função suporte, a proposição 2.2.1.I e o corolário 2.2.2.I.1 fornecem-nos duas ^{formas} alternativas e equivalentes de recuperação de T a partir do conhecimento da função lucro.

Proposição 4.1.3.I: Admitam-se respeitadas as hipóteses 4.1.1.B e 4.1.1.C (T convexo e fechado). Então, alternativa e equivalentemente:

$$(i) T = \{(x, y) | \Pi^*(x, y) = 0\}; (ii) T = \{(x, y) | \langle (-w, p), (x, y) \rangle \leq \Pi(-w, p), \forall (w, p) \in R_{0+}^{n+m}\} \parallel$$

No caso de T não ser convexo e/ou fechado, a respectiva função indicadora também não o será. Consequentemente, a sua conjugada (que é a função de lucro) será idêntica à conjugada da função indicadora do fecho ^{da} envolvente convexa de T. Assim sendo, e pela anterior proposição, a recuperação de T a partir de Π dará, não T, mas o fe-

cho da sua envolvente convexa. Quer isto dizer que, mesmo se T é não convexo e/ou não fechado, é possível recuperar a partir da função lucro os aspectos mais relevantes da tecnologia da empresa.

4.1.4. Propriedades marginais da função lucro/lema de HOTTELING

— Da aplicação directa da proposição 2.1.4.I. (propriedades marginais das funções conjugadas convexas) à função lucro, resulta a seguinte propriedade marginal desta última, que assume fundamental importância:

Proposição 4.1.4.I: Considerem-se respeitadas as hipóteses 4.1.1.B e 4.1.1.C (T convexo e fechado), e sejam dados $w \in \mathbb{R}_{0+}^n$ e $p \in \mathbb{R}_{0+}^m$. Então o plano de produção $(\bar{x}, \bar{y})$ é ótimo para a empresa sse

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial \Pi(-w, p).$$

Esta proposição estabelece uma correspondência entre os planos de produção que optimizam o lucro e os subdiferenciais da função lucro para os vários vectores $(-w, p)$. Como o subdiferencial poderá ser constituído por mais que um elemento, poderemos ter vários planos de produção óptimos para a empresa. Todavia, para os pontos onde $\Pi(-w, p)$ é diferenciável, o subdiferencial será constituído por um único elemento, precisamente o vector gradiente nesse ponto (proposição 1.2.10.IV).

Corolário 4.1.4.I.1: Considerem-se as hipóteses 4.1.1.B e 4.1.1.C, sejam dados $w \in \mathbb{R}_{0+}^n$ e $p \in \mathbb{R}_{0+}^m$, e seja Π diferenciável em $(-w, p)$. Então o único plano de produção ótimo para a empresa é dado por:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla \Pi(-w, p),$$

$$\text{ou, equivalentemente: } \bar{x}_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial w_j}(-w, p) \quad (j=1, \dots, n)$$

$$\bar{y}_i = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i}(-w, p) \quad (i=1, \dots, m) \quad .||$$

O anterior corolário é o conhecido lema de HOTTELING, e estabelece uma relação biunívoca entre as derivadas parciais da função lucro e as funções procura de factores e oferta de produtos da empresa. Isto porque $\bar{x}$ e $\bar{y}$ dependerão, como é óbvio, do w e do p considerados. Se explicitarmos esta dependência funcional virá:

$$\bar{x}_j(w, p) = - \frac{\partial \Pi}{\partial w_j}(-w, p) \quad (j=1, \dots, n)$$

e

$$\bar{y}_i(w, p) = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i}(-w, p) \quad (i=1, \dots, m)$$

tendo estas funções por domínio os pontos de diferenciabilidade de Π . No caso de Π ser não diferenciável, o corolário 4.1.4.I.1 deixa de ser aplicável, e a proposição 4.1.4.I que o originou aparece constituindo uma generalização do lema de HOTTELING em termos de análise subdiferencial.

— Para terminar esta secção, convirá referir que vários resultados de estática comparada poderão ser facilmente deduzidos a partir do corolário 4.1.4.I.1., e na hipótese adicional de bidiferenciabilidade da função lucro. Para esta dedução serão unicamente necessários o referido corolário, alguns resultados elementares de cálculo e as propriedades diferenciais e bidiferenciais das funções convexas que apresentámos na alínea 1.2.9. Para não nos alargamos excessivamente, dispensamo-nos de o fazer, tanto mais que, pelo que dissemos, não passam de resultados de dualidade de "2ª ordem".

4.2. FUNÇÃO LUCRO E FUNÇÃO PRODUÇÃO CLÁSSICA: CASO UNIPRODUÇÃO

4.2.1. Caso uniprodução: o conceito clássico de função de produção e suas principais propriedades

—— Admitamos que a empresa só produz um único output, isto é, que y é unidimensional. Definamos nesta situação o conceito clássico de função de produção da empresa.

Definição: Seja uma empresa produtora de um único output. A função de produção da empresa é a função $g(x)$ que dá o supremo do único output da empresa para determinada utilização de inputs x , isto é:

$$g(x) = \sup \{y | (x,y) \in T\}. ||$$

Para T o mais geral possível, o "sup" justifica-se porque não é possível garantir a existência de máximo. Todavia, se T respeitar as hipóteses 4.1.1.A e 4.1.1.B, bem como a próxima hipótese 4.2.1.A, o supremo coincidirá com o máximo, e este será finito.

Hipótese 4.2.1.A: Para cada $x \in \mathbb{R}_{0+}^n$ o conjunto T é semilimitado superiormente em y , isto é, $\{y | (x,y) \in T \text{ para dado } x\}$ é um conjunto semilimitado superiormente. ||

Com efeito, e porque $y \geq 0$, a anterior hipótese equivale a admitir que $\{y | (x,y) \in T \text{ para dado } x\}$ é limitado para cada x . Consequentemente, se este último conjunto for também não vazio e fechado (o que acontecerá se forem respeitadas as hipóteses 4.1.1.A e 4.1.1.B), a proposição 1.2.8.II (teorema de WEIERSTRASS) garante a existência de máximo finito.

Proposição 4.2.1.I: Seja uma empresa produtora de um único output e admitam-se respeitadas as hipóteses 4.1.1.A e 4.1.1.B. Então $T \neq \{(x,y) | g(x) \geq y, y \geq 0\}$. ||

Proposição 4.2.1.II: Seja uma empresa produtora de um único output, e admitam-se respeitadas as hipóteses 4.1.1.A e 4.1.1.C. Então: (i) $g(x)$ é uma função côncava, tem domínio efectivo R_{0+}^n , é não negativa neste domínio efectivo e é pelo menos contínua relativamente a $\text{rint dom } g$; (ii) se também é respeitada a hipótese 4.2.1.A, $g(x)$ é própria; (iii) se são também respeitadas as hipóteses 4.1.1.B e 4.2.1.A, $g(x)$ é igualmente fechada e é contínua relativamente ao seu domínio efectivo R_{0+}^n . ||

4.2.2. Função lucro normalizada como conjugada da função de produção

— Seja a função lucro da empresa tal como a definimos na alínea 4.1.2.:

$$\Pi(-w,p) = \sup \{ \langle p,y \rangle - \langle w,x \rangle | (x,y) \in T \}.$$

Na situação de uniprodução que estamos a tratar, e já que:

$$\begin{cases} p \geq 0 \\ (x,y) \in T \Rightarrow g(x) \geq y \quad (\text{prop. 4.2.1.I}) \end{cases}$$

podemos escrever equivalentemente:

$$\Pi(-w,p) = \sup \{ p \cdot g(x) - \langle w,x \rangle \}.$$

Se $p=0$ teremos Π trivialmente nula. Se $p>0$ poderemos dividir toda a expressão por p , donde fica:

$$\Pi(-w,p)/p = \sup \{ g(x) - \langle w/p, x \rangle \}$$

Definição: Seja uma empresa produtora de um único output e seja $p>0$. A respectiva função lucro nos preços normalizados (ou função lucro normalizada) é a função:

$$\pi(w/p) = \sup\{g(x) - \langle w/p, x \rangle\} .||$$

Proposição 4.2.2.I: Seja uma empresa produtora de um único output e seja $p > 0$. Então a sua função lucro $\pi(-w, p)$ é linearmente homogênea em $(-w, p)$ e $\pi(w/p) = \pi(-w, p)/p$.||

Proposição 4.2.2.II: Seja uma empresa produtora de um único output e seja $p > 0$. Se a função de produção $g(x)$ for côncava, então a função lucro nos preços normalizados é a simétrica da conjugada da função de produção, isto é, $\pi(w/p) = -g^*(w/p)$.||

Corolário 4.2.2.II.1: Seja uma empresa produtora de um único output e seja $p > 0$. Se a função de produção for côncava, então $\pi(w/p)$ é convexa fechada, própria sse g é própria, e pelo menos contínua relativamente a $\text{rint dom } \pi$.||

4.2.3. Recuperação da função de produção a partir da função lucro normalizada

— Pela proposição 4.2.1.II, se T respeitar as hipóteses 4.1.1.A, 4.1.1.B, 4.1.1.C e 4.2.1.A, então a função de produção é uma função côncava fechada. Pela proposição 2.1.5.II teremos, por isso, que:

$$g = g^{**}$$

ou seja, e tendo em conta a proposição 4.2.2.II:

$$g(x) = [-\pi(w/p)]^*$$

Proposição 4.2.3.I: Seja uma empresa produtora de um único output, e seja $p > 0$. Se $g(x)$ for uma função côncava fechada, então:

$$g(x) = [-\pi(w/p)]^* .||$$

No caso de $g(x)$ não ser côncava e/ou fechada, e na mesma lógica do que apontamos na alínea 4.1.3., recuperar-se-á, não $g(x)$, mas a função cujo hipografo é o fecho da envolvente convexa do hipografo de $g(x)$.

4.2.4. Principais propriedades marginais da função lucro normalizada/lema de HOTTELING

— Da relação de conjugação entre $g(x)$ e $-\pi(w/p)$, e pela aplicação da proposição 2.1.5.IV., obtemos directamente o seguinte resultado fundamental:

Proposição 4.2.4.I: Seja uma empresa produtora de um único output, e seja dados $p > 0$ e $w \in \mathbb{R}_{0+}^n$. Se $g(x)$ é côncava fechada, então o plano de produção $(\bar{x}, g(\bar{x}))$ é ótimo para a empresa sse $\bar{x} \in \partial[-\pi(w/p)]$, ou, equivalentemente, sse $\bar{x} \in -\partial[\pi(w/p)]$. ||

Corolário 4.2.4.1.1: Seja uma empresa produtora de um único output, e sejam dados $p > 0$ e $w \in \mathbb{R}_{0+}^n$. Se $g(x)$ é côncava fechada e se π for diferenciável em w/p , então o único plano $(\bar{x}, g(\bar{x}))$ ótimo para a empresa é o que respeitar a igualdade:

$$\bar{x} = -\nabla \pi(w/p),$$

ou, equivalentemente:

$$\begin{cases} \bar{x}_j = -\partial \pi / \partial w_j & (j=1, \dots, n) \\ \bar{y} = \partial \pi / \partial p \end{cases} . ||$$

Como já tínhamos notado na alínea 4.1.4., o anterior resultado não é mais que o bem conhecido lema de HOTTELING. Estabelecemo-lo agora por uma via diferente da utilizada na secção 4.1., embora menos

geral.

— Em suma, mostrámos nesta secção 4.2. que, na situação de uni-produção, é possível encarar a dualidade tecnologia/função lucro de uma forma alternativa à exposta na secção 4.1.. Tal deriva de neste caso dispôrmos do conceito clássico de função de produção, a qual sintetiza as características relevantes da tecnologia da empresa. Veremos na próxima secção que, mesmo na situação de multiprodução e através de uma extensão do conceito de função de produção, é possível estabelecer a dualidade tecnologia/função lucro por uma via diferente da que utilizámos na secção 4.1..

