



JÉSSICA DE JESUS ASCENSÃO

Licenciatura em Matemática Aplicada à Gestão do Risco

CONTRIBUTOS DO VALOR DE SHAPLEY

MEDIÇÃO DO RISCO E CONSTITUIÇÃO DE CARTEIRA EM MERCADOS
COM TENDÊNCIA DISTINTA

MESTRADO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES
ESPECIALIDADE EM MATEMÁTICA FINANCEIRA COMPUTACIONAL

Universidade NOVA de Lisboa
Setembro, 2024

CONTRIBUTOS DO VALOR DE SHAPLEY

MEDIÇÃO DO RISCO E CONSTITUIÇÃO DE CARTEIRA EM MERCADOS COM
TENDÊNCIA DISTINTA

JÉSSICA DE JESUS ASCENSÃO

Licenciatura em Matemática Aplicada à Gestão do Risco

(pt)**Orientadora:** Doutora Marta Cristina Vieira Faias Mateus
Professora Associada do Departamento de Matemática, FCT-NOVA

Coorientador: Doutor Joaquim Amaro Graça Pires Faia e Pina Catalão Lopes
Professor Associado do Departamento de Matemática, FCT-NOVA

Júri

Presidente: Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível
Professor Associado com Agregação do Departamento de Matemática, FCT-NOVA

Arguente: Doutor Pedro José dos Santos Palhinhas Mota
Professor Associado do Departamento de Matemática, FCT-NOVA

Vogal: Doutora Marta Cristina Vieira Faias Mateus
Professora Associada do Departamento de Matemática, FCT-NOVA

MESTRADO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES
ESPECIALIDADE EM MATEMÁTICA FINANCEIRA COMPUTACIONAL

Universidade NOVA de Lisboa
Setembro, 2024

Contributos do valor de Shapley

Medição do risco e constituição de carteira em mercados com tendência distinta

Copyright © Jéssica de Jesus Ascensão, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Dedicatory lorem ipsum.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar a minha profunda gratidão a todos os docentes do Departamento de Matemática da Nova School of Science and Technology, pela formação e pelo apoio ao longo da minha jornada académica.

Aos meus orientadores, Marta Faias e Joaquim Pina, agradeço pela orientação valiosa, paciência e incentivo que me permitiram concluir este trabalho.

À minha mãe, Inês, que com o seu apoio incondicional tornou possível a continuação dos meus estudos, mesmo quando pensei que não iria conseguir terminá-los. Ao meu pai, que é a minha estrelinha, sei que está no céu a olhar por mim.

Ao António, pelo suporte constante e por estar sempre ao meu lado em todos os momentos.

Aos meus amigos e restante família, obrigado por todo o carinho e encorajamento que me ajudaram a chegar até aqui.

”

*«You cannot teach a man anything; you can only
help him discover it in himself.»*

— **Galileo**, Somewhere in a book or speech
(Astronomer, physicist and engineer)

RESUMO

O problema central abordado nesta tese reside nas limitações das medidas tradicionais de avaliação de risco associadas a ativos, por não capturarem adequadamente a contribuição individual de cada ativo para o risco total de uma carteira.

O desafio principal passou por desenvolver uma solução que permita uma decomposição de risco mais eficaz. Para tal, é proposta a utilização do valor de Shapley, um conceito da teoria dos jogos cooperativos, que permite definir as contribuições marginais justas de cada ativo para o risco total da carteira. Adicionalmente, estuda-se o uso do valor de Shapley para a escolha de carteiras.

Para a análise utilizou-se dados do mercado europeu de grandes empresas, pequenas e médias empresas, títulos corporativos, títulos do governo de curto e médio prazo e de longo prazo e obrigações do tesouro de longo prazo entre 2022 e 2023, dividindo-se a amostra em períodos *Bear* e *Bull* e estudou-se também a amostra completa sem diferenciar tendências.

A decomposição do risco da carteira utilizando o valor de Shapley mostrou que, nos períodos *Bear* e *Bull* os índices referentes a títulos corporativos (TC), ou seja, obrigações de empresas, e obrigações do Estado de curto e médio (TGCM) e de longo prazo (TGLP) contribuem para a redução do risco. Na amostra completa, os índices referentes a títulos do governo de curto e médio prazo e obrigações do tesouro de longo prazo são os principais redutores de risco, refletindo a importância de separar as análises entre as diferentes fases de mercado para uma avaliação mais precisa do risco. Também se verificou que alguns resultados obtidos para o valor de Shapley não coincidem com os obtidos para os betas, a métrica de risco standard, nos vários períodos.

A aplicação do valor de Shapley na construção de carteiras revelou-se útil na harmonização dos pesos de cada ativo, proporcionando equilíbrio do risco das carteiras e oferecendo proteção em períodos de queda de mercado. Contudo, esta estratégia por ser conservadora, limita os ganhos em períodos de alta, indicando que esta gestão equilibrada pode ser mais vantajosa em cenários de mercado adversos.

Palavras-chave: valor de Shapley, beta, decomposição do risco, escolha de portfólio

ABSTRACT

The central problem addressed in this thesis lies in the limitations of traditional risk assessment measures associated with assets, as they fail to adequately capture the individual contribution of each asset to the total risk of a portfolio.

The main challenge involved developing a solution that allows for a more effective risk decomposition. To this end, the use of the Shapley value, a concept from cooperative game theory, is proposed, as it allows for fair marginal contributions of each asset to the total risk of the portfolio. Additionally, the use of the Shapley value for portfolio selection is studied.

For the analysis, data from the European market were used, including large companies, small and medium-sized enterprises, corporate bonds, short- and medium-term government bonds, and long-term treasury bonds between 2022 and 2023. The sample was divided into *Bear* and *Bull markets*, and the full sample was also studied without distinguishing market trends.

The risk decomposition of the portfolio using the Shapley value showed that, during the *Bear* and *Bull markets*, the indices related to corporate bonds (TC) and short-term and medium-term (TGCMP) and long-term (TGLP) government bonds contributed to risk reduction. In the full sample, the indices related to short- and medium-term government bonds and long-term treasury bonds were the main risk reducers, reflecting the importance of separating the analyses across different market phases for a more accurate risk assessment. It was also found that some results obtained using the Shapley value did not align with those obtained using betas, the standard risk metric, across the various periods.

The application of the Shapley value in portfolio construction proved useful in harmonizing the weights of each asset, balancing portfolio risk and providing protection during market downturns. However, this strategy, being conservative, limits gains in periods of market upswings, indicating that this balanced management may be more advantageous in adverse market scenarios.

