

Herberto de Jesus da Silva

O SEMIGRUPO DOS ENDOMORFISMOS
DE
ÁLGEBRAS DE OCKHAM

Dissertação apresentada para obtenção do
grau de Doutor em Matemática na especiali-
dade de Álgebra pela Universidade Nova de
Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Lisboa

1996

copyright

CONSELHO CIENTÍFICO

À MEMÓRIA DE MEU PAI

Agradecimentos

Quero manifestar o meu profundo reconhecimento ao Professor Doutor T. S. Blyth pela possibilidade de realizar labor científico sob a sua orientação esclarecida e solícita. O seu incentivo permanente, as suas perguntas e sugestões, foram essenciais para a génese e desenvolvimento do presente trabalho.

Para que esta dissertação fosse possível muito contribuiu o precioso apoio da Professora Doutora Emília Giraldes. Cumpre-me aqui agradecer o empenho e disponibilidade que sempre manifestou.

Cabe aqui uma palavra de apreço para a Professora Doutora M. Helena Santos pelo apoio que prestou em múltiplos aspectos relacionados com este trabalho.

Ao Conselho do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, na pessoa do seu presidente Professora Doutora Elvira Coimbra, agradeço as facilidades concedidas.

À Fundação Calouste Gulbenkian, INVOTAN e Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica agradeço o apoio financeiro prestado.

Resumo

Este trabalho encontra a sua principal motivação no problema de saber em que condições é regular o semigrupo dos endomorfismos de uma álgebra de Ockham.

Após as devidas considerações de natureza preliminar, começamos por estabelecer, para álgebras de Ockham pertencentes a alguma classe de Berman, uma condição necessária para que o respectivo semigrupo dos endomorfismos seja regular. Mais precisamente, demonstra-se que: se uma álgebra de Ockham $(L; f)$ pertence a alguma classe de Berman e o semigrupo dos endomorfismos $\text{End}(L; f)$ é regular então existe $p \geq 1$ tal que $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,2}$. Também mostramos que em cada classe de Berman da forma $\mathbf{K}_{p,2}$, existe pelo menos uma álgebra de Ockham $(L; f)$ tal que $\text{End}(L; f)$ é semigrupo inverso. Para álgebras de Ockham subdirectamente irreduzíveis, pertencentes a alguma classe de Berman, obteve-se um resultado que pode ser considerado como uma resposta ao problema mencionado no início.

Nesta tese resolvemos o problema acima referido, para álgebras de Ockham de tipo booleano finito (i. e. álgebras de Ockham finitas cujo reticulado subjacente é booleano e a operação unária é uma bijecção). Neste contexto caracterizamos as álgebras de Ockham de tipo booleano finito cujo semigrupo dos endomorfismos é regular, ortodoxo, semigrupo inverso ou grupo.

Finalmente, consideramos a classe $\mathbf{T}$ constituída por todas as álgebras de Ockham isomorfas a produtos directos de famílias finitas, não vazias, de álgebras de Ockham simples e finitas. Mostramos que $\mathbf{T}$ inclui todas as álgebras de Ockham de tipo booleano finito e caracterizamos as álgebras de $\mathbf{T}$ cujo semigrupo dos endomorfismos é regular.

No decurso deste trabalho são apresentados diversos exemplos ilustrativos dos principais conceitos introduzidos e resultados expostos.

Muito do material apresentado nesta tese pode encontrar-se nas publicações [6], [7], [8].

Summary

The principal motivation for this work is the problem of determining when the semigroup of endomorphisms of an Ockham algebra is regular.

After the necessary preliminaries, we prove that if an Ockham algebra $(L; f)$ belongs to a Berman class and its endomorphism semigroup $\text{End}(L; f)$ is regular then necessarily $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,2}$ for some p . For a given $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,2}$ the question of precisely when $\text{End}(L; f)$ is regular is solved in the case where $(L; f)$ is subdirectly irreducible. Using a particular construction, we show that every Berman class $\mathbf{K}_{p,2}$ contains an algebra $(L; f)$ for which $\text{End}(L; f)$ is an inverse semigroup.

Given an Ockham algebra $(L; f)$ of finite boolean type (i. e. L is a finite boolean lattice and f is a bijection), we obtain necessary and sufficient conditions for the semigroup $\text{End}(L; f)$ to be regular, orthodox, inverse or a group.

In the last chapter we consider the class $\mathbf{T}$ consisting of all isomorphic copies of direct products of finite non-empty families of simple finite Ockham algebras. We prove that $\mathbf{T}$ contains all Ockham algebras of finite boolean type and, for a general $(L; f) \in \mathbf{T}$, we give a necessary and sufficient condition for the semigroup $\text{End}(L; f)$ be regular.

Throughout the thesis, the new concepts introduced and results are illustrated by a selection of examples.

Many of the results in this dissertation can be found in the publications [6], [7], [8].

Índice

Capítulo 1 : Introdução.	1
Capítulo 2 : As álgebras de Ockham subdirectamente irreduzíveis e o respectivo semigrupo dos endomorfismos.	15
Capítulo 3 : Acerca do semigrupo dos endomorfismos para álgebras de Ockham de tipo booleano finito.	48
Capítulo 4 : O semigrupo dos endomorfismos para produtos directos finitos de álgebras de Ockham simples e finitas.	77
Bibliografia.	110

Capítulo 1

Introdução

Depois de uma breve descrição dos aspectos mais relevantes deste trabalho, apresentamos alguns resultados essenciais para assegurar clareza na exposição. Os referidos teoremas ou se encontram publicados ou são consequências imediatas de resultados conhecidos. Alguns teoremas sobre a dualidade para álgebras de Ockham são aqui deduzidos a partir de resultados análogos no contexto da dualidade de Priestley para reticulados distributivos limitados. A este respeito é apropriado referir [11], [16], [17] e [18]. Nesta dissertação supomos conhecidos determinados conceitos básicos de Álgebra Universal que se podem encontrar em [10] e [15]. Relativamente a noções que envolvem Teoria dos Reticulados referimos as obras [2], [11] e [12]. Também usamos alguns conceitos da Teoria de Semigrupos que se encontram definidos em [14]. No que respeita a resultados e conceitos que envolvem álgebras de Ockham, servem de referência as obras [3], [9] e [18].

Para um conjunto ordenado arbitrário, estão estabelecidas as condições em que o respectivo semigrupo dos endomorfismos (i. e. aplicações isótonas) é regular. Com efeito, M. E. Adams e Matthew Gould [1] obtiveram uma notável classificação dos conjuntos ordenados cujo semigrupo dos endomorfismos é regular. Tendo em consideração que o semigrupo em apreço é um semigrupo ordenado e aplicando a classificação acima referida, T. S. Blyth [4] obteve uma caracterização dos conjuntos ordenados cujo semigrupo dos endomorfismos é regular e principalmente ordenado.

No presente trabalho consideramos a questão de estabelecer condições necessárias e suficientes para que o semigrupo dos endomorfismos de uma álgebra de Ockham seja regular. Para álgebras de Ockham subdirectamente irreduzíveis, pertencentes a alguma classe de Berman, resolvemos a questão acima referida. Em particular, provamos que: para qualquer álgebra de Ockham subdirectamente irreduzível de $K_{p,1}$, o respectivo semigrupo dos endomorfismos é regular. Ainda no âmbito das álgebras de Ockham subdirectamente irreduzíveis pertencentes a alguma classe de Berman, mostramos que: se o semigrupo dos endomorfismos é regular então é necessariamente um semigrupo de Clifford com dois idempotentes ou é um grupo.

Usando o conceito de espaço dual, caracterizamos as álgebras de Ockham de tipo booleano finito cujo semigrupo dos endomorfismos é regular, ortodoxo, semigrupo inverso ou grupo. Para estas álgebras, estabelecemos um teorema de estrutura para o grupo dos automorfismos e obtemos um resultado que permite determinar o cardinal do semigrupo dos endomorfismos.

Depois de observar que toda a álgebra de Ockham de tipo booleano finito é isomorfa a um produto directo de álgebras de Ockham simples e finitas, consideramos a classe T constituída por todas as álgebras de Ockham isomorfas a produtos directos de famílias finitas, não vazias, de álgebras de Ockham simples e finitas. Nesta conformidade, descrevemos as congruências das álgebras pertencentes a T e mostramos que T é constituída pelas álgebras de Ockham finitas cujas congruências são permutáveis e a respectiva operação unária é bijectiva.

Para as álgebras pertencentes a T , estabelecemos uma condição necessária e suficiente para que o respectivo semigrupo dos endomorfismos seja regular. Neste contexto, obtemos um teorema que permite determinar o cardinal do semigrupo dos endomorfismos de uma álgebra que pertença a T .

Por uma questão de clareza de exposição, torna-se conveniente explicitar alguma terminologia usada ao longo destas páginas.

Seja $(P; \leq)$ um conjunto ordenado (também referido como conjunto parcialmente ordenado) e $x, y \in P$. Dizemos y *cobre* x e escrevemos $x \prec y$ se $x \leq y$ e $\{z \in P : x < z < y\} = \emptyset$. Dois elementos x e y dizem-se *comparáveis* (simbolicamente $x \parallel y$) se $x \leq y$ ou $y \leq x$. Os elementos x e y são denominados *incomparáveis* (simbolicamente $x \nparallel y$) se $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$. Para cada $x \in P$ definimos os conjuntos

$$x^\downarrow = \{y \in P : y \leq x\},$$

$$x^\uparrow = \{y \in P : x \leq y\}.$$

Um subconjunto Q , do conjunto ordenado P , diz-se um *conjunto decrescente* se $x^\downarrow \subseteq Q$, para qualquer $x \in Q$. Dizemos que um subconjunto Q , de P , é um *conjunto crescente* se $x^\uparrow \subseteq Q$, para todo $x \in Q$.

Recordemos que uma *álgebra de Ockham* é uma álgebra $(L; \wedge, \vee, f, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$ é um reticulado distributivo com elemento mínimo 0, elemento máximo 1, e f é uma operação unária que satisfaz: $f(0) = 1, f(1) = 0$,

$$(\forall x, y \in L) \quad f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y), \quad f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y).$$

De um modo geral denotaremos por $(L; f)$, ou simplesmente por L quando de tal não resultar ambiguidade, a álgebra de Ockham $(L; \wedge, \vee, f, 0, 1)$. O reticulado limitado $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$ será representado, abreviadamente, por L . A classe $\mathbf{O}$, constituída por todas as álgebras de Ockham, é uma classe equacional e portanto uma variedade. Denominamos *classe de Berman* e denotamos por $\mathbf{K}_{p,q}$ a subvariedade de $\mathbf{O}$ definida pela identidade $f^{2p+q}(x) = f^q(x)$, onde $p \geq 1$ e $q \geq 0$. Relativamente a estas classes, introduzidas por J. Berman [3], é importante notar a seguinte propriedade:

$$\mathbf{K}_{p,q} \subseteq \mathbf{K}_{p',q'} \iff p|p', \quad q \leq q'.$$

Se $(L; f) \in \mathbf{O}$ pertence a alguma classe de Berman então existe a menor (para a relação de inclusão) classe de Berman $\mathbf{K}_{p,q}$ tal que $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,q}$; tal classe de Berman será denotada por $\mathbf{V}_B(L)$.

Designaremos por $\mathbf{K}_\omega$ a subclasse de $\mathbf{O}$ assim definida:

$$(L; f) \in \mathbf{K}_\omega \iff (\forall x \in L)(\exists m, n \in \mathbb{N})(m \neq 0) \ f^{m+n}(x) = f^n(x).$$

Fazemos notar que designamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais $\{0, 1, 2, \dots\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, designamos por $\mathbf{K}_{\omega, n}$ a classe de álgebras de Ockham definida por:

$$(L; f) \in \mathbf{K}_{\omega, n} \iff (\forall x \in L)(\exists m \in \mathbb{N})(m \neq 0) \ f^{m+n}(x) = f^n(x).$$

Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, designamos por Φ_n a congruência de $(L; f)$ definida por:

$$(x, y) \in \Phi_n \iff f^n(x) = f^n(y).$$

Tem especial importância a congruência Φ_ω definida do modo seguinte:

$$\Phi_\omega = \bigvee_{i \geq 0} \Phi_i.$$

É de observar que $(f^n(L), f')$ é subálgebra de $(L; f)$, onde f' designa a operação unária induzida por f em $f^n(L)$. Nesta conformidade é relevante o seguinte resultado.

Teorema 1.1 ([9], Teorema 2.6) *Se $(L; f) \in \mathbf{K}_{p, q}$ então, para qualquer $n \leq q$, tem-se:*

$$L/\Phi_n \sim f^n(L) \in \mathbf{K}_{p, q-n}.$$

O símbolo $\sim$ indica a existência de um isomorfismo no caso de n ser par; no caso de n ímpar $\sim$ denota a existência de um isomorfismo dual.

Designaremos por $\text{Con}(L; f)$, ou simplesmente por $\text{Con } L$, o reticulado das congruências de uma álgebra de Ockham $(L; f)$. Denotaremos por $\omega = \{(x, x) : x \in L\}$ o elemento mínimo de $\text{Con}(L; f)$ e por $\iota = L \times L$ o elemento máximo de $\text{Con}(L; f)$. Denotamos por $\Theta(a, b)$ a congruência gerada por (a, b) , na álgebra de Ockham $(L; f)$. Designamos por $\Theta_{\text{ret}}(a, b)$ a congruência de reticulados gerada por (a, b) .

Para álgebras de Ockham subdirectamente irreduzíveis de $\mathbf{K}_\omega$, o respectivo reticulado das congruências admite uma descrição particularmente simples. No teorema que se segue é de

especial interesse, para o nosso trabalho, a descrição do reticulado das congruências para álgebras de Ockham subdirectamente irredutíveis pertencentes a alguma classe de Berman.

Teorema 1.2 ([9], Teorema 3.17) *Se $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$, então $(L; f)$ é subdirectamente irredutível se, e só se, $\text{Con}(L; f)$ é a cadeia*

$$\omega = \Phi_0 \preceq \Phi_1 \preceq \dots \preceq \Phi_\omega \prec \iota.$$

Mais precisamente,

(1) *se $(L; f)$ pertence a uma classe de Berman e $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{p,q}$, então $(L; f)$ é subdirectamente irredutível se, e só se, $\text{Con}(L; f)$ é a cadeia finita*

$$\omega = \Phi_0 \prec \Phi_1 \prec \dots \prec \Phi_q = \Phi_\omega \prec \iota;$$

(2) *se $(L; f)$ pertence a $\mathbf{K}_\omega$ e não pertence a nenhuma classe de Berman, então $(L; f)$ é subdirectamente irredutível se, e só se, $\text{Con}(L; f)$ é a cadeia infinita*

$$\omega = \Phi_0 \prec \Phi_1 \prec \dots \prec \Phi_\omega \prec \iota.$$

As álgebras de Ockham podem ser descritas através da dualidade topológica. No que se segue faremos algumas observações sobre a referida dualidade.

Seja $(X; \tau)$ um espaço topológico. Dado $U \subseteq X$, dizemos que U é um conjunto *aberto-fechado* se U é um conjunto aberto e fechado do espaço topológico $(X; \tau)$.

Um conjunto X munido de uma topologia τ e de uma relação de ordem $\leq$ diz-se um *espaço topológico ordenado* e denota-se por $(X; \tau, \leq)$ ou simplesmente por X , quando não houver perigo de ambiguidade. Um espaço topológico ordenado $(X; \tau, \leq)$ diz-se *totalmente desconexo com respeito à ordem* se, para quaisquer x, y tais que $x \not\leq y$, existe um conjunto decrescente U , aberto-fechado, tal que $x \notin U$ e $y \in U$.

Chamamos *espaço de Priestley* a qualquer espaço topológico ordenado totalmente desconexo com respeito à ordem e compacto. Dado um espaço de Priestley X , designamos por $\mathcal{O}(X)$ o conjunto de todos os conjuntos abertos-fechados decrescentes do espaço topológico ordenado X . Neste contexto é claro que $(\mathcal{O}(X); \cap, \cup, \emptyset, X)$ é um reticulado distributivo limitado.

Seja L um reticulado distributivo com 0 e 1. Designamos por $I_p(L)$ o conjunto dos ideais primos de L . Para cada $a \in L$ definimos

$$N_a = \{x \in I_p(L) : a \notin x\}.$$

Defina-se $\mathcal{B} = \{N_a \cap (I_p(L) \setminus N_b) : a, b \in L\}$. Seja τ a topologia, definida em $I_p(L)$, que admite $\mathcal{B}$ como base de abertos. Assim temos que $(I_p(L); \tau, \subseteq)$ é um espaço de Priestley, vide [11].

Um espaço Priestley X munido de uma aplicação $g : X \rightarrow X$, antítona e contínua, diz-se um *espaço de Ockham* e denota-se por $(X; g)$. Consideremos a categoria $\mathbf{Q}$ cujos objectos são os espaços de Ockham e os morfismos são as aplicações isótonas contínuas que comutam com g . Mais precisamente, dados $(X_1; g_1)$ e $(X_2; g_2)$ dois espaços de Ockham, chamamos morfismo de espaços de Ockham, de $(X_1; g_1)$ em $(X_2; g_2)$, a qualquer aplicação $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ isótona e contínua tal que: $\varphi g_1 = g_2 \varphi$. Como é natural a composição considerada na categoria $\mathbf{Q}$ é a composição usual de aplicações.

Dado um espaço de Ockham $(X; g)$ consideramos a álgebra de Ockham $(\mathcal{O}(X); f_g)$, onde f_g é definida do modo seguinte:

$$(\forall a \in \mathcal{O}(X)) \quad f_g(a) = X \setminus g^{-1}(a).$$

A álgebra de Ockham assim obtida será designada por *álgebra dual* do espaço de Ockham $(X; g)$.

Representaremos por $\mathcal{A}(X)$ a álgebra dual do espaço de Ockham $(X; g)$.

Para cada álgebra de Ockham $(L; f)$ consideramos o espaço de Ockham $(I_p(L); g_f)$, sendo g_f assim definida:

$$(\forall x \in I_p(L)) \quad g_f(x) = f^{-1}(L \setminus x).$$

Designaremos por *espaço dual* da álgebra de Ockham $(L; f)$ o espaço de Ockham $(I_p(L); g_f)$.

Denotaremos por $\mathcal{E}(L)$ o espaço dual da álgebra de Ockham $(L; f)$.

Designemos por $\mathbf{O}$ a categoria cujos objectos são as álgebras de Ockham e os morfismos são os homomorfismos de álgebras de Ockham. Os resultados que a seguir se apresentam permitem concluir que as categorias $\mathbf{O}$ e $\mathbf{Q}$ são dualmente equivalentes.

O teorema que se segue pode encontrar-se em [18, Teorema 1], com uma formulação um pouco diferente da que aqui é apresentada.

Teorema 1.3 *Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$, a aplicação $\eta_L : L \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{E}(L))$, definida por: $\eta_L(a) = N_a$, é um isomorfismo de álgebras de Ockham.*

Demonstração Por [11, Teorema 10.18] temos que η_L é um isomorfismo de reticulados. Por conseguinte, para concluir que η_L é um isomorfismo de álgebras de Ockham, basta mostrar que $\eta_L f = f_{g_f} \eta_L$. Mostremos, primeiramente, que $g_f^{-1}(N_a) = \mathcal{E}(L) \setminus N_{f(a)}$, para todo $a \in L$. Com efeito, atendendo a que $g_f(x) = f^{-1}(L \setminus x)$, para todo $x \in \mathcal{E}(L)$, então temos

$$\begin{aligned} g_f^{-1}(N_a) &= \{x \in \mathcal{E}(L) : f^{-1}(L \setminus x) \in N_a\} = \{x \in \mathcal{E}(L) : a \notin f^{-1}(L \setminus x)\} \\ &= \{x \in \mathcal{E}(L) : f(a) \notin L \setminus x\} \\ &= \{x \in \mathcal{E}(L) : f(a) \in x\} \\ &= \mathcal{E}(L) \setminus N_{f(a)}. \end{aligned}$$

Nesta contexto temos $\eta_L f(a) = N_{f(a)}$ e $f_{g_f} \eta_L(a) = f_{g_f}(N_a) = \mathcal{E}(L) \setminus g_f^{-1}(N_a)$. Assim podemos concluir que $\eta_L f(a) = f_{g_f} \eta_L(a)$. $\square$

O resultado que se segue encontra-se em [18, Teorema 3], com um enunciado ligeiramente diferente.

Teorema 1.4 *Dado um espaço de Ockham $(X; g)$, a aplicação $\varepsilon_X : X \longrightarrow \mathcal{E}(\mathcal{A}(X))$, definida por: $\varepsilon_X(t) = \{a \in \mathcal{A}(X) : t \notin a\}$, é um isomorfismo de espaços de Ockham.*

Demonstração Tendo em conta [11, Teorema 10.19(ii)] basta mostrar que $\varepsilon_X g = g_{f_g} \varepsilon_X$. Dado $t \in X$ temos

$$\begin{aligned} \varepsilon_X g(t) &= \{a \in \mathcal{A}(X) : g(t) \notin a\} = \{a \in \mathcal{A}(X) : t \in X \setminus g^{-1}(a)\} \\ &= \{a \in \mathcal{A}(X) : t \in f_g(a)\} \\ &= \{a \in \mathcal{A}(X) : f_g(a) \notin \varepsilon_X(t)\} \\ &= f_g^{-1}(\mathcal{A}(X) \setminus \varepsilon_X(t)) \\ &= g_{f_g} \varepsilon_X(t). \end{aligned}$$

Dos raciocínios acima descritos conclui-se que, para qualquer $t \in X$, temos $\varepsilon_X g(t) = g_{f_g} \varepsilon_X(t)$. $\square$

Teorema 1.5 *Sejam $(L_1; f_1)$ e $(L_2; f_2)$ álgebras de Ockham. Se $h : L_1 \longrightarrow L_2$ é um morfismo de álgebras de Ockham então a aplicação $\mathcal{E}(h) : \mathcal{E}(L_2) \longrightarrow \mathcal{E}(L_1)$, definida por: $\mathcal{E}(h)(x) = h^{-1}(x)$, é um morfismo de espaços de Ockham.*

Demonstração Atendendo a [11, Teorema 10.26] concluiu-se que $\mathcal{E}(h)$ é isótoma e contínua, conseqüentemente, resta mostrar que $\mathcal{E}(h)g_{f_2} = g_{f_1}\mathcal{E}(h)$. Seja $x \in \mathcal{E}(L_2)$. Então temos

$$\mathcal{E}(h)g_{f_2}(x) = \mathcal{E}(h)(f_2^{-1}(L_2 \setminus x)) = h^{-1}(f_2^{-1}(L_2 \setminus x)) = (f_2h)^{-1}(L_2 \setminus x).$$

Como, por hipótese, h é morfismo de álgebras de Ockham então temos $hf_1 = f_2h$ e por conseqüência $\mathcal{E}(h)g_{f_2}(x) = (hf_1)^{-1}(L_2 \setminus x) = f_1^{-1}(h^{-1}(L_2 \setminus x))$. Como $h^{-1}(L_2 \setminus x) = L_1 \setminus h^{-1}(x)$ então conclui-se que $\mathcal{E}(h)g_{f_2}(x) = f_1^{-1}(L_1 \setminus h^{-1}(x)) = g_{f_1}(h^{-1}(x)) = g_{f_1}\mathcal{E}(h)(x)$. $\square$

Teorema 1.6 *Sejam $(X_1; g_1)$ e $(X_2; g_2)$ espaços de Ockham. Se $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$ é um morfismo de espaços de Ockham então a aplicação $\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(X_2) \longrightarrow \mathcal{A}(X_1)$, definida por: $\mathcal{A}(\varphi)(a) = \varphi^{-1}(a)$, é morfismo de álgebras de Ockham.*

Demonstração Por [11, Teorema 10.26] resulta que $\mathcal{A}(\varphi)$ é um morfismo de reticulados que preserva o elemento zero e o elemento um. Sendo assim, temos apenas de provar que $\mathcal{A}(\varphi)f_{g_2} = f_{g_1}\mathcal{A}(\varphi)$. Dado $a \in \mathcal{E}(X_2)$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\varphi)f_{g_2}(a) &= \mathcal{A}(\varphi)(X_2 \setminus g_2^{-1}(a)) = \varphi^{-1}(X_2 \setminus g_2^{-1}(a)) = X_1 \setminus \varphi^{-1}(g_2^{-1}(a)) \\ &= X_1 \setminus (g_2\varphi)^{-1}(a) = X_1 \setminus (\varphi g_1)^{-1}(a) \\ &= X_1 \setminus g_1^{-1}(\varphi^{-1}(a)) = f_{g_1}\mathcal{A}(\varphi)(a). \end{aligned}$$

Dos raciocínios acima conclui-se que: $\mathcal{A}(\varphi)f_{g_2}(a) = f_{g_1}\mathcal{A}(\varphi)(a)$, para qualquer $a \in \mathcal{A}(X)$. $\square$

Teorema 1.7 *Sejam $(L_1; f_1)$ e $(L_2; f_2)$ álgebras de Ockham. Se $h : L_1 \longrightarrow L_2$ é um morfismo de álgebras de Ockham então temos*

$$\eta_{L_2}^{-1}\mathcal{A}(\mathcal{E}(h))\eta_{L_1} = h.$$

Demonstração Mostremos, primeiramente, que: $\mathcal{E}(h)^{-1}(N_a) = N_{h(a)}$, para qualquer $a \in L_1$.

Com efeito, dado $a \in L_1$ então tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(h)^{-1}(N_a) &= \{x \in \mathcal{E}(L_2) : a \notin \mathcal{E}(h)(x)\} \\ &= \{x \in \mathcal{E}(L_2) : a \notin h^{-1}(x)\} \\ &= \{x \in \mathcal{E}(L_2) : h(a) \notin x\} = N_{h(a)}.\end{aligned}$$

Dado $a \in L_1$ temos $\mathcal{A}(\mathcal{E}(h))\eta_{L_1}(a) = \mathcal{E}(h)^{-1}(N_a) = N_{h(a)} = \eta_{L_2}(h(a))$. Consequentemente, $\mathcal{A}(\mathcal{E}(h))\eta_{L_1} = \eta_{L_2}h$ e por conseguinte $\eta_{L_2}^{-1}\mathcal{A}(\mathcal{E}(h))\eta_{L_1} = h$. $\square$

Teorema 1.8 *Sejam $(X_1; g_1)$ e $(X_2; g_2)$ espaços de Ockham. Se $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$ é um morfismo de espaços de Ockham então temos*

$$\varepsilon_{x_2}^{-1}\mathcal{E}(\mathcal{A}(\varphi))\varepsilon_{x_1} = \varphi.$$

Demonstração Vamos mostrar que, para qualquer $x \in X_1$: $\mathcal{A}(\varphi)^{-1}(\varepsilon_{x_1}(x)) = \varepsilon_{x_2}(\varphi(x))$.

Efectivamente, qualquer que seja $x \in X_1$, então tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\varphi)^{-1}(\varepsilon_{x_1}(x)) &= \{a \in \mathcal{A}(X_2) : \varphi^{-1}(a) \in \varepsilon_{x_1}(x)\} \\ &= \{a \in \mathcal{A}(X_2) : x \notin \varphi^{-1}(a)\} \\ &= \{a \in \mathcal{A}(X_2) : \varphi(x) \notin a\} = \varepsilon_{x_2}(\varphi(x)).\end{aligned}$$

Se $x \in X_1$ então temos $\mathcal{E}(\mathcal{A}(\varphi))\varepsilon_{x_1}(x) = \mathcal{A}(\varphi)^{-1}(\varepsilon_{x_1}(x)) = \varepsilon_{x_2}(\varphi(x))$. Por consequência $\mathcal{E}(\mathcal{A}(\varphi))\varepsilon_{x_1} = \varepsilon_{x_2}\varphi$. Donde se conclui que $\varepsilon_{x_2}^{-1}\mathcal{E}(\mathcal{A}(\varphi))\varepsilon_{x_1} = \varphi$. $\square$

Teorema 1.9 *Sejam $(L_1; f_1)$ e $(L_2; f_2)$ álgebras de Ockham. Se $h : L_1 \longrightarrow L_2$ é um morfismo de álgebras de Ockham então são válidas as seguintes afirmações :*

- (1) *h é injectiva se, e só se, $\mathcal{E}(h)$ é sobrejectiva.*
- (2) *h é sobrejectiva se, e só se, $\mathcal{E}(h)$ é um mergulho de ordem.*

Demonstração Vide [11, Teorema 10.26]. $\square$

Teorema 1.10 *Sejam $(X_1; g_1)$ e $(X_2; g_2)$ espaços de Ockham. Se $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$ é um morfismo de espaços de Ockham então são equivalentes as seguintes afirmações :*

- (1) *φ é sobrejectiva se, e só se, $\mathcal{A}(\varphi)$ é injectiva.*
- (2) *φ é mergulho de ordem se, e só se, $\mathcal{A}(\varphi)$ é sobrejectiva.*

Demonstração (1) : Suponhamos que φ é sobrejectiva. Aplicando o teorema 1.8 conclui-se que $\mathcal{E}(\mathcal{A}(\varphi))$ é sobrejectiva. Fazendo uso do teorema 1.9 (1) resulta que $\mathcal{A}(\varphi)$ é injectiva.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{A}(\varphi)$ é injectiva. Pelo teorema 1.9 (1) temos que $\mathcal{E}(\mathcal{A}(\varphi))$ é sobrejectiva. Usando o teorema 1.8 sai que φ é sobrejectiva.

(2) : Suponhamos que φ é um mergulho de ordem. Então conclui-se, pelo teorema 1.8, que $\mathcal{E}(\mathcal{A}(\varphi))$ também é mergulho de ordem. Por aplicação do teorema 1.9 (2) tira-se que $\mathcal{A}(\varphi)$ é sobrejectiva.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{A}(\varphi)$ é sobrejectiva. Pelo teorema 1.9 (2) conclui-se que $\mathcal{E}(\mathcal{A}(\varphi))$ é um mergulho de ordem. Donde sai, usando o teorema 1.8, que φ é um mergulho de ordem. $\square$

Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$ designamos por $\text{End}(L; f)$, ou simplesmente por $\text{End } L$, o conjunto de todos os endomorfismos da álgebra de Ockham $(L; f)$. É claro que no conjunto $\text{End}(L; f)$ fica definida uma estrutura de semigrupo, munindo $\text{End}(L; f)$ com composição usual de aplicações. O referido semigrupo é um monóide, sendo id_L o respectivo elemento identidade.

Por outro lado, se $(X; g)$ é um espaço de Ockham designamos por $\Lambda(X; g)$ o conjunto das aplicações $\vartheta : X \rightarrow X$ tais que ϑ é morfismo de espaços de Ockham (i. e. ϑ é isótoma, contínua e $\vartheta g = g\vartheta$). Se considerarmos o conjunto $\Lambda(X; g)$, munido com a usual composição de aplicações, obtemos um semigrupo. É de observar que tal semigrupo é um monóide, sendo id_X o respectivo elemento identidade.

Teorema 1.11 *Se $(X; g)$ é um espaço de Ockham então os semigrupos $\Lambda(X; g)$ e $\text{End}(\mathcal{A}(X); f_g)$ são anti-isomorfos.*

Demonstração Consideremos a aplicação $\Psi : \Lambda(X; g) \rightarrow \text{End}(\mathcal{A}(X); f_g)$ definida do seguinte modo:

$$\Psi(\vartheta) = \mathcal{A}(\vartheta).$$

Observemos, em primeiro lugar, que: para todo $a \in \mathcal{A}(X)$, tem-se

$$\Psi(\vartheta\tau)(a) = (\vartheta\tau)^{-1}(a) = \tau^{-1}(\vartheta^{-1}(a)) = \Psi(\tau)(\Psi(\vartheta)(a)).$$

Por consequência $\Psi(\vartheta\tau) = \Psi(\tau)\Psi(\vartheta)$, quaisquer que sejam $\vartheta, \tau \in \Lambda(X; g)$.

Tendo em vista mostrar que Ψ é injectiva, consideremos $\vartheta, \tau \in \Lambda(X; g)$ tais que $\Psi(\vartheta) = \Psi(\tau)$.

Assim temos $\mathcal{A}(\vartheta) = \mathcal{A}(\tau)$ e por consequência $\mathcal{E}(\mathcal{A}(\vartheta)) = \mathcal{E}(\mathcal{A}(\tau))$. Donde se conclui que

$$\varepsilon_X^{-1} \mathcal{E}(\mathcal{A}(\vartheta)) \varepsilon_X = \varepsilon_X^{-1} \mathcal{E}(\mathcal{A}(\tau)) \varepsilon_X.$$

Pelo teorema 1.8 temos $\vartheta = \varepsilon_X^{-1} \mathcal{E}(\mathcal{A}(\vartheta)) \varepsilon_X$, $\tau = \varepsilon_X^{-1} \mathcal{E}(\mathcal{A}(\tau)) \varepsilon_X$ e por conseguinte $\vartheta = \tau$.

Mostremos que Ψ é sobrejectiva. Considere-se um elemento arbitrário h em $\text{End } \mathcal{A}(X)$. Tendo em conta os teoremas 1.4 e 1.5, podemos concluir que $\varepsilon_X^{-1} \mathcal{E}(h) \varepsilon_X$ pertence a $\Lambda(X; g)$. Seguidamente vamos provar que

$$\Psi(\varepsilon_X^{-1} \mathcal{E}(h) \varepsilon_X) = h.$$

Se $a \in \mathcal{A}(X)$ então tem-se

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon_X^{-1} \mathcal{E}(h) \varepsilon_X)(a) &= \mathcal{A}(\varepsilon_X^{-1} \mathcal{E}(h) \varepsilon_X)(a) = (\varepsilon_X^{-1} \mathcal{E}(h) \varepsilon_X)^{-1}(a) \\ &= \{x \in X : (\varepsilon_X^{-1} \mathcal{E}(h) \varepsilon_X)(x) \in a\} \\ &= \{x \in X : a \notin \varepsilon_X(\varepsilon_X^{-1} \mathcal{E}(h) \varepsilon_X(x))\} \\ &= \{x \in X : a \notin \mathcal{E}(h)(\varepsilon_X(x))\} \\ &= \{x \in X : a \notin h^{-1}(\varepsilon_X(x))\} \\ &= \{x \in X : h(a) \notin \varepsilon_X(x)\} \\ &= \{x \in X : x \in h(a)\} = h(a). \end{aligned}$$

Do que acima foi exposto resulta que Ψ é um anti-isomorfismo de semigrupos. $\square$

Seja $((X_i, g_i))_{i \in I}$ uma família finita (i. e. I é um conjunto finito) de espaços de Ockham. Para cada $i \in I$, defina-se $\tilde{X}_i = X_i \times \{i\}$. É de observar que $(\tilde{X}_i)_{i \in I}$ é um família de conjuntos disjuntos dois a dois (i. e. se $i \neq j$ então $\tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j = \emptyset$). Em cada $\tilde{X}_i$ define-se, naturalmente, uma relação de ordem do modo seguinte: dados $(x, i), (y, i) \in \tilde{X}_i$, dizemos que $(x, i) \leq (y, i)$ se $x \leq y$, em X_i . Para cada $i \in I$, defina-se $\mu_i : X_i \longrightarrow \tilde{X}_i$ por:

$$\mu_i(x) = (x, i).$$

Atendendo à forma como se definiu a relação de ordem em $\tilde{X}_i$, é evidente que μ_i é isomorfismo de ordem. Consideramos em cada $\tilde{X}_i$ a topologia cujos os abertos são os conjuntos da forma: $U \times \{i\}$,

onde U é um aberto de X . Neste contexto é claro que μ_i é um homeomorfismo e por conseguinte $\tilde{X}_i$ é um espaço de Priestley. Se definirmos, para cada $i \in I$, a aplicação $\tilde{g}_i : \tilde{X}_i \longrightarrow \tilde{X}_i$ por:

$$\tilde{g}_i(x, i) = (g_i(x), i)$$

obtemos um espaço de Ockham $(\tilde{X}_i, \tilde{g}_i)$. Além disso é claro, por definição de $\tilde{g}_i$, que: $\mu_i g_i = \tilde{g}_i \mu_i$.

Assim temos que μ_i é um isomorfismo de espaços de Ockham.

Define-se, em $\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$, uma relação de ordem do seguinte modo:

dados $x, y \in \bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$, dizemos que $x \leq y$ se existir $i \in I$ tal que $x, y \in \tilde{X}_i$ e $x \leq y$, em $\tilde{X}_i$.

No conjunto $\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ consideramos a topologia cujos os abertos são os conjuntos da forma: $\bigcup_{i \in I} V_i$, onde V_i é um aberto de $\tilde{X}_i$, para cada $i \in I$. Vejamos que o espaço topológico $\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ é compacto. Seja $(Y_j)_{j \in J}$ uma família de abertos, de $\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$, tal que: $\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i = \bigcup_{j \in J} Y_j$. Para cada $j \in J$ existe uma família $(V_{i,j})_{i \in I}$ tal que, para cada $i \in I$, $V_{i,j}$ é um aberto de $\tilde{X}_i$ e $Y_j = \bigcup_{i \in I} V_{i,j}$. Para cada $i \in I$, temos $\tilde{X}_i = \bigcup_{j \in J} V_{i,j}$. Como $\tilde{X}_i$ é um espaço topológico compacto então, para cada $i \in I$, existe $J_i \subseteq J$ tal que J_i é finito e $\tilde{X}_i = \bigcup_{j \in J_i} V_{i,j}$, consequentemente,

$$\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J_i} V_{i,j} \right).$$

Seja $Z = \bigcup_{i \in I} J_i$, assim temos

$$\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i = \bigcup_{j \in Z} \left(\bigcup_{i \in I} V_{i,j} \right) = \bigcup_{j \in Z} Y_j$$

Tendo em conta que I é finito conclui-se que $Z = \bigcup_{i \in I} J_i$ é um subconjunto finito de J e por conseguinte $\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ é compacto.

Vejamos que $\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ é totalmente desconexo com respeito à ordem. Consideremos $x, y \in \bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ tais que $x \not\leq y$. Sejam $i, j \in I$ tais que $x \in \tilde{X}_i$ e $y \in \tilde{X}_j$. No caso de $i \neq j$ basta notar que $\tilde{X}_j$ é um conjunto decrescente aberto-fechado e $x \notin \tilde{X}_j$. No caso de $i = j$ temos $x, y \in \tilde{X}_i$. Como $\tilde{X}_i$ é um espaço de Priestely então existe V decrescente aberto-fechado, em $\tilde{X}_i$, tal que $x \notin V$ e $y \in V$. Atendendo a que V é decrescente aberto-fechado em $\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$, conclui-se que $\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ é totalmente desconexo com respeito à ordem. Do exposto resulta que $\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ é um espaço de Priestely.

Consideremos a aplicação $\tilde{g} : \bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i \longrightarrow \bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ definida por:

$$\tilde{g}(x) = \tilde{g}_i(x) \text{ se } x \in \tilde{X}_i.$$

É claro que $\tilde{g}$ é antitona e contínua. Por consequência $(\bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i, \tilde{g})$ é um espaço de Ockham que denotaremos, abreviadamente, por $\bigsqcup_{i \in I} X_i$.

Teorema 1.12 *Dada uma família finita de espaços de Ockham $((X_i, g_i))_{i \in I}$. Então a aplicação $\Psi : \mathcal{A}(\bigsqcup_{i \in I} X_i) \longrightarrow \bigtimes_{i \in I} \mathcal{A}(X_i)$, definida por $\Psi(Y) = (\mu_i^{-1}(Y \cap \tilde{X}_i))_{i \in I}$, é um isomorfismo, da álgebra $\mathcal{A}(\bigsqcup_{i \in I} X_i)$ sobre o produto directo da família de álgebras de Ockham $(\mathcal{A}(X_i))_{i \in I}$.*

Demonstração Designemos por X o espaço de Ockham $\bigsqcup_{i \in I} X_i$. Atendendo à definição de produto directo (de álgebras de Ockham) e designando por f a operação unária da álgebra de Ockham $\bigtimes_{i \in I} \mathcal{A}(X_i)$ então temos $f((a_i)_{i \in I}) = (f_{g_i}(a_i))_{i \in I} = (X_i \setminus g_i^{-1}(a_i))_{i \in I}$.

Mostraremos apenas que $\Psi f_{\tilde{g}} = f \Psi$. Consideremos um elemento arbitrário Y , pertencente a $\mathcal{A}(\bigsqcup_{i \in I} X_i)$. Para cada $i \in I$ temos:

$$\begin{aligned} \mu_i^{-1}(f_{\tilde{g}}(Y) \cap \tilde{X}_i) &= \mu_i^{-1}((X \setminus \tilde{g}^{-1}(Y)) \cap \tilde{X}_i) = \mu_i^{-1}(\tilde{X}_i \setminus \tilde{g}^{-1}(Y)) \\ &= \mu_i^{-1}(\tilde{g}_i^{-1}(\tilde{X}_i \setminus Y)) \\ &= (\tilde{g}_i \mu_i)^{-1}(\tilde{X}_i \setminus Y) \\ &= (\mu_i g_i)^{-1}(\tilde{X}_i \setminus Y) \\ &= X_i \setminus (\mu_i g_i)^{-1}(Y \cap \tilde{X}_i) \\ &= X_i \setminus (g_i^{-1}(\mu_i^{-1}(Y \cap \tilde{X}_i))) \\ &= f_{g_i}(\mu_i^{-1}(Y \cap \tilde{X}_i)). \end{aligned}$$

Por consequência temos:

$$\Psi f_{\tilde{g}}(Y) = (\mu_i^{-1}(f_{\tilde{g}}(Y) \cap \tilde{X}_i))_{i \in I} = (f_{g_i}(\mu_i^{-1}(Y \cap \tilde{X}_i)))_{i \in I} = f((\mu_i^{-1}(Y \cap \tilde{X}_i))_{i \in I}) = f \Psi(Y).$$

Do exposto resulta que $\Psi f_{\tilde{g}} = f \Psi$. $\square$

Usando a dualidade definem-se importantes subclasses de $\mathbf{O}$. Para cada par de números inteiros m, n , tais que $m > n \geq 0$, designemos por $\mathbf{P}_{m,n}$ a subclasse de $\mathbf{O}$ constituída pelas álgebras de Ockham cujos espaços duais $(X; g)$ satisfazem: $g^m = g^n$. Nesta conformidade é de observar que $\mathbf{K}_{p,q} = \mathbf{P}_{2p+q,q}$. Seguidamente apresentamos uma caracterização das álgebras de Ockham subdirectamente irredutíveis finitas.

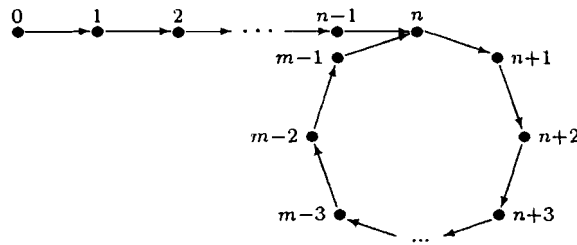
Teorema 1.13 ([9], página 67, Corolário 1) *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham finita e $(X; g)$ o respectivo espaço dual. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $(L; f)$ é subdirectamente irredutível;
- (2) existe $x \in X$ tal que $X = \{g^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$.

