

"P-MEDIANA HAMILTONIANA:
RESOLUÇÃO HEURÍSTICA"

I.M.Branco* e J.D.Coelho **

Working Paper nº 17

* Assistente do Departamento de Estatística, Investigação Operacional e Computação da Faculdade de Ciências de Lisboa

** Professor da Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Faculdade de Economia

Campo Grande, 185

1 700 LISBOA

Abril 1984

A apresentar no 2º Congresso da APDIO - Investigação Operacional 84 a realizar no Porto de 16 a 18 de Abril.

Este trabalho foi realizado no âmbito do contrato de Investigação e desenvolvimento nº 412.82.41 da Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT) e da linha de investigação nº 4, "Optimização" do Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa

RESUMO

A p-mediana hamiltoniana é um problema misto de localização e distribuição que conjuga o problema da p-mediana com o problema do caixeiro viajante. Dado um conjunto N de clientes o objectivo é determinar o conjunto de p rotas que, constituindo uma partição de N , permite servir todos os clientes com custo mínimo. Cada uma das rotas inclui um depósito e os clientes que são servidos a partir dele. Assim, todos os clientes afectos a um mesmo depósito serão servidos sequencialmente, isto é partindo do depósito é traçada uma rota que percorre cada cliente uma e uma só vez e retorna ao depósito.

Este problema recentemente formulado é de difícil resolução exacta e, portanto, a investigação está a ser dirigida no sentido da concepção de algoritmos heurísticos. No presente trabalho descrevem-se dois métodos heurísticos já implementados e discutem-se os resultados obtidos. Introduzem-se ainda restrições de capacidade ao problema adaptando-se uma das heurísticas para esse efeito. Finalmente são sugeridas outras abordagens de resolução heurística.

1. INTRODUÇÃO

No domínio da localização de equipamentos é bem conhecido o problema da p-mediana, que consiste na localização de p serviços numa rede de n comunidades ($p < n$), de forma a minimizar a soma das distâncias ponderadas entre cada comunidade e o serviço mais próximo (1).

Na área dos problemas de distribuição, o problema do caixeiro viajante pode considerar-se uma componente básica, já que a maioria dos problemas de distribuição não são mais do que variantes e extensões daquele problema, que consiste na determinação do percurso de custo mínimo a ser efectuado por um veículo que, partindo duma localidade (depósito), irá percorrer n-1 localidades (clientes), regressando depois à localidade de partida. Numa terminologia de grafos, trata-se da determinação do circuito hamiltoniano de custo mínimo num grafo completo $G = (V, A)$, (5).

A p-mediana hamiltoniana conjuga o problema da p-mediana com o do caixeiro viajante, tratando-se portanto dum problema misto de localização e distribuição.

A bibliografia existente no domínio da localização / distribuição é ainda escassa, (2), (4), (8), (10), (11), e (14). Trata-se porém, dum domínio de investigação promissor já que são numerosas as aplicações práticas dos problemas de localização/distribuição.

No presente trabalho, após a definição do problema da p-mediana hamiltoniana indicam-se algumas das suas aplicações. Seguidamente descrevem-se dois métodos heurísticos para resolução do problema e apresentam-se os resultados da experiência numérica. Introduce-se ainda restrições de capacidade ao problema, e adapta-se uma das heurísticas para esse efeito. Por fim, apresentam-se sugestões para trabalho futuro.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Dado um conjunto N constituído pelas localizações de n clientes, pretende-se escolher p pontos de N para localizar os depósitos que irão servir esses clientes. Cada cliente será servido a partir dum único depósito e todos os clientes afectos ao mesmo depósito serão percorridos uma e uma só vez por um veículo que parte do depósito, serve esse subconjunto de clientes e retorna ao depósito. O objectivo

é traçar as rotas para os p veículos de modo a servir todos os clientes com custo mínimo.

Numa linguagem de grafos, dado o grafo não orientado e completo $G = (N, A)$ com um custo associado a cada aresta de A , pretende-se determinar, de entre os conjuntos de p circuitos (circuitos de comprimento

2) que formam uma partição de N , o conjunto que tem custo mínimo associado (o custo associado a cada um desses conjuntos é definido pela soma dos custos dos p circuitos que o constituem). Uma vez obtido o referido conjunto de custo mínimo, estão definidos os p circuitos que formam a solução óptima, qualquer subconjunto de p pontos obtido extraíndo um ponto de cada circuito constitui uma localização óptima para os p depósitos, isto é, em cada um dos p circuitos é possível localizar o depósito num dos seus vértices, obtendo-se soluções de igual custo.

Na p -mediana hamiltoniana localizam-se p serviços à semelhança da p -mediana mas enquanto que nesta cada cliente é servido directamente a partir do depósito, naquela existe um veículo que parte do depósito, percorre os clientes sequencialmente e volta ao depósito, descrevendo deste modo um circuito hamiltoniano. Portanto a cada depósito e aos clientes por ele servidos está associada a resolução dum problema de caixeiro viajante.

A p -mediana hamiltoniana admite várias formulações matemáticas, nomeadamente em teoria de conjuntos, como problema de partição dum conjunto (set-partitioning), como problema binário mas não linear e ainda como problema de programação linear inteira (programação binária). Contudo estas formulações não serão apresentadas aqui, uma vez que a sua construção e discussão está fora do âmbito do trabalho (3).

O problema em questão aplica-se a numerosas situações práticas, entre elas podem nomear-se a localização de escolas, a localização de postos para recolha de leite, a localização de armazéns ou de unidades comerciais de distribuição, etc.

3. MÉTODOS HEURÍSTICOS

A p -mediana hamiltoniana é um problema de difícil resolução em termos exactos. Este facto sugere que, numa primeira fase do seu estudo, os esforços de investigação se concentrem no desenvolvimento de métodos heurísticos.

A primeira heurística que iremos descrever foi designada por heurística de partição. Trata-se dum método de concepção muito simples

no qual é construída uma partição do conjunto N em p subconjuntos. Resolvendo-se depois um problema de caixeiro viajante em cada um dos elementos dessa partição.