Keywords: Shapley value, beta, risk decomposition, portfolio choice

ÍNDICE

Índice de Figuras	xv
Índice de Tabelas	xvii
1 Introdução	1
2 Revisão da Literatura	5
3 Metodologia	9
3.1 Modelo CAPM	9
3.1.1 Estrutura do Modelo	9
3.1.2 Fronteira eficiente	11
3.1.3 Pressupostos do Modelo CAPM	12
3.1.4 Resultados CAPM	13
3.2 Medidas de Medição de Risco e Performance de Carteira	14
3.2.1 VaR - Value at Risk	14
3.2.2 Rácio de Sharpe	16
3.3 Valor de Shapley	16
4 Dados, factos essenciais e <i>software</i>	19
4.1 Descrição dos Dados	19
4.2 Factos Essenciais	21
4.3 Software R	25
5 Decomposição do risco da carteira	27
5.1 Procedimentos de Cálculo	27
5.1.1 Carteira de variância mínima - MVP	28
5.1.2 Portfólios ótimos na fronteira eficiente	29
5.2 Resultados e Discussão	30
5.2.1 1º Período - <i>Bear Market</i>	30

5.2.2	2º Período - <i>Bull Market</i>	36
5.2.3	Amostra Total	41
6	Escolha de carteira utilizando o valor de Shapley	49
6.1	Método	49
6.2	Resultados e Discussão	50
6.2.1	1º Período - <i>Bear Market</i>	51
6.2.2	2º Período - <i>Bull Market</i>	53
6.2.3	Amostra Total	55
7	Conclusão	59
	Bibliografia	63

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1	<i>Capital Market Line</i>	13
3.2	<i>Security Market Line</i>	14
4.1	<i>Gráfico STOXX Europe 600</i>	21
5.1	Fronteira Eficiente referente ao período 1º Período - <i>Bear Market</i>	32
5.2	Fronteira eficiente referente ao 1º período (<i>Bear Market</i>), com os portfólios a estudar.	34
5.3	Fronteira Eficiente referente ao 2º período - <i>Bull Market</i>	37
5.4	Fronteira Eficiente referente ao 2º período (<i>Bull Market</i>), com os portfólios a estudar.	39
5.5	Fronteira Eficiente referente à <i>Amostra Total</i>	42
5.6	Fronteira Eficiente referente à <i>Amostra Total</i> com as carteiras a analisar. . . .	44

ÍNDICE DE TABELAS

4.1	Estatísticas Descritivas da Amostra.	22
4.2	Rentabilidades mínimas e máximas dos dados.	23
5.1	Covariância entre o índice i e a carteira de mercado e β de mercado dos índices no 1º Período - <i>Bear Market</i>	31
5.2	Pesos, β , ϕ , valor de Shapley e valor de Shapley normalizado na MVP (1º Período - <i>Bear Market</i>).	32
5.3	Pesos, β , ϕ , valor de Shapley e valor de Shapley normalizado nos 3 portfólios da fronteira eficiente (1º Período - <i>Bear Market</i>).	34
5.4	Covariância entre o índice i e a carteira de mercado e β de mercado dos índices no 2º Período - <i>Bull Market</i>	36
5.5	Pesos, β , ϕ , valor de Shapley e valor de Shapley normalizado na MVP (2º Período - <i>Bull Market</i>).	38
5.6	Pesos, β , ϕ , valor de Shapley e valor de Shapley normalizado nos 3 portfólios da fronteira eficiente (2º Período - <i>Bull Market</i>).	39
5.7	Covariância entre o índice i e a carteira de mercado e β de Mercado dos índices na <i>Amostra Total</i>	41
5.8	Pesos, β , ϕ , valor de Shapley e valor de Shapley normalizado na MVP (<i>Amostra Total</i>).	43
5.9	Pesos, β , ϕ , Valor de Shapley e Valor de Shapley normalizado nos 3 portfólios da fronteira eficiente (<i>Amostra Total</i>).	44
5.10	Resultados Shalit (2021) vs Resultados com dados europeus.	46
6.1	Pesos dos índices nas carteiras: 1º Período - <i>Bear Market</i>	51
6.2	Indicadores de performance de carteira: 1º Período - <i>Bear Market</i>	52
6.3	Pesos dos índices nas carteiras: 2º Período - <i>Bull Market</i>	53
6.4	Indicadores de performance de carteira: 2º Período - <i>Bull Market</i>	54
6.5	Pesos dos índices nas carteiras - <i>Amostra Total</i>	56
6.6	Indicadores de performance de carteira - <i>Amostra Total</i>	57

INTRODUÇÃO

A decomposição do risco de um portfólio é crucial para os investidores, pois permite uma compreensão mais detalhada das contribuições individuais de cada ativo para o risco total da carteira. Este tipo de análise ajuda a identificar quais são os ativos que mais contribuem para o aumento ou redução do risco, permitindo uma melhor alocação dos ativos. Ao realizar esta decomposição, os investidores podem ajustar o retorno esperado com a exposição ao risco, otimizando assim a construção de portfólios alinhados com os seus objetivos financeiros, viabilizando um crescimento sustentável do investimento a longo prazo.

A teoria moderna do portfólio desenvolvida pelo economista Markowitz (1952), assenta na diversificação, ou seja, investir em diferentes instrumentos financeiros que não estejam fortemente correlacionados para otimizar o retorno e reduzir o risco. Este conceito levou a que os investidores analisassem de que forma é que os títulos se afetam mutuamente dentro de uma carteira. Para esta análise, são utilizadas medidas padrão como a correlação, que avalia a relação linear padronizada entre as variações dos preços dos ativos, indicando tanto a direção quanto a intensidade dessa relação, a covariância, que mede a tendência dos ativos de variar simultaneamente, sem padronização, focando-se apenas na direção desses movimentos (se é conjunta ou oposta), e o beta de mercado, que mede a sensibilidade de um ativo em relação às oscilações do mercado como um todo.

Apesar de existirem várias medidas que permitem avaliar o risco associado aos ativos, estas medidas padrão apresentam diversas lacunas na verdadeira contribuição do risco do título para uma carteira. Pode-se verificar que as medidas de risco total, como a variância e o desvio-padrão, apresentam o risco de forma isolada, não refletindo as vantagens de diversificação de um portfólio. O beta de mercado, apesar de cobrir questões relacionadas com a diversificação e permitir a construção de um portfólio eficiente, também não é a medida mais adequada, pois relaciona o risco de um ativo com a carteira de mercado, não considerando a carteira onde esse ativo será adicionado ou excluído. Para além disso, apenas é considerado a atribuição de risco no portfólio final e não em todos os portfólios

possíveis nos quais o ativo pode ser incluído. As falhas apresentadas abrem espaço para novas propostas de medidas de risco, mais concretamente medidas que reflitam de forma mais precisa a verdadeira contribuição de um ativo para o risco de uma carteira.

A nova medida que vamos considerar e que permite responder às limitações apresentadas pelas medidas padrão passa pela utilização do valor de Shapley, conceito desenvolvido por Shapley (1953), no contexto de teoria de jogos cooperativos. O valor de Shapley é um conceito que atribui a cada jogador de uma coligação (um grupo de jogadores que se unem para alcançar um objetivo comum, combinando os seus recursos) o valor justo da sua contribuição para o sucesso coletivo. O valor de Shapley é calculado como a média ponderada das contribuições marginais de um jogador em todas as possíveis ordens de entrada na coligação. Este resultado é amplamente utilizado para distribuir ganhos ou custos entre os participantes de uma forma justa, considerando o impacto de cada um na realização do objetivo do grupo.