4.3. FUNÇÃO LUCRO E FUNÇÃO DE PRODUÇÃO GENERALIZADA DE JORGENSEN E LAU: MULTIPRODUÇÃO

4.3.1. Generalização do conceito clássico de função de produção

—— Vimos na secção anterior como o conceito de função produção permite representar os aspectos relevantes da tecnologia da empresa no caso de ela produzir um único output. Para a situação mais geral de multiprodução, porém, o conceito clássico de função de produção deixa de ser viável, na medida em que deixa de haver um numerário natural. JORGENSEN e LAU (1974) apresentaram uma generalização possível que permite uma boa "performance" na análise da dualidade tecnologia/função lucro. Basicamente, esta generalização consiste em escolher para numerário um input que não seja simultaneamente output da empresa.⁽³⁶⁾

É de sublinhar que JORGENSEN e LAU (1974) e LAU (1978) optam por um numerário que seja input, porque tal escolha permite que mantenham a análise num quadro de hipóteses o mais geral possível e formado pelas hipóteses 4.1.1.A; 4.1.1.B e 4.1.1.C.. Se se tivesse optado por tomar para numerário um output, seria necessária uma hipótese adicional sobre T, impondo que este conjunto fosse semilimitado superiormente no numerário quando fixado quaisquer valores para as restantes componentes de $(x,y) \in R_{0+}^{n+m}$.

—— Escolhamos o input x_n para numerário. Note-se que não há perda de generalidade por escolhermos para numerário a n-ésima compo-

(36) - A imposição de que o numerário escolhido não seja simultaneamente input e output destina-se a garantir que estamos efectivamente a escolher um numerário, e não a criarmos uma situação dúbia.

nente do vector x , pois poderemos sempre reordenar x de modo a que a componente escolhida passe a ser n -ésima. Adoptemos a notação:

$$x = (v, x_n) \quad \text{com } v \in \mathbb{R}_{0+}^{n-1} \text{ e } x_n \geq 0.$$

Definição: A função de produção generalizada é a função

$$f(v, y) = \inf\{x_n \mid (v, x_n, y) \in T\},$$

ou seja, é a função que indica qual a ínfima quantidade utilizável do input x_n , fixadas as quantidades a produzir y e as quantidades a utilizar dos restantes inputs v . ||

Se tivermos para dado (v, y) que $\{x_n \mid (v, x_n, y) \in T\} = \emptyset$, então $f(v, y) = +\infty$. Para (v, y) tal que $\{x_n \mid (v, x_n, y) \in T\}$ não vazio e fechado⁽³⁷⁾, e porque $x_n \geq 0$, um argumento idêntico ao desenvolvido na demonstração da proposição 1.2.8.II (teorema de WEIERSTRASS) permite garantir que $f(v, y) = \max\{x_n \mid (v, x_n, y) \in T\}$ e que f é não negativa e finita.

Proposição 4.3.1.I: Admita-se respeitada a hipótese 4.1.1.B. Então $T = \{(v, x_n, y) \mid f(v, y) \leq x_n\}$. ||

Proposição 4.3.1.II: Admitam-se respeitadas as hipóteses 4.1.1.A e 4.1.1.C. Então: (i) $f(v, y)$ é uma função convexa própria não negativa e pelo menos contínua relativamente a $\text{rint dom } f$; (ii) se também é respeitada a hipótese 4.1.1.B., $f(v, y)$ é igualmente fechada. ||

4.3.2. Função lucro normalizada como conjugada da função de produção generalizada

Sejam $w_n > 0$, $w^N = \frac{1}{w_n} (w_1, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{R}_{0+}^{n-1}$ e $p^N = \frac{1}{w_n} (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}_{0+}^m$. Podemos escrever como se segue a função lucro da empresa:

(37) - Se T for fechado (hip. 4.1.1.B), a proposição 1.1.5.VI permite concluir que $\{x_n \mid (v, x_n, y) \in T\}$ também é fechado para cada (v, y) .

$$\begin{aligned} \Pi(-w, p) &= \sup \{ \langle (-w, p), (x, y) \rangle \mid (x, y) \in T \} \\ \Leftrightarrow \frac{\Pi(-w, p)}{w_n} &= \sup \{ \langle (-w^N, p^N), (v, y) \rangle - f(v, y) \}. \end{aligned}$$

Definição: Seja $w_n > 0$. A função lucro normalizada no preço do n-ésimo input é a função: $\Pi^N(-w^N, p^N) = \sup \{ \langle (-w^N, p^N), (v, y) \rangle - f(v, y) \}.$

Proposição 4.3.2.I: Seja $w_n > 0$. Então a sua função lucro $\Pi(-w, p)$ é linearmente homogênea em $(-w, p)$ e $\Pi^N(-w^N, p^N) = \Pi(-w, p) / w_n.$

Proposição 4.3.2.II: Seja $w_n > 0$ e admita-se que $f(v, y)$ é convexa. Então a função lucro normalizada no preço do n-ésimo input é a conjugada da função de produção generalizada, isto é,

$$\Pi^N(-w^N, p^N) = f^*(-w^N, p^N).$$

Corolário 4.3.2.II.1: Seja $w_n > 0$ e admita-se que $f(v, y)$ é convexa. Então $\Pi^N(-w^N, p^N)$ é convexa fechada, própria sse f é própria, e pelo menos contínua relativamente a $\text{rint dom } \Pi^N.$

4.3.3 Recuperação da função de produção generalizada a partir da função lucro normalizada

— A seguinte proposição estabelece a possibilidade de recuperação da função de produção generalizada a partir da função lucro normalizada no preço de n-ésimo input. Esta recuperação decorre directamente da relação de conjugação entre $f(v, y)$ e $\Pi^N(-w^N, p^N).$

Proposição 4.3.3.I: Seja $w_n > 0$ e admita-se que $f(v, y)$ é convexa fechada. Então $f(v, y) = [\Pi^N(-w^N, p^N)]^*.$

Se $f(v, y)$ for não convexa e/ou não fechada, a sua recuperação a partir da função lucro normalizada permitirá obter, não f , mas a maior função convexa fechada por ela majorada.

4.3.4. Propriedades marginais da função lucro normalizada/lema de HOTTELING

— Da relação de conjugação entre f e Π^N , e pela aplicação da proposição 2.1.4.I, é também possível de estabelecer:

Proposição 4.3.4.I: Sejam dados $w_n > 0$, $w^N \in R_{0+}^{n-1}$ e $p^N \in R_{0+}^m$. Se f é convexa fechada, então o plano de produção $(\bar{v}, f(\bar{v}, \bar{y}), \bar{y})$ é ótimo para a empresa sse $(\bar{v}, \bar{y}) \in \partial \Pi^N(-w^N, p^N)$. ||

Corolário 4.3.4.I.1: (Lema de HOTTELING) Sejam dados $w_n > 0$, $w^N \in R_{0+}^{n-1}$ e $p^N \in R_{0+}^m$. Se f é convexa fechada e se Π^N é diferenciável em $(-w, p)$, então o único plano $(\bar{v}, f(\bar{v}, \bar{y}), \bar{y})$ ótimo para a empresa é o que respeitar a igualdade:

$$(\bar{v}, \bar{y}) = \nabla \Pi^N(-w^N, p^N),$$

$$\text{ou, equivalentemente: } \begin{cases} \bar{x}_j = -\partial \Pi(-w, p) / \partial w_j & (j=1, \dots, n) \\ \bar{y}_i = \partial \Pi(-w, p) / \partial p_i & (i=1, \dots, m). \end{cases} ||$$

— Os anteriores resultados finalizam esta secção e, conjuntamente com os restantes, mostram que a dualidade tecnologia/função lucro pode ser adequadamente estudada utilizando a função de produção generalizada de JORGENSON e LAU. Estabeleceu-se, portanto, mesmo para o caso de multiprodução, uma abordagem alternativa à secção 4.1...

4.4. FUNÇÃO LUCRO E FUNÇÃO GAUGE-I DO CONJUNTO DE POSSIBILIDADES DE PRODUÇÃO

4.4.1. Função gauge-I do conjunto de possibilidades de produção

— Nas secções 4.2. e 4.3. exploramos minimamente a dualidade entre função lucro e tecnologia da empresa, representando esta última, quer através do conceito clássico de função produção, quer através de uma generalização deste conceito. Nesta secção 4.4. completa-se este capítulo 4 delineando ainda uma outra via possível, em que se representa T através da sua função gauge-I⁽³⁸⁾.

— Admita-se a verificação da hipótese 4.1.1.C. (T convexo). Da secção 2.3., proposição 2.3.1.I, a função gauge-I do conjunto de possibilidades de produção é dada por:

$$\gamma_1((x,y)|T) = \inf\{\lambda | \lambda > 0, (x,y) \in \lambda T\}.$$

A figura 4.4.1.A ilustra qual o significado desta função gauge-I de T . Ela dá-nos o ínfimo dos escalares positivos pelos quais se deve dividir (x,y) de modo a que o vector resultante pertença a T .

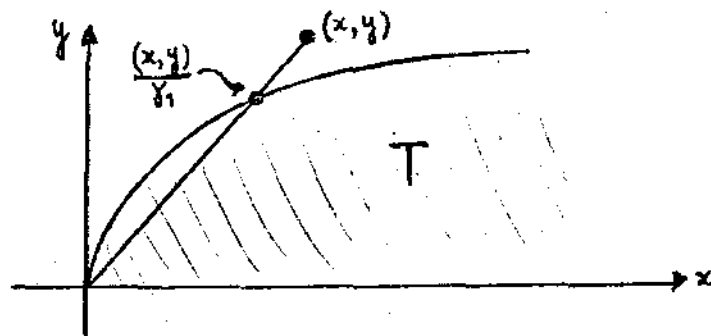


Figura 4.4.1.A: Ilustração do significado da função gauge-I de T

(38) - A exemplo do que é feito, nomeadamente, por McFADDEN (1978a)

——— Proposição 4.4.1.I: Admita-se respeitada a hipótese 4.1.1.C (T convexo). Então $\gamma_1((x,y)|T)$ é uma função convexa, linearmente homogênea, não negativa, pelo menos contínua relativamente a $\text{rint dom } \gamma_1$, sendo própria sse T não vazio (hip. 4.1.1.A). Se forem igualmente respeitadas as hipóteses 4.1.1.A e 4.1.1.B (T contendo a origem e fechado), então $\gamma_1((x,y)|T)$ é também fechada e $S\gamma_1^{\leq}(1) = \{(x,y) | \gamma_1((x,y)|T) \leq 1\} = T$. ||

4.4.2. A função lucro e a função gauge-I do conjunto de possibilidades de produção como funções gauge-I polares/obtenção de uma a partir de outra

——— Por definição, a função gauge-I polar de $\gamma_1((x,y)|T)$ é a função gauge-I do conjunto polar inferior de T (admitindo T convexo):

$$\gamma_1^0((x^*,y^*)|T) = \inf \{ \lambda | \lambda > 0, (x^*,y^*) \in \lambda \cdot T_-^0 \}$$

em que $T_-^0 = \{(x^*,y^*) | \langle (x^*,y^*), (x,y) \rangle \leq 1, \forall (x,y) \in T\}$. Fazendo $(x^*,y^*) = (-w,p)$, fica:

$$\gamma_1^0((-w,p)|T) = \inf \{ \lambda | \lambda > 0, (-w,p) \in \lambda T_-^0 \}$$

e

$$T_-^0 = \{(-w,p) | \langle (-w,p), (x,y) \rangle \leq 1, \forall (x,y) \in T\}.$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} \gamma_1^0((-w,p)|T) &= \inf \{ \lambda | \lambda > 0, \langle (-w,p), (x,y) \rangle \leq \lambda, \forall (x,y) \in T \} \\ &= \sup \{ \langle (-w,p), (x,y) \rangle | (x,y) \in T \} \\ &= \Pi(-w,p). \end{aligned}$$

Proposição 4.4.2.I: Admita-se respeitada a hipótese 4.1.1.C (T convexo). Então a função gauge-I polar da função gauge-I de T é a função lucro:

$$\gamma_1^0((-w,p)|T) = \Pi(-w,p) \quad . ||$$

Corolário 4.4.2.I.1: Admitam-se respeitadas as hipóteses 4.1.1.A e 4.1.1.C (T convexo não vazio). Então a função lucro $\Pi(-w,p)$ é convexa própria, fechada, linearmente homogênea e pelo menos contínua relativamente a $\text{rint dom } \Pi$. Também: $T_-^0 = \{(-w,p) | \Pi(-w,p) \leq 1\}$. ||

Repare-se na semelhança entre este último corolário e o correspondente corolário 4.1.2.I.1. da secção 4.1..