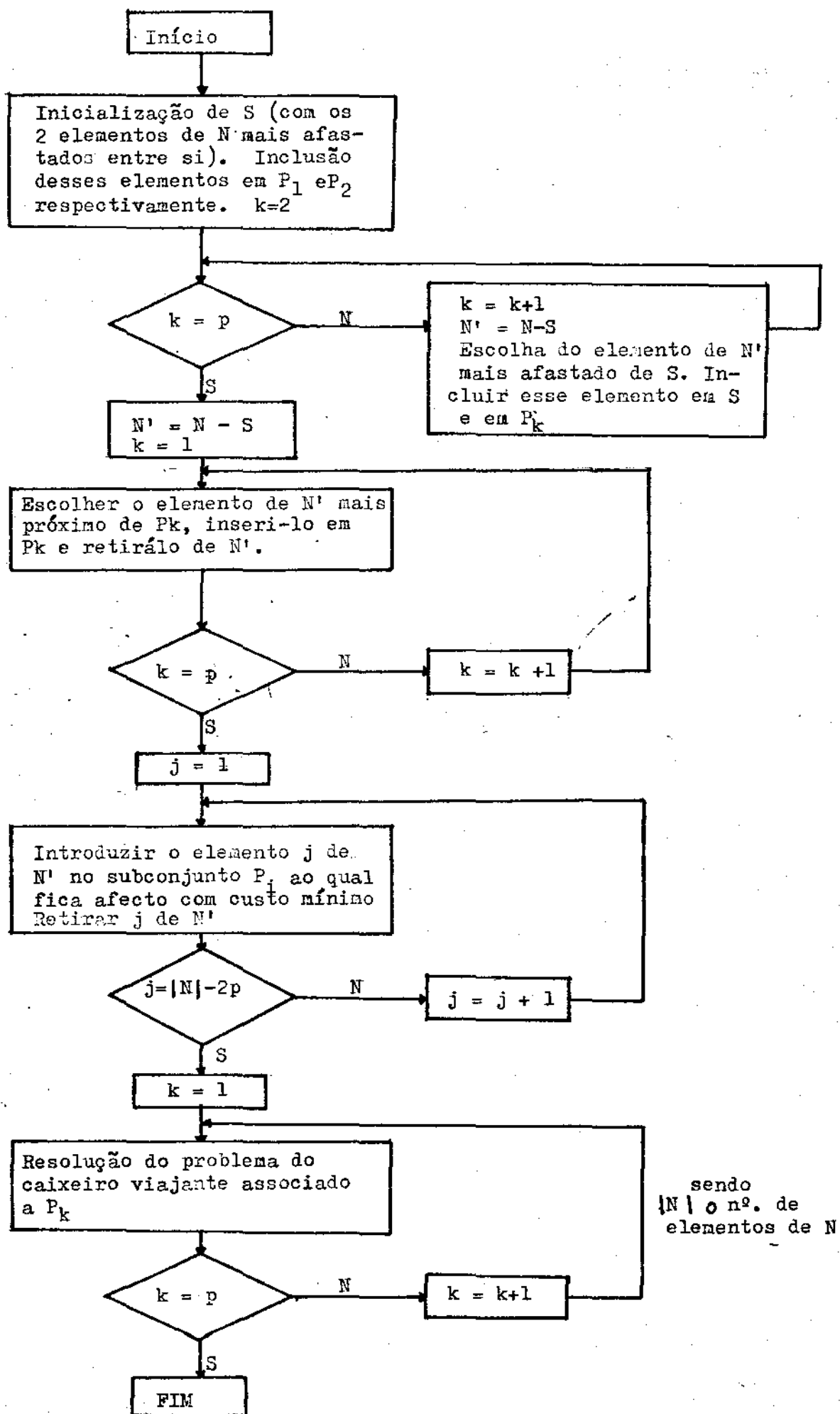
Para obter a partição de N em p subconjuntos escolhe-se, inicialmente, para cada um deles um elemento que será designado por primeiro núcleo. Esta escolha baseia-se na ideia de que os elementos mais afastados entre si pertencerão a subconjuntos distintos. Portanto escolhem-se os dois pontos de N mais afastados entre si e inserem-se em subconjuntos distintos. Constrói-se também o conjunto S que é constituído pelos pontos já incluídos em algum subconjunto e define-se o seu complementar N' que é formado pelos pontos ainda livres. Em seguida e até obter os p núcleos vão-se introduzindo em S e retirando de N' , os pontos livres que estão mais afastados de S . Cada um deles é também inserido, como primeiro núcleo, num dos subconjuntos que ainda é vazio. Uma vez inicializados os p subconjuntos, escolhe-se para cada um deles um segundo elemento que é o ponto livre mais próximo desse núcleo.

Deste modo obtém-se dois elementos iniciais para cada subconjunto. Os restantes elementos de N ainda livres são incluídos nos subconjuntos por um processo de afectação de custo mínimo. Para este algoritmo testaram-se duas formas distintas de definir os custos de afectação dos elementos livres aos subconjuntos. Na primeira definiu-se o custo de afectar o elemento livre i ao subconjunto k de núcleos k_1 e k_2 através de $c_{ik} = d_{ik_1} + d_{ik_2}$ sendo d_{ij} a distância (custo) associada à aresta (i, j) .

Na segunda, c_{ik} é dado pelo custo de inserir i no circuito definido por k_1 e k_2 , portanto $c_{ik} = d_{ik_1} + d_{ik_2} - d_{k_1 k_2}$

Após a resolução da afectação de custo mínimo ficam definidos os p subconjuntos pertencentes à partição. Em cada um dos subconjuntos resolve-se, o problema do caixeiro viajante que lhe está associado. O método utilizado na resolução do problema do caixeiro viajante foi a heurística 3-optimal, mas pode ser adaptada qualquer outro método.

Na figura seguinte apresenta-se um fluxograma do algoritmo.



As soluções obtidas por este método, foram posteriormente perturbadas utilizando a segunda heurística que passamos a descrever.

Esta heurística consiste num método 3-optimal desenvolvido para a p-mediana hamiltoniana, portanto, como em qualquer método deste tipo, (6), (12), (13) parte-se duma solução admissível para o problema e tenta-se a substituição de quaisquer três arestas dessa solução por outras três de modo a obter uma nova solução admissível. Sempre que é obtida uma nova solução admissível com custo inferior ao da solução corrente, esta é substituída pela nova solução. O processo prossegue até à obtenção duma solução para a qual todas as substituições do tipo indicado não conduzam a soluções com custo menor. Aquela solução é portanto uma solução 3-optimal.