Um portfólio pode ser visto como um jogo cooperativo, onde os jogadores são os ativos e o objetivo é maximizar o retorno esperado ou minimizar o risco associado. Tendo esta ideia em mente, a aplicação do valor de Shapley para avaliar a contribuição de risco de cada ativo numa carteira torna-se mais realista, visto que o valor de Shapley considera a média das contribuições marginais de cada ativo à medida que se juntam às diferentes coligações, ou seja, às diferentes carteiras. Desta forma, os investidores conseguem determinar o verdadeiro impacto de inclusão ou exclusão de um ativo no seu portfólio.

O estudo desenvolvido nesta tese, tem como motivação inicial a análise realizada por Shalit (2021), mas no contexto do mercado europeu, onde se utilizou dados referentes a grandes empresas, pequenas e médias empresas, títulos corporativos, títulos do governo de curto e médio prazo e de longo prazo e obrigações do tesouro de longo prazo. Estes dados são similares à análise de Shalit (2021), com o objetivo de se comparar os resultados entre ambos os estudos. Neste trabalho, não só é utilizado o valor de Shapley na decomposição do risco de uma carteira, como também é utilizado como uma nova ferramenta de construção de carteiras, permitindo uma alocação de ativos mais harmonizada, abordada por Simonian (2019).

O principal objetivo desta dissertação é fazer uma avaliação mais completa do impacto de cada ativo para o risco total de uma carteira, utilizando o valor de Shapley. A análise convencional de risco, que se baseia na variância, correlação e beta de mercado, não consegue abranger totalmente as interações complexas entre os ativos num portfólio diversificado. O valor de Shapley, ao decompor o risco total de um portfólio em contribuições individuais mais precisas, proporciona assim uma melhor forma de avaliar o impacto real de cada ativo na decomposição do risco do portfólio. Adicionalmente, é estudado o uso do valor de Shapley para a constituição de carteira, isto é, para a determinação de pesos dos ativos.

Uma das principais contribuições deste estudo é a análise aprofundada no sentido de investigar o papel desta medida quando o mercado se encontra numa tendência *Bull* versus *Bear*. A forma como o risco se manifesta pode variar significativamente, dependendo do ambiente económico. O valor de Shapley também permite capturar estas nuances ao identificar como cada ativo aumenta ou mitiga o risco em condições de mercado distintas. Esta análise oferece informações úteis para gestores de portfólio que pretendem melhorar as suas estratégias de alocação de ativos em diversas situações económicas. Através desta abordagem mostrou-se que nos períodos *Bear* e *Bull* os índices referentes a títulos corporativos e títulos do governo contribuem para a redução do risco. Já no período total, os índices referentes a títulos do governo de curto e médio prazo e obrigações do tesouro de longo prazo são os principais redutores de risco. Também se verificou contradições de resultados utilizando o valor de Shapley e a medida tradicional nos vários períodos.

Além disso, este estudo investiga a utilização prática do valor de Shapley na formação de portfólios. Ao incorporar esta métrica na seleção e alocação de ativos, é possível construir portfólios mais robustos, que distribuem de forma equilibrada os investimentos, ajustando-se de maneira mais eficaz às dinâmicas do mercado. A utilização do valor de Shapley na construção de carteiras representa um avanço significativo na área de gestão de investimentos, oferecendo uma ferramenta valiosa para a criação de portfólios mais eficazes. Com a aplicação deste novo método, comprovou-se um melhor equilíbrio dos pesos dos instrumentos financeiros nas diversas carteiras analisadas, traduzindo-se em portfólios mais bem diversificados. Contudo, apenas em períodos *Bear* consegue-se obter melhores performances de portfólio, visto que esta metodologia limita os ganhos em tempos *Bull* devido à suavização dos pesos de ativos mais arriscados.

A tese está organizada da seguinte forma. No **Capítulo 1** apresenta-se a motivação do estudo, os objetivos e as principais contribuições. No **Capítulo 2** identifica-se a revisão da literatura existente, abordando os estudos realizados sobre este tema. No **Capítulo 3** introduz-se os modelos matemáticos usados para construir portfólios eficientes, e quais são as bases teóricas para o uso do valor de Shapley. No **Capítulo 4** detalha-se e analisa-se os dados utilizados no estudo. No **Capítulo 5**, são discutidos os resultados da aplicação do valor de Shapley na decomposição do risco de portfólios. O **Capítulo 6** explora como esta medida pode ser usada na construção de portfólios mais eficientes. Por último, o **Capítulo 7** apresenta as conclusões do trabalho e sugere direções para futuras pesquisas.

REVISÃO DA LITERATURA

O valor de Shapley é um conceito da Teoria de Jogos com Utilidade Transferível (TU) assente nas propriedades de eficiência, simetria, anulação do jogador nulo e aditividade. Este resultado permite distribuir os ganhos de um jogo de forma justa pelos seus jogadores. Devido à sua importância, estão a ser utilizadas novas abordagens deste conceito, nomeadamente a aplicação às finanças e recentemente a utilização na teoria de investimentos mais concretamente na decomposição do risco de uma carteira.

Ao longo dos anos, tem existido um contínuo estudo sobre a aplicação do valor de Shapley na otimização de carteiras, oferecendo uma abordagem inovadora a este conceito da teoria de jogos. Este capítulo apresenta de que forma o valor de Shapley tem sido utilizado para melhorar a gestão de carteiras, destacando os principais estudos e avanços nesta área.

Um dos primeiros estudos realizados utilizando o valor de Shapley, não se focando apenas na teoria de jogos, foi divulgado por Shorrocks (1999), cujo objetivo passava por criar um modelo geral para avaliar as contribuições de um conjunto de fatores que, em conjunto, explicam o valor observado de uma estatística agregada. O valor de Shapley, por ser um conceito com características simples foi o utilizado para gerar este modelo, que pode ser aplicado a vários problemas de diversas áreas, principalmente a qualquer problema económico de forma a complementar as medidas padrão já existentes.

Decomposição do risco da carteira

Mussard e Terraza (2006), a partir da fórmula da variância de um portfólio, derivaram o risco sistemático e o risco entre títulos. Aplicando o resultado obtido por Shorrocks (1999), concluiu-se que, ao decompor o risco sistemático e o risco entre títulos utilizando o valor de Shapley, é possível determinar a contribuição de um título específico para o risco de uma carteira. Consequentemente, surgem novos indicadores de risco: a contribuição relativa de um ativo para o risco sistemático, a contribuição relativa de um ativo para

o risco específico e a contribuição relativa de um ativo para o risco total da carteira. A metodologia desenvolvida é uma forma mais eficiente e justa de atribuir o risco entre os ativos, pois o valor de Shapley proporciona uma distribuição adequada do risco ao considerar todas as combinações possíveis entre os ativos.

Posteriormente, Ortmann (2016) desenvolve um jogo cooperativo de forma a relacionar o valor de Shapley com o beta do modelo CAPM, proporcionando uma interpretação de alocação justa do risco de mercado. Com este estudo, existe uma ampliação da análise tradicional do beta de mercado.