—— A próxima proposição é extremamente importante e completa o raciocínio desenvolvido com a proposição 4.4.2.I e corolário 4.4.2.I.1. Com efeito, vem estabelecer a possibilidade de obtenção de Π a partir de γ_1 e a possibilidade de recuperação desta a partir daquela.

Proposição 4.4.2.II: Admitam-se respeitadas as hipóteses 4.1.1.A, 4.1.1.B e 4.1.1.C (T convexo fechado e contendo a origem). Então $\Pi(-w,p)$ e $\gamma_1((x,y)|T)$ são gauge-I polares uma da outra e:

$$\begin{aligned} \Pi(-w,p) &= \inf \{ \lambda | \lambda > 0, \langle (-w,p), (x,y) \rangle \leq \lambda \gamma_1((x,y)|T), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \}, \\ \gamma_1((x,y)|T) &= \inf \{ \lambda | \lambda > 0, \langle (-w,p), (x,y) \rangle \leq \lambda \Pi(-w,p), \forall (-w,p) \in \mathbb{R}^{n+m} \} \quad || \end{aligned}$$

4.4.3. Propriedades marginais da função lucro/lema de HOTTELING

—— Se respeitadas as hipóteses 4.1.1.A, 4.1.1.B e 4.1.1.C, a proposição 2.3.2.V., associada à proposição 4.4.2.I., permite concluir que $\Pi(-w,p) = \delta^*((-w,p)|T)$. É obvio, portanto, que as propriedades marginais da função lucro estabelecidas na secção 4.1., alinea

4.1.4., poderão também ser deduzidas tendo por base a relação de polaridade explorada nesta secção 4.4.. Tal confirma, definitivamente, esta via como uma das possíveis para a abordagem da dualidade tecnologia/função lucro.

5.1. FUNÇÃO CUSTO COMO FUNÇÃO SUPORTE DOS "INPUT REQUIREMENT SETS"

5.1.1. "Input Requirement Sets"

——— Definição: Seja uma empresa com conjunto de possibilidades de produção $T \subset \mathbb{R}_{0+}^{n+m}$. O "Input Requirement Set" (para maior brevidade: IRS) associado ao vector y de outputs é o conjunto $X(y) = \{x | (x, y) \in T\}$, isto é, é o conjunto de todos os vectores de inputs que permitem obter o vector y de outputs. ||

Admitamos as três hipóteses seguintes sobre cada IRS:

Hipótese 5.1.1.A: Para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m$, o correspondente $X(y)$ é não vazio. ||

Hipótese 5.1.1.B: Para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m$, $X(y)$ é um conjunto fechado. ||

Hipótese 5.1.1.C: Para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m$, $X(y)$ é um conjunto convexo. ||

A hipótese 5.1.1.A corresponde a assumir que é tecnologicamente possível produzir qualquer vector de outputs pertencente ao ortante não negativo de $\mathbb{R}_{0+}^m$.

Quanto à hipótese 5.1.1.B, e conforme já notámos a propósito da hipótese 4.1.1.B, impôr que $X(y)$ é fechado significa impôr que toda a sucessão convergente de elementos de $X(y)$ é ainda um elemento de $X(y)$. Afasta-se com esta hipótese a possibilidade de não pertencer a $X(y)$ algum vector da sua fronteira. Finalmente, a hipótese 5.1.1.C equivale a assumir, para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m$, a divisibilidade perfeita da tecnologia. É conveniente sublinhar que: (i) hip. 4.1.1.A $\Rightarrow$ hip. 5.1.1.A; (ii) hip. 4.1.1.B $\Rightarrow$ hip. 5.1.1.B (prop. 1.1.5.VI); (iii) hip.

4.1.1.C $\Rightarrow$ hip. 5.1.1.C (prop. 1.1.1.IV). Note-se, contudo e por exemplo, que o inverso da implicação (ii) não é verdadeiro. Com efeito, o termos cada $X(y)$ convexo em x , não permite garantir que T é convexo em (x,y) . Quer isto dizer que a hipótese 5.1.1.C de convexidade de cada $X(y)$ é menos exigente que a hipótese de convexidade de T . Mais à frente (alínea 5.1.6.) veremos as consequências deste facto.

5.1.2. Função custo como função suporte dos IRS

— No capítulo 4 fizemos a suposição de que a empresa deparava com uma situação concorrencial, quer no mercado dos outputs, quer no dos inputs. Neste capítulo 5 vamos apenas assumir a concorrência perfeita no mercado de inputs, sendo irrelevante a situação no mercado dos outputs.

— Definição: A função custo da empresa é a função que dá o ínfimo custo para produzir o vector de outputs aos preços w dos inputs:

$$C(-w,y) = \inf \{ \langle w, x \rangle \mid x \in X(y) \} = - \sup \{ \langle -w, x \rangle \mid x \in X(y) \}. \quad ||$$

Proposição 5.1.2.I: Sejam $w \in R_{0+}^n$ e $y \in R_{0+}^m$. A função custo é não negativa e, se $w \in \text{int } R_{0+}^n$ ($w \gg 0$) e se forem respeitadas as hipóteses 5.1.1.A e 5.1.1.B ($X(y)$ não vazio e fechado), então:

$$C(-w,y) = \min \{ \langle w, y \rangle \mid x \in X(y) \} = - \max \{ \langle -w, x \rangle \mid x \in X(y) \}$$

e C é finita. ||

No caso de w incluir alguma componente nula, e para ilustrar a possibilidade de não existência de mínimo, poder-se-á considerar uma empresa com tecnologia Cobb-Douglas $\{(x_1, x_2) | x_1^\alpha x_2^\beta \geq y\}$, $y > 0$ e w_1 nulo. Nesta situação não existirá mínimo, pois será vantajoso substituir indefinidamente o input com preço positivo pelo input livre (C será, portanto, $\inf\{w_2 \cdot x_2 | x_1^\alpha x_2^\beta \geq y\} = 0$).

Proposição 5.1.2.II: Admita-se respeitada a hipótese 5.1.1.C ($X(y)$ convexo para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^n$). Então a função custo $\bar{c}$, para cada y , a simétrica da função suporte de $X(y)$:

$$C(-w, y) = -\delta^*(-w | X(y)). \parallel$$

Corolário 5.1.2.II.1: Admitam-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.A e 5.1.1.C. Então a função custo $\bar{c}$, para cada y , uma função côncava, própria, fechada, linearmente homogênea, com domínio efectivo $-\mathbb{R}_{0+}^n$ e contínua relativamente a este domínio efectivo. $\parallel$

5.1.3. Recuperação dos IRS a partir da função custo

— Se cada $X(y)$ respeitar as hipóteses 5.1.1.B e 5.1.1.C, isto é, se forem conjuntos convexos fechados, as respectivas funções indicadoras são funções convexas fechadas. Logo, as conjugadas das suas conjugadas são elas próprias (prop. 2.1.2.I). Por outras palavras, e atendendo a que a conjugada de $\delta(x | X(y))$ é $\delta^*(-w | X(y)) = C(-w, y)$, a conjugada em $-w$ de $C(-w, y)$ é a função indicadora de $X(y)$. Alternativamente, a proposição 2.2.1.I fornece também um processo de recuperação de conjuntos convexos fechados a partir das respec-

tivas funções suporte.

Proposição 5.1.3.I: Admitam-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.B e 5.1.1.C ($X(y)$ convexo fechado). Então, alternativa e equivalentemente: (i) $X(y) = \{x \mid [-C(-w, y)]^*_{(-w)} = 0\}$; (ii) $X(y) = \{x \mid \langle w, x \rangle \geq C(-w, y), \forall w \in \mathbb{R}^n_{0+}\}$. ||

Se $X(y)$ é não convexo e/ou não fechado, a sua recuperação de acordo com a proposição 5.1.3.I permitirá obter, não $X(y)$, mas o fecho da sua envolvente convexa. Refira-se ainda que o anterior importante resultado é uma formulação possível do bem conhecido teorema de dualidade de SHEPHARD-UZAWA.

5.1.4. Propriedades marginais da função custo/lema de SHEPHARD

— Da aplicação directa da proposição 2.1.4.I, (iii) e (iv), à relação de conjugação entre a função indicadora de $X(y)$ e a simétrica da função custo, resulta a seguinte proposição:

Proposição 5.1.4.I: Sejam dados $w \in \mathbb{R}^n_{0+}$ e $y \in \mathbb{R}^m_{0+}$; e admitam-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.B e 5.1.1.C ($X(y)$ convexo fechado). Então o vector $\bar{x}^c$ é ótimo para a empresa, do ponto de vista de custo para produzir y , sse: $\bar{x}^c \in \partial_{(-w)} [-C(-w, y)]$. ||

A proposição 5.1.4.I estabelece uma correspondência entre os vectores que originam ínfimo custo e os subdiferenciais da simétrica da função custo em $-w$. No caso de C ser diferenciável em $(-w, y)$ virá, atendendo à proposição 1.2.10.IV, o fundamental lema de

SHEPHARD:

Corolário 5.1.4.I.1: Sejam dados $w \in \mathbb{R}_{0+}^n$ e $y \in \mathbb{R}_{0+}^m$, e admitam-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.B e 5.1.1.C.. Se $C(-w, y)$ é diferenciável em $(-w, y)$, então o único vector $\bar{x}^C$ ótimo do ponto de vista do custo da empresa é dado por: $\bar{x}^C = \partial C(-w, y) / \partial w_j \quad (j=1, \dots, n).$ ||

Sublinhe-se que o vector $\bar{x}^C$ determina a procura de factores pela empresa se esta agir segundo um comportamento de minimização do custo para produzir y . A notação $\bar{x}^C$ justifica-se pelo facto de esta procura ser usualmente designada por procura compensada (ou hicksiana). Tal como fizemos na alínea 4.1.4. a propósito das funções de procura ordinária de factores, vamos dispensar-nos de explorar as propriedades diferenciais das funções de procura compensada. A justificação é a mesma que foi então apresentada.

5.1.5. Uma hipótese adicional de "free disposal" de outputs/monotonia não decrescente em y da função custo

— Admitamos uma hipótese adicional sobre os "Inputs Requirement Sets":

Hipótese 5.1.5.A: $(y^1, y^2 \in \mathbb{R}_{0+}^m \text{ e } y^1 \geq y^2) \Rightarrow X(y^1) \subset X(y^2)$.||

Esta hipótese é conhecida na literatura como a hipótese de "free disposal" de outputs, no sentido em que, se fôr respeitada e se um vector x permite produzir y^1 , então também permite produzir qualquer $0 \leq y^2 \leq y^1$.

