Normas sociomatemáticas nas aulas do ensino superior

António Domingos
Departamento de Matemática da FCT/UNL
Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento (UIED)

Introdução

A compreensão do ensino e aprendizagem da Matemática pode ser analisada com base na forma como os indivíduos participam numa dada cultura. A interpretação do que acontece na aula de Matemática permite-nos compreender de que modo é que os alunos desenvolvem as suas crenças e valores matemáticos, tornando-os intelectualmente mais autónomos e capazes de explicitar os significados entretanto construídos. Estas aulas são regidas por normas, normas *sociomatemáticas*, que assentam nos aspectos normativos de discussões matemáticas que são específicos da actividade matemática dos alunos (Yackel e Cobb, 1996).

Neste texto pretende-se fazer uma análise de algumas aulas de Análise Matemática leccionadas para alunos do 1º ano do ensino superior, procurando identificar normas sociais e sociomatemáticas presentes nestas aulas. O tipo de normas encontradas tem características específicas destas aulas e permite inferir algumas das formas assumidas pelos conceitos imagem que os alunos manifestam na compreensão dos conceitos matemáticos estudados (Domingos, 2003).

Normas sociais e normas sociomatemáticas

Nas últimas duas décadas tem-se destacado uma linha de investigação em Educação Matemática que procura explicar a aprendizagem dos conceitos com base nas interacções que têm lugar na sala de aula. Embora a perspectiva construtivista possa ser tomada como pano de fundo desta abordagem, parece ser necessário recorrer a uma análise mais detalhada quando se procura compreender e dar sentido às experiências que vão acontecendo na aula. Desta forma é preciso desenvolver uma visão interpretativa mais ampla que contemple uma perspectiva sociológica da actividade matemática. Os significados dos conceitos matemáticos podem assim ser vistos como sendo construídos de um modo interactivo, resultando de uma negociação das normas que regem a sala de aula. Como poderemos constatar em Yackel e Cobb (1996) ou Herbel-Eisenmann (2003) esta abordagem tem como pressupostos teorias como o interaccionismo simbólico e a etnometodologia, dando um papel de relevo à construção interactiva dos significados e à reflexividade. Os processos sociais e culturais são assim vistos como integrantes da actividade matemática, sendo o ensino e a aprendizagem vistos como uma forma de participação numa cultura e não com base num modelo de transmissão de conhecimentos.

As normas sociais e as normas sociomatemáticas são inferidas pela identificação de regularidades nos padrões de interacção social que se desenvolve na sala de aula. A distinção entre ambas nem sempre é clara apresentado por vazes diferenças bastante subtis. As normas sociais têm um carácter mais geral, podendo considerar-se como exemplo de uma destas normas a compreensão de que se espera que os alunos expliquem as suas soluções e os seus modos de pensamento na resolução de um dado problema ou de que quando se discute o problema os alunos devem apresentar soluções diferentes das já apresentadas. Estas normas centram-se assim nas explicações e justificações que os alunos dão das suas soluções. No que se refere às normas sociomatemáticas, elas reflectem situações de interacção da aula de matemática, caracterizadas pela compreensão normativa do que é considerado matematicamente diferente, matematicamente sofisticado, matematicamente eficaz ou matematicamente elegante (Yackel e Cobb, 1996). Podemos tomar como exemplo deste tipo de normas a compreensão do que é considerado como uma explicação matemática aceitável na resolução de um problema ou o que pode ser considerado como diferença matemática durante a sua discussão.

Com base neste constructo teórico pretende-se analisar algumas das interacções que foi possível observar em salas de aula com alunos do Ensino Superior, procurando identificar algumas das normas aí presentes e caracterizando sempre que possível o seu papel no ensino e na aprendizagem dos conceitos estudados.