Após a publicação destes estudos pioneiros, houve um aumento no número de estudos utilizando estas abordagens. Haim Shalit, apresenta diversos trabalhos onde aplica o valor de Shapley no contexto dos mercados financeiros:

- Shalit (2020b) aplica o valor de Shapley na otimização de portfólios, onde são utilizadas regressões de mínimos quadrados ordinários (OLS) para construir portfólios ótimos. A principal vantagem desta abordagem é que se baseia nos retornos observados para determinar os pesos ótimos dos ativos, eliminando a necessidade de estimar a matriz de variância-covariância e os retornos esperados, como é requerido no modelo de otimização de Markowitz (1952), evitando assim erros de amostragem na fronteira eficiente. Aplicando o valor de Shapley, Shalit consegue decompor o risco e retorno das carteiras, oferecendo um método preciso para alocar o valor a cada ativo com base na sua contribuição única. Concluindo que o valor de Shapley fornece uma medida mais abrangente e imparcial para o apreçamento de ativos e avaliação de risco em comparação com os métodos tradicionais, permitindo que os investidores tomem decisões mais bem informadas sobre alocação de ativos e gestão de portfólios.
- Shalit (2020a) utiliza o valor de Shapley na decomposição do risco sistemático de um portfólio permitindo obter a contribuição de cada ativo para o risco da carteira. Para esta análise, o jogo traduz-se em considerar os portfólios como jogos cooperativos, onde os ativos são os jogadores que têm como objetivo minimizar o risco dado um determinado retorno. Esta abordagem é mais vantajosa, uma vez que o β tradicional que mede a sensibilidade de retornos de ativos em relação aos retornos de mercado não é suficiente para avaliar o verdadeiro risco de um ativo num portfólio bem diversificado. Utilizando este método é possível obter a verdadeira contribuição de um ativo quando é adicionado ou removido de um portfólio, pois o valor de Shapley é calculado através das médias das contribuições marginais de ativos na entrada de portfólios específicos e considera todas as coligações possíveis de formar uma carteira. Ao comparar os resultados obtidos utilizando o valor de Shapley com a medida tradicional, Shalit conclui que este modelo beneficia mais a otimização

de portfólios do que a análise do risco sistemático, visto que permite analisar a contribuição de cada título para todas as possíveis coligações de carteira.

- Shalit (2021) aborda a decomposição do retorno e risco (medido pela variância) de uma carteira em contribuições individuais de cada ativo utilizando o valor de Shapley. O método utilizado passa por assumir que os ativos são os jogadores, no contexto da teoria de jogos, de seguida calcula a variância de todas as combinações possíveis de ativos e posteriormente aplica-as na fórmula do valor de Shapley, obtendo assim a contribuição de risco para cada ativo na carteira. Este novo método, permite entender melhor o impacto de alterações na composição da carteira, visto que cada ativo é avaliado pelo seu próprio desempenho e da forma como interage com outros ativos.
- Shalit (2023) tem como inovação a extensão do valor Shapley para valores de Shapley ponderados. A nova metodologia é útil em situações onde a simetria entre os ativos, ou seja, os jogadores no contexto de teoria de jogos, não pode ser justificada. Aplicando este método a carteiras eficientes de média-variância e calculando os valores Shapley ponderados e os valores Shapley tradicionais, conclui que o uso de valores de Shapley ponderados pode oferecer uma visão mais detalhada da contribuição de cada ativo para o desempenho da carteira.

Na teoria de investimentos, o que é esperado é que ativos com uma menor rentabilidade apresentem um menor risco, no entanto nem sempre se verifica esta situação dando origem ao problema de “low-risk puzzle”. Uma das causas pode ser a utilização de medidas, como o beta de mercado e o desvio-padrão, que refletem como um ativo contribui para o risco de uma carteira que não é relevante numa perspetiva prática. Perante este problema, Auer e Hiller (2018) dão início a um estudo, onde sugerem que o valor de Shapley é uma medida mais adequada, visto que este conceito considera todas as coligações possíveis de ativos numa carteira e permite que os investidores saibam o que acontece no seu portfólio quando existe a adição/ exclusão de ativos. Neste artigo, através de simulações, os autores provam que ao usar valores de Shapley, as classificações de risco dos ativos podem ser corrigidas parcialmente ou completamente, especialmente em ambientes onde a diversificação é possível devido à correlação negativa entre os ativos. No entanto, em ambientes com correlação média positiva, como índices de ações de alta capitalização de mercado, o enigma de “low-risk puzzle” persiste mesmo com a utilização de valores de Shapley. Hiller (2023) propõe uma nota a este artigo, onde comprova que o valor de Shapley permite ajustar as classificações de risco dos ativos num portfólio com base em novas informações ou mudanças nas condições de mercado, ou seja, corrigir os rankings de risco dos ativos.

O risco de um portfólio também pode estar associado a outros fatores, como a atribuição de desempenho a algumas indústrias e não só a fatores como o beta de mercado ou

até mesmo a volatilidade. Desta forma, surge a necessidade de entender que tipo de fator contribui mais para o risco. Moehle et al. (2021) aplica o valor de Shapley na decomposição do desempenho de uma carteira em contribuições específicas de cada fator, sendo os fatores estilos de investimento, indústrias, classes de ativos, etc. O método passa por criar um processo de investimento, formando primeiro os vários subconjuntos possíveis de fatores e depois calcula a contribuição de cada fator para cada subconjunto. O cálculo do valor de Shapley é a média ponderada das contribuições marginais de uma característica em todos os subconjuntos possíveis e esta abordagem permite uma análise detalhada de quais são os fatores que geram valor ou risco no portfólio, visto que este conceito de teoria de jogos proporciona uma distribuição mais justa e equitativa.

Seleção de carteira

Uma outra aplicação para o valor de Shapley no campo dos investimentos é na escolha de carteiras. Simonian (2019) aborda uma nova aplicação do valor de Shapley na construção de carteiras eficientes. Neste estudo existem duas abordagens de utilização do valor de Shapley. Na primeira o conceito é utilizado para combinar os pesos de alocação gerados pelo método tradicional de seleção de carteira, visando criar uma alocação robusta que permita harmonizar os pesos dos ativos. Na segunda abordagem, é proposta uma nova técnica de seleção de portfólio, chamada de "jogo de otimização", onde cada ativo pretende maximizar um retorno ou utilidade específico resultando numa solução satisfatória para a carteira.

Atualmente, os temas de sustentabilidade e responsabilidade social apresentam um maior impacto e atenção da população. Morelli (2023) considera também as questões de responsabilidade social corporativa, ou seja, aspetos não financeiros das empresas, em métodos de seleção de portfólio, para além da ideia base de diversificação de portfólio sugerida por Markowitz. A metodologia passa por agrupar as empresas pelo seu índice ambiental, construir carteiras que minimizem o CVaR e calcular o valor de Shapley para cada carteira, tendo como resultado a contribuição das empresas para o bem-estar público em termos de exposição ao risco de mercado de cauda e à necessidade de comprometimento ambiental para mitigá-lo.

