FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Modelo com regimes para os preços e a liquidez de acções em bolsa

Estudo Preliminar

Por

Nelson Manuel Sobral Rianço

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para obtenção do grau de mestre em Matemática e Aplicações - Ramo Actuariado, Estatística e Investigação Operacional.

Presidente do júri: Professor Doutor Ruy Araújo Costa (FCT/UNL)

Orientador: Professor Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível (FCT/UNL)

Vogal: Professora Doutora Raquel Medeiros Gaspar (ISEG/UTL)

Vogal: Professor Doutor Pedro Alexandre da Rosa Corte Real (FCT/UNL)

Monte de Caparica

2009

Este trabalho é dedicado à minha querida esposa, Cláudia. Pelo amor e compreensão, com que me ajudou a vencer mais esta etapa da nossa vida. E também, porque nestas primeiras etapas da vida da nossa bebé, foi muito mais pai e mãe do que seria desejável para nós os três.

À minha querida filha Raquel, que nasceu durante este ano e para quem procuro construir um mundo melhor.

Agradecimentos:

Ao Professor Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível, pela confiança depositada em mim, e pela paciência e disponibilidade, pois não é fácil ser orientador de um aluno trabalhador/estudante que apenas tem os finais dos dias e os fins-de-semana para se reunir com o professor.

A duas pessoas que, apesar de fisicamente já não estarem entre nós, ser-me-ão sempre muito próximas, e que prometi a mim mesmo não deixar de lhes agradecer todo e qualquer objectivo que consiga alcançar.

Aos meus pais, que sempre trabalharam e que abdicaram de muitas coisas para que eu conseguisse alcançar os meus objectivos e, acima de tudo pelos valores que sempre me transmitiram.

Resumo

Liquidez, nos mercados de acções, pode ser definida por várias quantidades concorrentes directamente observadas. Através da revisão da literatura concluímos que, apesar de um grande número de opiniões e dimensões da liquidez, os mais discutidos são o *bid-ask spread* (seguidamente designado por *BAS*) ver [12], [15], [26], [40], [46], [96], [108], [124] e [127] e o volume das transacções em [35], [104], [113], [132] e as suas referências. Uma série de estudos empíricos referenciados nos estudos citados, mostram a influência recíproca da liquidez nos níveis dos preços e dos níveis dos preços nas diversas medidas de liquidez.

Iremos reportar neste trabalho, a análise estatística de ambos, o BAS e o volume das transacções, para um grande conjunto de acções estudadas, mostrando que a quantidade que tem melhores propriedades estatísticas que permitem o modelo log-normal é o volume das transacções expressa na moeda local.

Propomos um modelo para a evolução do preço das acções em bolsa que incorpora a informação contida nos valores da liquidez expressa na moeda local. O modelo é dado por um sistema de equações diferenciais estocásticas, uma para o preço e outra para a liquidez, têm parâmetros de mudança de regime que mudam de acordo com as transformações dos limiares pelas trajectórias do processo. Por meio de um estudo de simulação, apresentamos algumas das propriedades do modelo e mostramos que permite recuperar algumas das características da evolução de uma acção típica do mercado de acções português.

Palavras-chave: Liquidez, preço - liquidez, bid-ask spread, volume, regimes, limiares

Abstract

Liquidity in equity markets can be defined by various amounts competitors directly observed. Through the literature review we concluded that, although a large number of views and dimensions of liquidity, the most discussed are the BAS (see [12], [15], [26], [40], [46], [96], [108], [124] e [127]) and the volume of transactions ([35], [104], [113], [132] and their references).

A series of empirical studies referenced in the studies cited, show the mutual influence of liquidity on price levels and price levels of the various measures of liquidity.

We report in this paper, the statistical analysis of both the BAS and volume of transactions for a wide range of actions studied, showing that the amount that has better statistical properties that allow the model is log-normal volume of transactions expressed in local currency.

We propose a model for the price evolution of stock exchange assets that incorporates the information contained in liquidity values as expressed in local currency. The model is given by a system of stochastic differential equations, one for price and another for liquidity, having regime switching parameters that change according to the crossings of thresholds by the trajectories of the processes. By means of a simple simulation study we present some of the properties of the model and show that it allows recovering some of the evolution features of a typical stock of the equity Portuguese market.

Keywords: Liquidity, price - liquidity, bid-ask spread, volume, regimes, threshold

Índice

Índice de Figuras

Índice de Gráficos

Índice de Tabelas

Introdução

No modelo clássico de Black-Scholes, a evolução do preço[1] dos activos subjacentes é o observável que descreve o mercado financeiro. Ora, nos mercados financeiros há outras fontes de informação observáveis que completam a informação disponibilizada pela evolução de um dado preço, nomeadamente, a informação contida nas diferenças entre os vários preços do activo (por exemplo o "BAS") ou no volume das transacções dos activos.

Na literatura é referida a influência cruzada entre a evolução do preço e estes outros observáveis, tal como se poderá constatar na revisão da literatura apresentada adiante no capítulo primeiro.

Um dos objectivos a que nos propusemos foi descrever esta influência recíproca entre a evolução do preço e a evolução do volume num modelo quantitativo susceptível de utilização no apreçamento de produtos derivados baseados no activo subjacente.

A partir da análise da literatura isolaram-se duas quantidades observáveis nos mercados: o volume de transacções e o BAS.

Testou-se um conjunto de dados para averiguar a possibilidade de aplicação de modelos de evolução clássicos. Com base nessa análise, escolheu-se o volume como o observável que melhor descreve a liquidez, e que, simultaneamente, permite uma modelação mais satisfatória.

Introduziu-se um modelo de equações diferenciais estocásticas acopladas (uma para o volume e outra para o preço) com limiares e regimes. Este modelo depende de parâmetros e a existência de soluções foi estudada.

Apresenta-se um método de estimação dos parâmetros. Através de um estudo sumário, por via de simulação, assegurámo-nos da fiabilidade do método. Aplicando o método aos dados reais, obtivemos os parâmetros do modelo, o que nos permitiu analisar o poder descritivo do modelo introduzido.

Na conclusão, sublinham-se as principais ideias resultantes deste estudo, as limitações encontradas e as perspectivas para trabalhos futuros.

---

1 Preço de abertura, de encerramento, mais alto da sessão, preço médio, preço "*bided*" (oferta), preço "asked" (procura), etc.

Consideramos, que as principais contribuições deste trabalho são pois: - a identificação na literatura dos conceitos que melhor descrevem a liquidez; - um estudo das principais propriedades estatísticas dos dados com vista à escolha mais adequada de modelos de evolução; - a introdução e o estudo de um modelo para o preço/volume que descreve adequadamente a evolução e as influências mutuas destes observáveis.

Deste modo, explicitamos a estrutura adoptada para a exposição do nosso trabalho. No primeiro capítulo, reportamos numa análise da literatura sobre o tema da liquidez. No segundo capítulo, apresentamos resumidamente um modelo que incorpora a informação relativa à liquidez e discutimos as vantagens e inconvenientes deste modelo. No terceiro capítulo, apresentamos um estudo estatístico de dados com vista à determinação de qual o observável mais adequado a uma possível modelação. No quarto capítulo, introduzimos e estudamos um modelo de evolução conjunta para o preço e a liquidez. Finalmente, no quinto capítulo, apresentamos as conclusões deste trabalho e perspectivas para a continuação dos estudos.

CAPITULO I

1. Revisão da literatura

Neste capítulo enunciaremos um conjunto de questões a que procuraremos responder. Assim, começamos por tentar definir liquidez nos mercados financeiros, tendo em conta a opinião dos diversos autores, e quais as dimensões que utilizam para definir a liquidez.

Procuraremos ainda perceber se existe unanimidade em torno de uma definição de liquidez. Outra questão a que procuraremos responder, é sobre a influência da liquidez nos preços dos derivados, se existirão indícios que nos permitam chegar a essa conclusão.

Por último, tentaremos perceber, se a partir da definição de liquidez do BIS (*Bank of International Settlement*) será possível definir um índice de liquidez.

1.1. Como definir a liquidez nos mercados financeiros?

A nossa intuição...

A intuição diz-nos que serão vários os factores que nos permitem definir a liquidez, e que esta deve estar quase certamente relacionada com o preço dos activos e com o volume de que se dispõe para transaccionar. Julgamos ainda que, não só a liquidez deverá ser definida através da análise de diversos factores de mercado, endógenos e exógenos, mas também que estes factores estarão intimamente relacionados entre si, ao ponto de se poderem influenciar mutuamente.

Entendemos, que não devemos falar em medidas de liquidez, uma vez que não sabemos ser possível definir um espaço de medida para a liquidez. Assim, definimos o que intuitivamente julgamos ser noções de dimensão para a liquidez.

Várias noções de dimensão para a liquidez figuram por exemplo em [9], [12], [15], [26], [35], [40], [46], [52], [65], [87], [96], [102], [120], [127] e [130]. Salientamos entre outras:

- A *"firmeza/tensão"* que se mede nos preços de transacção, ou seja, preços de compra e venda, através do *BAS*[2] adiante por vezes designado por *BAS* de uma forma abreviada;
- *"Profundidade"*, que está relacionada com o volume de ordens de compra e venda, e que representa o volume de transacções que pode ser absorvido pelo mercado sem provocar alterações nos preços de oferta/procura;
- *"Resiliência"*, é um conceito oriundo da física, que se refere à propriedade de que são dotados alguns materiais, de acumular energia quando exigidos ou submetidos a stress, voltando em seguida ao seu estado original, sem qualquer deformação – como um elástico ou uma vara de salto em altura, que se verga até um certo limite sem se quebrar e depois retorna com força, lançando o atleta para o alto ("Resiliência" [Em linha]. Disponível em http://pt.wikipedia.org, [Consultado em 20-01-2008]). No nosso estudo, a resiliência representa portanto de uma forma simples, a velocidade de retorno para o equilíbrio, definição partilhada por [130], como se pode ver nos parágrafos seguintes.

Procuramos, seguidamente, através de uma revisão da bibliografia, não só dar resposta à questão colocada, mas também fornecer uma base científica para podermos afirmar que a liquidez poderá ter uma ou várias noções de dimensão associadas.

1.1.1. *Bid-Ask Spread*

Uma parte significativa dos autores é unânime em considerar o *BAS* como a medida que permite definir a liquidez. É o caso, por exemplo, dos seguintes autores nos artigos respectivos [12], [15], [26], [40], [46], [96], [108], [124] e [127]. O artigo [96], por exemplo, define liquidez como a diferença entre o valor de

2 *Bid-ask spread* ou *spread bid-ask* define-se como o *spread* (ou margem) gerado pela diferença entre os preços de oferta e os preços de procura correntes para um determinado título.

mercado da posição de um *trader*[3] e o valor dessa posição quando é liquidado, ou seja, quando é executada a ordem. Alguns destes autores usam também a tensão/firmeza[4] como medida de liquidez, mas, a tensão reflecte-se no *BAS* pelo que poderíamos, em princípio, utilizar o *BAS* sem perda de generalidade. É o caso do já referido [130] que nos permite compreender o efeito do risco de liquidez nos preços dos activos, através de três dimensões: tensão (reflectida no BAS), profundidade (o montante de volume unilateral que pode ser absorvido pelo mercado sem causar uma revisão de *bid-ask prices*) e a resiliência (a velocidade de retorno para o equilíbrio).

Gostaríamos ainda, e para terminar este ponto, de fazermos referência a um trabalho de investigadores portugueses sobre este tema [10], e que julgamos poder trazer uma mais-valia na análise da liquidez no mercado português, pois se é um facto que a experiência de outros países é muito importante, para percebermos a temática da liquidez no nosso país, nem sempre a "importação de conceitos e análises" de outros mercados, é um bom método para nos ajudar a perceber a importância da liquidez no nosso mercado. Trata-se de um trabalho do departamento de estudos económicos do Banco de Portugal.

Estes autores, tal como a generalidade dos referidos anteriormente também consideram a noção de liquidez relativamente lata e associada à facilidade de transformar activos em moeda, que por definição é o activo mais líquido que podemos encontrar.

Defendem que a liquidez pode ser analisada segundo duas abordagens: tempo e custo. De acordo com a primeira abordagem, um activo é líquido se for possível transacciona-lo rapidamente. Pelo contrário, um activo é ilíquido se os investidores não encontram para ele, durante um longo período de tempo, ordens

---

3 Um ***trader*** é alguém que compra e vende instrumentos financeiros em bolsa, tais como acções, obrigações ou derivados, com o objectivo de obter lucros. Os *traders* podem ser profissionais que trabalham em instituições financeiras, ou simplesmente particulares que transaccionam por conta própria com objectivos de investimento ou especulação.
Também se denominam por *traders* aqueles que executam as ordens de terceiros numa corretora, introduzindo-as no sistema de negociação. De forma mais exacta, estes seriam operadores de bolsa.
O *trader* pode negociar apenas o fluxo de ordens visando o aproveitamento da diferença entre os fluxos de compras e de vendas para conseguir lucros, ou aproveitar determinada tendência dos preços, para ganhar com a diferença entre a compra e a venda. [151]

4 Isto é os preços de compra e venda, divergem do preço médio de mercado e reflecte os custos de negociação gerados independentemente do nível de preços do mercado. Frequentemente a tightness (firmeza) é medida através do bid-ask spread.

do lado oposto do mercado que permitam a transacção. De acordo com a segunda abordagem, um activo é líquido se o preço a pagar (respectivamente a receber) pela compra (respectivamente a venda) do activo não se afastar do preço de mercado[5]. Esta abordagem, segundo os autores, considera diferenciais entre as cotações de compra e venda de títulos, correspondendo o diferencial entre a mais elevada cotação de compra e a menor cotação de venda, à dimensão de liquidez mais comummente aceite, o *BAS*.

O artigo [54], é um artigo que nos fala sobre a forma de "medir" a liquidez no mercado do Tesouro Americano. Os autores consideram "o comummente usado *BAS*, a diferença entre os preços oferta e procura, um instrumento útil para a avaliação e monitorização da liquidez".

O artigo [82], define implicitamente liquidez como o *BAS*, o autor refere que se ocupou com a articulação dinâmica do volume e da liquidez. A intuição casual sugere-nos que as duas quantidades devem estar estritamente ligadas. Na verdade, alguns artigos sugerem mesmo que o volume seja uma aproximação à liquidez. No entanto, conclui que, surpreendentemente, há poucas evidências de que se correlacionem no tempo. Estudos (citados no artigo) relacionam várias classes de activos, frequências, e microestruturas de mercado, que normalmente não encontram associação, ou mesmo, em alguns casos, encontram uma associação negativa.

O autor refere ter argumentado que esta falta de associação é consistente com o paradigma que vê a liquidez como uma propriedade agregada do equilíbrio sem atrito/fricção ("*frictionless*"), em vez de, como na microestrutura clássica, o beneficio de um grupo restrito de intermediários. Enquanto os modelos clássicos, possam ser construídos – pela escolha de parâmetros de informação e competitividade apropriados – de modo a desligar o volume e a liquidez, as deduções do modelo descrito no artigo distinguem-se por introduzir novas premissas sobre o segundo momento condicional da liquidez. Especificamente, que a volatilidade da liquidez deve estar positivamente relacionada com o volume. Intuitivamente, o volume surge de um rearranjo da procura individual relativa ao

5 *MARKET PRICE* (Preço de mercado). Último preço pelo qual um valor mobiliário foi vendido numa bolsa. Para acções ou obrigações vendidas no mercado de balcão (*OVER THE COUNTER*), é o preço combinado das ofertas de compra e de venda ([121]).

nível médio, enquanto que alterações na liquidez são impulsionadas por mudanças nesse nível. Assim, as grandes mudanças na liquidez não podem ocorrer sem um lote de rearranjos individuais. E uma pequena quantidade de rearranjo deve implicar uma pequena mudança na liquidez.

Esta lógica, segundo o autor, é confirmada em testes utilizando dados semanais dos mercados obrigacionistas do governo os E.U.A. Embora os testes não provem o ponto de vista de determinação de liquidez do artigo, fazem prever um forte apoio para as suas bases. Além disso, estabelecem uma nova realidade empírica, que lança luz sobre as características condutoras do risco de liquidez

1.1.2. *VaR (L)*

O artigo [96] começa com a constatação de que nos modelos tradicionais de *Value-at-Risk*[6] (VaR) falta um tratamento para o risco de liquidez. Negligenciando o risco de liquidez, segundo o autor, conduz a uma sub apreciação do risco global e a uma má aplicação do capital de segurança das instituições financeiras. O modelo de *VaR* standard assume que qualquer quantidade de títulos pode ser comercializada sem influenciar os preços de mercado. Na realidade, a maioria dos mercados são menos do que perfeitamente líquidos. As turbulências financeiras, como o colapso do *LTCM*[7], provam que a liquidez é um risco significativo para os investidores.

O objectivo deste artigo é, de acordo com a opinião do autor, demonstrar a importância da componente do risco de liquidez nos mercados financeiros. Primeiro, faz uma pesquisa na literatura para explicar como o risco de liquidez pode ser incorporado numa única medida de risco de mercado. Depois aplica a

---

6 VaR - *Value-at-Risk*(valor-em-risco), para Jorion (1998), o "*VAR* representa a maior (ou pior) perda esperada dentro de determinados períodos de tempo e intervalos de confiança."

A definição matemática de acordo com "*Quantitative Risk Management*", McNeil, Frey, Embrechts, 2005 pag. 38

Dado algum intervalo de confiança $\alpha \in (0,1)$ o VaR de uma carteira, com um intervalo de confiança α é dado pelo menor numero l tal que a probabilidade de que L exceda l não é maior do que $(1-\alpha)$

$$VaR_\alpha = \inf\{l \in \Re : P(L > l) \leq 1-\alpha\} = \inf\{l \in \Re : F_L(l) \geq \alpha\}$$

Em termos probabilísticos o *VaR* é o quantil de distribuição de perda.

in http://en.wikipedia.org/wiki/Value_at_risk, disponível em 20-02-2008

7 *Long Term Capital Management* era um *hedge fund* norte-americano que faliu em 1998.

liquidez ajustada ao modelo *VaR* desenvolvido em [16] no mercado de valores francês: os resultados obtidos mostram que a liquidez exógena definida no artigo mencionado atrás pode representar mais de metade do risco de mercado para as acções ilíquidas. Estendem o modelo para mostrar que o risco de liquidez endógeno que refere as flutuações de liquidez dirigidas seja por acção individual ou pelo tamanho da posição dos investidores, também é uma componente muito importante de risco global.

Alguns autores definem o *VaR (L)* como uma medida *VaR* para a liquidez como é o caso de [72]. Mais especificamente, a estratégia óptima de execução que deverá ser adoptada para liquidar a posição do investidor é obtida tendo em conta o impacto no mercado e a perda máxima que pode acontecer devido às flutuações nos preços. Ao ser implementada, esta estratégia óptima de execução é calculada como VaR (L). Neste artigo, Hisata e Yamai propõem uma estratégia prática para a Liquidez-ajustada ao *VaR* ("ou *L-VaR*") incorporando a liquidez de mercado nos produtos financeiros. Esta estrutura incorpora o mecanismo do impacto no mercado causado pelos próprios procedimentos do investidor, uma vez que ajusta o *VaR* de acordo com o nível de liquidez de mercado e a dimensão da posição do investidor. Especificamente, a estratégia óptima de execução para liquidar toda a posição do investidor, é calculada tendo em conta, primeiro, o impacto no mercado[8]. Então, a perda máxima que pode incorrer, nas flutuações de preços sob a estratégia óptima de execução é calculada como *VaR(L)*.

Estes autores apresentam um modelo específico, que prevê uma solução sob fórmula -fechada para calcular o *VaR(L)*, e examina se esta estrutura pode ser aplicada nas práticas de gestão de risco financeiro através do cálculo de exemplos numéricos. Também demonstram que esta estrutura de cálculo do *VaR(L)* pode ser aplicada sob a maioria das condições mais frequentes, tais como: (1) quando o impacto no mercado é incerto, (2) quando a carteira do investidor consiste em múltiplos activos financeiros, e (3) quando há uma relação não -linear entre o impacto de mercado e o volume de transacções.

8 Este conceito voltará a ser analisado mais à frente, pois temos autores, por exemplo [19], que se dedicam quase exclusivamente ao tema do impacto das ordens de liquidação no mercado e de que forma podem influenciar a liquidez.

Interessante também o artigo [44], que propõe um procedimento de agregação estatístico, para programar em computador um *VaR* ajustado à liquidez. O modelo, segundo o autor, é fácil de implementar seja por grandes instituições financeiras ou por gestores de carteiras institucionais. É concebido para se aplicar a todos os tipos de activos em carteira: para tratar facilmente acções e moeda para activos de crédito e derivados. A sua simplicidade advém do facto de focalizar no tempo a dimensão da liquidez (demora de execução), em vez do custo (*bid-ask*) como a maioria dos investigadores fizeram anteriormente. O modelo é facilmente extensível para incluir características tais como descontos de venda e "*calls*" com caução *(collateral calls)*.

O artigo [121], por seu lado, defende que as actuais metodologias de *VaR* consideram o risco de liquidez calculando a volatilidade do valor da carteira num determinado período de colocação. Este artigo estende a aproximação ao *RiskMetrics*[9] modelando explicitamente a liquidação das carteiras demasiado expostas. Para isto mostram que o *VaR* ajustado à liquidação pode ser facilmente obtido por um ajustamento apropriado da matriz de variância - covariância. O risco de liquidez do mercado pode ser modelado exprimindo o preço de liquidação como uma função de *trade sizes* (tamanho da transacção), impondo uma penalização na realização de grandes posições, em termos de baixa na média da carteira e por conseguinte um *VaR* mais alto, já que o *VaR* depende da média (e da variância) da carteira. O *VaR* ajustado à liquidação pode ser definido como a alternativa (*tradeoff*) entre o minimizar da variância por liquidação rápida e o maximizar do valor médio por liquidação lenta. O risco de liquidez dos *cash-flows* pode ser incorporado no modelo, impondo restrições no problema de optimização.

O artigo [49] começa por constatar que as actuais tendências na supervisão internacional dos bancos, no seguimento da Emenda do Acordo de Basileia - 1996, enfatizam o controlo do risco de mercado baseado nos modelos

9 Metodologia de cálculo do risco de uma posição, criada pelo banco norte-americano JP Morgan, que se baseia fortemente no conceito de valor em risco. Seu pioneirismo, publicidade e gratuidade contribuíram para torná-lo uma referência fundamental aos profissionais de risco e académicos que estudam o assunto em nível mundial. [137]

VaR internos. Este artigo confronta os méritos e as desvantagens dos modelos *VaR* em termos do seu impacto na liquidez dos mercados. Após uma revisão dos conceitos básicos e medidas de risco de mercado, fricção de mercados e risco de liquidez, os argumentos que suportam os modelos internos aproximados à supervisão dos riscos de mercado são discutidos, em termos de limitações e possíveis vantagens de modelos *VaR*. Em particular, são tomados em conta efeitos sistémicos adversos[10] das práticas de gestão de risco difundidas.
Modelos de mensuração do risco "construídos" com o risco de liquidez são examinados minuciosamente com o intuito de verificar o seu potencial para aplicação neste campo.

Os autores concluem que os modelos *VaR* estão ainda longe de tratar efectivamente os mercados e o risco de liquidez nos seus mais variados aspectos. Ainda assim, segundo o autor, as directrizes reguladoras estão certas em reconhecer a importância de um sistema de controlo interno do risco, mas a implementação dessa regulamentação poderia, inadvertidamente encorajar de forma mecânica a aplicação de modelos *VaR* com efeito sistémico adverso.
Outro artigo que define liquidez através de medidas *VaR* é o artigo [91], no qual os autores consideram o problema da posição óptima de liquidação, com o intuito de maximizar o *cash flow* esperado resultante da transacção na presença de um impacto no mercado, temporário ou permanente. Utilizam uma aproximação à programação estocástica (*stochastic programming approach*) para obter estratégias de transacção, que diferenciam decisões com respeito às diferentes realizações das condições de mercado. O cenário escolhido pelos autores consiste num grupo onde os pressupostos simples representam possíveis realizações futuras de processos de estado variáveis (preço das acções, volume de transacções, etc.). A cada momento o conjunto de pressupostos está dividido em vários grupos de acordo com critérios específicos e cada grupo é controlado pela sua(s) decisão(ões) variável(eis) que permite(m) adequar a representação das incertezas das condições de mercado e envolve(m) antecipadamente as soluções. Em contraste com as aproximações dinâmicas tradicionais, a

10 Risco sistémico: é o risco de que uma instituição financeira não tenha recursos suficientes para pagar uma outra, fazendo com que esta outra não pague uma terceira e assim por diante, daí resultando um "efeito dominó," que pode levar ao colapso todo o sistema financeiro, ou seja, a uma crise sistémica, entendida como uma interrupção da cadeia de pagamentos da economia. [152]

formulação da programação estocástica (*stochastic programming*) admite a incorporação de diferentes tipos de restrições nas estratégias de transacção, por exemplo, restrições de risco, restrições dos reguladores, várias políticas de decisão, etc. Definem o princípio do cortador de relva, "*a lawn-mower principle*", que segundo os autores, incrementa a estabilidade da solução no que diz respeito às trajectórias de separação e à saturação do cenário padrão, mas converge para problemas de optimização não convexa. Para isso mostram-nos que no caso de um impacto temporário no mercado a estratégia óptima de liquidação com o princípio do cortador de relva, pode ser aproximada pela solução de um problema de aproximação convexa ou linear. Se for implementado como um problema de programação linear, a aproximação do artigo, segundo os autores, é capaz de alcançar soluções robustas óptimas. A estratégia de transacção avessa ao risco, foi construída por incorporação das restrições de risco no problema da programação estocástica. Controlam o risco associado à transacção, usando a medida VaR condicional. Apresentam-nos ainda resultados numéricos e padrões de transacção óptimos para diferentes formas de impacto de mercado.

1.1.3. *VaR (L) e BAS*

Nesta fase, é sem dúvida importante destacar também [9] que define como medida de liquidez o *BAS* com o intuito de calcular com precisão o risco de liquidez endógeno e exógeno.

Este artigo analisa o comportamento do *BAS* no mercado de acções de Atenas e constrói uma medida de liquidez ajustada ao *VaR*, que incorpora a variação do *BAS*. Durante um período de 7 meses, de Junho a Dezembro de 2002, analisaram o nível de dados das transacções para grupos de acções independentes em alta - frequência, classificados pelos seus preços médios de transacção e pela sua capitalização. Descobriram que a selecção adversa[11] aumenta com a dimensão

11 O problema da selecção adversa surge dos diferentes motivos que os investidores têm para negociar um activo - liquidez, informações e pontos de vista da avaliação. Desde que os investidores não anunciem essas razões para negociar num determinado tempo nos mercados, os *market makers* correm sempre o risco de estar a negociar com investidores melhor informados. Se os lucros esperados de tal transacção forem negativos, o *market maker* tem de aumentar o *spread* médio comum, que é grande, o suficiente para compensar tais perdas. Esta teoria sugeriria que os *spreads* vão aumentar com: a

da transacção enquanto que a componente dos custos diminui. Além disso, construíram uma liquidez ajustada às medidas *VaR* que inclui o risco de liquidez endógeno e exógeno. As acções com o preço elevado e com elevada capitalização são as que possuem os títulos mais líquidos. Como o risco de liquidez representa apenas 3,4% do risco total, ainda assim, para acções de baixa capitalização, a percentagem de risco de liquidez atinge os 11% do risco total, e por conseguinte, não pode, de acordo com a opinião dos autores, ser negligenciada. Por último, a medida *VaR (L)* mostra a forma em "U", uma vez que, segundo os autores, os maiores custos de transacção não ocorrem a meio da sessão de transacção.

Os artigos [102] e [19], defendem que estas medidas *VaR (L)* surgem devido às margens oferta -procura e, portanto, também estão relacionadas, ainda que de forma indirecta, com o *BAS*. A aproximação para calcular a estimativa *VaR* de liquidez - ajustada de uma carteira, é feita através do método *RiskMetrics* e do modelo híbrido Hull-White.