O contexto educativo

As aulas que a seguir são objecto de análise dizem respeito à disciplina de Análise Matemática I, leccionadas numa instituição pública de ensino superior situada na região da Grande Lisboa e eram destinadas a alunos de Matemática, Engenharia Electrotécnica e de Ensino das Ciências da Natureza, que frequentavam a disciplina pela primeira vez. Apresenta-se de seguida uma descrição sucinta da forma como decorreu o processo de ensino onde podemos distinguir dois tipos de aulas. Os alunos da licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores e do Ensino das Ciências da Natureza foram alvo de uma metodologia de ensino baseada em aulas teórico-práticas leccionadas sempre pelo mesmo professor, enquanto que os alunos da licenciatura em Matemática tiveram dois tipos de aulas: as aulas teóricas que funcionavam em simultâneo para todos os alunos da licenciatura inscritos na disciplina e as aulas práticas que eram leccionadas por outro professor, em grupos mais pequenos designados por turnos práticos. Estas aulas da licenciatura em Matemática seguem um modelo que podemos designar por tradicional na sua organização temporal, por ser o mais usual para a maior parte das disciplinas propedêuticas ministradas nas instituições de Ensino Superior. Em ambos os casos a disposição dos alunos na aula segue um modelo “magistral” encontrando-se os alunos sentados em mesas de dois, com todas as mesas dispostas em filas, viradas para o quadro e para a secretária do professor que se encontra junto deste.

Na abordagem em que os alunos tinham aulas teórico-práticas o tempo disponível para a leccionação dos temas era o mesmo que dispunham os alunos das restantes licenciaturas sujeitas à organização temporal tradicional. Esta metodologia de ensino baseada em aulas teórico-práticas teve como objectivo principal o de proporcionar uma nova experiência pedagógica, tendo sido aplicada nas licenciaturas Engenharia Electrotécnica e de Ensino das Ciências da Natureza. A abordagem feita privilegiou a introdução dos conceitos com base em exemplos concretos, apresentando-se posteriormente a sua definição formal. Pelo seu carácter indutivo foi possível observar uma maior interacção entre o professor e os alunos, sendo estes bastante solicitados a participar nas actividades propostas ao longo das aulas. Este processo foi sendo menos participado à medida que os conceitos se vão tornando mais abstractos, ou quando a sua escrita envolve uma tradução simbólica.

Para os alunos da licenciatura em Matemática a organização dos tempos lectivos segue um método onde as aulas estão separadas em teóricas e práticas, sendo leccionadas por professores diferentes. Na aula teórica, que funciona para todos os alunos da licenciatura inscritos na disciplina, os conceitos são quase sempre introduzidos a partir da sua definição formal e propriedades, sendo posteriormente referidos alguns exemplos concretos e contra-exemplos para ajudar na sua compreensão. Da mesma forma, os teoremas são enunciados e demonstrados, sempre que a demonstração é considerada relevante para a compreensão dos conceitos e posteriormente são dados alguns exemplos concretos reveladores da sua aplicabilidade. Os alunos são solicitados pelo professor a participar quer nas demonstrações, quer na aplicação das propriedades e teoremas, mas acabam por ter uma participação muito fraca, limitando-se sobretudo a transcrever tudo o que o professor escreve no quadro. As aulas práticas funcionam em grupos mais pequenos, cerca de 27 alunos, e têm como principal objectivo aplicar os conceitos, suas propriedades e teoremas associados, abordados na aula teórica. Para tal é utilizado um conjunto de exercícios que têm essencialmente por base o recurso ao cálculo e às suas técnicas, procurando-se desta forma dar significado aos conceitos teóricos aprendidos anteriormente. A metodologia utilizada nestas aulas passa por disponibilizar um curto espaço de tempo em que os alunos podem pensar sobre o exercício, acabando o professor por esquematizar a sua resolução no quadro. Nesta fase há por vezes uma grande interactividade entre o professor e os alunos que conduz essencialmente ao esclarecimento dos procedimentos utilizados na resolução do problema.

Neste contexto foi feita a observação de aulas em cada uma das turmas, sendo os tópicos estudados referentes ao estudo das sucessões, das funções e do cálculo diferencial. Apresenta-se de seguida alguns episódios que traduzem interacções observadas ao longo das aulas, procurando identificar as normas que regem essas interacções.