Neste estudo, seguiu-se as abordagens propostas por Shalit (2021) e Simonian (2019), uma vez que se trata de métodos inovadores tanto na decomposição de risco de uma carteira, como na construção de novos portfólios eficientes.

METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentamos os modelos utilizados para abordar o nosso problema.

3.1 Modelo CAPM

O CAPM - Capital Asset Pricing Model foi desenvolvido por Sharpe (1964), John Lintner e Jan Mossin e foi proposto independentemente no início da década de 1960. Este modelo estabelece uma relação entre o retorno esperado de um ativo e o risco sistemático (ou risco de mercado), proporcionando uma estrutura para avaliar o preço de ativos financeiros em função do seu risco e do prémio de risco de mercado.

3.1.1 Estrutura do Modelo

Consideramos n ativos:

$$\begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \mu$$

com retornos $r_i, i = 1, \dots, n$, onde $r_i = \frac{P_{t(i)} - P_{t-1(i)} + D_{t(i)}}{P_{t-1(i)}}$, sendo $P_{t(i)}$ o preço do instrumento financeiro i no momento t e $D_{t(i)}$ os dividendos, ou os juros pagos ao detentor do título no momento t . Denotamos por $E(r_i)$ o retorno esperado do ativo i , ou seja, μ_i .

Denote-se a variância do ativo i por σ_i^2 para $i = 1, \dots, n$, e a covariância entre o ativo i e o ativo j por σ_{ij} para $i, j = 1, \dots, n$ e $i \neq j$. A matriz de variância-covariância denota-se por Σ e define-se da seguinte forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Seja $\mathbf{w}' = (w_1, \dots, w_i, \dots, w_n)$ o vetor com as proporções que se investem em cada ativo, ou seja, w_i é a proporção investida no ativo i , com $i = 1, \dots, n$, e $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. A rentabilidade de uma carteira p com n ativos é dada por: $r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \dots + w_n r_n$. Logo, o seu retorno esperado é dado pela seguinte expressão:

$$E(r_p) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \dots + w_n E(r_n) = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 + \dots + w_n \mu_n = \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} \quad (3.1)$$

A variância da carteira p é dada por:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (3.2)$$

Se admitirmos que os n ativos são independentes, então a covariância entre dois ativos é zero, o que nos leva a concluir que se diversificarmos o nosso portfólio o risco diminuí consideravelmente.

Se considerarmos uma carteira p com $n = 3$ ativos, então pode-se reescrever a sua variância da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j \sigma_{ij} = \\ &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_1 w_2 \sigma_{12} + w_1 w_3 \sigma_{13} + w_2 w_1 \sigma_{12} + w_2^2 \sigma_2^2 + w_2 w_3 \sigma_{23} + w_3 w_1 \sigma_{13} + w_3 w_2 \sigma_{23} + w_3^2 \sigma_3^2 = \\ &= w_1 \underbrace{(w_1 \sigma_1^2 + w_2 \sigma_{12} + w_3 \sigma_{13})}_{\sigma_{1p}} + w_2 \underbrace{(w_1 \sigma_{12} + w_2 \sigma_2^2 + w_3 \sigma_{23})}_{\sigma_{2p}} + w_3 \underbrace{(w_1 \sigma_{13} + w_2 \sigma_{23} + w_3 \sigma_3^2)}_{\sigma_{3p}} = \\ &= w_1 \sigma_{1p} + w_2 \sigma_{2p} + w_3 \sigma_{3p} \end{aligned} \quad (3.3)$$

De notar que se o portfólio contiver n ativos, então a equação (3.2) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = w_1 \sum_{j=1}^n w_j \sigma_{1j} + \dots + w_i \sum_{j=1}^n w_j \sigma_{ij} + \dots + w_n \sum_{j=1}^n w_j \sigma_{nj}$$

O termo genérico da última igualdade pode-se reescrever como,

$$w_i \sum_{j=1}^n w_j \sigma_{ij} = w_i \text{cov}(r_i, \sum_{j=1}^n w_j r_j) = w_i \text{cov}(r_i, r_p) = w_i \sigma_{ip}$$

No caso geral de um portfólio com n ativos tem-se que a equação (3.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma_p^2 = w_1 \sigma_{1p} + \dots + w_i \sigma_{ip} + \dots + w_n \sigma_{np}$$

Desta forma, observa-se que a variância da carteira p se pode decompor numa soma ponderada das covariâncias de cada ativo com a carteira p , sendo os ponderadores a proporção investida em cada ativo da carteira.

De acordo com a teoria standard a parcela $w_i \sigma_{ip}$ define a contribuição do risco do ativo i para a carteira p . Normalizando o risco interpreta-se $\phi_i \times 100\%$ como a contribuição percentual do ativo i para o risco da carteira, onde

$$\phi_i = w_i \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p^2} = w_i \beta_i \quad (3.4)$$

A medida ϕ_i permite avaliar a contribuição do ativo i para o risco da carteira, mas não considera todos os impactos em termos de risco que o ativo gera para a carteira, tendo em conta que as parcelas $\phi_j, j \neq i$ também incluem termos de covariância com o ativo i .

3.1.2 Fronteira eficiente

A teoria moderna de portfólio desenvolvida por Markowitz (1952), tem como base a diversificação, ou seja, investir em diferentes instrumentos financeiros que não estejam fortemente correlacionados, de forma a otimizar o retorno ajustado ao risco.

Definição: uma carteira é eficiente quando apresenta a menor variância para um dado nível de retorno esperado, e quando possui o maior retorno esperado dado o risco.

Um portfólio pertence à fronteira eficiente se for solução do seguinte problema quadrático:

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} \\ \text{s.a.} & \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} = \mu_p \\ & \mathbf{w}' \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

sendo $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ uma matriz de $n \times 1$.

A solução deste problema define a composição da carteira de menor variância com rentabilidade esperada μ_p e é obtida através da seguinte função Lagrangiana,

$$L(w, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2} \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} + \lambda (\mu_p - \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu}) + \gamma (1 - \mathbf{w}' \mathbf{1}),$$

onde λ e γ são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições.

Tendo como solução:

$$\mathbf{w}^* = \frac{C\mu_p - A}{D}\Sigma^{-1}\mu + \frac{B - A\mu_p}{D}\Sigma^{-1}\mathbf{1},$$

sendo

$$A = \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mu, \quad B = \mu'\Sigma^{-1}\mu, \quad C = \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1} \quad e \quad D = BC - A^2. \quad (3.5)$$

Considerando r_{p^*} o retorno da carteira $\mathbf{w}^*$, ou seja, $E[r_{p^*}] = \mathbf{w}^{*'}\mu$. Então

$$\sigma_{p^*}^2 = \frac{C}{D} \left(\mu_{p^*} - \frac{A}{C} \right)^2 + \frac{1}{C} \quad (3.6)$$

A linha no espaço (σ_p, μ_p) que satisfazem a equação prévia contém a fronteira eficiente e tem como gráfico uma hipérbole. O vértice da hipérbole corresponde à carteira de variância mínima que tem retorno esperado e variância definidos pelas expressões,

$$E[r_{MVP}] = \frac{A}{C} \quad e \quad \sigma_{MVP}^2 = \frac{1}{C}$$

As carteiras que satisfazem $E(r_p) \geq \frac{A}{C}$ definem a fronteira eficiente. Podemos encontrar a solução deste problema em Huang e Litzenberger (1988).