1.1.4. Volume

A dimensão que, de forma intuitiva, mais se confunde com a liquidez é, sem grande margem para dúvidas, o volume. Aliás, facilmente encontramos na internet várias entidades de referência que definem liquidez como o volume das transacções. No site *www.thinkfn.com*, definem que "a liquidez de um produto pode ser medida por quão frequentemente ele é comprado e vendido: isto é conhecido como volume". Também o site *www.clubeinvest.com* nos apresenta uma definição de liquidez semelhante: "Na bolsa de Lisboa o mais importante índice é o PSI20, (…), e cujo peso nesse índice se define através de uma equação que conjuga a composição bolsista de cada empresa (número de acções x preço), com a liquidez (volume médio de transacções diárias) ". No documento

---

proporção de *traders* informados nos mercados de activos, o diferencial de informação possuída, em média, por estes *traders* e a incerteza sobre a informação futura sobre o activo. Ver [1].

de consulta pública da CMVM da directiva dos mercados de instrumentos financeiros (2004/39/CE) encontramos a seguinte definição: “Em alternativa às *“proxies”* poderá a liquidez ser medida pela computação dos critérios do volume e da quantidade transaccionada para um determinado instrumento financeiro”. No site do Banco Big [135] encontramos a seguinte definição: ”A liquidez de um título mede-se pelo volume diário efectuado, que assegure aos investidores a compra/venda dos seus títulos, sem o risco de bloquear o mercado”.

O artigo [35] apresenta-nos algumas conclusões interessantes, pois segundo os autores, em contraste com estudos anteriores sobre a liquidez, que se debruçavam sobre pequenos períodos de tempo e se focavam na segurança de *traders* individuais, estes estudaram margens de mercado agregado, profundidade (volume), e actividades de transacção para acções ordinárias norte-americanas numa amostra de tempo extensa. Concluem que as alterações diárias na média da liquidez do mercado e actividades de transacção são altamente voláteis e negativamente dependentes. A liquidez afunda-se significativamente em mercados secundários. As oscilações recentes do mercado induzem, segundo opinião dos autores, numa diminuição nas actividades de transacções e margens. E, pasme-se, pois ainda segundo a opinião dos autores, há efeitos fortes dos dias da semana; as sextas-feiras acompanham um decrescimento significativo nas actividades de transacção e de liquidez, enquanto terças-feiras exibem o oposto. Taxas de juro de longo e curto prazo influenciam a liquidez. Defendem ainda que a profundidade e a actividade de transacção só aumentam antes dos anúncios macroeconómicos principais.

O *trader* Leroy Rushing, no seu artigo na internet [132], define 5 passos para percebermos o volume e a liquidez. Segundo o autor, volume elevado quer dizer elevada liquidez e diz-nos que o volume médio é uma óptima maneira de julgar o dia de actividade comercial uma vez que os *traders* do dia preferem transaccionar sob os buracos abertos pelas notícias da imprensa e olham o volume médio versus o volume corrente para obter uma ideia de quão importante é a notícia.

Segundo o artigo [113], uma vez que a profundidade e a liquidez do mercado dependem das decisões licitadas por todos os potenciais participantes,

cada *trader* avalia-os de acordo com as conjecturas sobre a entrada de outros. Se a transacção tem os mesmos custos em todos os mercados, esta externalidade leva à concentração das transacções no mercado. Caso contrário, ela pode produzir vários equilíbrios conjunturais, alguns onde a transacção se concentra num mercado e outros onde os grandes *traders* recorrem a um mercado separado ou a um parceiro para a transacção.

O artigo [104] fala-nos sobre a liquidez, o volume e o seu comportamento no preço. Segundo os autores, as transacções intradiárias dos mercados financeiros estão tipicamente organizadas, usando dois principais mecanismos: *quote – driven*[12] e *order – driven*[13]. No primeiro caso, todas as ordens são organizadas através dos dealers. No segundo caso, as ordens são normalmente organizadas por via de um limite publicado no livro de ordens. Estes dois mecanismos geram diferentes resultados no que diz respeito à actividade das transacções, liquidez e comportamento do preço, como já foi empiricamente documentado. Apresentam-nos um modelo teórico para comparar os dois modelos e mostrar que o mecanismo sequencial intrínseco das transacções e cotações gera a maior parte das diferenças observadas nos resultados das transacções mesmo num ambiente *"frictionless"* (sem fricção). A análise, segundo os autores, mostra que, as grandes decisões em especial no segmento *quote – driven* de um mercado híbrido (um mercado em que as acções tanto podem ser negociadas em bolsa como nos brokers tradicionais), têm menor conteúdo de informação, e que os impactos nos preços são maiores para transacções no segmento *order – driven*, e que o segmento *quote – driven* absorve a maioria das grandes transacções, enquanto o segmento *order – driven* absorve as pequenas transacções.

---

12 Num mercado *quote driven*, (…) os títulos admitidos à negociação estão sujeitos a obrigações de cotação por parte de um conjunto de participantes com estatuto de *market makers*. Ver [142]).

13 (…) *"Order Driven Market"*, no qual existe um leilão de ordens de compra e venda, e onde os preços são determinados pela publicação das ordens de compra e venda. Por exemplo, a negociação na *Euronext Lisbon* é efectuada através de *"Order Driven Market"*. Ver [120].

1.1.5. Outras definições e opiniões

Não obstante este aparente consenso em torno do *BAS* e do *VaR(L)*, encontramos autores que se apoiam noutros pressupostos para definir liquidez, como é o caso de [76] que começa por distinguir entre medidas directas e medidas indirectas: como exemplo de medidas directas de liquidez temos os *BAS* cotados e efectivos, a cotação e o tamanho das transacções, a frequência das transacções e o volume das transacções. Mas de acordo com a opinião dos autores, para as obrigações, onde a maior parte das transacções ocorre no mercado *over-the-counter* (mercado de balcão), estas medidas directas são muitas vezes de pouca confiança e difíceis de obter. Por isso, consideram oito diferentes factores ou medidas indirectas: montante emitido (*issued amount*), cupão (*coupon*), lista (*listed*), que são estáticas, assim como são fixas as características da obrigação ou o seu banco emissor ; a medida idade (*age*) muda gradualmente com o passar do tempo. As restantes medidas são dinâmicas e dependem da informação de mercado; a falta de preço (*missing price*) e volatilidade de preço usam informação diária do preço, enquanto as medidas número de contribuintes e a dispersão de rendimento também consideram parte da informação.

MONTANTE EMITIDO *(issued amount)* de uma obrigação é muitas vezes usado para dar uma indicação da sua liquidez, muitos bancos de investimento usam-no como um critério de liquidez para calcular os índices das obrigações; por exemplo: o Lehman Brothers usava este critério para o índice de referência Euro-Aggregate Corporate Bond (TR). O seu uso foi inicialmente proposto por [53] que defendeu que grandes emissões devem ser transaccionadas mais vezes, assim a medida indirecta *issued amount* é actualmente uma aproximação da medida directa de liquidez, volume de transacção. Segundo os autores, desde [53], foram propostas muitas hipóteses alternativas que trouxeram também um efeito positivo do *issued amount* na liquidez (logo, no preço das obrigações). Referem [123] e [61] para concluir que, nos modelos de microestrutura de mercado, os custos de transacção aumentaram, porque os *traders* mantiveram as suas posições. Posteriormente, o custo das posições dos *traders* aumentava se era mais difícil obter informação sobre os títulos e se a expectativa de tempo esperado é maior.

Referem [39], uma vez que estes autores fundamentam que grandes emissões podem ter menos custos de informação, desde que sejam detidas por muitos investidores ou se tenham analisado as suas características; de forma similar, a informação acerca de poucas emissões pode ter menos impacto para os investidores. Assim, concluem que poucas emissões terão um rendimento maior devido a um prémio de iliquidez. Os autores referem que outro argumento ouvido frequentemente, por exemplo, em [116] e [8], é que as obrigações com montantes baixos emitidos tendem a bloquear mais facilmente nas carteiras *buy-and-hold*, reduzindo o montante transaccionável e assim a sua liquidez. Em resumo, supõem um efeito negativo do *issued amount* nos rendimentos.

Os títulos do Tesouro têm efeitos negativos e mais significativos. Deste modo, grandes emissões do Tesouro têm menores rendimentos, como esperado. Segundo os autores, a pesquisa empírica sobre obrigações é inconclusiva, embora se observem efeitos positivos e negativos. Os autores referem que [107] confirmou isto mostrando que a maior parte de grandes emissões de obrigações numa amostra são líquidas, mas algumas são ilíquidas e que algumas pequenas emissões são líquidas.

CUPÃO *(coupon)*[14], fazem referência a [8], que segundo os autores, provaram que as instituições financeiras que são forçadas a distribuir só o rendimento de cupão dos seus investimentos podem preferir obrigações com percentagens elevadas de cupão. Esta grande procura de cupão elevado (*high coupon*) das obrigações implica menores rendimentos. Por outro lado, o cupão é frequentemente visto como uma aproximação dos efeitos dos impostos, referem, por exemplo, [122]: "se o rendimento do cupão é taxado, as obrigações com cupões elevados terão maior taxa de imposto sobre os rendimentos. E, companhias com taxas mais baixas de impostos irão emitir obrigações de cupão elevado, deste modo, cupões elevados são novamente associados a rendimentos elevados". Esta medida segundo os autores, é assim ambígua.

---

14 Cupão *(Coupon).* Taxa de juros de um título representativo de dívida cujo pagamento é prometido pelo emissor ao titular até ao vencimento final, expresso como um valor percentual do valor facial do título. Por exemplo, um título com um cupão de 10% pagará $10 por $100 de valor facial ao ano, geralmente em vencimentos semestrais. O termo deriva de uma pequena parte destacável de cada certificado da obrigação que, apresentada ao emissor nas datas dos vencimentos dos juros, autoriza o pagamento dos juros que estiverem vencendo nessa data. A medida que as obrigações nominativas *(REGISTERED BOND)* são cada vez mais usadas, o uso do cupão diminui gradualmente. [43]

LISTA/REGISTO (*listed*), citando [4], que fundamentaram que as companhias cuja acção é registada (*listed*) no mercado de valores têm que divulgar mais informação do que as companhias que não têm esta exigência. Tendo em conta o modelo de microestrutura de mercado mencionado, os custos de *making a market* nas obrigações de empresas registadas deve assim ser menor, defendem os autores. Assim, admitem que a medida *listed* está associada a alta liquidez e a baixos rendimentos.

IDADE/MATURIDADE *(AGE)*, a idade de uma obrigação é uma medida popular da sua liquidez. Referem mais uma vez [116], uma vez que eles observaram que, com uma obrigação a ficar mais velha, mais antiga, uma percentagem em crescimento do seu montante emitido é absorvido nas carteiras dos investidores *buy-and-hold*. Assim, adquire-se a obrigação mais antiga, a menor transacção acontece, e torna-se menos líquida. Além disso, uma vez ilíquida, a obrigação permanece ilíquida até à maturidade. Fazem também referência novamente a [107] e também a [118], uma vez que estes autores verificaram ainda que as novas emissões são mais facilmente transaccionadas do que as emissões antigas. O segundo, realçou ainda que as novas emissões são tipicamente subavaliadas (*underpriced*), por isso os investidores compram as obrigações depois da oferta e vendem-nas rapidamente. Seguindo estes argumentos, admitem uma relação positiva entre a idade (*age*) e o rendimento.

FALTA DE PREÇOS *(missing prices)*, a ocorrência da "execução de preços" *(price runs)* e os valores em falta é, segundo os autores, a primeira medida de liquidez que utiliza a informação de mercado. Referem novamente [116], já que eles argumentam que se a liquidez de uma obrigação for suficientemente baixa, pode acontecer que hajam dias sem haver transacções dessa obrigação. Na sua base de dados, isto ficou marcado como "*price run*": dois preços consecutivos para uma obrigação são semelhantes. Neste artigo, os autores ampliaram a noção deles de iliquidez, considerando não só a ocorrência de um "*price run*", mas também a ocorrência de valores em falta, desde que em ambos os casos não haja actividade da obrigação nesse dia. Admitiram uma relação positiva entre *missing prices* e o rendimento.

VOLATILIDADE DE PREÇOS *(price volatility)* é uma medida de preços incertos. Nos modelos de microestrutura de mercado, o custo de manutenção das

posições dos *traders* é maior se a informação incerta é maior. Uma importante pesquisa sobre a incerteza é relatada nos movimentos de preço futuros. Por isso, admitiram que uma elevada volatilidade de preços leva a um elevado BAS, e por isso a menor liquidez e altos rendimentos.

NÚMERO DE CONTRIBUINTES (*number of contributors*), segundo os autores, é a primeira medida a ter em conta na informação sobre a composição da cotação. Referem-se a [48], pois para estes autores, um grande número de investidores activos competindo pela mesma obrigação, leva a um menor preço de desconto de iliquidez e assim um menor prémio de rendimento. Em alternativa, fazem referência a [63] e a [78] já que eles argumentaram que um maior número de participantes no mercado torna a venda da obrigação mais fácil, porque é mais fácil encontrar uma contrapartida da transacção e muitas encomendas podem ser decompostas em pequenas partes sem afectar o preço de mercado. Admitem assim, uma relação positiva entre a medida número de contribuintes (*number of contributors*) e a liquidez e, por isso, esperam um efeito negativo desta medida nos rendimentos das obrigações.

DISPERSÃO DE RENDIMENTO *(yield dispersion)* reflecte a medida em que os participantes no mercado acordam o preço de uma obrigação. Fazem referência a [126] já que estes autores derivaram um modelo que prevê que se os investidores têm crenças/convicções heterogéneas, o prémio de liquidez é maior. O argumento dos custos de manutenção das posições, aplica-se desde que os *traders* se deparem com mais incerteza e se os preços apresentam uma difusão maior em relação aos contribuintes. Admitem assim, uma relação positiva entre a dispersão e os rendimentos de obrigações.

Para aproximar a liquidez do conjunto de obrigações, utilizam um modelo baseado em 5 variáveis para controlar a maturidade, o crédito e diferenças cambiais entre obrigações: às variáveis “prazo”, “incumprimento”,“duração” e “*rating*” estudadas por [63] acrescentaram uma 5ª variável, a denominação monetária do título, para completar o conjunto de variáveis.

Os autores, defendem que, para os títulos de empresas onde a maior parte das transacções ocorrem no mercado secundário (*over-the-counter*), as medidas directas de liquidez (baseadas nos dados de transacções) não são de confiança e são difíceis de obter. Por isso, as pesquisas voltaram-se para as medidas

indirectas baseadas em características de títulos e/ou preços/cotações de "*end-of-day*" (fim do dia). Começam por dedicar atenção ao controlo de outros tipos de risco para identificar o prémio associado com risco de liquidez. Usaram as 8 dimensões indirectas de liquidez de títulos referidas atrás. Para cada medida de liquidez, construíram P, carteiras mutuamente exclusivas ordenando todos os títulos pelo seu valor de medida de liquidez e nomeando as primeiras 100/P % de títulos à carteira 1, as segundas 100/P % à carteira 2 e por aí adiante, até à última 100/P % de títulos ser nomeada para a carteira P. A série de rendimentos da carteira P é subsequentemente usada em dois modelos de regressão. No primeiro modelo, a equação de regressão para cada carteira, sob a hipótese nula de que a liquidez não afecta os rendimentos dos títulos, a intercepção deve ser próxima de zero. No segundo modelo, todas as carteiras partilham uma intercepção comum, mas a liquidez específica da carteira acrescenta uma variável à equação da regressão.

Neste ponto é importante também fazer referência a outros autores que podemos incluir nesta subsecção, a que poderemos chamar de "marginais" e que à parte dos aparentes "consensos" à volta, quer do *BAS* (firmeza/tensão), profundidade e resiliência, quer da *VaR(L)*, apresentam opiniões distintas e diferenciadas. É, por exemplo, o caso de [52], [60], [75], [87], [88], [109], [111] e [121]. Seguidamente faremos referência a estes autores para reforçar a ideia de que existem muitas definições de liquidez para além das "convencionais", ou amplamente aceites.

O artigo [60] define liquidez com base na volatilidade da carteira num determinado período de colocação. Apresenta um modelo de interacção entre práticas de *risk-management* e a liquidez de mercado. Por um lado, o *risk-management* mais apertado reduz ao máximo a posição que uma instituição pode tomar, e deste modo a quantia de liquidez que pode oferecer ao mercado. Por outro lado, os *risk-managers* devem ter em conta o risco efectivo que pode levar a vender uma posição longa no tempo. O que resulta deste artigo é que pode surgir um efeito cíclico: administração de risco mais apertada reduz a liquidez que em troca conduz a administração de risco mais apertada, etc.

Isto pode ajudar a esclarecer descidas bruscas na liquidez e, desde que a liquidez é estimada, nos preços em relação à volatilidade aumenta ou diminui a capacidade de tolerância ao risco (*risk-bearing)*.

O artigo [109] analisa o confronto entre os investidores de curto e longo prazo. Ocasionalmente ocorrem nos mercados financeiros, episódios de turbulência extrema, de tal forma que parece que os mercados deixam de funcionar. Esses episódios são marcados por grandes fluxos de ordens, rápida evolução nos preços e dificuldades por parte de muitos *traders*. A estes episódios os autores chamam de "buracos de liquidez" (*liquidity holes*), ou mais radicalmente, "buracos negros de liquidez" (*liquidity black holes*) o que segundo os autores é análoga ao resultado de um modelo de corrida a um banco. Investidores de curto prazo vendem porque outros vendem.

Liquidity black holes não são meros exemplos de grandes oscilações nos preços. O anúncio público de estatísticas macroeconómicas, como a taxa de desemprego dos Estados Unidos ou as estimativas do P.I.B., são por vezes marcadas por grandes oscilações no preço no momento do anúncio.

Quando o preço dos activos desce perto dos limites[15] de perda, aumenta a pressão para os *traders* venderem. Mas essa pressão para vender, baixa os preços dos activos, o que implica nova pressão para vender, entrando assim num ciclo, o resultado, como já foi referido, é análogo a um modelo de corrida a um banco, investidores de curto prazo vendem porque outros vendem, mas se acreditarem que os outros profissionais vão controlar os nervos e não vender, então eles também se vão abster de vender.

O artigo [52] fala-nos sobre as dimensões da liquidez, que, de forma simples, é vista como a habilidade para trocar um activo financeiro por dinheiro se bem que a profundidade a amplitude (*breadth*) e a resiliência também possam ter um papel importante na definição da liquidez. O artigo começa por nos dizer que não existe consenso na literatura disponível sobre a medida de liquidez propriamente dita: "o conteúdo de algumas pesquisas é caracterizado em grande

15 Na componente prática deste trabalho, procuraremos definir estes limites como limiares que condicionam a evolução preço - liquidez. Por enquanto deixamos a questão em aberto e voltaremos a ela mais à frente, mas uma leitura mais cuidada deste artigo pode trazer, quem sabe, a resposta para o significado dos limiares.

parte por extensões de outras pesquisas. Sendo verdade que os problemas associados às medidas de liquidez são geralmente tratados de forma muito semelhante, o que pode explicar porque é que tão poucos progressos têm sido feitos neste tópico. Acontecimentos recentes e a percepção da vulnerabilidade dos mercados para o risco de liquidez geraram um aumento da atenção para esta questão". De acordo com a opinião do autor, recentemente, fizeram-se alguns avanços. Parecia que qualquer tentativa adequada para medir a liquidez, precisaria de incorporar aspectos de indicadores múltiplos e díspares a nível macro e micro, assim como, indicadores de sentimentos dos investidores e comportamentos dos participantes do mercado. Algumas destas medidas são exploradas a seguir, e são chamadas medidas agregadas – denominação motivada porque muitos analistas focaram a sua atenção em vários aspectos da liquidez num contexto macroeconómico.

Dinheiro define-se como perfeitamente líquido, e a liquidez disponível nos mercados financeiros é vista geralmente como residual, às vezes chamada "livre" ou "excesso" de liquidez na economia como um todo. Este conceito é geralmente definido como o crescimento da provisão de dinheiro em excesso dos montantes requeridos para satisfazer as transacções de procura de dinheiro, o montante requerido para comprar bens e serviços. Ignorando a procura de dinheiro por precaução e definindo M2[16] como dinheiro, "liquidez livre" torna-se a diferença entre o crescimento de M2 e o crescimento PIB (GDP)[17]. As suposições são que a

---

*16 Oferta monetária **M1-A** meios imediatos de pagamento = circulação monetária + depósitos à ordem*

***M1-B**: **M1-A** mais outros depósitos controlados.*

***M2**: **M1-B** Acrescido da recompra (RPs) nocturna, fundos de mercado monetário, poupanças, e os pequenos (inferiores a $100M) depósitos a prazo.*

***M3**: **M-2** mais os depósitos de longo prazo e a recompra a prazo.*

L: M-3 mais outros activos líquidos.

17 GDP - Gross domestic product, *PIB - Produto Interno Bruto.* É o valor do output final total de todos os bens e serviços produzidos (internamente) numa economia. "Interno" descreve a medida como uma medida que contabiliza o output produzido por residentes e não residentes na economia quando não se contabiliza a afectação de *claims* domésticas e estrangeiras. "Bruto" indica que o valor perdido pelo "desgaste" do capital utilizado na produção (i.e. depreciação) não é deduzido do valor do output final. Se fosse deduzido, teríamos uma medida que designamos por produto interno líquido ou PIL. Qualquer medida (bruta ou líquida) do output total pode ser medida ou a custo de factores ou a preços de mercado. A diferença é que valores a preços de mercado incluem o valor de impostos indirectos e subsídios, enquanto que valores a custo de factores não o incluem. Note-se que o PIB (ou PIL) "potencial" é o valor que a economia consegue produzir num dado período (geralmente um ano) se todos os recursos disponíveis forem afectos de forma óptima e plenamente utilizados. Em contraste, o PIB (ou PIL) real é o output realmente produzido num período de tempo. É diferente do potencial na medida em que existe uma ineficiência ou excesso de capacidade/subemprego. [145].

procura de activos financeiros é residual, já que estes são relativamente inelásticos, e que a velocidade de circulação do dinheiro é constante. Algumas medidas usarão definições mais latas de dinheiro e ajustarão para alterações na velocidade de circulação deste.

Porém, estas medidas latas, segundo os autores, provêem apenas de visões limitadas em áreas que geraram preocupações recentes, como a concentração de liquidez em mercados de activos específicos ou instrumentos de despesa de liquidez em outros mercados ou ainda a transmissão de liquidez de mercado para mercado. Além disso, M2 pode muito bem ser um conceito estrito e talvez, principalmente, ignore que os conceitos como "dinheiro próximo" mudam constantemente. As taxas de *turnover*[18] de activos financeiros, que podem ser usados como garantias para empréstimos ou trocados directamente por outros activos, precisam de ser consideradas na monitorização da liquidez. O crescimento no valor dos títulos garantidos por hipoteca (*mortgage bonds*) relativamente ao valor residencial de bens imóveis é disso um exemplo".

Protter, no artigo [30], diz-nos que as teorias clássicas do mercado financeiro assumem um mercado infinitamente líquido em que todos os *traders* são compradores de preços. Esta teoria, segundo o autor, é uma boa aproximação para as acções altamente líquidas, embora não se aplique muito bem a grandes *traders*, ou para modelar custos de transacção. Protter propõe-nos um novo modelo que tem em conta a "não liquidez", enquanto extensão do modelo clássico. Segundo Protter, em alternativa, ou até mesmo em simultâneo, podemos usar esse modelo para os custos de transacção. Na essência, descura a suposição standard de um mercado competitivo, onde cada *trader* pode comprar ou vender quantidades ilimitadas de acções ao preço de mercado. A aproximação estudada por Protter propõe a hipótese de uma curva estocástica elástica para um preço de segurança como uma função de volume de transacções. Isto conduz a

18 Na Europa, o "*turnover*" é o prazo para o rendimento. Nos Estados Unidos da América, o *turnover* é a medida de quão rapidamente o património é vendido. Uma alta rotatividade significa que os bens são vendidos rapidamente, ao passo que uma baixa rotatividade significa que os bens são vendidos de forma mais lenta.

pontos matemáticos interessantes, como a restrições naturais em estratégias de cobertura *"hedging"*[19].

O artigo [88] estuda o papel do tempo, liquidez, volume e do BAS na volatilidade do mercado de acções australiano, e defende que o tempo deve ter um papel importante na análise da liquidez, já que "no passado, foi efectuada uma análise da liquidez usando múltiplas e dissociadas variáveis tais como volumes ou *BAS* em vez de uma única métrica de liquidez. A disponibilidade dos dados de alta - frequência das transacções dos mercados financeiros, levou ao desenvolvimento de técnicas econométricas que possuem uma maior capacidade de extracção do que as tecnologias pré-existentes que se baseiam na amostragem discreta de dados ao longo do calendário. Mostra-se que os padrões sazonais intradiários da duração, volumes transaccionados, *spreads* e volatilidade são similares aos expostos pela IBM na NYSE (*New York Stock Exchange*) e que a duração, como medida pelo tempo entre transacções, é afectada pela volatilidade condicional. Outra variável que, conjuntamente e significativamente afectou a volatilidade com a duração foi o BAS, também medida, quer momento a momento, quer desfasada. No entanto, o efeito antecipado dos volumes transaccionados não foi evidente".

Finalmente, dois artigos que julgamos sintetizarem muito bem as várias definições de liquidez são [87], e [120].

---

19 *HEDGE/HEDGING*. Estratégia usada para compensar investimentos de risco. Um *hedge* perfeito é aquele que elimina a possibilidade de ganhos ou perdas futuras. Um accionista preocupado com a queda dos preços das acções, por exemplo, pode fazer um *hedge* dos seus títulos por meio da compra de uma opção de venda (*PUT OPTION*) de acções ou da venda de uma opção de compra (*CALL PTION*), Alguém com 100 acções de XYZ que estão a ser vendidas a $70 a acção, pode fazer *hedge* da sua posição mediante a compra de uma opção de venda que lhe assegure o direito de vender 100 acções a $70 por acção, a qualquer momento, nos meses seguintes. Esse investidor deve pagar uma determinada quantia, denominada prémio (*PREMIUM*), por esses direitos. Se a acção XYZ cair durante esse período, ele pode exercer sua opção — isto é, vender as acções a $70 —, preservando desse modo o valor de $70 de suas acções XYZ. O mesmo accionista de XYZ pode fazer *hedge* de sua posição por meio da venda de uma opção de compra. Nessa operação, o investidor vende o direito de compra de XYZ a $70 por acção durante alguns meses. Em contrapartida, recebe um prémio. Se o preço da acção XYZ cair, o prémio recebido compensará em certa medida a queda do valor da acção. A venda a descoberto (*short selling*) é outra técnica de *hedging* amplamente utilizada. Os investidores frequentemente tentam realizar *hedge* contra a inflação com a aquisição de activos cujos valores subirão mais rápido do que a inflação. Grandes sociedades comerciais que desejam assegurar o preço que será recebido ou pago por uma *commodity* farão *hedge* das suas posições via compra e venda simultâneas no mercado de futuros. A Hershey's, por exemplo, uma companhia de chocolate, fará *hedge* do seu fornecimento de cacau no mercado de futuros para limitar o risco de um aumento nos preços do produto ([43]).

Em [87] encontramos um estudo sobre a liquidez, ainda que adaptado à realidade brasileira, achamos que nos permite ter uma ideia generalista e simplificada das várias definições de liquidez.

Defende que a liquidez é:

-A facilidade de negociação (*trading*);

-O tempo que o activo leva para ser transaccionado (sugere a leitura de Lippman e McCall (1986));

-A profundidade, largura (*breadth*) e recuperação (*resiliency*) (sugere a leitura de Hasbrouck e Schwartz (1988));

-A diferença entre o preço de compra e de venda (*BAS*) (sugere a leitura de Amihud e Mendelson (1986));

-Conclui que não podemos ter apenas uma medida de liquidez (sugere a leitura de Bernstein (1987)).

Por seu lado [120], aponta para a definição de liquidez do BIS – *Bank for International Settlements* mencionada no seu relatório denominado *Market Liquidity: Research Findings and Selected Policy Implications* (Liquidez de Mercado: Resultados de Pesquisas e Implicações em Políticas Seleccionadas). Este relatório salienta que o conceito de liquidez de mercado é muito vago o que reflecte a sua natureza multifacetada. Dá-nos uma definição que, segundo o autor, teria uma aceitação relativamente ampla e que seria a seguinte: "Um mercado líquido é um mercado onde os participantes podem rapidamente realizar um grande volume de negócios com um pequeno impacto sobre os preços." (*Market Liquidity* - BIS: 1999, 5), julgamos que os conceitos de *grande volume* e *pequeno impacto* merecem uma melhor descrição.

Conclusão parcial

Nesta secção fizemos uma revisão bibliográfica, com o intuito de responder à questão de como definir liquidez nos mercados financeiros. Podemos dizer que existem três grandes correntes de opinião: uma que defende o BAS como uma dimensão que permite definir a liquidez, outra corrente que defende a inclusão da liquidez nas medidas VaR a que chamaram VaR(L) e por fim uma terceira, normalmente chamada de profundidade do mercado e que associamos ao

volume, e que será um dos conjuntos de dados que iremos analisar na parte prática do nosso trabalho.