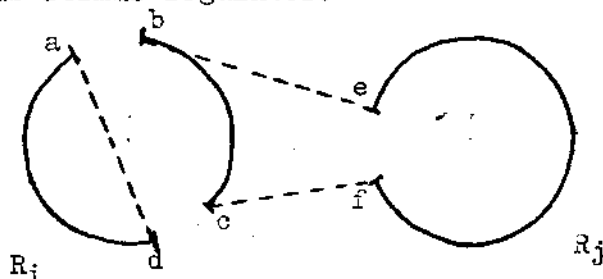
Como o resultado final depende da solução fixada inicialmente pode repetir-se o método partindo de diferentes soluções iniciais e escolher a melhor das soluções 3-optimais obtidas.

Uma solução admissível para o problema da p-mediana hamiltoniana consiste num conjunto de n arestas que definem p circuitos disjuntos (dois a dois). Os p conjuntos formados pelos vértices de cada um desses circuitos constituem uma partição $\mathcal{P}(N)$ de N . Portanto, a escolha de três arestas a retirar duma solução admissível enquadra-se num dos seguintes casos:

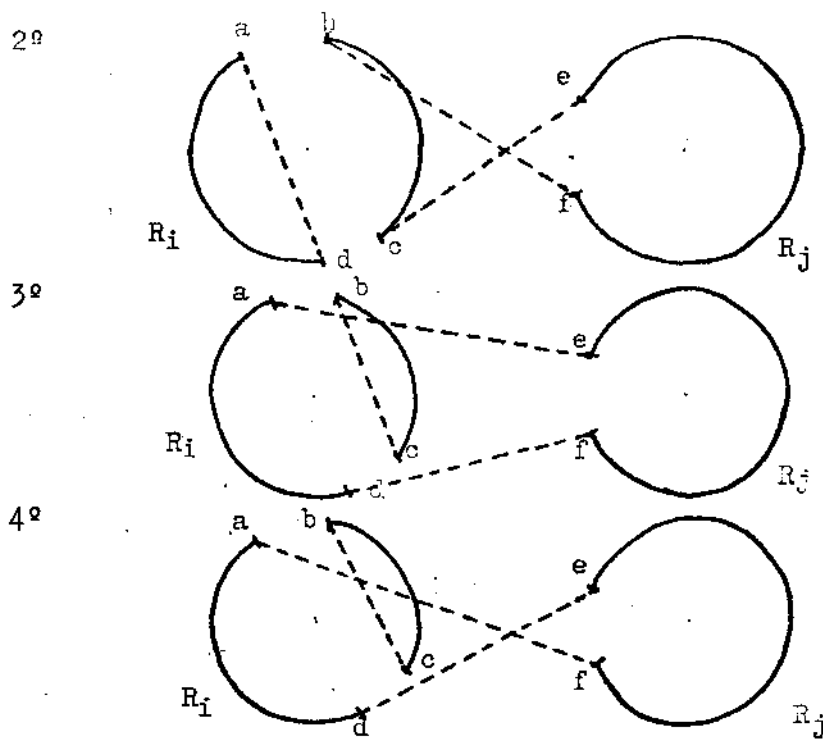
- A As três arestas escolhidas pertencem a um mesmo circuito.
- B Duas das arestas pertencem a um mesmo circuito e a terceira pertence a um circuito diferente,
- C Cada uma das três arestas pertence a um de três circuitos distintos.

No caso A as soluções admissíveis que é possível obter não alteram nenhum dos elementos da partição $\mathcal{P}(N)$, permitem apenas obter circuitos diferentes num dos elementos da partição mantendo os restantes $p-1$ circuitos inalterados. Relativamente ao circuito que pode ser alterado, as soluções admissíveis reduzem-se às oito formas diferentes de reconstituição do circuito, estudadas no método 3-optimal para o caixeiro viajante.

No caso B é possível obter quatro novas soluções admissíveis, alterando a partição $\mathcal{P}(N)$, isto é, os dois elementos de partição que correspondem aos dois circuitos abertos vão poder ser alterados de uma das formas seguintes.

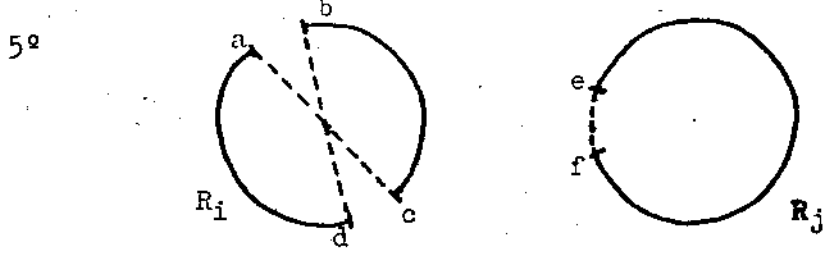


sendo $[a,b]$
 $[c,d]$
 $[e,f]$ as
arestas retiradas

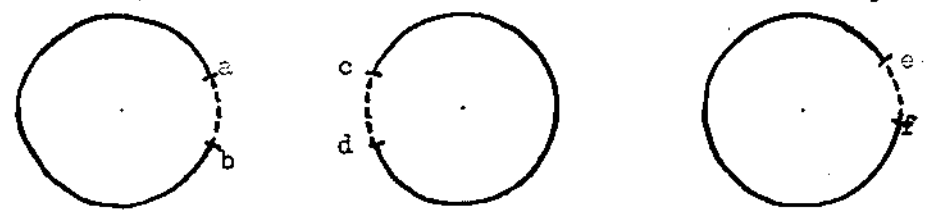


onde 1º, 2º e 3º, 4º alteram a partição da mesma maneira.

Retirando as arestas $[a,b]$, $[c,d]$ e $[e,f]$ é ainda possível obter outra solução admissível que não altera a partição $\mathcal{P}(N)$, reduzindo-se como em A, a uma das soluções estudadas no método 3-optimal para o caixeiro viajante associado a R_i



Finalmente no caso C a unica solução admissível que é possível obter é a solução de que se partiu, uma vez que é necessário manter p circuitos, neste caso não é possível melhorar a solução de partida.



Portanto, dada uma solução admissível, 3-optimal para cada um dos problemas do caixeiro viajante associado, tal que todas as alterações indicadas no caso B (1º, 2º, 3º e 4º) não conduzam à obtenção de uma solução de menor custo, então esta será uma solução 3-optimal para a p-mediana hamiltoniana.