Para cada par de inteiros m, n , tais que $m > n \geq 0$, definimos o espaço de Ockham $(\{0, \dots, m-1\}; g_{m,n})$ munido com a ordem discreta (i. e. $\{0, \dots, m-1\}$ é uma anticadeia) e a aplicação $g_{m,n}$ definida por

$$g_{m,n}(i) = \begin{cases} i+1 & \text{se } i < m-1; \\ n & \text{se } i = m-1. \end{cases}$$

Como o conjunto $\{0, \dots, m-1\}$ é finito a topologia considerada é necessariamente a topologia discreta. A aplicação $g_{m,n}$ pode ser descrita pelo diagrama:



Designamos por $(L_{m,n}; f_{m,n})$ a álgebra dual do espaço de Ockham $(\{0, \dots, m-1\}; g_{m,n})$.

Teorema 1.14 ([9], página 68, Corolário 4) *Se $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham finita então são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $(L; f)$ é subdirectamente irredutível;
- (2) existem $m > n \geq 0$ tais que $(L; f)$ é isomorfa a uma subálgebra de $(L_{m,n}; f_{m,n})$.

Teorema 1.15 ([9], página 68, Corolário 2) *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham finita e $(X; g)$ o respectivo espaço dual. São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $(L; f)$ é simples;
- (2) $X = \{g^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ qualquer que seja $x \in X$.

Por uma questão de comodidade de exposição, convencionamos que todas as álgebras de Ockham, consideradas neste trabalho, têm pelo menos dois elementos distintos.

Capítulo 2

As álgebras de Ockham subdirectamente irredutíveis e o respectivo semigrupo dos endomorfismos

Para álgebras de Ockham pertencentes a $\mathbf{K}_\omega$, estabelecemos uma condição necessária para que o respectivo semigrupo dos endomorfismos seja regular. Mais precisamente, mostramos que: se $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$ e $\text{End}(L; f)$ é regular então $(L; f) \in \mathbf{K}_{\omega,2}$. Como consequência deste resultado, provamos o seguinte: se $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,q}$ e $\text{End}(L; f)$ é regular então $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,2}$. Neste capítulo estudamos o semigrupo dos endomorfismos de álgebras de Ockham subdirectamente irredutíveis de $\mathbf{K}_{p,2}$. Mostramos que: para qualquer álgebra de Ockham subdirectamente irredutível de $\mathbf{K}_{p,1}$, o semigrupo dos endomorfismos é regular. Dada uma álgebra de Ockham subdirectamente irredutível $(L; f)$ tal que $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{p,2}$; estabelecemos uma condição necessária e suficiente para que $\text{End}(L; f)$ seja regular. Ainda no âmbito das álgebras de Ockham subdirectamente irredutíveis de $\mathbf{K}_{p,2}$ provamos que: se o semigrupo dos endomorfismos é regular então é necessariamente um semigrupo de Clifford com dois idempotentes ou é grupo. A partir de uma álgebra de Ockham $(L; f)$ e de um reticulado de Boole com $p > 1$ átomos definimos uma nova álgebra de Ockham que designamos por $([L;p]; f_\sigma)$. No caso de $(L; f)$ ser subdirectamente irredutível e $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{1,2}$, mostramos que: $\text{End}([L;p]; f_\sigma)$ é regular se, e só se, $\text{End}(L; f)$ é regular. Neste contexto, obtemos uma relação entre os cardinais dos semigrupos $\text{End}([L;p]; f_\sigma)$ e $\text{End}(L; f)$. Usando álgebras de Ockham da forma $([L;p]; f_\sigma)$, provamos que para cada $p > 1$ existe uma álgebra de Ockham M tal que: $\mathbf{V}_B(M) = \mathbf{K}_{p,2}$, $\text{End } M$ é semigrupo inverso e $|\text{End } M| = 2p + 2$.

Comecemos por recordar o conceito de semigrupo regular. Um semigrupo S diz-se *regular* se, para cada $x \in S$, existe $y \in S$ tal que: $xyx = x$.

No que se segue vamos mostrar que: se $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$ e o semigrupo $\text{End}(L; f)$ é regular então $(L; f) \in \mathbf{K}_{\omega,2}$. Para tal necessitamos de observar o seguinte.

Teorema 2.1 *Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $(L; f) \in \mathbf{K}_{\omega,0}$;
- (2) $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$ e f é injectiva;
- (3) $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$ e f é bijectiva.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2): Suponhamos que $(L; f) \in \mathbf{K}_{\omega,0}$. Neste contexto é evidente que $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$. Mostremos que f é injectiva. Sejam $x, y \in L$ tais que $f(x) = f(y)$. Como $(L; f) \in \mathbf{K}_{\omega,0}$ então existem $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $x = f^r(x)$ e $y = f^s(y)$. Seja p o mínimo múltiplo comum de r e s . Assim temos $x = f^p(x)$ e $f^p(y) = y$. Atendendo a que $f(x) = f(y)$ temos $f^{p-1}(f(x)) = f^{p-1}(f(y))$ e por conseguinte $x = y$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Suponhamos que $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$ e que f é injectiva. Vejamos que f é sobrejectiva. Seja $y \in L$. Uma vez que $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$ então existem $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ tais que $f^n(y) = f^{n+m}(y)$. Como f é injectiva temos $y = f^m(y)$, ou seja $y = f(f^{m-1}(y))$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Suponhamos que $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$ e que f é bijectiva. Seja $x \in L$. Como $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$ então existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m \neq 0$ e $f^{m+n}(x) = f^n(x)$. Sendo f injectiva conclui-se que $f^m(x) = x$. $\square$

Teorema 2.2 *Se $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$ e $\text{End}(L; f)$ é regular então $(L; f) \in \mathbf{K}_{\omega,2}$.*

Demonstração Suponhamos que $\text{End}(L; f)$ é regular e $(L; f) \in \mathbf{K}_\omega$. Em primeiro lugar observemos que $f^2 \in \text{End}(L; f)$. Então existe $h \in \text{End}(L; f)$ tal que $f^2 h f^2 = f^2$. Como h é um endomorfismo da álgebra $(L; f)$ então h comuta com f e por conseguinte $h f^4 = f^2$.

Defina-se $\bar{f} : f^2(L) \rightarrow f^2(L)$ do seguinte modo: $\bar{f}(x) = f(x)$. Mostremos que $\bar{f}$ é injectiva. Sejam $x, y \in L$ tais que $\bar{f}(f^2(x)) = \bar{f}(f^2(y))$. Assim temos $f^3(x) = f^3(y)$, consequentemente, $h f^4(x) = h f^4(y)$. Uma vez que $h f^4 = f^2$ então $f^2(x) = f^2(y)$. Neste contexto é claro que a álgebra de Ockham $(f^2(L); \bar{f})$ pertence a $\mathbf{K}_\omega$. Aplicando o teorema 2.1, conclui-se que

$(f^2(L); \bar{f}) \in \mathbf{K}_{\omega,0}$, ou seja $(L; \bar{f}) \in \mathbf{K}_{\omega,2}$. $\square$

Podemos formular um resultado análogo ao anterior envolvendo as classes de Berman $\mathbf{K}_{p,q}$ em vez das classes $\mathbf{K}_{\omega,q}$. Mais precisamente temos o seguinte.

Corolário *Se $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,q}$ e $\text{End}(L; f)$ é regular então $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,2}$.*

Demonstração Suponhamos que $\text{End}(L; f)$ é regular e $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,q}$. É claro que $\mathbf{K}_{p,q} \subseteq \mathbf{K}_{\omega}$ e por conseguinte $(L; f) \in \mathbf{K}_{\omega}$. Pelo teorema 2.2 conclui-se $(L; f) \in \mathbf{K}_{\omega,2}$.

Mostremos que $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,2}$. Se $q \leq 2$ nada há a demonstrar pois, neste caso, $\mathbf{K}_{p,q} \subseteq \mathbf{K}_{p,2}$. Portanto podemos supor, sem perda de generalidade, que $q > 2$. Uma vez que $(L; f) \in \mathbf{K}_{\omega,2}$ então $f^2(L) = f^3(L)$. Como $q > 2$ temos $f^2(L) = f^q(L)$. Seja x um elemento arbitrário de L . Então existe $y \in L$ tal que $f^2(x) = f^q(y)$. Como $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,q}$ então temos $f^{2p+q}(y) = f^q(y)$ e por consequência $f^{2p+2}(x) = f^2(x)$. $\square$

Para qualquer álgebra de Ockham $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,q}$ desconhecemos em que condições $\text{End}(L; f)$ é regular. No entanto, para álgebras de Ockham subdirectamente irredutíveis pertencentes a $\mathbf{K}_{p,q}$ (e portanto finitas [3]), conseguimos resolver o problema em apreço.

Em geral, dada uma álgebra de Ockham $(L; f) \in \mathbf{K}_{p,q}$ designaremos por $\mathbf{V}_B(L)$ a menor classe de Berman a que $(L; f)$ pertence. No resultado que se segue supomos que $(L; f) \in \mathbf{K}_{n,2}$ e por conseguinte $\mathbf{V}_B(L)$ será $\mathbf{K}_{p,0}$, $\mathbf{K}_{p,1}$ ou $\mathbf{K}_{p,2}$, onde p é um divisor de n .

Teorema 2.3 *Seja $(L; f) \in \mathbf{K}_{n,2}$ uma álgebra de Ockham subdirectamente irredutível.*

- (1) *Se $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{p,0}$ então $\text{End}(L; f)$ é grupo.*
- (2) *Se $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{p,1}$ então $\text{End}(L; f)$ é regular.*
- (3) *Se $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{p,2}$ então $\text{End}(L; f)$ é regular se, e só se, $\text{Ker } h = \Phi_2$, para todo endomorfismo h que não seja automorfismo.*

Demonstração Pelo teorema 1.2 sabemos que: se $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{p,q}$ então L é subdirectamente irredutível se, e só se, Con L se reduz à seguinte cadeia finita:

$$\omega = \Phi_0 \prec \Phi_1 \prec \dots \prec \Phi_q \prec \iota.$$

- (1) No caso de $q = 0$ a cadeia tem apenas dois elementos

$$\omega = \Phi_0 \prec \iota,$$

portanto L é álgebra simples. Neste caso, se $h \in \text{End } L$ então $\text{Ker } h = \omega$ e por conseguinte h é injectiva (consequentemente bijectiva porque L é finita). Nesta conformidade temos que $\text{End } L$ é o grupo dos automorfismos de L .

(2) No caso de $q = 1$ a cadeia reduz-se a

$$\omega = \Phi_0 \prec \Phi_1 \prec \iota.$$

Observemos, primeiramente, que para qualquer $h \in \text{End } L$: h é automorfismo ou $\text{Ker } h = \Phi_1$. Seja $h \in \text{End } L$ e suponhamos que h não é automorfismo. Como $L \in \mathbf{K}_{p,1}$ então temos, para qualquer $x \in L$, $(x, f^{2p}(x)) \in \Phi_1 = \text{Ker } h$ e consequentemente

$$h(x) = hf^{2p}(x) = f^{2p}h(x).$$

Deste modo fica demonstrado que $h(L) \subseteq f(L)$. Pelo teorema 1.1 temos $L/\Phi_1 \sim f(L)$. Tendo em conta que $h(L) \simeq L/\text{Ker } h = L/\Phi_1$, conclui-se que $|h(L)| = |f(L)|$. Como $h(L) \subseteq f(L)$ e $f(L)$ é finito então $h(L) = f(L)$. Defina-se $h_1 : h(L) \rightarrow h(L)$ do seguinte modo: $h_1(y) = h(y)$. Já vimos que $h(x) = hf^{2p}(x)$, para qualquer $x \in L$. Uma vez que $f^{2p}(L) \subseteq f(L) = h(L)$ então conclui-se que h_1 é sobrejectiva e por conseguinte h_1 é bijectiva, porque L é finita. Como h_1 é bijectiva e $h(L)$ é finita então existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $h_1^m = \text{id}_{h(L)}$. Consequentemente $h^{m+1} = h$, ou seja $hh^{m-1}h = h$. Do exposto resulta que $\text{End } L$ é regular.

(3) No caso de $q = 2$ a cadeia reduz-se a

$$\omega = \Phi_0 \prec \Phi_1 \prec \Phi_2 \prec \iota.$$

Suponhamos, primeiramente, que $\text{End } L$ é regular. Seja h um endomorfismo que não seja automorfismo. Para demonstrar que $\text{Ker } h = \Phi_2$ basta mostrar que $\text{Ker } h \neq \Phi_1$.

Suponhamos, com vista a uma contradição, que $\text{Ker } h = \Phi_1$. Então podemos definir a aplicação $\varphi : h(L) \rightarrow f(L)$ do seguinte modo: $\varphi(h(x)) = f(x)$. Como φ é bijecção então $|h(L)| = |f(L)|$. Uma vez que $\text{End } L$ é regular então existe $u \in \text{End } L$ tal que: $huh = h$. Consequentemente, para todo $x \in L$, temos

$$(x, uh(x)) \in \text{Ker } h = \Phi_1.$$

Neste contexto, conclui-se que $fuh = f = uhf$. Consideremos a aplicação $\bar{h} : f(L) \rightarrow f(L)$ assim definida: $\bar{h}(y) = h(y)$. Mostremos que $\bar{h}$ é injectiva. Sejam $a, b \in L$ tais que $\bar{h}(f(a)) = \bar{h}(f(b))$, por definição de $\bar{h}$ temos $hf(a) = hf(b)$. Donde se conclui que $uhf(a) = uhf(b)$. Tendo presente que $f = uhf$, obtemos $f(a) = f(b)$. Assim temos que $\bar{h}$ é injectiva e por conseguinte bijectiva, pois $f(L)$ é finito. Consequentemente, existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que: $\bar{h}^m = id_{f(L)}$. Portanto $h^m f = f = fh^m$. Assim temos que $f(L) \subseteq h(L)$. Como $|h(L)| = |f(L)|$ e $f(L)$ é finito então $h(L) = f(L)$. Por consequência, para todo $x \in L$, $h^m(x) \in h(L) = f(L)$. Donde se conclui que $f(x) = fh^m(x) \in f^2(L)$. Resulta então que $f(L) \subseteq f^2(L)$, ou seja $f^2(L) = f(L)$.

Seja x um elemento arbitrário de L . Como $f(L) = f^2(L)$ então existe $y \in L$ tal que $f(x) = f^2(y)$. Então temos

$$f^{2p+1}(x) = f^{2p+2}(y) = f^2(y) = f(x),$$

uma vez que $L \in \mathbf{K}_{p,2}$. Conclui-se assim que $f^{2p+1} = f$ e por conseguinte $L \in \mathbf{K}_{p,1}$, o que é absurdo em face da hipótese $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{p,2}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\text{Ker } h = \Phi_2$ para qualquer endomorfismo h que não seja automorfismo. Seja h um endomorfismo arbitrário e suponhamos que h não é bijectivo. Assim temos $\text{Ker } h = \Phi_2$. Consequentemente, para qualquer $x \in L$, $(x, f^{2p}(x)) \in \text{Ker } h$. Ou seja $h = hf^{2p} = f^{2p}h$ e por conseguinte $h(L) \subseteq f^2(L)$. Mas $|h(L)| = |f^2(L)|$ uma vez que

$$h(L) \simeq L/\text{Ker } h = L/\Phi_2 \simeq f^2(L).$$

Como $f^2(L)$ é finito conclui-se que $h(L) = f^2(L)$. Consideremos a aplicação $h_1 : h(L) \rightarrow h(L)$ definida do seguinte modo: $h_1(y) = h(y)$. Tendo em conta que, para qualquer $x \in L$, $h(x) = hf^{2p}(x)$ e $f^{2p}(x) \in f^2(L) = h(L)$ conclui-se que h_1 é sobrejectiva. Como $h(L)$ é finito então h_1 é bijecção. Consequentemente, existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $h_1^m = id_{h(L)}$, ou seja $h^{m+1} = h$. Conclui-se assim que $\text{End } L$ é regular. $\square$

Exemplo 2.1 Dado $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq 1$, consideremos a álgebra de Ockham $(L_{2p+2,2}; f_{2p+2})$, conforme a definição apresentada no capítulo 1, página 14. Observemos que $(L_{2p+2,2}; f_{2p+2})$ é subdirectamente irreduzível (teorema 1.14) e $\mathbf{V}_B(L_{2p+2,2}) = \mathbf{K}_{p,2}$.

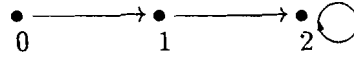
Como o espaço dual de $(L_{2p+2,2}; f_{2p+2})$ é o espaço de Ockham $(\{0, 1, 2, \dots, 2p+1\}; g_{2p+2,2})$, munido com a ordem discreta, então conclui-se que o reticulado $L_{2p+2,2}$ é um reticulado de Boole isomorfo a 2^{2p+2} .

Para cada $a \in L_{2p+2,2}$ designemos por a' o complemento de a no reticulado $L_{2p+2,2}$. Como f é um endomorfismo dual, de reticulados com 0 e 1, então temos: $f(a') = [f(a)]'$, para qualquer $a \in L_{2p+2}$.

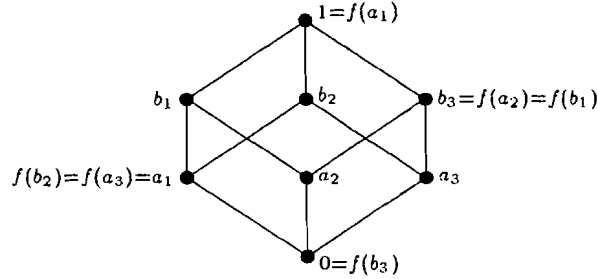
Consideremos a aplicação $\vartheta : L_{2p+2} \longrightarrow L_{2p+2}$ definida do modo seguinte: $\vartheta(x) = f(x')$. Facilmente se verifica que $\vartheta \in \text{End}(L_p; f_p)$. Também é claro que $\text{Ker } \vartheta = \Phi_1$.

Por aplicação do teorema 2.3(3) conclui-se que $\text{End}(L_{2p+2}, f_{2p+2})$ não é regular.

Seja $(\{0, 1, 2\}; g)$ o espaço de Ockham, munido com a ordem discreta, onde g se define por: $g(0) = 1$, $g(1) = 2$ e $g(2) = 2$. O espaço de Ockham em apreço pode ser representado pelo seguinte diagrama:



Designemos por $(L; f)$ a álgebra de Ockham cujo espaço dual é $(\{0, 1, 2\}; g)$. A álgebra $(L; f)$ pode ser descrita graficamente do modo seguinte:



É claro que $(L; f)$ é subdirectamente irredutível e $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{1,2}$. Por raciocínios similares aos acima descritos, conclui-se que $\text{End}(L; f)$ não é regular.

Para cada natural $p \geq 1$, defina-se $\varphi_p : \{0, 1, 2, \dots, 2p+1\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ do seguinte modo:

$$\varphi_p(i) = \begin{cases} i & \text{se } 0 \leq i \leq 2; \\ 2 & \text{se } 2 < i \leq 2p+1. \end{cases}$$

É claro que φ_p é sobrejectiva e $\varphi_p g_{2p+1} = g \varphi_p$, consequentemente φ_p é um morfismo sobrejectivo de espaços de Ockham. Aplicando o teorema 1.10(1), conclui-se que, para cada $p \geq 1$, $(L; f)$ é isomorfa a uma subálgebra de (L_{2p+1}, f_{2p+2}) .

Recordemos que um semigrupo S diz-se um *semigrupo de Clifford* se S é regular e todo o idempotente de S é *central*, i. e. comuta com qualquer elemento de S .

Teorema 2.4 *Seja $(L; f) \in \mathbf{K}_{n,2}$ uma álgebra subdirectamente irredutível. Se $\text{End } L$ é regular então $\text{End } L$ é um grupo ou é um semigrupo de Clifford cujo semireticulado dos idempotentes é $\{f^{2n}, id_L\}$.*

Demonstração Suponhamos que $\text{End } L$ não é grupo. Seja $\mathbf{K}_{p,q} = \mathbf{V}_B(L)$. Pelo teorema 2.3(1) $q > 0$ portanto $q \in \{1, 2\}$. Como $(L; f) \in \mathbf{K}_{n,2}$ então f^{2n} é idempotente de $\text{End } L$ e $f^{2n} \neq id_L$ porque $q > 0$. Seja h um idempotente de $\text{End } L$ tal que $h \neq id_L$. Pelo teorema 2.3 conclui-se que $\text{Ker } h = \Phi_q$. Como h é idempotente então temos, para qualquer $x \in L$

$$(x, h(x)) \in \text{Ker } h = \Phi_q.$$

Em suma, se $h \in \text{End } L$, $h \neq id_L$ e h é idempotente então $\text{Ker } h = \Phi_q$ e $f^q h = f^q$. Sejam s, t idempotentes de $\text{End } L$ tais que $s \neq id_L$ e $t \neq id_L$. Assim temos $f^q t s = f^q s = f^q$. Como $\Phi_q = \text{Ker } t$ então $t t s = t$ logo $t s = t$. Em particular $t f^{2n} = t$, $f^{2n} t = f^{2n}$ e por conseguinte $t = f^{2n}$. Do exposto resulta que id_L e f^{2n} são os únicos idempotentes de $\text{End } L$. É claro que tais idempotentes comutam com todos os elementos de $\text{End } L$ e por consequência $\text{End } L$ é um semigrupo de Clifford. $\square$

Exemplo 2.2 Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, designemos por C_n a cadeia

$$0 < a_{-n} < a_{-n+1} < \dots < a_{-1} < a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n < 1.$$

Defina-se $f : C_n \longrightarrow C_n$ do modo seguinte: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(a_0) = a_0$ e para $i \in \{1, \dots, n\}$

$$f(a_i) = a_{-i+1}, \quad f(a_{-i}) = a_i.$$

Sabemos que $(C_n; f)$ é uma álgebra de Ockham subdirectamente irredutível e $\mathbf{V}_B(C_n) = \mathbf{K}_{1,2n}$; vide [9, exemplo 3.1]. Pelo corolário do teorema 2.2 temos que: se $\text{End } C_n$ é regular então $n = 1$.

Reciprocamente, mostremos que $\text{End}(C_1; f)$ é regular. Vamos fazer uso do teorema 2.3; para tal consideremos um endomorfismo h , de $(C_1; f)$, que não seja automorfismo. Para provar que $\text{Ker } h = \Phi_2$ mostraremos que $\text{Ker } h \neq \Phi_1$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que

$\text{Ker } h = \Phi_1$. Por consequência $(a_0, a_1) \in \text{Ker } h$. Nesta conformidade podemos concluir que:

$$fh(a_{-1}) = hf(a_{-1}) = h(a_1) = h(a_0).$$

Se observarmos que a_0 é o único ponto fixo de $(C_1; f)$ então conclui-se que $h(a_0) = a_0$ e por conseguinte $fh(a_{-1}) = a_0$. Portanto $h(a_{-1}) \in \{a_0, a_1\}$. Como $h(a_{-1}) \leq h(a_1) = a_0$ então conclui-se que $h(a_{-1}) = a_0$. Do exposto resulta que $(a_{-1}, a_1) \in \text{Ker } h$, o que é absurdo pois $(a_{-1}, a_1) \notin \Phi_1$. Assim fica demonstrado que $\text{End}(C_1; f)$ é regular. Pelo teorema 2.4 conclui-se que $\text{End}(C_1; f)$ é semigrupo de Clifford. Com efeito, neste caso $\text{End}(C_1; f)$ reduz-se ao semireticulado $\{id_{C_1}, f^2\}$. Demonstraremos tal facto provando que todo o elemento de $\text{End}(C_1; f)$ é idempotente. Seja h um elemento arbitrário de $\text{End}(C_1; f)$. É claro que $h(0) = 0$, $h(a_0) = a_0$ e $h(1) = 1$. Portanto $h^2(x) = h(x)$, para todo $x \in \{0, a_0, 1\}$. Atendendo a que h é isótona então temos $h(a_{-1}) \leq h(a_0) = a_0$ e por consequência $h(a_{-1}) \in \{0, a_{-1}, a_0\}$. Donde resulta $h^2(a_{-1}) = h(a_{-1})$. Assim temos

$$h^2(a_1) = h^2f(a_{-1}) = fh^2(a_{-1}) = fh(a_{-1}) = hf(a_{-1}) = h(a_1)$$

e por conseguinte h é idempotente.

A partir de uma álgebra de Ockham $(L; f)$ e de um reticulado de Boole finito com $p > 1$ átomos, vamos definir um método que permite construir uma nova álgebra de Ockham. Esta construção permitirá mostrar que em cada classe de Berman da forma $\mathbf{K}_{p,2}$ existe pelo menos uma álgebra de Ockham cujo semigrupo dos endomorfismos é inverso e não é grupo. Para descrever a referida construção necessitamos do conceito de soma vertical de conjuntos ordenados.

Sejam P, Q conjuntos ordenados tais que: P tem elemento máximo a e Q tem elemento mínimo b . Designamos por *soma vertical* de P e Q , e denotamos por $P \boxplus Q$, o conjunto ordenado que se obtém a partir da soma linear $P \oplus Q$ identificando a e b ; vide [9] e [11].

Seja L um reticulado com 0 e 1. Para cada $p \in \mathbb{N}$, tal que $p > 1$, designemos por $[L; p]$ a soma vertical $2^p \boxplus L \boxplus 2^p$, onde 2^p designa o reticulado de Boole finito com p átomos.

Por definição de soma vertical, existem $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$, pertencentes a $[L; p]$, tais que: $[L; p] = [\alpha_1, \alpha_2] \cup [\alpha_2, \alpha_3] \cup [\alpha_3, \alpha_4]$, $2^p \simeq [\alpha_1, \alpha_2]$, $L \simeq [\alpha_2, \alpha_3]$ e $2^p \simeq [\alpha_3, \alpha_4]$.

No que se segue usamos as seguintes notações: $B_p = [\alpha_1, \alpha_2]$, $L_i = [\alpha_2, \alpha_3]$ e $B_p^* = [\alpha_3, \alpha_4]$.

Seja $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham. Vamos definir, no reticulado distributivo $[L; p]$, uma estrutura de álgebra de Ockham. Para tal são necessárias algumas observações preliminares.

Como $L_i = [\alpha_2, \alpha_3] \simeq L$ então existe um isomorfismo de reticulados $j : L \longrightarrow L_i$.

Consideremos a aplicação $f_i : L_i \longrightarrow L_i$ definida por: $f_i = jfj^{-1}$. Nesta conformidade, é claro que $(L_i; f_i)$ é uma álgebra de Ockham isomorfa a $(L; f)$.

Designemos por $X = \{a_0, \dots, a_{p-1}\}$ o conjunto dos átomos do reticulado de Boole B_p e por $X^* = \{a_0^*, \dots, a_{p-1}^*\}$ o conjunto dos co-átomos do reticulado de Boole B_p^* . Defina-se a aplicação $\sigma : X \cup X^* \longrightarrow X \cup X^*$ do modo seguinte: $\sigma(a_i) = a_i^*$, para $0 \leq i \leq p-1$; $\sigma(a_i^*) = a_{i+1}$, para $0 \leq i \leq p-2$; $\sigma(a_{p-1}^*) = a_0$. Observemos que: $\sigma^2(a_i) = a_{i+1}$, para $0 \leq i \leq p-2$; $\sigma^2(a_{p-1}) = a_0$; $\sigma^2(a_i^*) = a_{i+1}^*$, para $0 \leq i \leq p-2$; $\sigma^2(a_{p-1}^*) = a_0^*$.

Consideremos a aplicação $f_\sigma : [L; p] \longrightarrow [L; p]$ definida do seguinte modo:

$$f_\sigma(x) = \begin{cases} \alpha_4 & \text{se } x = \alpha_1; \\ \sigma(a_{i_1}) \wedge \dots \wedge \sigma(a_{i_k}) & \text{se } x \in B_p \text{ com } x = a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_k}; \\ f_i(x) & \text{se } x \in L_i; \\ \sigma(a_{i_1}^*) \vee \dots \vee \sigma(a_{i_k}^*) & \text{se } x \in B_p^* \text{ com } x = a_{i_1}^* \wedge \dots \wedge a_{i_k}^*; \\ \alpha_1 & \text{se } x = \alpha_4. \end{cases}$$

Começemos por mostrar que f_σ é antitona. Sejam $x, y \in [L; p]$ tais que $x < y$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 < x$ e $y < \alpha_4$. No caso de $x, y \in B_p$ temos $x = a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_k}$, $y = a_{j_1} \vee \dots \vee a_{j_r}$ onde $\{i_1, \dots, i_k\}, \{j_1, \dots, j_r\}$ são subconjuntos de $\{0, \dots, p-1\}$. Como $x < y$ então $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{j_1, \dots, j_r\}$ e por conseguinte $\{\sigma(a_{i_1}), \dots, \sigma(a_{i_k})\} \subseteq \{\sigma(a_{j_1}), \dots, \sigma(a_{j_r})\}$. Logo $\sigma(a_{i_1}) \wedge \dots \wedge \sigma(a_{i_k}) \geq \sigma(a_{j_1}) \wedge \dots \wedge \sigma(a_{j_r})$, ou seja $f_\sigma(x) \geq f_\sigma(y)$. Se $x, y \in L_i$ então $f_\sigma(x) = f_i(x)$. $f_\sigma(y) = f_i(y)$ consequentemente $f_\sigma(x) \geq f_\sigma(y)$. No caso de $x, y \in B_p^*$ temos $x = a_{s_1}^* \wedge \dots \wedge a_{s_m}^*$, $y = a_{t_1}^* \wedge \dots \wedge a_{t_n}^*$ onde $\{s_1, \dots, s_m\}, \{t_1, \dots, t_n\}$ são subconjuntos de $\{0, \dots, p-1\}$. Como $x < y$ então $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \{s_1, \dots, s_m\}$ e por conseguinte $\{\sigma(a_{t_1}^*), \dots, \sigma(a_{t_n}^*)\} \subseteq \{\sigma(a_{s_1}^*), \dots, \sigma(a_{s_m}^*)\}$. Então $\sigma(a_{s_1}^*) \vee \dots \vee \sigma(a_{s_m}^*) \geq \sigma(a_{t_1}^*) \vee \dots \vee \sigma(a_{t_n}^*)$, ou seja $f_\sigma(x) \geq f_\sigma(y)$. No caso de $x \in B_p$, $y \in L_i$ temos $f_\sigma(x) \in B_p^*$, $f_\sigma(y) \in L_i$ por consequência $f_\sigma(x) \geq f_\sigma(y)$. Se $x \in B_p$, $y \in B_p^*$ então $f_\sigma(x) \in B_p^*$, $f_\sigma(y) \in B_p$ e por conseguinte $f_\sigma(x) \geq f_\sigma(y)$. No caso de $x \in L_i$, $y \in B_p^*$ temos

$f_\sigma(x) \in L_i$, $f_\sigma(y) \in B_p$ e por consequência $f_\sigma(x) \geq f_\sigma(y)$. Dos raciocínios anteriores resulta que f_σ é antítona.

Vamos mostrar que, para quaisquer $x, y \in [L; p]$, temos:

$$f_\sigma(x \vee y) = f_\sigma(x) \wedge f_\sigma(y), f_\sigma(x \wedge y) = f_\sigma(x) \vee f_\sigma(y).$$

Sejam $x, y \in L$, como f_σ é antítona podemos supor, sem perda de generalidade, que $x \parallel y$. Consequentemente, os casos a examinar são os seguintes: (1) $x, y \in B_p$, (2) $x, y \in L_i$, (3) $x, y \in B_p^*$.

(1) No caso de $x, y \in B_p$ temos $x = a_{i_1} \vee \dots \vee a_{i_k}$, $y = a_{j_1} \vee \dots \vee a_{j_r}$ onde $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ e $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ são subconjuntos de $\{0, \dots, p-1\}$. Neste contexto, por definição de f_σ , temos:

$$f_\sigma(x) \vee f_\sigma(y) = [\bigwedge_{t \in I} \sigma(a_t)] \vee [\bigwedge_{t \in J} \sigma(a_t)] = \bigwedge_{(s,t) \in I \times J} (\sigma(a_s) \vee \sigma(a_t)).$$

Como σ é uma bijecção então $\sigma(a_s) \vee \sigma(a_t) = \alpha_4$ se $s \neq t$. Consequentemente

$$f_\sigma(x) \vee f_\sigma(y) = \bigwedge_{t \in I \cap J} \sigma(a_t).$$

Por outro lado

$$x \wedge y = (\bigvee_{t \in I} a_t) \wedge (\bigvee_{t \in J} a_t) = \bigvee_{(s,t) \in I \times J} (a_s \wedge a_t) = \bigvee_{t \in I \cap J} a_t.$$

Assim, por definição de f_σ , temos

$$f_\sigma(x \wedge y) = \bigwedge_{t \in I \cap J} \sigma(a_t).$$

Então conclui-se que $f_\sigma(x \wedge y) = f_\sigma(x) \vee f_\sigma(y)$. Por outro lado

$$f_\sigma(x) \wedge f_\sigma(y) = [\bigwedge_{t \in I} \sigma(a_t)] \wedge [\bigwedge_{t \in J} \sigma(a_t)] = \bigwedge_{t \in I \cup J} \sigma(a_t) = f_\sigma(x \vee y).$$

(2) Se $x, y \in L_i$ então $x \wedge y, x \vee y \in L_i$ e por conseguinte

$$f_\sigma(x \wedge y) = f_i(x \wedge y) = f_i(x) \vee f_i(y) = f_\sigma(x) \vee f_\sigma(y)$$

$$f_\sigma(x \vee y) = f_i(x \vee y) = f_i(x) \wedge f_i(y) = f_\sigma(x) \wedge f_\sigma(y).$$

(3) No caso de $x, y \in B_p^*$ temos $x = a_{s_1}^* \wedge \dots \wedge a_{s_m}^*$, $y = a_{t_1}^* \wedge \dots \wedge a_{t_n}^*$ onde $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ e $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ são subconjuntos de $\{0, \dots, p-1\}$. Neste contexto, por definição de f_σ , temos:

$$f_\sigma(x) \wedge f_\sigma(y) = [\bigvee_{t \in S} \sigma(a_t^*)] \wedge [\bigvee_{t \in T} \sigma(a_t^*)] = \bigvee_{(s,t) \in S \times T} (\sigma(a_s^*) \wedge \sigma(a_t^*)).$$

Como σ é uma bijecção então $\sigma(a_s^*) \wedge \sigma(a_t^*) = \alpha_1$ se $s \neq t$. Consequentemente

$$f_\sigma(x) \wedge f_\sigma(y) = \bigvee_{\ell \in S \cap T} \sigma(a_\ell^*).$$

Por outro lado

$$x \vee y = \left(\bigwedge_{\ell \in S} a_\ell^* \right) \vee \left(\bigwedge_{\ell \in T} a_\ell^* \right) = \bigwedge_{(s,t) \in T \times S} (a_s^* \vee a_t^*) = \bigwedge_{\ell \in S \cap T} a_\ell^*.$$

Assim, por definição de f_σ , temos

$$f_\sigma(x \vee y) = \bigvee_{\ell \in S \cap T} \sigma(a_\ell^*).$$

Então conclui-se que $f_\sigma(x \vee y) = f_\sigma(x) \wedge f_\sigma(y)$. Facilmente se verifica que $f_\sigma(x \wedge y) = f_\sigma(x) \vee f_\sigma(y)$.

Do exposto resulta que $([L; p]; f_\sigma)$ é álgebra de Ockham.

É importante notar que, para todo $t \in X \cup X^*$, $f_\sigma(t) = \sigma(t)$. Por consequência, para todo $x \in B_p \cup B_p^*$, $f_\sigma^{2p}(x) = x$; donde se conclui que f_σ^2 induz um automorfismo no reticulado $B_p \oplus B_p^*$.

Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$, subdirectamente irreduzível, tal que $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{1,2}$. Mostraremos que: se $\text{End}(L; f)$ é regular então $\text{End}([L; p]; f_\sigma)$ é regular. Para cumprir tal objectivo são necessários alguns resultados preliminares.

Teorema 2.5 *Se $\vartheta \in \text{End}([L; p]; f_\sigma)$ então $\vartheta(\alpha_2) \leq \alpha_2$ e $\vartheta(\alpha_3) \geq \alpha_3$.*

Demonstração Mostremos, primeiramente, que $\vartheta(a_0) < \alpha_2$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que $\vartheta(a_0) \geq \alpha_2$. Nesta conformidade temos

$$\vartheta(a_1) = \vartheta(f_\sigma^2(a_0)) = f_\sigma^2(\vartheta(a_0)) \geq f_\sigma^2(\alpha_2) = \alpha_2.$$

Por outro lado

$$\alpha_1 = \vartheta(\alpha_1) = \vartheta(a_0 \wedge a_1) = \vartheta(a_0) \wedge \vartheta(a_1) \geq \alpha_2,$$

o que é absurdo. Assim temos $\vartheta(a_0) < \alpha_2$ e por conseguinte, para cada $j \in \{0, \dots, p-1\}$,

$$\vartheta(a_j) = \vartheta(f_\sigma^{2j}(a_0)) = f_\sigma^{2j}(\vartheta(a_0)) < f_\sigma^{2j}(\alpha_2) = \alpha_2.$$

Consequentemente,

$$\vartheta(\alpha_2) = \vartheta(a_0 \vee \dots \vee a_{p-1}) = \vartheta(a_0) \vee \dots \vee \vartheta(a_{p-1}) \leq \alpha_2.$$

Finalmente, aplicando f_σ à desigualdade anterior, obtemos

$$\vartheta(\alpha_3) = \vartheta(f_\sigma(\alpha_2)) = f_\sigma(\vartheta(\alpha_2)) \geq f_\sigma(\alpha_2) = \alpha_3. \quad \square$$

Teorema 2.6 *Se $\vartheta \in \text{End}([L; p], f_\sigma)$ e $\vartheta(\alpha_2) \neq \alpha_1$ então existe $m \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que, para todo $x \in B_p \cup B_p^*$,*

$$\vartheta(x) = f_\sigma^{2m}(x).$$

Demonstração Atendendo ao teorema 2.5 podemos concluir que: $\vartheta(a_j) \leq \vartheta(\alpha_2) \leq \alpha_2$, qualquer que seja j .

Suponhamos que $\vartheta(\alpha_2) \neq \alpha_1$. Em primeiro lugar, demonstremos que: para todo i , $\vartheta(a_i) \neq \alpha_1$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que existe $i \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que $\vartheta(a_i) = \alpha_1$. Então temos

$$\alpha_1 = f_\sigma^{2p-2i}(\alpha_1) = f_\sigma^{2p-2i}(\vartheta(a_i)) = \vartheta(f_\sigma^{2p-2i}(a_i)) = \vartheta(f_\sigma^{2p-2i}(f_\sigma^{2i}(a_0))) = \vartheta(a_0)$$

e por conseguinte $\vartheta(a_0) = \alpha_1$. Consequentemente

$$\vartheta(a_j) = \vartheta(f_\sigma^{2j}(a_0)) = f_\sigma^{2j}(\vartheta(a_0)) = f_\sigma^{2j}(\alpha_1) = \alpha_1,$$

para qualquer $j \in \{0, \dots, p-1\}$. Daqui resulta que $\alpha_1 = \bigvee_{j=0}^{p-1} \vartheta(a_j) = \vartheta(\bigvee_{j=0}^{p-1} a_j) = \vartheta(\alpha_2)$, o que é absurdo.

Para cada $j \in \{0, \dots, p-1\} = N$, existe um e um só $N_j \subseteq N$, tal que: $N_j \neq \emptyset$ e

$$\vartheta(a_j) = \bigvee_{i \in N_j} a_i.$$

Mostremos que: se $i \neq j$ então $N_i \cap N_j = \emptyset$. Sejam $i, j \in N$ tais que $i \neq j$ e suponhamos, com vista a uma contradição, que $N_i \cap N_j \neq \emptyset$. Seja $k \in N_i \cap N_j$. Então temos

$$a_k \leq \vartheta(a_i) \wedge \vartheta(a_j) = \vartheta(a_i \wedge a_j) = \vartheta(\alpha_1) = \alpha_1,$$

o que é absurdo. Por outro lado, $\alpha_2 = \bigvee_{j \in N} a_j$. Logo $\vartheta(\alpha_2) = \bigvee_{j \in N} \vartheta(a_j) = \bigvee_{i \in K} a_i$, onde $K = \bigcup_{j=0}^{p-1} N_j$.

Neste contexto, é claro que

$$p \leq \sum_{j=0}^{p-1} |N_j| = \left| \bigcup_{j=0}^{p-1} N_j \right| = |K| \leq p.$$

Consequentemente, $|K| = p$ e por conseguinte $K = N$. Do exposto resulta que $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_2$. Neste contexto podemos concluir que: $|N_j| = 1$, para todo $j \in N$. Consequentemente, $\vartheta(a_j)$ é um átomo de B_p . Seja $m \in N$ tal que $\vartheta(a_0) = a_m$. Assim, para cada $j \in N$, temos:

$$\begin{aligned}\vartheta(a_j) &= \vartheta(f_\sigma^{2j}(a_0)) = f_\sigma^{2j}(\vartheta(a_0)) \\ &= f_\sigma^{2j}(a_m) \\ &= f_\sigma^{2j}(f_\sigma^{2m}(a_0)) \\ &= f_\sigma^{2m}(f_\sigma^{2j}(a_0)) \\ &= f_\sigma^{2m}(a_j).\end{aligned}$$

Aplicando f_σ à igualdade anterior obtemos, para qualquer $j \in N$, $\vartheta(a_j^*) = f_\sigma^{2m}(a_j^*)$. Do exposto resulta que: para todo $x \in B_p \cup B_p^*$,

$$\vartheta(x) = f_\sigma^{2m}(x). \quad \square$$

Teorema 2.7 *Se ϑ é um endomorfismo de $([L; p]; f_\sigma)$ tal que $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$ então são válidas as seguintes propriedades:*

- (1) $(\forall x \in B_p) \quad \vartheta(x) = \alpha_1;$
- (2) $(\forall x \in B_p^*) \quad \vartheta(x) = \alpha_4.$

Demonstração (1) Dado $x \in B_p$, temos $x \leq \alpha_2$ e por conseguinte $\vartheta(x) \leq \vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$. Logo $\vartheta(x) = \alpha_1$.

(2) Em primeiro lugar observemos que $\vartheta(\alpha_3) = \vartheta(f_\sigma(\alpha_2)) = f_\sigma(\vartheta(\alpha_2)) = f_\sigma(\alpha_1) = \alpha_4$. Se $x \in B_p^*$ então $\alpha_3 \leq x$. Portanto $\alpha_4 = \vartheta(\alpha_3) \leq \vartheta(x)$. Donde se tira que $\vartheta(x) = \alpha_4$. $\square$

Teorema 2.8 *Se $(L; f) \in K_{1,2}$ e ϑ é um endomorfismo de $([L; p]; f_\sigma)$ tal que $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$ então são válidas as seguintes propriedades:*

- (1) $(\forall x \in L_1) \quad \vartheta(x) < \alpha_2 \Rightarrow \vartheta(x) = \alpha_1;$
- (2) $(\forall x \in L_1) \quad \vartheta(x) > \alpha_3 \Rightarrow \vartheta(x) = \alpha_4.$

Demonstração Começemos por provar (1). Seja $x \in L_1$, tal que $\vartheta(x) < \alpha_2$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que $\vartheta(x) \neq \alpha_1$. Então existe $r \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que $a_r \leq \vartheta(x)$.