Proposição 5.1.5.I: Considerem-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.C ($X(y)$ convexos) e 5.1.5.A. Então para cada w , a função custo é monótona não decrescente em y . ||

5.1.6. Uniprodução: dualidade função de produção clássica/função custo

— A proposição 4.2.1.I estabelece que, no caso de uniprodução e se respeitadas as hipóteses 4.1.1.A e 4.1.1.B (que implicam, como vimos na alínea 5.1.1., as hipóteses 5.1.1.A e 5.1.1.B), temos:

$$T = \{(x, y) \mid g(x) \geq y\}$$

Em consequência:

$$X(y) = \{x \mid g(x) \geq y\}.$$

Repare-se que nesta situação os conjuntos $X(y)$ não são mais do que os conjuntos de nível superior da função de produção: $X(y) = S_g^+(y)$. Deste modo, as hipóteses 5.1.1.B e 5.1.1.C equivalem a impôr a quase-concavidade e a semicontinuidade inferior da função de produção. Confirma-se assim o que já tínhamos afirmado na alínea 5.1.1. sobre o carácter menos restritivo das hipóteses 5.1.1.A, 5.1.1.B e 5.1.1.C relativamente às hipóteses do capítulo 4. Resta referir, e como é óbvio, que tudo o que foi estabelecido nas alíneas anteriores permanecerá válido para uma empresa produtora de um único output e com função de produção quase-côncava e semicontínua inferior. Para tal bastará fazer $X(y) = \{x \mid g(x) \geq y\}$.

5.2. FUNÇÃO CUSTO E FUNÇÃO DISTÂNCIA DE SHEPHARD

5.2.1. Função distância de SHEPHARD

Uma via, alternativa à descrita na secção 5.1., para a exploração da dualidade tecnologia/função custo, assenta no conceito de função distância formulado originalmente por SHEPHARD.

Definição: A função distância da tecnologia é a função:

$$D(x,y) = \sup\{\lambda | \lambda > 0, x/\lambda \in X(y)\},$$

que dá o supremo dos escalares positivos λ pelos quais se pode dividir um determinado vector x de inputs de modo a que x/λ ainda permita produzir y . ||

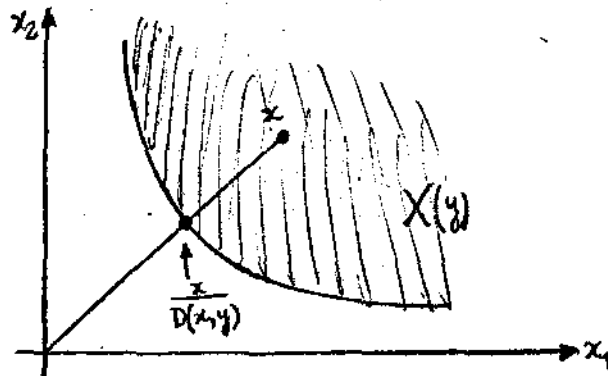


Figura 5.2.1.A: Ilustração do significado de $D(x,y)$.

Como nota JACOBSEN (1970, p. 761), $D(x,y)$ não constitui, apesar da designação, uma função distância no sentido matemático usual do termo. Repare-se também que $x \in X(y) \Rightarrow D(x,y) = 1 \Leftrightarrow D(x,y) - 1 = 0$, ou seja, a função distância de SHEPHARD pode ser encarada como uma função de transformação da tecnologia, vocacionada especialmente

para o estudo da dualidade tecnologia/função custo. Repare-se ainda que, no caso particular de uniprodução, depreende-se facilmente pelas definições que a relação entre função de produção e função distância é dada por: $y=g(x/D(x,y)), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

— Antes de apresentarmos as primeiras propriedades da função distância é conveniente que enunciemos duas hipóteses adicionais sobre cada IRS. que nos serão necessárias para a dedução dos próximos resultados.

Hipótese 5.2.1.A: Para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$, $X(y) \subset \mathbb{R}_{0+}^n \setminus \{0\}$. ||

Hipótese 5.2.1.B: Para cada $x^1 \in X(y)$ e $x^2 = \lambda x^1$ com $\lambda \geq 1$, temos $x^2 \in X(y)$. ||

A hipótese 5.2.1.A impõe que a origem não pertence a nenhum IRS para $y \neq 0$, isto é, que a partir do nada não é possível produzir coisa alguma. Quanto à hipótese 5.2.1.B, são de realçar as três seguintes considerações:

(i) É uma formulação enfraquecida da hipótese de "free disposal" de inputs. Com efeito, ela corresponde apenas à exigência de "free disposal" radial (e não absoluta).

(ii) É, apesar de tudo, a hipótese menos pacífica das que já apresentámos. Costuma ser referido a este propósito o exemplo da agricultura, em que uma sobreutilização de água ou adubos pode acarretar a diminuição da produção.

(iii) Finalmente, realce-se que impôr a hipótese 5.2.1.B é equivalente a impôr que $\lambda_1 X(y) \supset \lambda_2 X(y)$, $\forall 0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Proposição 5.2.1.I: Considerem-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.C e 5.2.1.A ($X(y)$ convexos e não contendo a origem para $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$). Então, para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$:

$$D(x,y) = -\gamma_2(x|X(y)) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}_{0+}^n$$

isto é, a função distância $\bar{e}$, para cada y , a função gauge-II do respectivo IRS. ||

Corolário 5.2.1.I.1: Considerem-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.C e 5.2.1.A. Então: (i) para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$, a função distância $D(x,y)$ é, em x , uma função côncava, linearmente homogênea, positiva no seu domínio efectivo, e pelo menos contínua relativamente a $\text{rintdom } D$; (ii) se respeitadas também as hipóteses 5.1.1.A e 5.1.1.B ($X(y)$ não vazios e fechados), $D(x,y)$ é igualmente concava própria. ||

Corolário 5.2.1.I.2: Considerem-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.C, 5.2.1.A e 5.2.1.B ($X(y)$ convexos, não contendo a origem e tais que $\lambda_1 X(y) \supset \lambda_2 X(y)$, $\forall 0 < \lambda_1 < \lambda_2$, para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$). Então: $\{x | D(x,y) \geq 1\} = X(y)$ para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$. ||

Corolário 5.2.1.I.3: Considerem-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.A, 5.1.1.B, 5.1.1.C, 5.2.1.A e 5.2.1.B ($X(y)$ convexos, fechados, não vazios, não contendo a origem, e tais que $\lambda_1 X(y) \supset \lambda_2 X(y)$, $\forall 0 < \lambda_1 < \lambda_2$, para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$). Então, para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$: c1 $D(x,y) = D(\bar{x},y)$, $\forall x \in \text{dom } D(x,y)$. ||

Proposição 5.2.1.II: Considere-se respeitada a hipótese 5.2.1.B ($X(y)$ tais que $\lambda_1 X(y) \supset \lambda_2 X(y)$, $\forall 0 < \lambda_1 < \lambda_2$). Então a função $D(x,y)$ é

não crescente em $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$. ||

5.2.2. Função distância e função custô como função gauge-II polares

— Admitam-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.A, 5.1.1.C e 5.2.1.A. A proposição 2.3.4.IV permite escrever:

$$\gamma_2^0(x^*|X(y)) = \gamma_2(x^*|X_+^0(y)).$$

Se fôr também respeitada a hipótese 5.1.1.B, pela proposição 2.3.4.I podemos acrescentar:

$$cl \gamma_2^0(x^*|X(y)) = cl \gamma_2(x^*|X_+^0(y)) = \delta^*(x^*|-(X_+^0(y))_+^0)$$

Pela proposição 2.3.4.II sabemos que $(X_+^0(y))_+^0 = X(y)$. Logo, fazendo $x^*=w$, teremos

$$\begin{aligned} cl \gamma_2^0(w|X(y)) &= \delta^*(w|-X(y)) = \delta^*(-w|X(y)) = \\ &= \sup\{\langle -w, x \rangle | x \in X(y)\} \\ &= -C(-w, y) \end{aligned}$$

Consequentemente, atendendo à proposição 5.2.1.I, virã para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$:

$$C(-w, y) = -\delta^*(-w|X(y)) = -cl \left[-D \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix} (w) \right].$$

Proposição 5.2.2.I: Admitam-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.A, 5.1.1.B, 5.1.1.C e 5.2.1.A ($X(y)$ não vazio, fechado, convexo e não contendo a origem para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$). Então, para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$, vem:

$$C(-w, y) = -\delta^*(-w|X(y)) = -cl \left[-D \begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix} (w) \right]. ||$$

Repare-se ^{que} ao estabelecer $C = -\delta^*(-w|X(y))$ para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$, a

anterior proposição permitirá deduzir propriedades da função custo idênticas às apresentadas no corolário 5.1.2.II.1, utilizando exactamente o mesmo argumento. A única diferença será a restrição da sua validade a $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$ (de acordo com a hipótese 5.2.1.A, necessária à proposição 5.2.2.I, mas não necessária à proposição 5.1.2.II). Igualmente todos os resultados das alíneas 5.1.3., 5.1.4. e 5.1.5, poderão ser obtidos para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$ tendo por base a proposição 5.2.2.I. Dispensamo-nos, por isso, de os repetir.

Terminaremos esta secção 5.2. e o capítulo 5, aprofundando um pouco mais a relação de dualidade acabada de estabelecer entre a função distância e a função custo. Exploremos, nomeadamente, a possibilidade de recuperação de uma a partir da outra.

Corolário 5.2.2.I.1: Considerem-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.A, 5.1.1.B, 5.1.1.C e 5.2.1.A. Então, para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$, vem:

$$C(-w, y) = -c_1 \gamma_2(w | X_+^0(y)). \quad ||$$

Corolário 5.2.2.I.2: Considerem-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.A, 5.1.1.B, 5.1.1.C, 5.2.1.A e ainda 5.2.1.B (para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$, $X(y)$ tal que $\lambda_1 X(y) \supset \lambda_2 X(y)$, $\forall 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$). Então:

$$X_+^0(y) = \{w | C(-w, y) \geq 1\} \quad . \quad ||$$

Esclareça-se que na literatura económica os conjuntos polares superiores dos vários IRS são usualmente designados por "Factor Price Requirement Sets".

Corolário 5.2.2.I.3: Considerem-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.A

5.1.1.B, 5.1.1.C, 5.2.1.A e 5.2.1.B. Então, para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$:

$$c1 D(x,y) = - \left[-C(-w,y) \right]_2^0 (x).$$

Em particular,

$$D(x,y) = - \left[-C(-w,y) \right]_2^0 (x), \forall x \in \text{dom } D(x,y) . ||$$

Corolário 5.2.2.I.4: Considerem-se respeitadas as hipóteses

5.1.1.A, 5.1.1.B, 5.1.1.C, 5.2.1.A e 5.2.1.B. Então, para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$:

$$C(-w,y) = \sup \{ \lambda | \lambda > 0, \langle w, x \rangle \geq \lambda . c1 D(x,y), \forall x \in \mathbb{R}^n \},$$

e, dualmente:

$$D(x,y) = \sup \{ \lambda | \lambda > 0, \langle w, x \rangle \geq \lambda . C(-w,y), \forall w \in \mathbb{R}^n \}, \forall x \in \text{dom } D(x,y) . ||$$

6.1. DUALIDADE ENTRE FUNÇÕES UTILIDADE DIRECTA E INDIRECTA

6.1.1. Introdução: analogia formal entre as teorias do produtor e consumidor

— Dada a grande analogia formal existente entre as teorias do produtor e consumidor, a análise do capítulo anterior manter-se-á válida para a teoria do consumidor desde que procedamos às necessárias adaptações nas designações e consideremos y unidimensional.