Como resultado da análise efectuada construiu-se um método baseado nas duas componentes seguintes:

- Garantir que cada um dos p circuitos constitui uma solução 3-optimal do problema do caixeiro viajante associado.

- Garantir que todas as substituições que alterem a partição corrente (caso B.), não conduzem a soluções com custo inferior.

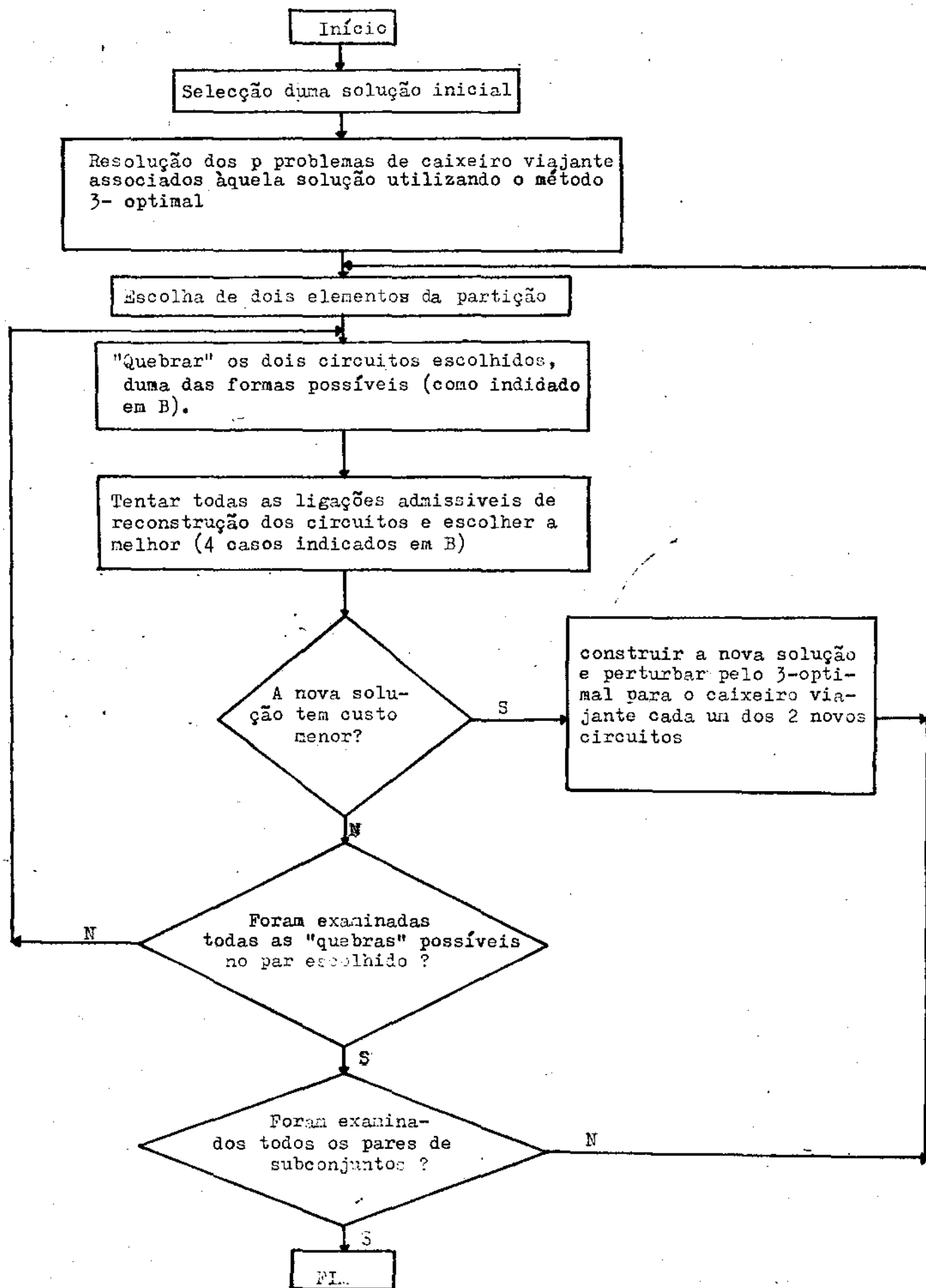
Partindo duma solução inicial admissível, resolve-se pelo método 3-optimal cada um dos p problemas do caixeiro viajante nela envolvidos. Em seguida tenta-se melhorar a solução alterando os elementos da partição, como indicado em B. Quando uma dessas substituições produz uma solução com custo inferior ao da solução corrente, essa solução torna-se efectiva e, utilizando o método 3-optimal para o problema do caixeiro viajante, perturba-se cada um dos dois circuitos associados aos elementos da partição que foram alterados. Note-se, no entanto, que nesta fase do processo, em cada um dos circuitos, testam-se primeiramente todas as trocas que envolvam retirar pelo menos uma das "novas" arestas do circuito, pois se não for possível obter soluções com custo menor nestes casos, não será necessário prosseguir a perturbação desse circuito uma vez que as restantes arestas pertencem a circuitos que já estavam 3-otimizizados.

O algoritmo prossegue tentando-se na solução corrente, novas substituições do tipo indicado em B e, assim sucessivamente, até dispormos duma solução para a qual as trocas de quaisquer três das suas arestas por outras três não permite obter uma solução admissível de custo menor. Se pretendermos obter outras soluções 3-optimais, o processo pode ser reiniciado partindo-se de soluções admissíveis diferentes das já utilizadas.

É de salientar que o método não admite a existência de elementos da partição com um único ponto, assim em cada circuito existem pelo menos dois vértices.

Na página seguinte apresenta-se um fluxograma do algoritmo.

A escolha dos dois elementos da partição sobre os quais são efectuadas as trocas faz-se por um processo sistemático que garante que todos os pares de elementos são testados. Para tal os elementos da partição são indexados de 1 a p . Testaram-se duas formas distintas de efectuar aquela escolha. Na primeira, quando é obtida uma nova solução de custo menor e depois de perturbar cada um dos dois novos circuitos pelo método 3-optimal do caixeiro viajante, volta-se ao elemento da partição com índice 1 e repete-se todo o processo. Na segunda, uma vez obtida uma solução melhor e após ter perturbado pelo método 3-optimal pa-



ra o caixeiro viajante cada um dos novos circuitos, prossegue-se a partir do elemento da partição com índice seguinte ao do último elemento da partição que foi alterado. Neste caso, tudo se passa como se efectuassemos uma rotação aos elementos da partição, após esta ter sido alterada.