Ao longo da revisão bibliográfica e pesquisa sobre o tema, notámos um crescimento exponencial das questões e opiniões relacionadas com a liquidez, às quais não deve ser alheio o facto de enquanto efectuávamos a nossa pesquisa, ter surgido uma grande "turbulência" nos mercados financeiros internacionais, arrastados pela crise do "*sub-prime*" nos EUA e que estão associados à problemática da liquidez (ou a falta dela!). Tal veio dar razão a muitos autores, que tal como observámos nesta revisão bibliográfica, eram da opinião que o risco de liquidez estaria a ser bastante negligenciado, quer por investidores individuais, quer por grandes instituições financeiras, quer inclusive pelos reguladores. Esta turbulência vem, julgamos nós, realçar a importância da investigação em torno da temática da liquidez, em particular sobre a influência da liquidez no preço, como este a que nos propomos. Esperamos, que no final tenhamos contribuído positivamente para a investigação em torno da problemática da liquidez.

1.2. Influência da liquidez nos preços dos derivados, há indícios de uma teoria que permita responder a esta questão?

Numa primeira abordagem parece-nos lógico deduzir que a liquidez influencia o preço dos derivados tendo em conta que os derivados estão ligados aos activos subjacentes através de restrições de arbitragem. Assim, de acordo com o que vimos anteriormente, é natural que, os preços dos activos sejam influenciados pela liquidez, será lógico deduzir que o preço dos derivados também deverá ser influenciado pela liquidez. Nesta fase é prematuro afirmar qual a forma funcional dessa dependência (por exemplo se é ou não proporcional) ainda que intuitivamente nos pareça natural que haja uma proporcionalidade (ou proporcionalidade inversa) entre a liquidez dos derivados e a liquidez dos activos subjacentes.

1.2.1. Influência da liquidez nos mercados de derivados em geral

No artigo [40], pode estar parte da resposta, ou pelo menos indícios que nos permitam responder a esta questão. Uma primeira leitura do artigo permitiu-nos perceber que os autores estudam o efeito da liquidez nas opções e futuros em dois contextos: o primeiro é quando os derivados são ilíquidos mas os activos subjacentes são líquidos[20]. Fazem referência a [24], que estuda as opções em circulação e concluíram que foram transaccionadas com um desconto de aproximadamente 21% relativamente às opções ilíquidas semelhantes. Este tema é de particular relevância na estimação aplicada às opções de acções que são oferecidas como compensação nas empresas públicas que têm acções na bolsa. Considerando que as opções não podem ser negociadas, há evidências que os empregados exercem frequentemente bem as opções antes que elas expirem e para ganharem o acesso às acções subjacentes. O autor faz ainda referência a [77], já que este artigo mostra esta tendência, inicialmente, na estimação de opções dos empregados, assumindo que aquele exercício acontecerá se o preço atingir uma percentagem pré-calculada.

O segundo é estar dependente de activos ilíquidos e se há opções sobre o activo. Neste caso, qualquer desconto de iliquidez aplicado ao activo subjacente também reduzirá o valor de qualquer opção daquele activo.

Outro artigo que pode ajudar a responder a esta questão é [29] no qual os autores ilustram numericamente os resultados obtidos num modelo binomial de *Cox-Ross-Rubistein* (CRR)[21] com custos de liquidez e encontram a reserva de preços de procura para *put-options* europeias.

David Bakstein e Sam Howison em [14] desenvolvem um modelo parametrizado para os efeitos da liquidez decorrentes da transacção de um activo. A liquidez é definida por meio de uma combinação da transacção individual de um

---

20 No exemplo dado, as opções de compra de acções oferecidas aos empregados como “prémio de desempenho”, estes não podem vender as opções, o que as torna ilíquidas, em contrapartida as acções, quando terminar o período de carência serão extremamente líquidas.

21 CRR - Modelo binomial de Cox-Ross-Rubistein (1979). Essencialmente usa um modelo a "tempo-discreto" da variação do preço sob o tempo subjacente ao instrumento financeiro. Apreçamento ou valorização de uma opção é calculada por aplicação da suposição de neutralidade face ao risco sob a vida da opção, da evolução do preço do instrumento subjacente.

trader com o custo e o impacto da derrapagem no preço, que é sentida por todos os participantes do mercado. A definição escolhida permite que a liquidez seja observável no livro de ordens centralizado de um activo, como é geralmente fornecida pela maioria das bolsas não especializadas. A versão do modelo a tempo discreto é baseada na árvore binomial CRR e em limites apropriados em "tempo – continuo", derivam várias equações diferenciais parciais não lineares. Ambas as versões podem, segundo os autores, ser directamente aplicadas no preço e cobertura das opções; a natureza não linear da liquidez leva aos naturais *BAS*, que são baseados na liquidez do mercado de subjacentes e à existência de estratégias de (*super-*) replicação. Testaram e calibraram empiricamente o modelo *set-up* (directo) com dados de alta-frequência do mercado alemão de "*blue chips*"[22] e discutiram futuras extensões do modelo, incluindo a liquidez estocástica. Este modelo será desenvolvido mais pormenorizadamente no capítulo 2.

Em [70], analisam a importância da diversificação das acções por vários mercados bolsistas estrangeiros (*cross-stock*[23]) no preço e no processo de revelação/liquidez da provisão nos mercados de capitais. Investigam dois aspectos desta questão para as 30 primeiras acções do Dow Jones. Primeiro, utilizando os componentes principais e a análise de correlação canónica, concluem que tanto os retornos, como os fluxos de ordens são caracterizados por factores comuns. Esta comunhão nos fluxos de ordens explica cerca de metade dos retornos. Em segundo lugar, examinam a variância e a covariância comum a várias aproximações da liquidez e profundidade do mercado (impacto nas transacções). Aproximações de liquidez como o *BAS* e as "*bid-ask* variação das cotações" apresentam uma variação no tempo e impacto nas transacções. Concluem, no entanto, que os factores comuns nestas aproximações (*proxies*) são relativamente pequenos.

22 Ver definição de empresas "*blue chips*" no capitulo 2, onde fazemos um pequeno desenvolvimento do modelo.

23 *Cross-Stock (market)* é quando uma empresa regista as suas acções em vários mercados bolsistas estrangeiros, para além do mercado doméstico nacional.

1.2.2. Influência da liquidez no mercado das Opções

Mayhew em [106], por sua vez, conclui que os novos mercados de derivados aumentam claramente a liquidez e a qualidade da informação nos mercados financeiros. E é essa liquidez e qualidade de informação que, no fundo, fomenta o crescimento económico. Neste artigo o autor refere ainda que, na altura em que as transacções/negociações de opções foram introduzidas nos Estados Unidos, alguns expressaram preocupação porque as opções são um veículo substituto do investimento e que poderiam desviar para longe o volume do mercado de acções subjacente. O estudo da Nathan Associates (1974) não encontrou provas de que o volume da negociação tivesse sido alterado com a introdução das opções. No entanto, muitos estudos posteriores, começando com [71], têm documentado que o volume de mercado das acções subjacentes tende a aumentar e não a diminuir com a introdução das opções. Mayhew faz ainda referência ao facto de que a Nathan Associates (1974) também registou uma redução no *BAS* do mercado das acções subjacentes ao registo de opções. Subsequente investigação tem apoiado esta constatação, e também tem concluído que outras medidas de qualidade do mercado também melhoram com o registo de opções, como a componente da selecção adversa do BAS, e a velocidade com que a informação é reproduzida nos preços (sugere a leitura, por exemplo de [92].

O artigo [105], por sua vez analisa o impacto da iliquidez das acções sobre os preços dos derivados. Em particular, mostra como a iliquidez gera um *BAS* na opção da acção, mesmo na ausência de outras imperfeições, tais como custos de transacção e assimetria de informação. Além disso, o *BAS* mostra ser assimétrico no que diz respeito ao preço da opção sob liquidez perfeita. Este facto, segundo

os autores, explica o aparecimento do "efeito sorriso"[24] quando a volatilidade implícita é calculada a partir do preço médio (*mid-quote price*[25]).

No artigo [97], Jonu Lee e Seki Kim, derivam uma equação não linear para o apreçamento de opções europeias contendo o risco de liquidez, que pode ser definida como o inverso da derivada parcial do preço do activo subjacente com respeito à quantidade de activos transaccionados no mercado eficiente. Simulações numéricas são obtidas através do método dos elementos finitos e comparado com o preço das opções do índice de acções KOSPI 200[26]. Estes preços são calculados com o risco de liquidez e são considerados mais realistas do que os preços do modelo de Black-Scholes sem o risco de liquidez.

Numa pesquisa recente, encontrámos alguns artigos que seguramente nos vão ajudar a "cimentar" as ideias anteriores e responder à questão que se colocou, são eles [11], [13], [14], [25], [42], [55] e [59] (aos artigos [13] e [14], já fizemos referência atrás e serão estudados mais em pormenor, aquando do estudo de um índice de liquidez).

1.2.3. Influência da liquidez no mercado de Futuros

O artigo [55], apresenta-nos um estudo interessante, já que estima várias medidas de liquidez para o Tesouro americano (*U.S. Treasury*), à vista (*spot*) e para os mercados de futuros no ano de 1993, e com isso estuda as diversas medidas de liquidez dos derivados e dos activos subjacentes.
Neste trabalho, calculam os custos de liquidez dos mercados *spot* e futuros, ao longo de um período comum para diversos tipos de instrumentos do tesouro.

---

24 "O *efeito sorriso*" é um desvio empírico em relação aos pressupostos desse modelo (de Black Sholes), relacionado com o facto de que, ao contrário do que prevê o modelo de Black Scholes, opções de uma mesma série não apresentam igual volatilidade, mas valores que dependem do preço do exercício das opções, gerando uma curva em forma de U." [94]

25 "*Mid-quote price*" é a média entre o preço oferta (*bid*) e o preço procura (*ask*).

26 O índice Kospi 200 é um índice de capitalização bolsista de 200 acções sul coreanas que perfazem cerca de 80% do total de capitalização bolsista dos títulos transaccionados na Bolsa Coreana (Korea Stock Exchange). O objectivo do índice é representar mais fielmente possível (a maior correlação positiva possível) o movimento de todo o mercado Korea Stock Exchange com apenas 200 títulos.

Comparam as medidas para a liquidez do Tesouro, mercado à vista, *spot* e mercados de futuros: volume de transacção, o número de transacções, a dimensão das transacções, o número de *traders*/espaço transacções, e várias medidas de "*BAS*" (cotado, efectivo e realizado). Para ambos os mercados *spot* e futuros, concluem que a negociação está concentrada nas proximidades do vencimento (maturidade) /sobre o prazo (*on-the-run*). O mercado *spot* parece ser mais activo para os contratos de curto prazo, enquanto o mercado de futuros está mais activo em contratos de vencimento mais longo. Além disso, a concentração da actividade é mais proeminente nos mercados futuros, desde que a liquidez aparece, para estar ainda mais concentrada nos vencimentos do contrato, em comparação com os mercados *spot*.

Concluem ainda que, para o mercado de futuros, a média realizada do *BAS* é mais elevada para negociantes *traders* menos experientes do que para *traders* mais experientes, o que é consistente com a predominância de transacções *inter-traders* neste mercado. Apenas os *BAS* realizados são comparáveis entre os mercados *spot* e de futuros, uma vez que os dados que dispõem sobre futuros, não contêm as cotas (%) dos *traders*. As médias dos valores dos *spreads* realizados são uniformemente menores nos mercados de futuros, com excepção da 13ª semana de títulos, onde existe um aumento substancial da actividade já que na 13ª semana os futuros sobre as obrigações do tesouro são transaccionados no CME enquanto que as obrigações e notas do tesouro (o activo subjacente) são transaccionadas no CBOT[27]. Segundo os autores, estes resultados não significam que os custos de liquidez no mercado de futuros são inferiores aos dos mercados spot, uma vez que não têm controlo das diferenças nos dois mercados, como a dimensão do mercado e a volatilidade. Infelizmente, concluem que são necessários testes mais formais antes de poderem tirar conclusões sobre a relação dos custos de liquidez nos dois mercados.

O artigo [11] estuda o impacto da introdução no índice FTSE Xinhua China A50, dos contratos de futuros relativamente à volatilidade e liquidez dos seus subjacentes. O índice FTSE Xinhua China A50 é um índice negociável em tempo-

27 A maioria das transacções sobre os contratos de futuros são transaccionados na Bolsa de Futuros de Chicago a *Chicago Board of Trade* (CBOT) e a *Chicago Mercantile Exchange* (CME)

real que inclui as 50 maiores companhias com *share* 'A'[28] criado para atender às necessidades dos Investidores Institucionais Estrangeiros Qualificados (QFIIs) que pode ser utilizado como base para as bolsas de valores e para produtos derivados em OTC, fundos mútuos e ETFs. Os resultados obtidos indicam um aumento significativo na volatilidade spot e na liquidez no período de pós-futuros. As estimações de GARCH[29] sugerem que a mudança na volatilidade seja atribuída a um aumento na taxa de fluxo de informação para o mercado à vista (*spot*), ao invés das transacções especulativas. Depois de controlados os factores que afectam a liquidez, concluíram que a introdução dos futuros induz os negociantes desinformados a migrarem do mercado de futuros. De uma forma global, os resultados têm implicações para os reguladores financeiros e nas políticas relativas à interacção entre futuros e mercados à vista, e a integração de mercados financeiros. Com a introdução dos contratos de futuros no índice S&P 500, houve uma vasta literatura que examinou o impacto dos índices futuros de acções no mercado à vista (*spot*), e foi uma das áreas mais frutíferas de pesquisa financeira empírica. A maior parte do esforço é dispendido a explicar a relação entre a transacção de futuros e a volatilidade do mercado à vista.

Este artigo acrescenta mais um contributo à literatura que investiga o efeito da introdução de futuros na volatilidade e liquidez do mercado à vista (*spot*), em duas dimensões: i) examinando previamente contractos de futuros não estudados, o índice de futuros FTSE Xinhua China A50, e ii) examinando o efeito da internacionalização das transacções dos contractos de futuros na volatilidade e liquidez doméstica destes contractos. Os resultados indicam que a volatilidade do

---

28 Acções de empresas constituídas na China, que transaccionam na bolsa de Xangai, cotadas no *Chinese Renminbi* (RMB). Estas acções são transaccionadas quer por chineses, quer por investidores estrangeiros sob os regulamentos do *QFIIs - China Qualified Foreign Institutional Investors*. [139].

29 "Com o objectivo de estudar a heteroscedasticidade…", -forte dispersão de dados em torno de uma recta, "…em certo tipo de séries temporais, nomeadamente séries de preços, Engle introduz, em 1982, os modelos com heteroscedasticidade condicional auto-regressiva (ARCH). Tais modelos introduzem uma dinâmica endógena na definição das variabilidades, o que representa uma grande inovação relativamente aos modelos anteriormente conhecidos, pois que nestes a heteroscedasticidade dependia apenas de variáveis exógenas observáveis. Nos modelos ARCH, posteriormente generalizados por Bollerslev em1986, a variância condicional é uma forma quadrática dos valores do processo, do desvio padrão condicional. Uma critica feita a este tipo de modelo é a de que não é tido em conta o sinal do processo na variância condicional futura; esta limitação levou à introdução dos modelos TARCH (*Threshould Autoregressive Conditionally Heteroscedastic*) por Zakoian em [1990], nos quais a variância condicional é agora uma função linear "por intervalos". [25].

índice FTSE Xinhua China A50 tem aumentado significativamente depois da introdução do índice de acções de futuros pela Bolsa de Valores de Singapura.

Posteriormente, as análises sugerem que este aumento é devido ao facto de disporem de mais informação depois da introdução da transacção de futuros. Além disso, a velocidade e a natureza da informação também diferem entre períodos pré-futuros e pós-futuros. Mais especificamente, as notícias recentes são assimiladas mais rapidamente em preços pós-futuros. Além disso, a incorporação de notícias desactualizadas reduziu significativamente no período pós-futuros, indicando que o mercado é menos persistente a mudanças na volatilidade. Relativamente à liquidez, embora a média da percentagem cotada de *spread* tenha diminuído nos pós-futuros, depois de controlarem o efeito nos preços, volume e volatilidade, encontram evidências de que a introdução aos futuros teve um efeito negativo na liquidez subjacente a estes. Os resultados suportam a teoria de que os futuros afastam os negociantes desinformados dos mercados de valores. De uma forma global, a introdução dos contratos futuros no FTSE Xinhua China A 50 implicam a redução da informação assimétrica entre os participantes de mercado, um mais volátil mas menos persistente, e menos líquido mercado à vista (*spot*). Os resultados apresentados neste artigo, segundo o autor, poderiam ser interessantes para reguladores que planeiam lançar a transacção dos índices futuros de acções quer seja no mercado doméstico, quer no mercado internacional.

O artigo [59], analisa, se, na prática, a interacção entre mercados cambiais externos e mercados monetários podem ajudar a resolver o enigma (puzzle) do desconto *forward*[30]. Na sequência dos modelos monetários de [57] e de [100], definem como efeitos da liquidez (o impacto negativo da injecção monetária sobre

30 Desconto forward: Um dos fenómenos mais enigmático dos mercados bolsistas é que os descontos nas taxas futuras (a diferença entre as taxas futuras –*forward* e as taxas à vista - spot) não servem de prognostico imparcial para esperar mudanças nas taxas spot - à vista. Além disso, estudos empíricos, registam frequentemente, que a moeda de um país com maiores taxas de juro nominais tende a fazer estimações a longo prazo. Esta constatação empírica é dramaticamente contrária à previsão standard que as taxas futuras- *forward* e as taxas spot serão conjuntamente amortizadas sob elevadas taxas de juro nominais. Na literatura de finanças internacional, este fenómeno intrigante é chamado anomalia de desconto futuro –*forward* ou enigma (puzzle) de desconto futuro. [59]

as taxas de juro nominais), desvios temporários da equação standard de Euler[31]. O efeito da liquidez identificado por estes modelos, enfraquece a ligação entre actuais taxas *forward* e as taxas esperadas dos futuros nos mercados à vista (*spot*) e melhora as expectativas racionais standard do modelo, que prevê uma correspondência um-para-um entre as duas. Usando a série temporal das taxas de câmbio entre E.U., Canadá e Japão, este trabalho mostra que a medida de liquidez acima identificada tem um impacto nos prémios *forward*, e uma vez que o efeito liquidez é tido em consideração, a previsão imparcial da taxa de desconto *forward* é recuperada, até certo ponto de uma maneira teoricamente consistente.

No artigo [25] encontramos uma investigação relativa ao *BAS* dos futuros com *commodities*. Primeiro aplicam estimadores de *spread* adequados para os *open outcry*[32] dos dados das transacções e comparam os resultados estimados com os *spreads* observados. Isto permite à microestrutura de mercado, aos investigadores, reguladores, administrativos das bolsas e aos *traders* a oportunidade para avaliar a utilidade e exactidão dos estimadores do *BAS* em mercados que não reportam dados sobre o *BAS*, dando a ideia da "pior das hipóteses" dos custos de transacção que são prováveis de terem ocorrido. Comparam também os *spreads* observados antes e depois das transacções serem automatizadas (e tornadas anónimas) nos mercados dos futuros com *commodities*, e chegam à conclusão que os *spreads* foram na generalidade ampliados desde que as transacções foram automatizadas, e que têm tendência para aumentar nos períodos de alta volatilidade.

Os resultados obtidos sugerem que os mercados dos futuros com *commodities* têm um carácter inerentemente diferente dos mercados financeiros de futuros, e por isso, merecem uma investigação separada.

---

31 A equação de Euler dá-nos a informação no tempo $t-1$ e não no tempo t ou seja $E_{t-1}=\left[\frac{1+i_t}{1+\rho}\frac{U'(C_{t+1})/P_{t+1}}{U'(C_t)/P_t}\right]=1,$ onde E_{t-1} é o operador de esperança condicional no tempo $t-1$, ρ é a taxa de desconto (*the time preference rate*), C_t é o nível de consumo no tempo t, $U'(C_t)$ é a utilidade marginal do consumo, P_t é o preço nominal no tempo t e i_t é a taxa de juro nominal a um período. [59]

32 Sistema de pregão a viva voz

1.2.4. Influência da liquidez nos mercados *Over-the-Counter (OTC)*

O trabalho [42] procura perceber qual o efeito da liquidez nos mercados *Over-the-Counter (OTC)*. Para tal começa por tentar perceber se o prémio de liquidez dos preços dos activos, estudado no mercado de transacções em bolsa, pode ser generalizado para o mercado de derivados *Over-the-counter (OTC).* Concluem que o efeito da liquidez nos preços dos activos não pode ser generalizado sem ter em conta as características do mercado. Concluem ainda que as transacções das opções ilíquidas têm preços mais elevados em relação às opções líquidas. Este desconto de liquidez, embora oposto ao encontrado em acções e obrigações, é consistente com a estrutura deste mercado *OTC*, bem como a natureza das forças da oferta e da procura.

1.2.5. Conclusão

Findo este ponto, podemos afirmar com alguma certeza, de acordo com a revisão bibliográfica efectuada, que a liquidez influencia os preços dos derivados, o que intuitivamente já tínhamos referido na nota introdutória a este ponto.

1.3. A partir da definição de liquidez do BIS será que é possível definir um índice de liquidez?

Definição do BIS, (Página Principal do B.I.S. [134]) já referida anteriormente: “Um mercado líquido é um mercado onde os participantes podem rapidamente realizar um grande volume de negócios com um pequeno impacto sobre os preços.” (ML - BIS: 1999, 5). O objectivo desta questão é analisar se podemos definir um índice de liquidez, ou se a generalidade dos autores considera a liquidez como parte das medidas *VaR* e desta forma o índice de liquidez não é mais do que um índice *VaR*.

1.3.3. Índice baseado em medidas *VaR*

No artigo [65] os autores avançam, com uma nova metodologia empírica que tem em conta o risco de liquidez na estrutura do *VaR*, e calculam os prémios de risco de liquidez de carteiras e acções individuais transaccionadas num mercado automático de leilões Xetra[33], que opera em várias bolsas europeias. Segundo a opinião dos autores, quando construímos medidas de risco de liquidez, permitimos um potencial impacto no preço incorrido pela liquidação da carteira. Estudam ainda a sensibilidade do risco de liquidez ao tamanho da carteira (volume/profundidade) e o horizonte temporal do *VaR*, e interpretam a sua variação diurna à luz da teoria da microestrutura de mercado.

Referem ainda o acordo de Basileia, 1988 para definirem o capital "*requirement*"[34] total (no contexto do risco de mercado) para uma instituição financeira como a soma das exigências de posições em quatro categorias diferentes que são taxas de juro, taxa de câmbio, ouro e obrigações. Ainda segundo a opinião dos autores, esta soma é determinante para o capital elegível numa instituição financeira baseado na regra dos 8%. A Emenda de 1996 propôs uma alternativa aproximada à determinação do "*market risk capital requirement*", permitindo o uso de um modelo interno (sujeitos a fortes exigências qualitativas e quantitativas) com o objectivo de calcular a máxima perda nos 10 dias de transacção com 1% de nível de confiança. Isto fixou a fase dos modelos *VaR*, que podem ser amplamente definidos com ferramentas quantitativas projectadas para estabelecer a perda possível que pode estar sujeita uma instituição financeira perante um dado período de tempo e para uma dada carteira de activos[35].

Segundo os autores é usual em economia e finanças conceber a liquidez como a habilidade de negociar rapidamente um grande volume com um preço mínimo de impacto. Fazem referência a [93] que, numa tentativa de agarrar firmemente o conceito de liquidez mais preciso, identifica três dimensões de

---

33 Xetra ("*Exchange Electronic Trading*") é um sistema de compra e venda de valores mobiliários com sede em Frankfurt, Alemanha. É operado pela Deutsche Börse.

34 *CAPITAL REQUIREMENTS* (Exigências de capital).

i) Financiamento permanente necessário ao funcionamento normal de um negócio, isto é, capital de longo prazo e capital de "giro".

ii) Investimento em activos fixos e capital de giro. E questionável se deve incluir patentes, direitos e contratos. Ver [56]

35 Para informação completa sobre modelos *VaR* e normas do acordo de Basileia, pode-se visitar o website do *BIS- Bank of International Settlement* no endereço http://www.bis.org.

liquidez, já amplamente referenciadas na revisão bibliográfica: tensão (reflectida no *BAS*), profundidade (o montante de volume unilateral que pode ser absorvido pelo mercado sem causar uma revisão de *bid-ask prices*), e resiliência (a velocidade de retorno para o equilíbrio), segundo os autores estes aspectos de liquidez entram na metodologia *VaR* quase naturalmente. Ainda segundo os autores, a aproximação *VaR* é construída na hipótese de que "os preços de mercado representam preços de transacção realizáveis" citando [84]. Noutras palavras, os preços usados para calcular os lucros do mercado nos modelos *VaR* devem ser representativos das condições de mercado e do volume de transacções. Consequentemente, o impacto no preço de liquidação de carteira deve ser levado em conta. A queda dos *hedge fund* (fundos de cobertura) da *Long-Term Capital Management (LCTM)* mostrou que o impacto do preço de liquidação pode ser significativo e falhar em considerar o risco de liquidez nas economias como um todo.

Segundo a opinião dos autores expressa neste artigo, por causa do preço e das regras de prioridade no tempo em que se implementaram nos mercados de leilões automáticos, o impacto de uma compra (venda) no mercado lateral aumenta (diminuí) em função do volume de transacções. Fazem referência a [38], que estudando a bolsa de derivados (futuros) sueca, consideraram como estatística fundamental para medir a liquidez, o preço unitário quando as vendas v efectuadas no tempo t a expressão:

$$b_t(v) = \frac{\sum_k b_{k,t} v_{k,t}}{v}$$

Onde v é o volume executado a k diferentes únicos *bid-prices* $b_{k,t}$ a que correspondem $v_{k,t}$ volumes fixos no limite do livro de registo de ordens no tempo t. Esta medida simples é capaz satisfazer as exigências de Kyle [51] para uma medida de liquidez por contabilização simultânea para a tensão, profundidade e, estudando a sua dinâmica de séries de tempo, resiliência.

Fazem também referência à expressão de [15] para o VaR ao nível α incluindo os custos de liquidez expressos como um preço:

$$P_t = \frac{a_t(1)+b_t(1)}{2}\left[\left(1-e^{\mu+Z_\alpha\sigma}\right)+\frac{1}{2}(\mu_S+Z'_\alpha\sigma_S\right]$$

Onde $a_t(1)$ e $b_t(1)$ são a média dos melhores "*ask prices*" e "*bid prices*" respectivamente, que prevalecem no tempo t, μ e σ são a média e a volatilidade dos retornos do mercado (*mid-quote*), μ_S e σ_S são a média e a volatilidade do *spread* relativo[36], Z_α e Z'_α são os quantis de percentagem α da distribuição dos retornos do mercado e do *spread* respectivamente.

1.3.4. Índice baseado no *Bid-Ask Spread*

No artigo [46], a partir de um modelo simples, analisam o efeito dos *spreads* e a sua variabilidade nas várias medidas de risco de liquidação. Se é esperado que os *spreads* aumentem com as quedas de preços, então o efeito da liquidez de mercado, em particular no risco de liquidez pode ser dramático, especialmente com os retornos descritos por distribuições de probabilidade com caudas pesadas[37]. Não analisam o caso do "impacto no preço" sob o qual, o acto de se vender baixa os preços oferta, o que pode ser crítico se "a carteira de activos" for relativamente grande para o mercado.

Com o objectivo de minimizar os custos de transacção esperados, dinheiro e activos líquidos seriam vendidos primeiro. Esta estratégia de liquidação eleva a preocupação, porém, que nos casos mais dramáticos a instituição terá apenas activos "marginais" para vender enquanto regulam as grandes perdas. Uma estratégia alternativa é vender primeiro os activos ilíquidos e manter uma almofada de dinheiro e activos líquidos para os "dias chuvosos", com esta estratégia, enquanto aumentam os custos de transacção esperados, as perdas de

36 Os autores apoiam-se nas teorias de [26] que fazem ajustamentos no VAR para colmatar o facto das ordens de compra e de venda não serem executadas no ponto médio da acção (*quote mid-point*), e que variações (por vezes extremas) no spread podem ocorrer. Assumem também a perfeita correlação entre o VAR com ausência de atrito (*frictionless*) e os custos de liquidez exógenos.