Assim temos $f_\sigma^{2r}(a_0) = a_r \leq \vartheta(x)$ e por consequência:

$$a_0 = f_\sigma^{2p-2r}(f_\sigma^{2r}(a_0)) \leq f_\sigma^{2p-2r}(\vartheta(x)) = \vartheta(f_\sigma^{2p-2r}(x)) = \vartheta(f_i^{2p-2r}(x)).$$

Como $(L_i; f_i) \simeq (L; f) \in \mathbf{K}_{1,2}$ e $p - r \geq 1$ então $f_i^{2p-2r} = f_i^2$. Nesta conformidade podemos concluir que $\vartheta(f_i^{2p-2r}(x)) = \vartheta(f_i^2(x))$. Então $a_0 \leq \vartheta(f_i^2(x))$. Para qualquer $j \in \{1, \dots, p-1\}$ conclui-se que

$$a_j = f_\sigma^{2j}(a_0) \leq f_\sigma^{2j}(\vartheta(f_i^2(x))) = \vartheta(f_\sigma^{2j}(f_i^2(x))) = \vartheta(f_i^{2(j+1)}(x)) = \vartheta(f_i^2(x)).$$

Em face dos raciocínios acima descritos, é legítimo inferir que: $a_j \leq \vartheta(f_i^2(x))$, para qualquer $j \in \{1, \dots, p-1\}$. Consequentemente $\alpha_2 = \bigvee_{j=0}^{p-1} a_j \leq \vartheta(f_i^2(x))$. Por outro lado, atendendo a que $\vartheta(x) < \alpha_2$, conclui-se que: $\vartheta(f_i^2(x)) = \vartheta(f_\sigma^2(x)) = f_\sigma^2(\vartheta(x)) < f_\sigma^2(\alpha_2) = \alpha_2$, o que é absurdo.

(2) Seja $x \in L$ tal que $\vartheta(x) > \alpha_3$. Neste contexto temos

$$\vartheta(f_i(x)) = \vartheta(f_\sigma(x)) = f_\sigma(\vartheta(x)) < f_\sigma(\alpha_3) = \alpha_2.$$

Consequentemente, $\vartheta(f_i(x)) < \alpha_2$. Aplicando (1) conclui-se que $\vartheta(f_i(x)) = \alpha_1$ e por conseguinte $f_\sigma(\vartheta(x)) = f_\sigma(\alpha_4)$. Como $\vartheta(x), \alpha_4 \in B_p^*$ então temos $\vartheta(x) = \alpha_4$. $\square$

Teorema 2.9 *Se $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{1,2}$ então $\mathbf{V}_B([L; p]) = \mathbf{K}_{p,2}$.*

Demonstração Em primeiro lugar vamos mostrar que $([L; p]; f_\sigma) \in \mathbf{K}_{p,2}$. Seja $x \in [L; p]$. Se $x \in B_p \cup B_p^*$ então $f_\sigma^{2p}(x) = x$ e por consequência $f_\sigma^{2p+2}(x) = f_i^2(x)$. No caso de $x \in L_i$ temos $f_\sigma^{2p+2}(x) = f_i^{2p+2}(x) = f_i^2(x) = f_\sigma^2(x)$. Em qualquer dos casos se prova que $f_\sigma^{2p+2}(x) = f_\sigma^2(x)$.

Sejam $m \geq 1$, $n \geq 0$ tais que $\mathbf{V}_B([L; p]) = \mathbf{K}_{m,n}$. Atendendo a que $([L; p]; f_\sigma) \in \mathbf{K}_{p,2}$ conclui-se que $\mathbf{K}_{m,n} \subseteq \mathbf{K}_{p,2}$ e por conseguinte $m|p$ e $n \leq 2$.

É claro que $(L_i; f_i) \in \mathbf{K}_{m,n}$. Como $\mathbf{V}_B(L_i) = \mathbf{K}_{1,2}$ então $\mathbf{K}_{1,2} \subseteq \mathbf{K}_{m,n}$ e por consequência $2 \leq n$, ou seja $n = 2$.

Neste contexto temos $f_\sigma^{2m+2}(a_0) = f_\sigma^2(a_0)$, logo $f_\sigma^{2p-2}(f_\sigma^{2m+2}(a_0)) = f_\sigma^{2p-2}(f_\sigma^2(a_0))$. Em suma, $f_\sigma^{2m}(a_0) = a_0$. Como $1 \leq m \leq p$ então $m = p$. $\square$

Para cada $s \in \text{End}(L_i; f_i)$ e $t \in \text{End}([L; p]; f_\sigma)$ tal que $t(\alpha_2) = \alpha_2$, $t(\alpha_3) = \alpha_3$; defina-se

aplicação $[s, t] : [L; p] \longrightarrow [L; p]$ do seguinte modo:

$$[s, t](x) = \begin{cases} t(x) & \text{se } x \in B_p \cup B_p^* \\ s(x) & \text{se } x \in L_i \end{cases}$$

Teorema 2.10 *Se t é um endomorfismo de $([L; p]; f_\sigma)$ tal que $t(\alpha_2) = \alpha_2$, $t(\alpha_3) = \alpha_3$ e s é um endomorfismo de $(L_i; f_i)$ então $[s, t]$ é um endomorfismo de $([L; p]; f_\sigma)$.*

Demonstração Atendendo a que $t(\alpha_1) = \alpha_1$, $t(\alpha_2) = \alpha_2$, $t(\alpha_3) = \alpha_3$, $t(\alpha_4) = \alpha_4$ conclui-se que $t(B_p) \subseteq B_p$, $t(L) \subseteq L$ e $t(B_p^*) \subseteq B_p^*$. Dados $x, y \in [L; p]$ consideraremos vários casos.

(1) Se $x, y \in B_p \cup B_p^*$ então $x \wedge y, x \vee y \in B_p \cup B_p^*$. Consequentemente,

$$[s, t](x \wedge y) = t(x \wedge y) = t(x) \wedge t(y) = [s, t](x) \wedge [s, t](y),$$

$$[s, t](x \vee y) = t(x \vee y) = t(x) \vee t(y) = [s, t](x) \vee [s, t](y).$$

(2) Se $x, y \in L_i$ então $x \wedge y, x \vee y \in L_i$ e por conseguinte

$$[s, t](x \wedge y) = s(x \wedge y) = s(x) \wedge s(y) = [s, t](x) \wedge [s, t](y),$$

$$[s, t](x \vee y) = s(x \vee y) = s(x) \vee s(y) = [s, t](x) \vee [s, t](y).$$

(3) Se $x \in B_p$ e $y \in L_i$ então $[s, t](x) = t(x) \in B_p$ e $[s, t](y) = s(y) \in L_i$. Neste contexto temos $x \leq y$, $[s, t](x) \leq [s, t](y)$ e portanto obtém-se

$$[s, t](x \wedge y) = [s, t](x) = [s, t](x) \wedge [s, t](y), \quad [s, t](x \vee y) = [s, t](y) = [s, t](x) \vee [s, t](y).$$

(4) Se $x \in L_i$ e $y \in B_p$ então $[s, t](x) = s(x) \in L_i$ e $[s, t](y) = t(y) \in B_p$. Assim temos $y \leq x$, $[s, t](y) \leq [s, t](x)$ donde se conclui que

$$[s, t](x \wedge y) = [s, t](y) = [s, t](x) \wedge [s, t](y), \quad [s, t](x \vee y) = [s, t](x) = [s, t](x) \vee [s, t](y).$$

(5) Se $x \in L_i$ e $y \in B_p^*$ então $[s, t](x) = s(x) \in L_i$ e $[s, t](y) = t(y) \in B_p^*$. Por consequência $x \leq y$, $[s, t](x) \leq [s, t](y)$ e portanto obtém-se

$$[s, t](x \wedge y) = [s, t](x) = [s, t](x) \wedge [s, t](y), \quad [s, t](x \vee y) = [s, t](y) = [s, t](x) \vee [s, t](y).$$

(6) Se $x \in B_p^*$ e $y \in L_i$, então $[s, t](x) = t(x) \in B_p^*$ e $[s, t](y) = s(y) \in L_i$. Nesta conformidade temos $y \leq x$, $[s, t](y) \leq [s, t](x)$ donde resulta que

$$[s, t](x \wedge y) = [s, t](y) = [s, t](x) \wedge [s, t](y), \quad [s, t](x \vee y) = [s, t](x) = [s, t](x) \vee [s, t](y).$$

Da análise dos vários casos acima discutidos conclui-se que, para quaisquer $x, y \in [L; p]$,

$$[s, t](x \wedge y) = [s, t](x) \wedge [s, t](y), \quad [s, t](x \vee y) = [s, t](x) \vee [s, t](y).$$

Provemos que $f_\sigma[s, t] = [s, t]f_\sigma$. Seja $x \in [L; p]$. Se $x \in B_p \cup B_p^*$ então $f_\sigma(x) \in B_p \cup B_p^*$ e por conseguinte

$$f_\sigma([s, t](x)) = f_\sigma(t(x)) = t(f_\sigma(x)) = [s, t](f_\sigma(x)).$$

No caso de $x \in L_i$, temos $f_\sigma(x) = f_i(x) \in L_i$. Consequentemente,

$$f_\sigma([s, t](x)) = f_\sigma(s(x)) = f_i(s(x)) = s(f_i(x)) = s(f_\sigma(x)) = [s, t](f_\sigma(x)).$$

Finalmente, é de observar que $[s, t](\alpha_1) = t(\alpha_1) = \alpha_1$ e $[s, t](\alpha_4) = t(\alpha_4) = \alpha_4$. Dos raciocínios acima descritos conclui-se que $[s, t]$ é um endomorfismo de $([L; p], f_\sigma)$. $\square$

Para cada $\vartheta \in \text{End}([L; p]; f_\sigma)$, tal que $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$, defina-se $\vartheta_0 : L_i \rightarrow L_i$ do seguinte modo:

$$\vartheta_0(x) = (\vartheta(x) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3.$$

Teorema 2.11 *Se ϑ é um endomorfismo de $([L; p]; f_\sigma)$, tal que $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$, então:*

- (1) ϑ_0 é um endomorfismo de $(L_i; f_i)$,
- (2) $(\forall x \in L_i) \quad \vartheta(x) \in L_i \Rightarrow \vartheta(x) = \vartheta_0(x)$.

Demonstração (1) Começemos por observar que $\vartheta_0(\alpha_2) = (\vartheta(\alpha_2) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3 = (\alpha_1 \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3 = \alpha_2$. Por outro lado, fazendo uso do teorema 2.7(2), conclui-se que $\vartheta(\alpha_3) = \alpha_4$ e por conseguinte $\vartheta_0(\alpha_3) = (\vartheta(\alpha_3) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3 = (\alpha_4 \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3 = \alpha_3$. Mostremos que $\vartheta_0 f_i = f_i \vartheta_0$. Com efeito, para cada $x \in L_i$, temos:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(f_i(x)) &= [\vartheta(f_\sigma(x)) \vee \alpha_2] \wedge \alpha_3 = [f_\sigma(\vartheta(x)) \vee f_\sigma(\alpha_3)] \wedge f_\sigma(\alpha_2) \\ &= f_\sigma[(\vartheta(x) \wedge \alpha_3) \vee \alpha_2] \\ &= f_\sigma[(\vartheta(x) \vee \alpha_2) \wedge (\alpha_3 \vee \alpha_2)] \\ &= f_\sigma(\vartheta_0(x)) = f_i(\vartheta_0(x)). \end{aligned}$$

Dados $x, y \in L_i$ então temos:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(x \wedge y) &= [(\vartheta(x) \wedge \vartheta(y)) \vee \alpha_2] \wedge \alpha_3 = (\vartheta(x) \vee \alpha_2) \wedge (\vartheta(y) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3 \\
&= [(\vartheta(x) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3] \wedge [(\vartheta(y) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3] \\
&= \vartheta_0(x) \wedge \vartheta_0(y); \\
\vartheta_0(x \vee y) &= (\vartheta(x) \vee \vartheta(y) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3 = [(\vartheta(x) \vee \alpha_2) \vee (\vartheta(y) \vee \alpha_2)] \wedge \alpha_3 \\
&= [(\vartheta(x) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3] \vee [(\vartheta(y) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3] \\
&= \vartheta_0(x) \vee \vartheta_0(y).
\end{aligned}$$

Vamos proceder à prova de (2). Seja $x \in L_i$ e suponhamos que $\vartheta(x) \in L_i$. Então $\alpha_2 \leq \vartheta(x)$ e $\vartheta(x) \leq \alpha_3$. Consequentemente,

$$\vartheta_0(x) = (\vartheta(x) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3 = \vartheta(x) \wedge \alpha_3 = \vartheta(x). \quad \square$$

Teorema 2.12 *Seja $(L; f) \in \mathbf{K}_{1,2}$ uma álgebra subdirectamente irredutível. Se ϑ é um endomorfismo de $([L; p]; f_\sigma)$, tal que $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$, então:*

- (1) $L_i \cap \vartheta^{-1}(\{\alpha_1\}) = [\alpha_2]\Phi_2$, $L_i \cap \vartheta^{-1}(\{\alpha_4\}) = [\alpha_3]\Phi_2$;
- (2) $\vartheta^{-1}(\{\alpha_1\}) = B_p \cup [\alpha_2]\Phi_2$, $\vartheta^{-1}(\{\alpha_4\}) = [\alpha_3]\Phi_2 \cup B_p^*$.

Demonstração (1) Provemos a primeira igualdade; a segunda tem demonstração semelhante. Como $(L; f)$ é subdirectamente irredutível e $(L; f) \in \mathbf{K}_{1,2}$ então existe $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $L_i^2 \cap \text{Ker } \vartheta = \Phi_i$; teorema 1.2(1).

Se $x \in L_i$ e $\vartheta(x) = \alpha_1$ então $\vartheta(x) = \vartheta(\alpha_2)$ e por conseguinte $(x, \alpha_2) \in \Phi_i \subseteq \Phi_2$. Reciprocamente, se $x \in [\alpha_2]\Phi_2$ então $f_i^2(x) = f_i^2(\alpha_2) = \alpha_2$. Consequentemente, $\vartheta f_i^2(x) = \vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$. Assim temos $f_\sigma^2(\vartheta(x)) = \alpha_1$. Uma vez que $\alpha_1 \notin L_i$ e $f_\sigma^2(L_i) = f_i^2(L_i) \subseteq L_i$ então $\vartheta(x) \notin L_i$ e por conseguinte

$$\vartheta(x) = f_\sigma^{2p}(\vartheta(x)) = f_\sigma^{2p-2}f_\sigma^2(\vartheta(x)) = f_\sigma^{2p-2}(\alpha_1) = \alpha_1.$$

(2) Usando (1) e o teorema 2.7, conclui-se que:

$$\begin{aligned}
\vartheta^{-1}(\{\alpha_1\}) &= B_p \cup [\alpha_2]\Phi_2, \\
\vartheta^{-1}(\{\alpha_4\}) &= [\alpha_3]\Phi_2 \cup B_p^*. \quad \square
\end{aligned}$$

Recordemos que um semigrupo S é *semigrupo inverso* se, e só se, S é regular e os idempotentes de S comutam.

No que se segue, estabelecemos condições suficientes para que $\text{End}([L; p]; f_\sigma)$ seja semigrupo inverso.

Teorema 2.13 *Se $(L; f)$ é subdirectamente irreduzível, $V_B(L) = K_{1,2}$ e $\text{End}(L; f)$ é regular então $\text{End}([L; p]; f_\sigma)$ é semigrupo inverso.*

Demonstração Mostraremos, em primeiro lugar, que $\text{End}([L; p]; f_\sigma)$ é regular. Seja ϑ um endomorfismo de $([L; p]; f_\sigma)$. Vamos mostrar que existe $\varphi \in \text{End}([L; p]; f_\sigma)$ tal que $\vartheta\varphi\vartheta = \vartheta$.

Fazendo uso do teorema 2.5 obtemos

$$\alpha_1 \leq \vartheta(a_0) \leq \vartheta(\alpha_2) \leq \alpha_2.$$

Examinaremos dois casos: $\vartheta(\alpha_2) \neq \alpha_1$, $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$.

(1) Suponhamos que $\vartheta(\alpha_2) \neq \alpha_1$.

Pelo teorema 2.6 podemos garantir a existência de $m \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que: para qualquer $x \in B_p \cup B_p^*$,

$$\vartheta(x) = f_\sigma^{2m}(x).$$

Em particular temos $\vartheta(\alpha_2) = f_\sigma^{2m}(\alpha_2) = \alpha_2$ e $\vartheta(\alpha_3) = f_\sigma^{2m}(\alpha_3) = \alpha_3$. Consequentemente, $\vartheta(L_i) \subseteq L_i$. Defina-se $\vartheta' : L_i \rightarrow L_i$ do modo seguinte: $\vartheta'(x) = \vartheta(x)$. Como ϑ' é um endomorfismo de $(L_i; f_i)$ então existe $s \in \text{End}(L_i; f_i)$ tal que: $\vartheta's\vartheta' = \vartheta'$. Note-se que as álgebras de Ockham $(L; f)$ e $(L_i; f_i)$ são isomorfas.

Seja $s^* = [s, f_\sigma^{2p-2m}]$. Pelo teorema 2.10 temos que s^* é endomorfismo de $([L; p]; f_\sigma)$. Em seguida mostraremos que $\vartheta s^* \vartheta = \vartheta$. Seja x um elemento arbitrário de $[L; p]$. No caso de $x \in B_p \cup B_p^*$ temos $\vartheta(x) = f_\sigma^{2m}(x)$ e $s^* = f_\sigma^{2p-2m}(x)$. Consequentemente,

$$\vartheta s^* \vartheta(x) = \vartheta s^*(f_\sigma^{2m}(x)) = \vartheta f_\sigma^{2m}(s^*(x)) = \vartheta(f_\sigma^{2m} f_\sigma^{2p-2m}(x)) = \vartheta(x).$$

No caso de $x \in L_i$, atendendo a que $\vartheta(L_i) \subseteq L_i$, conclui-se que $s^*(\vartheta(x)) = s(\vartheta(x))$ e por conseguinte

$$\vartheta s^* \vartheta(x) = \vartheta s \vartheta(x) = \vartheta s \vartheta'(x).$$

Como $s(\vartheta'(x)) \in L_i$, então $\vartheta(s\vartheta'(x)) = \vartheta'(s\vartheta'(x))$ e por conseguinte

$$\vartheta s^* \vartheta(x) = \vartheta' s \vartheta'(x) = \vartheta'(x) = \vartheta(x).$$

Assim fica provado que $\vartheta s^* \vartheta = \vartheta$.

(2) Suponhamos que $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$.

Neste caso, usando o teorema 2.11, temos $\vartheta_0 \in \text{End}(L_i; f_i)$. Então existe $t \in \text{End}(L_i; f_i)$ tal que $\vartheta_0 t \vartheta_0 = \vartheta_0$. Seja $t^+ = [t, id_{[L;p]}]$. Pelo teorema 2.10 temos $t^+ \in \text{End}([L;p]; f_\sigma)$, portanto basta mostrar que $\vartheta t^+ \vartheta = \vartheta$. Seja x um elemento qualquer de $[L;p]$. Consideraremos diversos casos.

(a) Se $x \in B_p$ então, pelo teorema 2.7(1), $\vartheta(x) = \alpha_1$ donde se tira que:

$$\vartheta t^+ \vartheta(x) = \vartheta t^+(\alpha_1) = \alpha_1 = \vartheta(x).$$

(b) Se $x \in B_p^*$ então, pelo teorema 2.7(2), $\vartheta(x) = \alpha_4$ donde se conclui:

$$\vartheta t^+ \vartheta(x) = \vartheta t^+(\alpha_4) = \alpha_4 = \vartheta(x).$$

(c) Se $x \in L_i$ e $\vartheta(x) < \alpha_2$ então, pelo teorema 2.8(1), $\vartheta(x) = \alpha_1$ e por conseguinte:

$$\vartheta t^+ \vartheta(x) = \vartheta t^+(\alpha_1) = \alpha_1 = \vartheta(x).$$

(d) Se $x \in L_i$ e $\vartheta(x) > \alpha_3$ então, pelo teorema 2.8(2), $\vartheta(x) = \alpha_4$ e por consequência:

$$\vartheta t^+ \vartheta(x) = \vartheta t^+(\alpha_4) = \alpha_4 = \vartheta(x).$$

(e) Finalmente examinemos o caso em que: $x \in L_i$ e $\vartheta(x) \in L_i$. Como $(L_i; f_i) \simeq (L; f)$ é subdirectamente irredutível, $V_B(L) = K_{1,2}$ e $\vartheta_0 \in \text{End}(L; f)$ então, pelo teorema 1.2(1), existe $r \in \{0, 1, 2\}$ tal que $\text{Ker } \vartheta_0 = \Phi_r$. Por consequência, atendendo a que $\vartheta_0 t \vartheta_0 = \vartheta_0$, deduz-se: $f^r t \vartheta_0 = f^r$. Como $x, \vartheta(x) \in L_i$, então, aplicando o teorema 2.11(2), conclui-se que $t^+(\vartheta(x)) = t(\vartheta(x)) = t(\vartheta_0(x))$. Assim temos

$$f_\sigma^r(\vartheta t^+ \vartheta(x)) = \vartheta f_\sigma^r(t^+ \vartheta(x)) = \vartheta f_\sigma^r(t \vartheta_0(x)) = \vartheta(f_i^r t \vartheta_0(x)) = \vartheta(f_i^r(x)) = \vartheta(f_\sigma^r(x)) = f_\sigma^r(\vartheta(x)),$$

consequentemente,

$$f_\sigma^{2p}(\vartheta t^+ \vartheta(x)) = f_\sigma^{2p-r}(f_\sigma^r(\vartheta t^+ \vartheta(x))) = f_\sigma^{2p-r}(f_\sigma^r(\vartheta(x))) = f_\sigma^{2p}(\vartheta(x)) = f_i^{2p}(\vartheta(x)) \in L_i.$$

Vejamos que $\vartheta t^+ \vartheta(x) \in L_i$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que $\vartheta t^+ \vartheta(x) \notin L_i$. Consequentemente $\vartheta t^+ \vartheta(x) = f_\sigma^{2p}(\vartheta t^+ \vartheta(x)) = f_i^{2p}(\vartheta(x)) \in L_i$, o que é absurdo. Uma vez que, $t^+ \vartheta(x), \vartheta(t^+ \vartheta(x)) \in L_i$ então, pelo teorema 2.11(2), conclui-se que $\vartheta(t^+ \vartheta(x)) = \vartheta_0(t^+ \vartheta(x))$. Tendo em consideração que $t^+ \vartheta(x) = t\vartheta_0(x)$, é legítimo concluir que

$$\vartheta(t^+ \vartheta(x)) = \vartheta_0(t\vartheta_0(x)) = \vartheta_0(x) = \vartheta(x).$$

Assim fica provado que $\vartheta t^+ \vartheta = \vartheta$. Uma vez demonstrado que $\text{End}([L; p]; f_\sigma)$ é semigrupo regular, resta mostrar que: dados ϑ e φ , idempotentes quaisquer de $\text{End}([L; p]; f_\sigma)$, então $\vartheta\varphi = \varphi\vartheta$. Para tal consideraremos dois casos.

(i) Suponhamos que $\vartheta \in \text{End}([L; p]; f_\sigma)$ é um idempotente tal que $\vartheta(\alpha_2) \neq \alpha_1$. Então, pelo teorema 2.6, existe $m \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que, para todo $x \in B_p \cup B_p^*$,

$$\vartheta(x) = f_\sigma^{2m}(x).$$

Em particular, temos $\vartheta(\alpha_2) = f_\sigma^{2m}(\alpha_2) = \alpha_2$, $\vartheta(\alpha_3) = f_\sigma^{2m}(\alpha_3) = \alpha_3$. Portanto $\vartheta(L_i) \subseteq L_i$. Assim, podemos definir $\vartheta' : L_i \rightarrow L_i$ por: $\vartheta'(x) = \vartheta(x)$. É claro que ϑ' é um idempotente de $\text{End}(L; f)$ e $\vartheta = [\vartheta', f_\sigma^{2m}]$. Pelo teorema 2.4 conclui-se que $\vartheta' = id_{L_i}$ ou $\vartheta' = f_i^2 = f_i^{2p}$. Por outro lado temos, para todo $x \in B_p \cup B_p^*$

$$x = f_\sigma^{2p-2m}(f_\sigma^{2m}(x)) = f_\sigma^{2p-2m}(\vartheta(x)) = f_\sigma^{2p-2m}(\vartheta^2(x)) = f_\sigma^{2p-2m}f_\sigma^{2m+2m}(x) = f_\sigma^{2m}(x).$$

Por consequência temos

$$\vartheta = [\vartheta', f_\sigma^{2m}] = [\vartheta', id_{[L;p]}] = [\vartheta', f_\sigma^{2p}].$$

Assim, podemos concluir que $\vartheta = [f_i^2, f_\sigma^{2p}] = [f_i^{2p}, f_\sigma^{2p}] = f_\sigma^{2p}$ ou $\vartheta = [id_{L_i}, id_{[L;p]}] = id_{[L;p]}$. Do exposto resulta que: se ϑ é um idempotente de $\text{End}([L; p], f_\sigma)$, tal que $\vartheta(\alpha_2) \neq \alpha_1$, então ϑ é um idempotente central. Em face disso, conclui-se que basta provar $\vartheta\varphi = \varphi\vartheta$, para idempotentes ϑ e φ , tais que $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$ e $\varphi(\alpha_2) = \alpha_1$.

(ii) Sejam $\vartheta, \varphi \in \text{End}([L; p]; f_\sigma)$ idempotentes tais que $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$ e $\varphi(\alpha_2) = \alpha_1$. Pelo teorema 2.12(2) temos:

$$\vartheta^{-1}(\{\alpha_1\}) = B_p \cup [\alpha_2]\Phi_2 = \varphi^{-1}(\{\alpha_1\});$$

$$\vartheta^{-1}(\{\alpha_4\}) = [\alpha_3]\Phi_2 \cup B_p^* = \varphi^{-1}(\{\alpha_4\}).$$

Consequentemente, se $x \in B_p \cup [\alpha_2]\Phi_2$ então $\vartheta\varphi(x) = \vartheta(\alpha_1) = \alpha_1$ e $\varphi\vartheta(x) = \varphi(\alpha_1) = \alpha_1$. No caso de $x \in [\alpha_3]\Phi_2 \cup B_p^*$, temos $\vartheta\varphi(x) = \vartheta(\alpha_4) = \alpha_4$ e $\varphi\vartheta(x) = \varphi(\alpha_4) = \alpha_4$.

Por outro lado ϑ_0 e φ_0 são idempotentes de $\text{End}(L_i; f_i)$. Então, pelo teorema 2.4, temos $\vartheta_0, \varphi_0 \in \{id_{L_i}, f_i^2\}$. Seja $x \in L \setminus ([\alpha_2]\Phi_2 \cup [\alpha_3]\Phi_2)$. Pelo teorema 2.8 temos $\vartheta(x), \varphi(x) \in L_i$. Aplicando o teorema 2.11(2) conclui-se que $\vartheta(x) = \vartheta_0(x)$ e $\varphi(x) = \varphi_0(x)$.

Se $\vartheta_0 = id_{L_i}$ e $\varphi_0 = id_{L_i}$ então temos

$$\vartheta\varphi(x) = \vartheta\varphi_0(x) = \vartheta(x) = \vartheta_0(x) = x;$$

$$\varphi\vartheta(x) = \varphi\vartheta_0(x) = \varphi(x) = \varphi_0(x) = x.$$

Se $\vartheta_0 = id_{L_i}$ e $\varphi_0 = f_i^2$ então temos

$$\vartheta\varphi(x) = \vartheta\varphi_0(x) = \vartheta(f_i^2(x)) = f_i^2(\vartheta(x)) = f_i^2(\vartheta_0(x)) = f_i^2(x);$$

$$\varphi\vartheta(x) = \varphi\vartheta_0(x) = \varphi(x) = \varphi_0(x) = f_i^2(x).$$

Se $\vartheta_0 = f_i^2$ e $\varphi_0 = id_{L_i}$ então temos

$$\vartheta\varphi(x) = \vartheta\varphi_0(x) = \vartheta(x) = \vartheta_0(x) = f_i^2(x);$$

$$\varphi\vartheta(x) = \varphi\vartheta_0(x) = \varphi(f_i^2(x)) = f_i^2(\varphi(x)) = f_i^2(\varphi_0(x)) = f_i^2(x).$$

Se $\vartheta_0 = f_i^2$ e $\varphi_0 = f_i^2$ então temos

$$\vartheta\varphi(x) = \vartheta\varphi_0(x) = \vartheta(f_i^2(x)) = f_i^2(\vartheta(x)) = f_i^2(\vartheta_0(x)) = f_i^4(x);$$

$$\varphi\vartheta(x) = \varphi\vartheta_0(x) = \varphi(f_i^2(x)) = f_i^2(\varphi(x)) = f_i^2(\varphi_0(x)) = f_i^4(x).$$

Do exposto resulta que $\vartheta\varphi = \varphi\vartheta$. $\square$

Teorema 2.14 *Para todo $p \geq 1$ existe uma álgebra de Ockham M tal que $\mathbf{V}_B(M) = \mathbf{K}_{p,2}$ e $\text{End } M$ é semigrupo inverso.*

Demonstração No caso de $p = 1$ basta considerar $M = C_1$, onde C_1 é a álgebra de Ockham definida no exemplo 2.2. Se $p > 1$, seja $M = [L; p]$ onde L é uma álgebra de Ockham subdirectamente irreduzível tal que $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{1,2}$ e $\text{End } L$ é regular; por exemplo podemos tomar $L = C_1$.

Pelo teorema 2.9 temos $V_B(M) = K_{p,2}$. Fazendo uso do teorema 2.13 conclui-se que $\text{End } M$ é semigrupo inverso. $\square$

Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$, definimos os conjuntos $\mathcal{S}[L; p]$ e $\mathcal{I}[L; p]$ do seguinte modo:

$$\mathcal{S}[L; p] = \{\vartheta \in \text{End}[L; p] : \vartheta(\alpha_2) = \alpha_2\},$$

$$\mathcal{I}[L; p] = \{\vartheta \in \text{End}[L; p] : \vartheta(\alpha_2) = \alpha_1\}.$$

Teorema 2.15 *Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$, são válidas as seguintes afirmações:*

- (1) $\mathcal{S}[L; p]$ é subsemigrupo de $\text{End}[L; p]$.
- (2) Se $\mathcal{I}[L; p] \neq \emptyset$ então $\mathcal{I}[L; p]$ é um ideal bilateral de $\text{End}[L; p]$.
- (3) $\mathcal{S}[L; p] \cup \mathcal{I}[L; p] = \text{End}[L; p]$ e $\mathcal{S}[L; p] \cap \mathcal{I}[L; p] = \emptyset$.

Demonstração (1) : É claro que $\mathcal{S}[L; p] \neq \emptyset$, pois $\text{id}_{[L; p]} \in \mathcal{S}[L; p]$. Sejam $\vartheta, \varphi \in \mathcal{S}[L; p]$. Assim temos $\vartheta\varphi(\alpha_2) = \vartheta(\alpha_2) = \alpha_2$ e por consequência $\vartheta\varphi \in \mathcal{S}[L; p]$.

(2) : Suponhamos que $\mathcal{I}[L; p] \neq \emptyset$. Sejam $\gamma \in \text{End}[L; p]$ e $\vartheta \in \mathcal{I}[L; p]$. Nesta conformidade, conclui-se que $\gamma\vartheta(\alpha_2) = \gamma(\alpha_1) = \alpha_1$. Portanto $\gamma\vartheta \in \mathcal{I}[L; p]$. Por outro lado, no caso de $\gamma(\alpha_2) \neq \alpha_1$, pelo teorema 2.6 temos $\gamma(\alpha_2) = \alpha_2$ e por consequência $\vartheta\gamma(\alpha_2) = \vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$. No caso de $\gamma(\alpha_2) = \alpha_1$ é claro que $\vartheta\gamma(\alpha_2) = \vartheta(\alpha_1) = \alpha_1$. Como em qualquer dos casos temos $\vartheta\gamma(\alpha_2) = \alpha_1$ então conclui-se que $\vartheta\gamma \in \mathcal{I}[L; p]$.

(3) : Seja $\vartheta \in \text{End}[L; p]$. No caso de $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$ temos $\vartheta \in \mathcal{I}[L; p]$. Se $\vartheta(\alpha_2) \neq \alpha_1$ então, pelo teorema 2.6, temos $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_2$ e por conseguinte $\vartheta \in \mathcal{S}[L; p]$.

Para mostrar que $\mathcal{S}[L; p] \cap \mathcal{I}[L; p] = \emptyset$ basta observar que $\alpha_1 \neq \alpha_2$. $\square$

Para cada álgebra de Ockham $(L; f)$, definimos o conjunto

$$\mathcal{D}_L = \{s \in \text{End } L : s^{-1}(\{0\}) = [0]\Phi_2, s^{-1}(\{1\}) = [1]\Phi_2\}.$$

É de observar que $f^2 \in \mathcal{D}_L$.

Teorema 2.16 *Se $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham subdirectamente irredutível pertencente a $K_{1,2}$ então $\mathcal{D}_L$ é um ideal bilateral de $\text{End } L$.*

Demonstração Seja $s \in \mathcal{D}_L$ e $t \in \text{End } L$. Mostremos, primeiramente, que $ts \in \mathcal{D}_L$. Vejamos que $(ts)^{-1}(\{0\}) \subseteq [0]\Phi_2$. Seja $x \in L$ tal que $ts(x) = 0 = t(0)$. Pelo teorema 1.2(1) temos

$\text{Ker } t \subseteq \Phi_2$ e portanto $sf^2(x) = 0$. Como $s \in \mathcal{D}_L$ então $f^4(x) = 0$. Consequentemente, dado que $L \in K_{1,2}$, temos $f^2(x) = 0$. Reciprocamente, se $x \in [0]\Phi_2$ então $s(x) = 0$ e por consequência $ts(x) = t(0) = 0$. Assim se conclui que $(ts)^{-1}(\{0\}) = [0]\Phi_2$.

Analogamente se verifica que $(ts)^{-1}(\{1\}) = [1]\Phi_2$. Com efeito se $ts(x) = 1 = t(1)$, tendo em conta que $\text{Ker } t \subseteq \Phi_2$, então conclui-se que $sf^2(x) = 1$. Atendendo a que $s \in \mathcal{D}_L$ conclui-se que $f^4(x) = 1$. Portanto $f^2(x) = 1$, pois $L \in K_{1,2}$. Por outro lado, se $x \in [1]\Phi_2$ então $s(x) = 1$ e por conseguinte $ts(x) = t(1) = 1$. Do exposto resulta que $(ts)^{-1}(\{1\}) = [1]\Phi_2$ e por consequência $ts \in \mathcal{D}_L$.

Vejamos que $st \in \mathcal{D}_L$. Seja $x \in L$ tal que $st(x) = 0 = s(0)$. Atendendo a que $s \in \mathcal{D}_L$ conclui-se que $f^2t(x) = tf^2(x) = 0$. Como $\text{Ker } t \subseteq \Phi_2$ então temos $f^4(x) = 0$ e por conseguinte $x \in [0]\Phi_2$. Reciprocamente, se $x \in [0]\Phi_2$ então $tf^2(x) = f^2t(x) = 0$. Como $s \in \mathcal{D}_L$ então $st(x) = 0$. Assim temos $(st)^{-1}(\{0\}) = [0]\Phi_2$.

Finalmente mostremos que $(st)^{-1}(\{1\}) = [1]\Phi_2$. Seja $x \in L$ tal que $st(x) = 1 = s(1)$. Tendo em conta que $s \in \mathcal{D}_L$ conclui-se que $f^2t(x) = tf^2(x) = 1$. Como $\text{Ker } t \subseteq \Phi_2$ então temos $f^4(x) = 1$ e por conseguinte $x \in [1]\Phi_2$. Por outro lado, se $x \in [1]\Phi_2$ então $tf^2(x) = f^2t(x) = 1$. Como $s \in \mathcal{D}_L$ então $st(x) = 1$. Assim temos $(st)^{-1}(\{1\}) = [1]\Phi_2$. $\square$

Consideremos uma álgebra de Ockham $(L; f)$. Para cada $s \in \text{End } L_i$, defina-se a aplicação $\|s\| : [L; p] \longrightarrow [L; p]$ do seguinte modo:

$$\|s\|(x) = \begin{cases} \alpha_4 & \text{se } x \in [\alpha_3]\Phi_2 \cup B_p^*; \\ s(x) & \text{se } x \in L_i \setminus ([\alpha_2]\Phi_2 \cup [\alpha_3]\Phi_2); \\ \alpha_1 & \text{se } x \in B_p \cup [\alpha_2]\Phi_2. \end{cases}$$

Teorema 2.17 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham subdirectamente irredutível pertencente a $K_{1,2}$. Se $[\alpha_2]\Phi_2$ é ideal primo de L_i e $[\alpha_3]\Phi_2$ é filtro primo de L_i então $\|s\| \in \mathcal{I}[L; p]$, qualquer que seja $s \in \mathcal{D}_{L_i}$.*

Demonstração Seja $s \in \mathcal{D}_{L_i}$. Dados $x, y \in [L; p]$ consideremos vários casos.

- (1) Se $x, y \in B_p$ então $x \wedge y, x \vee y \in B_p$ e por consequência temos: $\|s\|(x) = \alpha_1, \|s\|(y) = \alpha_1$,

$\|s\|(x \wedge y) = \alpha_1$, $\|s\|(x \vee y) = \alpha_1$. Assim conclui-se que

$$\|s\|(x \wedge y) = \alpha_1 = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y),$$

$$\|s\|(x \vee y) = \alpha_1 = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

(2) Se $x \in B_p$ e $y \notin B_p$ então $x \leq y$ por conseguinte $\|s\|(x) = \alpha_1 \leq \|s\|(y)$. Então,

$$\|s\|(x \wedge y) = \|s\|(x) = \alpha_1 = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y),$$

$$\|s\|(x \vee y) = \|s\|(y) = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

(3) Se $x \in B_p^*$ e $y \in B_p^*$ então $x \wedge y, x \vee y \in B_p^*$ por consequência temos: $\|s\|(x) = \alpha_4$, $\|s\|(y) = \alpha_4$, $\|s\|(x \wedge y) = \alpha_4$, $\|s\|(x \vee y) = \alpha_4$. Assim conclui-se que

$$\|s\|(x \wedge y) = \alpha_4 = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y),$$

$$\|s\|(x \vee y) = \alpha_4 = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

(4) Se $x \in B_p^*$ e $y \notin B_p^*$ então $x \geq y$ por conseguinte $\|s\|(x) = \alpha_4 \geq \|s\|(y)$. Portanto,

$$\|s\|(x \wedge y) = \|s\|(y) = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y),$$

$$\|s\|(x \vee y) = \|s\|(x) = \alpha_4 = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

(5) No caso $x \in [\alpha_3]\Phi_2$ e $y \in L_i \setminus ([\alpha_2]\Phi_2 \cup [\alpha_3]\Phi_2)$ temos: $x \wedge y \notin [\alpha_2]\Phi_2$, uma vez que $[\alpha_2]\Phi_2$ é ideal primo; $x \wedge y \notin [\alpha_3]\Phi_2$, pois $[\alpha_3]\Phi_2$ é filtro. Neste contexto temos $\|s\|(x) = \alpha_4$, $\|s\|(y) = s(y)$, $\|s\|(x \wedge y) = s(x \wedge y) = s(x) \wedge s(y)$. Tendo em conta que $s \in \mathcal{D}_{L_i}$ conclui-se que $s(x) = \alpha_3$, uma vez que $x \in [\alpha_3]\Phi_2$. Por consequência temos

$$\|s\|(x \wedge y) = s(y) = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y).$$

Atendendo a que $[\alpha_3]\Phi_2$ é filtro temos $x \vee y \in [\alpha_3]\Phi_2$ e por conseguinte $\|s\|(x \vee y) = \alpha_4$. Como $\|s\|(x) = \alpha_4$ então temos

$$\|s\|(x \vee y) = \alpha_4 = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

(6) Se $x \in [\alpha_3]\Phi_2$ e $y \in [\alpha_2]\Phi_2$ então temos: $x \wedge y \in [\alpha_2]\Phi_2$ e $x \vee y \in [\alpha_3]\Phi_2$. Então $\|s\|(x) = \alpha_4$, $\|s\|(y) = \alpha_1$, $\|s\|(x \wedge y) = \alpha_1$ e $\|s\|(x \vee y) = \alpha_4$. Donde se conclui que

$$\|s\|(x \wedge y) = \alpha_1 = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y),$$

$$\|s\|(x \vee y) = \alpha_4 = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

(7) Se $x \in [\alpha_3]\Phi_2$ e $y \in [\alpha_3]\Phi_2$ então temos: $x \wedge y \in [\alpha_3]\Phi_2$ e $x \vee y \in [\alpha_3]\Phi_2$. Consequentemente $\|s\|(x) = \alpha_4$, $\|s\|(y) = \alpha_4$, $\|s\|(x \wedge y) = \alpha_4$ e $\|s\|(x \vee y) = \alpha_4$. Donde se conclui que

$$\|s\|(x \wedge y) = \alpha_4 = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y),$$

$$\|s\|(x \vee y) = \alpha_4 = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

(8) Se $x \in [\alpha_2]\Phi_2$ e $y \in L_i \setminus ([\alpha_2]\Phi_2 \cup [\alpha_3]\Phi_2)$ então $x \wedge y \in [\alpha_2]\Phi_2$. Portanto $\|s\|(x) = \alpha_1$, $\|s\|(y) = s(y)$ e $\|s\|(x \wedge y) = \alpha_1$. Donde se conclui que

$$\|s\|(x \wedge y) = \alpha_1 = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y).$$

Por outro lado $x \vee y \notin [\alpha_2]\Phi_2$ e $x \vee y \notin [\alpha_3]\Phi_2$. Assim temos $\|s\|(x \vee y) = s(x \vee y) = s(x) \vee s(y)$. Tendo em conta que $s \in \mathcal{D}_{L_i}$, conclui-se que $s(x) = \alpha_2$, uma vez que $x \in [\alpha_2]\Phi_2$. Por consequência temos

$$\|s\|(x \vee y) = s(y) = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

(9) Se $x \in [\alpha_2]\Phi_2$ e $y \in [\alpha_2]\Phi_2$ então temos: $x \wedge y \in [\alpha_2]\Phi_2$ e $x \vee y \in [\alpha_2]\Phi_2$. Consequentemente $\|s\|(x) = \alpha_1$, $\|s\|(y) = \alpha_1$, $\|s\|(x \wedge y) = \alpha_1$ e $\|s\|(x \vee y) = \alpha_1$. Donde se conclui que

$$\|s\|(x \wedge y) = \alpha_1 = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y),$$

$$\|s\|(x \vee y) = \alpha_1 = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

(10) Se $x \in [\alpha_2]\Phi_2$ e $y \in [\alpha_3]\Phi_2$ então temos: $x \wedge y \in [\alpha_2]\Phi_2$ e $x \vee y \in [\alpha_3]\Phi_2$. Portanto $\|s\|(x) = \alpha_1$, $\|s\|(y) = \alpha_4$, $\|s\|(x \wedge y) = \alpha_1$ e $\|s\|(x \vee y) = \alpha_4$. Donde se conclui que

$$\|s\|(x \wedge y) = \alpha_1 = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y),$$

$$\|s\|(x \vee y) = \alpha_4 = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

(11) No caso de $x, y \in L_i \setminus ([\alpha_2]\Phi_2 \cup [\alpha_3]\Phi_2)$ temos $x \wedge y, x \vee y \in L_i \setminus ([\alpha_2]\Phi_2 \cup [\alpha_3]\Phi_2)$ e por conseguinte

$$\|s\|(x \wedge y) = s(x \wedge y) = s(x) \wedge s(y) = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y),$$

$$\|s\|(x \vee y) = s(x \vee y) = s(x) \vee s(y) = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

Da análise dos vários casos, acima discutidos, conclui-se que, para quaisquer $x, y \in [L; p]$,

$$\|s\|(x \wedge y) = \|s\|(x) \wedge \|s\|(y),$$

$$\|s\|(x \vee y) = \|s\|(x) \vee \|s\|(y).$$

Mostremos que $f_\sigma \|s\| = \|s\| f_\sigma$. Seja $x \in [L; p]$. Examinaremos diversos casos.