Os dados empíricos

Nesta secção procura-se descrever algumas das situações de sala de aula observadas durante o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos leccionados no âmbito da disciplina de Análise Matemática I, procurando ilustrar ambas as metodologias de ensino descritas anteriormente. Serão apresentadas duas situações distintas em cada um dos contextos de ensino. A primeira situação diz respeito à introdução do conceito de sucessão e a segunda refere-se ao estudo do conceito de sucessão convergente. Apresenta-se de seguida a descrição e análise da introdução de cada um dos conceitos em ambas as salas de aula.

Conceito de sucessão

No que se refere às aulas teórico-práticas para os alunos de engenharia a introdução do conceito é feita com base num problema da vida real que propõe estudar o crescimento de uma população de coelhos (sendo apresentado um pictograma em acetato), crescimento este que é traduzido pela sucessão de Fibonacci. A adesão dos alunos ao problema é grande, começando estes por efectuar alguns cálculos para estabelecer o que acontece nos primeiros meses que os coelhos se vão reproduzir. Alguns alunos começam por responder a questões iniciais, tais como, quantos coelhos existiriam ao fim de 6 e de 12 meses, referindo em voz alta alguns números e esperando que a professora valide as suas respostas. Outros alunos procuram determinar uma lei geral que permita encontrar o número de coelhos que há num determinado mês. Os alunos recorrem a uma diversidade de modelos, referindo sobretudo modelos lineares, quadráticos e exponenciais. Quando os alunos tentam que a professora valide os modelos que vão enunciando ela responde que não há uma lei geral, pelo que alguns alunos voltam a tentar esquematizar o que se passa com a reprodução nos primeiros meses. Posteriormente a professora vai mostrando uma sequência de números que corresponde aos casais de coelhos que vão existir em cada mês que passa, mas nenhum aluno consegue identificar uma lei que possa traduzir essa sequência, acabando a professora por concluir que o número de casais em cada mês é igual à soma dos que existiam nos dois meses anteriores. Com a descoberta desta lei os alunos voltam a mostrar uma grande participação, continuando a sequência que a professora tinha começado a mostrar. Com base nesta sequência a professora tenta que os alunos explicitem o seu conceito de sucessão. Ao questioná-los sobre o que é uma sucessão as respostas obtidas vão no sentido de reproduzir elementos da actividade desenvolvida anteriormente, isto é, a sucessão é identificada com sendo uma sequência de elementos. Perante as respostas dos alunos a professora escreveu a definição formal no quadro, uma sucessão de números reais é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, e procurou que estes identificassem os objectos e as imagens como sendo os termos e as ordens, identificação esta que os alunos não conseguiram concretizar. Foi preciso recorrer a termos gerais de sucessões, como por exemplo a sucessão dos números pares ou dos números ímpares, para que através do cálculo de seus primeiros termos os alunos conseguissem estabelecer essas nomenclaturas.