Na implementação do algoritmo foram também testadas duas subrotinas distintas para obtenção da solução 3-optimal em cada um dos elementos da partição. A primeira foi uma subrotina desenvolvida por Fenel (7), a segunda foi programada e implementada expressamente para ser inserida no presente algoritmo. Dos vários processos utilizados o que se mostrou mais eficiente, na determinação duma solução 3-optimal foi o que utiliza o segundo critério de escolha dos elementos da partição e a segunda subrotina para obtenção das soluções 3-optimais em cada elemento da partição; embora a solução 3-optimal obtida nem sempre seja a que tem custo menor comparando com as soluções obtidas pelas outras versões, o método mostrou-se mais rápido em 89% dos exemplos testados.

4. ANALISE DOS RESULTADOS COMPUTACIONAIS

A heurística de partição foi utilizada na resolução de vinte e dois problemas listados na tabela 1. Os resultados obtidos são apresentados e comparados na tabela 2.

TABELA 1 - LISTA DE PROBLEMAS

Problema nº	nº.de Comunidades n	nº.de serviços p	matriz das distâncias
1	20	3	C1
2	20	4	C1
3	20	4	C2
4	10	2	A1
5	10	3	A1
6	20	3	A2
7	20	4	A2
8	20	5	A2
9	30	2	A3
10	30	3	A3
11	30	4	A3
12	30	5	A3
13	30	6	A3
14	50	5	A4
15	50	8	A4
16	50	10	A4

TABELA 1 - LISTA DE PROBLEMAS (cont.)

Problema nº.	nº. de Comunidades n	nº. de serviços p	matriz das dis- tâncias
17	75	10	A5
18	75	15	A5
19	75	20	A5
20	100	15	A6
21	100	20	A6
22	100	25	A6

Os problemas 1, 2 e 3 utilizam matrizes de distâncias que foram geradas a partir de pontos definidos no plano por coordenadas tais que fosse possível conhecer a solução ótima graficamente. Para os restantes problemas geraram-se aleatoriamente as coordenadas dos pontos no plano e a matriz das distâncias foi construída a partir desses pontos.

Na tabela seguinte apresentamos os resultados obtidos com as duas versões implementadas para a heurística de partição. Na versão 1 o custo de afectação da comunidade i ao subconjunto k é dado por $c_{ik} = d_{ik_1} + d_{ik_2}$ e na versão 2 aquele custo é obtido como $c_{ik} = d_{ik_1} + d_{ik_2} - d_{k_1 k_2}$ (k_1 e k_2 são os núcleos de k). A observação desses resultados mostra que qualquer das versões é muito rápida na determinação duma solução para o problema. Pode concluir-se igualmente que a versão 1 obteve as soluções com custo menor em cerca de 36% dos problemas e a versão 2 obteve melhores soluções em 32% dos casos, nos restantes problemas obtiveram-se soluções com o mesmo custo.

TABELA 2. RESULTADOS DA HEURISTICA DE AFECTAÇÃO

PROBLEMAS Nº	CUSTO DAS SOLUÇÕES OBTIDAS		TEMPO COMPUTACIONAL*(seg.)	
	VERSÃO 1	VERSÃO 2	VERSÃO 1	VERSÃO 2
1	194	194	0.08	0.08
2	223	214	0.06	0.06
3	213	213	0.04	0.04
4	322	322	0.03	0.03
5	165	165	0.02	0.02
6	535	534	0.10	0.09
7	483	500	0.07	0.07
8	406	406	0.04	0.05
9	618	618	1.84	1.84
10	554	554	0.83	0.82
11	526	530	0.44	0.26
12	576	571	0.22	0.18
13	537	531	0.19	0.16
14	657	663	0.84	1.13
15	649	632	0.29	0.48
16	583	580	0.34	0.32
17	706	708	1.16	1.10
18	629	636	0.46	0.48
19	588	584	0.40	0.47
20	829	839	1.00	0.86
21	749	750	0.69	0.93
22	681	689	0.74	0.73

*computador UNIVAC 1100

Para os problemas 1 e 3, cuja solução ótima é conhecida, obteve-se mesmo a solução ótima.

As soluções obtidas por este processo foram depois perturbadas pelo método três optinal para a p-mediana hamiltoniana (excepto no que se refere aos problemas 1 e 3, pois é sabido que foi atingido o ótimo). Os resultados obtidos constam da tabela 3.

TABELA 3. PERTURBAÇÃO DAS SOLUÇÕES DA TABELA 2 PELO MÉTODO
3-OPTIMAL

PROBLEMA Nº.	CUSTO DAS SOLUÇÕES 3- -OPTIMAIS OBTIDAS		TEMPO COMPUTACIONAL* (s) (TOTAL- 3OPTIMAL+APRESEN- TADO NA TABELA 2)	
	VERSÃO 1	VERSÃO 2	VERSÃO 1	VERSÃO 2
2	202	199	0.47	0.23
4	236	236	0.11	0.11
5	165	165	0.06	0.06
6	415	394	1.74	1.69
7	387	387	0.91	0.81
8	406	406	0.20	0.20
9	471	471	11.27	11.27
10	448	448	5.24	5.24
11	453	411	2.14	2.98
12	394	458	4.93	2.02
13	404	404	1.98	1.48
14	503	517	43.99	16.71
15	490	506	12.38	18.24
16	469	468	30.26	9.62
17	586	577	49.23	71.80
18	540	545	25.42	15.38
19	522	522	9.20	12.20
20	673	669	70.30	81.72
21	657	644	33.72	25.87
22	621	627	18.99	20.08

* computador UNIVAC 1100

A análise da tabela 3 permite concluir que as soluções 3-optimais com custo menor são obtidas em 23% dos casos com soluções resultantes da versão 1 e em 32% dos problemas com soluções resultantes da versão 2. Nos restantes 45% são obtidas soluções 3-optimais com o mesmo custo a partir de ambas as versões. Com a heurística de partição obtiveram-se soluções 3-optimais em 18% dos problemas (para cada uma das versões).

A heurística 3-optimal, partindo de soluções aleatórias, foi testada com os problemas 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15 e 16 listados na tabela 1 e ainda com os problemas apresentados na tabela 4.