(1) Se $x \in B_p$ então $f_\sigma(x) \in B_p^*$, consequentemente

$$f_\sigma \|s\|(x) = f_\sigma(\alpha_1) = \alpha_4 = \|s\| f_\sigma(x).$$

(2) Se $x \in [\alpha_2]\Phi_2$ então $f_i^2(x) = \alpha_2$ logo $f_i^2 f_\sigma(x) = f_i^3(x) = \alpha_3$. Portanto $f_\sigma(x) \in [\alpha_3]\Phi_2$.

Por consequência temos:

$$f_\sigma \|s\|(x) = f_\sigma(\alpha_1) = \alpha_4 = \|s\| f_\sigma(x).$$

(3) Se $x \in [\alpha_3]\Phi_2$ então $f_i^2(x) = \alpha_3$ portanto $f_i^2 f_\sigma(x) = f_i^3(x) = \alpha_2$, consequentemente, $f_\sigma(x) \in [\alpha_2]\Phi_2$. Assim temos

$$f_\sigma \|s\|(x) = f_\sigma(\alpha_4) = \alpha_1 = \|s\| f_\sigma(x).$$

(4) Se $x \in L_i \setminus ([\alpha_2]\Phi_2 \cup [\alpha_3]\Phi_2)$ então $f_\sigma(x) = f_i(x) \in L_i \setminus ([\alpha_2]\Phi_2 \cup [\alpha_3]\Phi_2)$. Com efeito, se $f_i(x) \in [\alpha_2]\Phi_2$ então $f_i^3(x) = \alpha_2$ logo $f_i^2(x) = f_i^4(x) = \alpha_3$, o que é absurdo; se $f_i(x) \in [\alpha_3]\Phi_2$ então $f_i^3(x) = \alpha_3$ portanto $f_i^2(x) = f_i^4(x) = \alpha_2$, o que é absurdo. Por consequência temos

$$f_\sigma \|s\|(x) = f_\sigma s(x) = f_i s(x) = s f_i(x) = \|s\| f_i(x) = \|s\| f_\sigma(x).$$

(5) Se $x \in B_p^*$ então $f_\sigma(x) \in B_p$, consequentemente

$$f_\sigma \|s\|(x) = f_\sigma(\alpha_4) = \alpha_1 = \|s\| f_\sigma(x).$$

Dos raciocínios acima descritos resulta que $\|s\|$ é um endomorfismo de $[L; p]$. Por construção temos que $\|s\|(\alpha_2) = \alpha_1$, conseqüentemente, $\|s\| \in \mathcal{I}[L; p]$. $\square$

Teorema 2.18 *Se $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham subdirectamente irredutível pertencente a $K_{1,2}$ então são equivalentes as seguintes condições:*

- (1) $\mathcal{I}[L; p] \neq \emptyset$;
- (2) $[\alpha_2]\Phi_2$ é ideal primo de L_i e $[\alpha_3]\Phi_2$ é filtro primo de L_i .

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) : Seja $\vartheta \in \mathcal{I}[L; p]$. Atendendo a que Φ_2 é uma congruência de L_i temos que $[\alpha_2]\Phi_2$ é ideal do reticulado L_i e $[\alpha_3]\Phi_2$ é filtro do reticulado L_i . Mostremos que $[\alpha_2]\Phi_2$ é ideal primo. Sejam $x, y \in L_i$ tais que $x, y \notin [\alpha_2]\Phi_2$. Pelo teorema 2.12(1), temos $\vartheta(x) \neq \alpha_1$ e $\vartheta(y) \neq \alpha_1$. Fazendo uso do teorema 2.8(1) conclui-se que $\vartheta(x) \geq \alpha_2$ e $\vartheta(y) \geq \alpha_2$. Por consequência temos $\vartheta(x \wedge y) = \vartheta(x) \wedge \vartheta(y) \geq \alpha_2$. Aplicando, de novo, o teorema 2.12(1) temos $x \wedge y \notin [\alpha_2]\Phi_2$.

Vejamos que $[\alpha_3]\Phi_2$ é filtro primo. Sejam $x, y \in L_i$ tais que $x, y \notin [\alpha_3]\Phi_2$. Tendo em conta o teorema 2.12(1), temos $\vartheta(x) \neq \alpha_4$ e $\vartheta(y) \neq \alpha_4$. Fazendo uso do teorema 2.8(2) conclui-se que $\vartheta(x) \leq \alpha_3$ e $\vartheta(y) \leq \alpha_3$. Assim temos $\vartheta(x \vee y) = \vartheta(x) \vee \vartheta(y) \leq \alpha_3$. Aplicando o teorema 2.12(1) temos $x \vee y \notin [\alpha_3]\Phi_2$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Suponhamos que $[\alpha_2]\Phi_2$ é ideal primo e $[\alpha_3]\Phi_2$ é filtro primo. Atendendo a que $f_i^2 \in \mathcal{D}_{L_i}$ e aplicando o teorema 2.17 conclui-se que $\|f^2\| \in \mathcal{I}[L; p]$. Portanto $\mathcal{I}[L; p] \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 2.19 *Seja $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham subdirectamente irredutível pertencente a $K_{1,2}$. Se $\mathcal{I}[L; p] \neq \emptyset$ então a aplicação $\Psi : \mathcal{I}[L; p] \longrightarrow \text{End } L_i$, definida por*

$$\Psi(\vartheta) = \vartheta_0,$$

é um monomorfismo de semigrupos e $\Psi(\mathcal{I}[L; p]) = \mathcal{D}_{L_i}$.

Demonstração Mostremos, em primeiro lugar, que Ψ é um morfismo de semigrupos. Sejam $\vartheta, \tau \in \mathcal{I}[L; p]$. Dado $x \in [L; p]$ temos: $\Psi(\vartheta)\Psi(\tau)(x) = \vartheta_0\tau_0(x) = (\vartheta(\tau_0(x)) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3$. Por outro lado, observemos que: $\vartheta(\tau_0(x)) = \vartheta((\tau(x) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3) = (\vartheta(\tau(x)) \vee \vartheta(\alpha_2)) \wedge \vartheta(\alpha_3)$. Tendo em consideração que $\vartheta \in \mathcal{I}[L; p]$, conclui-se que: $\vartheta(\alpha_2) = \alpha_1$ e $\vartheta(\alpha_3) = \vartheta f_\sigma(\alpha_2) = f_\sigma \vartheta(\alpha_2) =$

$f_\sigma(\alpha_1) = \alpha_4$. Por consequência $\vartheta(\tau_0(x)) = (\vartheta(\tau(x)) \vee \alpha_1) \wedge \alpha_4 = \vartheta(\tau(x))$. Do exposto resulta $\Psi(\vartheta)\Psi(\tau)(x) = (\vartheta(\tau(x)) \vee \alpha_2) \wedge \alpha_3 = \Psi(\vartheta\tau)(x)$ e por conseguinte

$$\Psi(\vartheta)\Psi(\tau) = \Psi(\vartheta\tau).$$

Mostremos que Ψ é injectiva. Sejam $\vartheta, \tau \in \mathcal{I}[L; p]$ tais que $\vartheta_0 = \tau_0$. Pelo teorema 2.12(2) temos

$$\vartheta^{-1}(\{\alpha_1\}) = B_p \cup [\alpha_2]\Phi_2 = \tau^{-1}(\{\alpha_1\}),$$

$$\vartheta^{-1}(\{\alpha_4\}) = [\alpha_3]\Phi_2 \cup B_p^* = \tau^{-1}(\{\alpha_4\}).$$

Consequentemente, $\vartheta(x) = \alpha_1 = \tau(x)$, para todo $x \in B_p \cup [\alpha_2]\Phi_2$. Por outro lado, $\vartheta(x) = \alpha_4 = \tau(x)$, para todo $x \in [\alpha_3]\Phi_2 \cup B_p^*$. No caso de $x \in L_i \setminus ([\alpha_2]\Phi_2 \cup [\alpha_3]\Phi_2)$, pelo teorema 2.8, temos $\vartheta(x), \tau(x) \in L_i$. Fazendo uso do teorema 2.11(2) temos $\vartheta(x) = \vartheta_0(x)$ e $\tau(x) = \tau_0(x)$. Como, por hipótese, temos $\vartheta_0 = \tau_0$ então conclui-se que $\vartheta(x) = \tau(x)$. Do exposto resulta $\vartheta = \tau$.

Vamos mostrar que $\Psi(\mathcal{I}[L; p]) = \mathcal{D}_{L_i}$. Mostremos que $\Psi(\mathcal{I}[L; p]) \subseteq \mathcal{D}_{L_i}$. Seja $\vartheta \in \mathcal{I}[L; p]$. Se $x \in \vartheta_0^{-1}(\{\alpha_2\})$ então $(x, \alpha_2) \in \text{Ker } \vartheta_0 \subseteq \Phi_2$; teorema 1.2(2). Por consequência, $x \in [\alpha_2]\Phi_2$. Reciprocamente, se $x \in [\alpha_2]\Phi_2$ então, pelo teorema 2.12(1), temos $\vartheta(x) = \alpha_1$. Donde se conclui que $\vartheta_0(x) = \alpha_2$. Do exposto resulta que $\vartheta_0^{-1}(\{\alpha_2\}) = [\alpha_2]\Phi_2$.

Por outro lado, se $x \in \vartheta_0^{-1}(\{\alpha_3\})$ então $(x, \alpha_3) \in \text{Ker } \vartheta_0 \subseteq \Phi_2$ e por consequência $x \in [\alpha_3]\Phi_2$. Reciprocamente, se $x \in [\alpha_3]\Phi_2$ então, pelo teorema 2.12(1), temos $\vartheta(x) = \alpha_4$, consequentemente, $\vartheta_0(x) = \alpha_3$. Do exposto resulta que $\vartheta_0^{-1}(\{\alpha_3\}) = [\alpha_3]\Phi_2$. Dos raciocínios acima descritos conclui-se que $\vartheta_0 \in \mathcal{D}_{L_i}$.

Mostremos que $\mathcal{D}_{L_i} \subseteq \Psi(\mathcal{I}[L; p])$. Seja $s \in \mathcal{D}_{L_i}$. Aplicando os teoremas 2.18 e 2.17 tem-se $\|s\| \in \mathcal{I}[L; p]$. Vamos provar que $\Psi(\|s\|) = s$. Seja $x \in L_i$. No caso de $x \in [\alpha_2]\Phi_2$, atendendo a que $s \in \mathcal{D}_{L_i}$, temos $s(x) = \alpha_2$. Por outro lado $\|s\|(x) = \alpha_1$, donde se conclui que $\Psi(\|s\|)(x) = \alpha_2 = s(x)$. Se $x \in [\alpha_3]\Phi_2$ temos $s(x) = \alpha_3$. Neste contexto $\|s\|(x) = \alpha_4$, consequentemente $\Psi(\|s\|)(x) = \alpha_3 = s(x)$. No caso de $x \in L_i \setminus ([\alpha_2]\Phi_2 \cup [\alpha_3]\Phi_2)$ tem-se $\|s\|(x) = s(x) \in L$. Fazendo uso do teorema 2.11, conclui-se que $\|s\|(x) = \|s\|_0(x)$ ou seja $s(x) = \Psi(\|s\|)(x)$. $\square$

Dado um monóide S , designamos por $U(S)$ o grupo das unidades de S .

Teorema 2.20 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham subdirectamente irredutível tal que $V_B(L) = K_{p,q}$. Se $q > 0$ então $U(\text{End } L) = \{id_L\}$.*

Demonstração Seja $(X; g)$ o espaço dual de $(L; f)$. Em primeiro lugar, observemos que $\text{End } L$ é anti-isomorfo a $\Lambda(X; g)$; teorema 1.11. Assim, basta mostrar que $U(\Lambda(X; g)) = \{id_X\}$.

Seja $\vartheta \in U(\Lambda(X; g))$. Como $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham finita e subdirectamente irredutível então, pelo teorema 1.13, existe $x \in X$ tal que $X = \{g^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Portanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\vartheta(x) = g^k(x)$ e por consequência $\vartheta = g^k$. Vamos mostrar que $k = 0$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que $k > 0$. Como $g^k = \vartheta$ é bijecção e estamos a supor que $k > 0$ então conclui-se que g é injectiva. Tendo presente que $P_{2p+q,q} = K_{p,q}$, podemos inferir que $g^{2p+q} = g^q$. Portanto $g^{2p} = id_X$, uma vez que g é injectiva. Por consequência $L \in K_{p,0} = P_{2p,0}$. O que é absurdo, pois $V_B(L) = K_{p,q}$ e $q > 0$. $\square$

Teorema 2.21 *Se $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham subdirectamente irredutível e $V_B(L) = K_{1,2}$ então são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $id_L \in \mathcal{D}_L$;
- (2) $[0]\Phi_2 = \{0\}$ e $[1]\Phi_2 = \{1\}$.

Demonstração O resultado é consequência imediata da definição de $\mathcal{D}_L$. $\square$

Teorema 2.22 *Se $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham subdirectamente irredutível tal que $V_B(L) = K_{1,2}$ e $\text{End } L$ é regular então são válidas as seguintes afirmações:*

- (1) Se $id_L \in \mathcal{D}_L$ então $\mathcal{D}_L = \text{End } L$;
- (2) Se $id_L \notin \mathcal{D}_L$ então $\mathcal{D}_L = \text{End } L \setminus \{id_L\}$.

Demonstração Observemos, primeiramente, que $\text{End } L \setminus \{id_L\} \subseteq \mathcal{C}_L$. Seja $\vartheta \in \text{End } L \setminus \{id_L\}$. Pelo teorema 2.20 temos que ϑ não é bijecção. Fazendo uso do teorema 2.3(3) conclui-se que $\ker \vartheta = \Phi_2$ e por conseguinte $[0]\Phi_2 = \vartheta^{-1}(\{0\})$ e $[1]\Phi_2 = \vartheta^{-1}(\{1\})$, ou seja $\vartheta \in \mathcal{D}_L$. As afirmações (1) e (2) são consequências imediatas da observação anterior. $\square$

Teorema 2.23 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham. Se $\text{End}[L; p]$ é regular então $\text{End } L$ é regular.*

Demonstração Suponhamos que $\text{End}[L; p]$ é regular. Vamos mostrar que $\text{End } L$ é regular.

Seja $\vartheta \in \text{End } L_i$. Consideremos, o endomorfismo de $[L; p]$, $\tilde{\vartheta} = [\vartheta, \text{id}_{[L; p]}]$. Como estamos a supor que $\text{End}[L; p]$ é regular então existe $\varphi \in \text{End}[L; p]$ tal que:

$$\tilde{\vartheta}\varphi\tilde{\vartheta} = \tilde{\vartheta}.$$

Mostremos que $\varphi(\alpha_2) \neq \alpha_1$. Com efeito, se $\varphi(\alpha_2) = \alpha_1$ então $\alpha_2 = \tilde{\vartheta}(\alpha_2) = \tilde{\vartheta}\varphi\tilde{\vartheta}(\alpha_2) = \tilde{\vartheta}(\alpha_1) = \alpha_1$, o que é absurdo. Pelo teorema 2.6 temos $\varphi(\alpha_2) = \alpha_2$ e $\varphi(\alpha_3) = \alpha_3$. Atendendo a que φ é isótoma temos $\varphi(L_i) \subseteq L_i$. Então podemos definir a aplicação $\varphi' : L_i \rightarrow L_i$ por

$$\varphi'(x) = \varphi(x).$$

É claro que $\varphi' \in \text{End } L_i$. Mostremos que $\vartheta\varphi'\vartheta = \vartheta$. Seja $x \in L_i$. Por construção temos $\tilde{\vartheta}(x) = \vartheta(x)$, conseqüentemente,

$$\varphi'\vartheta(x) = \varphi\tilde{\vartheta}(x).$$

Tendo em conta que $\varphi\vartheta(L_i) \subseteq L_i$, conclui-se que:

$$\vartheta(x) = \tilde{\vartheta}(x) = \tilde{\vartheta}(\varphi\tilde{\vartheta}(x)) = \vartheta(\varphi\tilde{\vartheta}(x)) = \vartheta\varphi'\vartheta(x).$$

Do exposto resulta que $\text{End } L_i$ é regular. Como as álgebras $(L; f)$, $(L_i; f_i)$ são isomorfas então os semigrupos $\text{End } L$, $\text{End } L_i$ são isomorfos e por consequência $\text{End } L$ é regular. $\square$

Teorema 2.24 *Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$, então tem-se:*

$$\mathcal{S}[L; p] \simeq \mathbb{Z}_p \times \text{End } L.$$

Demonstração Consideremos a aplicação $\Psi : \mathbb{Z}_p \times \text{End } L_i \rightarrow \mathcal{S}[L; p]$ definida do modo seguinte:

$$\Psi((i, \vartheta)) = [\vartheta, f_\sigma^{2i}].$$

Designemos por $+_p$ a adição módulo p .

Em primeiro lugar, mostraremos que Ψ é um morfismo de semigrupos. Sejam $\vartheta, \varphi \in \text{End } L_i$ e $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$. Designemos por r o resto na divisão de $i+j$ por p e por k o respectivo quociente. Neste contexto temos $i+j = pk + r$, com $0 \leq r < p$. Assim temos: $i +_p j = r$. Dado $x \in [L; p]$ consideraremos dois casos.

(1) No caso de $x \in B_p \cup B_p^*$, atendendo a que $f_\sigma^{2p}(x) = x$, temos $f_\sigma^{2(i+j)}(x) = f_\sigma^{2r}(x) = f_\sigma^{2(i+pj)}(x)$. Por consequência

$$[\vartheta, f_\sigma^{2i}][\varphi, f_\sigma^{2j}](x) = [\vartheta, f_\sigma^{2i}](f_\sigma^{2j}(x)) = f_\sigma^{2i}(f_\sigma^{2j}(x)) = f_\sigma^{2(i+j)}(x) = [\vartheta\varphi, f_\sigma^{2(i+pj)}](x).$$

Portanto $\Psi((i, \vartheta))\Psi((j, \varphi))(x) = \Psi((i+{}_pj, \vartheta\varphi))(x)$.

(2) No caso de $x \in L_i$ temos

$$[\vartheta, f_\sigma^{2i}][\varphi, f_\sigma^{2j}](x) = [\vartheta, f_\sigma^{2i}](\varphi(x)) = \vartheta\varphi(x) = \Psi((i+{}_pj, \vartheta\varphi))(x).$$

Da análise dos casos, acima discutidos, resulta que $\Psi((i, \vartheta))\Psi((j, \varphi)) = \Psi((i+{}_pj, \vartheta\varphi))$.

Vejamos que Ψ é injectiva. Sejam $(i, \vartheta), (j, \varphi) \in \mathbb{Z}_p \times \text{End } L_i$ tais que $[\vartheta, f_\sigma^{2i}] = [\varphi, f_\sigma^{2j}]$. Dado $x \in L_i$ temos:

$$\vartheta(x) = [\vartheta, f_\sigma^{2i}](x) = [\varphi, f_\sigma^{2j}](x) = \varphi(x).$$

Por consequência $\vartheta = \varphi$. Por outro lado temos $f_\sigma^{2i}(a_0) = [\vartheta, f_\sigma^{2i}](a_0) = [\varphi, f_\sigma^{2j}](a_0) = f_\sigma^{2j}(a_0)$. Assim temos $f_\sigma^{2i}(a_0) = f_\sigma^{2j}(a_0)$. Por consequência $i = j$. Com efeito, se $i < j$ então resultaria $f_\sigma^{2(j-i)}(a_0) = a_0$; o que é absurdo porque $0 < j - i \leq j < p$.

Finalmente, vamos provar que Ψ é sobrejectiva. Seja $\tau \in \mathcal{S}[L; p]$. Pelo teorema 2.6 existe $m \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que, para todo $x \in B_p \cup B_p^*$,

$$\tau(x) = f_\sigma^{2m}(x).$$

Neste contexto temos $\tau(\alpha_2) = \alpha_2$ e $\tau(\alpha_3) = \alpha_3$. Tendo em conta que τ é isótona temos $\tau(L_i) \subseteq L_i$.

Então podemos definir a aplicação $\tau' : L_i \longrightarrow L_i$ por

$$\tau'(x) = \tau(x).$$

É óbvio que $\tau' \in \text{End } L_i$. Assim temos $\Psi((m, \tau') = [\tau', f_\sigma^{2m}] = \tau$. Dos raciocínios acima descritos resulta que: $\mathcal{S}[L; p] \simeq \mathbb{Z}_p \times \text{End } L_i$. Como as álgebras $(L_i; f_i)$ e $(L; f)$ são isomorfas então podemos concluir que $\mathcal{S}[L; p] \simeq \mathbb{Z}_p \times \text{End } L$. $\square$

Teorema 2.25 *Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$. Se $\mathcal{I}[L; p] = \emptyset$ então*

$$\text{End}[L; p] \simeq \mathbb{Z}_p \times \text{End } L.$$

Demonstração Suponhamos que $\mathcal{I}[L; p] = \emptyset$. Pelo teorema 2.15(3) temos $\text{End}[L; p] = \mathcal{S}[L; p]$. Fazendo uso do teorema 2.24 conclui-se que $\text{End}[L; p] \simeq \mathbb{Z}_p \times \text{End } L$. $\square$

Teorema 2.26 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham subdirectamente irredutível tal que $\mathbf{V}_B(L) = \mathbf{K}_{1,2}$ e $\text{End } L$ é regular. Se $\mathcal{I}[L; p] \neq \emptyset$ então são válidas as seguintes afirmações:*

- (1) *Se $\text{id}_L \in \mathcal{D}_L$ então $|\text{End}[L; p]| = (p+1)|\text{End } L|$;*
- (2) *Se $\text{id}_L \notin \mathcal{D}_L$ então $|\text{End}[L; p]| = (p+1)|\text{End } L| - 1$.*

Demonstração Pelo teorema 2.15(3) temos $|\text{End}[L; p]| = |\mathcal{S}[L; p]| + |\mathcal{I}[L; p]|$. Usando o teorema 2.24 conclui-se que $|\mathcal{S}[L; p]| = p|\text{End } L|$. Aplicando o teorema 2.19 obtemos $|\mathcal{I}[L; p]| = |\mathcal{D}_L|$.

(1) No caso de $\text{id}_L \in \mathcal{D}_L$, pelo teorema 2.22(1), conclui-se que $|\mathcal{I}[L; p]| = |\text{End } L|$ e por conseguinte $|\text{End}[L; p]| = p|\text{End } L| + |\text{End } L| = (p+1)|\text{End } L|$.

(2) No caso de $\text{id}_L \notin \mathcal{D}_L$, pelo teorema 2.22(2), conclui-se que $|\mathcal{I}[L; p]| = |\text{End } L| - 1$ e por conseguinte $|\text{End}[L; p]| = p|\text{End } L| + |\text{End } L| - 1 = (p+1)|\text{End } L| - 1$. $\square$

Teorema 2.27 *Para cada $p \geq 1$ existe uma álgebra de Ockham M tal que $\mathbf{V}_B(M) = \mathbf{K}_{p,2}$, $\text{End } M$ não é regular e $|\text{End } M| = 4p$.*

Demonstração No caso de $p = 1$ basta considerar $M = L_{4,2}$ (vide exemplo 2.1). É de observar que $\Lambda(\{0, 1, 2, 3, 4\}; g_{4,2}) = \{\text{id}, g_{4,2}, g_{4,2}^2, g_{4,2}^3\}$ e $|\Lambda(\{0, 1, 2, 3, 4\}; g_{4,2})| = 4$. Como $\text{End } L_{4,2}$ é anti-isomorfo a $\Lambda(\{0, 1, 2, 3, 4\}; g_{4,2})$ então $|\text{End } L_{4,2}| = 4$.

No caso de $p > 1$ consideremos $M = [L_{4,2}; p]$. Tendo em conta que $\mathbf{V}_B(L_{4,2}) = \mathbf{K}_{1,2}$ e aplicando teorema 2.9, tira-se que $\mathbf{V}_B(M) = \mathbf{K}_{p,2}$. Como $\text{End } L_{4,2}$ não é regular (vide exemplo 2.1) então, pelo teorema 2.23, temos que $\text{End } M$ não é regular.

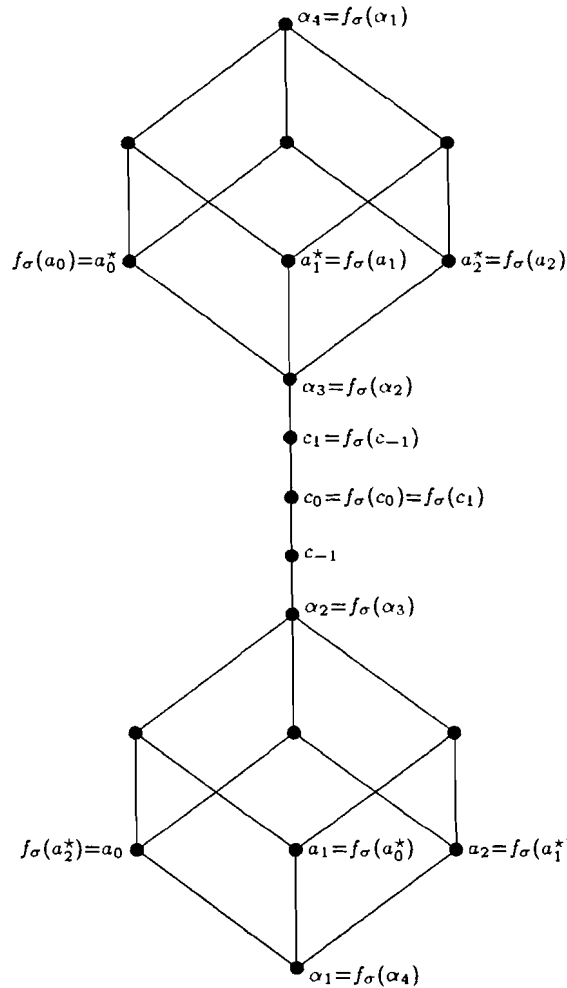
Neste contexto, verifica-se facilmente que o ideal $[0]\Phi_2$, de $L_{4,2}$, não é primo. Atendendo a que $L_{4,2}$ é subdirectamente irredutível então, pelo teorema 2.18, sai que $\mathcal{I}[L_{4,2}; p] = \emptyset$. Aplicando o teorema 2.25 temos $\text{End } M \simeq \mathbb{Z}_p \times \text{End } L_{4,2}$. Por consequência $|\text{End } M| = 4p$, uma vez que $|\text{End } L_{4,2}| = 4$. $\square$

Teorema 2.28 *Para cada $p > 1$ existe uma álgebra de Ockham M tal que $\mathbf{V}_B(M) = \mathbf{K}_{p,2}$, $\text{End } M$ é semigrupo inverso e $|\text{End } M| = 2p + 2$.*

Demonstração Seja $M = [C_1; p]$ (vide exemplo 2.2). Tendo em conta que $\mathbf{V}_B(C_1) = \mathbf{K}_{1,2}$,

fazendo uso do teorema 2.9, tira-se que $\mathbf{V}_B(M) = \mathbf{K}_{p,2}$. Como C_1 é subdirectamente irreduzível e $\text{End } C_1$ é regular então, pelo teorema 2.13, temos que $\text{End } M$ é semigrupo inverso. É fácil de verificar que $[0_{C_1}]\Phi_2 = \{0_{C_1}\}$ e $[1_{C_1}]\Phi_2 = \{1_{C_1}\}$. Portanto, pelo teorema 2.21, $\text{id}_{C_1} \in \mathcal{D}_{C_1}$. Neste contexto é claro que $[0_{C_1}]\Phi_2 = \{0_{C_1}\}$ é ideal primo e $[1_{C_1}]\Phi_2 = \{1_{C_1}\}$ é filtro primo. Então, pelo teorema 2.18 temos $\mathcal{I}[L;p] \neq \emptyset$. Por consequência, fazendo uso do teorema 2.26(1) conclui-se que $|\text{End } M| = (p+1)|\text{End } C_1| = 2p+2$. $\square$

Exemplo 2.3 A álgebra de Ockham $([C_1; 3]; f_\sigma)$ pode ser representada, graficamente, do modo seguinte:



De acordo com a demonstração do teorema 2.28, podemos afirmar que: $\text{End}([C_1; 3]; f_\sigma)$ é um semigrupo inverso e $|\text{End}([C_1; 3]; f_\sigma)| = 8$.

Capítulo 3

Acerca do semigrupo dos endomorfismos para álgebras de Ockham de tipo booleano finito

Neste capítulo consideramos álgebras de Ockham $(L; f)$ tais que L é um reticulado de Boole finito e f é bijetiva. Tais álgebras de Ockham serão denominadas álgebras de Ockham de tipo booleano finito. A partir de um grupo G e de uma família $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in M}$ de subgrupos normais de G , definimos um determinado semigrupo $S(G, \mathcal{H})$; o semigrupo dos endomorfismos de uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito é anti-isomorfo a um semigrupo da forma $S(G, \mathcal{H})$, onde $G = \mathbb{Z}$ e $\mathcal{H}$ é uma família de subgrupos não triviais de $\mathbb{Z}$. Como consequência do estudo de algumas propriedades dos semigrupos $S(G, \mathcal{H})$ obtemos, considerando o caso especial em que $G = \mathbb{Z}$, resultados acerca do semigrupo dos endomorfismos de álgebras de tipo booleano finito. Para tais álgebras, determinamos condições necessárias e suficientes para que o respectivo semigrupo dos endomorfismos seja regular, ortodoxo, semigrupo inverso ou grupo. Neste contexto, estabelecemos um teorema de estrutura para o grupo dos automorfismos e obtemos um resultado que permite determinar o cardinal do semigrupo dos endomorfismos.

Tendo como ponto de partida um reticulado de Boole, podemos definir diversas álgebras de Ockham. Neste capítulo consideramos álgebras de Ockham $(L; f)$ tais que L é um reticulado de Boole finito e f é um automorfismo dual. Tais álgebras de Ockham serão denominadas álgebras de Ockham de *tipo booleano finito*.

Dado um conjunto finito não vazio X e uma bijecção $g : X \rightarrow X$, consideremos o conjunto X munido com a ordem discreta (i. e. X é anticadeia). Deste modo fica definido um espaço de Ockham $(X; g)$. A álgebra dual de $(X; g)$ é uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito e qualquer álgebra de Ockham de tipo booleano finito pode ser obtida por este processo.

Por uma questão de comodidade de exposição, torna-se conveniente introduzir algumas convenções.

Seja X um conjunto finito não vazio e $g : X \rightarrow X$ uma bijecção. Denotaremos por $X_1, \dots, X_m$ as órbitas de g . Como é natural, supomos que: $X_i \neq X_j$ se $i \neq j$. Em cada órbita escolhemos e fixamos um representante x_i . Para cada i definimos $c_i = |X_i|$. Seja $p = \text{mmc}\{c_1, \dots, c_m\}$.

Nesta conformidade as órbitas de g podem ser descritas do seguinte modo:

$$X_i = \{g^t(x_i) : 0 \leq t \leq c_i - 1\}.$$

Designaremos por $\mathcal{C}(g)$ o conjunto constituído por todas as aplicações $\vartheta : X \rightarrow X$ tais que $g\vartheta = \vartheta g$.

Se $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito e $(X; g)$ é o respectivo espaço dual então g é bijecção, X é anticadeia e por conseguinte $\Lambda(X; g) = \mathcal{C}(g)$. Por aplicação do teorema 1.11 conclui-se que $\text{End}(L; f)$ é anti-isomorfo ao semigrupo $\mathcal{C}(g)$. Assim, considerando o semigrupo $\mathcal{C}(g)$ podemos obter resultados acerca do semigrupo dos endomorfismos de uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito.

Teorema 3.1 *Se $\vartheta \in \mathcal{C}(g)$ então para cada X_i existe um, e um só, X_j tal que $\vartheta(X_i) = X_j$.*

Demonstração Dado x_i , seja j tal que $\vartheta(x_i) \in X_j$. Observemos, primeiramente, que qualquer elemento $y \in \vartheta(X_i)$ é da forma $y = \vartheta(g^{r_i}(x_i))$ onde $0 \leq r_i < c_i$. Atendendo a que ϑ e g comutam, conclui-se que $y = g^{r_i}(\vartheta(x_i)) \in X_j$. Assim temos $\vartheta(X_i) \subseteq X_j$. Por outro lado, uma vez que

$\vartheta(x_i) \in X_j$ então existe $0 \leq s_i < c_j$ tal que $\vartheta(x_i) = g^{s_i}(x_j)$. Tendo em conta que $g^p = \text{id}_X$, obtemos

$$x_j = g^{p-s_i}(\vartheta(x_i)) = \vartheta(g^{p-s_i}(x_i)) \in \vartheta(X_i),$$

consequentemente, $X_j \subseteq \vartheta(X_i)$. Dos raciocínios acima descritos resulta que $\vartheta(X_i) = X_j$.

Nesta contexto a unicidade é evidente. $\square$

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) : Atendendo a que $g^{c_i}(x_i) = x_i$ temos $g^{c_i}(\vartheta(x_i)) = \vartheta(x_i)$. Consequentemente, $g^{c_i}(b_i) = b_i$. Como $b_i \in X_{t_i}$ conclui-se que $c_{t_i} | c_i$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Para cada $y \in X$ existe um, e um só, i tal que $y \in X_i$. Por consequência, existe um, e um só, $0 \leq r < c_i$ tal que $y = g^r(x_i)$. Assim podemos definir uma aplicação $\vartheta : X \rightarrow X$ do modo seguinte:

$$\vartheta(y) = \vartheta(g^r(x_i)) = g^r(b_i).$$

Obviamente, $\vartheta(x_i) = \vartheta(g^0(x_i)) = g^0(b_i) = b_i$. Para mostrar que $\vartheta \in \mathcal{C}(g)$, faremos uso da seguinte observação, para todo i tem-se:

$$g^{c_i}(b_i) = b_i.$$

Para cada i existe d_i tal que $c_i = d_i c_{t_i}$. Tendo em conta que $b_i \in X_{t_i}$, conclui-se que $g^{c_{t_i}}(b_i) = b_i$ e por conseguinte $g^{c_i}(b_i) = g^{d_i c_{t_i}}(b_i) = b_i$.

Seja $y = g^r(x_i)$, com $0 \leq r < c_i$, um elemento arbitrário de X . Distinguiremos dois casos.

(1) Se $r < c_i - 1$ então temos:

$$g\vartheta(y) = g(g^r(b_i)) = g^{r+1}(b_i);$$

$$\vartheta g(y) = \vartheta(g^{r+1}(x_i)) = g^{r+1}(b_i).$$

(2) No caso de $r = c_i - 1$, tendo em conta que $g^{c_i}(b_i) = b_i$, conclui-se que:

$$g\vartheta(y) = g(g^{c_i-1}(b_i)) = g^{c_i}(b_i) = b_i;$$

$$\vartheta g(y) = \vartheta g(g^{c_i-1}(x_i)) = \vartheta(x_i) = b_i.$$

Em qualquer dos casos temos $g\vartheta(y) = \vartheta g(y)$, conseqüentemente, $\vartheta \in \mathcal{C}(g)$.

Para mostrar a unicidade, consideremos $\varphi \in \mathcal{C}(g)$ tal que $\varphi(x_i) = b_i$, para todo i . Dado $y = g^r(x_j)$, com $0 \leq r < c_j$, um elemento arbitrário de X , temos

$$\varphi(y) = \varphi(g^r(x_j)) = g^r(\varphi(x_j)) = g^r(b_j) = g^r(\vartheta(x_j)) = \vartheta(g^r(x_j)) = \vartheta(y),$$

Conseqüentemente, $\varphi = \vartheta$. $\square$

Usando o teorema 3.2, vamos estabelecer um resultado que permite determinar o cardinal do semigrupo $\mathcal{C}(g)$.

Corolário 1 *Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, defina-se $J_i = \{j : c_j | c_i\}$. Tem-se então*

$$|\mathcal{C}(g)| = \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j \in J_i} c_j \right).$$

Demonstração Seja $B_i = \bigcup_{j \in J_i} X_j$. Dado $\vartheta \in \Lambda(X, g)$ conclui-se, usando o teorema 3.2, que $\vartheta(x_i) \in B_i$, para todo i . Por conseqüência, podemos definir $\Psi : \mathcal{C}(g) \longrightarrow \prod_{i=1}^m B_i$ do modo seguinte:

$$\Psi(\vartheta) = (\vartheta(x_1), \dots, \vartheta(x_m)).$$

Por aplicação do teorema 3.2 conclui-se que Ψ é uma bijecção. Conseqüentemente,

$$|\mathcal{C}(g)| = \prod_{i=1}^m |B_i| = \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j \in J_i} c_j \right). \quad \square$$

Aplicando o teorema 1.11 obtemos o seguinte teorema, acerca do cardinal do semigrupo dos endomorfismos de uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito.

Corolário 2 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito e $(X; g)$ o respectivo espaço dual. Tem-se então*

$$|\text{End}(L; f)| = \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j \in J_i} c_j \right).$$

Demonstração Fazendo uso do teorema 1.11 conclui-se que os semigrupos $\text{End}(L; f)$ e $\Lambda(X; g)$ são anti-isomorfos. Como $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito então $\Lambda(X; g) = \mathcal{C}(g)$. Conseqüentemente, aplicando o corolário 1, obtém-se

$$|\text{End}(L; f)| = |\mathcal{C}(g)| = \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j \in J_i} c_j \right). \quad \square$$

A partir de um grupo G e de uma família $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in M}$ de subgrupos normais de G vamos definir um semigrupo $S(G, \mathcal{H})$. Considerando o grupo abeliano $\mathbb{Z}$, com adição usual, mostraremos que $\mathcal{C}(g)$ é isomorfo a $S(\mathbb{Z}, (c_i \mathbb{Z})_{1 \leq i \leq m})$. Consequentemente, o semigrupo dos endomorfismos de qualquer álgebra de Ockham de tipo booleano finito é anti-isomorfo a um semigrupo da forma $S(G, \mathcal{H})$.

Seja $(G; \cdot)$ um grupo e $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in M}$ uma família de subgrupos normais de G (onde $M \neq \emptyset$). Designamos por $I_{\mathcal{H}}$ o conjunto de todas as aplicações $\alpha : M \rightarrow M$ tais que:

$$(\forall i \in M) \quad H_i \subseteq H_{\alpha(i)}.$$

É claro que $\text{id}_M \in I_{\mathcal{H}}$. Por outro lado, se $\alpha, \beta \in I_{\mathcal{H}}$ então, para todo $i \in M$, temos: $H_i \subseteq H_{\beta(i)}$, $H_{\beta(i)} \subseteq H_{\alpha(\beta(i))}$ e por conseguinte $\alpha\beta \in I_{\mathcal{H}}$. Do exposto resulta que o conjunto $I_{\mathcal{H}}$, munido com a composição de aplicações, é um monóide.

Para cada $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$ designamos por S_{α} , o conjunto

$$\left(\prod_{i \in M} G/H_{\alpha(i)} \right) \times \{\alpha\}.$$

Neste contexto definimos

$$S(G, \mathcal{H}) = \bigcup_{\alpha \in I_{\mathcal{H}}} S_{\alpha}.$$

É de observar que: se $\alpha \neq \beta$ então $S_{\alpha} \cap S_{\beta} = \emptyset$. Um elemento qualquer de $S(G, \mathcal{H})$ é da forma $((s_i H_{\alpha(i)})_{i \in M}, \alpha)$, onde $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$ e $(s_i)_{i \in M}$ é uma família de elementos de G . Representaremos $((s_i H_{\alpha(i)})_{i \in M}, \alpha)$, de forma abreviada, por $[s_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M}$.

Teorema 3.3 *Sejam $\alpha, \beta \in I_{\mathcal{H}}$ e $(s_i)_{i \in M}$, $(t_i)_{i \in M}$, $(u_i)_{i \in M}$, $(v_i)_{i \in M}$ famílias de elementos do grupo G tais que:*

$$(\forall i \in M) \quad s_i H_{\alpha(i)} = t_i H_{\alpha(i)}, \quad u_i H_{\beta(i)} = v_i H_{\beta(i)}.$$

Tem-se então

$$(\forall i \in M) \quad s_{\beta(i)} u_i H_{\alpha\beta(i)} = t_{\beta(i)} v_i H_{\alpha\beta(i)}.$$

Demonstração Seja $i \in M$. Neste contexto é claro que $s_{\beta(i)} H_{\alpha(\beta(i))} = t_{\beta(i)} H_{\alpha(\beta(i))}$, portanto $s_{\beta(i)}^{-1} t_{\beta(i)} \in H_{\alpha(\beta(i))}$. Como $H_{\alpha(\beta(i))}$ é subgrupo normal de G então conclui-se que

$$v_i^{-1} s_{\beta(i)}^{-1} t_{\beta(i)} v_i \in H_{\alpha(\beta(i))}.$$

Por outro lado temos $u_i^{-1}v_i \in H_{\beta(i)}$ e $H_{\beta(i)} \subseteq H_{\alpha(\beta(i))}$. Consequentemente,

$$u_i^{-1}s_{\beta(i)}^{-1}t_{\beta(i)}v_i = (u_i^{-1}v_i)(v_i^{-1}s_{\beta(i)}^{-1}t_{\beta(i)}v_i) \in H_{\alpha(\beta(i))}$$

e por conseguinte $s_{\beta(i)}u_iH_{\alpha\beta(i)} = t_{\beta(i)}v_iH_{\alpha\beta(i)}$. $\square$

Tendo em conta o teorema 3.3 podemos definir, em $S(G, \mathcal{H})$, uma operação binária $\odot$ do seguinte modo:

$$[s_iH_{\alpha(i)}]_{i \in M} \odot [u_iH_{\beta(i)}]_{i \in M} = [s_{\beta(i)}u_iH_{\alpha\beta(i)}]_{i \in M}.$$

Teorema 3.4 $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é um monóide.