Nesta situação parece ser possível identificar momentos de interacção entre os alunos e o professor que são regidos por normas. Um destes momentos prende-se com o facto de os alunos no início procurarem que o professor valide alguns dos valores que vão encontrando para que possam prosseguir com o desenvolvimento da sua estratégia de resolução do problema. Por vezes uma não resposta por parte do professor faz com que o aluno não prossiga a estratégia iniciada, procurando outro processo de abordar o problema ou aguardando que surja um momento em que possa fazer essa validação com base nas interacções que se possam estabelecer com outros colegas. Esta é uma norma sociomatemática, que pode ser designada como uma tendência para a *legitimação*, que ocorre em várias outras situações na sala de aula. O aluno procura validar a cada momento resultados intermédios para apoiar as suas conjecturas e soluções do problema em vez de desenvolver um esquema de raciocínio que lhe permita validar todo o processo realizado até chegar à solução encontrada, tendo depois a capacidade de produzir uma argumentação que explicite esse raciocínio. Esta norma parece derivar de uma norma social, também possível de observar no contexto anterior, que tem por base o papel do professor enquanto autoridade que decide se os argumentos apresentados estão ou não conforme os significados institucionais, isto é, os significados partilhados pela comunidade matemática. Esta norma pode ser designada de *conformação*, tendo como papel principal o de verificar se um dado significado está conforme com aquilo que é considerado matematicamente válido. Outra norma que é possível inferir da situação de sala de aula anterior está relacionada com a abordagem que os alunos fazem da situação, procurando encontrar uma expressão analítica que possa descrever todos os termos da sucessão. Esta norma parece ser usada como forma de introduzir uma maior sofisticação e elegância ao conteúdo matemático, aproximando-se assim das estruturas matemáticas que os alunos são solicitados a manipular na sua actividade matemática. Esta norma pode ser designada de *algebrização*, e surge em várias situações em que os alunos são solicitados a desenvolver raciocínios que envolvem problemas descritos por palavras. O facto de o aluno realizar uma diversidade de manipulações algébricas parece conferir-lhe um maior "poder matemático" relevando outro tipo de representações para segundo plano. Esta abordagem tornou-se evidente quando a professora representou a sucessão de Fibonacci por recorrência, fazendo com que esta fosse aceite por todos, mesmo aqueles que até então continuavam a procurar uma expressão analítica que traduzisse a sucessão.

No caso das aulas para os alunos de Matemática o conceito de sucessão foi introduzido nas aulas teóricas a partir da definição formal, apresentada em acetato. De seguida os alunos foram questionados acerca da notação a utilizar mas acabaram por aguardar pela resposta do professor que deu exemplos de termos gerais de algumas sucessões, $u_n = n^n$ e $v_n = (-1)^n * \frac{1}{n}$, solicitando de seguida o cálculo de alguns termos destas. Os alunos não intervêm espontaneamente, tendo o professor indicado alguns termos de ambas as sucessões. De seguida apresentou o termo geral de uma sucessão definida por recorrência, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ com $u_1 = 2$, calculando de seguida alguns dos seus termos. Um aluno intervém perguntando se não está a faltar na representação da sucessão o termo geral u_n. O aluno procura estabelecer uma comparação com as sucessões representadas anteriormente, pressupondo que antes de indicar a expressão do termo geral deve aparecer o u_n a anteceder o sinal de igual. O professor responder que a sucessão estava correctamente definida desta forma e foi indicando alguns dos seus termos. Posteriormente foram dados mais alguns exemplos de termos gerais de sucessões pedindo aos alunos para calcularem os seus primeiros termos. Os alunos foram realizando os cálculos no lugar e em silêncio participando apenas quando solicitados a indicar os termos que tinham calculado. Na parte final da aula foram fornecidos aos alunos os primeiros termos de algumas sucessões, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1… e 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6…, pedindo para que encontrassem os respectivos termos gerais. No primeiro caso houve um aluno que conseguiu indicar o termo geral pretendido mas no segundo nenhum aluno mostrou ser capaz de o encontrar tendo o mesmo sido fornecido pelo professor.

Do ponto de vista das interacções estas aulas apresentam características bastante diferenciadas das descritas anteriormente, ainda que o tema em estudo seja comum. Parece ser possível identificar uma norma social que é transversal a toda a aula, onde o professor é reconhecido como o detentor do saber e os alunos apenas devem mostrar uma predisposição para apreender os conceitos que lhe são transmitidos. Esta norma social parece determinar uma outra norma sociomatemática, onde os alunos devem aprender o conceito a partir da definição criando um conceito imagem desta e só posteriormente devem alargar esse conceito imagem com recurso aos vários exemplos trabalhados. Esta norma pode ser designada de *particularização*, preconizando que os conceitos podem ser introduzidos com base na sua definição formal, sendo a sua compreensão desenvolvida com base na manipulação de alguns exemplos e contra exemplos.