37 Grosseiramente, uma distribuição de cauda pesada é tal que para constantes, α, c_1, c_2 e x suficientemente grande se tem $\frac{c_1}{|x|^\alpha} \le \mathrm{P}\left[|x| > x\right] \le \frac{c_2}{|x|^\alpha}$.

cauda diminuem e especialmente diminuem também a probabilidade de insolvência. Tendo em conta os resultados obtidos, julgam ser sábio para as instituições financeiras examinar as suas estratégias de liquidação cuidadosamente para os períodos de grande tensão. A análise efectuada pelos autores assumiu que uma determinada quantidade de capital designada (8% neste caso) será mantida tanto tempo quanto seja possível. A redução desta quantidade aumentaria presumivelmente a probabilidade de insolvência enquanto reduzia os custos de transacção esperados. As estratégias de liquidação óptima, para determinados objectivos de risco – recompensa (*risk-reward*), permanecem segundo os autores, um tema interessante para uma pesquisa futura.

O modelo apresentado neste artigo para os preços dos activos considera uma empresa com três activos: Dinheiro, um activo relativamente líquido e um activo ilíquido, assim:

Seja $S_{0,t}$ que representa o valor no tempo t de uma posição $S_{0,0}$ que investiu em *Cash* (operações à vista, activos de elevada liquidez) no tempo 0. Assumem que esse investimento obtém uma taxa fixa de rendimento r sem *BAS*. Então, $S_{0,t}$ = $S_{0,0}\exp(r,t)$. Assumem que os preços médios dos activos líquidos e ilíquidos são movimentos Brownianos geométricos. O preço médio no tempo t de um activo líquido é

$$S_{1,t} = S_{1,0}\exp\left(\mu_1 t + \sigma_1 B_{1,t}\right)$$

enquanto o preço médio de um activo ilíquido no tempo t é

$$S_{2,t} = S_{2,0}\exp\left(\mu_2 t + \sigma_2\left(\rho B_{1,t} + \sqrt{1-\rho^2}\,B_{2,t}\right)\right)$$

onde $B_{1,t}, B_{2,t}...$ são movimentos Brownianos independentes; μ_i e σ_i determinam o retorno instantâneo esperado e a volatilidade do *mid-price* S_i; e ρ é a correlação instantânea entre os incrementos do *mid-price* dos activos líquidos e ilíquidos.

Seja $X_{i,t}$ representa o (relativo) *mid-to-bid spread* no tempo t no activo i. Isto é, o *bid price* para o activo liquido é $S_{1,t}\left(1-X_{1,t}\right)$ e o *bid-price* para um activo ilíquido é $S_{2,t}\left(1-X_{2,t}\right)$ Os autores assumem que

$$X_{1,t} = X_{1,0}\exp\left(\gamma_1\left(\rho_1 B_{1,t} + \sqrt{1-\rho_1^2}\,B_{3,t}\right) - \frac{1}{2}\gamma_1^2 t\right)$$

e

$$X_{2,t} = X_{2,0} \exp\left(\gamma_2 \left(\rho_2 \left(\rho B_{1,t} + \sqrt{1-\rho^2} B_{2,t} \right) + \sqrt{1-\rho_2^2} B_{4,t} \right) - \frac{1}{2} \gamma_1^2 t \right),$$

onde γ_i representa a volatilidade do *BAS* relativo no activo i e ρ_i determina a correlação entre os incrementos do *mid-price* do activo i e a alteração do *spread* no activo i. Com $\rho_i < 0$, espera-se que os *spreads* aumentem com a diminuição dos preços. (Esta parametrização admite a possibilidade de termos *bid-prices* negativos, mas para os parâmetros típicos a verosimilhança deste horizonte "*over short*" é desprezível.)

Os autores concluem que esta formulação implica, que não temos em momento algum, uma tendência nos *spreads*, nem correlação entre os *spreads* dos diferentes activos para além dos induzidos pelos movimentos do *mid-price*. Reflectindo a ideia de que o activo 1 é mais liquido do que o activo 2, definem valores iniciais do *spread* tais que $X_{2,0} > X_{1,0} > 0$.

O artigo [15] apresenta um modelo de risco de liquidez com implicações na gestão e nas medidas de risco tradicionais do mercado.

A gestão de risco sob condições normais, segundo os autores centra-se tradicionalmente na distribuição de mudanças de valor da carteira, como resultado das mudanças no preço médio. Consequentemente, o risco de mercado está na forma "pura": risco num mercado ideal, sem fricção obtendo um "preço justo". Porém muitos mercados possuem um componente adicional de liquidez, que surge quando um "*trader*" não realiza o preço médio menos o "*BAS*". Acham que o risco de liquidez associado à incerteza da margem (*spread*), particularmente com pouca margem de negociação ou em mercados de emergente segurança, sob condições adversas de mercado, é uma parte importante de risco global e é assim uma importante componente para ser modelada.

Desenvolvem uma metodologia de risco de liquidez simples que, segundo a opinião dos autores, pode ser facilmente e rapidamente integrada num modelo standard de *VaR*, e mostram que ignorando o efeito de liquidez podemos subestimar o risco de mercado nos mercados emergentes até 25-30%. Além disso

mostram (mais uma vez!) que o BIS inadvertidamente já gere o risco de liquidez[38], e não estimando o risco de liquidez explicitamente, e capitalizando, irá levar a subestimação do risco global. Uma subcapitalização, com impacto no capital regulamentar, e por isso, o BIS exige, intencionalmente ou não, uma apropriada vigilância para o risco de liquidez, e não agindo desta forma, os bancos estão surpreendentemente a violar muitas exigências importantes, particularmente se as suas carteiras estiverem concentradas em mercados emergentes onde o risco de liquidez é mais difícil de estimar.

Neste capítulo propusemo-nos responder a um conjunto de questões sobre a liquidez, começámos por definir a liquidez e, apesar de não podermos dizer que existe unanimidade em torno de uma definição, podemos dizer que existe uma corrente de opinião muito forte que defende essencialmente o BAS e o volume como definição de liquidez. Encontrámos ainda autores que definem liquidez de acordo com uma medida VAR a que chamaram VAR (L), outros ainda que combinam o BAS e o VAR (L).

Sobre a questão da influência da liquidez nos preços dos derivados, podemos concluir que, da mesma forma que encontrámos evidências sobre a influência da liquidez no preço dos activos subjacentes, também encontramos evidências, segundo a opinião dos autores referidos, sobre a influência da liquidez nos preços dos derivados.

Por fim, a ultima questão a que nos propusemos responder, sobre a definição de um índice de liquidez partindo da definição de liquidez do BIS, podemos dizer que os autores definem essencialmente dois índices, um baseado em medidas VAR e outro baseado no BAS.

38 Segundo a opinião dos autores, os regulamentos do BIS apenas prevêem o número de medidas VaR que devem ser consideradas e não a forma de as calcular. Assim negligenciando a liquidez e não a considerando no cálculo dessas medidas VaR, pode implicar uma violação implícita das recomendações do BIS.

CAPITULO II

2. Exemplo de um modelo preço/liquidez

Após a revisão bibliográfica, em que procurámos definir liquidez e a influência desta na formação dos preços dos activos e/ou derivados, achámos interessante estudar um modelo preço/liquidez com o objectivo de servir de fio condutor para apresentar os modelos usuais, binomial e Browniano geométrico, assim, analisámos um pouco mais em pormenor o artigo [14].

Bakstein e Howisony desenvolveram um modelo parametrizado para estudar os efeitos da liquidez que derivam da liquidação de um activo.

Definem liquidez através da combinação de uma transacção individual de um investidor com o custo e o impacto da derrapagem no preço, que é sentida por todos os participantes do mercado. A definição escolhida, segundo os autores, permite que a liquidez seja observável no livro de ordens centralizado de um activo como é geralmente fornecida pela maioria das bolsas não especializadas. A versão do modelo a tempo discreto é baseada na árvore binomial CRR, e para o modelo em tempo contínuo derivam várias equações diferenciais parciais não lineares. Ambas as versões podem, segundo os autores, ser aplicadas directamente no preço e cobertura das opções.

Como já havíamos referido atrás, segundo a opinião dos autores, a natureza não linear da liquidez leva aos naturais *BAS* que são baseados na liquidez do mercado subjacentes à existência de estratégias de (super-) replicação.

O modelo apresentado foi testado empiricamente com dados de alta-frequência do mercado alemão de "*blue chips*"[39] e propõem futuras extensões do modelo, incluindo a liquidez estocástica.

---

39 Uma *blue chip* é uma empresa bem conhecida, e com resultados sólidos. A maior parte das *blue chips* paga dividendos regularmente, mesmo em períodos de instabilidade económica. São vistas como tendo um retorno de investimento mais

Duas das suposições subjacentes a, entre outros, o básico Black-Scholes ou economias CAPM, são de mercados sem atrito e que os agentes são *price-takers*[40]. Esta suposição sugere a ausência de custos de transacção e também que nenhum dos agentes transacciona com estratégias que podem alterar os preços dos activos no mercado. Na prática, contudo, os mercados desviam-se substancialmente destas suposições porque para todos os activos transaccionados, existem *BAS* e profundidade de mercado limitada, isto é disponibilidade limitada do activo. Em geral o *BAS* representa uma fonte de rendimento mas também um "amortecedor" (buffer) de seguro de risco para *markets makers*[41], que tentam comprar baixo e vender alto. A profundidade é o volume disponível de um activo para comprar ou vender a um determinado preço. Juntos, o *BAS* e a profundidade, segundo o modelo proposto, representam o livro de ordens de um activo, que serve como um inventário de mercado no que diz respeito à forma como é levada a cabo a ordem de execução. Na teoria e na prática, se há numerosos *market makers* e outros participantes com intenção de fazer transacções, os *BAS* tendem a ser pequenos e a profundidade de mercado abundante por causa da competição. Coloquialmente, é dito então que o mercado é líquido[42]. Obviamente que os participantes do mercado preferem mercados ou activos com grande liquidez, porque podem entrar e sair das suas posições de forma rápida e barata, contudo eles constituem uma grande fracção do mercado. Consequentemente, intuitivamente digamos, as acções de uma grande empresa

---

fiável e menor risco do que o mercado em geral. Como contrapartida tendem a ter yields mais baixos, tendem a ser empresas já maduras e com crescimento mais baixo e com potencial de retorno menor. Alternativamente, *blue chips* são também definidas como sendo as empresas com maior capitalização bolsista. O termo parece ter originado nas fichas de *poker* azuis, que são tipicamente as de maior valor. [30].

40 *Price-takers* são agentes passivos de mercado, que aceitam os preços.

41 *Market maker* ou Criador de mercado; Num *e-marketplace* bolsista, os *market makers* dominam as acções e permitem aos outros agentes que as comprem ou as vendam. Podem ganhar ou perder dinheiro em função dos movimentos de preços. Fora da comunidade financeira, os *market makers* fazem convergir os compradores e vendedores, independentemente de possuírem ou não as acções.
Ver [141].
Price-makers são agentes que, quer pela sua dimensão, quer pela sua importância, têm poderes (e conseguem muitas vezes) para alterar os preços.

42 Outros possíveis factores que, segundo os autores podem afectar a liquidez são a disponibilidade de informação sobre os activos transaccionados, a sua livre flutuação, a legislação do próprio mercado, etc.

que tem grandes flutuações livres e transacções numa bolsa bem regulamentada vão, *ceteris paribus*[43], ter *spreads* pequenos comparado a um cauteloso e seguro pequeno capital num mercado OTC (*over-the-counter*)[44]. Também o mais líquido mercado e a linearidade mais aproximadamente alcançável vão sendo transaccionadas com estratégias neste sentido.

Assim, por exemplo, o custo de transaccionar um milhão de acções chegará a um milhão de oportunidades de custo de transacção de uma acção. As mesmas considerações também se aplicarão aos direitos contingentes de um activo. Por causa do valor de um derivado, ambos na teoria de Black-Scholes e pelo menos em parte, na prática, é devido a estarem sobre estratégias de replicação, os *BAS* dos contratos serão limitados, o mais líquido do mercado para instrumentos de cobertura (*hedging*). É assumido pelos autores que, geralmente, não se chega a nenhum consenso em como calcular o prémio de liquidez dos derivados, nem como parametrizar, medir ou observar a liquidez de um mercado ou de um activo.

Liquidez qualitativa, ou a falta dela tem dois efeitos:

- Primeiro, tem um impacto na média do preço de transacção por unidade de activo transaccionado. Considerando que pode ser possível transaccionar pequenas quantidades de um activo ao melhor preço possível da oferta em determinado momento, perto da qual deveria estar o preço médio publicado, a amplitude da dimensão da transacção, os maiores níveis de profundidade de mercado (de um ou mais *market makers*) terão que ser sanados e o adicional ao preço médio de transacção será desviado do preço médio. Em geral, o preço de transacção comum será uma função crescente da dimensão da transacção;
- Segundo, a liquidez está directamente relacionada com o grau de deslizamento do mercado devido às transacções individuais. Isto significa que, desde que todos

43 *Ceteris paribus* - Tudo o resto se mantém inalterado.

44 Neste caso a acção mais líquida deveria ser transaccionada com um prémio fundamental. Mas neste trabalho a avaliação de acções será considerada como um factor exógeno.

os participantes possam observar a mesma profundidade do mercado[45], grandes transacções de um agente podem remover *layers* inteiros de preços do livro de ordens. Além disso, é norma usual que o preço que bate o último *layer* da profundidade do mercado será publicado, isto é, aparece como o ultimo preço oficial transaccionado, embora provavelmente apenas por pouco tempo. Subsequentemente, isto pode levar a que os participantes de mercado ajustem os seus preços ou entrem em novas licitações. Concluem desta forma que o mercado pode ser modificado por um único *trader*. Na realidade, é comum que os preços dos activos sejam empurrados, em alguns casos deliberadamente, numa determinada direcção comparativamente a grandes transacções[46].

Mas, até mesmo se nenhum investidor tem a intenção de fazer desta forma, alguns agentes têm de transaccionar algumas quantidades sob este pressuposto, por exemplo, executar transacções numa grande carteira ou *stop-loss*, fazer ou desfazer uma cobertura com um derivado. No caso posterior se, seguindo a teoria de Black-Scholes, tentam uma cobertura Delta (*Delta-hedge*), o Delta e o Gama, isto é a quantidade subjacente que eles têm que possuir e adicionar ou subtrair respectivamente, podem ficar perto da expiração e/ou do *payoff* as descontinuidades dos contractos nas suas carteiras. Uma vez que os mercados têm liquidez limitada, estes investidores podem mover o valor para o subjacente na direcção não desejada porque as transacções induzidas deslizam para o valor de mercado (*market-to-mark*et) dos contratos. Para evitar fazer a cobertura errada (*mis-hedging*), as quantidades exigidas para o subjacente têm de ser ajustadas por um factor de liquidez. Isto afectará o valor da posição, desde que o ultimo é derivado da quantidade sem risco (*risk-free*) que pode ser ganha numa replicação da carteira. Além disto, um *trader* que tem uma boa intuição sobre a liquidez do mercado pode, em vez de restringir uma posição, estar inclinado para liquidar a quantidade acumulada da cobertura e assim empurra o mercado na direcção desejada. Normalmente, não é suposto que os *traders* saibam as posições dos outros

45 Como é por exemplo o caso de muitas bolsas de valores europeias e também do NASDAQ americano, é assumido que nem todos os participantes negoceiam num mercado transparente e centralizado *order-driven* ou mercado corrector electronicamente ligado, ao contrário dos especialistas de mercado como por exemplo NYSE.

46 Um caso onde isto parece acontecer regularmente é o chamado "*triple witching days*" (~ triplos dias enfeitiçados), quando os futuros e as opções transaccionados, expiraram quase simultaneamente. Um incidente deste género na Bolsa de valores de Londres em Setembro de 2002 está descrito mais adiante neste resumo do artigo.

participantes no mercado; porém se elas se tornassem conhecidas, ou se um investidor agiu por um lado em nome de um cliente e estava a utilizar a carteira (*proprietary book*) do outro, então é possível explorar esse conhecimento. Levando em conta esta possibilidade, o prémio inicial requerido para o direito contingente (*contingent claim*) às contrapartes poderia ser reduzido devido a esta assimetria da informação.

Os autores fazem referência aos trabalhos [73] e [99], assim como [18] e [47] que estudam os efeitos da liquidez finita nos mercados de activos, em particular com os direitos contingentes, os primeiros em tempo continuo e os segundos em tempo discreto.

Referem também [64], [80], [117] entre outros, que estudam os modelos anteriores para os efeitos do impacto no preço em tempo discreto e tempo contínuo, introduzindo uma função reacção que modela o impacto imediato de uma grande transacção no preço de um activo como uma função de ambos, parâmetros de dimensão da liquidez e dimensão da transacção. Eles derivam assim, condições de não arbitragem no mercado e mostram ainda que grandes transacções conduzem a um incremento da volatilidade realizada de um activo. Secundariamente, referem os trabalhos de [6] e [119], entre outros, os quais na estrutura de tempo contínuo e tempo discreto, distinguem entre um impacto no preço e um efeito de derrapagem permanente num activo, fazendo o seu novo preço de equilíbrio como função de ambos os preços de transacção do pré e do pós transacção. Porém, segundo a opinião dos autores, nenhum destes trabalhos prevê formas de observar na prática a liquidez, nem prevêem uma evidência empírica como defesa dos seus modelos. O que Bakstein e Howisony consideram de inovador neste trabalho é a combinação de modelos de existência de novos custos de transacção e do efeito de derrapagem que é aplicado e construído de tal modo que os parâmetros envolvidos são observáveis (quer dizer, directamente estimados através dos dados do livro de ordens, em vez de necessitar ser retirado dos preço dos derivados) e são dados por um livro de ordens de um activo em particular.

Na secção 2, deduzem uma versão a tempo discreto do modelo, baseada nas árvores binomiais de uma extensão do modelo de CRR por um processo não

linear controlado que representa os custos de transacção e os efeitos de derrapagem, que é subsequentemente aplicado para avaliação das opções.

Na secção 3, por seu lado, derivam várias equações diferenciais parciais (*PDE's partial differential equations*) não lineares e quase lineares para o valor e para as quantidades de cobertura no limite do tempo contínuo, através de escolhas particulares dos valores dos parâmetros. Considerando que, no limite, os montantes infinitesimais, são transaccionados de forma contínua.

Na secção 4, fazem uma calibração do modelo para os dados, de maneira a permitir uma definição consistente de liquidez. Essa calibração é efectuada através da análise empírica do livro de ordens de várias acções transaccionadas no mercado Xetra alemão.

Na secção 5 são apresentadas várias extensões do modelo, como múltiplos activos e liquidez estocástica. Fazem referência à distinção entre liquidez da oferta e da procura ("*bid and ask liquidity*"). Tipicamente, segundo os autores, a profundidade do mercado do lado da oferta e do lado da procura não são simétricos. Se aí os desequilíbrios são grandes, intuitivamente, isto conduz aos movimentos do preço e a um aumento da volatilidade. Mas comprando quando todos querem vender, a liquidez para as transacções será boa.

Por fim a secção 6, resume os resultados fundamentais e sugere áreas de trabalho futuro a partir do modelo apresentado pelos autores.

As vantagens deste modelo, e indo de encontro à opinião dos autores, julgamos que resultam essencialmente do facto de escolherem uma definição de liquidez que permite que esta seja directamente observável no livro de ordens centralizado de um activo[47]. Com base neste modelo, os derivados podem ser cobertos e avaliados numa estrutura neutra face ao risco, sem arbitragem, tanto no modelo a tempo discreto como em tempo contínuo.

---

47 O "*Order book* "ou livro de ordens é um agregado de todas as ordens existentes para um determinado activo cotado, geralmente todas as ordens existentes introduzidas num sistema de negociação e ainda não efectuadas.
Um "*order book*" será composto por um conjunto de *bids*, manifestando a intenção de comprar determinadas quantidades a determinados preços, e um conjunto de *asks*, manifestando a intenção de vender determinadas quantidades a determinados preços. O melhor (mais elevado) *bid* será inferior ao melhor (mais baixo) *ask*, e a diferença entre eles é chamada de *spread bid/ask ou bid ask spread*. [138]

Por outro lado, o modelo foi testado e calibrado, com os dados de alta frequência do mercado alemão de "*blue chips*", que, como sabemos, são empresas caracterizadas pela solidez de resultados, pelo que julgamos que seria interessante que os autores tivessem testado o modelo com dados de outras empresas de forma a verificar a aplicabilidade/estabilidade do mesmo.

CAPITULO III

3. Parte Prática: Uma aproximação alternativa para o modelo preço -liquidez.

O objectivo da parte prática do nosso trabalho, é, numa primeira fase, averiguar qual a dimensão que melhor nos permite definir a liquidez, e numa segunda fase determinar se esta dimensão influencia o preço das acções.

Num conjunto de dados, Santander, BCP, PT, BBVA, BNP PARIBAS, BPI e SONAE, preços e volume, testou-se a independência e a normalidade com vista a averiguar a possibilidade de modelos de difusão normais ou log-normais.

Pela revisão da bibliografia, ficámos com a ideia de que podemos considerar duas aproximações principais à liquidez: o volume (ou profundidade) e o BAS.

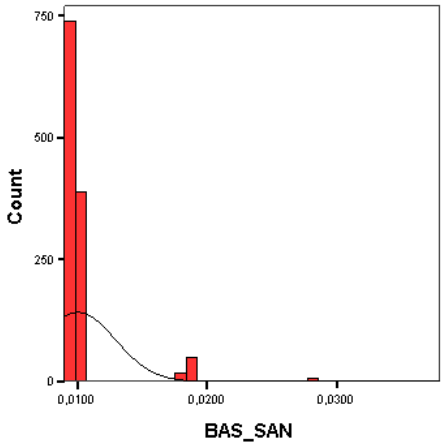
Julgamos que a quantidade que admite um modelo mais "tratável" e com melhores propriedades para o fim que temos em mente é o volume. Veremos adiante se o conjunto de dados que utilizaremos é o volume, o BAS, ou uma transformação destes.

Os dados analisados na parte prática do trabalho, no que se refere aos dados sobre volumes, foram retirados do site http://www.clubeinvest.com e representam ordens de compra em lotes de 100 acções, os dados sobre *BAS* foram retirados da página da Bloomberg, http://www.bloomberg.com e são montantes em Euros (€). As análises estatísticas foram efectuadas no programa *SPSS® 13.0 for Windows*, as transformações nos dados e a sua preparação para análise, foram efectuadas no programa *Microsoft® Office Excel® 2007* as simulações por sua vez foram efectuadas no programa *Mathematica® 7.*

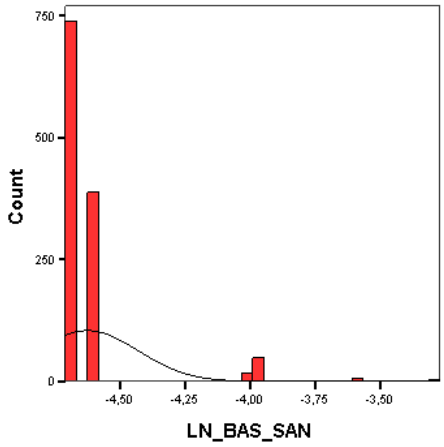
3.1. Apresentação dos dados (SANTANDER dados de 2004 a 2008)

Seguidamente apresentaremos os histogramas do BAS e do volume, assim como os respectivos logaritmos.

3.1.1. BAS e LN do BAS (histograma)

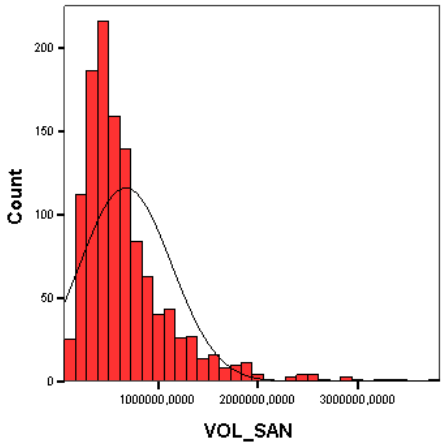


Gráf. 3.1- BAS Santander

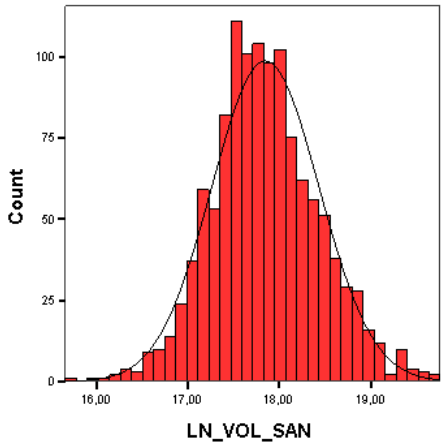


Gráf. 3.2- LN do BAS Santander

3.1.2. Volume e LN Volume (histograma)



Gráf. 3.3 – Volume Santander

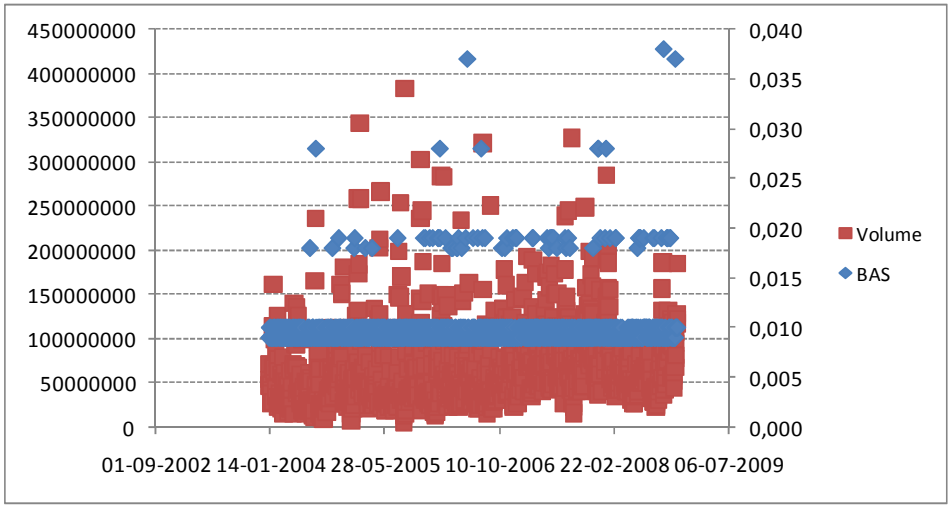


Gráf. 3.4 – LN do volume Santander

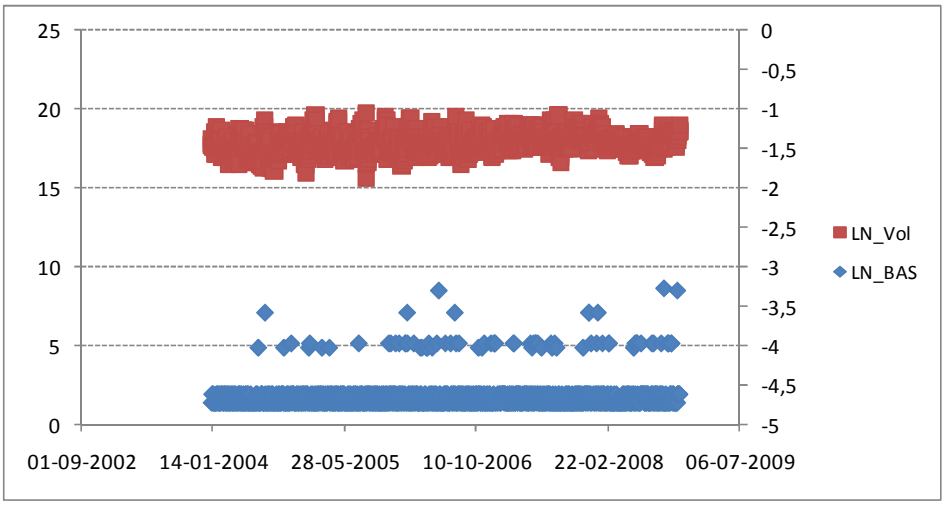
A observação do gráfico 3.4 reforça as ideias que expressámos inicialmente sobre o volume (ou LN(Volume) ser a quantidade que admite um modelo mais "tratável".

3.1.3. Relação entre BAS, Volume e respectivos logaritmos

Apresentamos seguidamente um estudo de uma possível relação entre os dados, seja uma relação directa, seja relação com dados transformados (Logs, Δs, retornos), ou eventualmente independência das observações.