Demonstração Sejam $\mathbf{x} = [s_iH_{\alpha(i)}]_{i \in M}$, $\mathbf{y} = [t_iH_{\beta(i)}]_{i \in M}$ e $\mathbf{z} = [u_iH_{\gamma(i)}]_{i \in M}$ elementos arbitrários de $S(G, \mathcal{H})$. Atendendo a que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = [s_{\beta(i)}t_iH_{\alpha\beta(i)}]_{i \in M}$ então obtemos

$$(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \odot \mathbf{z} = [s_{\beta(\gamma(i))}t_{\gamma(i)}u_iH_{\alpha\beta\gamma(i)}]_{i \in M}.$$

Tendo em conta que $\mathbf{y} \odot \mathbf{z} = [t_{\gamma(i)}u_iH_{\beta\gamma(i)}]_{i \in M}$ conclui-se

$$\mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \odot \mathbf{z}) = [s_{\beta\gamma(i)}t_{\gamma(i)}u_iH_{\alpha\beta\gamma(i)}]_{i \in M}$$

e por conseguinte $(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \odot \mathbf{z} = \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \odot \mathbf{z})$.

Consideremos o elemento $\mathbf{1} = [n_iH_{\delta(i)}]_{i \in M}$, onde $(n_i)_{i \in M}$ é a família de elementos de G definida por $n_i = 1_G$ e $\delta = \text{id}_M$. Para qualquer elemento $[s_iH_{\alpha(i)}]_{i \in M}$, de $S(G, \mathcal{H})$, temos:

$$[s_iH_{\alpha(i)}]_{i \in M} \odot \mathbf{1} = [s_{\delta(i)}n_iH_{\alpha\delta(i)}]_{i \in M} = [s_iH_{\alpha(i)}]_{i \in M},$$

$$\mathbf{1} \odot [s_iH_{\alpha(i)}]_{i \in M} = [n_{\alpha(i)}s_iH_{\delta\alpha(i)}]_{i \in M} = [s_iH_{\alpha(i)}]_{i \in M}.$$

Do exposto resulta que $\mathbf{1}$ é identidade de $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$. $\square$

O conjunto de todas as aplicações de um conjunto M em M , munido com a composição de aplicações, constitui um semigrupo que denominamos por *semigrupo completo de transformações em M* (full transformation semigroup on M) e denotamos por $\mathcal{T}(M)$.

Exemplo 3.1 Seja M um conjunto não vazio. Consideremos a família $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in M}$, de subgrupos de um grupo G , definida por: $H_i = G$, para todo $i \in M$. Neste caso verifica-se facilmente que $\mathcal{T}(M) = I_{\mathcal{H}} \simeq S(G, \mathcal{H})$.

Teorema 3.5 *Os semigrupos $\mathcal{C}(g)$ e $S(\mathbb{Z}, (c_i\mathbb{Z})_{i \in \{1, \dots, m\}})$ são isomorfos.*

Demonstração Designemos por M o conjunto $\{1, \dots, m\}$. Consideremos $\vartheta \in \mathcal{C}(g)$. Usando o teorema 3.1, podemos definir a aplicação $\hat{\vartheta} : M \rightarrow M$ do modo seguinte: $\vartheta(X_i) = X_{\hat{\vartheta}(i)}$.

Observemos que: se $\vartheta, \tau \in \mathcal{C}(g)$ então $\widehat{\vartheta\tau} = \hat{\vartheta}\hat{\tau}$. Com efeito, para todo $i \in M$,

$$X_{\widehat{\vartheta\tau}(i)} = (\vartheta\tau)(X_i) = \vartheta(\tau(X_i)) = \vartheta(X_{\hat{\tau}(i)}) = X_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))},$$

consequentemente, $\widehat{\vartheta\tau}(i) = \hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))$.

Seja $\mathcal{H} = (c_i\mathbb{Z})_{i \in M}$. Nesta conformidade, temos: $\hat{\vartheta} \in I_{\mathcal{H}}$ qualquer que seja $\vartheta \in \mathcal{C}(g)$. Efectivamente, usando teorema 3.2, conclui-se que $c_{\hat{\vartheta}(i)} | c_i$ e por conseguinte $c_i\mathbb{Z} \subseteq c_{\hat{\vartheta}(i)}\mathbb{Z}$, para todo $i \in M$.

Designamos por $\bar{\vartheta}$ o elemento de $\bigtimes_{i \in M} \{0, \dots, c_{\hat{\vartheta}(i)} - 1\}$ tal que, para todo $i \in M$,

$$\vartheta(x_i) = g^{\bar{\vartheta}(i)}(x_{\hat{\vartheta}(i)}).$$

Defina-se $\Psi : \mathcal{C}(g) \rightarrow S(\mathbb{Z}, (c_i\mathbb{Z})_{i \in M})$ do seguinte modo: $\Psi(\vartheta) = [\bar{\vartheta}(i) + c_{\hat{\vartheta}(i)}\mathbb{Z}]_{i \in M}$. Em primeiro lugar, vamos mostrar que Ψ é um morfismo de semigrupos. Sejam $\vartheta, \tau \in \mathcal{C}(g)$. Tendo em conta que $\Psi(\vartheta) = [\bar{\vartheta}(i) + c_{\hat{\vartheta}(i)}\mathbb{Z}]_{i \in M}$ e $\Psi(\tau) = [\bar{\tau}(i) + c_{\hat{\tau}(i)}\mathbb{Z}]_{i \in M}$ obtemos

$$\Psi(\vartheta) \odot \Psi(\tau) = [\bar{\vartheta}(\hat{\tau}(i)) + \bar{\tau}(i) + c_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))}\mathbb{Z}]_{i \in M}.$$

Para cada $i \in M$, designemos por r_i o resto na divisão euclidiana de $\bar{\vartheta}(\hat{\tau}(i)) + \bar{\tau}(i)$ por $c_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))}$ e por q_i o respectivo quociente. Assim temos $\bar{\vartheta}(\hat{\tau}(i)) + \bar{\tau}(i) = q_i c_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))} + r_i$, $r_i < c_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))}$. Por outro lado temos

$$\vartheta\tau(x_i) = \vartheta g^{\bar{\tau}(i)}(x_{\hat{\tau}(i)}) = g^{\bar{\tau}(i)}\vartheta(x_{\hat{\tau}(i)}) = g^{\bar{\tau}(i)}(g^{\bar{\vartheta}(\hat{\tau}(i))}(x_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))})) = g^{\bar{\tau}(i) + \bar{\vartheta}(\hat{\tau}(i))}(x_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))}).$$

Por consequência temos $\vartheta\tau(x_i) = g^{r_i}(g^{q_i c_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))}}(x_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))})) = g^{r_i}(x_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))})$. Como $r_i < c_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))}$ então $r_i = \bar{\vartheta\tau}(i)$ e por conseguinte $\bar{\vartheta}(\hat{\tau}(i)) + \bar{\tau}(i) + c_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))}\mathbb{Z} = \bar{\vartheta\tau}(i) + c_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))}\mathbb{Z}$. Atendendo a que $\widehat{\vartheta\tau} = \hat{\vartheta}\hat{\tau}$ conclui-se que

$$\bar{\vartheta}(\hat{\tau}(i)) + \bar{\tau}(i) + c_{\hat{\vartheta}(\hat{\tau}(i))}\mathbb{Z} = \bar{\vartheta\tau}(i) + c_{\widehat{\vartheta\tau}(i)}\mathbb{Z}$$

e por conseguinte $\Psi(\vartheta) \odot \Psi(\tau) = \bar{\vartheta\tau}(i) + c_{\widehat{\vartheta\tau}(i)}\mathbb{Z} = \Psi(\vartheta\tau)$.

Mostremos que Ψ é injectiva. Sejam $\vartheta, \tau \in \mathcal{C}(g)$ tais que $\Psi(\vartheta) = \Psi(\tau)$, ou seja

$$[\bar{\vartheta}(i) + c_{\hat{\vartheta}(i)}\mathbb{Z}]_{i \in M} = [\bar{\tau}(i) + c_{\hat{\tau}(i)}\mathbb{Z}]_{i \in M}.$$

Como $\Psi(\vartheta) \in S_{\hat{\vartheta}} \cap S_{\hat{\tau}}$ então $\hat{\vartheta} = \hat{\tau}$. Para todo $i \in M$, temos $\bar{\vartheta}(i) + c_{\hat{\vartheta}(i)}\mathbb{Z} = \bar{\tau}(i) + c_{\hat{\vartheta}(i)}\mathbb{Z}$. Uma vez que $\bar{\vartheta}(i) < c_{\hat{\vartheta}(i)}$ e $\bar{\tau}(i) < c_{\hat{\vartheta}(i)}$ então conclui-se que $\bar{\vartheta}(i) = \bar{\tau}(i)$. Do exposto resulta que $\hat{\vartheta} = \hat{\tau}$ e $\bar{\vartheta} = \bar{\tau}$, consequentemente $\vartheta = \tau$.

Finamente, provemos que Ψ é sobrejectiva. Seja $\mathbf{y} = [s_i + c_{\alpha(i)}\mathbb{Z}]_{i \in M}$ onde $(s_i)_{i \in M}$ é uma família de elementos de $\mathbb{Z}$ e $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$. Para cada $i \in M$, designemos por t_i o resto na divisão euclidiana de s_i por $c_{\alpha(i)}$ e por u_i o respectivo quociente. Assim temos $s_i = u_i c_{\alpha(i)} + t_i$, $t_i < c_{\alpha(i)}$. Por consequência $\mathbf{y} = [t_i + c_{\alpha(i)}\mathbb{Z}]_{i \in M}$. Como $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$ então, para cada $i \in M$, temos $c_i\mathbb{Z} \subseteq c_{\alpha(i)}\mathbb{Z}$ ou seja $c_{\alpha(i)} | c_i$. Pelo teorema 3.2, existe um, e um só, $\vartheta \in \mathcal{C}(g)$ tal que, para qualquer $i \in M$,

$$\vartheta(x_i) = g^{t_i}(x_{\alpha_i}).$$

Usando o teorema 3.1 conclui-se que, para cada $i \in M$, $\vartheta(X_i) = X_{\alpha(i)}$ e por conseguinte $\hat{\vartheta} = \alpha$. Por outro lado, tendo em conta que $t_i < c_{\alpha(i)}$, conclui-se que $\bar{\vartheta}(i) = t_i$. Do exposto resulta que

$$\Psi(\vartheta) = [\bar{\vartheta}(i) + c_{\hat{\vartheta}(i)}\mathbb{Z}]_{i \in M} = [t_i + c_{\alpha(i)}\mathbb{Z}]_{i \in M} = \mathbf{y}. \quad \square$$

Seguidamente, vamos estabelecer condições necessárias e suficientes para que o semigrupo $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ seja regular.

Dada uma família $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in M}$ de subgrupos normais de um grupo G , designamos por $P_{\mathcal{H}}$ o conjunto ordenado $(\{H_i : i \in M\}; \subseteq)$.

Denominamos por *terno patológico* associado a $\mathcal{H}$, qualquer terno $(i, j, k) \in M^3$ tal que: i, j, k sejam mutuamente distintos e $H_i \subset H_j = H_k$.

O conceito de comprimento de um conjunto ordenado é relevante na formulação do próximo resultado. Diz-se que um conjunto ordenado $(P; \leq)$ tem *comprimento* n (simbolicamente $\ell(P) = n$, onde n é um inteiro não negativo) se existe em $(P; \leq)$ uma cadeia finita A tal que $|A| - 1 = n$ e, além disso, $|C| - 1 \leq n$ qualquer que seja a cadeia finita C do conjunto ordenado $(P; \leq)$.

Designamos por *dimensão* de $\mathcal{H}$, e denotamos por $\dim \mathcal{H}$, o comprimento do conjunto ordenado $P_{\mathcal{H}}$; no caso em que tal comprimento existe.

Teorema 3.6 *São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é regular;
- (2) $\dim \mathcal{H} \leq 1$ e não existe nenhum terno patológico associado a $\mathcal{H}$;
- (3) $I_{\mathcal{H}}$ é regular.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) : Suponhamos que $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é regular. Mostraremos que se (2) não se verifica então temos uma contradição. Se (2) não se verifica então existem $i, j, k \in M$, mutuamente distintos, tais que

$$H_i \subset H_j \subseteq H_k.$$

Consideremos a aplicação $\alpha : M \rightarrow M$ definida do seguinte modo:

$$\alpha(t) = \begin{cases} j & \text{se } t = i; \\ k & \text{se } t = j; \\ t & \text{se } t \notin \{i, j\}. \end{cases}$$

Mostremos que $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$. Dado $t \in M$; se $t \notin \{i, j\}$ então $\alpha(t) = t$ e por conseguinte $H_t \subseteq H_{\alpha(t)}$; se $t = i$ então $\alpha(t) = j$ portanto $H_t = H_i \subset H_j = H_{\alpha(t)}$; se $t = j$ então $\alpha(t) = k$ e por consequência $H_t = H_j \subseteq H_k = H_{\alpha(t)}$.

Consideremos o elemento $\mathbf{x} = [1_G H_{\alpha(t)}]_{t \in M}$. Usando a hipótese (1), conclui-se que existe $\mathbf{y} = [g_t H_{\beta(t)}]_{t \in M}$ tal que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, consequentemente,

$$[g_{\alpha(t)} H_{\alpha\beta\alpha(t)}]_{t \in M} = [1_G H_{\alpha(t)}]_{t \in M}.$$

Atendendo a que $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta\alpha} \cap S_{\alpha}$ conclui-se que $\alpha\beta\alpha = \alpha$ e por conseguinte

$$j = \alpha(i) = \alpha\beta\alpha(i) = \alpha\beta(j);$$

assim temos $\beta(j) = i$. Como $\beta \in I_{\mathcal{H}}$ então $H_j \subseteq H_{\beta(j)} = H_i$, obtendo assim a contradição pretendida.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Suponhamos que (2) se verifica. Seja α um elemento arbitrário de $I_{\mathcal{H}}$. Observe-mos, primeiramente, que:

- (a) Para todo $i \in M$, se $H_i \subset H_{\alpha(i)}$ então $\alpha^2(i) = \alpha(i)$.

Com efeito, tendo em conta a hipótese e o facto de $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$, conclui-se que

$$H_i \subset H_{\alpha(i)} \subseteq H_{\alpha^2(i)};$$

como $\dim \mathcal{H} \leq 1$ então temos

$$H_i \subset H_{\alpha(i)} = H_{\alpha^2(i)}.$$

É claro que $i \neq \alpha(i)$ e $i \neq \alpha^2(i)$, consequentemente, $\alpha(i) = \alpha^2(i)$; caso contrário $(i, \alpha(i), \alpha^2(i))$ seria um terno patológico associado a $\mathcal{H}$.

Designemos por A o conjunto $\text{Im } \alpha$. Tendo em consideração o axioma da escolha, existe uma aplicação $\pi : A \longrightarrow M$ tal que $\alpha\pi = \text{id}_A$. Consideremos o conjunto

$$A_1 = \{j \in A : H_j = H_{\pi(j)}\}.$$

Então temos a seguinte propriedade:

(b) Para todo $j \in A \setminus A_1$, $\alpha(j) = j$.

Efectivamente, para cada $j \in A$, temos $H_{\pi(j)} \subseteq H_{\alpha\pi(j)} = H_j$. Se $j \in A \setminus A_1$ então $H_j \neq H_{\pi(j)}$ e por conseguinte $H_{\pi(j)} \subset H_{\alpha\pi(j)}$. Por (a) conclui-se que $\alpha^2\pi(j) = \alpha\pi(j)$, consequentemente, $\alpha(j) = j$ porque $\alpha\pi = \text{id}_A$.

Consideremos a aplicação $\beta : M \longrightarrow M$ definida do seguinte modo:

$$\beta(j) = \begin{cases} j & \text{se } j \in M \setminus A_1; \\ \pi(j) & \text{se } j \in A_1. \end{cases}$$

É claro, por definição de A_1 , que $H_j \subseteq H_{\beta(j)}$, para todo $j \in A_1$. Portanto $\beta \in I_{\mathcal{H}}$. Finalmente, mostremos que $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Seja $i \in M$. Se $\alpha(i) \in A_1$ então $\beta\alpha(i) = \pi\alpha(i)$. Consequentemente, $\alpha\beta\alpha(i) = \alpha\pi\alpha(i) = \alpha(i)$. Se $\alpha(i) \notin A_1$ então $\beta\alpha(i) = \alpha(i)$. Por outro lado, aplicando (b), temos $\alpha^2(i) = \alpha(i)$ e por conseguinte $\alpha\beta\alpha(i) = \alpha^2(i) = \alpha(i)$. Do exposto resulta que $\alpha\beta\alpha = \alpha$ e por conseguinte $I_{\mathcal{H}}$ é regular.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Suponhamos que $I_{\mathcal{H}}$ é regular. Seja $\mathbf{x} = [g_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M}$ um elemento arbitrário de $S(G, \mathcal{H})$. Como $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$ então existe $\beta \in I_{\mathcal{H}}$ tal que $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Consideremos o seguinte elemento de $S(G, \mathcal{H})$

$$\mathbf{y} = [g_{\beta(i)}^{-1} H_{\beta(i)}]_{i \in M}.$$

Assim temos $\mathbf{y} \odot \mathbf{x} = [g_{\beta\alpha(i)}^{-1} g_i H_{\beta\alpha(i)}]_{i \in M}$ portanto

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \odot \mathbf{x} = [g_{\beta\alpha(i)} g_{\beta\alpha(i)}^{-1} g_i H_{\alpha\beta\alpha(i)}]_{i \in M} = [g_i H_{\alpha\beta\alpha(i)}]_{i \in M} = [g_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M} = \mathbf{x}.$$

Dos raciocínios acima descritos conclui-se que $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é regular. $\square$

Por aplicação dos teoremas 3.5 e 3.6, podemos estabelecer condições necessárias e suficientes para que o semigrupo dos endomorfismos de uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito seja regular. Para cumprir tal objectivo precisamos de introduzir alguma terminologia.

Seja X um conjunto não vazio e $g : X \rightarrow X$ uma bijecção. Em conformidade com convenções introduzidas na página 49, consideramos o conjunto $\Pi_g = \{c_i : 1 \leq i \leq m\}$ ordenado com a relação de divisibilidade. Chamamos *dimensão* de g , simbolicamente $\dim g$, ao comprimento do conjunto ordenado $(\Pi_g; |)$. Neste contexto definimos $K_g = \{i : c_i \neq 1\}$.

Denominamos por *terno patológico* associado a g qualquer terno (i, j, k) , de elementos de $\{1, \dots, m\}$, tal que i, j, k sejam mutuamente distintos, $c_k = c_j | c_i$ e $c_j \neq c_i$.

Teorema 3.7 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito e $(X; g)$ o respectivo espaço dual. São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $\text{End}(L; f)$ é regular;
- (2) $\dim g \leq 1$ e não existe nenhum terno patológico associado a g .

Demonstração Pelo teorema 1.11 $\text{End}(L; f)$ é anti-isomorfo a $\Lambda(X; g)$. Como $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito então $\Lambda(X; g) = \mathcal{C}(g)$.

Consideremos o grupo abeliano $\mathbb{Z}$, com a adição usual. Seja $\mathcal{H} = (c_i \mathbb{Z})_{i \in \{1, \dots, m\}}$. Observemos que $\dim \mathcal{H} = \dim g$. Por outro lado, (i, j, k) é um terno patológico associado a g se, e só se, (i, j, k) é um terno patológico associado a $\mathcal{H}$. Assim, o resultado que pretendemos mostrar é consequência imediata dos teoremas 3.5 e 3.6. $\square$

Exemplo 3.2 Seja $(L; f)$ a álgebra de Ockham de tipo booleano finito cujo espaço dual $(X; g)$ se descreve do modo seguinte: $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \{x_2\}$, $X_3 = \{x_3, g(x_3)\}$. Neste caso $|X| = 4$, $c_1 = c_2 = 1$ e $c_3 = 2$. Como $(3, 2, 1)$ é um terno patológico associado a g então conclui-se, pelo teorema 3.7, que $\text{End}(L; f)$ não é regular. Como consequência do corolário 2 do teorema 3.2 temos $|\text{End}(L; f)| = 16$.

Um semigrupo S diz-se *ortodoxo* se S é regular e os idempotentes formam um subsemigrupo de S .

Os resultados que a seguir se apresentam são relevantes para averiguar em que condições o semigrupo $S(G, \mathcal{H})$ é ortodoxo.

Teorema 3.8 *Se $\mathbf{x} = [g_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M}$ é um elemento qualquer de $S(G, \mathcal{H})$ então são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $\mathbf{x}$ é idempotente;
- (2) α é idempotente e $g_{\alpha(i)} \in H_{\alpha(i)}$, para todo $i \in M$.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) : Suponhamos que x é idempotente. Então temos

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{x} = [g_{\alpha(i)} g_i H_{\alpha\alpha(i)}]_{i \in M} = \mathbf{x} = [g_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M}.$$

Por consequência $\mathbf{x} \in S_\alpha \cap S_{\alpha^2}$, logo $\alpha^2 = \alpha$. Por outro lado, conclui-se que: para todo $i \in M$,

$$g_{\alpha(i)} g_i H_{\alpha(i)} = g_i H_{\alpha(i)}.$$

Consequentemente, $g_i^{-1} g_{\alpha(i)} g_i \in H_{\alpha(i)}$. Como $H_{\alpha(i)}$ é subgrupo normal de G então deduz-se que $g_{\alpha(i)} \in H_{\alpha(i)}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Dado $i \in M$; temos, por hipótese, que $g_{\alpha(i)} \in H_{\alpha(i)}$. Atendendo a que $H_{\alpha(i)}$ é subgrupo normal de G , infere-se que $g_i^{-1} g_{\alpha(i)} g_i \in H_{\alpha(i)}$ e por conseguinte $g_{\alpha(i)} g_i H_{\alpha(i)} = g_i H_{\alpha(i)}$. Por outro lado temos $\alpha^2 = \alpha$, consequentemente

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{x} = [g_{\alpha(i)} g_i H_{\alpha^2(i)}]_{i \in M} = [g_{\alpha(i)} g_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M} = [g_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M} = \mathbf{x}. \quad \square$$

Teorema 3.9 *Se existem $i, j \in M$ tais que $i \neq j$ e $H_i = H_j \neq G$ então existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S(G, \mathcal{H})$ tais que: $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são idempotentes mas $\mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ não é idempotente.*

Demonstração Consideremos a aplicação $\alpha : M \rightarrow M$ definida do seguinte modo:

$$\alpha(t) = \begin{cases} j & \text{se } t = i; \\ t & \text{se } t \neq i. \end{cases}$$

É claro que $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$ pois $H_i = H_j = H_{\alpha(i)}$; também é evidente que $\alpha^2 = \alpha$. Seja $(u_t)_{t \in M}$ a família, de elementos de G , definida por: $u_t = 1_G$. Consideremos o elemento, de $S(G, \mathcal{H})$,

$\mathbf{x} = [u_t H_{\alpha(t)}]_{t \in M}$. Atendendo a que, para todo $t \in M$, $g_{\alpha(t)} = 1_G \in H_{\alpha(t)}$ então, fazendo uso do teorema 3.8, conclui-se que $\mathbf{x}$ é um idempotente.

Defina-se a aplicação $\beta : M \longrightarrow M$ do modo seguinte:

$$\beta(t) = \begin{cases} i & \text{se } t = j; \\ t & \text{se } t \neq j. \end{cases}$$

Como $H_j = H_i = H_{\beta(j)}$ então podemos inferir que $\beta \in I_{\mathcal{H}}$; além disso $\beta^2 = \beta$.

Fixemos um elemento z em $G \setminus H_j$. Consideremos a família, de elementos de G , $(v_t)_{t \in M}$ definida por:

$$v_t = \begin{cases} z & \text{se } t = j; \\ 1_G & \text{se } t \neq j. \end{cases}$$

Seja $\mathbf{y} = [v_t H_{\beta(t)}]_{t \in M}$. Dado $t \in M$; se $t \neq j$ então $\beta(t) = t$, consequentemente, $v_{\beta(t)} = v_t = 1_G \in H_{\beta(t)}$; se $t = j$ então $\beta(t) = i$ e por conseguinte $v_{\beta(t)} = v_i = 1_G \in H_{\beta(t)}$. Em qualquer dos casos conclui-se que $v_{\beta(t)} \in H_{\beta(t)}$. Por aplicação do teorema 3.8 temos que $\mathbf{y}$ é idempotente.

Para mostrar que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ não é idempotente observemos que

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = [u_{\beta(t)} v_t H_{\alpha\beta(t)}]_{t \in M} = [v_t H_{\alpha\beta(t)}]_{t \in M}$$

e $v_{\alpha\beta(j)} = v_j = z \notin H_j = H_{\alpha\beta(j)}$. Em face do exposto e por aplicação do teorema 3.8 conclui-se que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ não é idempotente. $\square$

Teorema 3.10 *Se $|M| \geq 3$ e existem $i, j \in M$ tais que $i \neq j$ e $H_i = H_j = G$ então existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S(G, \mathcal{H})$ tais que: $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são idempotentes mas $\mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ não é idempotente.*

Demonstração Como $|M| \geq 3$ então podemos fixar um k em M tal que $k \notin \{i, j\}$. Consideremos a aplicação $\alpha : M \longrightarrow M$ definida do modo seguinte:

$$\alpha(t) = \begin{cases} i & \text{se } t = k; \\ t & \text{se } t \neq k. \end{cases}$$

É óbvio que $\alpha^2 = \alpha$. Observando que $H_k \subseteq G = H_i = H_{\alpha(k)}$ conclui-se que $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$. Consideremos a família $(u_t)_{t \in M}$, de elementos de G , definida por: $u_t = 1_G$. Seja $\mathbf{x} = [u_t H_{\alpha(t)}]_{t \in M}$. Por aplicação do teorema 3.8 resulta que $\mathbf{x}$ é idempotente.

Consideremos a aplicação $\beta : M \longrightarrow M$ definida do modo seguinte:

$$\beta(t) = \begin{cases} j & \text{se } t = i; \\ t & \text{se } t \neq i. \end{cases}$$

Como $H_i = H_j = H_{\beta(i)}$ então $\beta \in I_{\mathcal{H}}$, além disso é claro que $\beta^2 = \beta$. Seja $\mathbf{y} = [u_t H_{\alpha(t)}]_{t \in M}$.

Aplicando o teorema 3.8 conclui-se que $\mathbf{y}$ é idempotente.

Por outro lado $\alpha\beta\alpha\beta(k) = j$ e $\alpha\beta(k) = i$, consequentemente, $\alpha\beta$ não é idempotente e por conseguinte, pelo teorema 3.8, conclui-se que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ não é idempotente. $\square$

Para cada $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$ definimos o conjunto

$$Q_{\alpha} = \{i \in M : \alpha(i) = i\}.$$

Consideremos o conjunto $\Delta_{\mathcal{H}}$ definido do seguinte modo:

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \{i \in M : H_i \text{ é elemento maximal de } P_{\mathcal{H}}\}.$$

Dizemos que uma família $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in M}$ é *estrita* se $H_i \neq H_j$, para quaisquer $i \neq j$.

Teorema 3.11 *Se $\mathcal{H}$ é estrita e o conjunto ordenado $P_{\mathcal{H}}$ tem a propriedade de cadeia ascendente então temos:*

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \bigcap_{\alpha \in I_{\mathcal{H}}} Q_{\alpha}.$$

Demonstração Seja $i \in \Delta_{\mathcal{H}}$. Dado $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$ temos

$$H_i \subseteq H_{\alpha(i)}.$$

Por definição de $\Delta_{\mathcal{H}}$, H_i é um elemento maximal de $P_{\mathcal{H}}$. Consequentemente $H_i = H_{\alpha(i)}$. Como $\mathcal{H}$ é estrita então $i = \alpha(i)$ e por conseguinte $i \in Q_{\alpha}$. Do exposto resulta que

$$\Delta_{\mathcal{H}} \subseteq \bigcap_{\alpha \in I_{\mathcal{H}}} Q_{\alpha}.$$

Antes de proceder à demonstração da outra inclusão observemos que: no caso de $\Delta_{\mathcal{H}} = M$ temos, trivialmente,

$$\bigcap_{\alpha \in I_{\mathcal{H}}} Q_{\alpha} \subseteq \Delta_{\mathcal{H}}.$$

Por consequência podemos supor, sem perda de generalidade, que $\Delta_{\mathcal{H}} \neq M$. Como, por hipótese, $P_{\mathcal{H}}$ tem a propriedade de cadeia ascendente então, atendendo à definição de $\Delta_{\mathcal{H}}$, conclui-se que

$$(\forall i \in M \setminus \Delta_{\mathcal{H}})(\exists j \in \Delta_{\mathcal{H}}) H_i \subseteq H_j.$$

Tendo em consideração o axioma da escolha, podemos garantir a existência de uma aplicação $\pi : (M \setminus \Delta_{\mathcal{H}}) \rightarrow \Delta_{\mathcal{H}}$ tal que: $H_i \subseteq H_{\pi(i)}$, para todo $i \in M \setminus \Delta_{\mathcal{H}}$.

Consideremos a aplicação $\xi : M \rightarrow M$ definida do modo seguinte:

$$\xi(i) = \begin{cases} i & \text{se } i \in \Delta_{\mathcal{H}}; \\ \pi(i) & \text{se } i \notin \Delta_{\mathcal{H}}. \end{cases}$$

Neste contexto é claro que $\xi \in I_{\mathcal{H}}$. Mostremos que

$$Q_{\xi} \subseteq \Delta_{\mathcal{H}}.$$

Suponhamos, com vista a uma contradição, que existe $i \in Q_{\xi}$ tal que $i \in M \setminus \Delta_{\mathcal{H}}$. Por consequência temos $\xi(i) = i$ e $\xi(i) = \pi(i)$, o que é absurdo porque $\pi(i) \in \Delta_{\mathcal{H}}$. Do exposto resulta que

$$\bigcap_{\alpha \in I_{\mathcal{H}}} Q_{\alpha} \subseteq Q_{\xi} \subseteq \Delta_{\mathcal{H}}.$$

Teorema 3.12 *Se $\dim \mathcal{H} \leq 1$ e $\mathcal{H}$ é estrita então, para todo $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$*

$$\alpha(M \setminus Q_{\alpha}) \subseteq \Delta_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração Seja $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$. Dado $i \in M \setminus Q_{\alpha}$, temos $\alpha(i) \neq i$. Atendendo que $\mathcal{H}$ é estrita conclui-se que $H_i \not\subseteq H_{\alpha(i)}$. Consequentemente, $H_i \subset H_{\alpha(i)}$. Como $\dim \mathcal{H} \leq 1$ então $H_{\alpha(i)}$ é elemento maximal de $P_{\mathcal{H}}$ e por conseguinte $\alpha(i) \in \Delta_{\mathcal{H}}$. $\square$

Teorema 3.13 *Se $\dim \mathcal{H} \leq 1$ e $\mathcal{H}$ é estrita então, quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in I_{\mathcal{H}}$*

$$Q_{\alpha} \cap Q_{\beta} = Q_{\alpha\beta}.$$

Demonstração Sejam $\alpha, \beta \in I_{\mathcal{H}}$. Se $i \in Q_{\alpha} \cap Q_{\beta}$ então $\alpha(i) = i$, $\beta(i) = i$ e por conseguinte $\alpha\beta(i) = \alpha(i) = i$; portanto $i \in Q_{\alpha\beta}$. Fica assim provado que $Q_{\alpha} \cap Q_{\beta} \subseteq Q_{\alpha\beta}$. Com o propósito de demonstrar a outra inclusão, consideremos $i \in Q_{\alpha\beta}$. Em primeiro lugar vamos mostrar

que $i \in Q_\beta$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que $i \notin Q_\beta$. Pelo teorema 3.12 temos $\beta(i) \in \Delta_{\mathcal{H}}$. Fazendo uso do teorema 3.11, deduz-se $\beta(i) \in Q_\alpha$. Portanto temos: $\alpha\beta(i) = \beta(i) \neq i$, o que é absurdo. Assim se conclui que $i \in Q_\beta$, consequentemente, $\beta(i) = i$. Como, por hipótese, $\alpha\beta(i) = i$ então temos $\alpha(i) = i$. Do exposto resulta que $Q_{\alpha\beta} \subseteq Q_\alpha \cap Q_\beta$. $\square$

Teorema 3.14 *Se $\mathcal{H}$ é estrita e $\dim \mathcal{H} \leq 1$ então $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é ortodoxo.*

Demonstração Suponhamos que $\mathcal{H}$ é estrita e $\dim \mathcal{H} \leq 1$. Como $\mathcal{H}$ é estrita então não existe nenhum terno patológico associado a $\mathcal{H}$. Pelo teorema 3.6 temos que $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é regular.

Sejam $\mathbf{x} = [s_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M}$, $\mathbf{y} = [t_i H_{\beta(i)}]_{i \in M}$ idempotentes de $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$. Para demonstrar que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ é idempotente é relevante a seguinte observação:

$$(a) \quad \beta\alpha\beta = \alpha\beta.$$

Dado $i \in M$. Se $i \in Q_{\alpha\beta}$ então $\alpha\beta(i) = i$, Pelo teorema 3.13, temos $\beta(i) = i$; donde resulta trivialmente $\alpha\beta(i) = i = \beta\alpha\beta(i)$.

No caso de $i \notin Q_{\alpha\beta}$ então pelo teorema 3.12, temos $\alpha\beta(i) \in \Delta_{\mathcal{H}}$. Aplicando o teorema 3.11 conclui-se que $\alpha\beta(i) \in Q_\beta$ e por conseguinte $\alpha\beta(i) = \beta\alpha\beta(i)$. Do exposto resulta que $\beta\alpha\beta = \alpha\beta$ e por conseguinte $\alpha\beta$ é idempotente.

Atendendo a que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = [s_{\beta(i)} t_i H_{\alpha\beta(i)}]_{i \in M}$ e tendo em conta o teorema 3.8 resta mostrar que $s_{\beta\alpha\beta(i)} t_{\alpha\beta(i)} \in H_{\alpha\beta(i)}$, para todo $i \in M$. Com efeito, dado $i \in M$, pela observação (a) temos $s_{\beta\alpha\beta(i)} t_{\alpha\beta(i)} = s_{\alpha\beta(i)} t_{\alpha\beta(i)}$. Como $\mathbf{y}$ é idempotente, pelo teorema 3.8, temos $t_{\beta(\alpha\beta(i))} \in H_{\beta(\alpha\beta(i))}$. Por (a) resulta $t_{\alpha\beta(i)} \in H_{\alpha\beta(i)}$. Atendendo a que $\mathbf{x}$ é idempotente, pelo teorema 3.8, temos $s_{\alpha(\beta(i))} \in H_{\alpha(\beta(i))}$. Por consequência $s_{\alpha\beta(i)} t_{\alpha\beta(i)} \in H_{\alpha\beta(i)}$. Do exposto resulta que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ é idempotente. $\square$

Aplicando os teoremas 3.14, 3.10 e 3.9 obtemos uma condição necessária e suficiente para que $S(G, \mathcal{H})$ seja ortodoxo; no caso de $|M| \geq 3$.

Teorema 3.15 *Se $|M| \geq 3$ então são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é ortodoxo;
- (2) $\mathcal{H}$ é estrita e $\dim \mathcal{H} \leq 1$.

Demonstração $(1) \Rightarrow (2)$: Suponhamos que $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é ortodoxo. Pelo teorema 3.6 temos $\dim \mathcal{H} \leq 1$. Aplicando os teoremas 3.9 e 3.10 conclui-se que $\mathcal{H}$ é estrita. A outra implicação é consequência imediata do teorema 3.14. $\square$

Tendo em consideração o teorema 3.15, é natural estudar o caso em que $|M| \leq 2$.

Suponhamos que $|M| = 1$. Seja l o único elemento de M . Neste contexto, verifica-se facilmente que $I_{\mathcal{H}} = \{\text{id}_M\}$ e por consequência $S(G, \mathcal{H}) = S_{\text{id}_M} \simeq G/H_l$. Assim se conclui que $S(G, \mathcal{H})$ é um grupo; no caso de $|M| = 1$.

Suponhamos que $|M| = 2$. Designemos por l_1, l_2 os elementos de M . Nesta conformidade, é claro que $\dim \mathcal{H} \leq 1$. No caso de $H_{l_1} \neq H_{l_2}$ temos que $\mathcal{H}$ é estrita. Aplicando o teorema 3.14 conclui-se que $S(G, \mathcal{H})$ é ortodoxo.

No caso de $|M| = 2$ e $H_{l_1} = H_{l_2}$, temos o seguinte.

Teorema 3.16 *Se $M = \{l_1, l_2\}$, $|M| = 2$ e $H_{l_1} = H_{l_2}$ então são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é ortodoxo;
- (2) $H_{l_1} = G$.

Demonstração $(1) \Rightarrow (2)$: Suponhamos que $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é ortodoxo. Por aplicação do teorema 3.9 conclui-se que $H_{l_1} = G$.

$(2) \Rightarrow (1)$: Suponhamos que $H_{l_1} = G$. Neste contexto temos $H_{l_1} = H_{l_2} = G$. Consideremos a aplicação $\psi : S(G, \mathcal{H}) \rightarrow I_{\mathcal{H}}$ definida por: $\psi([s_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M}) = \alpha$. Nesta conformidade ψ é um isomorfismo de semigrupos.

Para cada $i \in \{1, 2\}$ consideremos a aplicação $\alpha_i : M \rightarrow M$ definida por: $\alpha_i(t) = l_i$. Seja $\beta : M \rightarrow M$ definida do modo seguinte: $\beta(l_1) = l_2, \beta(l_2) = l_1$.

Como $H_{l_1} = H_{l_2}$ então temos $I_{\mathcal{H}} = \mathcal{T}(M) = \{\text{id}, \beta, \alpha_1, \alpha_2\}$. Consequentemente o semigrupo $I_{\mathcal{H}}$ pode ser descrito pela seguinte tabela Cayley

	id	β	α_1	α_2
id	id	β	α_1	α_2
β	β	id	α_2	α_1
α_1	α_1	α_1	α_1	α_1
α_2	α_2	α_2	α_2	α_2

Facilmente se verifica que $I_{\mathcal{H}}$ é ortodoxo. Atendendo a que $S(G, \mathcal{H}) \simeq I_{\mathcal{H}}$ conclui-se que $S(G, \mathcal{H})$ é ortodoxo. $\square$

No que se segue, vamos estabelecer uma condição necessária e suficiente para que o semigrupo dos endomorfismos de uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito seja ortodoxo.

Teorema 3.17 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito e $(X; g)$ o respectivo espaço dual. Se $|X| \geq 3$ então são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $\text{End}(L; f)$ é ortodoxo;
- (2) $\dim g \leq 1$ e $c_i \neq c_j$, quaisquer que sejam i, j tais que $i \neq j$.

Demonstração Pelo teorema 1.11 $\text{End}(L; f)$ é anti-isomorfo a $\Lambda(X; g)$. Como $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito então $\Lambda(X; g) = \mathcal{C}(g)$. Seja $\mathcal{H} = (c_i \mathbb{Z})_{i \in \{1, \dots, m\}}$. Por aplicação do teorema 3.5 temos que $\text{End}(L; f)$ é anti-isomorfo a $S(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$.

Mostremos que (1) $\Rightarrow$ (2). Suponhamos que $\text{End}(L; f)$ é ortodoxo. Então $S(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$ é ortodoxo e tendo em consideração o teorema 3.6 conclui-se que $\dim g \leq 1$. Como consequência dos teoremas 3.9 e 3.10 temos que os números c_i são mutuamente distintos.

A implicação remanescente é consequência imediata do teorema 3.14. $\square$

Se $|X| = 1$ então $\text{End}(L; f)$ reduz-se ao grupo trivial. No caso em que $|X| = 2$ existem duas possibilidades:

(1) g tem apenas uma órbita (i. e. $m = 1$ e $c_1 = 2$) e por conseguinte $\text{End}(L; f)$ é um grupo cíclico de ordem 2.

(2) g tem duas órbitas (i. e. $m = 2$ e $c_1 = c_2 = 1$); neste contexto temos $g = \text{id}_X$ e por consequência $\text{End}(L; f)$ é ortodoxo, pois $\Lambda(X; g) = \mathcal{T}(X)$ é ortodoxo no caso de $|X| = 2$.

Exemplo 3.3 Seja $(L; f)$ a álgebra de Ockham de tipo booleano finito cujo espaço dual $(X; g)$ se descreve do modo seguinte: $X_1 = \{x_1, g(x_1)\}$, $X_2 = \{x_2, g(x_2)\}$, $X_3 = \{x_3\}$. Neste caso $|X| = 5$, $c_1 = c_2 = 2$ e $c_3 = 1$. Verifica-se facilmente que não existe nenhum terno patológico associado a g . Como $\dim g = 1$ então conclui-se, pelo teorema 3.7, que $\text{End}(L; f)$ é regular. Aplicando o teorema 3.17 tira-se que $\text{End}(L; f)$ não é ortodoxo. Por consequência do corolário 2 do teorema 3.2 tem-se $|\text{End}(L; f)| = 25$.

Para averiguar em que condições $S(G, \mathcal{H})$ é um semigrupo inverso precisamos de estabelecer alguns resultados preliminares.

Teorema 3.18 *Se existem $i, j \in M$ tais que $i \neq j$ e $H_i = H_j$ então existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S(G, \mathcal{H})$ tais que: $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são idempotentes e $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \neq \mathbf{y} \odot \mathbf{x}$.*

Demonstração Consideremos a aplicação $\alpha : M \rightarrow M$ definida do seguinte modo:

$$\alpha(t) = \begin{cases} i & \text{se } t \in \{i, j\}; \\ t & \text{se } t \notin \{i, j\}. \end{cases}$$

É claro que $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$, pois $H_j = H_i = H_{\alpha(j)}$. Também é evidente que $\alpha^2 = \alpha$. Seja $(u_t)_{t \in M}$ a família, de elementos de G , definida por: $u_t = 1_G$. Consideremos o elemento, de $S(G, \mathcal{H})$, $\mathbf{x} = [u_t H_{\alpha(t)}]_{t \in M}$. Por aplicação do teorema 3.8 conclui-se que $\mathbf{x}$ é idempotente.

Defina-se a aplicação $\beta : M \rightarrow M$ do modo seguinte:

$$\beta(t) = \begin{cases} j & \text{se } t \in \{i, j\}; \\ t & \text{se } t \notin \{i, j\}. \end{cases}$$

Como $H_i = H_j = H_{\beta(i)}$ então podemos inferir que $\beta \in I_{\mathcal{H}}$. Além disso $\beta^2 = \beta$. Consideremos o elemento, de $S(G, \mathcal{H})$, $\mathbf{y} = [u_t H_{\beta(t)}]_{t \in M}$; pelo teorema 3.8 tira-se que $\mathbf{y}$ é um idempotente.

Por outro lado temos que $\alpha\beta(i) = i$ e $\beta\alpha(i) = j$. Consequentemente, $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ e por conseguinte $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \neq \mathbf{y} \odot \mathbf{x}$. $\square$

Teorema 3.19 *Se existem $i, j \in M$ tais que $i \neq j$ e $H_j \subseteq H_i \neq G$ então existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S(G, \mathcal{H})$ tais que: $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são idempotentes e $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \neq \mathbf{y} \odot \mathbf{x}$.*

Demonstração Consideremos a aplicação $\alpha : M \rightarrow M$ definida do modo seguinte:

$$\alpha(t) = \begin{cases} i & \text{se } t \in \{i, j\}; \\ t & \text{se } t \notin \{i, j\}. \end{cases}$$

É óbvio que $\alpha^2 = \alpha$. Observando que $H_j \subseteq H_i = H_{\alpha(j)}$ conclui-se que $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$. Consideremos a família $(u_t)_{t \in M}$, de elementos de G , definida por $u_t = 1_G$. Seja $\mathbf{x} = [u_t H_{\alpha(t)}]_{t \in M}$, aplicando o teorema 3.8 temos que $\mathbf{x}$ é idempotente.