TABELA 4. LISTA DE PROBLEMAS

PROBLEMA Nº.	Nº. de Comuni- dades n	Nº. de Serviços p	matriz das dis- tâncias
23	16	4	C3
24	6	2	B1
25	10	2	B2
26	16	4	B3
27	20	4	B4
28	20	5	B4
29	30	3	B5
30	30	6	B5

A solução óptima do problema 23 é conhecida. Os problemas de 25 a 30 utilizam matrizes de distâncias reais, obtidas entre diversas localidades portuguesas.

Na tabela 5 apresentam-se os custos das melhores soluções 3-optimais obtidas para os problemas indicados anteriormente, bem como os tempos computacionais gastos na sua resolução.

TABELA 5. RESULTADOS DA HEURÍSTICA 3-OPTIMAL

PARTINDO DE SOLUÇÕES ALEATÓRIAS

PROBLEMA Nº.	CUSTO DAS SOLUÇÕES 3 - OPTIMAIS	TEMPO COMPUTACIONAL* (s) (obtenção da respectiva solução 3-optimal)
1	194	2.15
2	192	1.94
3	213	1.56
4	236	0.39
5	165	0.24
6	394	2.58
7	390	4.02
8	383	3.02
9	465	7.77
10	462	9.12
11	455	6.72
12	397	9.71
13	393	5.53
15	527	36.99
16	479	30.57
23	39	0.57
24	31	0.02
25	1605	0.20

TABELA 5. RESULTADOS DA HEURISTICA 3-OPTIMAL

PARTINDO DE SOLUÇÕES ALEATÓRIAS (Cont.)

PROBLEMA Nº.	CUSTO DAS SOLUÇÕES 3 - OPTIMAIS	TEMPO COMPUTACIONAL*(s) (obtenção da respectiva solução 3-optimal)
26	1874	0.85
27	1742	1.10
28	1798	0.63
29	2218	10.02
30	2261	7.84

* computador UNIVAC 1100

Para os problemas 1,2,3 e 23, cujas soluções óptimas são conhecidas, foi possível obter essas soluções.

A análise comparativa das tabelas 3 e 5 permite concluir que para os problemas 7,10,11,12,15 e 16 foi vantajoso utilizar inicialmente a heurística de partição, pois reduziu o tempo de cálculo, e o custo das soluções 3-optimais. Do mesmo modo para os problemas 1,3,5 e 6 a utilização da heurística de partição permitiu uma redução no tempo de cálculo, embora as soluções obtidas tenham o mesmo custo nas tabelas 3 e 5. A inicialização do método 3-optimal com soluções aleatórias conduziu a melhores resultados apenas nos problemas 2,8, 9 e 13.

Não foi ainda testada a heurística de partição na resolução dos problemas indicados na tabela 4.

5. INTRODUÇÃO DE RESTRIÇÕES DE CAPACIDADE NO PROBLEMA DA P-MEDIANA HAMILTONIANA

Nas situações práticas a que o problema da p-mediana Hamiltoniana se aplica, para cada serviço serão certamente considerados limites máximo e mínimo à sua capacidade. Na verdade não é realístico supor-se que os serviços dispõem de capacidade ilimitada, ou que a sua abertura pode ser considerada quando o número dos seus utentes fôr inferior a um determinado limiar. Para procurar eliminar estes inconvenientes introduzem-se restrições de capacidade na p-mediana hamiltoniana. Assim, a cada comunidade i considera-se associado um valor f_i que representa o número de elementos dessa comunidade e uma vez que em cada um dos p circuitos a estabelecer será instalado um único serviço, só será permitida a formação de circuitos cuja capacidade (soma do número de elementos das comunidades que lhe pertencem) esteja compreendida entre os valores g e G que designam respectivamente, os limites

mínimo e máximo na capacidade dum serviço.

Para o tratamento das restrições de capacidade adaptou-se a heurística 3-optimal anteriormente apresentada. Parte-se agora duma solução admissível que verifique os limites de capacidades e sempre que é obtida uma solução de custo inferior ao da solução corrente, testa-se se aquela solução satisfaz as restrições de capacidade e só em caso afirmativo a solução corrente é substituída pela nova solução (13).

Para obter a solução inicial admissível para as capacidades desenvolveu-se um método empírico baseado fundamentalmente nos valores f_i e nos limites g e G .

Na página seguinte apresenta-se um fluxograma do método 3-optimal para a p-mediana hamiltoniana com restrições de capacidade.

Esta heurística foi utilizada na resolução dos problemas listados na tabela 6 (cujos vectores F são apresentados em anexo).

TABELA 6 LISTA DE PROBLEMAS

Problema nº.	nº de comunicações (n)	matriz das distâncias	$F=(f_i)^n$ Anexo	limites cap.		Nº.de serviços (p)
				máx. (G)	min. (g)	
31	10	A1	F1	60	20	3
32	10	A1	F2	80	25	3
33	20	A2	F3	100	30	4
34	20	A2	F4	90	30	5
35	20	A2	F5	90	20	4
36	30	A3	F6	90	30	5
37	30	A3	F7	100	20	5
38	30	A3	F8	100	35	5
39	30	A3	F8	150	35	4
40	50	A4	F9	140	50	6
41	50	A4	F9	120	40	7
42	50	A4	F9	100	40	8

É de salientar que, nestes problemas, o número de serviços a instalar foi fixado, com base nos valores f_i e nos limites de capacidade máxima e é dado pelo menor valor de p para o qual é possível existir uma solução admissível que verifique as restrições de capacidade. Assim calcula-se $T = \sum_{i=1}^n f_i$ e toma-se para valor de p o menor valor inteiro maior ou igual que T/G .

Início

Seleção duma solução verificando as restrições de capacidade.

Resolução dos p problemas de caixeiro viajante, associados à solução inicial utilizando o método 3-optimal.

Escolha de dois elementos da partição

"Quebrar" os dois circuitos escolhidos duma das formas possíveis (como indicado em 3 (B))

Escolher a melhor das ligações admissíveis entre os tipos indicados em 3 (B)-1º, 2º (solução 1)
Escolher a melhor das ligações admissíveis entre os tipos indicados em 3(B)-3º, 4º (solução 2)

Escolher a melhor das soluções 1 e 2

A nova solução (1 ou 2) tem custo inferior à solução corrente?