3.1.3 Pressupostos do Modelo CAPM

Para a construção e aplicação eficaz deste modelo, é necessário estabelecer certos pressupostos fundamentais que fornecem a base teórica para a sua validade e utilidade, como referido por Huang e Litzenberger (1988).

O primeiro é que os investidores tomam as suas decisões apenas com base na rentabilidade esperada e variância, esta análise é válida se a rentabilidade da carteira apresentar uma distribuição normal.

O segundo pressuposto é que todos os indivíduos têm a mesma informação sobre o comportamento dos ativos, logo o conjunto de carteiras eficientes é igual para todos os investidores.

O terceiro pressuposto é que é possível emprestar ou pedir emprestado qualquer montante a uma taxa de juro igual à taxa do ativo sem risco, ou seja, existe um ativo sem risco e podem realizar *short-sales* desse ativo.

A partir destes pressupostos verifica-se que todos os investidores vão distribuir a sua riqueza entre um ativo sem risco com rentabilidade, r_f , e uma carteira M que contém os

ativos com risco, variando apenas a proporção da riqueza que investem no ativo sem risco e na carteira M . Esta proporção depende das preferências dos investidores. O portfólio M é a carteira de mercado, visto que todos os investidores têm expectativas idênticas, logo, todos os investidores escolhem a mesma carteira de ativos com risco. Por sua vez, em equilíbrio, essa carteira é a carteira de mercado.

3.1.4 Resultados CAPM

Um dos resultados que se obtém a partir do CAPM indica a relação entre o risco de carteiras eficientes e a sua rentabilidade esperada é a reta *Capital Market Line* (CML) representada no espaço $(\sigma, E(r))$. Esta reta mostra que existe uma relação linear entre a rentabilidade esperada de uma carteira eficiente e o seu risco. A sua equação é:

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_p$$

onde r_M é a rentabilidade da carteira de mercado e σ_M é o desvio-padrão da carteira de mercado.

Na figura 3.1 representamos a reta *Capital Market Line* e a região das carteiras de ativos com risco no plano $(\sigma_p, E(r_p))$. O declive da CML $\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M}$ indica o *trade-off* entre a rentabilidade e o risco e é designado por rácio de Sharpe para a carteira de mercado.

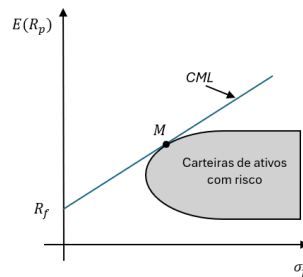


Figura 3.1: *Capital Market Line*

Um segundo resultado do CAPM estabelece a relação entre a rentabilidade esperada de um ativo e a sua covariância com a carteira de mercado e é definido pela equação seguinte:

$$E(r_i) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2} \sigma_{iM}.$$

A partir desta última equação, obtém-se o parâmetro $\beta_{M(i)} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ que permite medir a sensibilidade do ativo i às variações na rentabilidade da carteira de mercado. Através do beta de mercado do ativo i , consegue-se deduzir que o beta de uma carteira p é dado por $\beta_p = \sum_{i=1}^n w_i \beta_{M(i)}$. Com este resultado, obtém-se a reta *Security Market Line* (SML) que é representada no espaço $(\beta, E(r))$ e que relaciona a rentabilidade esperada de uma carteira

com prémio de risco, $E(r_M) - r_f$, e a sua covariância com a carteira de mercado. A sua expressão é:

$$E(r_p) = r_f + \beta_p[E(r_M) - r_f] \quad (3.7)$$

e está representada na figura 3.2.

O parâmetro β_p é um parâmetro de risco que mede a covariância dos retornos da carteira com a carteira de mercado. Destacando-se as seguintes situações:

- $\beta_p > 1$: A carteira p é mais volátil que a carteira de mercado, logo quando estivermos perante um *Bull Market*, ou seja, os preços das ações estão a subir, a carteira p terá uma maior rentabilidade, no entanto quando houver uma queda, ou seja, estivermos perante um *Bear Market* a perda da carteira é superior à perda da carteira de mercado.
- $\beta_p = 1$: A carteira p apresenta uma volatilidade semelhante à da carteira de mercado, por conseguinte ambas as carteiras têm a mesma rentabilidade esperada.
- $\beta_p < 1$: A carteira p apresenta um menor risco do que a carteira de mercado, consequentemente o seu retorno esperado é mais contido.
- $\beta_p < 0$: Os retornos da carteira p comportam-se de forma inversa que os retornos da carteira de mercado.

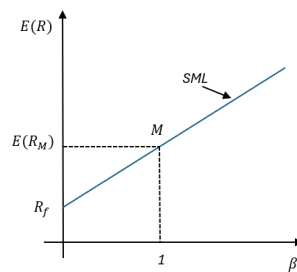


Figura 3.2: Security Market Line

3.2 Medidas de Medição de Risco e Performance de Carteira

3.2.1 VaR - Value at Risk

A medida VaR é um indicador de grande importância na área das finanças que ajuda a determinar a perda máxima de uma carteira de investimentos ou empresa dentro de um determinado tempo e com um certo grau de confiança. O índice ganhou notoriedade e aceitação generalizada em 1996, sendo o primeiro modelo de VaR consolidado e amplamente aceite desenvolvido por J. P. Morgan e por Jorion (1997). O desenvolvimento marcou um marco importante na gestão do risco financeiro que permitiu às instituições financeiras e às empresas adotar uma abordagem padronizada na medição e gestão dos

riscos relacionados com o mercado.

Existem diversas metodologias de cálculo do VaR, sendo uma delas o VaR Histórico. Para este cálculo é necessário recolher dados históricos de preços ou retornos dos ativos, calcular os retornos na medida de tempo que mais se adequa (diários, semanais, ...) e por último identificar o retorno no nível de confiança desejado (por exemplo, para um nível de confiança de 95%, identificar o 5º percentil da distribuição de retornos). A fórmula desta medida é a seguinte:

$$VaR_{\alpha} = Percentil_{\alpha}(Retornos\ Históricos).$$

Uma das principais vantagens deste método é o facto de não assumir distribuições específicas dos retornos, como a normalidade. No entanto, por se basear em dados do passado, não considera eventos que possam ocorrer no futuro, como crises financeiras e também pode ser influenciado por retornos extremos ou anómalos no histórico de dados.

Uma outra forma de cálculo do VaR é através de simulações de Monte Carlo. Para isso, é necessário recolher dados históricos de preços ou retornos dos ativos e ajustar um modelo estatístico aos retornos históricos. De seguida, utilizando maioritariamente a distribuição normal ou log-normal dos resíduos, gerar trajetórias de preços futuros, calcular os retornos simulados para cada trajetória e por último, ordenar os retornos simulados e identificar o retorno no nível de confiança desejado.