Fixemos um elemento z em $G \setminus H_i$. Consideremos a família, de elementos de G , $(v_t)_{t \in M}$

definida por:

$$v_t = \begin{cases} z & \text{se } t = j; \\ 1_G & \text{se } t \neq j. \end{cases}$$

Seja $\mathbf{y} = [v_t H_{\alpha(t)}]_{t \in M}$. Se $t \neq j$ então $\alpha(t) = t$ e $v_{\alpha(t)} = v_t = 1_G \in H_{\alpha(t)}$. Se $t = j$ então $\alpha(t) = i$ e por conseguinte $v_{\alpha(t)} = v_i = 1_G \in H_{\alpha(t)}$. Em qualquer dos casos conclui-se que $v_{\alpha(t)} \in H_{\alpha(t)}$. Por aplicação do teorema 3.8 temos que $\mathbf{y}$ é idempotente.

Como $v_j = z \notin H_i = H_{\alpha(j)}$ e $v_{\alpha(j)} = v_i = 1_G$ então temos $v_j H_{\alpha(j)} \neq v_{\alpha(j)} H_{\alpha(j)}$. Atendendo a que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = [u_{\alpha(t)} v_t H_{\alpha\alpha(t)}]_{t \in M} = [v_t H_{\alpha(t)}]_{t \in M}$ e $\mathbf{y} \odot \mathbf{x} = [v_{\alpha(t)} u_t H_{\alpha\alpha(t)}]_{t \in M} = [v_{\alpha(t)} H_{\alpha(t)}]_{t \in M}$, conclui-se que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \neq \mathbf{y} \odot \mathbf{x}$. $\square$

Teorema 3.20 *São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $S(G, \mathcal{H})$ é grupo;
- (2) $P_{\mathcal{H}}$ é anticadeia e $\mathcal{H}$ é estrita;
- (3) $I_{\mathcal{H}} = \{\text{id}_M\}$ e $\mathcal{H}$ é estrita;
- (4) $S(G, \mathcal{H}) \simeq \bigtimes_{i \in M} G/H_i$.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) : Suponhamos que $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é grupo. Pelo teorema 3.18 temos que $\mathcal{H}$ é estrita.

No caso de $|M| = 1$ é claro que $P_{\mathcal{H}}$ é anticadeia. Consequentemente, para provar que $P_{\mathcal{H}}$ é anticadeia podemos supor, sem perda de generalidade, que $|M| > 1$. Mostremos, primeiramente, que:

$$(a) \quad (\forall i \in M) \quad H_i \neq G.$$

Suponhamos, com vista a uma contradição, que existe $i \in M$ tal que $H_i = G$. Como $|M| > 1$ então existe $k \in M$ tal que $k \neq i$. Defina-se a aplicação $\alpha : M \rightarrow M$ do modo seguinte

$$\alpha(t) = \begin{cases} i & \text{se } t \in \{i, k\}; \\ t & \text{se } t \notin \{i, k\}. \end{cases}$$

Consideremos a família $(u_t)_{t \in M}$, de elementos de G , definida por $u_t = 1_G$. Seja $\mathbf{x} = [u_t H_{\alpha(t)}]_{t \in M}$. Pelo teorema 3.8 temos que $\mathbf{x}$ é idempotente. Por outro lado sabemos que $\mathbf{1} = [u_t H_t]_{t \in M}$ é a

identidade de $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$. Atendendo a que $\mathcal{H}$ é estrita e $k \neq i$ conclui-se que $H_k \neq H_i$. Assim temos $u_k H_k \neq u_k H_{\alpha(k)}$ e por conseguinte $\mathbf{x} \neq 1$, o que é absurdo porque $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é grupo.

Finalmente, mostremos que $P_{\mathcal{H}}$ é anticadeia. Suponhamos, com vista a uma contradição, que existem $i, j \in M$ tais que $H_j \subset H_i$. Usando (a) conclui-se que $H_i \neq G$ e por conseguinte, aplicando o teorema 3.19, obtém-se a contradição pretendida.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Suponhamos que $P_{\mathcal{H}}$ é anticadeia e $\mathcal{H}$ é estrita. Seja $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$. Dado $i \in M$, temos $H_i \subseteq H_{\alpha(i)}$. Atendendo a que $P_{\mathcal{H}}$ é anticadeia conclui-se que $H_i = H_{\alpha(i)}$. Tendo em conta que $\mathcal{H}$ é estrita obtém-se $i = \alpha(i)$. Portanto $\alpha = \text{id}_M$.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Suponhamos que $I_{\mathcal{H}} = \{\text{id}_M\}$ e $\mathcal{H}$ é estrita. Então temos $S(X, \mathcal{H}) = S_{\text{id}_M}$. Consideremos a aplicação $\Psi : S_{\text{id}_M} \longrightarrow \prod_{i \in M} G/H_i$ definida do seguinte modo:

$$\Psi([s_i H_i]_{i \in M}) = (s_i H_i)_{i \in M}.$$

O nosso objectivo é mostrar que Ψ é um isomorfismo de semigrupos. Em primeiro lugar mostremos que Ψ é morfismo. Sejam $\mathbf{x} = [s_i H_i]_{i \in M}$, $\mathbf{y} = [t_i H_i]_{i \in M}$ elementos arbitrários de S_{id_M} . É claro que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = [s_i t_i H_i]_{i \in M}$ e por consequência

$$\Psi(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = (s_i t_i H_i)_{i \in M} = (t_i H_i)_{i \in M} (s_i H_i)_{i \in M} = \Psi(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{y}).$$

Para mostrar que Ψ é injectiva consideremos $\mathbf{x} = [s_i H_i]_{i \in M}, \mathbf{y} = [t_i H_i]_{i \in M} \in S_{\text{id}_M}$ tais que $\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{y})$. Então $s_i H_i = t_i H_i$, para qualquer $i \in M$. Consequentemente $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Finalmente, mostremos que Ψ é sobrejectiva. Para tal basta observar que: para todo $(s_i H_i)_{i \in M} \in \prod_{i \in M} G/H_i$

$$\Psi([s_i H_i]_{i \in M}) = (s_i H_i)_{i \in M}.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) : Suponhamos que $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é isomorfo a $\prod_{i \in M} G/H_i$. Como $\prod_{i \in M} G/H_i$ é um grupo e é, como semigrupo, isomorfo a $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ então $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é grupo. $\square$

Seja $(T, .)$ um semigrupo sem elemento zero, consideremos um objecto $0 \notin T$. No conjunto $T \cup \{0\}$ definimos uma operação binária $*$ do seguinte modo:

$$x * y = \begin{cases} x.y & \text{se } x, y \in T; \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0. \end{cases}$$

É claro que $(T \cup \{0\}; *)$ é um semigrupo, além disso 0 é elemento zero $(T \cup \{0\}; *)$.

De um modo geral, para um semigrupo qualquer T , definimos

$$T^0 = \begin{cases} T & \text{se } T \text{ tem elemento zero;} \\ T \cup \{0\} & \text{se } T \text{ não tem elemento zero.} \end{cases}$$

Dada uma família $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in M}$ de subgrupos normais de um grupo G , definimos

$$M_G = \{i \in M : H_i = G\}.$$

Teorema 3.21 *São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $S(G, \mathcal{H})$ é semigrupo inverso e não é grupo;
- (2) $\dim \mathcal{H} = 1$, $\mathcal{H}$ é estrita e $|M_G| = 1$;
- (3) $M \setminus M_G \neq \emptyset$ e $S(G, \mathcal{H}) \simeq \bigtimes_{i \in M \setminus M_G} (G/H_i)^0$.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) : Suponhamos que $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é semigrupo inverso e não é grupo. Pelo teorema 3.6 conclui-se que $\dim \mathcal{H} \leq 1$. Do teorema 3.18 resulta que $\mathcal{H}$ é estrita. Fazendo uso do teorema 3.20 podemos inferir que $\dim \mathcal{H} \neq 0$ e por conseguinte $\dim \mathcal{H} = 1$.

Mostremos que $M_G \neq \emptyset$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que $M_G = \emptyset$. Como $\dim \mathcal{H} = 1$ então existem H_j e H_i tais que $H_j \subset H_i$. Atendendo a que $M_G = \emptyset$ temos $H_i \neq G$. Por consequência, aplicando o teorema 3.19 obtém-se a contradição pretendida. Como $\mathcal{H}$ é estrita conclui-se que $|M_G| = 1$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Suponhamos que $\dim \mathcal{H} = 1$, $\mathcal{H}$ é estrita e $|M_G| = 1$. Tendo em conta que $\dim \mathcal{H} = 1$ conclui-se que $|M| > 1$ e por conseguinte $M \setminus M_G \neq \emptyset$. Designemos por l o único elemento de M_G .

Para cada $i \in M \setminus M_G$, designemos por 0_i o elemento zero do semigrupo $((G/H_i)^0; *_i)$. É de observar que, de acordo com a definição apresentada, a operação $*_i$ está definida por: $(sH_i) *_i (tH_i) = stH_i$; $(sH_i) *_i 0_i = 0_i *_i (sH_i) = 0_i$; $0_i *_i 0_i = 0_i$.

Dado $\mathbf{x} = [s_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M}$ um elemento arbitrário de $S(G, \mathcal{H})$; para cada $i \in M \setminus M_G$, defina-se o elemento $\langle \mathbf{x}, i \rangle$, de $(G/H_i)^0$, do modo seguinte:

$$\langle \mathbf{x}, i \rangle = \begin{cases} s_i H_i & \text{se } \alpha(i) = i; \\ 0_i & \text{se } \alpha(i) \neq i. \end{cases}$$

Consideremos a aplicação $\Psi : S(G, \mathcal{H}) \longrightarrow \bigvee_{i \in M \setminus M_G} (G/H_i)^0$ definida do seguinte modo:

$$\Psi(\mathbf{x}) = (\langle \mathbf{x}, i \rangle)_{i \in M \setminus M_G}.$$

O nosso objectivo é mostrar que Ψ é um isomorfismo de semigrupos. Mostremos, primeiramente, que Ψ é morfismo. Sejam $\mathbf{x} = [s_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M}$ e $\mathbf{y} = [t_i H_{\beta(i)}]_{i \in M}$ elementos quaisquer de $S(G, \mathcal{H})$. Seja i um elemento arbitrário de $M \setminus M_G$. Prosseguiremos o nosso raciocínio considerando dois casos.

(i) No caso de $\alpha\beta(i) = i$ conclui-se, pelo teorema 3.13, que $\alpha(i) = i$ e $\beta(i) = i$. Assim temos

$$\langle \mathbf{x} \odot \mathbf{y}, i \rangle = s_{\beta(i)} t_i H_i = s_i t_i H_i = (s_i H_i) *_i (t_i H_i) = \langle \mathbf{x}, i \rangle *_i \langle \mathbf{y}, i \rangle.$$

(ii) Se $\alpha\beta(i) \neq i$ então $\langle \mathbf{x} \odot \mathbf{y}, i \rangle = 0_i$. Pelo teorema 3.13 temos: $\alpha(i) \neq i$ ou $\beta(i) \neq i$. Por consequência $\langle \mathbf{x}, i \rangle *_i \langle \mathbf{y}, i \rangle = 0_i$.

Em qualquer dos casos conclui-se que $\langle \mathbf{x} \odot \mathbf{y}, i \rangle = \langle \mathbf{x}, i \rangle *_i \langle \mathbf{y}, i \rangle$ e por conseguinte Ψ é morfismo de semigrupos.

Para provar que Ψ é injectiva consideremos $\mathbf{x} = [s_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M}$ e $\mathbf{y} = [t_i H_{\beta(i)}]_{i \in M}$, elementos de $S(G, \mathcal{H})$, tais que $\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{y})$. Por definição de Ψ temos: $\langle \mathbf{x}, i \rangle = \langle \mathbf{y}, i \rangle$, para qualquer $i \in M \setminus M_G$. Em seguida mostraremos que $\alpha = \beta$ e $s_i H_{\alpha(i)} = t_i H_{\alpha(i)}$, qualquer que seja $i \in M$.

Atendendo a que $\Delta_{\mathcal{H}} = \{l\}$, por aplicação do teorema 3.11, conclui-se que $\alpha(l) = l = \beta(l)$ e por consequência $s_l H_{\alpha(l)} = G = t_l H_{\beta(l)}$.

Dado $i \in M \setminus \{l\} = M \setminus M_G$, consideraremos dois casos.

(i) Suponhamos que $\alpha(i) = i$. Neste caso vamos mostrar que $\beta(i) = i$. Com efeito, se $\beta(i) \neq i$ então temos $s_i H_i = \langle \mathbf{x}, i \rangle = \langle \mathbf{y}, i \rangle = 0_i$, o que é absurdo porque $0_i \notin G/H_i$. Assim temos $\alpha(i) = i = \beta(i)$, consequentemente $s_i H_{\alpha(i)} = \langle \mathbf{x}, i \rangle = \langle \mathbf{y}, i \rangle = t_i H_{\beta(i)}$.

(ii) No caso de $\alpha(i) \neq i$, vamos provar, primeiramente, que $\beta(i) \neq i$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que $\beta(i) = i$. Assim temos $0_i = \langle \mathbf{x}, i \rangle = \langle \mathbf{y}, i \rangle = t_i H_i$, o que é absurdo porque $0_i \notin G/H_i$. Aplicando o teorema 3.12 temos $\alpha(i), \beta(i) \in \Delta_{\mathcal{H}} = \{l\}$. Consequentemente $\alpha(i) = l = \beta(i)$ e por conseguinte $s_i H_{\alpha(i)} = G = t_i H_{\beta(i)}$.

Do exposto resulta que: $\alpha(i) = \beta(i)$, $s_i H_{\alpha(i)} = t_i H_{\beta(i)}$ para qualquer $i \in M$ e por consequência $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Finalmente, vamos demonstrar que Ψ é sobrejectiva. Em primeiro lugar vamos mostrar que $(0_i)_{i \in M \setminus M_G}$ pertence à imagem de Ψ . Consideremos a aplicação $\xi : M \longrightarrow M$ definida do seguinte modo: $\xi(i) = l$, para qualquer $i \in M$. Como $H_l = G$ então $\xi \in I_{\mathcal{H}}$. Seja $(u_i)_{i \in M}$ a família, de elementos de G , definida por: $u_i = 1_G$, para todo $i \in M$. Consideremos o elemento de $S(G, \mathcal{H})$ $\mathbf{z} = [u_i H_{\xi(i)}]_{i \in M}$. Neste contexto é claro que $\Psi(\mathbf{z}) = (0_i)_{i \in M \setminus M_G}$.

Seja $w = (w_i)_{i \in M \setminus M_G}$ um elemento $\prod_{i \in M \setminus M_G} (G/H_i)^0$ tal que $w \neq (0_i)_{i \in M \setminus M_G}$. Consideremos o conjunto A_w assim definido

$$A_w = \{i \in M \setminus M_G : w_i \neq 0_i\}.$$

É de observar que $A_w \neq \emptyset$. Tendo em consideração o axioma da escolha, podemos garantir a existência de uma família $(y_i)_{i \in A_w}$, de elementos de G , tal que: $w_i = y_i H_i$, para todo $i \in A_w$. Defina-se a aplicação $\gamma : M \longrightarrow M$ do modo seguinte:

$$\gamma(i) = \begin{cases} i & \text{se } i \in A_w; \\ l & \text{se } i \in M \setminus A_w. \end{cases}$$

É claro que $\alpha \in I_{\mathcal{H}}$, uma vez que $H_i \subseteq H_{\gamma(i)} = H_l = G$ para todo $i \in M \setminus A_w$. Consideremos a família $(v_i)_{i \in M}$, de elementos de G , definida do seguinte modo:

$$v_i = \begin{cases} y_i & \text{se } i \in A_w; \\ 1_G & \text{se } i \in M \setminus A_w. \end{cases}$$

Seja $\mathbf{x} = [v_i H_{\gamma(i)}]_{i \in M}$. Vamos mostrar que $\langle \mathbf{x}, i \rangle = w_i$, para qualquer $i \in M \setminus M_G$. Dado $i \in M \setminus M_G$, estudaremos dois casos.

(i) No caso de $i \in A_w$ temos $\gamma(i) = i$. Consequentemente, $\langle \mathbf{x}, i \rangle = v_i H_i = y_i H_i = w_i$.

(ii) No caso de $i \in M \setminus A_w$ temos $\gamma(i) = l \neq i$ por consequência $\langle \mathbf{x}, i \rangle = 0_i = w_i$.

Do exposto $\langle \mathbf{x}, i \rangle = w_i$ para todo $i \in M \setminus M_G$ e por consequência $\Psi(\mathbf{x}) = w$.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Suponhamos que $M \setminus M_G \neq \emptyset$ e $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é isomorfo a $\prod_{i \in M \setminus M_G} (G/H_i)^0$. É claro que $\prod_{i \in M \setminus M_G} (G/H_i)^0$ é semigrupo inverso e não é grupo. Donde se conclui que $(S(G, \mathcal{H}); \odot)$ é semigrupo inverso e não é grupo. $\square$

Como consequência do teorema 3.20 obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.22 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito e $(X; g)$ o respectivo espaço dual. São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $\text{End}(L; f)$ é grupo;
- (2) P_g é anticadeia e $c_i \neq c_j$, quaisquer que sejam i, j tais que $i \neq j$;
- (3) $\text{End}(L; f) \simeq \bigtimes_{i=1}^m \mathbb{Z}_{c_i}$.

Demonstração Basta observar que $\text{End}(L; f)$ é anti-isomorfo $S(\mathbb{Z}, (c_i \mathbb{Z})_{i \in \{1, \dots, m\}})$ e aplicar o teorema 3.20. $\square$

Teorema 3.23 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito e $(X; g)$ o respectivo espaço dual. São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $\text{End}(L; f)$ é semigrupo inverso e não é grupo ;
- (2) $\dim g = 1$, $|K_g| = m - 1$ e $c_i \neq c_j$, quaisquer que sejam i, j tais que $i \neq j$;
- (3) $K_g \neq \emptyset$ e $\text{End}(L; f) \simeq \bigtimes_{i \in K_g} \mathbb{Z}_{c_i}^0$.

Demonstração O resultado em apreço é consequência imediata do teorema 3.21. $\square$

Exemplo 3.4 Seja $(L; f)$ a álgebra de Ockham de tipo booleano finito cujo espaço dual $(X; g)$ se descreve do modo seguinte: $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \{x_2, g(x_2)\}$. Neste caso $|X| = 3$, $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$. Como $\dim g = 1$, $K_g = \{2\}$ e $c_1 \neq c_2$ então temos, pelo teorema 3.23, que $\text{End}(L; f)$ é um semigrupo inverso e não é grupo. Além disso $\text{End}(L; f) \simeq \mathbb{Z}_2^0$.

Exemplo 3.5 Seja $(L; f)$ a álgebra de Ockham de tipo booleano finito cujo espaço dual $(X; g)$ se descreve do modo seguinte: $X_1 = \{x_1, g(x_1)\}$, $X_2 = \{x_2, g(x_2), g^2(x_2), g^3(x_2)\}$. Neste caso $|X| = 6$, $c_1 = 2$ e $c_2 = 4$. Aplicando o teorema 3.17 conclui-se que $\text{End}(L; f)$ é ortodoxo. Tendo em consideração o teorema 3.23 podemos afirmar que $\text{End}(L; f)$ não é inverso, pois $K_g = \{1, 2\}$. Como consequência do corolário 2 do teorema 3.2 tem-se $|\text{End}(L; f)| = 12$.

Para obter uma descrição da estrutura do grupo das unidades do monóide $S(G, \mathcal{H})$ são necessários alguns resultados preliminares.

Teorema 3.24 *Dado $\mathbf{x} = [g; H_{\alpha(i)}]_{i \in M} \in S(G, \mathcal{H})$, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $\mathbf{x}$ é uma unidade de $S(G, \mathcal{H})$;
- (2) α é uma unidade de $I_{\mathcal{H}}$.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos que $\mathbf{x} = [g_i H_{\alpha(i)}]_{i \in M}$ é uma unidade de $S(G, \mathcal{H})$; então existe $\mathbf{y} = [f_i H_{\beta(i)}]_{i \in M}$, pertencente a $S(G, \mathcal{H})$, tal que $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = \mathbf{1} = \mathbf{y} \odot \mathbf{x}$. Nesta conformidade temos $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} \in S_{\alpha\beta} \cap S_{\text{id}_M}$ e $\mathbf{y} \odot \mathbf{x} \in S_{\beta\alpha} \cap S_{\text{id}_M}$. Consequentemente, $\alpha\beta = \text{id}_M = \beta\alpha$ e por conseguinte α é uma unidade de $S(G, \mathcal{H})$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Suponhamos que α é uma unidade de $I_{\mathcal{H}}$. Então existe β , pertencente a $I_{\mathcal{H}}$, tal que $\alpha\beta = \text{id}_M = \beta\alpha$. Seja $\mathbf{z} = [g_{\beta(i)}^{-1} H_{\beta(i)}]_{i \in M}$. Verifica-se facilmente que $\mathbf{x} \odot \mathbf{z} = \mathbf{1} = \mathbf{z} \odot \mathbf{x}$. $\square$

Teorema 3.25 *Se α é uma unidade de $I_{\mathcal{H}}$ então $H_{\alpha(i)} = H_i$, qualquer que seja $i \in M$.*

Demonstração Suponhamos que α é uma unidade de $I_{\mathcal{H}}$. Então existe β , pertencente a $I_{\mathcal{H}}$, tal que $\alpha\beta = \text{id}_M = \beta\alpha$. Seja $i \in M$. Por definição de $I_{\mathcal{H}}$ tem-se:

$$H_i \subseteq H_{\alpha(i)} \subseteq H_{\beta\alpha(i)} = H_i,$$

donde se conclui que $H_i = H_{\alpha(i)}$. $\square$

Para descrever a estrutura do grupo das unidades $U(G, \mathcal{H})$ do monóide $S(G, \mathcal{H})$ precisamos de uma determinada construção que introduzimos a seguir.

Sejam A, K grupos e $\varphi : A \longrightarrow \text{Aut } K$ um anti-homomorfismo, do grupo A para o grupo dos automorfismos de K . Para cada $a \in A$, representamos por φ_a o automorfismo $\varphi(a)$. Consideremos a operação binária $\star_{\varphi}$ definida em $K \times A$ do seguinte modo:

$$(k_1, a_1) \star_{\varphi} (k_2, a_2) = (\varphi_{a_2}(k_1)k_2, a_1 a_2).$$

Neste contexto, verifica-se facilmente que fica definida em $K \times A$ uma estrutura de grupo. Denotaremos por $K \times_{\varphi} A$ o grupo $(K \times A; \star_{\varphi})$.

Teorema 3.26 *Existe um anti-homomorfismo de grupos $\varphi : U(I_{\mathcal{H}}) \longrightarrow \text{Aut}(\bigtimes_{i \in M} G/H_i)$ tal que:*

$$U(G, \mathcal{H}) = (\bigtimes_{i \in M} G/H_i) \times_{\varphi} U(I_{\mathcal{H}}).$$

Demonstração Por aplicação do teorema 3.25 podemos concluir que, para todo $\alpha \in U(I_{\mathcal{H}})$, $S_{\alpha} = (\bigtimes_{i \in M} G/H_i) \times \{\alpha\}$. Pelo teorema 3.24 conclui-se que $U(G, \mathcal{H}) = \bigcup_{\alpha \in U(I_{\mathcal{H}})} S_{\alpha}$ e por conseguinte

$$U(G, \mathcal{H}) = (\bigtimes_{i \in M} G/H_i) \times U(I_{\mathcal{H}}).$$

Usando o teorema 3.25 conclui-se que, para cada $\alpha \in U(I_{\mathcal{H}})$, podemos definir uma aplicação $\varphi_\alpha : \prod_{i \in M} G/H_i \longrightarrow \prod_{i \in M} G/H_i$ do seguinte modo:

$$\varphi_\alpha((g_i H_i)_{i \in M}) = (g_{\alpha(i)} H_i)_{i \in M}.$$

Tendo em consideração o teorema 3.25, verifica-se facilmente que φ_α é um automorfismo do grupo $\prod_{i \in M} G/H_i$.

Consideremos a aplicação $\varphi : U(I_{\mathcal{H}}) \longrightarrow \text{Aut}(\prod_{i \in M} G/H_i)$ definida por: $\varphi(\alpha) = \varphi_\alpha$. Mostremos que $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \varphi_\alpha$, para quaisquer $\alpha, \beta \in U(I_{\mathcal{H}})$.

Seja $(g_i H_i)_{i \in M}$ um elemento arbitrário de $\prod_{i \in M} G/H_i$. Neste contexto temos

$$\varphi_\beta \varphi_\alpha((g_i H_i)_{i \in M}) = \varphi_\beta((g_{\alpha(i)} H_i)_{i \in M}) = (g_{\alpha(\beta(i))} H_i)_{i \in M} = \varphi_{\alpha\beta}((g_i H_i)_{i \in M}).$$

Do exposto resulta que φ é um anti-homomorfismo de grupos. Para concluir basta mostrar que $\mathbf{x} \star_\varphi \mathbf{y} = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$, quaisquer que sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U(G, \mathcal{H})$.

Sejam $\mathbf{x} = (u, \alpha)$, $\mathbf{y} = (v, \beta) \in U(G, \mathcal{H})$, onde $\alpha, \beta \in U(I_{\mathcal{H}})$ e $u = ((g_i H_i)_{i \in M})$, $v = ((f_i H_i)_{i \in M})$ são elementos de $\prod_{i \in M} G/H_i$. Nesta conformidade temos

$$(u, \alpha) \star_\varphi (v, \beta) = (\varphi_\beta(u), \alpha\beta) = ((g_{\beta(i)} H_i)_{i \in M} (f_i H_i)_{i \in M}, \alpha\beta) = ((g_{\beta(i)} f_i H_i)_{i \in M}, \alpha\beta).$$

Do exposto resulta que $\mathbf{x} \star_\varphi \mathbf{y} = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$ $\square$

Dado um conjunto X , designamos por $\text{Sim } X$ o grupo simétrico, constituído por todas as bijecções de X em X .

No que se segue mostraremos que $U(I_{\mathcal{H}})$ é isomorfo a um produto directo de grupos simétricos, para cumprir tal objectivo precisamos de introduzir alguma terminologia.

Designemos por $\gamma_{\mathcal{H}}$ a relação de equivalência definida em M por

$$(i, j) \in \gamma_{\mathcal{H}} \iff H_i = H_j.$$

Teorema 3.27 *Se A é um conjunto completo de representantes das classes de equivalência determinadas por $\gamma_{\mathcal{H}}$ então*

$$U(I_{\mathcal{H}}) \simeq \prod_{i \in A} \text{Sim}[i]_{\gamma_{\mathcal{H}}}.$$

Demonstração Para cada $\alpha \in U(I_{\mathcal{H}})$, temos: $\alpha([i]\gamma_{\mathcal{H}}) \subseteq [i]\gamma_{\mathcal{H}}$, qualquer que seja $i \in M$. Seja $\alpha \in U(I_{\mathcal{H}})$. Se $j \in [i]\gamma_{\mathcal{H}}$ então, pelo teorema 3.25, conclui-se $H_{\alpha(j)} = H_j = H_i$ e por conseguinte $\alpha(j) \in [i]\gamma_{\mathcal{H}}$. Dado $\alpha \in U(I_{\mathcal{H}})$, seja β o inverso de α em $U(I_{\mathcal{H}})$. Usando a observação anterior conclui-se que $\beta([i]\gamma_{\mathcal{H}}) \subseteq [i]\gamma_{\mathcal{H}}$ e por conseguinte $[i]\gamma_{\mathcal{H}} = \alpha\beta([i]\gamma_{\mathcal{H}}) \subseteq \alpha([i]\gamma_{\mathcal{H}})$. Assim podemos concluir que $\alpha([i]\gamma_{\mathcal{H}}) = [i]\gamma_{\mathcal{H}}$.

Seja A um conjunto completo de representantes das classes de equivalência $[i]\gamma_{\mathcal{H}}$. Dado $\alpha \in U(I_{\mathcal{H}})$. Para cada $i \in A$ consideramos a aplicação $\alpha^{(i)} : [i]\gamma_{\mathcal{H}} \rightarrow [i]\gamma_{\mathcal{H}}$ definida por: $\alpha^{(i)}(t) = \alpha(t)$. Tendo em consideração que α é uma bijecção e $\alpha([i]\gamma_{\mathcal{H}}) = [i]\gamma_{\mathcal{H}}$, conclui-se que $\alpha^{(i)}$ é uma bijecção e por consequência $\alpha^{(i)} \in \text{Sim}[i]\gamma_{\mathcal{H}}$.

Seja Ψ a aplicação $\Psi : U(I_{\mathcal{H}}) \rightarrow \prod_{i \in A} \text{Sim}[i]\gamma_{\mathcal{H}}$ definida do seguinte modo:

$$\Psi(\alpha) = (\alpha^{(i)})_{i \in A}.$$

Neste contexto, verifica-se facilmente que Ψ é um isomorfismo de grupos. $\square$

Seja uma álgebra de Ockham $(L; f)$ e $(X; g)$ o respectivo espaço dual. Designemos por $\text{Aut}(L; f)$ o grupo dos automorfismos de $(L; f)$. Usando o teorema 1.11 conclui-se que

$$\text{Aut}(L; f) = U(\text{End}(L; f)) \approx U(\Lambda(X; g)),$$

onde o símbolo $\approx$ indica a existência de um anti-isomorfismo. No caso em que $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito, por aplicação do teorema 3.5, podemos concluir que $\Lambda(X; g) = \mathcal{C}(g) \simeq S(\mathbb{Z}, (c_i \mathbb{Z})_{i \in \{1, \dots, m\}})$ e por consequência $\text{Aut}(L; f) \approx U(\mathbb{Z}, (c_i \mathbb{Z})_{i \in \{1, \dots, m\}})$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ consideremos o conjunto $E_i = \{j : c_i = c_j\}$. Seja $l = |\{c_i : 1 \leq i \leq m\}|$. Sejam $r_1, \dots, r_l$ elementos de $\{1, \dots, m\}$ tais que $\{c_{r_1}, \dots, c_{r_l}\} = \{c_i : 1 \leq i \leq m\}$.

Teorema 3.28 *Se $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito então existe um anti-homomorfismo de grupos $\varphi : \prod_{j=1}^l \text{Sim } E_{r_j} \rightarrow \text{Aut} \prod_{i=1}^m \mathbb{Z}_{c_i}$ tal que*

$$\text{Aut}(L; f) \approx \prod_{i=1}^m \mathbb{Z}_{c_i} \times_{\varphi} \prod_{j=1}^l \text{Sim } E_{r_j}.$$

Demonstração Basta ter em consideração as observações que precedem o enunciado e aplicar os teoremas 3.26 e 3.27. $\square$

Terminamos este capítulo com a seguinte observação acerca de álgebras de Ockham de tipo booleano finito.

Teorema 3.29 *Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito;
- (2) $(L; f)$ é isomorfa a um produto directo de uma família finita de álgebras de Ockham simples de tipo booleano finito.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos que $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito. Seja $(X; g)$ o espaço dual de $(L; f)$. Neste contexto é claro que a relação de ordem definida no espaço de Ockham $(X; g)$ é tal que X é uma antichain finita. Além disso, g é uma bijecção. Tendo em consideração as convenções introduzidas na página 49, designemos por $X_1, \dots, X_m$ as órbitas de g . Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, consideremos a aplicação $g_i : X_i \rightarrow X_i$ definida por: $g_i(t) = g(t)$. Considerando em X_i a ordem discreta, fica definido um espaço de Ockham finito (X_i, g_i) . Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, designemos por $(L_i; f_i)$ a álgebra dual de (X_i, g_i) . Por aplicação do teorema 1.15 conclui-se que $(L_i; f_i)$ é uma álgebra simples. Como a relação de ordem definida no espaço de Ockham $(X_i; g_i)$ é tal que X é uma antichain finita e g_i é uma bijecção então $(L_i; f_i)$ é uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito.

Tendo em conta que $X \simeq \bigsqcup_{i=1}^m X_i$ e aplicando o teorema 1.12 conclui-se que $L \simeq \bigtimes_{i=1}^m L_i$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Basta observar que o produto directo de uma família finita de álgebras de Ockham de tipo booleano finito é uma álgebra de Ockham de tipo booleano finito.

Capítulo 4

O semigrupo dos endomorfismos para produtos directos finitos de álgebras de Ockham simples e finitas

No capítulo anterior mostrou-se que toda álgebra de Ockham de tipo booleano finito é isomorfa a um produto directo de uma família finita de álgebras de Ockham simples e finitas. Tendo como motivação o referido resultado, consideramos a classe $\mathbf{T}$ constituída por todas as álgebras de Ockham isomorfas a produtos directos de famílias finitas, não vazias, de álgebras de Ockham simples e finitas. A classe $\mathbf{T}$ contém propriamente a classe constituída por todas as álgebras de Ockham de tipo booleano finito. Descrevemos as congruências das álgebras de $\mathbf{T}$ e mostramos que $\mathbf{T}$ é constituída por todas as álgebras de Ockham finitas cujas congruências são permutáveis e a respectiva operação unária é bijectiva. Para as álgebras de $\mathbf{T}$, estabelecemos uma condição necessária e suficiente para que o respectivo semigrupo dos endomorfismos seja regular. Neste contexto, obtemos um resultado que permite determinar o cardinal do semigrupo dos endomorfismos de álgebras pertencentes $\mathbf{T}$.

Neste capítulo consideramos a classe $\mathbf{T}$ constituída por todas as álgebras de Ockham isomorfas a produtos directos de famílias finitas, não vazias, de álgebras de Ockham simples e finitas. Para álgebras de $\mathbf{T}$, estabeleceremos uma condição necessária e suficiente para que o respectivo semigrupo dos endomorfismos seja regular. Tendo presente o teorema 3.29, verifica-se facilmente que $\mathbf{T}$ contém propriamente a classe constituída por todas as álgebras de Ockham de tipo booleano finito.

No que se segue mostraremos que $(L; f) \in \mathbf{T}$ se, e só se, $(L; f)$ é congruente-permutável, f é bijectiva e $(L; f)$ é finita. Para cumprir tal objectivo vamos estabelecer alguns resultados acerca das congruências de álgebras pertencentes a $\mathbf{T}$.

O teorema que a seguir enunciamos é análogo a um resultado bem conhecido para reticulados, [12, página 24, Teorema 13]

Teorema 4.1 *Se $(L_1; f_1)$ e $(L_2; f_2)$ são álgebras de Ockham então tem-se:*

$$\text{Con}(L_1 \times L_2) \simeq \text{Con } L_1 \times \text{Con } L_2.$$

Demonstração Para cada $(\theta_1, \theta_2) \in \text{Con } L_1 \times \text{Con } L_2$, consideramos a relação binária $\theta_1 \otimes \theta_2$ definida, em $L_1 \times L_2$, por

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \theta_1 \otimes \theta_2 \iff (x_1, y_1) \in \theta_1, (x_2, y_2) \in \theta_2.$$

É claro que $\theta_1 \otimes \theta_2$ é congruência da álgebra de Ockham $L_1 \times L_2$ e por consequência podemos definir a aplicação $\Psi : \text{Con } L_1 \times \text{Con } L_2 \longrightarrow \text{Con}(L_1 \times L_2)$, do modo seguinte:

$$\Psi(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 \otimes \theta_2.$$

É evidente que Ψ é um mergulho de ordem e por conseguinte basta mostrar que Ψ é sobrejectiva. Seja $\theta \in \text{Con}(L_1 \times L_2)$. Designemos por θ_1 a relação binária definida, em L_1 , do modo seguinte:

$$(s, t) \in \theta_1 \iff ((s, 0), (t, 0)) \in \theta.$$

De forma análoga definimos, em L_2 , a relação binária θ_2 :

$$(u, v) \in \theta_2 \iff ((0, u), (0, v)) \in \theta.$$

É claro que θ_1 é uma congruência de reticulados. Mostremos que θ_1 é compatível com f_1 . Dado $(s, t) \in \theta_1$, por definição de θ_1 , temos $((s, 0), (t, 0)) \in \theta$ e atendendo a que θ é congruência de $L_1 \times L_2$ conclui-se que $((f_1(s), 1), (f_1(t), 1)) \in \theta$. Portanto

$$((f_1(s), 0), (f_1(t), 0)) = ((f_1(s), 1) \wedge (1, 0), (f_1(t), 1) \wedge (1, 0)) \in \theta$$

e por conseguinte $(f_1(s), f_1(t)) \in \theta_1$. De forma análoga se prova que θ_2 é congruência de L_2 . Vejamos que $\theta_1 \otimes \theta_2 = \theta$. Seja $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \theta_1 \otimes \theta_2$, por definição de $\theta_1 \otimes \theta_2$, temos $(x_1, 0), (y_1, 0) \in \theta$ e $((0, x_2), (0, y_2)) \in \theta$. Atendendo a que θ é congruência tem-se $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((x_1, 0) \vee (0, x_2), (y_1, 0) \vee (0, y_2)) \in \theta$. Reciprocamente, suponhamos que $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \theta$. Neste contexto temos

$$((x_1, 0), (y_1, 0)) = ((x_1, x_2) \wedge (1, 0), (y_1, y_2) \wedge (1, 0)) \in \theta,$$

$$((0, x_2), (0, y_2)) = ((x_1, x_2) \wedge (0, 1), (y_1, y_2) \wedge (0, 1)) \in \theta.$$

Por consequência $(x_1, y_1) \in \theta_1$, $(x_2, y_2) \in \theta_2$ ou seja $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \theta_1 \otimes \theta_2$. $\square$

Dado um reticulado limitado e distributivo L , denominamos *centro* de L , e denotamos por $Z(L)$, o conjunto dos elementos de L que admitem complemento, em L . Para cada $x \in Z(L)$, designamos por x' o complemento de x em L . É claro que $Z(L)$ é subreticulado de L .

Para cada álgebra de Ockham $(L; f)$, consideremos o conjunto

$$\Gamma(L) = \{a \in Z(L) : f(a) = a'\}.$$

É claro que $\Gamma(L)$ é subreticulado de L e $0, 1 \in \Gamma(L)$. Mais ainda, $\Gamma(L)$ é subálgebra de $(L; f)$. Com efeito, dado $a \in \Gamma(L)$ temos $f(a') = [f(a)]' = (a')'$ e por conseguinte $f(a) = a' \in \Gamma(L)$. É de observar que $\Gamma(L)$ é reticulado de Boole.

Teorema 4.2 *Se $(L_i; f_i)_{i \in I}$ é uma família de álgebras de Ockham então tem-se:*

$$\Gamma\left(\bigtimes_{i \in I} L_i\right) = \bigtimes_{i \in I} \Gamma(L_i).$$

Demonstração Designemos por f a operação unária da álgebra de Ockham $\bigtimes_{i \in I} L_i$.

Dado $(x_i)_{i \in I} \in \Gamma(\bigtimes_{i \in I} L_i)$, tem-se $(x_i)_{i \in I} \in Z(\bigtimes_{i \in I} L_i)$ e

$$f((x_i)_{i \in I}) = (f_i(x_i))_{i \in I} = [(x_i)_{i \in I}]'.$$

É claro que $x_i \in Z(L_i)$, qualquer que seja $i \in I$ e $[(x_i)_{i \in I}]' = (x'_i)_{i \in I}$, portanto $f_i(x_i) = x'_i$, para todo $i \in I$. Do exposto resulta que $(x_i)_{i \in I} \in \bigtimes_{i \in I} \Gamma(L_i)$.

Reciprocamente, suponhamos que $(x_i)_{i \in I} \in \bigtimes_{i \in I} \Gamma(L_i)$. Portanto tem-se $x_i \in Z(L_i)$ e $f_i(x_i) = x'_i$, qualquer que seja $i \in I$. Nesta conformidade, é óbvio que $(x_i)_{i \in I} \in Z(\bigtimes_{i \in I} L_i)$ e $[(x_i)_{i \in I}]' = (x'_i)_{i \in I}$. Por consequência $f((x_i)_{i \in I}) = (f_i(x_i))_{i \in I} = [(x_i)_{i \in I}]'$ e portanto $(x_i)_{i \in I} \in \Gamma(\bigtimes_{i \in I} L_i)$. $\square$

Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham. Para cada $a \in \Gamma(L)$ defina-se $\zeta_a = \Theta_{\text{ret}}(0, a)$. Neste contexto é claro que

$$(x, y) \in \zeta_a \iff x \vee a = y \vee a.$$

Vamos mostrar que ζ_a é uma congruência da álgebra de Ockham $(L; f)$. Suponhamos que $(x, y) \in \zeta_a$, então tem-se $x \vee a = y \vee a$; atendendo a que $a \in \Gamma(L)$ conclui-se que $f(x) \wedge a' = f(y) \wedge a'$ e por conseguinte

$$f(x) \vee a = (f(x) \wedge a') \vee a = (f(y) \wedge a') \vee a = f(y) \vee a.$$

Dos raciocínios acima descritos conclui-se que ζ_a é congruência de $(L; f)$, para todo $a \in \Gamma(L)$.

Consideremos a aplicação $\psi_L : \Gamma(L) \longrightarrow \text{Con } L$ definida do seguinte modo:

$$\psi_L(a) = \zeta_a.$$

Teorema 4.3 *Se $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham então ψ_L é um mergulho de ordem.*

Demonstração Sejam $a, b \in \Gamma(L)$ tais que $a \leq b$. Mostremos que $\zeta_a \subseteq \zeta_b$. Com efeito, dado $(x, y) \in \zeta_a$ tem-se $x \vee a = y \vee a$ e por conseguinte

$$x \vee b = x \vee a \vee b = y \vee a \vee b = y \vee b.$$

Por outro lado se $a, b \in \Gamma$ e $\zeta_a \subseteq \zeta_b$ então temos $(0, a) \in \zeta_b$ e por consequência $b = 0 \vee b = a \vee b$, portanto $a \leq b$. $\square$

Dado um conjunto C , para cada par de relações binárias α e β definidas em C , consideramos a relação binária definida em C , do modo seguinte:

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) \in C^2 : (\exists z \in C) (x, z) \in \alpha, (z, y) \in \beta\}.$$

Teorema 4.4 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham. Se $a, b \in \Gamma(L)$ então*

$$\zeta_a \circ \zeta_b = \zeta_{a \vee b}.$$

Demonstração Mostremos, primeiramente, que $\zeta_a \circ \zeta_b \subseteq \zeta_{a \vee b}$. Seja $(x, y) \in \zeta_a \circ \zeta_b$, então existe $z \in L$ tal que $x \vee a = z \vee a$, $z \vee b = y \vee b$ e por consequência

$$x \vee a \vee b = z \vee a \vee b = y \vee a \vee b,$$

donde resulta que $(x, y) \in \zeta_{a \vee b}$.

Seja $(x, y) \in \zeta_{a \vee b}$, por definição temos $x \vee a \vee b = y \vee a \vee b$; atendendo a que $a, b \in \Gamma(L)$ obtém-se $x \wedge (a \vee b)' = y \wedge (a \vee b)'$.