Gráf. 3.5 – BAS e Volume Santander



Gráf. 3.6 – LN BAS e LN volume Santander

Correlations

			BAS_SAN	VOL_SAN	LN_BAS_SAN	LN_VOL_SAN
Spearman's rho	BAS_SAN	Correlation Coefficient	1,000	,017	1,000**	,017
		Sig. (2-tailed)	.	,546	.	,546
		N	1204	1204	1204	1204
	VOL_SAN	Correlation Coefficient	,017	1,000	,017	1,000**
		Sig. (2-tailed)	,546	.	,546	.
		N	1204	1204	1204	1204
	LN_BAS_SAN	Correlation Coefficient	1,000**	,017	1,000	,017
		Sig. (2-tailed)	.	,546	.	,546
		N	1204	1204	1204	1204
	LN_VOL_SAN	Correlation Coefficient	,017	1,000**	,017	1,000
		Sig. (2-tailed)	,546	.	,546	.
		N	1204	1204	1204	1204

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Tabela 3.1 – Correlação entre os dados Santander

Vamos testar a hipótese:

H0: Os valores (ou transformações) do BAS e do volume são mutuamente independentes *versus* a alternativa H1.

Não rejeitamos H0 quando o resultado do nível de significância for superior a 0,05.

Conclusão:

Pela análise da tabela, verificamos que não devemos rejeitar a hipótese de que todos os pares de dados diferentes são mutuamente independentes, respectivamente (VOL_SAN; BAS_SAN), (VOL_SAN; LN_BAS_SAN), (BAS_SAN; LN_VOL) e (LN_BAS_SAN; LN_VOL_SAN).

3.2. Estatísticas descritivas (SANTANDER)

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
BAS_SAN	1204	,0090	,0380	,010029	,0028898
VOL_SAN	1204	6312900	4E+008	7E+007	45786946,48
LN_BAS_SAN	1204	-4,71	-3,27	-4,6266	,19476
LN_VOL_SAN	1204	15,66	19,76	17,8473	,58782
Valid N (listwise)	1204				

Tabela 3.2 – Estatísticas descritivas com dados Santander

3.3. Modelos (dados de 2008-07-01 a 2008-11-20)

Após a análise empírica dos dados, parece-nos que o conjunto mais "tratável" será o subconjunto com os dados de 2008-07-01 a 2008-11-20. Vamos de seguida analisar o ajustamento à Normal e a aleatoriedade da amostra.

Com efeito, com esta escolha do período de análise, consegue-se a não rejeição da independência e da normalidade. Pode pois observar-se que os resultados estatísticos dependem de forma drástica do período de análise. Este facto surpreendente será objecto de estudo posterior.

3.3.1. Ajustamentos à Normal

3.3.1.1. Estudo do BAS e Volume

$p < 0.05$

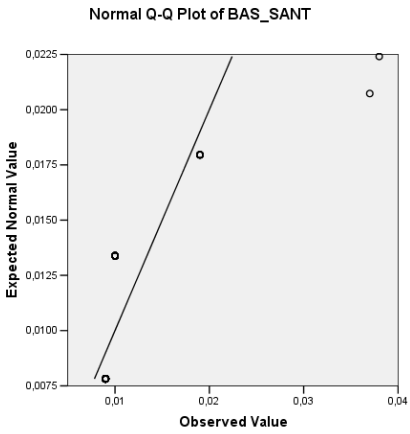
Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
BAS_SANT	,463	100	,000	,386	100	,000
VOL_SANT	,107	100	,007	,907	100	,000

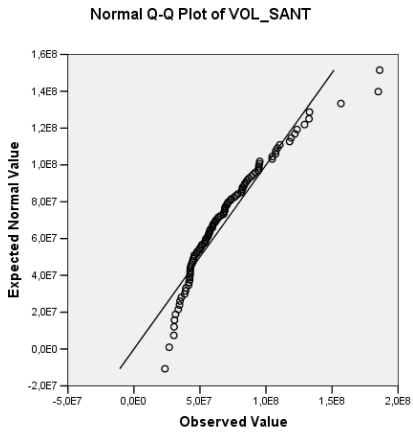
a. Lilliefors Significance Correction

Tabela 3.3 – Teste de normalidade BAS e Volume Santander

Como $p < 0,05$ concluímos que devemos rejeitar a hipótese de aproximação à Normal, para todos os conjuntos de dados no período considerado.



Gráf 3.7 – Q-Q Plot Normal BAS Santander



Gráf. 3.8 – Q-Q Plot Normal volume Santander

3.3.1.2. Estudo do logaritmo (LN) do BAS e logaritmo (LN) do Volume

Verifiquemos no quadro seguinte, a aproximação do LN do volume à Normal

p > 0.05

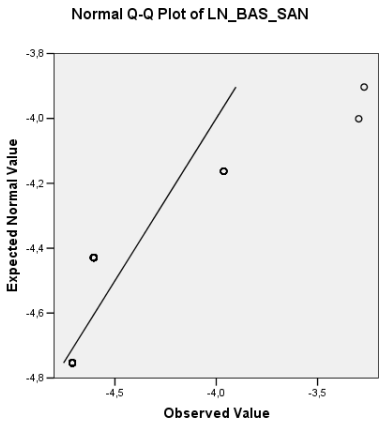
Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
LN_VOL_SANT	,058	100	,200*	,992	100	,810
LN_BAS_SAN	,432	100	,000	,482	100	,000

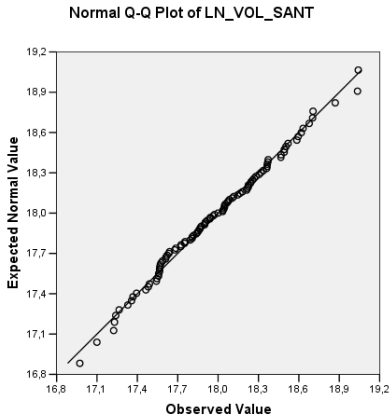
*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Tabela 3.4 – Teste de normalidade BAS e Volume Santander



Gráf. 3.9 – Q-Q Plot Normal LN (BAS Santander



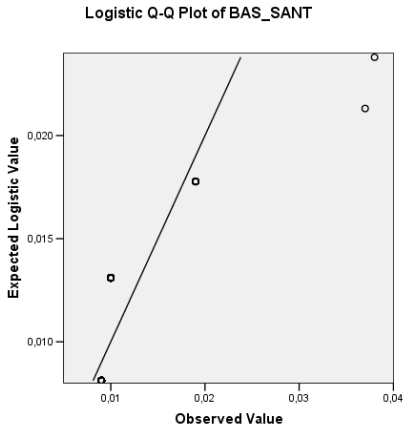
Gráf. 3.10 – Q-Q Plot Normal LN (Vol) Santander

Como p > 0,05 concluímos que não devemos rejeitar a hipótese de aproximação à Normal, para todos os dados do LN_VOL_SAN no período considerado (2008-07-01 a 2008-11-20).

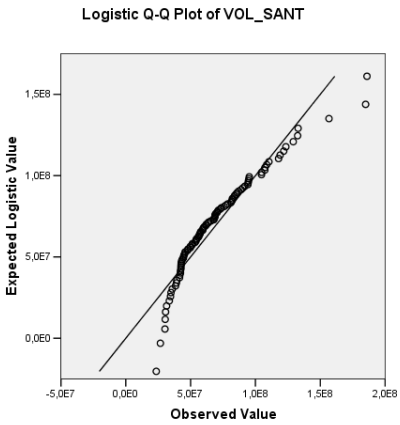
3.3.2. Ajustamentos à logística

Em determinado ponto do nosso trabalho, verificámos através do Q-Q Plot, que os retornos do volume também têm uma boa aproximação à distribuição logística. Desconhecemos a existência de estudos com esta abordagem à logística o que pode ser um ponto de partida para eventuais investigações e análises futuras.

3.3.2.1. BAS e Volume

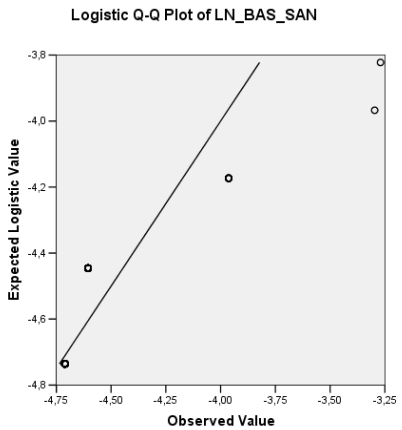


Gráf. 3.11 – Q-Q Plot Logística BAS Santander

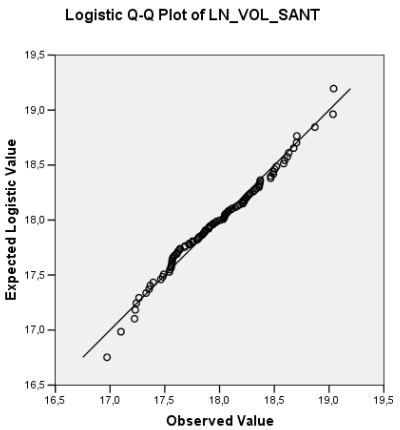


Gráf. 3.12 – Q-Q Plot Logística VOL Santander

3.3.2.2. Logaritmo (LN) do BAS e logaritmo (LN) do Volume



Gráf 3.13 – Q-Q Plot Logística LN (BAS) Santander



Gráf 3.14 – Q-Q Plot Logística LN (VOL) Santander

3.3.3. Independência dos dados e autocorrelação

Uma população X com uma distribuição X1, X2,..., XN é uma amostra aleatória de uma variável aleatória X, se os Xi forem independentes e identicamente distribuídos com X. Verifiquemos assim a autocorrelação dos vários conjuntos de dados.

3.3.3.1. BAS

Autocorrelations

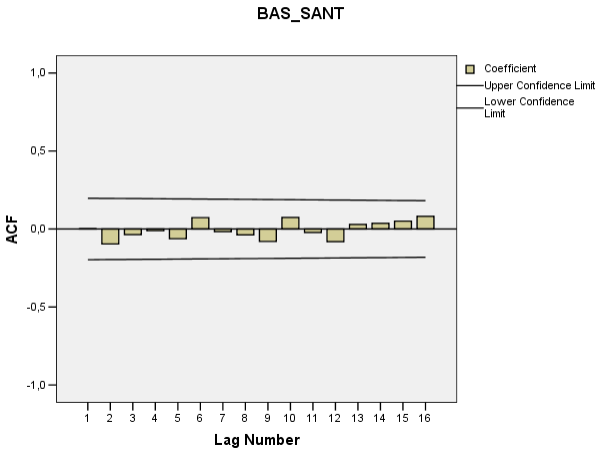
Series: BAS_SANT

Lag	Autocorrelation	Std.Error[a]	Box-Ljung Statistic Value	df	Sig.[b]
1	,001	,099	,000	1	,994
2	-,096	,098	,955	2	,620
3	-,036	,098	1,090	3	,779
4	-,011	,097	1,102	4	,894
5	-,062	,097	1,519	5	,911
6	,073	,096	2,094	6	,911
7	-,017	,095	2,125	7	,953
8	-,038	,095	2,283	8	,971
9	-,080	,094	2,997	9	,964
10	,074	,094	3,614	10	,963
11	-,023	,093	3,673	11	,979
12	-,081	,093	4,434	12	,974
13	,029	,092	4,534	13	,984
14	,036	,092	4,687	14	,990
15	,050	,091	4,990	15	,992
16	,081	,091	5,788	16	,990

a. The underlying process assumed is independence (white noise).

b. Based on the asymptotic chi-square approximation.

Tabela 3.5 – Autocorrelação BAS Santander



Gráf. 3.15 – Autocorrelação BAS Santander

Pela análise autocorrelação não devemos rejeitar a hipótese da independência dos dados relativos ao BAS dos dados do Santander para o período de 2008-07-01 a 2008-11-20.

3.3.3.2. Volume

Autocorrelations

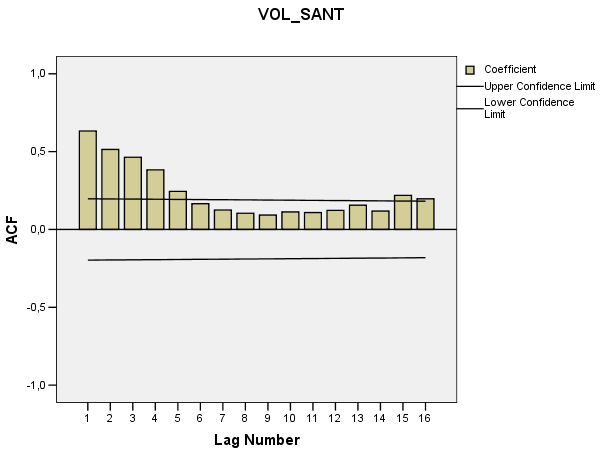
Series: VOL_SANT

Lag	Autocorrelation	Std.Error[a]	Box-Ljung Statistic Value	df	Sig.[b]
1	,633	,099	41,218	1	,000
2	,514	,098	68,741	2	,000
3	,464	,098	91,376	3	,000
4	,383	,097	106,951	4	,000
5	,245	,097	113,370	5	,000
6	,165	,096	116,336	6	,000
7	,125	,095	118,050	7	,000
8	,104	,095	119,254	8	,000
9	,092	,094	120,212	9	,000
10	,113	,094	121,653	10	,000
11	,108	,093	123,000	11	,000
12	,123	,093	124,742	12	,000
13	,156	,092	127,589	13	,000
14	,118	,092	129,243	14	,000
15	,219	,091	134,988	15	,000
16	,197	,091	139,684	16	,000

a. The underlying process assumed is independence (white noise).

b. Based on the asymptotic chi-square approximation.

Tabela 3.6 – Autocorrelação volume Santander



Gráf. 3.16- Autocorrelação volume Santander

Pela análise da autocorrelação rejeitamos a hipótese de que os dados do VOL são independentes

3.3.3.3. Logaritmo (LN) do BAS

Autocorrelations

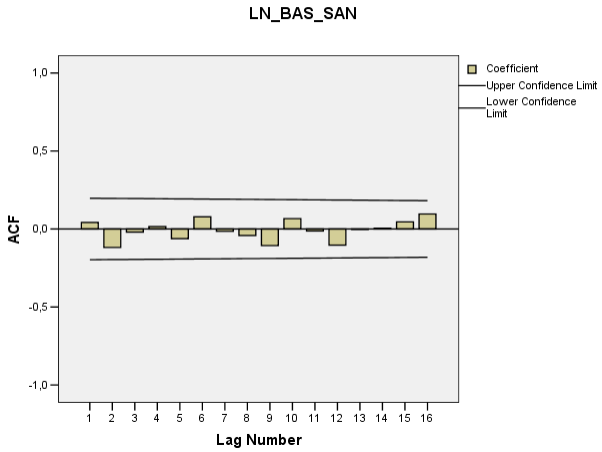
Series: LN_BAS_SAN

Lag	Autocorrelation	Std.Error[a]	Box-Ljung Statistic Value	df	Sig.[b]
1	,042	,099	,179	1	,672
2	-,118	,098	1,639	2	,441
3	-,020	,098	1,681	3	,641
4	,015	,097	1,707	4	,790
5	-,062	,097	2,117	5	,833
6	,078	,096	2,776	6	,836
7	-,015	,095	2,801	7	,903
8	-,042	,095	2,995	8	,935
9	-,106	,094	4,264	9	,893
10	,066	,094	4,762	10	,906
11	-,013	,093	4,780	11	,941
12	-,104	,093	6,028	12	,915
13	-,002	,092	6,028	13	,945
14	,004	,092	6,030	14	,966
15	,045	,091	6,278	15	,975
16	,096	,091	7,398	16	,965

a. The underlying process assumed is independence (white noise).

b. Based on the asymptotic chi-square approximation.

Tabela 3.7 – Autocorrelação LN (BAS) Santander



Gráf. 3.17 – Autocorrelação LN (BAS) Santander

Pela análise da autocorrelação não rejeitamos a hipótese de que os dados do logaritmo do BAS (LN_BAS) sejam independentes para os dados Santander.

3.3.3.4. Logaritmo (LN) do Volume

Autocorrelations

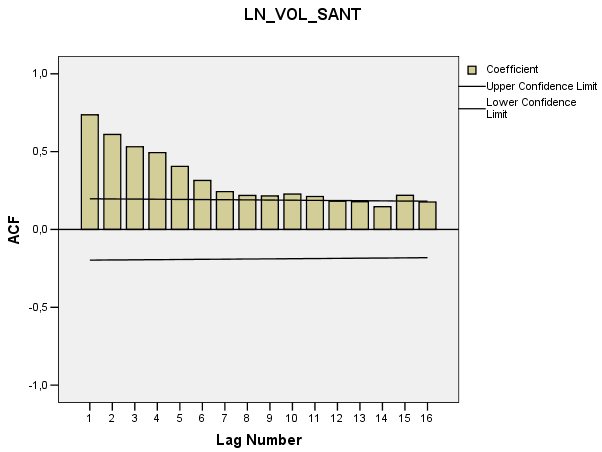
Series: LN_VOL_SANT

Lag	Autocorrelation	Std.Error[a]	Box-Ljung Statistic Value	df	Sig.[b]
1	,737	,099	55,901	1	,000
2	,610	,098	94,692	2	,000
3	,531	,098	124,371	3	,000
4	,494	,097	150,263	4	,000
5	,405	,097	167,882	5	,000
6	,315	,096	178,657	6	,000
7	,243	,095	185,135	7	,000
8	,218	,095	190,423	8	,000
9	,216	,094	195,631	9	,000
10	,227	,094	201,476	10	,000
11	,212	,093	206,610	11	,000
12	,181	,093	210,427	12	,000
13	,178	,092	214,159	13	,000
14	,146	,092	216,699	14	,000
15	,219	,091	222,467	15	,000
16	,176	,091	226,240	16	,000

a. The underlying process assumed is independence (white noise).

b. Based on the asymptotic chi-square approximation.

Tabela 3.8 – Autocorrelação LN volume Santander



Gráf. 3.18 – Autocorrelação LN volume Santander

Pela análise da autocorrelação rejeitamos a hipótese de que os dados do LN_VOL são independentes.

Neste ponto do nosso trabalho, e pela conclusão a que chegámos no ponto anterior, deparamo-nos com um problema, uma vez que, e apesar de o volume ser a quantidade com melhores propriedades, sem a aleatoriedade da amostra (LN_Volume), complicar-se-á o trabalho de estimação. Assim, iremos analisar de seguida a viabilidade de eventuais transformações nos dados de forma a garantirmos a aleatoriedade da amostra. Iremos analisar seguidamente três transformações nos dados, nomeadamente os logaritmos das diferenças dos volumes $LN\left(\left|V_{t+\Delta t} - V_{t)}\right|\right) = \Delta_1$, as diferenças entre os valores anteriores, $\Delta_2 - \Delta_1$, e os retornos dos volumes $LN\left(\frac{V_{t+\Delta t}}{V_t}\right)$.

Analisemos de seguida a autocorrelação destes conjuntos de dados.

3.3.3.5. Logaritmos das diferenças dos volumes

$LN\left(\left|V_{t+\Delta t} - V_{t)}\right|\right) = \Delta_1$ a seguir designados como LN_DIF1:

Autocorrelations

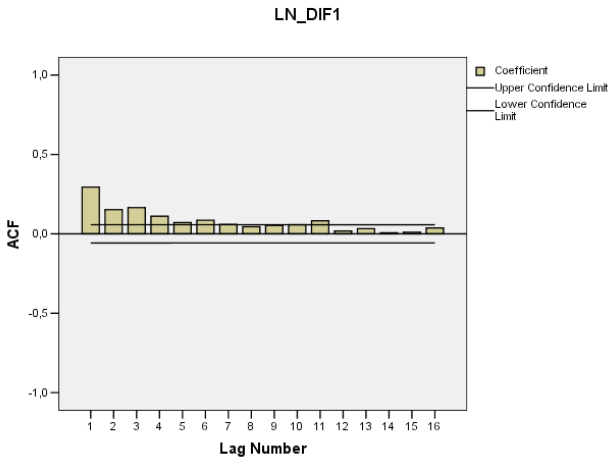
Series: LN_DIF1

Lag	Autocorrelation	Std.Error[a]	Box-Ljung Statistic Value	df	Sig.[b]
1	,294	,029	104,526	1	,000
2	,152	,029	132,538	2	,000
3	,165	,029	165,534	3	,000
4	,111	,029	180,352	4	,000
5	,071	,029	186,437	5	,000
6	,086	,029	195,303	6	,000
7	,060	,029	199,600	7	,000
8	,045	,029	202,065	8	,000
9	,053	,029	205,425	9	,000
10	,057	,029	209,402	10	,000
11	,082	,029	217,593	11	,000
12	,018	,029	217,981	12	,000
13	,033	,029	219,289	13	,000
14	,007	,029	219,345	14	,000
15	,010	,029	219,473	15	,000
16	,037	,029	221,163	16	,000

a. The underlying process assumed is independence (white noise).

b. Based on the asymptotic chi-square approximation.

Tabela 3.9 – Autocorrelação LN Dif1. volume Santander



Gráf. 3.19 – Autocorrelação LN Dif1. Volume Santander

Pela análise da autocorrelação, também não rejeitamos a hipótese de que se verifica a independência dos dados.

3.3.3.6. Diferenças entre os Logaritmos das diferenças dos volumes

$\Delta_2 - \Delta_1$ seguidamente designamos como LN_DIF2:

Autocorrelations

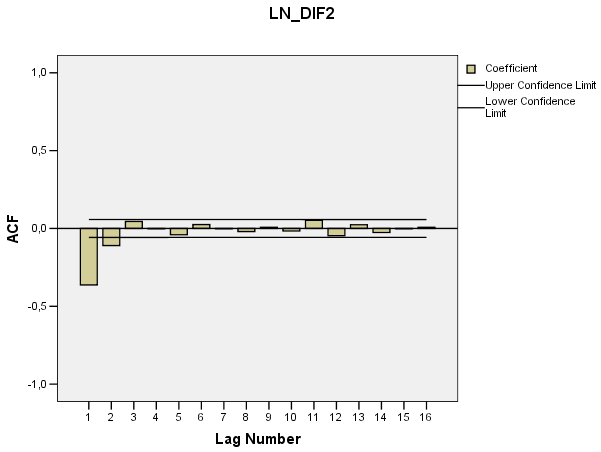
Series: LN_DIF2

Lag	Autocorrelation	Std.Error[a]	Box-Ljung Statistic Value	df	Sig.[b]
1	-,363	,029	158,915	1	,000
2	-,110	,029	173,504	2	,000
3	,045	,029	175,960	3	,000
4	-,002	,029	175,964	4	,000
5	-,041	,029	177,950	5	,000
6	,025	,029	178,711	6	,000
7	-,001	,029	178,713	7	,000
8	-,020	,029	179,188	8	,000
9	,007	,029	179,250	9	,000
10	-,017	,029	179,582	10	,000
11	,053	,029	182,938	11	,000
12	-,046	,029	185,560	12	,000
13	,024	,029	186,251	13	,000
14	-,026	,029	187,070	14	,000
15	-,002	,029	187,074	15	,000
16	,008	,029	187,143	16	,000

a. The underlying process assumed is independence (white noise).

b. Based on the asymptotic chi-square approximation.

Tabela 3.10 – Autocorrelação LN Dif1. Vol. Santander



Gráf. 3.20 – Autocorrelação LN Dif1. Vol. Santander

Pela análise da autocorrelação, não rejeitamos a hipótese de que se verifica a independência dos dados.

3.3.3.7. Retornos dos BAS

$LN\left(\frac{BAS_{t+\Delta t}}{BAS_t}\right)$ a seguir designado como LNR_BAS_SAN:

Autocorrelations

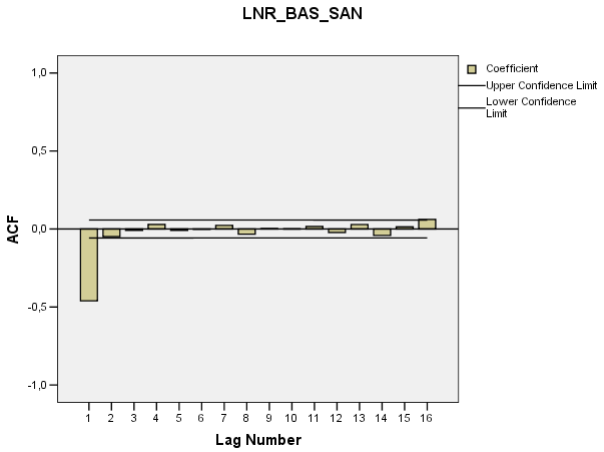
Series: LNR_BAS_SAN

Lag	Autocorrelation	Std.Error[a]	Box-Ljung Statistic Value	df	Sig.[b]
1	-,461	,029	255,830	1	,000
2	-,049	,029	258,695	2	,000
3	-,009	,029	258,790	3	,000
4	,029	,029	259,816	4	,000
5	-,009	,029	259,913	5	,000
6	-,001	,029	259,916	6	,000
7	,023	,029	260,553	7	,000
8	-,033	,029	261,892	8	,000
9	,002	,029	261,896	9	,000
10	,000	,029	261,896	10	,000
11	,016	,029	262,204	11	,000
12	-,023	,029	262,827	12	,000
13	,028	,029	263,814	13	,000
14	-,041	,029	265,886	14	,000
15	,014	,029	266,122	15	,000
16	,061	,029	270,702	16	,000

a. The underlying process assumed is independence (white noise).

b. Based on the asymptotic chi-square approximation.

Tabela 3.11 – Autocorrelação retornos BAS Santander



Gráf. 3.21 – Autocorrelação retornos BAS Santander

Continuamos a não rejeitar a hipótese da independência dos dados.

3.3.3.8. Retornos dos volumes

$LN\left(\frac{V_{t+\Delta t}}{V_t}\right)$ a seguir designado como LNR_VOL_SAN:

Autocorrelations

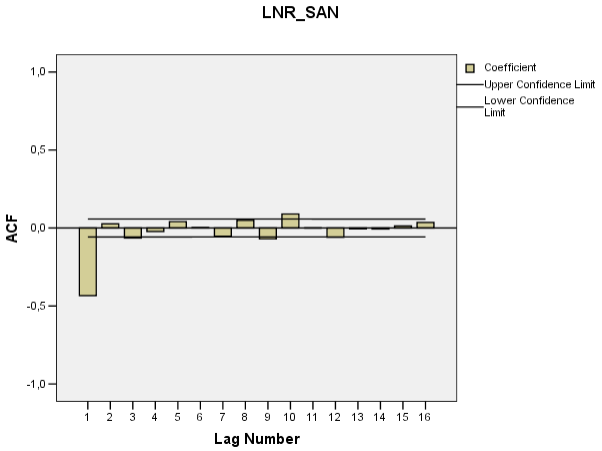
Series: LNR_SAN

Lag	Autocorrelation	Std.Error[a]	Box-Ljung Statistic Value	df	Sig.[b]
1	-,434	,029	226,811	1	,000
2	,026	,029	227,659	2	,000
3	-,064	,029	232,680	3	,000
4	-,022	,029	233,290	4	,000
5	,041	,029	235,297	5	,000
6	,002	,029	235,302	6	,000
7	-,053	,029	238,681	7	,000
8	,049	,029	241,587	8	,000
9	-,069	,029	247,424	9	,000
10	,090	,029	257,164	10	,000
11	,000	,029	257,164	11	,000
12	-,059	,029	261,438	12	,000
13	-,005	,029	261,470	13	,000
14	-,006	,029	261,517	14	,000
15	,013	,029	261,718	15	,000
16	,035	,029	263,237	16	,000

a. The underlying process assumed is independence (white noise).

b. Based on the asymptotic chi-square approximation.

Tabela 3.12 – Autocorrelação retornos vol. Santander



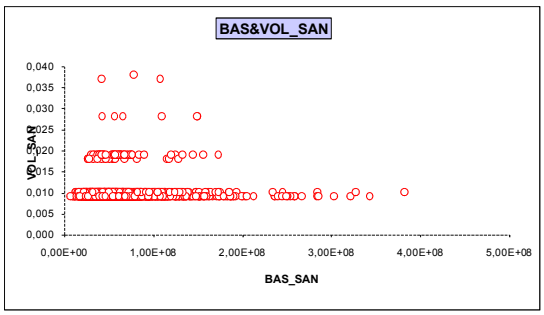
Gráf. 3.22 – Autocorrelação retornos vol. Santander

Pela análise da autocorrelação, verificamos que não devemos rejeitar a hipótese de independência dos dados, ou seja podemos concluir que não devemos rejeitar a hipótese de, tanto o LN_DIF1, como o LN_DIF2 como os retornos do volume serem independentes.