Sucessão convergente

Descreve-se de seguida uma situação de sala de aula que acontece aquando da introdução do conceito de sucessão convergente. No que se refere às aulas teórico-práticas para os alunos de engenharia a introdução do conceito é feita na sequência do estudo do conceito de infinitamente grande. Anteriormente os alunos estudaram este conceito partindo de exemplos concretos que lhe permitiram deduzir a sua tradução simbólica. No caso da sucessão convergente a professora começou por fornecer aos alunos a sucessão $u_n = \frac{n+3}{n}$ pedindo para que estes calculem o seu limite. Não surge nenhuma resposta espontânea e alguns alunos intervêm referindo que têm dificuldade no cálculo do mesmo. Um aluno questiona a professora perguntando para onde vai tender o n e depois conclui que se trata de uma indeterminação. Posteriormente alguns alunos conseguem responder à questão dizendo que o limite é 1, com o intuito de que a sua resposta seja validada, mas quando se pede para que eles explicitem o modo como conseguiram chegar a esse valor alguns dos procedimentos realizados partem de pressupostos falsos, nomeadamente eles argumentam que dividem ambos os membros da fracção por n mas executam os cálculos de forma incorrecta. A professora pede para que os alunos indiquem os primeiros termos da sucessão e vai fazendo a sua representação esquemática na recta real com o objectivo que os alunos visualizem o comportamento dos primeiros termos, estabelecendo assim o modo como estes se estão a aproximar do valor 1. Com base neste esquema são estabelecidas algumas vizinhanças do ponto 1 com raios cada vez menores, como por exemplo para $n > 15 \Rightarrow u_n \in V_{0,2}(1)$. Com base nestes exemplos a professora escreveu por extenso a definição no quadro, fazendo de seguida a sua tradução simbólica. Inicialmente fez a escrita simbólica utilizando a noção de vizinhança e posteriormente traduziu essa noção em termos de módulos como se mostra a seguir: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{p\in\mathbb{N}} : n > p \Rightarrow | u_n - 1 | < \varepsilon$. Esta escrita suscitou algumas dúvidas, sobretudo na relação que há entre a notação de vizinhança e o módulo da diferença entre os termos da sucessão e o limite, levando os alunos a questionar como se poderia passar de uma representação para a outra. Com base na definição simbólica anterior foi escrita a definição para o caso geral tendo de seguida a professora proposto o cálculo do limite da sucessão anterior com base nesta definição. Para ajudar os alunos a desenvolver a prova a professora começou par escrever a definição simbólica para o caso concreto, $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{p\in\mathbb{N}} : n > p \Rightarrow | \frac{n+3}{n} - 1 | < \varepsilon$. Alguns alunos começam a procurar resolver o problema, mas todos eles se centram na resolução algébrica da desigualdade presente no segundo membro da implicação. Embora este processo já tenha sido abordado para provar por definição que uma dada sucessão era um infinitamente grande, os alunos continuam a centrar-se nos procedimentos algébricos sem dar qualquer relevo ao papel dos quantificadores. Para ultrapassar esta situação a professora acabou por ter que esquematizar a resolução no quadro, apresentando-a passo a passo e recorrendo ao questionamento permanente para justificar cada um dos passos. A participação dos alunos vai pouco além dos cálculos que já tinham efectuado anteriormente e quando se procura que eles dêem significado ao papel desempenhado pelos quantificadores apenas conseguem recorrer aos exemplos abordados aquando do estudo do conceito de infinitamente grande atribuindo aos parâmetros o mesmo significado que estes tinham nessa definição. Depois de a prova ter sido completada pela professora os alunos foram solicitados a provar por definição que a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ tendia para 0. Nesta tarefa a participação dos alunos é maior, tendo a maioria começado a resolver no seu lugar e trocando algumas ideias com os colegas de carteira. O processo que a maioria destes alunos seguiu foi e de estabelecer uma comparação com a resolução anterior, feita pela professora, indicando todos os passos na mesma sequência. Quando alguns alunos foram questionados para explicar o modo como fizeram a resolução, surgiram muitas dificuldades na explicitação do papel desempenhado pelos quantificadores, sendo dado mais relevo aos processos algébricos que foram desenvolvidos.