Consideremos o elemento $z = ((a \vee b)' \wedge x) \vee (b \wedge x) \vee (a \wedge y)$. Neste contexto é claro que

$$\begin{aligned} z \vee a &= ((a \vee b)' \wedge x) \vee (b \wedge x) \vee (a \wedge y) \vee a = ((a \vee b)' \wedge x) \vee (b \wedge x) \vee a \\ &= (((a \vee b)' \vee b) \wedge x) \vee a \\ &= ((a \vee b)' \vee b \vee a) \wedge (x \vee a) \\ &= x \vee a \end{aligned}$$

e por consequência $(x, z) \in \zeta_a$. Atendendo a que $x \wedge (a \vee b)' = y \wedge (a \vee b)'$, obtém-se

$$\begin{aligned} z \vee b &= ((a \vee b)' \wedge x) \vee (b \wedge x) \vee (a \wedge y) \vee b = ((a \vee b)' \wedge y) \vee (a \wedge y) \vee (b \wedge x) \vee b \\ &= ((a \vee b)' \wedge y) \vee (a \wedge y) \vee b \\ &= (((a \vee b)' \vee a) \wedge y) \vee b \\ &= ((a \vee b)' \vee a \vee b) \wedge (y \vee b) \\ &= y \vee b \end{aligned}$$

e por conseguinte temos $(z, y) \in \zeta_b$.

Do que acima foi exposto resulta que $(x, z) \in \zeta_a$ e $(z, y) \in \zeta_b$, logo $(x, y) \in \zeta_a \circ \zeta_b$. $\square$

Teorema 4.5 *Se $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham simples então $\Gamma(L) = \{0, 1\}$.*

Demonstração Seja $a \in \Gamma(L)$. Atendendo a que $(L; f)$ é simples conclui-se que $\zeta_a \in \{\omega, \iota\}$.

Observando que $\omega = \zeta_0$, $\iota = \zeta_1$ e tendo em conta o teorema 4.3 conclui-se que $a \in \{0, 1\}$. $\square$

Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$, para cada $a \in \Gamma(L)$ consideremos o ideal principal $a^\perp$.

Defina-se a aplicação $f_a : a^\perp \longrightarrow a^\perp$ do seguinte modo

$$f_a(x) = a \wedge f(x).$$

Verifica-se facilmente, vide [9, Teorema 4.7], que $(a^\perp; f_a)$ é uma álgebra de Ockham que denotaremos abreviadamente por $a^\perp$.

Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$, dizemos que $(L; f)$ é *infinitamente distributiva com respeito ao supremo* se, para cada família $(y_i)_{i \in I}$, de elementos de L , tal que existe $\bigvee_{i \in I} y_i$ então, para todo $x \in L$, existe $\bigvee_{i \in I} x \wedge y_i$ e

$$x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} x \wedge y_i.$$

Dizemos que uma álgebra de Ockham $(L; f)$ é completa no caso de L ser reticulado completo.

Para cada álgebra de Ockham $(L; f)$ designaremos por $A(\Gamma_L)$ o conjunto dos átomos do reticulado $\Gamma(L)$.

Teorema 4.6 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham completa e infinitamente distributiva com respeito ao supremo. Se $\bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} a = 1$ então*

$$(L; f) \simeq \bigtimes_{a \in A(\Gamma_L)} a^\perp.$$

Demonstração Tendo em presente que só consideramos álgebras de Ockham com pelo menos dois elementos então podemos afirmar que $A(\Gamma_L) \neq \emptyset$. Com efeito, se $A(\Gamma_L) = \emptyset$ então

$$\bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} a = 0, \text{ o que contraria a hipótese } \bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} a = 1.$$

Neste contexto, designaremos por $\hat{f}$ a operação unária da álgebra de Ockham $\bigtimes_{a \in A(\Gamma_L)} a^\perp$.

Consideremos a aplicação $\Psi : L \longrightarrow \bigtimes_{a \in A(\Gamma_L)} a^\perp$ definida por

$$\Psi(x) = (x \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)}.$$

Dados $x, y \in L$ tem-se

$$\begin{aligned}\Psi(x \wedge y) &= ((x \wedge y) \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)} = ((x \wedge a) \wedge (y \wedge a))_{a \in A(\Gamma_L)} \\ &= (x \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)} \wedge (y \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)} \\ &= \Psi(x) \wedge \Psi(y)\end{aligned}$$

e por conseguinte $\Psi(x \wedge y) = \Psi(x) \wedge \Psi(y)$; por outro lado obtém-se

$$\begin{aligned}\Psi(x \vee y) &= ((x \vee y) \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)} = ((x \wedge a) \vee (y \wedge a))_{a \in A(\Gamma_L)} \\ &= (x \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)} \vee (y \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)} \\ &= \Psi(x) \vee \Psi(y)\end{aligned}$$

portanto $\Psi(x \vee y) = \Psi(x) \vee \Psi(y)$.

Mostremos que $\Psi f = \hat{f}\Psi$. Dado $x \in L$ tem-se

$$\begin{aligned}\Psi(f(x)) &= (f(x) \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)} = ((f(x) \vee a') \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)} \\ &= ((f(x) \vee f(a)) \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)} \\ &= (f(x \wedge a) \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)} \\ &= (f_a(x \wedge a))_{a \in A(\Gamma_L)} \\ &= \hat{f}((x \wedge a)_{a \in A(\Gamma_L)}) \\ &= \hat{f}(\Psi(x)).\end{aligned}$$

Em face do exposto e atendendo a que $\Psi(0) = 0$ e $\Psi(1) = 1$ conclui-se que Ψ é morfismo de álgebras de Ockham.

Para mostrar que Ψ é injectiva, consideremos $x, y \in L$ tais que $\Psi(x) = \Psi(y)$. Assim temos $x \wedge a = y \wedge a$, qualquer que seja $a \in A(\Gamma_L)$. Como $(L; f)$ é completa então temos

$$\bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} (x \wedge a) = \bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} (y \wedge a).$$

Atendendo a que $\bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} a = 1$ e $(L; f)$ é infinitamente distributiva com respeito ao supremo, conclui-se que

$$x = x \wedge \left(\bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} a \right) = \bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} (x \wedge a) = \bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} (y \wedge a) = y \wedge \left(\bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} a \right) = y.$$

Finalmente, vamos provar que Ψ é sobrejectiva. Seja $z = (z_a)_{a \in A(\Gamma_L)}$ um elemento arbitrário de

$\bigtimes_{a \in A(\Gamma_L)} a^\perp$. Como $(L; f)$ é completa então podemos considerar o elemento $u = \bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} z_a$.

Para cada $b \in A(\Gamma_L)$ temos

$$b \wedge u = \bigvee_{a \in A(\Gamma_L)} (b \wedge z_a).$$

Por outro lado temos $b \wedge z_a \leq b \wedge a$, uma vez que $z_a \in a^\perp$. Assim se conclui que $b \wedge z_a = 0$, para qualquer $a \neq b$. Por consequência temos $b \wedge u = b \wedge z_b = z_b$. Do que acima foi exposto resulta que $\Psi(u) = z$. $\square$

Por uma questão de clareza é conveniente introduzir alguma terminologia.

Seja P um conjunto ordenado e S, Q subconjuntos de P tais que $S \subseteq Q$. No caso de existir supremo de S relativamente ao conjunto ordenado Q , designamo-lo por $\bigvee^Q S$.

Corolário *Se $(L; f)$ é uma álgebra de Ockham finita então*

$$(L; f) \simeq \bigwedge_{a \in A(\Gamma_L)} a^\perp.$$

Demonstração Como $(L; f)$ é finita então $(L; f)$ é completa e infinitamente distributiva com respeito ao supremo. Por outro lado já observámos que $\Gamma(L)$ é um reticulado de Boole, atendendo a que $\Gamma(L)$ é finito conclui-se que $\bigvee^{\Gamma(L)} A(\Gamma_L) = 1_{\Gamma(L)} = 1_L$. Como $\Gamma(L)$ é subreticulado de L então temos $\bigvee^{\Gamma(L)} A(\Gamma_L) = \bigvee A(\Gamma_L)$ e por consequência $\bigvee A(\Gamma_L) = 1$. Assim se verifica que o resultado em apreço é consequência do teorema 4.6. $\square$.

Uma álgebra de Ockham $(L; f)$ diz-se congruente-permutável se, para quaisquer $\alpha, \beta \in \text{Con } L$,

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha.$$

Estamos em condições de apresentar a seguinte caracterização das álgebras de Ockham que pertencem a $\mathbf{T}$.

Teorema 4.7 *Dada uma álgebra de Ockham $(L; f)$, são equivalentes as afirmações:*

- (1) $(L; f) \in \mathbf{T}$
- (2) $(L; f)$ é finita e ψ_L é isomorfismo de reticulados;
- (3) $(L; f)$ é finita, congruente-permutável e f é bijecção;
- (4) $(L; f)$ é finita e $\Gamma(L) \simeq \text{Con } L$.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos que $L \simeq \bigwedge_{i=1}^k L_i$, onde cada L_i é álgebra de Ockham

simples. Fazendo uso do teorema 4.1, conclui-se que

$$\text{Con } L \simeq \bigtimes_{i=1}^k \text{Con } L_i \simeq \mathbf{2}^k.$$

Aplicando o teorema 4.2, deduz-se $\Gamma(L) \simeq \bigtimes_{i=1}^k \Gamma(L_i)$. Atendendo a que cada L_i é simples, usando o teorema 4.5, conclui-se que $L_i \simeq \mathbf{2}$ e por conseguinte $\Gamma(L) \simeq \mathbf{2}^k$. Dos raciocínios acima descritos resulta que $|\Gamma(L)| = |\text{Con } L|$.

Pelo teorema 4.3 temos que ψ_L é injectiva e por consequência $|\Gamma(L)| = |\psi_L(\Gamma(L))|$. Assim temos $\psi_L(\Gamma(L)) \subseteq \text{Con } L$ e $|\psi_L(\Gamma(L))| = |\text{Con } L|$; atendendo a que L é finito obtém-se $\psi_L(\Gamma(L)) = \text{Con } L$. Do exposto resulta que ψ_L é sobrejectiva; tendo em conta que ψ_L é mergulho de ordem, teorema 4.3, conclui-se que ψ_L é um isomorfismo de reticulados.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponhamos que ψ_L é isomorfismo de reticulados e L é finita. Mostremos, primeiramente, que L é congruente-permutável.

Sejam $\alpha, \beta \in \text{Con } L$; como ψ_L é sobrejectiva então existem $a, b \in \Gamma(L)$ tais que: $\alpha = \zeta_a$, $\beta = \zeta_b$. Por aplicação do teorema 4.4 conclui-se que $\alpha \circ \beta = \zeta_a \circ \zeta_b = \zeta_{a \vee b}$, $\beta \circ \alpha = \zeta_b \circ \zeta_a = \zeta_{b \vee a}$ e por conseguinte

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha.$$

Como, por hipótese, ψ_L é isomorfismo então existe $c \in \Gamma(L)$ tal que $\Phi_1 = \zeta_c$. Por definição de ζ_c , temos $(0, c) \in \zeta_c$ e portanto $1 = f(0) = f(c)$. Atendendo a que $c \in \Gamma(L)$, resulta $1 = f(c) = c'$ e por conseguinte $c = 0$. Assim $\Phi_1 = \zeta_0 = \omega$ e por consequência f é bijecção, uma vez que L é finita.

(3) $\Rightarrow$ (4) Suponhamos que L é finita, congruente-permutável e f é bijecção. Designemos por U o conjunto dos átomos do reticulado $\text{Con } L$; tendo em conta que $\text{Con } L$ é um reticulado de Boole finito, [9, Teorema 4.3], conclui-se que $\text{Con } L \simeq \mathbf{2}^{|U|}$. Por outro lado $\Gamma(L) \simeq \mathbf{2}^{|A(\Gamma_L)|}$, uma vez que $\Gamma(L)$ também é um reticulado de Boole finito e $A(\Gamma_L)$ denota o conjunto dos átomos de $\Gamma(L)$. Em virtude do teorema 4.3 temos $|\Gamma(L)| \leq |\text{Con } L|$ e por consequência $|A(\Gamma_L)| \leq |U|$. Para mostrar que $\Gamma(L) \simeq \text{Con } L$ basta provar que $|A(\Gamma_L)| = |U|$; com o propósito de cumprir tal objectivo mostraremos que $U \subseteq \psi_L(A(\Gamma_L))$.

Seja θ um átomo arbitrário de $\text{Con } L$. Como $[0]\theta$ é um ideal, do reticulado L , e $[0]\theta$ é finito, então existe elemento máximo de $[0]\theta$, que designaremos por a .

Mostremos que $a \neq 0$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $a = 0$.

Seja θ' o complemento de θ , em $\text{Con } L$. Atendendo a que, por hipótese, L é congruente-permutável então tem-se $\theta \circ \theta' = \theta' \circ \theta$ e por consequência $\theta \circ \theta' = \theta \vee \theta' = \iota$. Nesta conformidade tem-se $(0, 1) \in \theta \circ \theta'$. Então existe $z \in L$ tal que $(0, z) \in \theta$ e $(z, 1) \in \theta'$. Como estamos a supor que $a = \max[0]\theta = 0$ então $z = 0$, donde se conclui que $(0, 1) \in \theta'$ e portanto $\theta' = \iota$ ou seja $\theta = \omega$, o que é absurdo.

Vejamos que $f^2(a) = a$. Com efeito $f^2(a) \in [0]\theta$, uma vez que $(0, a) \in \theta$. Assim temos $f^2(a) \leq a$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $f^2(a) < a$. Como f é bijectiva então f^2 é isomorfismo de ordem e por conseguinte a aplicação $j : \mathbb{N} \rightarrow L$, definida por $j(n) = f^{2n}(a)$, é injectiva, o que é absurdo porque L é finita.

Defina-se, em L , a relação binária α do modo seguinte:

$$(x, y) \in \alpha \implies x \vee a = y \vee a, \quad x \wedge f(a) = y \wedge f(a).$$

Tendo em conta que $f^2(a) = a$, é imediato verificar que α é uma congruência da álgebra de Ockham $(L; f)$.

Mostremos que $\alpha \subseteq \theta$. Seja $(x, y) \in \alpha$; assim temos $x \vee a = y \vee a$. Como $(0, a) \in \theta$ então $(x, x \vee a) \in \theta$, $(y, y \vee a) \in \theta$ e por conseguinte $(x, y) \in \theta$.

Vamos provar que $\alpha \neq \omega$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\alpha = \omega$. Tendo em conta que $f(a) \vee a = (a \vee f(a)) \vee a$ e $f(a) \wedge f(a) = (a \vee f(a)) \wedge f(a)$, conclui-se que $(f(a), a \vee f(a)) \in \alpha$. Como estamos a supor que $\alpha = \omega$ então tem-se $f(a) = a \vee f(a)$ e portanto $a \leq f(a)$.

Seja $\beta = \Theta_{\text{ret}}(a, f(a))$. Neste contexto é claro que

$$(x, y) \in \beta \implies x \wedge a = y \wedge a, \quad x \vee f(a) = y \vee f(a).$$

Facilmente, se verifica que β é uma congruência de $(L; f)$. Atendendo a que L é congruente-permutável conclui-se que $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta = \alpha \vee \beta$. Por outro lado temos $a \wedge a = f(a) \wedge a$, $a \vee f(a) = f(a) \vee f(a)$ e por conseguinte $(a, f(a)) \in \beta$. Como $(a, 0) \in \theta$ então $(f(a), 1) \in \theta$ e

por consequência $(a, 1) \in \beta\theta$. Observando que $(0, a) \in \theta \subseteq \beta\theta$ resulta que $(0, 1) \in \beta\theta$. Como $\beta\theta = \theta\beta$ então existe $t \in L$ tal que $(0, t) \in \theta$, $(t, 1) \in \beta$ e por conseguinte $t \leq a$, $t \wedge a = 1 \wedge a$, $t \vee f(a) = 1 \vee f(a)$. Nesta conformidade temos $t = t \wedge a = 1 \wedge a = a$, portanto $a \vee f(a) = 1$. Atendendo a que $a \leq f(a)$, conclui-se que $f(a) = 1 = f(0)$. Em virtude de f ser bijecção, resulta que $a = 0$; o que é absurdo.

Em suma, $\alpha \subseteq \theta$ e $\alpha \neq \omega$. Como θ é átomo resulta que $\theta = \alpha$; assim temos $(0, a) \in \alpha$ e por consequência $0 = 0 \wedge f(a) = a \wedge f(a)$. Portanto $1 = f(a) \vee f^2(a) = f(a) \vee a$, pois $f^2(a) = a$. Neste contexto temos $a \in \Gamma(L)$ e $\theta = \alpha = \zeta_a = \psi_L(a)$.

Fazendo uso do teorema 4.3, é fácil concluir que $a \in A(\Gamma_L)$; assim temos $U \subseteq \psi_L(A(\Gamma_L))$.

Como ψ_L é injectiva, teorema 4.3, então temos $|A(\Gamma_L)| = |\psi_L(A(\Gamma_L))|$ e por conseguinte $|U| \leq |A(\Gamma_L)|$.

Uma vez que já foi provado que $|A(\Gamma_L)| \leq |U|$, podemos concluir que $|U| = |A(\Gamma_L)|$ e por consequência

$$\Gamma(L) \simeq \text{Con } L.$$

(4) $\Rightarrow$ (1) Suponhamos que $\Gamma(L) \simeq \text{Con } L$ e $(L; f)$ é finita. Assim temos $|\Gamma(L)| = |\text{Con } L|$ e por aplicação do teorema 4.3 conclui-se que ψ_L é sobrejectiva e portanto isomorfismo de reticulados.

Para cada $a \in A(\Gamma_L)$ consideremos o epimorfismo, de álgebras de Ockham, $\varphi_a : L \rightarrow a^\perp$ definido por

$$\varphi_a(x) = x \wedge a.$$

É evidente que $\text{Ker } \varphi_a = \zeta_{a'}$. Por outro lado temos

$$\text{Con } a^\perp \simeq \text{Con } L / \zeta_{a'} \simeq [\zeta_{a'}, \iota].$$

Como ψ_L é isomorfismo de reticulados então, para cada $a \in A(\Gamma_L)$, $\psi_L(a') = \zeta_{a'}$ é co-átomo de $\text{Con } L$ e por conseguinte $a^\perp$ é álgebra de Ockham simples.

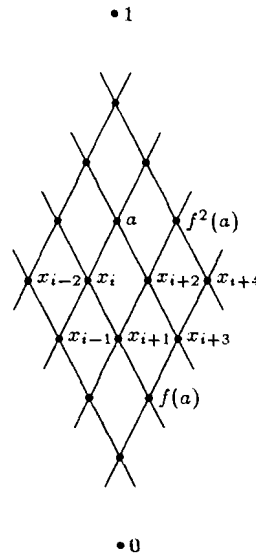
Por aplicação do corolário do teorema 4.6, conclui-se que L é isomorfa a um produto directo finito de álgebras simples. $\square$

Reexaminando a demonstração de $(2) \Rightarrow (3)$ conclui-se que dada uma álgebra de Ockham arbitrária $(L; f)$ então é válida a seguinte afirmação:

se ψ_L é isomorfismo então $(L; f)$ é congruente-permutável e f é injectiva.

No entanto, é possível definir uma álgebra de Ockham infinita $(L; f)$ tal que $(L; f)$ é congruente-permutável, f é injectiva e ψ_L não é isomorfismo.

Exemplo 4.1 Consideremos o reticulado distributivo L descrito pelo seguinte diagrama de Hasse



Seja $f : L \longrightarrow L$ definida por: $f(x_i) = x_{i+1}$, para cada i . Deste modo obtém-se uma álgebra de Ockham $(L; f)$; vide [9, Exemplo 2.4 (*The pineapple*)]. Nesta conformidade temos que f é injectiva e o reticulado das congruências de $(L; f)$ é uma cadeia infinita. Consequentemente, $(L; f)$ é congruente permutável. Por outro lado é claro que $\Gamma(L) = \{0, 1\}$, donde resulta que ψ_L não é isomorfismo.

Teorema 4.8 *Seja L uma álgebra de Ockham finita. Se $L \simeq \bigtimes_{i=1}^k L_i$, onde cada L_i é uma álgebra de Ockham simples e finita, então tem-se:*

$$(1) \ k = |A(\Gamma_L)|;$$

(2) *Existe uma bijecção $\sigma : \{1, \dots, k\} \longrightarrow A(\Gamma_L)$ tal que, para todo i , $L_i \simeq \sigma(i)^\perp$.*

Demonstração Suponhamos que $L \simeq \bigtimes_{i=1}^k L_i$, onde L_i é uma álgebra simples finita, qualquer que seja i . Aplicando o teoremas 4.2 e 4.5, conclui-se que

$$\Gamma(L) \simeq \bigtimes_{i=1}^k \Gamma(L_i) \simeq \mathbf{2}^k$$

e por conseguinte $k = |A(\Gamma_L)|$.

Seja $\xi : L \longrightarrow \bigtimes_{i=1}^k L_i$ um isomorfismo de álgebras de Ockham. Designemos por p_i a i -ésima projecção de $\bigtimes_{i=1}^k L_i$, ou seja p_i é definida por

$$p_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) = x_i.$$

Para cada i , temos $L / \text{Ker}(p_i\xi) \simeq L_i$, portanto $\text{Con } L_i \simeq [\text{Ker}(p_i\xi), \iota]$ e por consequência $\text{Ker}(p_i\xi)$ é co-átomo de $\text{Con } L$, uma vez que L_i é simples. Pelo teorema 4.7 ψ_L é isomorfismo de reticulados e por consequência, para cada i , $\psi_L^{-1}(\text{Ker}(p_i\xi))$ é um co-átomo de $\Gamma(L)$ que designaremos por b_i . Neste contexto temos $\text{Ker}(p_i\xi) = \psi_L(b'_i) = \zeta_{b'_i}$.

Consideremos a aplicação $\sigma : \{1, \dots, k\} \longrightarrow A(\Gamma_L)$ definida do seguinte modo

$$\sigma(i) = b'_i.$$

Mostremos que σ é injectiva. Para tal, suponhamos, com vista a um absurdo, que existem j, t tais que $\sigma(j) = \sigma(t)$ e $j \neq t$. Por definição de σ , temos $b'_j = b'_t$ e portanto $b_j = b_t$. Neste contexto temos

$$\text{Ker}(p_j\xi) = \text{Ker}(p_t\xi).$$

Consideremos os elementos de $\bigtimes_{i=1}^k L_i$, $x = (x_i)_{1 \leq i \leq k}$, $y = (y_i)_{1 \leq i \leq k}$, definidos do seguinte modo:

$$x_i = 0_{L_i}$$

$$y_i = \begin{cases} 0_{L_i} & \text{se } i = j; \\ 1_{L_i} & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Atendendo a que $p_j\xi(\xi^{-1}(x)) = p_j(x) = 0_{L_j}$, $p_j\xi(\xi^{-1}(y)) = p_j(y) = 0_{L_j}$, conclui-se que

$$(\xi^{-1}(x), \xi^{-1}(y)) \in \text{Ker}(p_j\xi) = \text{Ker}(p_t\xi)$$

e por consequência

$$0_{L_t} = p_t(x) = p_t(\xi(\xi^{-1}(x))) = p_t(\xi(\xi^{-1}(y))) = p_t(y).$$

Como estamos a supor que $t \neq j$ então temos $p_t(y) = 1_{L_t}$ e por conseguinte $0_{L_t} = 1_{L_t}$, o que é absurdo. Assim fica provado que σ é injectiva e portanto bijectiva, uma vez que $k = |A(\Gamma_L)|$.

Por outro lado, para cada i temos

$$L_i \simeq L / \text{Ker}(p_i \xi) = L / \zeta_{b_i} = L / \text{Ker} \varphi_{b_i'}.$$

Atendendo a que $L / \text{Ker} \varphi_{b_i'} \simeq b_i'^{\perp} = \sigma(i)^{\perp}$, podemos concluir que $L_i \simeq \sigma(i)^{\perp}$. $\square$

Teorema 4.9 *Seja L uma álgebra de Ockham finita. Se $L \simeq \bigtimes_{i=1}^k L_i$ e $L \simeq \bigtimes_{i=1}^l M_i$, onde as álgebras L_i, M_i são simples e finitas, então tem-se:*

(1) $k = l$;

(2) *Existe uma bijecção $\tau : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que, para todo i , $L_i \simeq M_{\tau(i)}$.*

Demonstração (1) Aplicando o teorema 4.8(1) temos $k = |A(\Gamma_L)|$, $l = |A(\Gamma_L)|$ e por conseguinte $k = l$.

(2) Pelo teorema 4.8(2) existem bijecções $\sigma : \{1, \dots, k\} \longrightarrow A(\Gamma_L)$, $\gamma : \{1, \dots, k\} \longrightarrow A(\Gamma_L)$ tais que $L_i \simeq \sigma(i)^{\perp}$ e $M_i \simeq \gamma(i)^{\perp}$, para todo i .

Seja $\tau = \gamma^{-1}\sigma$. Assim temos, para cada i , $M_{\tau(i)} = [\gamma(\tau(i))]^{\perp}$ e por conseguinte, tendo em conta que $\gamma(\tau(i)) = \sigma(i)$, resulta $M_{\tau(i)} \simeq \sigma(i)^{\perp} \simeq L_i$. $\square$

Para averiguar em que condições é regular o semigrupo dos endomorfismos de uma álgebra de **T**, precisamos de estabelecer alguns resultados preliminares e introduzir alguma terminologia.

Seja $(X; g)$ um espaço de Ockham tal que X é finito não vazio e g é bijecção. Neste contexto, designamos por $\text{Orb}(g)$ o conjunto das órbitas de g . Para cada $A \in \text{Orb}(g)$, definimos $c_A = |A|$. Se x é um elemento minimal de A , consideramos conjunto

$$D_A^x = \{n \in \{1, \dots, c_A - 1\} : g^n(x) > x\}.$$

Teorema 4.10 *Seja $(X; g)$ um espaço de Ockham tal que X é finito não vazio e g é bijecção. Se $A \in \text{Orb}(g)$ e x, y são elementos minimais de A então $D_A^x = D_A^y$.*

Demonstração Seja $A \in \text{Orb}(g)$ e x, y elementos minimais de A . Efectivamente, basta mostrar que $D_A^x \subseteq D_A^y$. Seja $n \in D_A^x$, assim temos $g^n(x) > x$. Por outro lado, atendendo a que $x, y \in A$, existe $r \in \{0, \dots, c_A - 1\}$ tal que $y = g^r(x)$. Vejamos que r é par; com efeito, se r fosse ímpar então $g^{n+r}(x) < g^r(x) = y$, o que é absurdo. Como r é par então $g^n(y) = g^{n+r}(x) > g^r(x) = y$ e por consequência $n \in D_A^y$. $\square$

Para cada $A \in \text{Orb}(g)$, denotamos por D_A o conjunto D_A^x , onde x é um elemento minimal de A .

Teorema 4.11 *Seja $(X; g)$ um espaço de Ockham tal que X é finito não vazio e g é bijecção. Se $A \in \text{Orb}(g)$ e $D_A \neq \emptyset$ então c_A é par.*

Demonstração Seja $A \in \text{Orb}(g)$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que $D_A \neq \emptyset$ e c_A é ímpar. Seja x um elemento minimal de A , por definição temos $D_A = D_A^x$. Como, por hipótese, $D_A \neq \emptyset$ então existe $n \in \{1, \dots, c_A - 1\}$ tal que $g^n(x) > x$. Neste contexto temos $g^n(x) = g^{n+c_A}(x) < g^{c_A}(x) = x$, o que é absurdo. $\square$

Teorema 4.12 *Seja $(X; g)$ um espaço de Ockham tal que X é finito não vazio e g é bijecção. Se $A \in \text{Orb}(g)$ então são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $D_A = \emptyset$;
- (2) A é anti-cadeia.

Demonstração Como X é finito então existe $p \geq 1$ tal que $g^p = \text{id}_X$. Seja $A \in \text{Orb}(g)$ e x um elemento minimal de A , por definição temos $D_A = D_A^x$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos que A não é anticadeia. Então existem $r, s \in \{0, \dots, c_A - 1\}$ tais que $g^s(x) < g^r(x)$.

Mostremos que s é par. Suponhamos, com vista a um absurdo, que s é ímpar. Assim temos que g^{2p-s} é antitona e por consequência $x = g^{2p}(x) = g^{2p-s+s}(x) > g^{2p-s+r}(x)$, o que é absurdo.

Como s é par então g^{2p-s} é isótona e portanto $x = g^{2p}(x) = g^{2p-s+s}(x) < g^{2p-s+r}(x)$.

Designemos por v o resto na divisão euclideana de $2p-s+r$ por c_A e por q o respectivo quociente. Assim temos $2p-s+r = qc_A + v$, com $0 \leq v < c_A$ e por conseguinte $x < g^{2p-s+r}(x) = g^v(x)$, donde resulta que $v \in D_A$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Suponhamos que $D_A \neq \emptyset$, seja $r \in D_A$. Por definição, temos $g^r(x) > x$ e por consequência A não é anti-cadeia. $\square$

Seja $(X; g)$ um espaço de Ockham tal que X é finito não vazio e g é bijecção.

Dado $(A, B) \in \text{Orb}(g) \times \text{Orb}(g)$, definimos o conjunto

$$S_{A,B} = \{n \in \{1, \dots, c_A - 1\} : c_B \text{ não divide } n\}.$$

Para cada $A \in \text{Orb}(g)$ definimos a aplicação $\delta_A : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \{0, \dots, c_A - 1\}$ do seguinte modo

$\delta_A(n)$ é o resto obtido na divisão euclideana de n por c_A .

No conjunto $\text{Orb}(g)$, definimos a relação binária R_g por

$$(A, B) \in R_g \iff \delta_B(S_{A,B} \cap D_A) \subseteq D_B \text{ e } c_B | c_A.$$

Teorema 4.13 *Seja $(X; g)$ um espaço de Ockham tal que X é finito não vazio e g é bijecção. A relação binária R_g é reflexiva e transitiva.*

Demonstração Seja $A \in \text{Orb}(g)$. É claro que $S_{A,A} = \{1, \dots, c_A - 1\}$ e portanto $D_A \subseteq S_{A,A}$. Assim temos $S_{A,A} \cap D_A = D_A$. Atendendo a que $\delta_A(D_A) = D_A$ conclui-se que $(A, A) \in R_g$.

Sejam $A, Y, B \in \text{Orb}(g)$ tais que $(A, Y) \in R_g$ e $(Y, B) \in R_g$. Mostremos, primeiramente, que $\delta_B(S_{A,B} \cap D_A) \subseteq D_B$. Seja $l \in S_{A,B} \cap D_A$. Seja s o resto na divisão euclideana de l por c_Y e p o respectivo quociente, assim temos: $l = p.c_Y + s$, $0 \leq s < c_Y$. Designemos por u o resto na divisão euclideana de s por c_B e por t o respectivo quociente, nesta conformidade temos: $s = t.c_B + u$, $0 \leq u < c_B$.

Mostremos que $l \in S_{A,Y}$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que $l \notin S_{A,Y}$. Como $l \in D_A$ então $1 \leq l < c_A$ e por conseguinte $c_Y | l$. Atendendo a que $c_B | c_Y$, conclui-se que $c_B | l$ e portanto $l \notin S_{A,B}$, o que é absurdo.

Assim temos $l \in S_{A,Y} \cap D_A$. Como $s = \delta_Y(l)$ e, por hipótese, $\delta_Y(S_{A,Y} \cap D_A) \subseteq D_Y$ então conclui-se que $s \in D_Y$.

Mostremos que $s \in S_{Y,B}$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que $s \notin S_{Y,B}$. Como $s \in D_Y$ então $1 \leq s < c_Y$ e portanto $c_B | s$. Então $u = 0$ e $s = t.c_B$ e por consequência

$l = p.c_Y + t.c_B$. Como $c_B|c_Y$ então $c_B|l$ e por conseguinte $l \notin S_{A,B}$, o que é absurdo.

Assim temos $s \in S_{Y,B} \cap D_Y$. Como $u = \delta_B(s)$ e, por hipótese, $\delta_B(S_{Y,B} \cap D_Y) \subseteq D_B$ então conclui-se que $u \in D_B$. Como $c_B|c_Y$ então existe v tal que $c_Y = v.c_B$. Assim temos

$$l = p.c_Y + s = p.c_Y + t.c_B + u = (p.v + t).c_B + u,$$

atendendo a que $0 \leq u < c_B$, conclui-se que $\delta_B(l) = u \in D_B$. Dos raciocínios descritos resulta que $\delta_B(S_{A,B} \cap D_A) \subseteq D_B$.

Por outro lado temos, por hipótese, que $c_B|c_Y$ e $c_Y|c_A$. Então conclui-se que $c_B|c_A$. Do exposto resulta que $(A, B) \in R_g$. $\square$

Seja M um conjunto não vazio e finito e R uma relação binária definida em M . Suponhamos que R é reflexiva e transitiva.

Designaremos por *caminho singelo* de R qualquer lista ordenada $z = (z_0, \dots, z_n)$, de elementos de M , que verifique as seguintes propriedades:

- (i) $(\forall i \in \{0, \dots, n-1\}) (z_i, z_{i+1}) \in R$,
- (ii) $(\forall i, j \in \{0, \dots, n\}) i < j \implies (z_j, z_i) \notin R$.

Denotamos por $\text{comp}(z)$ o número n , que denominamos comprimento de z . É de observar que dado $a \in M$, a lista (a) é um caminho singelo de R e $\text{comp}(a) = 0$. Designemos por $\text{Cs}(R)$ o conjunto de todos os caminhos singelos de R . Se $z = (z_0, \dots, z_n) \in \text{Cs}(R)$ então é claro que $n+1 \leq |M|$ e portanto $\text{comp}(z) \leq |M| - 1$. Assim temos que $\{\text{comp}(z) : z \in \text{Cs}(R)\}$ é um subconjunto não vazio e finito de $\mathbb{N}$ e por conseguinte $\{\text{comp}(z) : z \in \text{Cs}(R)\}$ tem máximo que denotamos por $\text{comp}(R)$ e denominamos comprimento de R .

Neste contexto designamos por $\hat{R}$ a relação binária definida em M por

$$(x, y) \in \hat{R} \Leftrightarrow (x, y) \in R \text{ e } (y, x) \in R.$$

É claro que $\hat{R}$ é uma relação de equivalência, uma vez que estamos a supor que R é reflexiva e transitiva.

Designaremos por *terno patológico* associado a R qualquer terno ordenado (i, j, k) , de elementos de M mutuamente distintos, tal que

$$(i, j) \in R, (j, k) \in \hat{R} \text{ e } (j, i) \notin R.$$

Teorema 4.14 *Seja M um conjunto não vazio e finito e R uma relação binária reflexiva e transitiva, definida em M . São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) *Existe pelo menos um terno patológico associado a R ou $\text{comp}(R) \geq 2$;*
- (2) *Existem $i, j, k \in M$, mutuamente distintos, tais que: $(i, j) \in R$, $(j, k) \in R$ e $(j, i) \notin R$.*

Demonstração (1) $\implies$ (2) Examinaremos dois casos.

No caso de existir um terno patológico (i, j, k) associado a R é óbvio que (2) se verifica.

Se $\text{comp}(R) \geq 2$ então existe $z = (z_0, \dots, z_n) \in \text{Cs}(R)$, onde $n = \text{comp}(R)$. Como $n \geq 2$ então podemos considerar os elementos z_0, z_1, z_2 . Atendendo a que $z \in \text{Cs}(R)$ conclui-se que os referidos elementos verificam as condições requeridas em (2).

(2) $\implies$ (1) Suponhamos que existem $i, j, k \in M$, mutuamente distintos, tais que: $(i, j) \in R$, $(j, k) \in R$ e $(j, i) \notin R$.

Se $(k, j) \in R$ então (i, j, k) é um terno patológico de R .

No caso de $(k, j) \notin R$ conclui-se que (i, j, k) é um caminho singular de R e por consequência $2 = \text{comp}(i, j, k) \leq \text{comp}(R)$. $\square$

Dizemos que um espaço de Ockham $(X; g)$ é *redutível* se X é finito não vazio, g é bijecção e para quaisquer $A, B \in \text{Orb}(g)$, tais que $A \neq B$, se tem

$$(\forall a \in A) (\forall b \in B) a \parallel b.$$

Dado um espaço de Ockham $(X; g)$, dizemos que $(X; g)$ é *cíclico* se X é finito não vazio, g é bijecção e se, para qualquer $x \in X$,

$$X = \{g^i(x) : 0 \leq i < |X|\}.$$

Teorema 4.15 *Seja $(L; f)$ uma álgebra de Ockham e $(X; g)$ o respectivo espaço dual. São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $L \simeq \bigtimes_{i=1}^k L_i$, onde cada L_i é uma álgebra de Ockham simples e finita;
- (2) $X \simeq \bigsqcup_{i=1}^k X_i$, onde cada X_i é um espaço cíclico;
- (3) O espaço de Ockham X é redutível.

Demonstração (1) $\implies$ (2) Suponhamos que $L \simeq \bigtimes_{i=1}^k L_i$, onde as álgebras de Ockham L_i , são simples e finitas. Para cada i , designemos por $(X_i; g_i)$ o espaço dual de L_i . Aplicando os teoremas 1.4 e 1.12 conclui-se que

$$\bigsqcup_{i=1}^k X_i \simeq \mathcal{E}(\mathcal{A}(\bigsqcup_{i=1}^k X_i)) \simeq \mathcal{E}(\bigtimes_{i=1}^k \mathcal{A}(X_i)).$$

Pelo teorema 1.3 temos $\mathcal{A}(X_i) \simeq L_i$, para cada i . Assim resulta que $\bigtimes_{i=1}^k \mathcal{A}(X_i) \simeq \bigtimes_{i=1}^k L_i \simeq L$ e por consequência obtém-se

$$\bigsqcup_{i=1}^k X_i \simeq X.$$

Como, para cada i , L_i é simples então, aplicando o teorema 1.15, conclui-se que X_i é cíclico.

(2) $\implies$ (3) Suponhamos que $X \simeq \bigsqcup_{i=1}^k X_i$, onde os espaços de Ockham X_i , são cíclicos. Usando as notações introduzidas no capítulo 1, temos $(X_i; g_i) \simeq (\tilde{X}_i; \tilde{g}_i)$ e por conseguinte $(\tilde{X}_i; \tilde{g}_i)$ é cíclico porque, por hipótese, $(X_i; g_i)$ é cíclico. Assim temos $\text{Orb}(\tilde{g}) = \{\tilde{X}_i : 1 \leq i \leq k\}$ e por conseguinte $\bigsqcup_{i=1}^k X_i$ é redutível. Atendendo a que $X \simeq \bigsqcup_{i=1}^k X_i$ conclui-se que X é redutível.

(3) $\implies$ (1) Suponhamos que $(X; g)$ é redutível. Sejam $Y_1, \dots, Y_k$ as órbitas de g . Para cada i , defina-se a aplicação $g_i : Y_i \longrightarrow Y_i$ do modo seguinte

$$g_i(y) = g(y).$$

É claro que, para cada i , (Y_i, g_i) é espaço de Ockham cíclico e por consequência, aplicando o teorema 1.15, $\mathcal{A}(Y_i)$ é álgebra de Ockham simples. Atendendo a que $(X; g)$ é redutível sai que $X \simeq \bigsqcup_{i=1}^k Y_i$. Fazendo uso do teorema 1.12 conclui-se que

$$\mathcal{A}(X) \simeq \bigtimes_{i=1}^k \mathcal{A}(Y_i).$$

Pelo teorema 1.3 temos $L \simeq \mathcal{A}(X)$ e por consequência $L \simeq \bigtimes_{i=1}^k \mathcal{A}(Y_i)$. $\square$

Como referimos no início deste capítulo, é nosso objectivo estabelecer condições necessárias e suficientes para que $\text{End } L$ seja semigrupo regular, onde L é uma álgebra pertencente a $\mathbf{T}$. Em face do teorema 4.15 e tendo presente o teorema 1.11, podemos formular o referido problema em termos de espaços de Ockham. Mais precisamente, tudo se resume a caracterizar os espaços de Ockham redutíveis, $(X; g)$, tais que $\Lambda(X; g)$ é semigrupo regular.

Daqui em diante usaremos as convenções que a seguir se definem.

Dado um espaço de Ockham redutível $(X; g)$, designaremos por $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ uma família de elementos de $\text{Orb}(g)$, tal que $\text{Orb}(g) = \{X_i : 1 \leq i \leq m\}$ e $X_i \neq X_j$, quaisquer que sejam $i \neq j$. Seja $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ uma família de elementos de X tal que, x_i é um elemento minimal de X_i , para todo i .

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ definimos o conjunto

$$X_i^+ = \{g^{2r}(x_i) : r \in \mathbb{N} \text{ e } r < c_{X_i}/2\}.$$

Para cada $(i, j) \in \{1, \dots, m\}^2$ definimos o conjunto

$$\overline{X}_{i,j} = \begin{cases} X_j & \text{se } S_{X_i, X_j} \cap D_{X_i} = \emptyset; \\ X_j^+ & \text{se } S_{X_i, X_j} \cap D_{X_i} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Dado $i \in \{1, \dots, m\}$, defina-se o conjunto

$$A_i = \{j \in \{1, \dots, m\} : (X_i, X_j) \in R_g\}.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ consideremos o seguinte conjunto

$$N_i = \bigcup_{j \in A_i} \overline{X}_{i,j}.$$

Teorema 4.16 *Seja $(X; g)$ um espaço de Ockham redutível. Se $\vartheta \in \Lambda(X; g)$ então $\vartheta(x_i) \in N_i$, qualquer que seja i .*

Demonstração Observemos, primeiramente, que em virtude de X ser finito podemos garantir que existe $p \geq 1$ tal que $g^p = \text{id}_X$.

Seja $i \in \{1, \dots, m\}$. Existe um e um só $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\vartheta(x_i) \in X_j$. Neste contexto, existe um e um só $0 \leq l < c_{X_j}$ tal que $\vartheta(x_i) = g^l(x_j)$.

Mostremos que $(X_i, X_j) \in R_g$. Como $\Lambda(X; g) \subseteq \mathcal{C}(g)$, então podemos concluir que $\vartheta \in \mathcal{C}(g)$ e por consequência, fazendo uso do teorema 3.2, resulta $c_{X_j} | c_{X_i}$.

Vamos mostrar que $\delta_{X_j}(S_{X_i, X_j} \cap D_{X_i}) \subseteq D_{X_j}$. Seja $r \in S_{X_i, X_j} \cap D_{X_i}$, por definição temos: $0 < r < c_{X_i}$, $g^r(x_i) > x_i$ e c_{X_j} não divide r . Como $\vartheta \in \Lambda(X; g)$ então $g^r \vartheta(x_i) = \vartheta g^r(x_i) \geq \vartheta(x_i)$ e por conseguinte $g^{r+l}(x_j) \geq g^l(x_j)$.

Vejam os que l é par. Suponhamos, com vista a uma contradição, que l é ímpar. Assim g^{2p-l} é antitona e por consequência

$$g^r(x_j) = g^{2p-l}g^{r+l}(x_j) \leq g^{2p-l}g^l(x_j) = x_j.$$

Neste contexto temos $g^r(x_j) \leq x_j$; atendendo a que x_j é elemento minimal de X_j conclui-se que $g^r(x_j) = x_j$ e por conseguinte $c_{X_j} | r$, o que é absurdo.