Notação	Teoria do Produtor (cap. 4 e 5)	Teoria do Consumidor
x	Vector n-dimensional de quantidades de inputs a utilizar pela empresa	vector n-dimensional de quantidades a consumir
w	vector n-dimensional de preços dos inputs	vector n-dimensional de preços dos bens de consumo
y	vector m-dimensional de quantidades de outputs da empresa	nível (unidimensional) da utilidade do consumidor (meramente ordinal)
$g(x)$	função de produção clássica da empresa, caso uniprodução	função de utilidade directa ordinal do consumidor
$C(-w, y)$	função custo da empresa	função custo ou despesa do consumidor, dando o ínfimo custo para se atingir o nível de utilidade y aos preços w
$D(x, y)$	função distância da tecnologia	função distância das preferências do consumidor, dando o supremo escalar pelo qual se pode dividir x mantendo um nível de utilidade não inferior a y

— Conforme já notamos na alínea 5.1.6, repare-se que a hipótese 5.1.1.C de convexidade dos conjuntos $X(y) = \{x \mid g(x) \geq y\}$ não é mais que uma hipótese de quase-concavidade da função utilidade. Tal vai implicar que para a obtenção das relações de dualidade entre função de utilidade directa e função de utilidade indirecta não se adequa o instrumental exposto no capítulo 2, tornando-se necessário o recurso à quase-conjugação quase-côncava exposta no capítulo 3.

6.1.2. Função de utilidade indirecta como quase-conjugada quase-côncava da função homogênea de grau 0 associada à função de utilidade directa

— Por problema clássico do consumidor é usualmente entendido o problema de maximização da função de utilidade directa de consumidor sujeito a uma restrição orçamental (e à restrição de não negatividade do vector x de consumos):

$$\max \{g(x) \mid \langle w, x \rangle \leq r, x \geq 0\}$$

em que r representa o rendimento do consumidor ($r \geq 0$). Pela proposição 1.2.8.II (teorema de WEIERSTRASS), se $g(x)$ for contínua relativamente a $\{x \mid \langle w, x \rangle \leq r, x \geq 0\}$ e se $w \in \text{int } R_{0+}^n$ ($w > 0$) para $r \geq 0$, existirá um máximo finito para o anterior problema⁽⁴⁰⁾. Se $g(x)$ não for contínua relativamente ao conjunto de soluções admissíveis⁽⁴¹⁾, e/ou se, para $r > 0$, w tiver alguma componente nula, poderão não exis

(40) - Com efeito, nesta situação $\{x \mid \langle w, x \rangle \leq r, x \geq 0\}$ é um conjunto fechado e não vazio.

(41) - Relembre-se, a propósito, que uma função quase-côncava nem sequer tem que ser contínua relativamente ao interior relativo do seu domínio.

tir máximo finito. De modo a conseguir uma maior generalidade de representação, e por comodidade de comparação com os resultados do capítulo 3, adoptaremos a seguinte formulação do problema clássico do consumidor:

$$\sup \{g(x) \mid \langle w, x \rangle \leq r, x \geq 0\}$$

Definição: Função de utilidade indirecta de um consumidor é a função $V(w, r)$ que, para cada $(w, r) \in \mathbb{R}_{0+}^{n+1}$, dá o supremo da função de utilidade directa sujeita às restrições orçamental e de não negatividade:

$$V(-w, r) = \sup \{g(x) \mid \langle w, x \rangle \leq r, x \geq 0\}. \quad ||$$

Se respeitada a hipótese 5.1.1.C, e conforme referido na alínea anterior, a função de utilidade directa é quase-côncava em $\mathbb{R}_{0+}^n$. A extensão a $\mathbb{R}^n$ desta função é dada por (alínea 3.1.2):

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & (x \in \mathbb{R}_{0+}^n) \\ \inf \{g(x) \mid x \in \mathbb{R}_{0+}^n\} & (x \notin \mathbb{R}_{0+}^n) \end{cases}$$

Associada a esta função quase-côncava de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$ existirá uma função homogênea de grau 0 quase-côncava (alínea 3.1.2.);

$$h_g(x, \mu) = \begin{cases} G(x/\mu) & (\mu > 0) \\ \inf G & (\mu \leq 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ora, } V(-w, r) &= \sup \{g(x) \mid \langle w, x \rangle \leq r, x \geq 0\} \\ &= \sup \{G(x) \mid \langle w, x \rangle \leq r\} \\ &= \sup \{G(\frac{x}{\mu}) \mid \langle w, \frac{x}{\mu} \rangle \leq r, \mu > 0\} \\ &= \sup \{h_g(x, \mu) \mid \langle (-w, r), (x, \mu) \rangle \geq 0\} \end{aligned}$$

Consequentemente, pela definição de função quase-conjugada quase-côncava homogênea de grau 0 fica:

$$V(-w, r) = -h_G^*(-w, r)$$

Proposição 6.1.2.I: Seja $g(x)$ uma função quase-côncava em R_{0+}^n . Então:

$$V(-w, r) = -h_G^*(-w, r)$$

em que $h_G^*(-w, r)$ é a função quase-conjugada da função homogênea de grau 0 associada à extensão a R^n de $g(x)$. ||

Corolário 6.1.2.I.1: Seja $g(x)$ uma função quase-côncava. Então a função de utilidade indirecta $V(-w, r)$ é eqconv e homogênea de grau 0 própria. ||

6.1.3. Recuperação da função de utilidade directa a partir da função de utilidade indirecta

— Se respeitada a hipótese 5.1.1.B, os conjuntos $X(y) = \{x | g(x) \geq y\} = S_g^{\geq}(y)$ são fechados para todo o $y \geq 0$. Como $g(x)$ é não negativa, temos ainda que $S_g^{\geq}(y) = R_{0+}^n$ (fechado) para qualquer $y < 0$. Consequentemente, e pela proposição 1.2.7.VI, a função de utilidade directa é neste caso s.c.s.. Se $g(x)$ for quase-côncava (hip. 5.1.1.C), o corolário 3.1.5.IV.1 permite concluir que a função g é eqconc. O mesmo poderia ter sido concluído atendendo a que os conjuntos $S_g^{\geq}(y)$, ao serem fechados, são ec (prop. 3.1.3.I). Mas sendo $g(x)$ eqconc, também o será a sua extensão a R^n , que designamos por $G(x)$, e a função homogênea de grau 0 a ela associada $h_G(x, \mu)$ (corolário 3.1.5.V.1). A proposição 3.1.5.VI estabelece ainda que $h_G(x, \mu)$, além de eqconc, é própria. Como $h_G^*(-w, r) = -V(-w, r)$, a proposição 3.1.7.II garante então que:

$$\begin{aligned} h_G^{**} &= (-V)^* = h_G(x, \mu) \\ \Rightarrow G(x) &= h_G(x, 1) = (-V)^*(x, 1) \\ \Rightarrow g(x) &= (-V)^*(x, 1) \text{ para } x \in \mathbb{R}_{0+}^n: \end{aligned}$$

Proposição 6.1.3.I: Seja $g(x)$ uma função quase-côncava em $\mathbb{R}_{0+}^n$ e s.c.s(o que é equivalente a admitirem-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.B e 5.1.1.C). Então: $g(x) = (-V)^*(x, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}_{0+}^n$

em que $(-V)^*(x, \mu)$ é a função quase-conjugada quase-côncava da simétrica da função de utilidade directa. ||

Note-se que se $g(x)$ não for quase-côncava e/ou s.c.s(isto é, se $h_G(x, \mu)$ não for eqconc e própria), a sua recuperação a partir da função utilidade indirecta dará, não $g(x)$, mas:

$$(-V)^*(x, 1) = \text{peqconc } h_G(x, 1) \quad (\text{prop. 3.1.7.II}),$$

que é afinal a maior função eqconc majorada por $g(x)$.

6.1.4 Propriedades marginais da função de utilidade indirecta/: identidade de Roy

—— Proposição 6.1.4.I: Seja um dado $(w, r) \in \mathbb{R}_{0+}^{n+1}$, e admita-se que a função de utilidade directa $g(x)$ é quase-côncava em $\mathbb{R}_{0+}^n$ e s.c.s.. Então o vector $\bar{x}$ optimiza o problema clássico do consumidor sse $(\bar{x}, 1) \in \partial [-V(-w, r)]$. ||

No caso de V ser diferenciável teremos a conhecida identidade de Roy, que relaciona as funções procura ordinárias ou marshallianas do consumidor com as derivadas parciais de função de utilidade in directa.

Corolário 6.1.4.1.1: Seja $g(x)$ uma função quase-côncava em R_{0+}^n e s.c.s.. Então, se a função utilidade indirecta $V(-w,r)$ for diferenciável em $\text{rint dom } V$, e para (w,r) tal que $\partial V(-w,r)/\partial r \neq 0$, o único plano óptimo de consumo é dado por:

$$\bar{x}_j = - \frac{\partial V(-x,r)/\partial w_j}{\partial V(-w,r)/\partial r} \quad (j=1, \dots, n) \quad .||$$

6.1.5. Dualidade função de utilidade indirecta/função custo

— Se quisermos completar o ciclo de dualidade que temos vindo a apresentar, será necessário estabelecer qual a relação entre função de utilidade indirecta e função custo. Admita-se $w \in R_{0+}^n$ ($w \gg 0$), considerem-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.A e 5.1.1.B, e suponha-se $g(x)$ contínua relativamente a R_{0+}^n . Pela proposição 5.1.2.1 e pela alínea 6.1.2. teremos então, para $x \in R_{0+}^n$:

$$C(-w,r) = \min \{ \langle w, x \rangle \mid g(x) \geq y \}$$

e

$$V(-w,r) = \max \{ g(x) \mid \langle w, x \rangle \leq r \}$$

Ora, por construção, podemos escrever:

$$\begin{aligned} V(-w,r) &= \max \{ y \mid V(-w,r) \geq y \} \\ &= \max \{ y \mid \max \{ g(x) \mid \langle w, x \rangle \leq r \} \geq y \} \\ &= \max \{ y \mid \exists (x \in \{ x \mid g(x) \geq y \}) : \langle w, x \rangle \leq r \} \\ &= \max \{ y \mid \min \{ \langle w, x \rangle \mid g(x) \geq y \} \leq r \} \\ &= \max \{ y \mid C(-w,y) \leq r \} \end{aligned}$$

Inversamente: $C(-w,y) = \min \{ r \mid C(-w,y) \leq r \}$

$$\begin{aligned} &= \min \{ r \mid \min \{ \langle w, x \rangle \mid g(x) \geq y \} \leq r \} \\ &= \min \{ r \mid \exists (x \in \{ x \mid \langle w, x \rangle \leq r \}) : g(x) \geq y \} \\ &= \min \{ r \mid \max \{ g(x) \mid \langle w, x \rangle \leq r \} \geq y \} \\ &= \min \{ r \mid V(-w,r) \geq y \} \end{aligned}$$

Estã portanto demonstrada a seguinte proposição:

Proposição 6.1.5.1: Admita-se weint R_{0+}^n , considerem-se respeitadas as hipóteses 5.1.1.A e 5.1.1.B e seja $g(x)$ contínua relativamente a R_{0+}^n . Então: (i) $V(-w,r) = \max\{y | C(-w,r) \leq r\}$; (ii) $C(-w,y) = \min\{r | V(-w,r) \geq y\}$. ||

Repare-se que a anterior proposição foi estabelecida apenas com recurso às definições da função custo e da função de utilidade indirecta, sem utilizar o instrumental de dualidade conjugada e quase-conjugada. A relação entre C e V é, por isso, aquilo a que podemos chamar um exemplo de dualidade meramente conceptual, pelo que se reveste de um interesse bastante limitado.