Também no desenvolvimento desta aula foi possível observar a existência de algumas normas que parecem reger as interacções observadas. Uma dessas normas, tem um carácter mais geral, e revela-se como uma necessidade para a realização de cálculos em vez de fazer uma discussão do problema com base noutros argumentos mais teóricos. Esta pode ser designada como uma norma sociomatemática de *validação por cálculo*, onde o problema apresenta um carácter matemático desde que envolva um conjunto de cálculos mais ou menos complexos. Esta norma vem fazer com que a atenção dos alunos não se centre no papel desempenhado pelos quantificadores mas sim nos procedimentos de cálculo necessários para que se possa considerar que o problema foi resolvido. Esta norma parece induzir uma outra, onde o papel dos quantificadores não é considerado como relevante. Na resolução de um problema de convergência usando a definição o papel dos quantificadores é estabelecido por comparação com resoluções de exemplos semelhantes sem que daí resulte uma compreensão efectiva da dimensão que a definição preconiza. Esta norma surge quando é preciso manipular expressões simbólicas mais ou menos complexas e pode ser designada como norma de *comparação simbólica*.

O estudo da noção de sucessão convergente para os alunos de Matemática seguiu um processo semelhante à implementação do conceito de sucessão. Foi apresentada a definição a partir de um acetato, com a seguinte formulação: sejam u uma sucessão e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que *u* converge para *a* (ou tende para *a* ou, ainda, que o limite da sucessão é *a*), e representa-se por $u_n \to a$, se $\forall \varepsilon > 0 \exists p \in N : n > p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$. Os alunos limitaram-se a copiar a mesma para os seus apontamentos. Posteriormente o professor escrever no quadro a definição simbólica usando a noção de vizinhança, fazendo uma representação esquemática na recta real do papel do ε, e estabelecendo uma comparação desta definição com a enunciada anteriormente. Os alunos transcrevem a definição sem colocar qualquer questão. De seguida foi proposto que se provasse por definição que a sucessão de termo geral $\frac{1}{n^2}$ tendia para 0. Os alunos permaneceram passivos aguardando que o professor desenvolvesse a prova pretendida. À medida que o professor foi realizando a demonstração os alunos limitaram-se a transcreve-la para o caderno aceitando todos os passos apresentados sem colocar qualquer dúvida ou questão.

Pela natureza da abordagem feita no ensino deste conceito os padrões de interacção que é possível observar são em tudo semelhantes aos já descritos anteriormente, aquando do ensino do conceito de sucessão. Continua a ser possível identificar a norma social que traduz a autoridade do professor assim como a norma sociomatemática da *particularização*.

Conclusão

O estudo das interacções que se estabelecem na sala de aula e a observação dos padrões que regem essas mesmas interacções pode revelar-se uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. O recurso ao quadro conceptual que analisa estes padrões do ponto de vista das normas sociais e sociomatemáticas (Yackel e Cobb, 1996; Herbel-Eisenmann, 2003) dá-nos a possibilidade de fazer uma análise dessas práticas que permite identificar outros tipos de normas que lhe são características. As aulas acima descritas apresentam características bastante diferenciadas o que faz com que seja possível identificar normas diferentes em ambas as situações. As normas observadas nem sempre são favoráveis ao desenvolvimento de uma compreensão relacional dos conceitos estudados. Embora não seja o objectivo deste texto explicitar a compreensão que os alunos manifestam sobre os conceitos é possível encontrar em Domingos (2003) uma análise bastante completa dos significados que os alunos construíram.

Referências

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados - a matemática no início do superior* (tese de doutoramento não publicada, Faculdade Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa). Lisboa.

Herbel-Eisenmann, B. (2003). Examining “norms”in mathematics education literature: refining the lens. Em *NCTM 2003: Beliefs, values, & norms symposium*. [Acesso electrónico]. Disponível: http://www.msu.edu/~jansenam/NCTM2003.html.

Yackel, E., e Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.