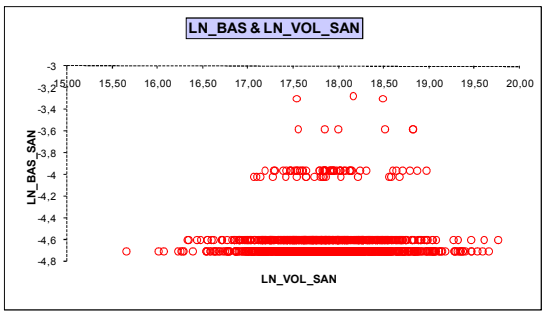
Seguidamente, analisemos a aproximação à normal para os vários conjuntos de dados e para diferentes períodos de análise.

3.4. Conclusões/modelo e período adoptado

Não nos parece, pelo menos graficamente, que seja possível estabelecer uma relação entre o BAS e os volumes, ou os respectivos logaritmos. A esta conclusão vai de encontro à conclusão a que chegaram [82] e [104].



Gráf 3.23 – BAS e Volume Santander



Gráf 3.24 – LN (BAS) e LN (Volume) Santander

Torna-se necessário verificar a hipótese de normalidade para os retornos dos volumes (LNR) do Santander, uma vez que no ponto anterior, verificámos a hipótese de normalidade apenas para os logaritmos (LN) do volume Santander no período de 2008-07-01 a 2008-11-20.

3.4.1. Normalidade do BAS, Volume e suas transformações, com dados do Santander (2004-01-05 a 2008-11-20)

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
BAS_SAN	,441	1203	,000	,360	1203	,000
VOL_SAN	,152	1203	,000	,800	1203	,000
LN_BAS_SAN	,393	1203	,000	,438	1203	,000
LNR_BAS_SAN	,291	1203	,000	,681	1203	,000
LN_VOL_SAN	,030	1203	,012	,996	1203	,003
LNR_VOL	,044	1203	,000	,985	1203	,000
LN_DIF1	,057	1203	,000	,969	1203	,000
LN_DIF2	,062	1203	,000	,973	1203	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Tabela 3.13 – Teste à Normalidade dos dados Santander (2004 a 2008)

Como $p < 0,05$ concluímos que devemos rejeitar a hipótese de aproximação à Normal, para todos os conjuntos de dados no período considerado.

3.4.2. Normalidade do BAS, Volume e suas transformações com os dados Santander (2006-01-03 a 2008-11-20)

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
BAS_SAN	,448	711	,000	,403	711	,000
VOL_SAN	,145	711	,000	,822	711	,000
LN_BAS_SAN	,408	711	,000	,476	711	,000
LN_VOL_SAN	,041	711	,006	,991	711	,000
LNR_BAS_SAN	,293	711	,000	,725	711	,000
LNR_VOL	,041	711	,006	,989	711	,000
LN_DIF1	,070	711	,000	,963	711	,000
LN_DIF2	,074	711	,000	,971	711	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Tabela 3.14 Teste à Normalidade dos dados Santander (2006 a 2008)

Como $p < 0,05$ concluímos que devemos rejeitar a hipótese de aproximação à Normal, para todos os conjuntos de dados no período considerado.

3.4.3. Normalidade do BAS, Volume e suas transformações com os dados Santander (2008-07-01 a 2008-11-20)

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
BAS_SAN	,462	99	,000	,387	99	,000
VOL_SAN	,099	99	,019	,926	99	,000
LN_BAS_SAN	,431	99	,000	,483	99	,000
LN_VOL_SAN	,059	99	,200*	,993	99	,885
LNR_VOL	,056	99	,200*	,989	99	,572
LNR_BAS_SAN	,310	99	,000	,696	99	,000
LN_DIF1	,151	99	,000	,849	99	,000
LN_DIF2	,108	99	,006	,946	99	,001

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Tabela 3.15 – Teste à Normalidade dos dados Santander (2004 a 2008)

Concluímos que apenas para os LN_VOL e para os LNR_VOL não devemos rejeitar a hipótese de aproximação à Normal, pelo que, vamos trabalhar daqui para frente com os LNR_VOL uma vez que, como verificámos no ponto anterior, apenas estes dados são independentes (amostra aleatória), mas antes desta nossa escolha se tornar definitiva, verifiquemos a aproximação à Normal para outros conjuntos de dados de outras empresas, por exemplo o BCP, PT, GALP, BBVA, BNPPARIBAS, BPI e SONAE para o período de 2008-07-01 a 2008-11-20. Esta diversidade de

empresas, pretende dar-nos a entender se podemos retirar algumas conclusões em relação ao sector da empresa, ou em relação ao facto de serem empresas internacionais, mas não nos parece, pelo menos com as análises que fizemos, que seja possível deduzir qualquer influência destes dois factores nos dados, assim:

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
LNR_BCP	,081	102	,095	,970	102	,020
LNR_PT	,069	102	,200*	,988	102	,473
LNR_GALP	,056	102	,200*	,991	102	,762
LNR_BBVA	,081	102	,092	,970	102	,021
LNR_BNPPARIBAS	,080	102	,102	,982	102	,171
LNR_BPI	,049	102	,200*	,990	102	,641
LNR_SONAE	,063	102	,200*	,960	102	,004

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Tabela 3.16 – Teste à Normalidade dos retornos dos volumes (2008-07-01 a 2008-11-20)

Para efectuar os Testes de Normalidade, deveremos ter em consideração duas hipóteses:

H0: Tem distribuição Normal

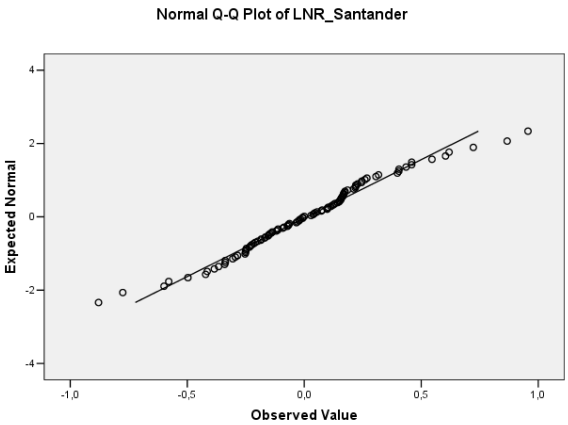
H1: Não tem distribuição normal

Por defeito, não rejeitamos H0 quando o resultado do nível de significância for superior a 0,05.

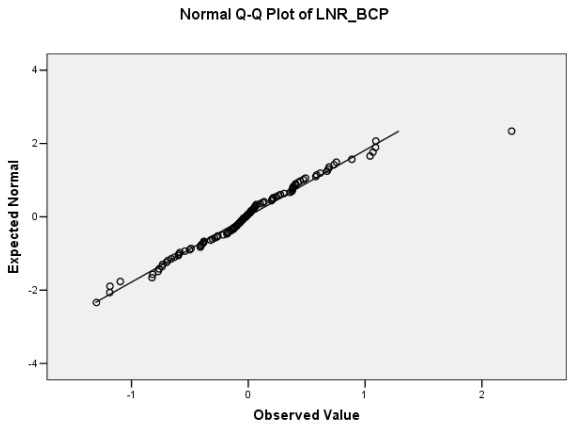
Assim, o nível de significância resultante destes testes é sempre superior a 0,05, ou seja, não rejeitamos a hipótese H0 ou seja não deve rejeitar a hipótese de aproximação à Normal para os retornos (LNR_VOL) de todas as empresas, no período considerado.

Vamos complementar estes resultados com a análise dos gráficos Q-Q plot:

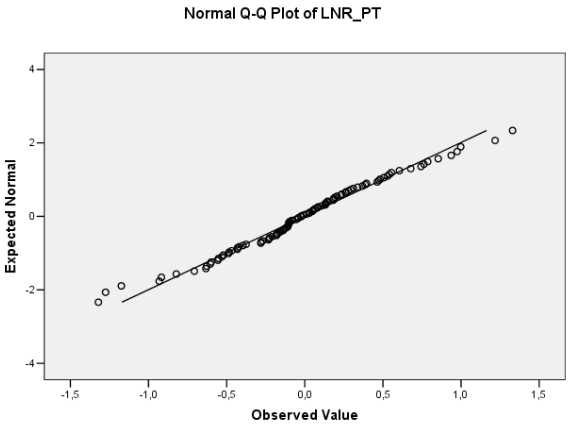
Gráficos de aproximação à Normal (Q-Q Plot)



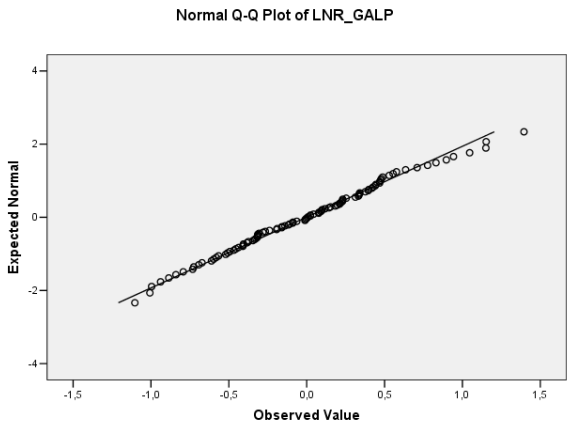
Gráf 3.25 – Q-Q Plot Normal LNR (Vol) Santander



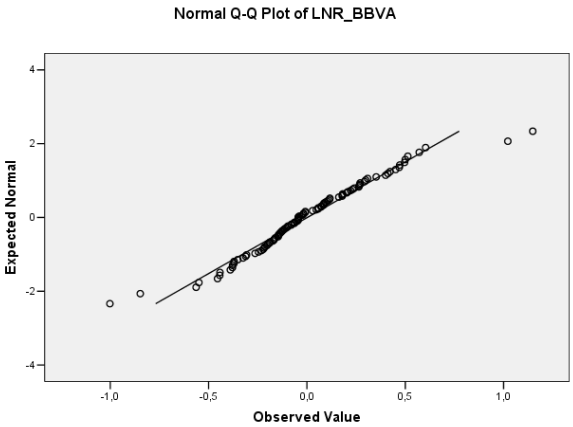
Gráf. 3.26 – Q-Q Plot Normal LNR (Vol) BCP



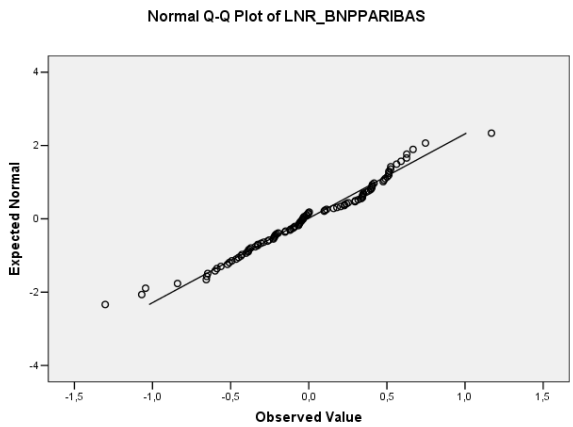
Gráf 3.27 – Q-Q Plot Normal LNR (Vol) PT



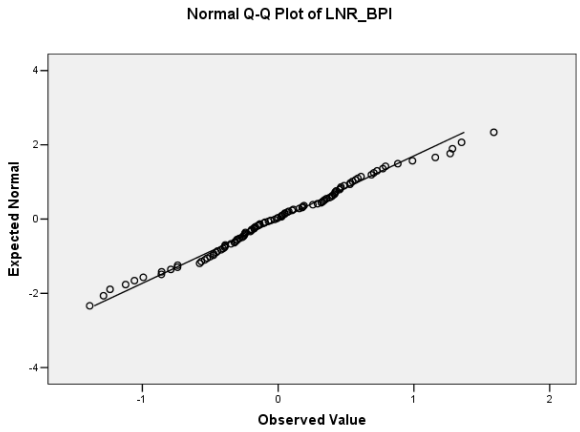
Gráf 3.28 – Q-Q Plot Normal LNR (Vol) GALP



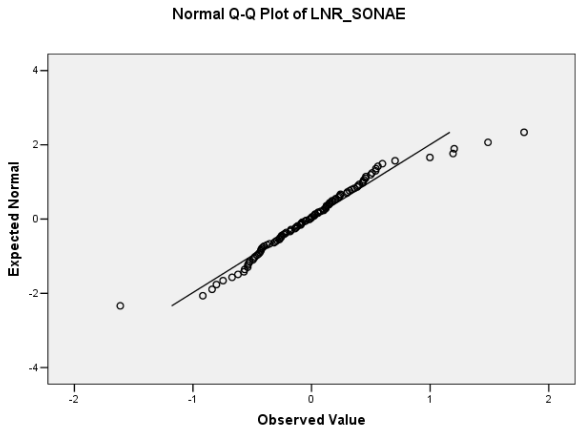
Gráf 3.29 – Q-Q Plot Normal LNR (Vol) BBVA



Gráf. 3.30 – Q-Q Plot Normal LNR (Vol) BNPPARIBAS



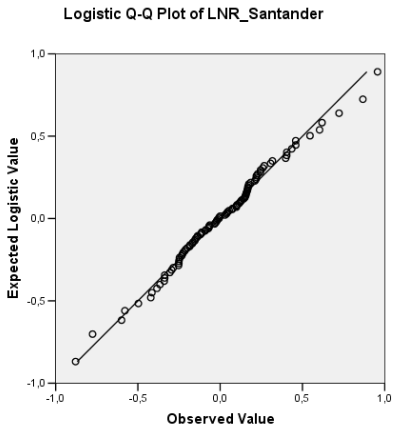
Gráf. 3.31 – Q-Q Plot Normal LNR (Vol) BPI



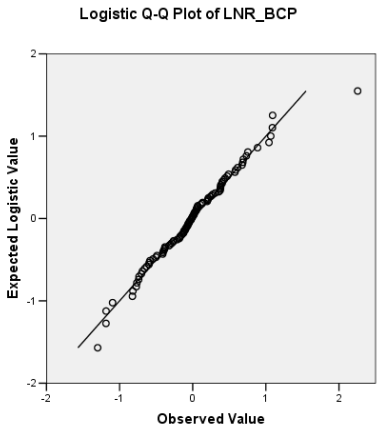
Gráf. 3.32 – Q-Q Plot Normal LNR (BAS) SONAE

Apenas a titulo de curiosidade, e tendo em conta eventual trabalho futuro, apresentamos,

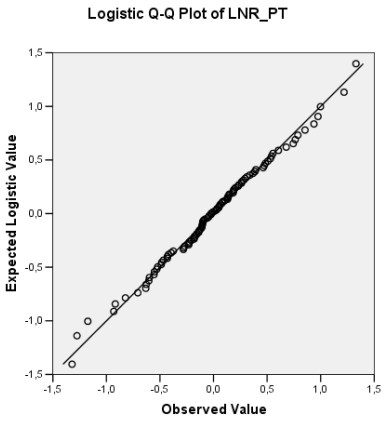
<u>Gráficos de aproximação à LOGISTIC (Q-Q Plot)</u>



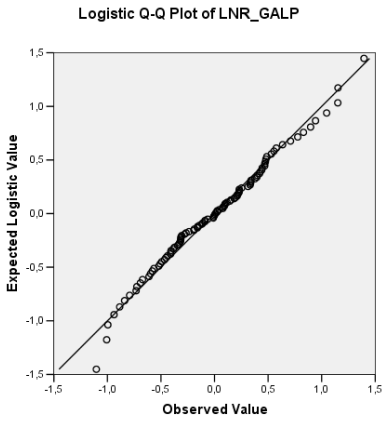
Gráf. 3.33 – Q-Q Plot Logística LNR (Vol) Santander



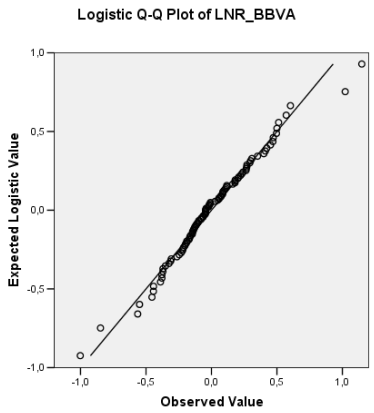
Gráf. 3.34 – Q-Q Plot Logística LNR (Vol) BCP



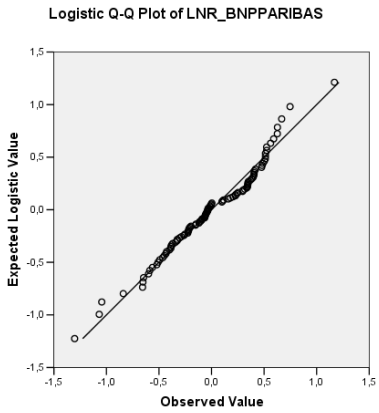
Gráf. 3.35 – Q-Q Plot Logística LNR (Vol) PT



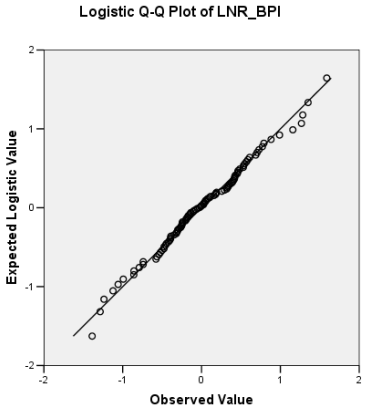
Gráf. 3.36 – Q-Q Plot Logística LNR (Vol) GALP



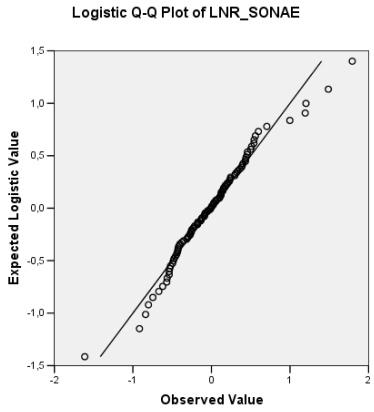
Gráf. 3.37 – Q-Q Plot Logística LNR (Vol) BBVA



Gráf. 3.38 – Q-Q Plot Logística LNR (Vol) BNPPARIBAS



Gráf. 3.39 – Q-Q Plot Logística LNR (Vol) BPI



Gráf. 3.40 – Q-Q Plot Logística LNR (Vol) SONAE

Estatísticas descritivas:

$(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$

σ

Descriptives

			Statistic	Std. Error
LNR_Santander	Mean		,01113671	,03104351
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	-,050445	
		Upper Bound	,07271867	
	5% Trimmed Mean		,00745911	
	Median		-,003005	
	Variance		,09829733	
	Std. Deviation		,31352405	
	Minimum		-,879001	
	Maximum		,95614897	
	Range		1,835150	
	Interquartile Range		,37458725	
	Skewness		,19709186	,239
	Kurtosis		,96934121	,474
LNR_BCP	Mean		-,010401	,05500773
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	-,119521	
		Upper Bound	,09871977	
	5% Trimmed Mean		-,022037	
	Median		-,021725	
	Variance		,30863674	
	Std. Deviation		,55555084	
	Minimum		-1,29986	
	Maximum		2,254610	
	Range		3,554468	
	Interquartile Range		,74203701	
	Skewness		,53080171	,23906893
	Kurtosis		2,001175	,47383043
LNR_PT	Mean		-,003533	,04942676
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	-,101582	
		Upper Bound	,09451681	
	5% Trimmed Mean		-,002208	
	Median		-,022917	
	Variance		,24918650	
	Std. Deviation		,49918584	
	Minimum		-1,32073	
	Maximum		1,329598	
	Range		2,650326	
	Interquartile Range		,53949750	
	Skewness		,00851151	,239
	Kurtosis		,54814068	,474
LNR_GALP	Mean		-,002271	,05112612
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	-,103692	
		Upper Bound	,09914909	
	5% Trimmed Mean		-,010824	
	Median		,00661046	
	Variance		,26661572	
	Std. Deviation		,51634845	
	Minimum		-1,10345	
	Maximum		1,394973	
	Range		2,498422	
	Interquartile Range		,72624596	
	Skewness		,19235072	,239
	Kurtosis		-,156	,474

Descriptives

			Statistic	Std. Error
LNR_BBVA	Mean		,00238635	,03268570
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	-,062453	
		Upper Bound	,06722599	
	5% Trimmed Mean		-,002203	
	Median		-,044290	
	Variance		,10897224	
	Std. Deviation		,33010943	
	Minimum		-1,00205	
	Maximum		1,148140	
	Range		2,150189	
	Interquartile Range		,39253189	
	Skewness		,36513563	,23906893
	Kurtosis		1,829504	,47383043
LNR_BNPPARIBAS	Mean		-,006833	,04298921
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	-,092112	
		Upper Bound	,07844652	
	5% Trimmed Mean		,00420683	
	Median		-,036433	
	Variance		,18850339	
	Std. Deviation		,43416977	
	Minimum		-1,30281	
	Maximum		1,168909	
	Range		2,471722	
	Interquartile Range		,65824734	
	Skewness		-,279473	,23906893
	Kurtosis		,17890746	,47383043
LNR_BPI	Mean		,00817401	,05771308
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	-,106313	
		Upper Bound	,12266124	
	5% Trimmed Mean		,00305785	
	Median		-,018429	
	Variance		,33974158	
	Std. Deviation		,58287356	
	Minimum		-1,38786	
	Maximum		1,588403	
	Range		2,976258	
	Interquartile Range		,77342900	
	Skewness		,12763511	,23906893
	Kurtosis		,21961904	,47383043
LNR_SONAE	Mean		-,007017	,04967078
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	-,105551	
		Upper Bound	,09151615	
	5% Trimmed Mean		-,026979	
	Median		-,014290	
	Variance		,25165299	
	Std. Deviation		,50165027	
	Minimum		-1,61309	
	Maximum		1,792099	
	Range		3,405193	
	Interquartile Range		,61719877	
	Skewness		,55395272	,23906893
	Kurtosis		2,175749	,47383043

Tabela 3.17 – Estatísticas descritivas todas empresas

Como conclusão, não devemos rejeitar a hipótese de aproximação à Normal para o modelo com os dados dos retornos dos volumes (LNR), e essa hipótese mantém-se para todos os conjuntos de dados, para o período de 2008-07-01 a 2008-11-20. Vamos seguidamente fazer algumas considerações acerca dos *outliers* do modelo, uma vez que, a análise dos Q-Q plot de aproximação à normal, tínhamos a sensação que se retirarmos os *outliers* podemos melhorar a aproximação à Normal.

3.5. Modelo "quase LogNormal" para os retornos do volume

3.5.1. Qualidade da aproximação à normal sem *outliers*

Grosso modo, um *outlier* é um valor que se distingue claramente dos restantes. Mais rigorosamente, um intervalo que contenha 99% dos dados, todo o valor dos dados que se encontre fora desse intervalo é um *outlier*. Obviamente, a escolha da percentagem dos dados não *outliers* depende de uma convença que fazemos na base de observação.

Como podemos constatar de seguida, o nosso modelo é ligeiramente melhor com *outliers*, quer do ponto de vista qualitativo através do gráfico, quer quantitativo, através do teste de Kolmogorov-Smirnov, esta melhoria é mais significativa com um maior intervalo de dados:

Com Outliers (como verificado em 3.4)

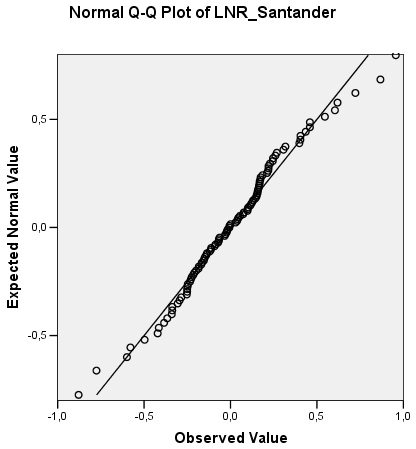
Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
LNR_Santander	,070	102	,200*	,984	102	,246

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Tabela 3.18 – Normalidade LNR



Gráf. 3.41 –Q-Q Plot Normal LNR

Sem Outliers (1):

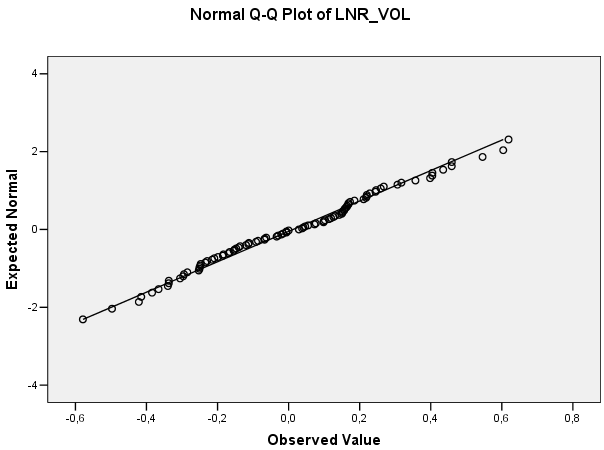
Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
LNR_VOL	,062	95	,200*	,989	95	,583

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Tabela 3.19 – Normalidade LNR S/Outliers



Gráf. 3.42 –Q-Q Plot Normal LNR S/Outliers

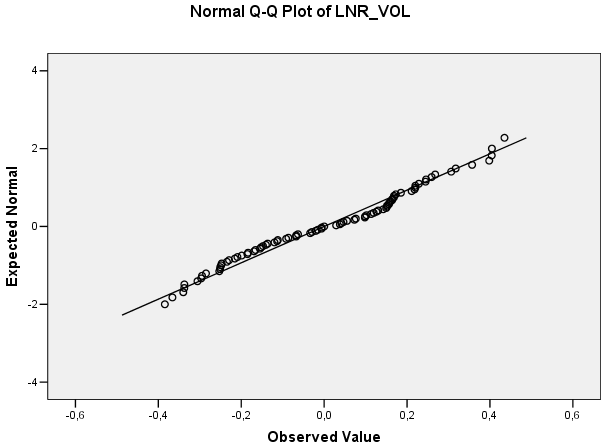
Sem Outliers (2):

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
LNR_VOL	,090	87	,077	,972	87	,053

a. Lilliefors Significance Correction

Tabela 3.20 – Normalidade LNR S/Outliers



Gráf. 3.43 –Q-Q Plot Normal LNR S/Outliers

Apesar de, pelo teste de K-S, continuarmos a não rejeitar a hipótese de aproximação à Normal, nota-se uma pior aproximação à medida que retiramos os *outliers*, mais visível graficamente e mais significativa com maior volume de dados.

3.5.2. Cálculos

Numa primeira aproximação vamos explorar, com os dados do Santander, um modelo em que, tanto o preço como o volume são brownianos geométricos.

Assim, e pelas conclusões que retirámos atrás, vamos utilizar os retornos do volume $LNR_{VOL} = LN\left(\frac{V_{t+\Delta t}}{V_t}\right)$ e os retornos do preços (LNR_Preços) com as seguintes estatísticas:

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
LNR_VOL	102	-,8790000	,9561000	,011133	,3135225503
LNR_Preços	102	-,1271716	,1339045	-,007935	,0439787552
Valid N (listwise)	102				

Tabela 3.21 – Estatísticas descritivas dos retornos

Para o processo do volume:

Então vamos supor que o processo do volume $(V_t)_{t\geq 0}$ segue uma evolução descrita por $V_t = V_0 e^{\left(\mu^V - \frac{1}{2}\sigma^{V^2}\right)t + \sigma^V B_t^2}$ em que $\left(B_t^2\right)_{t\geq 0}$ é um processo browniano.

Dado que $r_{t+\Delta t}^V = Ln(\frac{V_{t+\Delta t}}{V_t})$ e que já vimos atrás que podemos não rejeitar a hipótese de aproximação à Normal, temos que é possível estimar os parâmetros μ^V e σ^V considerando a amostra dada por $r_{t+\Delta t}^V = Ln(\frac{V_{t+\Delta t}}{V_t})$ em diferentes instantes sucessivos.