Satisfaz as restrições de capacidade?

Construir a nova solução e perturbar pelo 3-optimal para o caixeiro viajante cada um dos dois novos circuitos

a outra solução (2 ou 1) (que corresponde a obter circuitos com capacidades diferentes da já testada) tem custo inferior à solução corrente?

satisfaz as restrições de capacidade?

Foram examinadas todas as "quebras" possíveis no par escolhido?

A solução é 3-optimal

Foram examinados todos os pares?

PT

Na tabela 7 apresentam-se os resultados computacionais obtidos para os problemas acima indicados

TABELA 7. RESULTADOS DO MÉTODO 3-OPTIMAL PARA O
PROBLEMA COM RESTRIÇÕES DE CAPACIDADE

Problema Nº.	Custo das soluções 3-optimais	Tempo computacional* (seg.)
31	339	0.31
32	553	0.12
33	922	0.40
34	622	1.60
35	1005	0.36
36	904	5.98
37	581	4.56
38	1191	1.63
39	535	5.91
40	827	24.82
41	1104	33.67
42	1908	4.54

* computador UNIVAC 1100

Da análise das tabelas 1 e 6 constata-se que os problemas 5,7,8,11, 12 e 15 foram resolvidos sem restrições de capacidade e com restrições de capacidade utilizando, neste caso, diferentes vectores F e diferentes limites nas capacidades, segundo o esquema seguinte:

TABELA 1

Problema nº.

F

G

g

TABELA 6

Problema nº.

5	+	[F1	60	20]	→	31
5	+	[F2	80	25]	→	32
7	+	[F3	100	30]	→	33
7	+	[F5	90	20]	→	35
8	+	[F4	90	30]	→	34
11	+	[F8	150	35]	→	39
12	+	[F6	90	30]	→	36
12	+	[F7	100	20]	→	37
12	+	[F3	100	35]	→	38
15	+	[F9	100	40]	→	42

Comparando os resultados respectivos nas tabelas 5 e 7, conclui-se que, em geral, a introdução das restrições de capacidade conduz à obtenção de soluções 3-óptimas de custo mais elevado em menor tempo de cálculo. A justificação deste facto reside na redução do domínio das soluções admissíveis que se verifica ao introduzir as restrições de capacidade.

7. SUGESTÕES PARA TRABALHO FUTURO

Neste parágrafo sugerem-se outros métodos heurísticos para a p-mediana hamiltoniana .

7.1 - A análise das soluções obtidas com o método 3-óptimo descrito em 3, mostra que, em grande número de casos, essas soluções resultam da contracção das componentes conexas obtidas pela resolução do problema da "2-matching" associado ao problema da p-mediana hamiltoniana.

Este facto sugere a elaboração dum método heurístico, que se poderá designar por método contractivo, pois baseia-se na contracção das referidas componentes conexas. As soluções resultantes da aplicação desse método poderão ser óptimos locais (3-óptimas) ou permitir obter rapidamente soluções 3-óptimas.

Um método deste tipo exige inicialmente a resolução do problema da "2-matching" associado ao problema original, contudo é legítimo supor que seja mais eficiente, em termos de tempo, que o método 3-óptimo. A verificar-se esta hipótese poderia utilizar-se aquele método quando a dimensão dos problemas não permitisse a sua resolução pelo algoritmo 3-óptimo.

O método contractivo será um método iterativo no qual em cada iteração o número de circuitos existente no início da mesma é reduzido de uma unidade no final da iteração. Deste modo, designando por n o número de comunidades e por m o número de componentes conexas (circuitos) existentes na solução do "2-matching" associado (supondo $m > p$), o número de iterações efectuadas, até obter a solução com p circuitos, é $m-p$. Sabe-se ainda que m está limitado superiormente pelo maior inteiro menor ou igual que $n/2$ ($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$), logo o número máximo de iterações será $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - p$.

No início do método calcula-se, para cada dois circuitos, o custo mínimo de os "contrair" numa forma admissível (formando um único circuito) e designa-se esse custo por penalidade de contracção dos dois circuitos referidos, depois contraem-se os dois circuitos aos quais corresponde a penalidade de contracção mínima e reajustam-se as penalidades de contracção entre o novo circuito e os restantes. Em seguida volta a contrair-se os dois circuitos com penalidade mínima e a reajustar os valores das penalidades, repetindo o processo até obter o número de circuitos pretendido.

As soluções obtidas por este método podem ser perturbadas pelo método 3-

-optimal já descrito.

7.2 - Karp (9) desenvolveu um algoritmo heurístico para resolver o problema do caixeiro viajante no plano (14). Neste método consideram-se os pontos dispostos num rectângulo que vai ser dividido em 2^k subrectângulos, contendo cada um deles um máximo de t pontos. Assim se n for o número de comunidades (pontos do plano) e para t fixo, k é dado pelo menor inteiro $\gg \log_2 \frac{(n-1)}{(t-1)}$. Em cada um dos subrectângulos é resolvido o problema do caixeiro viajante que lhe está associado. A reunião dos 2^k circuitos assim obtidos vai constituir um "spanning walk" W , a partir do qual é possível construir um circuito passando pelos n pontos e cujo custo é inferior ou igual ao custo de W .

Por "spanning walk", entende-se um multi-grafo não orientado e conexo em que todos os vértices têm grau par.

Com base neste algoritmo de Karp é possível desenvolver um método heurístico para a p -mediana hamiltoniana no plano. Consideram-se, do mesmo modo, os pontos do plano dispostos num rectângulo que é subdividido utilizando o processo de Karp. Resolve-se também em cada um dos subrectângulos, o problema do caixeiro viajante associado e da reunião dos circuitos obtidos resulta o "spanning walk". Neste "spanning walk" serão pontos críticos os vértices de grau superior a 2. Note-se que estes vértices pertencem a dois ou mais subrectângulos, logo a outros tantos circuitos. Por outro lado, os vértices de grau 2 pertencem a um único circuito. Portanto, a conexidade entre os vários circuitos é garantida pelos pontos críticos.