—— Na introdução a este estudo foi apontado como objectivo a exploração das dualidades conjugada e quase-conjugada como uma das vias possíveis para a dedução das relações de dualidade nas teorias do produtor e consumidor. Pensamos que este objectivo foi minimamente atingido, e estamos convencidos que ficou o caminho aberto para outros desenvolvimentos, que não referimos para não tornar ainda maior a extensão do texto. Nomeadamente, ficam por explorar as relações de dualidade para algumas situações particularizadas das estruturas tecnológicas e de preferências (homogeneidade, separabilidade, etc.). Acreditamos, contudo, que tais casos notáveis não apresentarão muitas dificuldades de tratamento se adoptada a metodologia exposta. Resta alertar, e para concluir este estudo, que a aplicabilidade das dualidades conjugada e quase-conjugada não se esgota, como será óbvio, nas teorias do produtor e consumidor. Conhecem-se hoje, no domínio da dualidade em programação matemática convexa e quase-convexa (estática e dinâmica), todo um conjunto de estudos que mostram o enorme potencial deste tipo de análise. Em consequência, será de esperar que, também na Economia, se vá alargando progressivamente o seu domínio de aplicabilidade a todos os problemas onde se mostre possível e vantajosa a formulação de um problema dual.

SECÇÃO 4.1

—— Dem. da proposição 4.1.2.I: Imediata pelas definições de função lucro e de função suporte de um conjunto convexo. ||

—— Dem. do corolário 4.1.2.I.1: Atendendo à proposição 4.1.2.I, a função lucro é a função suporte de T . Pela proposição 2.2.2.II conclui-se que Π é convexa própria fechada e linearmente homogênea. Porque é convexa, a proposição 1.2.8.III permite concluir que Π é contínua pelo menos relativamente a $\text{rintdom } \Pi$. ||

—— Dem. da proposição 4.1.3.I: Resulta directamente das proposições 4.1.2.I e corolário 2.2.2.I.1. ||

—— Dem. da proposição 4.1.4.I: Decorre directamente da proposição 4.1.2.I, corolário 4.1.2.I.1 e proposições 2.2.2.I e 2.1.4.I ((iii) e (iv)). ||

—— Dem. do corolário 4.1.4.I.1: Decorre directamente das proposições 4.1.4.I e 1.2.10.IV. Note-se que $(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla \Pi(-w, p) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_j = \frac{\partial \Pi}{\partial (-w_j)} = -\frac{\partial \Pi}{\partial w_j} & (j=1, \dots, n) \\ \bar{y}_i = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} & (i=1, \dots, m) \end{cases} . ||$$

SECÇÃO 4.2

— Dem. da proposição 4.2.1.I: Imediata pela definição de função de produção, atendendo ao argumento que antecede a proposição.]]

— Dem. da proposição 4.2.1.II: (i) Se T é convexo (hip. 4.1.1.C) $g(x) = \sup\{y \mid (x,y) \in T\}$ é côncava pela proposição 1.2.5.VII. Por construção, para $x \notin R_{0+}^n$ temos $\{y \mid (x,y) \in T\} = \emptyset$, pelo que $g(x) = -\infty$ para $x \notin R_{0+}^n$. Para $x \in R_{0+}^n$, e dada a hipótese 4.1.1.A, temos $(x,0) \in T \Leftrightarrow g(x) \geq 0$. Quer isto dizer que $\text{dom } g = R_{0+}^n$ e é não negativa neste domínio efectivo. Quanto a ser contínua pelo menos relativamente a $\text{rintdom } g$, tal resulta directamente de ser côncava e do corolário 1.2.8.III.1.

(ii) Por (i) $\text{dom } g = R_{0+}^n \neq \emptyset$. Então g é côncava própria se $g(x) < +\infty$, $\forall x \in R_{0+}^n$. Ora, se $x \notin R_{0+}^n$, e pelo que vimos em (i), $g(x) = -\infty$. Para $x \in \text{dom } g$, e pela hipótese 4.2.1.A, $g(x) < +\infty$ para qualquer $x \in R_{0+}^n$.

(iii) Por (i) e (ii) g é côncava própria, pelo que será fechada se for s.c.s.. É óbvio pela definição que uma função côncava s.c.s. relativamente ao seu domínio efectivo, é s.c.s. relativamente a R^n , pois é $-\infty$ fora daquele. Seja então um qualquer $x^i \in \text{dom } g$. Como já sublinhamos no texto que antecede a proposição, se T respeita as hipóteses 4.1.1.A, 4.1.1.B e 4.2.1.A (T não vazio, fechado e limitado em y) e porque y é uma função trivialmente contínua, $g(x^i) = \sup\{y \mid (x^i, y) \in T\} = \max\{y \mid (x^i, y) \in T\}$ e é finita para cada $x^i \in R_{0+}^n$. Consequentemente, $(x^i, g(x^i)) \in T$. Como T é fechado, qualquer sucessão convergente de elementos seus é ainda um elemento seu, isto é:

$\{(x^i, g(x^i))\} \rightarrow (x, y) \in T$. Mas como por construção $y \leq g(x)$, vem $\lim_{x^i \rightarrow x} g(x^i) = y \leq g(x)$, ou seja, g é s.c.s..

Finalmente, porque g é côncava fechada, e porque $\text{dom } g = \mathbb{R}_{0+}^n$ é um conjunto localmente simplicial (prop. 1.2.8.V), g é contínua relativamente a $\mathbb{R}_{0+}^n$. ||

— Dem. da proposição 4.2.2.I: Que $\frac{\pi(w/p) = \pi(-w, p) / p}{/}$ está demonstrado no texto que antecede a proposição. Que $\pi(-w, p)$ é linearmente homogênea é imediato pela definição. ||

— Dem. da proposição 4.2.2.II: $\pi(w/p) = \sup\{g(x) - \langle \frac{w}{p}, x \rangle\} =$
 $= - \inf\{\langle \frac{w}{p}, x \rangle - g(x)\} = g^*(\frac{w}{p}).$ ||

— Dem. do corolário 4.2.2.II.1: Pela proposição 2.1.5.II, $g^*(w/p)$ é uma função côncava fechada própria sse g é própria. Ora, pela proposição 4.2.2.II, $\pi(w/p) = -g^*(w/p)$. Em consequência: 1) $\pi(w/p)$ é convexa fechada pela proposição 1.2.7.XI; 2) $\pi(w/p)$ é convexa própria pela proposição 1.2.5.III. Quanto a ser contínua pelo menos relativamente a $\text{rintdom } \pi$, tal resulta directamente de ser côncava e do corolário 1.2.8.III.1. ||

— Dem. da proposição 4.2.3.I: Está no texto que antecede a proposição. ||

— Dem. da proposição 4.2.4.I: Pela proposição 4.2.2.II, $g^*(w/p) = -\pi(w/p)$. Pela proposição 2.1.5.VI (iii) e (iv), vem então que a empresa optimiza o seu comportamento sse $\bar{x} \in \partial g^*(w/p) \Leftrightarrow \bar{x} \in \partial [-\pi(w/p)]$. Como $g^* = -\pi$ é uma função côncava vem, pela definição:

$$\bar{x} \in \partial [-\pi(w/p)] \Leftrightarrow -\pi(z) \leq -\pi(w/p) + \langle z - \frac{w}{p}, \bar{x} \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \pi(z) \geq \pi(w/p) + \langle z - w/p, -\bar{x} \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow -\bar{x} \in \partial \pi(w/p) \quad (\text{porque } \pi \text{ é convexa})$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} \in -\partial \pi(w/p). \quad ||$$

— Dem. do corolário 4.2.4.I.1: A 1ª expressão decorre directamente das proposições 4.2.4.I e 1.2.10.IV. Quanto ao 2º conjunto de expressões, começa-se por notar que se π é diferenciável em (w/p) , então $\pi(-w, p) = p\pi(w/p)$ também o é em $(-w, p)$. Logo:

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial \pi}{\partial w_j} &= \frac{\partial [p \cdot \pi(w/p)]}{\partial w_j} = p \cdot \frac{\partial \pi}{\partial (w_j/p)} \cdot \frac{\partial (w_j/p)}{\partial w_j} = (\text{porque } \bar{x} = -\nabla \pi) = \\ &= p \cdot (-\bar{x}_j) \cdot \frac{1}{p} = -\bar{x}_j \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{\partial \pi}{\partial p} &= \frac{\partial [p \cdot \pi(w/p)]}{\partial p} = \pi(w/p) + p \cdot \frac{\partial \pi}{\partial p} = \pi(w/p) + p \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \pi}{\partial (w_j/p)} \cdot \frac{\partial (w_j/p)}{\partial p} = \\ &= (\text{porque } \bar{x} = -\nabla \pi) = \pi(w/p) + \langle \bar{x}, \frac{w}{p} \rangle. \end{aligned}$$

Ora, por construção $\pi(w/p) = \bar{y} - \langle \bar{x}, w/p \rangle \Leftrightarrow \bar{y} = \pi(w/p) + \langle \bar{x}, w/p \rangle$, pelo que

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = \bar{y}. \quad ||$$

SECÇÃO 4.3.

— Dem. da proposição 4.3.1.I: Imediata pela definição de função de produção generalizada, atendendo ao argumento que antecede a proposição. ||

— Dem. da proposição 4.3.1.II: Se T é convexo (hip. 4.1.1.C), $f(v,y) = \inf\{x_n | (v,x_n,y) \in T\}$ é convexa pela proposição 1.2.2.V. É não negativa porque $x_n \geq 0$ e porque quando $\{x_n | (v,x_n,y) \in T\} = \emptyset$ vem $f = +\infty$. É própria porque é não negativa e porque, como T é não vazio (hip. 4.1.1.A), existe algum (v,y) para o qual $\{x_n | (v,x_n,y) \in T\} \neq \emptyset$ e, consequentemente $f < +\infty$. É contínua pelo menos relativamente a $\text{rint dom } f$ porque é convexa (proposição 1.2.8.III). Resta então demonstrar que f é fechado se fôr também respeitada a hipótese 4.1.1.B.

Como f é convexa própria será fechada se fôr s.c.i.. Seja $(v^i, y^i) \in \text{dom } f$. Então, se T é fechado (hip. 4.1.1.B) $f(v^i, y^i) = \min\{x_n | (v^i, x_n, y^i) \in T\}$. Em consequência, $(v^i, f(v^i, y^i), y^i) \in T$, $\forall (v^i, y^i) \in \text{dom } f$. Então, para qualquer sucessão convergente de vectores do domínio efectivo de f teremos, porque T é fechado e pela proposição 1.1.5.II:

$$(v^i, f(v^i, y^i), y^i) \rightarrow (v, x_n, y) \in T$$

Mas, por construção, $x_n \geq f(v, y)$, pelo que

$$\lim_{(v^i, y^i) \rightarrow (v, y)} f(v^i, y^i) = x_n \geq f(v, y)$$

Quer isto dizer que f é s.c.i. relativamente ao seu domínio efectivo. Mas então é s.c.i. (relativamente a R^n). ||

— Dem. da proposição 4.3.2.I: Que $\Pi(-w, p)$ é linearmente homogênea

é imediato pela definição. Que $\pi^N(-w^N, p^N) = \pi(-w, p)/w_n$ está demonstrado no texto que antecede a proposição. ||

— Dem. da proposição 4.3.2.II: É imediata pela definição de $\pi^N(-w^N, p^N)$. ||

— Dem. do corolário 4.3.2.II.1: Que π^N é convexa fechada própria, se f é própria decorre directamente da proposição 2.1.2.I. Que π^N é contínua pelo menos relativamente no interior de π^N decorre de ser convexa e da proposição 4.2.8.III. ||

— Dem. da proposição 4.3.3.I: Decorre directamente das proposições 4.3.2.II e 2.1.2.I, ||

— Dem. da proposição 4.3.4.I: Decorre directamente das proposições 4.3.2.II e 2.1.4.1. (iii) e (iv). ||

— Dem. do corolário 4.3.4.I.1: A 1ª expressão decorre directamente das proposições 4.3.4.I e 1.2.10.IV. Quanto ao 2º conjunto de expressões, obtêm-se da 1ª expressão por mera manipulação algébrica, perfeitamente similar à da demonstração do corolário 4.2.4.I.1. ||

SECÇÃO 4.4.