Este método é essencialmente útil para portfólios com retornos não lineares e apresenta uma grande flexibilidade por apresentar diferentes distribuições e dependências complexas entre ativos. Sendo um método mais computacional, a sua maior desvantagem é o tempo de computação e o facto de requerer um conhecimento significativo de modelos estatísticos e computacionais.

Por último, o VaR Normal que é utilizado maioritariamente pela sua simplicidade e eficiência em termos numéricos, como nos restantes métodos de cálculo, o processo inicia-se pela recolha de dados históricos, seguindo-se a estimação da rentabilidade esperada e desvio-padrão, calculando a média e desvio-padrão dos retornos históricos amostrais. Posteriormente, a identificação do valor crítico da distribuição normal para o nível de confiança desejado e por último a aplicação da seguinte expressão:

$$VaR_{\alpha} = \mu - z_{\alpha}\sigma, \tag{3.8}$$

onde μ é a rentabilidade esperada estimada dos retornos, z_{α} é o valor crítico da distribuição normal standard com nível de significância α e σ é o desvio-padrão estimado dos retornos.

A sua principal desvantagem é a suposição da normalidade e a simplificação da complexidade das correlações entre ativos, especialmente em mercados voláteis.

3.2.2 Rácio de Sharpe

O Rácio de Sharpe, desenvolvido por Sharpe (1994), é uma medida que compara o prémio de risco com o seu risco, por outras palavras, indica o prémio de risco de uma carteira por unidade de risco. A sua fórmula é a seguinte:

$$\text{Rácio de Sharpe} = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}, \quad (3.9)$$

onde σ_p é o desvio-padrão da carteira p .

Esta medida provém do declive da reta *Capital Allocation Line* (CAL), que é representada no espaço $(\sigma_p, E(r_p))$ e representa o conjunto de oportunidades de investimento que podemos obter quando investimos na carteira de ativos com risco de rentabilidade r_p e no ativo sem risco.

Este índice permite realizar comparações entre diferentes investimentos ou portfólios para determinar qual é que oferece um melhor retorno ajustado ao risco, e ainda permite identificar e ajustar a alocação de ativos para maximizar o retorno.

Valores de Sharpe positivos indicam que o retorno do investimento é alto em relação ao risco assumido, valores próximos ou iguais a zero sugerem que o retorno é equivalente ao retorno do ativo sem risco, não compensando o risco. Por último, valores de Sharpe negativos indicam que o retorno do investimento é inferior ao retorno do ativo sem risco, representando um mau investimento.

3.3 Valor de Shapley

O Valor de Shapley foi introduzido em 1953, pelo economista e matemático americano Shapley (1953), que ganhou um prémio Nobel de ciências económicas em 2012. O valor de Shapley enquadra-se na Teoria de Jogos Cooperativos.

Na teoria de Jogos Cooperativos, estuda-se situações onde grupos de jogadores (coligações) podem se formar com o intuito de alcançar objetivos comuns. Neste tipo de jogos, os jogadores agem em conjunto, tomando decisões em conjunto para maximizar o benefício coletivo. Este benefício pode depois ser distribuído de forma justa por todos os participantes.

Um jogo cooperativo com utilidade transferível (TU) é uma classe de jogos cooperativos, onde é permitido transferir utilidade, quer seja valor ou recursos, entre os jogadores livremente. Por outras palavras, os jogadores podem negociar e redistribuir os ganhos entre si sem perda de eficiência, ou seja, é um par (J, v) onde J é um conjunto finito de jogadores, onde cada subconjunto não vazio de J é uma coligação, e $v : 2^J \rightarrow \mathbb{R}$, designada

por função característica, é uma função que associa a cada coligação um valor $v(S)$ que a coligação pode distribuir entre os seus membros.

O valor de Shapley é um conceito de solução para jogos TU, que permite distribuir os ganhos de maneira a refletir a contribuição marginal de cada jogador em todas as possíveis coligações. Esta solução acenta em quatro axiomas, sendo:

- Eficiência - a soma dos retornos que os jogadores recebem deve ser igual à grande coligação.
- Simetria - se os jogadores contribuírem de igual forma para cada coligação devem receber o mesmo.
- Aditividade - a solução da soma dos jogos de utilidade transferível deve ser a soma das soluções dos ditos jogos.
- Jogador Nulo - se um jogador não contribui para qualquer coligação, a solução deve atribuir-lhe retorno nulo.

Shapley provou que existe uma solução para o jogo que satisfaz os quatro axiomas, esta solução é única e dada pela seguinte expressão:

$$Sh_i(N, v) = \frac{1}{N!} \sum (v(P_i^R \cup i) - v(P_i^R)), \quad (3.10)$$

onde a soma é sobre todas as $N!$ ordens de jogadores e P_i^R são as coligações que precedem i na ordem R . De outro modo, a solução atribuída pelo valor de Shapley a um jogador i começa por calcular a diferença entre o valor da coligação incluindo o jogador i e o valor da coligação sem ele. Como existem várias maneiras de formar a mesma coligação, o valor de Shapley leva em conta todas essas possíveis ordens. O cálculo final é a média ponderada das contribuições marginais de i em todas as ordens possíveis.

Naturalmente, a soma de todos os valores de Shapley é igual ao valor da grande coligação, ou seja, quando todos os jogadores participam na mesma coligação, representada por:

$$v(N) = \sum_{k=1}^n Sh_k(N, v). \quad (3.11)$$

DADOS, FACTOS ESSENCIAIS E SOFTWARE

Neste capítulo, serão apresentados os dados que serviram de base para o estudo, assim como as estatísticas descritivas e o *software* utilizado.

4.1 Descrição dos Dados

Neste estudo, são utilizadas diferentes bases de dados, retiradas do *site investing.com*. Este *site* oferece-nos informações sobre finanças e investimentos, dando-nos acesso a diferentes dados em tempo real de ações, índices, títulos e outros instrumentos financeiros.

Para a realização desta análise são utilizadas seis bases de dados distintas. A primeira contendo informação sobre grandes empresas, a segunda sobre pequenas e médias empresas, a terceira tem informação sobre títulos corporativos, a quarta e quinta sobre títulos do governo de curto e médio prazo e longo prazo, respetivamente. Por último, a sexta base contém informação sobre obrigações do tesouro de longo prazo. Estes dados permitem realizar uma análise similar à de Shalit (2021) para os USA, no entanto é aplicada ao contexto europeu, possibilitando assim a comparação dos resultados do valor de Shapley como medida de risco.

De seguida, apresenta-se os vários dados históricos exportados do *site investing.com* utilizados como base deste trabalho:

- **Grandes Empresas (GE):** *Euro Stoxx 50* (STOXX, 2024a) é um índice que acompanha as maiores e mais negociadas empresas da zona euro e oferece uma exposição diversificada aos líderes dos setores da região. O índice está subjacente a uma das maiores gamas mundiais de fundos negociados em bolsa (ETF), futuros, opções e produtos estruturados.
- **Pequenas e Médias Empresas (PME):** *STOXX Europe Small 200 EUR Price* (STOXX, 2024b) é um índice de componentes fixos concebido para fornecer uma representação

de empresas de pequena capitalização na Europa. O índice é derivado do índice STOXX Europe 600 e abrange vários países europeus, incluindo Portugal.