Na p -mediana hamiltoniana não se pretende obter um único circuito, mas sim p circuitos pelo que alguns dos circuitos que formam o "spanning walk" deverão ser fundidos num só e outros separados (supondo $p < 2^k$) de forma a dividir o "spanning walk" em p componentes conexas. A fusão e a separação dos circuitos far-se-à utilizando os pontos críticos e mantendo a estrutura de "spanning walk" em cada componente conexa. Assim, uma vez obtidas as p componentes conexas, dispõe-se também dum "spanning walk" em cada uma delas e será possível utilizar o processo de Karp para transformar cada um dos p "spanning walks" num circuito. Finalmente esses p circuitos vão constituir a solução de p -mediana hamiltoniana.

7.3 - Uma vez escolhidos os p pontos para localizar os depósitos a p -mediana hamiltoniana reduz-se ao problema do caixeiro viajante múltiplo com um número múltiplo de depósitos, considerando um único veículo associado a cada depósito. Deste modo pode também aplicar-se um método que utilize um processo de resolução heurística do caixeiro viajante múltiplo com um número múltiplo de depósitos. Contudo é necessário fixar inicial-

mente os p depósitos e para tal pode utilizar-se o processo de obtenção dos primeiros p núcleos descrito na heurística de partição. Estando os depósitos fixos é possível aplicar por exemplo o método de Wren e Holliday (15) para obter os p circuitos.

8. CONCLUSÕES

Definiu-se um novo problema no domínio dos problemas de localização e distribuição e desenvolveram-se dois métodos para o resolver heurísticamente para os quais se indicam os resultados da experiência computacional.

Sugeriram-se ainda outras formas de resolução heurística para a p -mediana hamiltoniana.

BIBLIOGRAFIA:

- (1) - BRANCO, I.M. ; GERALDES, M.E. e COELHO, J.D. (1980),
"O problema da P-Mediana na Localização de Equipamentos
Armazéns e Unidades Industriais", Centro de Estatística e
Aplicações, Universidade de Lisboa, nota nº.6
- (2) - BRANCO, I.M.; CERDEIRA J.O. e COELHO, J.D. (1983), "A Routing-
Location Problem: A Travelling Salesman Approach", Facul-
dade de Economia da Universidade Nova de Lisboa, Working
Paper nº.6 (submetido para publicação a uma revista da
especialidade).
- (3) - BRANCO, I.M. e COELHO, J.D. (1984) "Formulações Matemáticas da
P-Mediana Hamiltoniana", a publicar como Working Paper na
Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa.
- (4) - BURNESSE, R.C. e White, J (1976) " The Travelling Salesman
Location Problem", Transportation Science, vol.10,nº.4
p p 348-360.
- (5) - CERDEIRA, J.O. e Coelho, J.D. (1982) "Problemas de Distribuição:
'A State of the Art' - Part I", Centro de Estatística e
Aplicações, Universidade de Lisboa, nota nº.36.
- (6) - CHRISTOFIDES, N.e EILON, S.(1969) " An Algorithm for the Vehicle-
Dispatching Problem, Oper. Res. Q. 20, pp 309-313
- (7) - FENEL, Z. (1973), "Algorithm 456 Routing Problem [H]", Communica-
tions of the ACM, vol. 16 nº.9, pp 572-574
- (8) - JACOBSEN, S.K. e MADSEN, O.B.G. (1980), " A comparative study of
heuristics for a two-level routing-location problem",
European Journal of Operational Research, 5, pp 378-387.
- (9) - KARP, R.M. (1977) "Probabilistic Analysis of Partitioning
Algorithms for the Travelling-Salesman Problem in the Plane",
Math. of Oper. Res. vol.2,nº.3, pp 209-223.
- (10)- LAPORTE, V. e NOBERT, Y.(1981), "An exact algorithm for minimizing
routing and operating costs in depot location",
European Journal of Operational Research, 6, pp 224-226.
- (11)- LAPORTE, G; NOBERT, Y. e PELLETIER, P. (1983), "Hamiltonian
Location Problems", European Journal of Operational
Research, 1 2, pp 82-89.

- (12)- LIN, S. (1965) " Computer Solutions of the Travelling Salesman Problem", Bell. Syst. Tech. J. 44 pp 2245-2269
- (13)- LIN, S. e KERNIGHAM, B.W. (1973), "An Effective Heuristic Algorithm for the Travelling - Salesman Problem", Oper. Res. Q., 21, pp 498-516.
- (14)- NAMBIAR, J.M. ; GELDERS, L.F. e VAN WASSENHOVE, L.N. (1981) "A large scale location-allocation problem in the natural rubber industry", European Journal of Operational Research, 6, pp 183-189
- (15)- WREN, A. e HOLLIDAY, A. (1972) "Computer Scheduling of vehicles from one or more depots to a number of delivery Points", Oper. Res. Q., 23 pp 333-344.

A N E X O

VECTORES $F = (F_i)_{i=1}^n$

Cliente nº.	F1	F2
1	7	18
2	30	26
3	16	11
4	9	30
5	21	21
6	15	19
7	19	15
8	23	16
9	11	29
10	5	26

Cliente nº.	F3	F4	F5
1	19	18	27
2	15	17	19
3	16	29	20
4	29	13	5
5	26	22	22
6	37	25	12
7	16	28	19
8	12	27	22
9	31	19	16
10	8	10	7
11	19	12	26
12	20	14	14
13	13	24	21
14	15	16	24
15	22	33	13
16	28	15	15
17	12	11	18
18	6	18	11
19	27	17	28
20	14	21	9

Cliente nº.	F6	F7	F8
1	10	27	13
2	7	23	19
3	13	11	10
4	19	14	9
5	26	8	20
6	3	5	25
7	5	8	25
8	9	16	36
9	16	31	6
10	16	9	5
11	12	5	15
12	19	5	25
13	23	7	9
14	20	18	8
15	8	16	18
16	19	1	13
17	2	27	14
18	12	36	3
19	17	30	23
20	9	13	6
21	11	10	26
22	18	9	16
23	29	14	11
24	3	18	7
25	6	2	41
26	17	6	35
27	16	7	26
28	16	18	9
29	9	28	15
30	21	3	3

Cliente nº.	F9
1	7
2	30
3	16
4	9
5	21
6	15
7	19
8	23
9	11
10	5
11	19
12	29
13	23
14	21
15	10
16	15
17	3
18	41
19	9
20	28
21	8
22	8
23	16
24	10
25	28
26	7
27	15
28	14
29	6
30	19
31	11
32	12
33	23
34	26
35	17
36	6
37	9
38	15
39	14
40	7
41	27
42	13
43	11
44	16
45	10
46	5
47	25
48	17
49	18
50	10