Com efeito

$$LN\left(\frac{V_{t+\Delta t}}{V_t}\right) = \left(\mu^V - \frac{\left(\sigma^V\right)^2}{2}\right)\Delta t + \sigma^V\left(B_{t+\Delta t}^2 - B_t^2\right) \tag{1}$$

$$\frac{LN\left(\frac{V_{t+\Delta t}}{V_t}\right) - \left(\mu^V - \frac{\left(\sigma^V\right)^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma^V \Delta t} = \frac{\left(B_{t+\Delta t}^2 - B_t^2\right)}{\Delta t}$$

e logo

$$\text{Média} = \left(\mu^V - \frac{1}{2}\left(\sigma^V\right)^2\right) = \quad 0,011133$$

$$\textit{Desvio padrão} = \sigma^V = \quad 0,313523$$

Confirmemos a aproximação à Normal

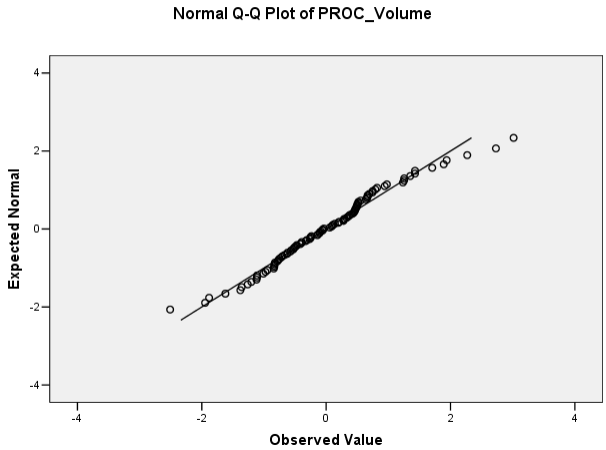
Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
PROC_Volume	,070	102	,200*	,984	102	,246

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Tabela 3.22 – Normalidade do processo do volume



Gráf. 3.44 – Q-Q Plot Normal do processo do volume

p=0,2 > 0,05 pelo que não rejeitamos H0

Adicionalmente, temos

Descriptives

			Statistic	Std. Error
PROC_Volume	Mean		,0000	,0990
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	-,1964	
		Upper Bound	,1964	
	5% Trimmed Mean		-,0117	
	Median		-,0451	
	Variance		1,0000	
	Std. Deviation		1,0000	
	Minimum		-2,8391	
	Maximum		3,0142	
	Range		5,8533	
	Interquartile Range		1,1948	
	Skewness		,1971	,2391
	Kurtosis		,9693	,4738

Tabela 3.23 – Estatísticas descritivas proc. volume

Pelo que podemos concluir que $N^V = \dfrac{LN\left(\dfrac{V_{t+\Delta t}}{V_t}\right) - \left(\mu^V - \dfrac{\left(\sigma^V\right)^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma^V \Delta t}$ tem distribuição $N(0,1)$

Procuraremos agora ajustar um processo log-normal aos preços. Para este processo, procedemos de igual modo ao efectuado para o volume, e tem-se,

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu^S - \frac{1}{2}\sigma^{S^2}\right)t + \sigma^S B_t^1}$$

$$\text{Média} = \left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right) = -0,00794$$

$$Desvio\ padrão\ = \sigma_1 = \ 0{,}043979$$

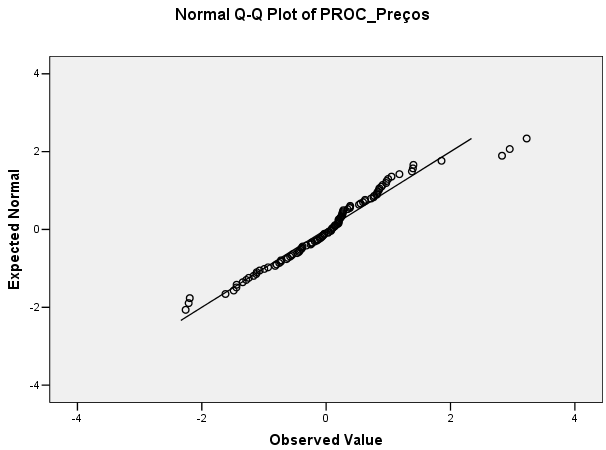
Verificação da aproximação à Normal

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
PROC_Preços	,087	102	,052	,965	102	,008

a. Lilliefors Significance Correction

Tabela 3.24 – Teste de Normalidade proc. dos preços



Gráf. 3.45 – Q-Q Plot Normal proc. dos preços

p=0,08 > 0,05 pelo que não rejeitamos H0

E também temos

Descriptives

			Statistic	Std. Error
PROC_Preços	Mean		,000000	,099015
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	-,196419	
		Upper Bound	,196419	
	5% Trimmed Mean		-,013731	
	Median		,086340	
	Variance		1,000000	
	Std. Deviation		1,000000	
	Minimum		-2,711224	
	Maximum		3,225190	
	Range		5,936414	
	Interquartile Range		1,125420	
	Skewness		,252021	,239069
	Kurtosis		1,628157	,473830

Tabela 3.25 – Estatísticas descritivas proc. preços

De onde concluímos que $N^S = \dfrac{LN\left(\dfrac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) - \left(\mu^S - \dfrac{\left(\sigma^S\right)^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma^S \Delta t}$ tem distribuição $N(0,1)$

Análise à hipotética correlação entre N^V e N^S

Vamos testar as hipóteses:

H0: N^V e N^S mutuamente independentes

H1: N^V e N^S não são mutuamente independentes

Não rejeitamos H0 quando o resultado do nível de significância for superior a 0,05.

Pela análise do quadro abaixo verificamos que (Spearman) $p = 0,420 \Rightarrow p > 0,05$ pelo que não podemos rejeitar H0 ou seja não rejeitamos a hipótese de que os ruídos associados aos processos dos preços $(S_t)_{t\geq 0}$ e o volume $(V_t)_{t\geq 0}$, respectivamente $(B_t^1)_{t\geq 0}$ e $(B_t^2)_{t\geq 0}$ são mutuamente independentes.

Correlations

			PROC_ Volume	PROC_ Preços
Kendall's tau_b	PROC_Volume	Correlation Coefficient	1,000	-,059
		Sig. (2-tailed)	.	,378
		N	102	102
	PROC_Preços	Correlation Coefficient	-,059	1,000
		Sig. (2-tailed)	,378	.
		N	102	102
Spearman's rho	PROC_Volume	Correlation Coefficient	1,000	-,081
		Sig. (2-tailed)	.	,420
		N	102	102
	PROC_Preços	Correlation Coefficient	-,081	1,000
		Sig. (2-tailed)	,420	.
		N	102	102

Tabela 3.26 – Correlação entre proc. volume e proc preços Santander

Com recurso ao programa *SPSS*® obtemos o quadro seguinte, do R, o R-Square, indica-nos a percentagem dos casos descritos pela variável dependente explicada pela variável independente.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,091[a]	,008	-,002	1,00078079

a. Predictors: (Constant), PROC_Preços

Tabela 3.27 – R Square entre os processos volume e preços

Ora, neste caso, o R-Square, é 0,008 ou seja, apenas 0,8 % dos casos do processo do LN dos retornos do volume são explicadas pelo processo dos retornos dos preços, o que é significativamente baixo.

Assim, assumimos que os processos do volume e dos retornos são mutuamente independentes.

Conclusão 1:

A análise estatística efectuada mostra-nos que, numa primeira aproximação, é aceitável assumir que, tanto o preço como o volume têm as respectivas evoluções descritas por processos brownianos geométricos.

Conclusão 2:

V_t é o modelo de Samuelson para os preços, temos também que B^1 e B^2 são Brownianos independentes.

Devemos referir que no trabalho [50] já se tinha utilizado este modelo para a liquidez quantificada pelo volume. Este trabalho considera que os retornos e o volume das transacções, de uma acção ou obrigação, definem uma linha estocástica no plano.

Conclusão 3:

No entanto, este modelo não permite descrever, nem as influências recíprocas preço/volume, nem tampouco o comportamento com regimes que os preços de certos activos evidenciam. Para esse efeito estudar-se-á um modelo diferente na secção seguinte.

CAPITULO IV

4. Modelo proposto

4.1. Os dados

Neste capítulo propomos um modelo para a evolução acoplada do preço - liquidez em que esta é quantificada pelo volume das transacções. Neste modelo o preço é dado por um processo com regimes em que a dinâmica entre mudanças de regime é descrita por uma equação diferencial estocástica do tipo Browniano geométrico. Por sua vez, a liquidez tem uma dinâmica descrita entre mudanças de regime, por um processo Ornstein-Uhlenbeck geométrico. Esta escolha permite um efeito de reversão para a média dos logaritmos dos volumes de transacção sem que se perca a normalidade.

Para ilustrar uma aplicação do modelo proposto, seleccionámos um activo, a Portugal Telecom, cuja evolução tanto do preço como da liquidez, evidencia alternância de regimes claramente diferenciados. Esta característica não é claramente visível nos dados explorados no capítulo anterior.

Os dados apresentados referem-se à Portugal Telecom (PT) entre 1 de Fevereiro de 2001 e 30 de Julho de 2006. Estes dados, representados na figura 4.1. apresentam características notáveis. Na evolução dos preços, várias tendências de regimes são facilmente notados. Na evolução da liquidez, é notável a volatilidade muito forte, bem como o pequeno número de *outliers*. Supondo que ambos, preço e o volume são lognormais, temos os parâmetros estimados em seis diferentes períodos correspondentes às datas de 1 a 410 (02/01/2001-29/07/2002), de 411 a 458 (30/07/2002-03/10/2002), 459 a 730 (06/10/2002-20/10/2003), 731 a 828 (21/10/2003-04/03/2004), 829 a 1226 (07/03/2004-13/09/2005) e 1227 a 1453 (14/09/2005-30/07/2006). Pelo método de estimação descrito no capitulo anterior e supondo que os processos dos preços $(P_t)_{t\geq 0}$ e do volume $(V_t)_{t\geq 0}$ satisfazem as equações:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma dB_t^1, & P_0 \in \mathbb{R}^+ \\ \dfrac{dL_t}{L_t} = \nu dt + \rho dB_t^2, & L_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

temos os resultados apresentados na tabela seguinte,

Parâmetros estimados com os preços e a liquidez lognormais							
Preço		1-410	411-458	459-730	731-828	829-1226	1227-1453
	μ	.002417	-0.013253	0.001351	0.008005	-0.001941	0.00006
	σ	.015352	0.037116	0.02083	0.027699	0.026868	0.020535
Liquidez		1-410	411-458	459-730	731-828	829-1226	1227-1453
	ν	.200038	0.224623	0.252027	0.130697	0.149504	0.144188
	ρ	.629027	0.660619	0.716109	0.50752	0.541546	0.542163

Tabela 4.1 – Parâmetros estimados com os preços e a liquidez lognormais

A nossa observação preliminar é confirmada pelos diferentes valores obtidos nas estimativas μ_t . Os parâmetros estimados para a liquidez claramente mostram dois regimes diferentes afectando ambos ν_t e ρ_t; o primeiro, da data 1 a 730 tem claramente mais intensa volatilidade e tendência.

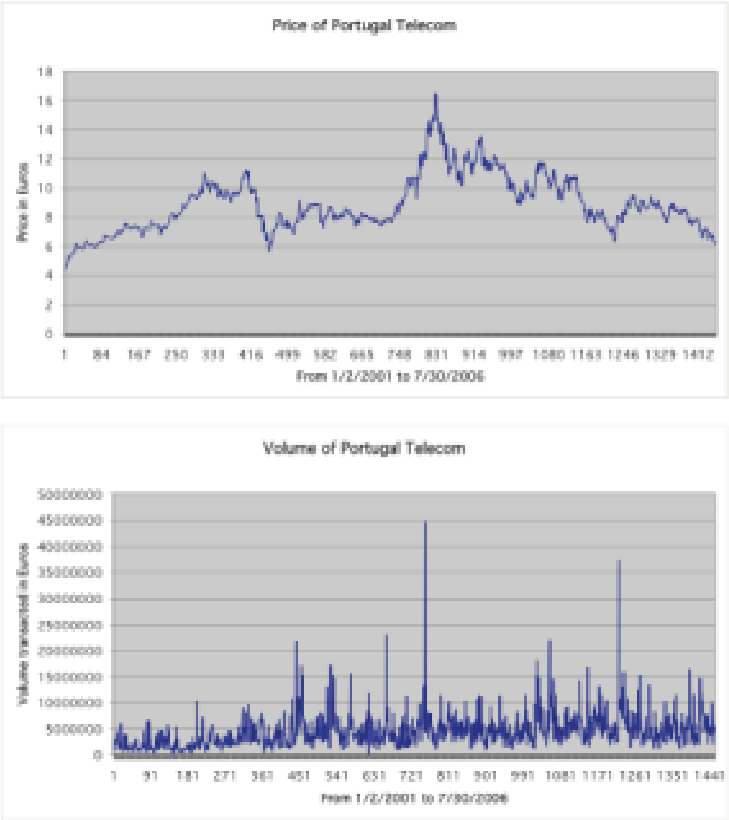


Figura 4.1 – Dados para o preço e liquidez da Portugal Telecom (PT)

4.2. O modelo

Com o fim de recuperar a influência recíproca do preço sobre o volume e vice-versa, propomos um modelo acoplado para o preço-volume com regimes e limiares dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dP_t}{P_t} = \mu_t dt + \sigma_t dB_t^1, & P_0 \in \mathbb{R}^+ \\ \dfrac{dL_t}{L_t} = \kappa_t \left(\theta_t - \log\left(L_t\right)\right) dt + \rho_t dB_t^2, & L_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \qquad (1)$$

Onde $\left(B_t^1\right)_{t\geq 0}$ e $\left(B_t^2\right)_{t\geq 0}$ são processos Brownianos com constante de correlação igual a r.

A interacção entre os regimes e os limiares é dada pelo que se segue. Os limiares para o preço e para a liquidez são denotados por P_m, P_M, L_m, L_M . Os coeficientes de difusão $\mu_t, \sigma_t, \rho_t, \kappa_t \, e \, \theta_t$ satisfazem as relações seguintes:

$$\mu_t = \begin{cases} \mu^h & se \quad L_t > P_M \\ \mu & se \quad P_m \le L_t \le P_M \\ \mu^d & se \quad L_t < P_m \end{cases}$$

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma^h & se \quad L_t > P_M \\ \sigma & se \quad P_m \le L_t \le P_M \\ \sigma^d & se \quad L_t < P_m \end{cases}$$

$$\rho_t = \begin{cases} \rho^h & se \quad P_t > L_M \\ \rho & se \quad L_m \le P_t \le L_M \\ \rho^d & se \quad P_t < L_m \end{cases}$$

$$k_t = \begin{cases} k^h & se \quad P_t > L_M \\ k & se \quad L_m \le P_t \le L_M \\ k^d & se \quad P_t < L_m \end{cases}$$

$$\theta_t = \begin{cases} \theta^h & se \quad P_t > L_M \\ \theta & se \quad L_m \le P_t \le L_M \\ \theta^d & se \quad P_t < L_m \end{cases}$$

Notamos que entre os tempos aleatórios de passagem dos limiares, os retornos do preço são log-normais e o logaritmo da liquidez é um processo Ornstein-Uhlenbeck. Onde μ^h, μ e μ^d são números reais (podemos ter $\mu^h > 0$ ou $\mu^d = -\mu^h$ ou outra combinação de sinal). De facto, combinando os diferentes sinais para os parâmetros de tendência (*drift*), este modelo permite para, pelo menos, 16 cenários, que apresentamos em detalhe nas tabelas seguintes:

Cenários	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Liquidez, com o preço no limiar superior	↑	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Liquidez, com o preço no limiar inferior	↓	↓	↓	↓	↓	↑	↑	↑
Preço, com a liquidez no limiar superior	↓	↓	↓	↑	↑	↓	↓	↑
Preço, com a liquidez no limiar inferior	↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓

Cenários	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
Liquidez, com o preço no limiar superior	↓	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Liquidez, com o preço no limiar inferior	↑	↓	↓	↓	↑	↑	↑	↑
Preço, com a liquidez no limiar superior	↑	↓	↑	↑	↓	↓	↑	↑
Preço, com a liquidez no limiar inferior	↑	↓	↓	↑	↓	↑	↓	↑

Tabela 4.2 – Cenários

Claro que, alguns destes cenários podem não fazer sentido do ponto de vista económico. O primeiro cenário que nós consideramos mais plausível, pode ser descrito da seguinte forma:

1. Se o preço for maior do que o limiar superior, então a liquidez tem tendência para subir.
2. Se o preço for menor do que o limiar inferior, então a liquidez tem tendência para descer.
3. Se a liquidez for maior do que o limiar superior, então o preço tem tendência a descer.
4. Se a liquidez for menor do que o limiar inferior, então o preço tem tendência a subir.

Existe uma força externa na liquidez, exercida pelos movimentos do preço, e uma força interna nos preços, exercida pelos movimentos da liquidez. O cenário VIII também parece interessante.

A integração numérica do modelo sem ruído e limiares “apertados” exibe um comportamento com uma solução quase periódica. Esta característica diferencia

claramente o modelo com mudança de limiares que aqui propomos, de um modelo alternativo “presa – predador” com adição de ruído e correspondente volatilidade não aleatória. Esse modelo tem sempre uma solução periódica se definirmos o ruído como nulo (ver [2]).

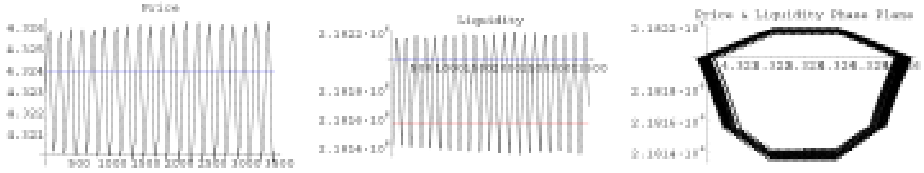


Figura 4.2 – Preço, liquidez e representação no plano dos *outputs* para o cenário I do modelo, com ruído nulo construído com os parâmetros simulados e os dados da PT.

A simulação do primeiro cenário mencionado acima foi implementada através do esquema de Euler. Um exemplo dos resultados da simulação é apresentado na figura 4.3.

As simulações mostram que o modelo permite recuperar a forma geral para a evolução dos preços como dado na figura 4.1. Como para a evolução do volume observamos que não podemos reproduzir um pequeno conjunto de datas com valores muito grandes.

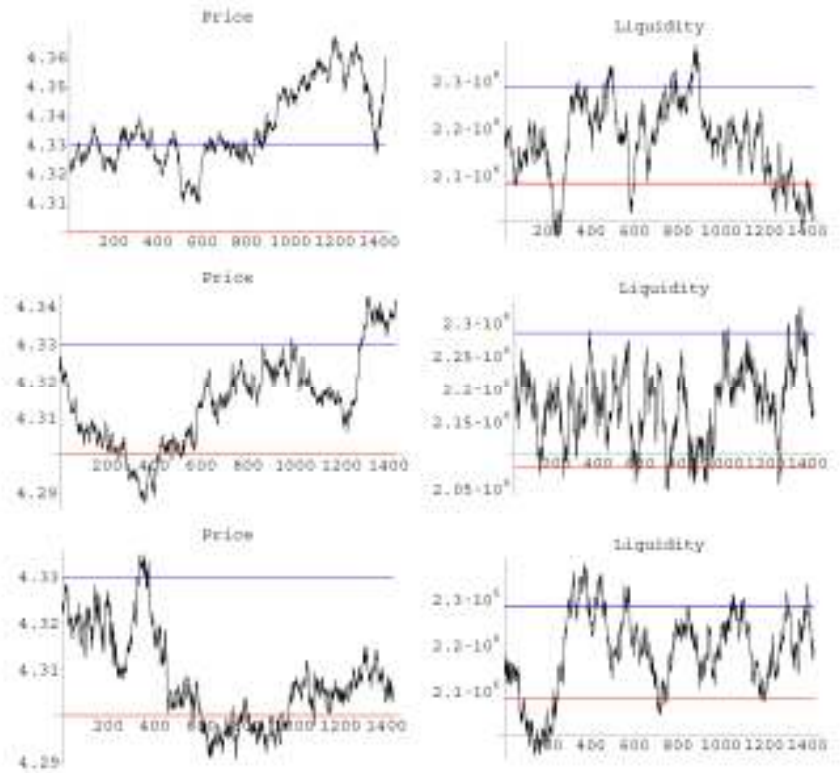


Figura 4.3 – Três simulações dos outputs do preço, liquidez para o cenário I do modelo com os parâmetros estimados dos dados da PT

4.3. A existência de soluções

Agora mostramos que o modelo proposto na secção 4.1 admite solução. A existência de uma solução fraca é uma consequência simples dos resultados gerais para as equações diferenciais estocásticas com coeficientes mensuráveis (ver Engelbert, H. J. e Kurenok, V. P. (2000). *On Multidimensional SDES without drift and with a Time-dependent diffusion matrix.* Georgian Mathematical Journal 7, 4, 643-664. e as referências aí contidas). Uma solução única forte existe como nós seguidamente provamos. Primeiro, consideramos as equações do sistema do modelo com coeficientes constantes $\mu, \sigma, \kappa, \theta \, e \, \rho$ e observamos que para a equação Browniana geométrica temos o processo $P_t = P_t(\mu, \sigma)$ dado por:

$$\forall_{s \le t} \qquad P_t = P_s \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma\left(B_t^1 - B_s^1\right)\right) \qquad (2)$$

Para a equação Ornstein-Uhlenbeck geométrica, depois da primeira aplicação da fórmula de Ito com $Z_t = \ln(L_t)$ e a segunda com $X_t = e^{\kappa t} Z_t$, temos

$$\forall_{s \le t} \qquad X_t = X_s + \left(\theta - \frac{\rho^2}{2\kappa}\right)\left(e^{\kappa t} - e^{\kappa s}\right) + \rho \int_s^t e^{ku} dB_u^2$$

Demonstrando assim, por inversão as alterações dos processos, que o processo $L_t = L_t(\kappa, \theta, \rho)$ é dado por

$$\forall_{s \le t} \qquad L_t = L_s^{-\kappa(t-s)} \exp\left(k\left(\theta - \frac{\rho^2}{2\kappa}\right)\left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) + \rho e^{-\kappa t} \int_s^t e^{\kappa u} dB_u^2\right) \qquad (3)$$

Agora considerando as partições de $[0, +\infty[$ em três regiões, definidas pelos limiares, em ambos preço e liquidez, temos a partição natural de $[0, +\infty[^2$ em nove regiões de regimes de acordo com $[0, +\infty[^2 = \left([0, L_m[\cup [L_m, L_M] \cup]L_M, +\infty[\right) \times \left([0, P_m[\cup [P_m, P_M] \cup]P_M, +\infty[\right)$.

Para cada uma das nove regiões assim definidas, existe um conjunto de parâmetros específicos constantes para as equações do modelo; por exemplo na região regime $R_1 = [0, L_m[\times [P_M, +\infty[$ o processo dos preços tem como parâmetros (μ^d, σ^d) e para o processo da liquidez os parâmetros são $(\kappa^h, \theta^h, \rho^h)$.

Consideremos (P_0, L_0) as condições iniciais pertencendo a uma das nove regiões regime. A solução do processo (P_t, L_t) evolui de acordo com o processo Browniano geométrico na primeira coordenada e de acordo com o Ornstein-Uhlenbeck geométrico na segunda coordenada, até ao momento aleatório τ_1 no qual o processo deixa a região inicial entrando noutra região regime, digamos R_2. Nós observámos que, para um processo estocástico com trajectórias contínuas, o tempo de entrada num dado conjunto de Borel é um tempo de paragem (*stopping time*). Para esta região corresponde um outro conjunto de parâmetros constantes descritos acima com os quais os processos $P_t = P_t(\mu^d, \sigma^d)$ e $L_t = L_t(\kappa^h, \theta^h, \rho^h)$ satisfazendo as equações (2) e (3) respectivamente, são perfeitamente definidas para cada $\tau_1 < s < t$. A variável aleatória (P_{τ_1}, L_{τ_1}) está bem definida quase certamente por

$P_{\tau_1} := \lim_{t\to\tau_1} L_t$ e em L^2. Por um resultado standard sobre a existência de soluções (ver [49]), a solução do processo é dada por τ_2 para $\tau_1 \le t \le \tau_2$

$$P_t = P_{\tau_1} \exp\left(\left(\mu^d - \frac{\left(\sigma^d\right)^2}{2}\right)\left(t-\tau_1\right) + \sigma^d\left(B_t^1 - B_{\tau_1}^1\right)\right)$$

e

$$L_t = L_{\tau_1}^{-\kappa^h(t-\tau_1)} \exp\left(k^h\left(\theta^h - \frac{\left(\rho^h\right)^2}{2\kappa^h}\right)\left(1-e^{-\kappa^h(t-\tau_1)}\right) + \rho^h e^{-\kappa^h t}\int_{\tau_1}^t e^{\kappa^h u} dB_u^2\right)$$

sendo o momento aleatório em que esta solução do processo deixa a região R_1 e entra noutra região. A construção pode agora avançar na mesma forma do que quando o processo entrou na região R_1. Por indução podemos definir "*stopping times*" $0 := \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ tal que a solução do processo para o preço é:

$$P_t = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{t_\kappa} \exp\left(\left(\mu^i - \frac{\left(\sigma^i\right)^2}{2}\right)\left(t-\tau_k\right) + \sigma^i\left(B_t^1 - B_{t_k}^1\right)\right) 1_{[\tau_k,\tau_{k+1}[}(t)$$

Convencionando que para $\tau_k \le t < \tau_{k+1}$ a solução do processo está numa região do regime em que os parâmetros são $\mu^i, \sigma^i \; para \; i \in \{d,s,h\}$. E similarmente para a solução do processo da liquidez

$$L_t = \sum_{k=0}^{+\infty} L_{t_\kappa}^{e^{-k^j(t-\tau_k)}} \exp\left(k^j\left(\theta^j - \frac{\left(\sigma^j\right)^2}{2k^j}\right)\left(1-e^{-k^j(t-\tau_k)}\right) + \rho^j e^{-k^j t}\int_{\tau_k}^t e^{-k^j u} dB_u^2\right) 1_{[\tau_k,\tau_{k+1}[}(t)$$

Convencionando que para $\tau_k \le t < \tau_{k+1}$ esta a solução do processo está numa região do regime em que os parâmetros são $k^j, \theta^j, \rho^j \; para \; j \in \{d,s,h\}$. Observamos que a solução do processo assim construído tem trajectórias contínuas.

4.4. O processo de estimação

Desenvolvemos um procedimento de estimação. Com o objectivo de testar o procedimento de estimação, o método é o que se segue. Para o teste completo, escolher um conjunto de parâmetros no modelo dados pelas equações (1), e obter

repetições independentes do seguinte. Simular a trajectória do processo e estimar os parâmetros. Supondo que para cada parâmetro se obtém uma amostra Gaussiana, nós consideramos que, na 1ª aproximação, o procedimento de estimação funciona se o valor do parâmetro escolhido se situa entre a extremidade inferior do intervalo da média da amostra menos o desvio padrão da amostra e a extremidade superior da média mais o desvio padrão.

4.4.1. Procedimento de estimação

Apresentamos seguidamente um procedimento de estimação introduzido em [110].

O procedimento dos estimadores é o dos mínimos quadrados condicional, detalhado em seguida.

1. Para cada vector de limiares plausíveis $\left(P(m), P(M), L(m), L(M)\right) \in R^4$ divide-se o preço e a liquidez em diferentes regimes. Olhando para os dados dos preços e para os limiares fixados, sabemos que quando o preço está abaixo do limiar inferior, $\left(P(m)\right)$, devemos considerar a correspondente liquidez no primeiro regime, quando o preço está entre o limiar inferior e o limiar superior $\left(P(M)\right)$, consideramos os dados da liquidez no segundo regime e quando o preço está acima do limiar superior, nós consideramos os dados da liquidez no 3º regime. Olhando para a liquidez podemos fazer o mesmo com o objectivo de dividir os dados do preço em 3 regimes.

2. Seguidamente, para ambos os processos podemos estimar os parâmetros de tendência (*drift*) e volatilidade em cada regime usando estimadores de máxima verosimilhança. Temos para os parâmetros do preço,

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{n_j - 1}\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right)^2 - \frac{1}{\left(n_j - 1\right)n_j}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right)\right)^2\right) \qquad (4)$$

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n_j\Delta}\sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right) + \frac{\hat{\sigma}_j^2}{2} \qquad (5)$$

onde j=1,2,3 representa o índice do regime, e consideramos a soma apenas do conjunto de observações no regime j. Para os parâmetros da liquidez temos os estimadores,

$$\hat{\theta}_j = \frac{L_y L_{xx} - L_x L_{xy}}{n_j\left(L_{xx} - L_{xy}\right) - L_x^2 + L_x L_y} \qquad (6)$$

$$\hat{\kappa}_j = -\frac{1}{\Delta}\ln\left(\frac{L_{xy} - \hat{\theta}_j\left(L_x + L_y\right) + n_j\hat{\theta}_j^2}{L_{xx} - 2\hat{\theta}_j L_x + n_j\hat{\theta}_j^2}\right) \qquad (7)$$

$$\hat{\rho}_j = \frac{2\hat{\kappa}_j}{n_j\left(1-\alpha_j^2\right)}\Big(L_{yy} - 2\alpha_j L_{xy} - \alpha_j^2 L_{xx} - 2\hat{\theta}_j\left(1-\alpha_j\right)\left(L_y - \alpha_j L_x\right)$$
$$+ n_j\hat{\theta}_j^2\left(1-\alpha_j^2\right)\Big) \qquad (8)$$

com $\alpha_j = \exp\left(-k_j\Delta\right)$ e onde temos

$L_x = \sum_{i=1}^{n_j} Ln\left(L_{i-1}\right), L_y = \sum_{i=1}^{n_j} Ln\left(L_{i-1}\right), L_{xx} = \sum_{i=1}^{n_j} Ln\left(L_{i-1}\right)^2, L_{yy} = \sum_{i=1}^{n_j} Ln\left(L_i\right)^2$ e finalmente $L_{xy} = \sum_{i=1}^{n_j} Ln\left(L_{i-1}\right) Ln\left(L_i\right)$.