Nesta conformidade temos que l é par e por consequência, g^{2p-l} é isotona. Tendendo presente que $g^{r+l}(x_j) \geq g^l(x_j)$, conclui-se

$$g^r(x_j) = g^{2p-l}g^{r+l}(x_j) \geq g^{2p-l}g^l(x_j) = x_j$$

e por conseguinte $g^r(x_j) \geq x_j$. Tendo em conta que c_{X_j} não divide r , conclui-se que $g^r(x_j) > x_j$.

Seja v o resto na divisão euclideana de r por c_{X_j} e q o respectivo quociente; assim temos $r = q \cdot c_{X_j} + v$, com $0 \leq v < c_{X_j}$ e portanto $\delta_{X_j}(r) = v$. Neste contexto temos

$$g^v(x_j) = g^v g^{q \cdot c_{X_j}}(x_j) = g^r(x_j) > x_j.$$

Em suma, $1 \leq v < c_{X_j}$ e $g^v(x_j) > x_j$, o que significa que $\delta_{X_j}(r) = v \in D_{X_j}$.

Do que acima foi exposto resulta que $\delta_{X_j}(S_{X_i, X_j} \cap D_{X_i}) \subseteq D_{X_j}$ e $c_{X_j} | c_{X_i}$; por definição temos $(X_i, X_j) \in R_g$, consequentemente $j \in A_i$.

Mostremos que $\vartheta(x_i) \in \overline{X}_{i,j}$. No caso de $S_{X_i, X_j} \cap D_{X_i} = \emptyset$ temos $\overline{X}_{i,j} = X_j$ e nada há a provar.

Se $S_{X_i, X_j} \cap D_{X_i} \neq \emptyset$ então existe $r \in S_{X_i, X_j} \cap D_{X_i}$ e por conseguinte, como acima mostrámos, l é par. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $l = 2k$; atendendo a que $0 \leq l < c_{X_j}$, conclui-se que $0 \leq k < c_{X_j}/2$ e por consequência $\vartheta(x_i) \in X_j^+ = \overline{X}_{i,j}$.

Em qualquer dos casos temos $\vartheta(x_i) \in \overline{X}_{i,j}$ com $j \in A_i$, portanto $\vartheta(x_i) \in N_i$. $\square$

Teorema 4.17 *Dado um espaço de Ockham redutível $(X; g)$. Para cada $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$, pertencente a $\bigcap_{i=1}^m N_i$, existe um e um só $\vartheta \in \Lambda(X; g)$ tal que $\vartheta(x_i) = b_i$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$*

Demonstração Seja $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$ um elemento de $\bigcap_{i=1}^m N_i$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ existe um e um $t_i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $b_i \in X_{t_i}$. Neste contexto, podemos afirmar que: para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe um e um só $l_i \in \{0, \dots, c_{X_{t_i}} - 1\}$ tal que $b_i = g^{l_i}(x_{t_i})$.

Como $b_i \in N_i$ então $t_i \in A_i$ e $b_i \in \overline{X}_{i,t_i}$. Por definição de A_i , temos $(X_i, X_{t_i}) \in R_g$ e por conseguinte $c_{X_{t_i}} | c_{X_i}$. Fazendo uso do teorema 3.2, podemos afirmar que existe $\vartheta \in \mathcal{C}(g)$ tal que: $\vartheta(x_i) = b_i$, para qualquer $i \in \{1, \dots, m\}$. Seguidamente, vamos provar que $\vartheta \in \Lambda(X; g)$; para tal basta mostrar que ϑ é isótoma.

Sejam $y, z \in X$ tais que $y < z$. Como $(X; g)$ é redutível então existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $y, z \in X_i$ e por consequência existem $r, t \in \{0, \dots, c_{X_i} - 1\}$ tais que $y = g^r(x_i)$ e $z = g^t(x_i)$.

Como X é finito existe $p \geq 1$ tal que $g^p = \text{id}_X$.

Mostremos que r é par. Suponhamos, com vista a uma contradição, que r é ímpar e por consequência g^{2p-r} é antítoma. Tendo em conta que $g^r(x_i) = y < z = g^t(x_i)$, podemos concluir que

$$x_i = g^{2p-r} g^r(x_i) > g^{2p-r} g^t(x_i).$$

Assim temos $x_i > g^{2p-r+t}(x_i)$; o que é absurdo, uma vez que x_i é elemento minimal de X_i .

Como r é par então g^{2p-r} é isótoma e por conseguinte

$$x_i = g^{2p-r} g^r(x_i) < g^{2p-r+t}(x_i).$$

Defina-se $u = 2p - r + t$. Seja s o resto na divisão euclidiana de u por c_{X_i} e q o respectivo quociente; assim temos $u = q \cdot c_{X_i} + s$ com $0 \leq s < c_{X_i}$. É claro que $g^u(x_i) = g^s g^{q \cdot c_{X_i}}(x_i) = g^s(x_i)$ e por conseguinte $g^s(x_i) > x_i$. Nesta conformidade, conclui-se que $s \in D_{X_i}$.

Prosseguiremos a demonstração examinando dois casos.

(1) Suponhamos que $s \notin S_{X_i, X_{t_i}}$. Neste caso, atendendo a que $1 \leq s < c_{X_i}$, conclui-se que $c_{X_{t_i}}$ divide s . Como $c_{X_{t_i}}$ divide c_{X_i} e $u = q \cdot c_{X_i} + s$ então $c_{X_{t_i}}$ divide u . Assim temos $g^u(x_{t_i}) = x_{t_i}$ e portanto $g^r g^u(x_{t_i}) = g^r(x_{t_i})$. Como $u = 2p - r + t$ então $g^t(x_{t_i}) = g^r(x_{t_i})$ e por consequência $g^{l_i} g^t(x_{t_i}) = g^{l_i} g^r(x_{t_i})$; donde se infere $g^t g^{l_i}(x_{t_i}) = g^r g^{l_i}(x_{t_i})$. Neste contexto tem-se $g^t \vartheta(x_i) = g^r \vartheta(x_i)$. Então $\vartheta g^t(x_i) = \vartheta g^r(x_i)$ e por conseguinte $\vartheta(z) = \vartheta(y)$.

(2) Suponhamos que $s \in S_{X_i, X_{t_i}}$. Como $s \in D_{X_i}$ então $s \in S_{X_i, X_{t_i}} \cap D_{X_i}$ e portanto $S_{X_i, X_{t_i}} \cap D_{X_i} \neq \emptyset$. Então temos $\overline{X}_{i,t_i} = X_{t_i}^+$ e por consequência l_i é par, uma vez que $\vartheta(x_i) = g^{l_i}(x_{t_i}) \in \overline{X}_{i,t_i}$.

Seja v o resto na divisão euclidiana de s por $c_{X_{t_i}}$ e d o respectivo quociente; assim temos $s = d \cdot c_{X_{t_i}} + v$ com $0 \leq v < c_{X_{t_i}}$. Como $(X_i, X_{t_i}) \in R_g$ então $\delta_{X_{t_i}}(S_{X_i, X_{t_i}} \cap D_{X_i}) \subseteq D_{X_{t_i}}$. Atendendo a que $v = \delta_{X_{t_i}}(s)$ e $s \in S_{X_i, X_{t_i}} \cap D_{X_i}$, conclui-se que $v \in D_{X_{t_i}}$ e por consequência

$$g^s(x_{t_i}) = g^v g^{d \cdot c_{X_{t_i}}}(x_{t_i}) = g^v(x_{t_i}) > x_{t_i}.$$

Tendo em conta que $c_{X_{t_i}}$ divide c_{X_i} , deduz-se $g^s g^{q \cdot c_{X_i}}(x_{t_i}) = g^s(x_{t_i})$. Recordando que $u = q \cdot c_{X_i} + s$ conclui-se que $g^u(x_{t_i}) = g^s(x_{t_i}) = g^v(x_{t_i}) > x_{t_i}$ e por consequência $g^u(x_{t_i}) > x_{t_i}$. Como r é par g^r é isótona, tendo em conta que $u = 2p - r + t$, então temos $g^t(x_{t_i}) = g^r g^u(x_{t_i}) > g^r(x_{t_i})$. Atendendo a que l_i é par, conclui-se que g^{l_i} é isótona e por consequência

$$g^{l_i} g^t(x_{t_i}) > g^{l_i} g^r(x_{t_i}).$$

É evidente que $g^t g^{l_i}(x_{t_i}) > g^r g^{l_i}(x_{t_i})$ e, consequentemente, $g^t \vartheta(x_i) > g^r \vartheta(x_i)$. Donde resulta $\vartheta g^t(x_i) > \vartheta g^r(x_i)$ e por conseguinte $\vartheta(z) > \vartheta(y)$.

Do exposto resulta que ϑ é isótona.

Para mostrar a unicidade, suponhamos que existe $\varphi \in \Lambda(X; g)$ tal que $\varphi(x_i) = b_i$, qualquer que seja $i \in \{1, \dots, m\}$. Tendo em conta que $\vartheta, \varphi \in \mathcal{C}(g)$ e aplicando o teorema 3.2, conclui-se que $\vartheta = \varphi$. $\square$

Como consequência dos teoremas 4.16 e 4.17, podemos estabelecer um resultado acerca do cardinal do semigrupo dos endomorfismos de uma álgebra pertencente a $\mathbf{T}$.

Dado um espaço de Ockham redutível $(X; g)$; para cada $Y \in \text{Orb}(g)$, definimos os seguintes conjuntos

$$\Omega_Y^0 = \{Z \in \text{Orb}(g) : (Y, Z) \in R_g \text{ e } S_{Y, Z} \cap D_Y = \emptyset\},$$

$$\Omega_Y^1 = \{Z \in \text{Orb}(g) : (Y, Z) \in R_g \text{ e } S_{Y, Z} \cap D_Y \neq \emptyset\}.$$

Teorema 4.18 *Seja $(L; f) \in \mathbf{T}$ e $(X; g)$ o espaço dual de $(L; f)$. Então tem-se*

$$|\text{End}(L; f)| = |\Lambda(X; g)| = \prod_{Y \in \text{Orb}(g)} \left(\sum_{Z \in \Omega_Y^0} c_Z + \frac{1}{2} \sum_{Z \in \Omega_Y^1} c_Z \right).$$

Demonstração Tendo em consideração o teorema 4.15, observemos que $(X; g)$ é um espaço de Ockham redutível. Pelo teorema 1.11 conclui-se que $|\text{End}(L; f)| = |\Lambda(X; g)|$.

Consideremos uma família $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$, de elementos do conjunto $\text{Orb}(g)$, tal que $\text{Orb}(g) = \{X_i : 1 \leq i \leq m\}$ e $X_i \neq X_j$, quaisquer que sejam i, j tais que $i \neq j$. Seja $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ uma família de elementos de X tal que, para cada i , x_i é um elemento minimal de X_i .

Tendo em vista o teorema 4.16, podemos definir uma aplicação $\psi : \Lambda(X; g) \longrightarrow \bigtimes_{i=1}^m N_i$, do seguinte modo

$$\psi(\vartheta) = (\vartheta(x_1), \dots, \vartheta(x_m)).$$

Fazendo uso do teorema 4.17, conclui-se que ψ é bijecção e por consequência $|\Lambda(X; g)| = \prod_{i=1}^m |N_i|$.

Vamos fazer algumas observações acerca dos elementos de Ω_Y^1 . Seja $Z \in \Omega_Y^1$. Então temos $(Y, Z) \in R_g$, portanto $\delta_Z(S_{Y,Z} \cap D_Y) \subseteq D_Z$. Atendendo a que $S_{Y,Z} \cap D_Y \neq \emptyset$, resulta $D_Z \neq \emptyset$ e por conseguinte, pelo teorema 4.11, conclui-se que c_Z é par.

Dado $i \in \{1, \dots, m\}$, consideremos os conjuntos definidos do seguinte modo

$$E_i^0 = \{j \in \{1, \dots, m\} : X_j \in \Omega_{X_i}^0\},$$

$$E_i^1 = \{j \in \{1, \dots, m\} : X_j \in \Omega_{X_i}^1\}.$$

É claro que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, temos

$$N_i = \left(\bigcup_{j \in E_i^0} \overline{X}_{i,j} \right) \cup \left(\bigcup_{j \in E_i^1} \overline{X}_{i,j} \right).$$

Assim temos

$$|N_i| = \left| \bigcup_{j \in E_i^0} \overline{X}_{i,j} \right| + \left| \bigcup_{j \in E_i^1} \overline{X}_{i,j} \right|.$$

Para cada $j \in E_i^0$ tem-se $\overline{X}_{i,j} = X_j$ e por conseguinte $|\overline{X}_{i,j}| = c_{X_j}$. Por outro lado, para cada $j \in E_i^1$ temos que: c_{X_j} é par, $\overline{X}_{i,j} = X_j^+$ e por conseguinte $|\overline{X}_{i,j}| = \frac{c_{X_j}}{2}$.

Do exposto resulta que

$$|N_i| = \sum_{j \in E_i^0} c_{X_j} + \sum_{j \in E_i^1} \frac{c_{X_j}}{2} = \sum_{Z \in \Omega_{X_i}^0} c_Z + \sum_{Z \in \Omega_{X_i}^1} \frac{c_Z}{2}.$$

Neste contexto podemos afirmar que

$$|\Lambda(X; g)| = \prod_{i=1}^m \left(\sum_{Z \in \Omega_{X_i}^0} c_Z + \sum_{Z \in \Omega_{X_i}^1} \frac{c_Z}{2} \right) = \prod_{Y \in \text{Orb}(g)} \left(\sum_{Z \in \Omega_Y^0} c_Z + \sum_{Z \in \Omega_Y^1} \frac{c_Z}{2} \right).$$

Dos raciocínios acima expostos conclui-se que

$$|\Lambda(X;g)| = \prod_{Y \in \text{Orb}(g)} \left(\sum_{Z \in \Omega_Y^0} c_Z + \frac{1}{2} \sum_{Z \in \Omega_Y^1} c_Z \right). \quad \square$$

Teorema 4.19 *Seja $(X;g)$ um espaço de Ockham redutível e $Z_1, Z_2 \in \text{Orb}(g)$.*

Se $c_{Z_1} = c_{Z_2}$ então $S_{Z_1, Z_2} = S_{Z_2, Z_1} = \{1, \dots, c_{Z_1} - 1\}$.

Demonstração Suponhamos que $c_{Z_1} = c_{Z_2}$. Mostremos que $S_{Z_1, Z_2} = \{1, \dots, c_{Z_1} - 1\}$. Por definição, $S_{Z_1, Z_2} \subseteq \{1, \dots, c_{Z_1} - 1\}$. Assim basta provar que $\{1, \dots, c_{Z_1} - 1\} \subseteq S_{Z_1, Z_2}$. Seja $l \in \{1, \dots, c_{Z_1} - 1\}$. Neste contexto é claro que c_{Z_2} não divide l , uma vez que $1 \leq l < c_{Z_1} = c_{Z_2}$. Portanto $l \in S_{Z_1, Z_2}$.

Por outro lado $S_{Z_1, Z_2} = S_{Z_2, Z_1}$ porque $c_{Z_1} = c_{Z_2}$. $\square$

Teorema 4.20 *Dado um espaço de Ockham redutível $(X;g)$. Se $Z_1, Z_2 \in \text{Orb}(g)$ então são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $(Z_1, Z_2) \in \hat{R}_g$;
- (2) $c_{Z_1} = c_{Z_2}$ e $D_{Z_1} = D_{Z_2}$.

Demonstração $(1) \implies (2)$ Suponhamos que $(Z_1, Z_2) \in \hat{R}_g$. Por definição temos que $c_{Z_1} | c_{Z_2}$ e $c_{Z_2} | c_{Z_1}$; donde se tira que $c_{Z_1} = c_{Z_2}$. Fazendo uso do teorema 4.19, conclui-se que $S_{Z_1, Z_2} = S_{Z_2, Z_1} = \{1, \dots, c_{Z_1} - 1\}$ e por consequência

$$S_{Z_1, Z_2} \cap D_{Z_1} = \{1, \dots, c_{Z_1} - 1\} \cap D_{Z_1} = D_{Z_1},$$

$$S_{Z_2, Z_1} \cap D_{Z_2} = \{1, \dots, c_{Z_1} - 1\} \cap D_{Z_2} = D_{Z_2}.$$

Neste contexto, podemos concluir que

$$\delta_{Z_2}(S_{Z_1, Z_2} \cap D_{Z_1}) = \delta_{Z_2}(D_{Z_1}) = D_{Z_1},$$

$$\delta_{Z_1}(S_{Z_2, Z_1} \cap D_{Z_2}) = \delta_{Z_1}(D_{Z_2}) = D_{Z_2}.$$

Como estamos a supor que $(Z_1, Z_2) \in \hat{R}_g$ então tira-se $D_{Z_1} \subseteq D_{Z_2}$ e $D_{Z_2} \subseteq D_{Z_1}$; donde resulta que $D_{Z_1} = D_{Z_2}$.

(2) $\implies$ (1) Suponhamos que $c_{Z_1} = c_{Z_2}$ e $D_{Z_1} = D_{Z_2}$. Aplicando o teorema 4.19, conclui-se que $S_{Z_1, Z_2} = S_{Z_2, Z_1} = \{1, \dots, c_{Z_1} - 1\}$ e por consequência

$$\delta_{Z_2}(S_{Z_1, Z_2} \cap D_{Z_1}) = \delta_{Z_2}(D_{Z_1}) = D_{Z_1},$$

$$\delta_{Z_1}(S_{Z_2, Z_1} \cap D_{Z_2}) = \delta_{Z_1}(D_{Z_2}) = D_{Z_2}.$$

Como, por hipótese, temos $c_{Z_1} = c_{Z_2}$ e $D_{Z_1} = D_{Z_2}$ então sai que $(Z_1, Z_2) \in \hat{R}_g$. $\square$

Teorema 4.21 *Dado $y \in X_t$. Para cada i , são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $y \in N_i$;
- (2) $t \in A_i$ e $y \in \bar{X}_{i,t}$

Demonstração Seja $i \in \{1, \dots, m\}$.

(1) $\implies$ (2) Suponhamos que $y \in N_i$. Então existe $j \in A_i$ tal que $y \in \bar{X}_{i,j}$. Atendendo a que $y \in X_t$ e $y \in \bar{X}_{i,j} \subseteq X_j$ conclui-se que $j = t$. Assim tem-se $y \in \bar{X}_{i,t}$ e $t \in A_i$.

(2) $\implies$ (1) Suponhamos que $t \in A_i$ e $y \in \bar{X}_{i,t}$. Neste contexto, é claro que $y \in N_i$. $\square$

Finalmente, estamos em condições de estabelecer uma condição necessária e suficiente para que seja regular o semigrupo dos endomorfismos de uma álgebra de $\mathbf{T}$.

Teorema 4.22 *Seja $(L; f) \in \mathbf{T}$ e $(X; g)$ o espaço dual de $(L; f)$. São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) $\text{End}(L; f)$ é regular;
- (2) Não existe nenhum terno patológico associado a R_g e $\text{comp}(R_g) \leq 1$.

Demonstração Tendo em consideração o teorema 4.15, observemos que $(X; g)$ é um espaço de Ockham redutível. Pelo teorema 1.11 temos que $\text{End}(L; f)$ e $\Lambda(X; g)$ são anti-isomorfos. Por consequência podemos afirmar que: $\text{End}(L; f)$ é regular se, e só se, $\Lambda(X; g)$ é regular.

Consideremos uma família $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$, de elementos pertencentes a $\text{Orb}(g)$, tal que $\text{Orb}(g) = \{X_i : 1 \leq i \leq m\}$ e $X_i \neq X_j$, quaisquer que sejam i, j tais que $i \neq j$. Seja $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ uma família de elementos de X tal que, para cada i , x_i é um elemento minimal de X_i .

(1) $\implies$ (2) Suponhamos que $\Lambda(X; g)$ é regular. Suponhamos, com vista a uma contradição, que existe pelo menos um terno patológico associado a R_g ou $\text{comp}(R_g) \geq 2$. Fazendo uso do

teorema 4.14, podemos garantir que existem $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$, mutuamente distintos, tais que:

$$(X_i, X_j) \in R_g, (X_j, X_k) \in R_g \text{ e } (X_j, X_i) \notin R_g.$$

Seja $(b_t)_{1 \leq t \leq m} \in X^m$, definido do seguinte modo

$$b_t = \begin{cases} x_j & \text{se } t = i; \\ x_k & \text{se } t = j; \\ x_t & \text{se } t \notin \{i, j\}. \end{cases}$$

Notemos que $b_i = x_j \in \overline{X}_{i,j}$, $b_j = x_k \in \overline{X}_{j,k}$ $j \in A_i$, $k \in A_j$ e portanto $b_i \in N_i$, $b_j \in N_j$. Por outro lado, para todo $t \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$, temos $b_t = x_t \in \overline{X}_{t,t}$ e $t \in A_t$ porque R_g é reflexiva. Assim se mostra que $(b_t)_{1 \leq t \leq m} \in \bigcap_{t=1}^m N_t$. Aplicando o teorema 4.17, podemos garantir que existe $\vartheta \in \Lambda(X; g)$ tal que

$$\vartheta(x_t) = b_t, \text{ para todo } t \in \{1, \dots, m\}.$$

Como estamos a supor que o semigrupo $\Lambda(X; g)$ é regular, então existe $\varphi \in \Lambda(X; g)$ tal que

$$\vartheta\varphi\vartheta = \vartheta.$$

Por definição de ϑ temos: $\vartheta(X_i) = X_j$, $\vartheta(X_j) = X_k$ e $\vartheta(X_t) = X_t$, para qualquer elemento $t \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$. Atendendo a que $\vartheta(x_i) = x_j$, conclui-se que $\vartheta\varphi(x_j) = x_j$ e por consequência $\varphi(x_j) \in X_i$. Pelo teorema 4.16 temos $\varphi(x_j) \in N_j = \bigcup_{t \in A_j} \overline{X}_{j,t}$. Portanto existe $t \in A_j$ tal que $\varphi(x_j) \in \overline{X}_{j,t}$. Como $\overline{X}_{j,t} \subseteq X_t$ então $\varphi(x_j) \in X_i \cap X_t$ e por conseguinte $t = i$. Nesta conformidade temos $i \in A_j$ e portanto $(X_j, X_i) \in R_g$, o que é absurdo.

(2) $\implies$ (1) Suponhamos que não existe terno patológico associado a R_g e $\text{comp}(R_g) \leq 1$. Seja $\vartheta \in \Lambda(X; g)$. Pelo teorema 3.1, e atendendo a que $\Lambda(X; g) \subseteq \mathcal{C}(g)$, sabemos que existe uma e uma só a aplicação $\alpha : \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que

$$\vartheta(X_i) = X_{\alpha(i)}, \text{ qualquer que seja } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ existe um e um só $r_i \in \{0, \dots, c_{X_{\alpha(i)}} - 1\}$ tal que $\vartheta(x_i) = g^{r_i}(x_{\alpha(i)})$.

Neste contexto vamos mostrar que

$$(1) \quad (\forall i \in \{1, \dots, m\}) \quad (X_i, X_{\alpha(i)}) \in R_g.$$

Seja $i \in \{1, \dots, m\}$. Pelo teorema 4.16 temos $\vartheta(x_i) = g^{r_i}(x_{\alpha(i)}) \in N_i = \bigcup_{j \in A_i} \overline{X}_{i,j}$. Então existe $j \in A_i$ tal que $\vartheta(x_i) \in \overline{X}_{i,j} \subseteq X_j$. Assim temos $\vartheta(x_i) \in X_j \cap X_{\alpha(i)}$ e portanto $j = \alpha(i)$. Como $j \in A_i$ então $\alpha(i) \in A_i$ e por consequência $(X_i, X_{\alpha(i)}) \in R_g$.

Vejam os que, nesta conformidade, se tem

$$(2) \quad (\forall i \in \{1, \dots, m\}) \quad (X_{\alpha(i)}, X_i) \notin R_g \Rightarrow \alpha\alpha(i) = \alpha(i).$$

Seja $i \in \{1, \dots, m\}$ e suponhamos que $(X_{\alpha(i)}, X_i) \notin R_g$.

Mostremos que $(X_{\alpha\alpha(i)}, X_{\alpha(i)}) \in R_g$. Suponhamos, com vista a uma contradição, que $(X_{\alpha\alpha(i)}, X_{\alpha(i)}) \notin R_g$. Pelo teorema 4.13 R_g é transitiva e por consequência, tendo presente (1), conclui-se que $(X_{\alpha\alpha(i)}, X_i) \notin R_g$. Portanto $(X_i, X_{\alpha(i)}, X_{\alpha\alpha(i)})$ é um caminho singelo de R_g cujo comprimento é 2; o que é absurdo, visto que $\text{comp}(R_g) \leq 1$.

Mostremos que os elementos $i, \alpha(i), \alpha\alpha(i)$ não são mutuamente distintos. Suponhamos, com vista a uma contradição, que os elementos $i, \alpha(i), \alpha\alpha(i)$ são mutuamente distintos. Como vimos anteriormente $(X_{\alpha\alpha(i)}, X_{\alpha(i)}) \in R_g$. Por outro lado, aplicando (1), obtém-se $(X_i, X_{\alpha(i)}) \in R_g$ e $(X_{\alpha(i)}, X_{\alpha\alpha(i)}) \in R_g$. Como, hipótese $(X_{\alpha(i)}, X_i) \notin R_g$, então $(X_i, X_{\alpha(i)}, X_{\alpha\alpha(i)})$ é um terno patológico associado a R_g , o que é absurdo.

Atendendo a que R_g é reflexiva e $(X_{\alpha(i)}, X_i) \notin R_g$ então temos $\alpha(i) \neq i$. Como $i, \alpha(i), \alpha\alpha(i)$ não são mutuamente distintos então $\alpha\alpha(i) \in \{i, \alpha(i)\}$. Neste contexto temos $\alpha\alpha(i) \neq i$ porque $(X_{\alpha(i)}, X_{\alpha\alpha(i)}) \in R_g$ e $(X_{\alpha(i)}, X_i) \notin R_g$. Portanto podemos concluir que $\alpha\alpha(i) = \alpha(i)$.

Seja $F = \text{Im } \alpha$. Consideremos a aplicação $\pi : F \longrightarrow \{1, \dots, m\}$, definida do seguinte modo

$$\pi(j) = \min \alpha^{-1}(\{j\}).$$

Por definição de π tem-se $\alpha\pi(j) = j$, para qualquer $j \in F$. Consequentemente, para qualquer $j \in F$, temos:

$$\vartheta(x_{\pi(j)}) = g^{r_{\pi(j)}}(x_{\alpha\pi(j)}) = g^{r_{\pi(j)}}(x_j).$$

Para cada $j \in F$, definimos $s_j = r_{\pi(j)}$. Assim temos, para cada $j \in F$,

$$\vartheta(x_{\pi(j)}) = g^{s_j}(x_j).$$

Consideremos a família $(l_j)_{j \in F}$, de elementos de $\mathbb{N}$, definida por

$$l_j = \begin{cases} 0 & \text{se } s_j = 0; \\ c_{X_j} - s_j & \text{se } s_j \neq 0. \end{cases}$$

É de observar que, para todo $j \in F$, temos $0 \leq l_j < c_{X_j}$. Além disso, é claro que

$$(3) \quad (\forall j \in F) \quad x_j = \vartheta g^{l_j}(x_{\pi(j)}).$$

Consideremos os conjuntos

$$F_1 = \{j \in F : (X_j, X_{\pi(j)}) \in \hat{R}_g\},$$

$$F_2 = F \setminus F_1.$$

Atendendo a que, para qualquer $j \in F$, se tem $\alpha\pi(j) = j$ e tendo presente (1) conclui-se que

$$F_1 = \{j \in F : (X_j, X_{\pi(j)}) \in R_g\}.$$

Seguidamente vamos demonstrar que, neste contexto, se tem

$$(4) \quad (\forall j \in F_2) \quad \alpha(j) = j.$$

Seja $j \in F_2$, então temos $(X_j, X_{\pi(j)}) \notin R_g$. Como $\alpha\pi(j) = j$ então $(X_{\alpha\pi(j)}, X_{\pi(j)}) \notin R_g$.

Aplicando (2) conclui-se que $\alpha\alpha\pi(j) = \alpha\pi(j)$ e por consequência $\alpha(j) = j$.

Aplicando (4), conclui-se que: para cada $j \in F_2$, se tem $\vartheta(X_j) = X_j$. Por consequência, resulta que: para cada $j \in F_2$, existe um e um só $v_j \in \{0, \dots, c_{X_j} - 1\}$, tal que

$$\vartheta(x_j) = g^{v_j}(x_j).$$

Para cada $j \in F_2$, seja u_j o resto na divisão euclideana de $v_j(c_{X_j} - 1)$ por c_{X_j} e q_j o respectivo quociente. Assim temos: $v_j(c_{X_j} - 1) = q_j c_{X_j} + u_j$ e $0 \leq u_j < c_{X_j}$.

Seja $(k_j)_{1 \leq j \leq m}$ a família de elementos de $\{1, \dots, m\}$, definida por

$$k_j = \begin{cases} j & \text{se } j \in \{1, \dots, m\} \setminus F_1; \\ \pi(j) & \text{se } j \in F_1. \end{cases}$$

Consideremos a família $(n_j)_{1 \leq j \leq m}$, de elementos de $\mathbb{N}$, definida por

$$n_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \in \{1, \dots, m\} \setminus F; \\ l_j & \text{se } j \in F_1; \\ u_j & \text{se } j \in F_2. \end{cases}$$

É de notar que: $0 \leq n_j < c_{X_j}$, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.

Seja $(b_j)_{1 \leq j \leq m} \in X^m$, definido do seguinte modo

$$b_j = g^{n_j}(x_{k_j}).$$

Vamos mostrar que: para qualquer $j \in \{1, \dots, m\}$ se tem $k_j \in A_j$ e $b_j \in \overline{X}_{j,k_j}$.

Dado $j \in \{1, \dots, m\}$, estudaremos vários casos.

Suponhamos que $j \in \{1, \dots, m\} \setminus F$. Por definição temos $k_j = j$ e $n_j = 0$. Como R_g é reflexiva conclui-se que $k_j \in A_j$. Atendendo a que $n_j = 0$ conclui-se que $b_j = g^{n_j}(x_{k_j}) \in \overline{X}_{j,k_j}$.

Suponhamos que $j \in F_1$. Então $k_j = \pi(j)$ e $n_j = l_j$. Por definição temos $(X_j, X_{\pi(j)}) \in \hat{R}_g$ e por conseguinte $k_j \in A_j$.

Fazendo uso do teorema 4.20, conclui-se que $c_{X_j} = c_{X_{\pi(j)}}$ e $D_{X_j} = D_{X_{\pi(j)}}$. Pelo teorema 4.19 temos $S_{X_j, X_{\pi(j)}} = S_{X_{\pi(j)}, X_j} = \{0, \dots, c_{X_j} - 1\}$ e por consequência

$$S_{X_j, X_{\pi(j)}} \cap D_{X_j} = D_{X_j} = D_{X_{\pi(j)}} = S_{X_{\pi(j)}, X_j} \cap D_{X_{\pi(j)}}.$$

Para provar que $b_j = g^{l_j}(x_{\pi(j)}) \in \overline{X}_{j, \pi(j)}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $S_{X_j, X_{\pi(j)}} \cap D_{X_j} \neq \emptyset$. Aplicando o teorema 4.16 sai que $\vartheta(x_{\pi(j)}) \in N_{\pi(j)}$. Pelo teorema 4.21 conclui-se que $\vartheta(x_{\pi(j)}) \in \overline{X}_{\pi(j), j}$. Como $S_{X_{\pi(j)}, X_j} \cap D_{X_{\pi(j)}} = S_{X_j, X_{\pi(j)}} \cap D_{X_j} \neq \emptyset$ então temos $\vartheta(x_{\pi(j)}) = g^{s_j}(x_j) \in \overline{X}_{\pi(j), j} = X_j^+$ e por conseguinte s_j é par. Atendendo a que $D_{X_j} \neq \emptyset$ e aplicando o teorema 4.11, conclui-se que c_{X_j} é par. Neste contexto temos que l_j é par. Atendendo a que $b_j = g^{l_j}(x_{\pi(j)})$, podemos concluir que $b_j \in X_{\pi(j)}^+ = \overline{X}_{j, \pi(j)}$.

Suponhamos que $j \in F_2$. Então $k_j = j$ e $n_j = u_j$. Como R_g é reflexiva então temos $k_j \in A_j$. Para provar que $b_j = g^{u_j}(x_j) \in \overline{X}_{j,j}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $S_{X_j, X_j} \cap D_{X_j} \neq \emptyset$. Assim temos que $D_{X_j} \neq \emptyset$ e portanto, aplicando o teorema 4.11, podemos inferir que c_{X_j} é par. Do teorema 4.16 conclui-se que $\vartheta(x_j) = g^{v_j}(x_j) \in N_j$. Pelo teorema 4.21,

temos $\vartheta(x_j) \in \overline{X}_{j,j}$. Como estamos a supor que $S_{X_j, X_j} \cap D_{X_j} \neq \emptyset$, então tem-se $\overline{X}_{j,j} = X_j^+$ e por conseguinte v_j é par. Atendendo a que $u_j = v_j(c_{X_j} - 1) - q_j c_{X_j}$, conclui-se que u_j é par e por consequência $b_j = g^{u_j}(x_j) \in X_j^+ = \overline{X}_{j,j}$.

Em qualquer dos casos, acima discutidos, conclui-se que $k_j \in A_j$ e $b_j \in \overline{X}_{j,k_j}$. Atendendo a que $b_j \in X_{k_j}$ e aplicando o teorema 4.21, conclui-se que $b_j \in N_j$, para qualquer $j \in \{1, \dots, m\}$. Pelo teorema 4.17 conclui-se que existe $\varphi \in \Lambda(X; g)$ tal que $b_j = \varphi(x_j)$, qualquer que seja $j \in \{1, \dots, m\}$. Então temos

$$\varphi(x_j) = \begin{cases} x_j & \text{se } j \in \{1, \dots, m\} \setminus F; \\ g^{l_j}(x_{\pi(j)}) & \text{se } j \in F_1; \\ g^{u_j}(x_j) & \text{se } j \in F_2. \end{cases}$$

Finalmente, vamos mostrar que $\vartheta\varphi\vartheta = \vartheta$. Para cumprir tal propósito é conveniente provar o seguinte:

$$(5) \quad (\forall j \in F) \quad \vartheta\varphi(x_j) = x_j.$$

Seja $j \in F$. Examinaremos dois casos.

Se $j \in F_1$ então temos $x_j = \vartheta g^{l_j}(x_{\pi(j)})$ e por conseguinte $\vartheta\varphi(x_j) = x_j$.

No caso de $j \in F_2$, temos

$$\varphi(x_j) = g^{u_j}(x_j) = g^{u_j} g^{q_j c_{X_j}}(x_j) = g^{v_j(c_{X_j} - 1)}(x_j).$$

Donde se conclui que

$$\vartheta\varphi(x_j) = \vartheta g^{v_j(c_{X_j} - 1)}(x_j) = g^{v_j(c_{X_j} - 1)}\vartheta(x_j) = g^{v_j(c_{X_j} - 1)}g^{v_j}(x_j) = g^{v_j c_{X_j}}(x_j) = x_j.$$

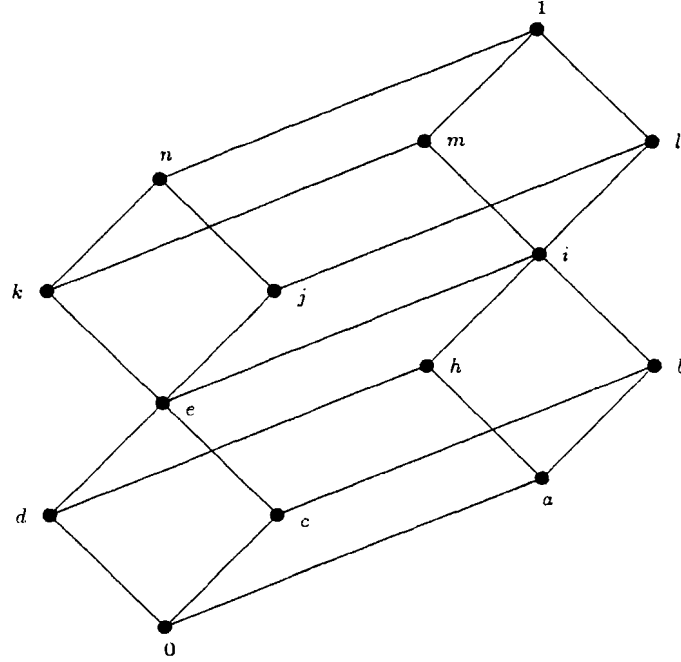
Seja $x \in X$, então existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\vartheta(x) \in X_j$. Seja $r \in \{0, \dots, c_{X_j} - 1\}$ tal que $\vartheta(x) = g^r(x_j)$. Por outro lado, existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in X_i$. Pelo teorema 3.1 temos $\vartheta(X_i) = X_j$ e por consequência $\alpha(i) = j$; em suma $j \in F$. Fazendo uso de (5), tem-se

$$\vartheta\varphi\vartheta(x) = \vartheta\varphi g^r(x_j) = g^r\vartheta\varphi(x_j) = g^r(x_j) = \vartheta(x).$$

Do exposto resulta que $\vartheta\varphi\vartheta = \vartheta$. $\square$

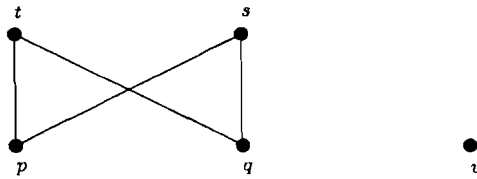
Terminamos este trabalho com um exemplo de uma álgebra de Ockham $(L; f) \in \mathbf{T}$.

Exemplo 4.2 Consideremos a álgebra de Ockham $(L; f)$ definida do seguinte modo:



x	0	a	b	c	d	e	h	i	j	k	l	m	n	1
$f(x)$	1	n	k	m	l	i	j	e	b	h	c	d	a	0

Verifica-se facilmente que o respectivo espaço dual, $(X; g)$, se pode descrever do modo seguinte:



x	p	q	s	t	u
$g(x)$	s	t	q	p	u

As órbitas de g são: $X_1 = \{p, s, q, t\}$ e $X_2 = \{u\}$. Então $(X; g)$ é redutível e por consequência, aplicando o teorema 4.15, conclui-se que $(L; f) \in \mathbf{T}$.

É claro que: $D_{X_1} = \{1, 3\}$, $D_{X_2} = \emptyset$ e $S_{X_1, X_2} = \emptyset$. Portanto temos $\delta_{X_2}(S_{X_1, X_2} \cap D_{X_1}) = \emptyset$. Atendendo a que $c_{X_1} = 4$ e $c_{X_2} = 1$ conclui-se que $(X_1, X_2) \in R_g$ e $(X_2, X_1) \notin R_g$. Como R_g é

reflexiva então tem-se:

$$R_g = \{(X_1, X_1), (X_2, X_2), (X_1, X_2)\}.$$

Do exposto resulta que não existe terno patológico associado a R_g e $\text{comp}(R_g) = 1$. Por aplicação do teorema 4.22 conclui-se que o semigrupo $\text{End}(L; f)$ é regular.

Tendo em consideração que $S_{X_1, X_1} \cap D_{X_1} = D_{X_1} \neq \emptyset$ e $S_{X_1, X_2} \cap D_{X_1} = \emptyset$, podemos afirmar que

$$\Omega_{X_1}^0 = \{X_2\}, \quad \Omega_{X_1}^1 = \{X_1\}.$$

Como $S_{X_2, X_2} \cap D_{X_2} = D_{X_2} = \emptyset$ então temos

$$\Omega_{X_2}^0 = \{X_2\}, \quad \Omega_{X_2}^1 = \emptyset.$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \sum_{Z \in \Omega_{X_1}^0} c_Z + \frac{1}{2} \sum_{Z \in \Omega_{X_1}^1} c_Z &= c_{X_2} + \frac{1}{2} c_{X_1} = 3, \\ \sum_{Z \in \Omega_{X_2}^0} c_Z + \frac{1}{2} \sum_{Z \in \Omega_{X_2}^1} c_Z &= c_{X_2} = 1. \end{aligned}$$

Como consequência do teorema 4.18, obtém-se $|\text{End } L| = 3$.

Consideremos a aplicação $\varphi : L \longrightarrow L$ definida do seguinte modo:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq n; \\ 1 & \text{se } x \not\leq n. \end{cases}$$

Facilmente se verifica que φ é endomorfismo de $(L; f)$ e por conseguinte $\{\text{id}_L, f^2, \varphi\} \subseteq \text{End}(L; f)$.

Como $|\text{End}(L; f)| = 3$ então conclui-se que $\text{End}(L; f) = \{\text{id}_L, f^2, \varphi\}$. O semigrupo $\text{End}(L; f)$ pode ser descrito pela seguinte tabela de Cayley:

id	id	f^2	φ
id	id	f^2	φ
f^2	f^2	id	φ
φ	φ	φ	φ

Bibliografia

- [1] M. E. Adams e Matthew Gould : Posets whose monoids of order-preserving maps are regular, *Order*, **6**, 1989, 195–201.
- [2] R. Balbes e Ph. Dwinger : *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Missouri, 1974.
- [3] J. Berman : Distributive lattices with an additional unary operation, *Aequationes Math.*, **16**, 1977, 165–171.
- [4] T. S. Blyth : On the endomorphism semigroup of an ordered set, *Glasgow Math. J.*, **37**, 1995, 173–178.
- [5] T. S. Blyth e R. McFadden : Unit orthodox semigroups, *Glasgow Math. J.*, **24**, 1983, 39–42.
- [6] T. S. Blyth e H. J. Silva : On Ockham algebras whose endomorphism semigroups are regular, *Communications in Algebra*, **24(3)**, 1996, 919–928.
- [7] T. S. Blyth e H. J. Silva : Endomorphism regular Ockham algebras of finite boolean type, *Glasgow Math. J.*, (aceite para publicação).
- [8] T. S. Blyth e H. J. Silva : Semigroups arising from families of normal subgroups (submetido).
- [9] T. S. Blyth e J. C. Varlet : *Ockham Algebras*, Oxford University Press, 1994.
- [10] S. Burris e H. P. Sankappanavar : *A Course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, **78**, Springer Verlag, 1981.
- [11] B. A. Davey e H. A. Priestley : *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1990.
- [12] G. Grätzer : *General Lattice Theory*, Birkhäuser, 1978.
- [13] P. Halmos, *Lectures on Boolean algebras*, Van Nostrand, Princeton, 1963.
- [14] J. M. Howie : *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, 1976.

- [15] R. N. McKenzie, G. F. McNulty e W. F. Taylor : *Algebras, Lattices, Varieties*, vol. I, Wadsworth and Brooks, 1987.
- [16] H. A. Priestley : Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces, *Bull. London Math. Soc.*, **2**, 1970, 186–190.
- [17] H. A. Priestley : Ordered sets and duality for distributive lattices, *Ann. Discrete Math.*, **23**, 1984, 39–60.
- [18] A. Urquhart : Distributive lattices with a dual homomorphic operation, *Studia Logica*, **38**, 1979, 201–209.