— Dem. da proposição 4.4.1.I: Se respeitada a hipótese 4.1.1.C (T convexo), o corolário 2.3.1.I.1 permite concluir que $\chi_1((x,y)|T)$ é uma função convexa, linearmente homogênea, não negativa, e própria sse T é não vazio. Porque é convexa, a proposição 1.2.8.III permite concluir que é contínua pelo menos relativamente a $\text{rintdom } \chi_1$. Se forem igualmente respeitadas as hipóteses 4.1.1.A e 4.1.1.B, T contém a origem e é fechado, pelo que a proposição 2.3.1.II permite concluir que χ_1 é fechada e $S_{\chi_1}^{\leq}(1)=T$. ||

— Dem. da proposição 4.4.2.I: A demonstração está no texto que antecede a proposição. ||

— Dem. do corolário 4.4.2.I.1: Pela proposição 4.4.2.I e pela definição de gauge-I polar $\Pi(-w,p) = \chi_1^0((-w,p)|T) = \chi_1((-w,p)|T_-^0)$. Pela proposição 2.3.2.II, T_-^0 é um conjunto convexo fechado e contendo a origem, desde que T seja não vazio (hip. 4.1.1.A). Em consequência, o corolário 2.3.1.I.1. e a proposição 2.3.1.II permitem concluir que Π é convexa própria, fechada, e linearmente homogênea, e que $T_-^0 = \{(-w,p) | \Pi(-w,p) \leq 1\}$. Quanto a ser contínua pelo menos relativamente a $\text{rintdom } \Pi$, tal que decorre directamente de ser convexa e da proposição 1.2.8.III. ||

— Dem. da proposição 4.4.2.II: Pela proposição 4.4.2.I, $\Pi = \chi_1^0$. Se são respeitadas as hipóteses 4.1.1.A, 4.1.1.B e 4.1.1.C, então pela proposição 2.3.2.V conclui-se que Π e χ_1 são gauges-I polares uma da outra. Consequentemente, as 2 expressões apresentadas decorrem directamente da proposição 2.3.2.III. ||

SECÇÃO 5.1.

— Dem. da proposição 5.1.2.I: Que a função custo é não negativa para $w, y \geq 0$ é imediato pela definição. Também pela definição, e porque $X(y)$ é não vazio e fechado, o "inf" não coincidirá com o mínimo apenas se existir alguma sucessão $\{x^i\}$ de elementos de $X(y)$ "convergente" para um vector de componentes nem todas finitas. Mas se $w \gg 0$, tal implicará

$$\{ \langle w, x^i \rangle \mid x^i \in X(y) \} \rightarrow +\infty$$

Ora, como $X(y)$ é não vazio (hip. 5.1.1.A), $\inf \{ \langle w, x \rangle \mid x \in X(y) \} < +\infty$. Em consequência, nenhuma sucessão do tipo da anterior pode originar o "inf", pelo que este coincidirá com o mínimo e será finito. ||

— Dem. da proposição 5.1.2.II: Imediata pelas definições de função custo e de função suporte de um conjunto e convexo. ||

— Dem. do corolário 5.1.2.II.1: Como $X(y)$ é não vazio e convexo (hip. 5.1.1.A e 5.1.1.C), a proposição 2.2.2.II permite concluir que para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^n$ $\delta^*(-w \mid X(y))$ é convexa própria, fechada e linearmente homogênea. Como para cada y temos que $C = -\delta^*$ (prop. 5.1.2.II), vem para cada y que a função custo é côncava própria (prop. 1.2.5. III), fechada (prop. 1.2.7.X) e linearmente homogênea. Repare-se também que para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m$ e $w \in \mathbb{R}_{0+}^n$, C é não negativa (prop. 5.1.2.1), pelo que para y temos $\text{dom } C = \mathbb{R}_{0+}^n$. Como este domínio efectivo é um conjunto localmente simplicial (porque $\mathbb{R}_{0+}^n$ o é - prop. 1.2.8.V) e porque C é côncava fechada em $(-w)$, o corolário 1.2.8.IV.1. permi

te concluir que para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m$ a função custo é contínua em $-\mathbb{R}_{0+}^n$. ||

— Dem. da proposição 5.1.3.I: Resulta directamente das proposições 5.1.2.II e 2.2.1.I e corolário 2.2.1.1. ||

— Dem. da proposição 5.1.4.I: Decorre directamente da proposição 5.1.2.II, do corolário 5.1.2.II.1 e das proposições 2.2.2.I e 2.1.4.I (iii) e (iv). ||

— Dem. do corolário 5.1.4.1.1.: Decorre directamente das proposições 5.1.4.I e 1.2.10.IV. ||

— Dem. da proposição 5.1.5.I: Do corolário 2.2.1.I.2. vem que:

$$y^1 \succ y^2 \Rightarrow \delta^*(-w | x(y^1)) \leq \delta^*(-w | x(y^2)).$$

Pela proposição 5.1.2.II, substitua-se δ^* por $-C$, donde se obtem o resultado desejado. ||

SECÇÃO 5.2.

—— Dem. da proposição 5.2.1.I: Decorre directamente da definição de função distância e da proposição 2.3.3.I. ||

—— Dem. do corolário 5.2.1.I.1.: (i) Se $X(y)$ respeitar as hipóteses referidas $\chi_2(x|X(y))$ é, pelo corolário 2.3.3.I.1, uma função convexa, linearmente homogênea e negativa no seu domínio efectivo. Em consequência, como $D = -\chi_2$ para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$ (pela prop. 5.2.1.I) temos que D é côncava (prop. 1.2.5.I), linearmente homogênea e positiva no seu domínio efectivo. Que, para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$, D é contínua em x relativamente ao interior relativo do seu domínio efectivo, resulta de ser côncava e do corolário 1.2.8.III.1.

(ii) resulta directamente de (i) e do corolário 2.3.3.I.1. ||

—— Dem. do corolário 5.2.1.I.2: Resulta directamente das proposições 5.2.1.I e 2.3.3.III. ||

—— Dem. do corolário 5.2.1.I.3: Resulta directamente da proposição 5.2.1.I e 2.3.3.III.1. ||

—— Dem. da proposição 5.2.1.II: Imediata pela definição. ||

—— Dem. da proposição 5.2.2.I: Está demonstrada no texto que antecede a proposição. ||

—— Dem. do corolário 5.2.2.I.1: Pela proposição 5.2.2.I, vem que para cada $y \in \mathbb{R}_{0+}^m \setminus \{0\}$: $C(-w, y) = -\delta^*(-w|X(y))$

Então, pela proposição 2.3.4.I obtemos que:

$$C(-w, y) = -cl \chi_2(-w | -x_+^0(y)) = -cl \chi_2(w | x_+^0(y)). \quad ||$$

— Dem. do corolário 5.2.2.I.2: Pela proposição 2.3.4.II, $x_+^0(y)$ é um conjunto convexo, fechado, não vazio, não contendo a origem e tal que $\lambda_1 x(y) \supset \lambda_2 x(y)$, $\forall 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Logo, pela proposição 2.3.3.III vem:

$$\{w | cl \chi_2(w | x_+^0(y)) \leq -1\} = x_+^0(y)$$

Pelo corolário 5.2.2.I.1. fica então:

$$x_+^0(y) = \{w | -C(-w, y) \leq -1\} = \{w | C(-w, y) \geq 1\} \quad . \quad ||$$

— Dem. do corolário 5.2.2.I.3: Decorre directamente da proposição 5.2.2.I e da proposição 2.3.4.V. A última expressão tem em conta o corolário 5.2.1.I.3. $||$

— Dem. do corolário 5.2.2.I.4: Da proposição 5.2.2.I temos

$$-C(-w, y) = cl [-D]_2^0(w)$$

Consequentemente, e pela proposição 2.3.4.III:

$$-C(-w, y) = cl [-D]_2^0 = -cl \sup \{ \lambda | \lambda > 0, \langle w, x \rangle \geq -\lambda \cdot cl(-D), \forall x \in \mathbb{R}^n \}$$

$$\Leftrightarrow C(w, y) = cl \sup \{ \lambda | \lambda > 0, \langle w, x \rangle \geq \lambda \cdot cl D(x, y), \forall x \in \mathbb{R}^n \}$$

$$\Leftrightarrow (\text{porque } C \text{ é fechado}) C(-w, y) = \sup \{ \lambda | \lambda > 0, \langle w, x \rangle \geq \lambda \cdot cl D(x, y), \forall x \in \mathbb{R}^n \}.$$

A 2ª expressão deduz-se também pela proposição 2.3.4.III, mas a partir da 2ª expressão do corolário 5.2.2.I.3. $||$

SECÇÃO 6.1.

— Dem. da proposição 6.1.2.I: Está demonstrado no texto que antecede a proposição. ||

— Dem. do corolário 6.1.2.I.1: Pela proposição 6.1.2.I, $V(-w, r) = h_G^*(x, \mu)$. Pela proposição 3.1.7.II, $h_G^*(-w, r)$ é eqconc e homogênea de grau 0 própria. Pela proposição 3.1.5.I; e pela definição de propriedade, $V = h^*$ é então uma função eqconv homogênea de grau 0 própria. ||

— Dem. da proposição 6.1.3.I: Está demonstrada no texto que antecede a proposição. ||

— Dem. da proposição 6.1.4.I: Decorre directamente da proposição 6.1.2.I e do corolário 3.1.9.I.1. Com efeito, da proposição 6.2.1.I temos que

$$h_G^*(-w, r) = -V(-w, r)$$

com h^* quase-conjugada quase-côncava. Se respeitadas as hipóteses apontadas vem $h_G = \text{peqconc } h_G$ pelo que

$$(\bar{v}, \bar{\mu}) \in \partial h_G^* \Leftrightarrow \sup \{h_G(x, \mu) \mid \langle (-w, r), (x, \mu) \rangle \geq 0\} \text{ e } \langle (-w, r), (\bar{v}, \bar{\mu}) \rangle = 0,$$

ou com $\bar{\mu} > 0$:

$(\bar{v}, \bar{\mu}) \in \partial [-V] \Leftrightarrow \sup \{g(\frac{x}{\bar{\mu}}) \mid \langle w, \frac{x}{\bar{\mu}} \rangle \leq r\}$ é atingido para $\bar{x} = \bar{v}/\bar{\mu}$. Mas como pelo corolário 3.1.8.II.1., $\partial [-V]$ é um cone

$$(\bar{v}, \bar{\mu}) \in \partial [-V] \Leftrightarrow (\frac{\bar{v}}{\bar{\mu}}, 1) \in \partial [-V] \Leftrightarrow (\bar{x}, 1) \in \partial [-V]. \quad ||$$

— Dem. do corolário 6.1.4.I.1: Pelo corolário 3.1.8.II.1, $\hat{\theta}[-v]$ é não vazio em $(-w,p)$. O corolário 3.1.9.I.2 permite então escrever:

$$(\bar{x}, 1) = \alpha \cdot [-\nabla V(-w, r)] \quad \text{com } \alpha \neq 0$$

$$\begin{cases} \bar{x}_j = \alpha \cdot \partial V / \partial w_j & (j=1, \dots, n) \\ 1 = -\alpha \cdot \partial V / \partial r \end{cases}$$

$$\bar{x}_j = - \frac{\partial V / \partial w_j}{\partial V / \partial r} \quad (j=1, \dots, n). \quad ||$$

— Dem. da proposição 6.1.5.I: Está no texto que antecede a proposição. ||

ÍNDICE

Pág.