3. Assim, calculamos a soma dos quadrados dos resíduos

$$LSP_n = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(P_{i+1} - E\left[P_{i+1}\middle|P_i\right]1_{P_i \in \mathrm{Re}gime(j)}\right)^2, \qquad (9)$$

em que $E\left[P_{i+1}\middle|P_i\right]1_{P_i \in \mathrm{Re}gime(j)} = P_i \exp\left(-\hat{\mu}_j\Delta\right)$ para o processo do preço

e

$$LSL_n = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(L_{i+1} - E\left[L_{i+1}\middle|L_i\right]1_{L_i \in \mathrm{Re}gime(j)}\right)^2, \qquad (10)$$

com $E\left[L_{i+1}\middle|L_i\right]1_{P_i \in \mathrm{Re}gime(j)} = L_i \exp\left(-\hat{\mu}_j\Delta\right) + \theta_j\left(1 - \exp\left(-\hat{k}_j\Delta\right)\right)$ para o processo da liquidez.

4.4.2. Procedimento de simulação

A simulação foi realizada com recurso ao Mathematica®, todas com funções construídas por nós. Vejamos detalhadamente o procedimento de simulação. Para cada repetição, os valores iniciais foram $S_0 = 4; L_0 = 210$ e o tempo de descretização e o numero de observações foram respectivamente $\Delta = 0.01$ e $NbRptn = 200$.

1. Os parâmetros do processo foram escolhidos como se segue. Os limiares $P(M) = 5, P(m) = 3, L(M) = 218\, e\, L(m) = 202$. Os parâmetros da tendência (*drift*) $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0.005, \mu_3 = -1, \kappa_1 = 1, \kappa_2 = 1, \kappa_3 = 1, \theta_1 = \ln(200), \theta_2 = \ln(210), \theta_3 = \ln(220)$ e os parâmetros da volatilidade $\sigma_1 = 0.9, \sigma_2 = 0.6, \sigma_3 = 0.9, \rho_1 = 0.70, \rho_2 = 0.40\, e\, \rho_3 = 0.60$.

2. O processo correlacionado do movimento Browniano tem a matriz de covariância $CovMtx = \left(\left(1, .01284155\right), \left(.01284155, 1\right)\right)$. Para cada trajectória, a lista de valores para o processo correlacionado do movimento Browniano é gerada primeiro.

3. Seguidamente, as trajectórias do preço e da liquidez com recurso ao esquema de Euler:

$$P_{t+\Delta} = P_t + \mu_t P_t \Delta + \sigma_t P_t \Delta B_t^1 \qquad (11)$$

$$L_{t+\Delta} = L_t + \kappa_t \left(\theta_t - Ln\left(L_t\right)\right) L_t \Delta + \rho_t L_t \Delta B_t^2 \qquad (12)$$

Os coeficientes $\mu_t, \sigma_t, k_t, \theta_t$ e ρ_t, mudam com as mudanças de regime como estipulado pelo modelo.

4.5. Resultados do teste do procedimento de estimação

Obtivemos os seguintes resultados para o processo estimado dos preços,

	$\hat{L}(m)$	$\hat{L}(M)$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$
Média	201.985	218.003	1.007	0.002	-0.978	0.892	0.600	0.906
Desv. padrão	0.099	0.079	0.062	0.015	0.067	0.041	0.013	0.049

Tabela 4.3 – Estimações para 200 repetições do processo dos preços

em que os valores verdadeiros usados na simulação foram:
$L(m)=202, L(M)=218, \mu_1=1, \mu_2=0.005, \mu_3=-1, \sigma_1=0.9, \sigma_2=0.6, \sigma_3=0.9$.
Obtivemos os seguintes resultados para o processo estimado da liquidez,

	$\hat{P}(m)$	$\hat{P}(M)$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}_3$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\rho}_2$	$\hat{\rho}_3$
Média	3.253	4.714	1.351	1.591	1.412	5.302	5.346	5.388	0.647	0.421	0.564
Desv. padrão	0.436	0.425	0.622	0.490	0.618	0.047	0.017	0.042	0.063	0.026	0.049

Tabela 4.4 – Estimações para 200 repetições do processo da liquidez

em que os valores verdadeiros usados na simulação foram:
$P(m)=3, P(M)=5, \kappa_1=1, \kappa_2=1, \kappa_3=1, \theta_1=\ln(200)=5.298, \theta_2=\ln(210)=5.347, \theta_3=\ln(220)=5.394$
e os parâmetros da volatilidade $\rho_1=0.70, \rho_2=0.40, \rho_3=0.60$.
Conclusão: O processo de estimação utilizado permite recuperar os parâmetros em processos com trajectórias simuladas.

4.6. Aplicação do procedimento de estimação aos dados reais

O processo de estimação descrito na secção anterior foi aplicado aos dados reais da Portugal Telecom (PT), tendo revelado, numa primeira análise, uma possível mudança de regime. Os resultados foram os que se seguem.

Obtivemos os resultados seguintes para o processo estimado dos preços

$\hat{L}(m)$	$\hat{L}(M)$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2$	$\hat{\mu}_3$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$
$38\text{x}10^6$	$69\text{x}10^6$	0.0007	-0.0015	0.0046	0.0151	0.0244	0.0350

Tabela 4.5 – Estimativas para os dados do preço da PT

Obtivemos os resultados seguintes para o processo estimado da liquidez, note-se que tem um único limiar positivo, denotado por $\hat{P}(M)$,

$\hat{P}(M)$	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\rho}_2$
11.8	0.3784	0.4880	3.9819	4.2558	0.6660	0.5203

Tabela 4.6 – Estimativas para os dados da liquidez da PT

Observamos que o modelo recupera os dois regimes inicialmente observados para a volatilidade da liquidez. A volatilidade do preço estimado no processo Browniano geométrico usual é $\sigma_{BS} = 0.022798$. Suponhamos que, a cada data, é possível detectar o regime que rege a evolução dos preços. Então, os preços das opções calculados pela fórmula de Black-Scholes usual podem ser diferentes da fórmula do modelo para o preço (principalmente no caso de usarmos $\hat{\sigma}_1$ ou $\hat{\sigma}_3$).

Então, os preços das opções, calculados oela fórmula de Black-Scholes usual, podem ser diferentes dos preços calculados com $\hat{\sigma}_1$ ou $\hat{\sigma}_3$ dados pelo modelo proposto.

Observamos que o apreçamento por aplicação directa da fórmula de Black-Scholes às volatilidades $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_3$ estimadas no modelo proposto não está justificada. Com efeito, dado que a liquidez não é transaccionável, um modelo com duas fontes de ruído é incompleto, pelo que, não existe a garantia de preço único, livre de arbitragem.

CAPITULO V

5. Conclusões e trabalho futuro

Na revisão da literatura efectuada, constatámos que há uma enorme variedade de aproximações para descrever a liquidez. No entanto, sobressaem como mais referidos o volume e o BAS.

Uma análise estatística a dados reais mostrou-nos que o conceito mais fácil de modelar é o do volume de transacções.

O modelo de mudança de regimes nos limiares aqui investigado recupera algumas das características gerais da evolução do conjunto preço – liquidez para o mercado de acções típico português. Seria interessante verificar outros mercados e outros tipos de títulos. A existência, estabilidade e propriedades assimptóticas do modelo serão apresentadas posteriormente numa versão mais extensa deste trabalho.

A consistência dos estimadores dos limiares e dos parâmetros de difusão do modelo proposto não foi demonstrada mas algum trabalho preliminar num modelo de mudança de regimes com limiares (ver [110]) indica que isto pode ser um problema muito difícil.

Para determinar a relevância prática de incorporar a informação da liquidez na evolução dos preços, a aferição deste modelo (benchmarking) contra os modelos log-normais clássicos para o preço será realizada num trabalho futuro.

CAPITULO VI

6. Bibliografia

[1] A.M. Best Company (2007). *A.M. Best's Liquidity Model For U.S. Life Insurers.* New Jersey.

[2] Abundo M. (1991). *A stochastic model for predator-prey systems: basic properties, stability and computer simulation*. Journal of Mathematical Biology 9, 6, 495-511.

[3] Acerbi, C. e Scandolo, G. (2007). *Liquidity Risk Theory*. Italy.

[4] Alexander, G.J., Edwards, A.K. e Ferri, M.G. (2000). *The determinants of trading volume of high-yield corporate bonds*. Journal of Financial Markets 3, 177–204.

[5] Allen, F. e Gale, D. (2003). *Financial Fragility, Liquidity and Asset Prices.* Philadelphia/New York. Center for Financial Institutions Working Papers 01-37, Wharton School Center for Financial Institutions, University of Pennsylvania.

[6] Almgren R. e Chriss N. (2000). *Optimal Execution of Portfolio Transactions*, Journal of Risk, Vol. 3, No. 2, pp. 5–39.

[7] Almgren, R. e Chriss, N. (1999). *Value Under Liquidation*.

[8] Amihud, Y. e Mendelson, H. (1991). *Liquidity, maturity, and the yields on US Treasury securities*. Journal of Finance 46 (4), 1411–1425.

[9] Angelidis, T. e Benos, A. (2005). *Liquidity Adjusted Value-at-Risk based on the components of the bid-ask spread*. Piraeus.

[10] Antão, P., Antunes, A. e Martins, N. (2004). *Análise De Liquidez E Execução De Ordens No Mercado De Acções Em Portugal*. Lisboa, Banco de Portugal

[11] Arisoy, Y. (2008). *Index futures, spot volatility and liquidity: Evidence from FTSE Xinhua China A50 Index Futures*. Singapore

[12] Baker, M. e Stein, J. (2002). *Market Liquidity as a Sentiment Indicator*. Harvard.

[13] Bakstein, D. (2001). *The Pricing Of Derivatives In Illiquid Markets*.

[14] Bakstein, D. e Howisony, S. (2003). *A Non-Arbitrage Liquidity Model with Observable Parameters for Derivatives*. Oxford.

[15] Bangia, A. , Diebold, F. e Schuermann, T. e Stroughair J.D (1998). *Modeling Liquidity Risk, With Implications for Traditional Market Risk Measurement and Management (draft/pre-print)*. New York.

[16] Bangia, A., Diebold F.X., Shuermann T. e Stroughair J.D. (2001). *Modelling Liquidity Risk, With Implications for Traditional Market Risk Measurement and Management*. in S. Figlewski and R. Levich (eds.), Risk Management: The State of the Art . Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 2002, 1-13. Published in abridged form as "Liquidity on the Outside," Risk, 12, 68-73,

[17] Bass R. (1995). *Probabilistic Techniques in analysis*. Springer.

[18] Bensaid B., Lesne J.P., Pagès H. e Scheinkman J. (1992). *Derivative Asset Pricing with Transaction Costs*. Paris, Mathematical Finance.

[19] Berkowitz, J. (2000). *Incorporating Liquidity Risk into VaR Models*. Irvine.

[20] Beteto, D. (2002). *Gestao do risco de liquidez*.

[21] Bobyshev, A. e Belousov, S. (2005). *Handling Liquidity Risk*. Moscow, Alfa-Bank.

[22] Bracke, T. e Fidora, M. (2008). *Global Liquidity Glut or Global Savings Glut*. European Central Bank.

[23] Breen W., Hodrick L. e Korajczyk R. (2000). *Predicting Equity Liquidity*. Kellogg Graduate School of Management, Working Paper.

[24] Brenner, M., Eldor R. e Hauser S. (2001). *The price of options illiquidity*. Journal of Finance, 26, 789-806.

[25] Bryant, H., e Haigh, M. (2002). *Bid-Ask Spreads in Commodity Futures Markets*. Maryland.

[26] Buhl, C., Reich, C. e Wegmann, P. (2002). *Extremal Dependence between Market and Liquidity Risk*. Basel.

[27] Butenko, S., Golodnikov, A. e Uryasev, S. (2003). *Optimal Security Liquidation*. Ganiesville, USA e Glushkov-Ukraine.

[28] Campbell, J. Y., Lo, A. W. e MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets.* Princeton University, Press Princeton.

[29] Çetin, U. e Rogers, L. (2005). *Modelling liquidity effects in discrete time*. London/Cambridge.

[30] Çetin, U., Jarrow, R. e Protter, P. (2002). *Liquidity Risk and Arbitrage Pricing Theory*. New York.

[31] Çetin, U., Soner, H. e Touzi, N. (2006). *Options hedging under liquidity costs*.

[32] Chan, J., Hong, D. e Subrahmanyam, M. (2005). *Liquidity and Asset Prices in Multiple Markets*. Singapore/New York.

[33] Chen, N. e Kan, R. (1995). *Expected Return and the Bid-Ask Spread*. California/Toronto.

[34] Chollete, L., Naes, R. e Skjeltorp, J. (2008). *The Risk Components of Liquidity*. Oslo.

[35] Chordia,T., Roll, R. e Subrahmanyam, A. (2001). *Market Liquidity & Trading Activity*. The Journal of Finance.

[36] Committee of Chief Risk Officers Valuation and Risk Metrics Working Group (2002). *Valuation and Risk Metrics*. White paper.

[37] Comptroller of the Currency Administrator of National Banks (2001). *Liquidity Comptroller's Handbook*. US Department of the Treasury.

[38] Coppejans, M., Domowitz, I. e Madhavan A. (2001). *Liquidity in an automated auction.* Mimeo.

[39] Crabbe, L.E. e Turner, C.M. (1995). *Does the liquidity of a debt issue increase with its size? Evidence from the corporate bond and medium-term note markets*. Journal of Finance 50 (5), 1719–1734.

[40] Damodaran, A. (2005). *Marketability and Value*. New York.

[41] Daniels M., Farmer D., Iori G. e Smith E. (2002). *Demand Storage, Market Liquidity and Price Volatility*. Santa Fe Institute, Working Paper.

[42] Deuskar, P., Gupta, A., Subrahmanyama, M. (2008). *Liquidity Effect in OTC Options Markets*. Ljubljana, Slovenia.

[43] Downes, J. e Goodman, J. (1985). *Dictionary of finance and investiment terms - Edição traduzida*. New York, Barron's Educational Series, Inc.

[44] Dubil , R. (2001). *How to include liquidity in a market VaR statistic*. Storrs.

[45] Dubil, R. (2002). *Optimal Liquidation of Large Security Holdings in Thin Markets*. Storrs.

[46] Duffie, D. e Ziegler, A. (2001). *Liquidation Risk*.

[47] Edirisinghe C., Naik V. e Uppal R. (1993). *Optimal Replication of Options with Transactions*. Washington, Journal of Financial and Quantitative Analysis

[48] Ericsson, J. e Renault, O. (2001). *Liquidity and credit risk. Working paper,* McGill University and Universite Catholique de Louvain.

[49] Erzegovesi, L. (2002). *VaR and Liquidity Risk*. Trento, Alea - Centro di Ricerca sui Rischi Finanziari.

[50] Esquível, M.L., Dimas, L.M. e Veiga, C.A. (2004). *Dynamical Value-at-Risk via Ito line integrals*. Proc. of Stoch. Finance 04, CIM and ISEG/UTL 2004. Lisboa.

[51] Evans, M. D. D., e R. K. Lyons (2002). *Time Varying Liquidity in Foreign Exchange*.

[52] Fernandez, F. (1999). *Liquidity Risk new Approaches to measurement and monitoring*. New York.

[53] Fisher, L. (1959). *Determinants of the risk premiums on corporate bonds.* Journal of Political Economy 67, 217–237.

[54] Fleming, M. J. (2003). *Measuring Treasury Market Liquidity.*

[55] Fleming, M., e Sarkar, A. (1999). *Liquidity in U.S. Treasury Spot and Futures Markets*. New York, Federal Reserve Bank of New York.

[56] François-Heude, A. e Van Wynendaele, P. (2001). *Integrating Liquidity Risk in a Parametric VaR Frameowork*. Cedex/Chaussée de Binche.

[57] Fuerst, T. (1992). *Liquidity, Loanable Funds, and Real Activity*. Journal of Monetary Economics 29, 3-24.

[58] Fujimoto, A. (2003). *Macroeconomic Sources of Systematic Liquidity.*

[59] Fukuta, Y. e Saito, M. (2001). *Forward Discount Puzzle and Liquidity Effects.* Kobe/Osaka.

[60] Gârleanu, N. e Pedersen, L. (2007). *Liquidity and Risk Management.* Philadelphia/New York.

[64] Gennotte G. e Leland H. (1990). *Market Liquidity, Hedging and Crashes.* Califórnia, The American Economic Review.

[65] Giot, P. e Grammig$f$, J. (2002). *How large is liquidity risk in an automated auction market?* Namur.

[66] Glosten, L. e Milgrom, P. (1984). *Bid, Ask and Transaction Prices in a Specialist Market*. Chicago/New Haven.

[67] Gonçalves, E. e Lopes, N. M. (1993). *Modelos GARCH e TARCH - Estacionaridade forte, estacionaridade fraca, ergodicidade e comportamento limite do agregado temporal.* Lisboa, Sociedade Portuguesa Matemática.

[68] Goyenko, R.Y., Holden, C.W. e Trzcinka, C.A. (2008). *Do Measures of Liquidity Measure Liquidity?* Indiana University.

[69] Halling, M., Pagano, M., Randl, O., Zechner, J., (2004). *Where is the Market? Evidence from Cross-Listings*. Vienna.

[70] Hasbrouck, J. e Seppi, D. (1998). *Common factors in prices, order flows and liquidity.* New York/Pittsburgh.

[71] Hayes, S. e Tennenbaum M. (1979). *The Impact of Listed Options on the Underlying Shares*. Financial Management v8: 72-76.

[72] Hisata, Y. e Yamai, Y. (2000). *Application of Liquidity Risk Evaluation Methods*. Japão.

[73] Hoggard T., Whalley E. e Wilmott P. (1994). *Hedging Option Portfolios in the Presence of Transaction Costs,* Adv. Fut. Opt. Res.

[74] Holl, T. e Winn, R. (1995). *Comparability of Different Measures of Liquidity on the Australian Stock Exchange.*

[75] Hollifield, B., Miller, R., Sandås, P. e Slive, J. (2002). *Liquidity Supply & Demand in Limit Order Markets.* London, Centre for Economic Policy Research.

[76] Houweling, P., Mentink, A. e Vorst, T. (2003). *How to Measure Corporate Bond Liquidity?* Roterdão, Tinbergen Institute.

[77] Hull, J. e A. White (2004). *How to Value Employee Stock Options, Financial* Analysts Journal, v60, 114-119.

[79] Jankowitscha, R., Nashikkara, A. e Subrahmanyama, M. (2008). *Price Dispersion in OTC Markets- A New Measure of Liquidity*. New York/Vienna.

[80] Jarrow R. (1992). *Market Manipulation Bubbles Corners and Short Squeezes*. New York, Journal of Financial and Quantitative Analysis

[81] Jarrow, R. e Protter, P. (2005). *Liquidity Risk and Risk Measure Computation.* New York.

[82] Johnson, T. C. (2006). *Volume, Liquidity, and Liquidity Risk.*

[83] Jones, C. M. (2002). *A Century of Stock Market Liquidity and Trading Costs.* Columbia University.

[84] Jorion, P. (2000). *Value-at-Risk.* McGraw-Hill.

[85] Júnior, R.P.L. (1990). *Dicionário de Termos Financeiros e de Negócios.* São Paulo.

[86] Juniper, J. (2000). *Changes in uncertainty aversion, liquidity preference and the stochastic process of asset prices in a financial market equilibrium.* Australia.

[87] Kato, F. (1999). *A Influência Da Liquidez No Valor Em Risco.* São Paulo.

[88] Keller, A., Rodrigues, B. e Stevenson, M. (2008). *The role of time, liquidity, volume and bid-ask spread on the volatility of the Australian equity market.*

[89] Kraus, T. e Zimmermann, H. (2001). *Stock Option Listings-Information versus Liquidity Effects.*

[90] Krishnan, H. (2003). *A liquidity haircut for Hedge Funds.*

[91] Krokhmal, P. e Uryasev, S. (2003). *A Sample-Path Approach To Optimal Position Liquidation.* Gainesville.

[92] Kumar, R., Sarin A. e Shastri K., (1998). *The Impact of Options Trading on the Market Quality of the Underlying Security: An Empirical Analysis*. Journal of Finance v52 n2: 717-732.

[93] Kyle, A.S. (1985). *Continuous auctions and insider trading.* Econometrica.

[94] Lanari, C. (2000). *O "Efeito Sorriso" da Volatilidade Implícita do Modelo de Black-Scholes.* Belo Horizonte.

[95] Le Saout, E. (2002). *Une Modélisation dynamique du Risque de Liquidité.*

[96] Le Saout, E. (2002). *Incorporating Liquidity Risk in VaR Models.* Paris.

[97] Lee, J. e Kim, S. (2008). *Numerical Solutions Of Option Pricing Model With Liquidity Risk.* Communications of the Korean Mathematical Society

[98] Lee, K. (2005). *The World Price of Liquidity Risk.*

[99] Leland H. (1985). *Option Pricing and Replication with Transactions Costs.* Califórnia, The Journal of Finance

[100] Lucas, R. (1990). *Liquidity and Interest Rates.* Journal of Economic Theory 50, 237-264.

[101] Machlup, F. (1932). *Machlup Liquidity of Short-Term Capital.* Vienna.

[102] Mahadevan, A. (2001). *Incorporating Liquidity Risk in VaR estimation.*

[103] Mahanti, S., Nashikkar, A., Subrahmanyam, M., Chacko, G. e Mallik, G. (2007). *Latent Liquidity.* New York, Journal of Financial Economics.

[104] Malinova, K. e Park, A. (2008). *Liquidity, Volume, and Price Behavior.* Toronto.

[105] Matos, J. e Antão, P. (2000). *Market Illiquidity and the Bid-Ask Spread of Derivatives.* Lisboa, Faculdade de Economia Universidade Nova de Lisboa

[106] Mayhew, S. e Mihov, V. (2000). *Another Look at Option Listing Effects.* Institute for Quantitative Research in Finance.

[108] Moore, M. e Roche, M. (2001). *Liquidity In Forex Markets.* Ireland, Elsevier - Journal of Empirical Finance.

[109] Morris, S. e Shin, H. (2004). *Liquidity Black Holes.* London, Kluwer Academic Publishers.

[110] Mota, P. P. (2008). *Brownian Motion with Drift Threshold Model.* PhD dissertation. FCT/UNL.

[111] Muranaga, J. e Ohsawa, M. (1997). *Measurement of liquidity risk in the context of market risk calculation.* Japão.

[112] Nashikkar, A., Subrahmanyam, M. e Mahanti, S. (2007). *Latent Liquidity and Corporate Bond Yield Spreads.*

[113] Pagano, M. (1989). *Trading volume and asset liquidity.* The Quarterly Journal of Economics, MIT Press.

[114] Rey, S., Fronti, J. e Casparri, M. (2003). *Liquidity Risk Estimation Using Fuzzy Measure Theory.* Buenos Aires.

[115] Robert, A. e Protter, P. (2005). *Introduction to Financial Asset Pricing.* New York.

[117] Schonbucher P. e Wilmott, P. (2000). *The Feedback Effect of Hedging in Illiquid Markets.* SIAM Journal of Applied Mathematics

[119] Schwarz, M. (2006). *Bid Ask Spreads and Market Microstructure.*

[120] Securato, J. (2003). *Risco de Liquidez.* São Paulo.

[121] Shamroukh, N. (2000). *Modeling Liquidity Risk In VaR Models.* United Kingdom.

[124] Subramanian, A. e Jarrow , R. (2001). *The liquidity Discount*. Oxford.

[125] Tobin, J. (1958). *Liquidity Preference As Behavior Towards Risk.* Cowles Foundation

[127] Vayanos, D. (2004). *Flight to Quality, Flight to Liquidity.* London.

[128] Vayanos, D. e Vila, J. (1998). *Transaction Costs and Asset Prices.*

[129] Vieira, K. M., Milach, F. T. e Pereira, B. A. D. (2007). *Medidas de liquidez. Brasil.*

[130] Viral, A. e Pedersen, L. (2003). *Asset Pricing with Liquidity Risk.* New York, Elsevier

[131] Yung, E. (1999). *Making a Scene.*

Sites e artigos consultados na internet

[132] 5 Steps To Understanding Volume And Liquidity. [Em linha]. Disponível em http://www.streetdirectory.com/travel_guide/print_article.php?articleId=37100. [Consultado em 01-06-2009].

[133] Banco de Portugal. [Em linha]. Disponível em http://www.bportugal.pt/. [Consultado regularmente desde 01-09-2007].

[134] Bank for International Settlements. [Em linha]. Disponível em http://www.bis.org/ [Consultado regularmente desde 26-11-2007].

[135] Bigonline [Em linha]. Disponível em http://www.bigonline.pt. [Consultado regularmente desde 17-05-2009].

[136] CMVM - Comissão do Mercado de Valores Mobiliários. [Em linha]. Disponível em http://www.cmvm.pt/cmvm. [Consultado regularmente desde 01-09-2007].

[137] Credifinance. [Em linha]. Disponível em http://www.credifinance.pt [Consultado em 11-07-2008].

[138] European Central Bank home page. [Em linha]. Disponível em http://www.ecb.int/home/html/index.en.html. [Consultado regularmente desde 01-09-2007].

[139] FTSE/XINHUA CHINA A50 INDEX. [Em linha]. Disponível em http://www.ftsexinhua.com/en/downloadcenter/downLoad_index_productinfo/FXI_A50_Index_Factsheet.pdf. [Consultado em 18-03-2008].

[140] GloriaMundi.org. [Em linha]. Disponível em http://www.gloriamundi.org/. [Consultado regularmente desde 01-09-2007].

[141] Glossário económico do Instituto Politécnico de Viseu. [Em linha]. Disponível em http://www.ipv.pt/econogloss/m.htm. [Consultado em 20-06-2008].

[142] Instituto de Gestão da Tesouraria e do Crédito Público, I.P. - "Glossário" [Em linha]. Disponível em http://www.igcp.pt/gca/?id=398. [Consultado em 17-05-2009].

[143] Investopedia. [Em linha]. Disponível em http://www.investopedia.com/?partner=fxweekly. [Consultado regularmente desde 01-09-2007].

[144] InvestorWords.com - Investing Glossary. [Em linha]. Disponível em http://www.investorwords.com/. [Consultado regularmente desde 01-09-2007].

[145] ISEG-Instituto Superior de Economia e Gestão. [Em linha]. Disponível em http://www.iseg.utl.pt/disciplinas/mestrados/dci/glossario.html. [Consultado em 20-08-2008].

[146] Liquidez analise o volume médio [Em linha]. Disponível em http://www.abepro.org.br [Consultado em 18-02-2009].

[147] Market Volume & Liquidity [Em linha]. Disponível em http://www.smartprofitsreport.com [Consultado em 18-02-2009].

[148] NYSE, New York Stock Exchange. [Em linha]. Disponível em http://www.nyse.com/ [Consultado regularmente desde 01-09-2007].

[149] Online Dictionary. [Em linha]. Disponível em http://www.thefreedictionary. com /. [Consultado em 01-09-2007].

[150] The Financial Times. [Em linha]. Disponível em http://www.ft.com/home /europe. [Consultado regularmente desde 01-09-2007].

[151] THINKfn. [Em linha]. Disponível em http://www.thinkfn.com. [Consultado regularmente desde 01-09-2007].

[152] Wikipédia. [Em linha]. Disponível em http://pt.wikipedia.org. [Consultado regularmente desde 01-09-2007].

[153] Wilmott | Serving The Quantitative Finance Community. [Em linha]. Disponível em http://www.wilmott.com/ [Consultado regularmente desde 01-09-2007].

Investigação em curso

[154] Rianço, N.M., Esquível, M.L., Mota, P.P. e Veiga, C.A. (2009). *On a Price-Liquidity Threshold Regime Switching Model*. Preprint submitted to Journal of Statistical Planning and Inference. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa (FCT/UNL), Portugal.