PARTE I : FUNDAMENTOS DE ANÁLISE CONVEXA

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 1

- 1.1. Conjuntos convexos/Fundamentos de topologia de conjuntos convexos 5
 - 1.1.1. Conjuntos convexos e envolvente convexa
 - 1.1.2. Conjuntos afins e subespaços
 - 1.1.3. Hiperplanos e semiespaços
 - 1.1.4. Cones convexos e respectivos cones polares
 - 1.1.5. Fundamentos de topologia de conjuntos convexos em $\mathbb{R}^n$
 - 1.1.6. Alguns resultados de separação de conjuntos convexos
 - 1.1.7. Conjuntos suporte, conjuntos polares e hiperplanos e semiespaços de suporte
- 1.2. Funções convexas e côncavas 19
 - 1.2.1. Introdução
 - 1.2.2. Funções convexas: definição e algumas propriedades
 - 1.2.3. Função indicadora de um conjunto convexo
 - 1.2.4. Funções convexas linearmente homogêneas
 - 1.2.5. Funções côncavas
 - 1.2.6. Funções lineares não verticais
 - 1.2.7. Funções semicontínuas/funções convexas e côncavas fechadas
 - 1.2.8. Funções contínuas/propriedades das funções convexas e côncavas contínuas
 - 1.2.9. Funções diferenciáveis/propriedades das funções convexas e côncavas diferenciáveis
 - 1.2.10. Subdiferenciabilidade de funções convexas e côncavas

PARTE II : CONJUGAÇÃO E QUASE - CONJUGAÇÃO

CAPÍTULO 2

- 2.1. Funções convexas e côncavas conjugadas 45
 - 2.1.1. Funções convexas conjugadas: definição e interpretação geométrica

.../...

2.1.2.	Principais propriedades não marginais da conjugada de uma função convexa	
2.1.3.	Conjugação e desigualdade de Fenchel	
2.1.4.	Vectores conjugados e propriedades marginais das funções convexas conjugadas	
2.1.5.	Conjugadas de funções côncavas e suas propriedades	
2.1.6.	Funções parcialmente conjugadas	
2.2.	<u>Funções suporte de conjuntos convexos</u>	55
2.2.1.	Função suporte de um conjunto convexo	
2.2.2.	Função suporte como conjugada da função indicadora	
2.2.3.	Cones polares e funções suporte de cones convexos	
2.3.	<u>Funções "gauge" e conjuntos polares</u>	59
2.3.1.	Funções "gauge" de tipo I de um conjunto convexo e suas propriedades	
2.3.2.	Funções polares de funções gauge-I	
2.3.3.	Função "gauge" de tipo II de um conjunto convexo e suas propriedades	
2.3.4.	Funções polares de funções gauge-II	

CAPÍTULO 3

3.1.	<u>Funções quase-convexas e quase-côncavas quase-conjugadas</u>	69
3.1.1.	Funções quase-convexas e quase-côncavas	
3.1.2.	Extensão a $\mathbb{R}^n$ de uma função quase-convexa ou quase-côncava/funções quase-convexas e quase-côncavas homogêneas de grau 0	
3.1.3.	Conjuntos "evenly" convexos	
3.1.4.	Cones "evenly" convexos e respectivos cones polares.	
3.1.5.	Funções "evenly" quase-convexas ou "evenly" quase-côncavas	
3.1.6.	Funções quase-conjugadas de funções quase-convexas homogêneas de grau 0	

- 3.1.7. Funções quase-conjugadas de funções quase-côncavas homogêneas de grau 0
- 3.1.8. Subgradientes de funções quase-convexas e quase-côncavas homogêneas de grau 0
- 3.1.9. Propriedades marginais das funções quase-conjugadas

PARTE III : APLICAÇÃO ÀS TEORIAS DO PRODUTOR E CONSUMIDOR

CAPÍTULO 4

- 4.1. Função lucro como função suporte do conjunto de possibilidades de produção 87
 - 4.1.1. Hipóteses sobre a tecnologia da empresa
 - 4.1.2. Função lucro como função suporte do conjunto de possibilidades de produção/principais propriedades não marginais da função lucro
 - 4.1.3. Recuperação do conjunto de possibilidades de produção a partir da função lucro
 - 4.1.4. Propriedades marginais da função lucro/lema de Hotteling
- 4.2. Função lucro e função de produção clássica: caso uniprodução 93
 - 4.2.1. Caso uniprodução: o conceito clássico de função de produção e suas propriedades
 - 4.2.2. Função lucro normalizada como conjugada da função de produção
 - 4.2.3. Recuperação da função de produção a partir da função lucro normalizada
 - 4.2.4. Principais propriedades marginais da função lucro normalizada/lema de Hotteling
- 4.3. Função lucro e função de produção generalizada de Jorgenson e Lau: multiprodução 98
 - 4.3.1. Generalização do conceito clássico de função de produção
 - 4.3.2. Função lucro normalizada como conjugada da função de produção generalizada

4.3.3.	Recuperação da função de produção generalizada a partir da função lucro normalizada	
4.3.4.	Propriedades marginais da função lucro normalizada/lema de Hotteling	
4.4.	<u>Função lucro e função gauge-I do conjunto de possibilidades de produção</u>	102
4.4.1.	Função gauge-I do conjunto de possibilidades de produção	
4.4.2.	A função lucro e a função gauge-I do conjunto de possibilidades de produção como funções gauge-I polares/obtenção de uma a partir da outra	
4.4.3.	Propriedades marginais da função lucro/lema de Hotteling	

CAPITULO 5

5.1.	<u>Função custo como função suporte dos "Input Requirement Sets"</u>	106
5.1.1.	"Input Requirement Sets"	
5.1.2.	Função custo como função suporte dos IRS	
5.1.3.	Recuperação dos IRS a partir da função custo	
5.1.4.	Propriedades marginais da função custo/lema de Shephard	
5.1.5.	Uma hipótese adicional de "free disposal" de inputs/monotonia não decrescente em y da função custo	
5.1.6.	Uniprodução: dualidade função de produção clássica/função custo	
5.2.	<u>Função custo e função distância de Shephard</u>	112
5.2.1.	Função distância de Shephard	
5.2.2.	Função distância e função custo como gauge-II polares	

CAPITULO 6

6.1.	<u>Dualidade entre funções de utilidade directa e indirecta</u>	118
------	---	-----

- 6.1.1. Introdução: analogia formal entre as teorias do produtor e consumidor
- 6.1.2. Função de utilidade indirecta como quase-conjugada da função homogênea de grau 0 associada à função utilidade directa
- 6.1.3. Recuperação da função de utilidade directa a partir da função de utilidade indirecta
- 6.1.4. Propriedades marginais da função de utilidade indirecta/identidade de Roy
- 6.1.5. Dualidade função utilidade indirecta / função custo

CONCLUSÃO

BIBLIOGRAFIA

- AUBIN, J.P. (1984) L'analyse Non Linéaire et Ses Motivations Economiques, Masson, Paris.
- AVRIEL, M. (1976) Nonlinear Programming - Analysis and Methods, Prentice-Hall, New-Jersey.
- BAZARAA, M. S. e SHETTY, C.M. (1979) Nonlinear Programming - Theory and Algorithms, J. Wiley and Sons, New York.
- BERGE, C. e GOUILLA-HOURI, A. (1962) Programmes, Jeux et Réseaux de Transport, Dunod, Paris.
- BLACKORBY, C., PRIMONT, D. e RUSSEL, R.R. (1978) Duality, Separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications, North-Holland, Amsterdam, New York-Oxford.
- CORNWALL, R.R. (1984) Introduction to the Use of General Equilibrium Analysis, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.
- DIEWERT, W.E. (1974) "Applications of Duality Theory" in INTRILIGATOR, M.D. e KENDRICK, D.A. (eds) Frontiers of Quantitative Economics, vol.II, North-Holland, Amsterdam-New York - Oxford.
- DIEWERT, W.E., AVRIEL, M. e ZANG, I (1981) "Nine Kinds of Quasi concavity and concavity", Journal of Economic Theory, 25, pp. 397-420.
- DIEWERT, W. E. (1982) "Duality Approaches to Microeconomic Theory", in ARROW, K.J. e INTRILIGATOR, M.D. (eds) Handbook of Mathematical Economics, vol. II, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.
- EICHHORN, W., HENN, R., OPITZ, O. e SHEPHARD, R.W. (Eds) (1973) Production Theory, Proceedings of an International Seminar Held at The University of Karlsruhe, May-July, Springer-Verlag.

- HANOCH, G. (1978) "Symmetric Duality and Polar Functions", in FUSS M. e McFADDEN (Eds) Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications, Vol I, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.
- JACOBSEN, S.E. (1970) "Production Correspondences", Econometrica, vol 38, nº 5, Sept.
- JORGENSEN, D.W. e LAU, L.J. (1974) "The Duality of Technology and Economic Behaviour", The Review of Economic Studies, vol 41, nº 126, April.
- LAU, L. J. (1978) "Applications of Profit Functions" in FUSS, M. e McFADDEN, D. (Eds) op. cit..
- LUENBERGER, D. G. (1969) Optimization by Space Vector Methods, J. Wiley and Sons, New-York.
- McFADDEN, D. (1978a) "Duality of Production, Cost and Profit Functions" in FUSS, M. e McFADDEN, D. (Eds), op. cit..
- McFADDEN, D. (1978b) "Convex Analysis", in FUSS, M. e McFADDEN, D. op. cit..
- PASSY, U. e PRISMAN, E.Z. (1984) "Conjugacy in Quasi-Convex Programming", Math. Programming, 30, pp. 121-146.
- PINHEIRO, M.R. (1984) Conjugação e Dualidade em Programação Convexa. Coleção de Working Papers da Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.
- PINHEIRO, M.R. (1985) Dualidade Conjugada em Programação Matemática Convexa, Coleção de Working Papers da Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.
- ROCKAFELLAR, R.T. (1964) "Duality Theorems for Convex Functions", Bull Amer. Math. Soc., 70, pp. 189-192.
- ROCKAFELLAR, R.T. (1967) "Conjugates and Legendre Transforms of Convex Functions", Canad. J. Math., 19, pp. 200-205.

- ROCKAFELLAR, R.T. (1968) "Duality in Nonlinear Programming" in Mathematics of Decision Sciences, Part II, Lectures in Applied Mathematics, vol II, Amer. Math. Soc. pp. 401-422.
- ROCKAFELLAR, R.T. (1969) "Convex Functions and Duality in Optimization-Problems and Dynamics" in KUHN, H. W. e SZEGÖ, G.P. (Eds) Mathematical Systems Theory and Economics I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York.
- ROCKAFELLAR, R.T. (1970) Convex Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.
- ROCKAFELLAR, R.T. (1981) The Theory of Subgradients and Its Applications to Problems of Optimization. Convex and Nonconvex Functions, Heldermann-Verlag, Berlin.
- SAMUELSON, P. (1953) "Prices of Factors and Goods in General Equilibrium", The Review of Economic Studies, 21, 1-20.
- SHEPHARD, R.W. (1953) Cost and Production Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J..
- SHEPHARD, R.W. (1970) Theory of Cost and Production Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J..
- UZAWA, H. (1964) "Duality Principles in the Theory of Cost and Production", International Economic Review, vol 5, n. 2 May.
- VARIAN, H.R. (1978) Microeconomic Analysis, W.W. Norton & C., New York.
- WEYMARK, J. A. (1980) "Duality Results in Demand Theory", European Economic Review, 14, pp. 377-395.