- **Títulos Corporativos (TC):** *VanEck iBoxx EUR Corporates UCITS ETF (TCBT)* (VanEck, 2023) , é um fundo negociado em bolsa, focado em títulos corporativos, que investe numa carteira de títulos obrigacionistas com o objetivo de proporcionar retornos de investimento que acompanhem de perto o desempenho do índice Markit iBoxx EUR Liquid Corporates.
- **Títulos do Governo de Curto e Médio Prazo (TGCMP):** *Deka iBoxx EUR Liquid Sovereign Diversified 1-3 UCITS ETF* (Investment, 2024) pretende acompanhar o índice iBoxx® EUR Liquid Sovereigns Diversified 1-3, que acompanha os 25 títulos governamentais mais líquidos denominados em euros emitidos por governos da Europa, sendo o tempo de maturidade entre 1 a 3 anos.
- **Títulos do Governo de Longo Prazo (TGLP):** *Xtrackers II Eurozone Government Bond 5-7 UCITS ETF* (DWS, 2024) é um subfundo de *Xtrackers II* que reflete o desempenho de obrigações emitidas por governos europeus com grau de investimento entre 5 a 7 anos e o montante mínimo de dívida de mil milhões de euros por obrigação.
- **Obrigações do Tesouro de longo prazo (TT):** *Vanguard 20+ Year Euro Treasury Index Fund Eur Acc* (Vanguard, 2024) é um fundo de investimento administrado pela *Vanguard* que pretende acompanhar o desempenho do índice *Bloomberg Euro Treasury 20+ Year Bond Index* que detém títulos do tesouro europeus na sua carteira.

Os dados históricos obtidos da extração de cada base contém informação sobre a *Data* em que cada observação foi registada, o preço do ativo no início (*Abertura*) e final (*Último*) do período de negociação, o preço mais baixo (*Baixa*) e mais alto (*Alta*) atingido durante o período de negociação, o volume de negociação (*Vol.*) e a variação percentual (*Var%*) do preço do ativo em relação ao período anterior, ou seja, a sua rentabilidade percentual diária.

Para a realização deste trabalho, foram escolhidos dois períodos distintos de mercado. O primeiro período apresenta um aumento dos preços dos ativos ou é esperado um crescimento -*Bull Market* - e um outro período inverso, caracterizado pela falta de confiança no desempenho futuro do mercado e uma tendência de queda dos preços - *Bear Market*. Através da subdivisão da amostra, estende-se o feito previamente abordado na literatura, evidenciando que a fase do mercado é importante para aferição de risco e escolha de carteira.

A escolha dos períodos passou por analisar um índice distinto dos que foram escolhidos como base para o estudo, pois permite ter uma perspetiva diferente do mercado. Assim sendo, o índice analisado foi o *STOXX Europe 600*, que oferece uma alocação diversificada de países e indústrias das economias desenvolvidas da Europa, replicando quase

90% do mercado subjacente de investimento.



(a) *Bear Market*



(b) *Bull Market*

Figura 4.1: Gráfico STOX Europe 600

Com base na análise dos últimos 5 anos deste índice e como se pode ver na figura 4.1, concluiu-se que o mercado vivenciou um *Bear Market* entre o início de janeiro de 2022 e 23 de setembro de 2022. Por outro lado, no período de 24 de setembro de 2022 até 28 de julho de 2023 presenciou-se um *Bull Market*. Além destes dois períodos, também se analisou a amostra total dos dados, adotando uma abordagem semelhante à de Shalit (2021), que considera apenas um período total, sem considerar as diferentes condições de mercado, como as crises.

4.2 Factos Essenciais

Nesta etapa, procedeu-se à primeira análise das bases de dados garantindo que os dados são adequados para as análises subsequentes.

Para uma melhor compreensão dos dados apresenta-se na tabela 4.1 as principais estatísticas descritivas.

Índices	<i>Bear Market</i>		<i>Bull Market</i>		<i>Amostra Total</i>	
	μ	σ	μ	σ	μ	σ
GE	-0.131	1.581	0.099	0.951	-0.010	1.291
PME	-0.198	1.541	0.067	1.038	-0.058	1.305
TC	-0.083	0.449	0.009	0.436	-0.034	0.445
TGCMP	-0.033	0.193	-0.004	0.213	-0.017	0.204
TGLP	-0.075	0.465	-0.001	0.489	-0.036	0.478
TT	-0.227	1.300	-0.069	1.561	-0.144	1.444

Tabela 4.1: Estatísticas Descritivas da Amostra.

Verifica-se que no período *Bear Market* as médias são todas negativas, realçando que no setor público, ou seja, os índices referentes aos títulos do governo, apresentam rentabilidades quase nulas mas ligeiramente melhores que o setor privado, demonstrando que neste período o mercado encontrava-se numa situação volátil. Por sua vez, o *Bull Market* demonstra uma ligeira melhoria de mercado com os índices referentes ao setor privado, ou seja, as ações (GE e PME) e títulos corporativos a apresentar rentabilidades positivas e superiores à do setor público. Através do desvio-padrão consegue-se constatar que em todos os períodos o índice referente a TGCMP é o menos volátil. Contudo, as ações de GE e PME e obrigações do tesouro de longo prazo são os que apresentam uma maior volatilidade, destacando no *Bull Market* e *Amostra Total* os TT como sendo os mais arriscados. Tal facto ocorre, visto que se trata de um índice com uma maturidade muito elevada e, por conseguinte, não se consegue prever crises futuras, inflações ou outro tipo de catástrofe, tornando-se mais volátil.

O período referente à *Amostra Total*, por ser uma união de dois mercados completamente distintos e com tendências diferentes, a sua análise é mais dúbia, podendo levar a conclusões erróneas, reforçando assim a importância de realizar análises considerando os vários tipos de mercado. Neste período, observa-se que as rentabilidades são todas negativas, assim como no *Bear Market*, apesar de existir uma pequena melhoria nas rentabilidades e uma diminuição das volatilidades do setor privado. As ações e obrigações corporativas apresentam maior volatilidade, no entanto este facto é o esperado seja qual for a tendência de mercado.

De seguida, conferiu-se quais foram as rentabilidades máximas e mínimas de cada índice, nos diferentes períodos e que representamos na tabela 4.2.

Índices	<i>Bear Market</i>		<i>Bull Market</i>		<i>Amostra Total</i>	
	$r_{min}(\%)$	$r_{max}(\%)$	$r_{min}(\%)$	$r_{max}(\%)$	$r_{min}(\%)$	$r_{max}(\%)$
GE	-0.050	0.074	-0.035	0.043	-0.050	0.074
PME	-0.044	0.048	-0.031	0.041	-0.044	0.048
TC	-0.017	0.016	-0.013	0.017	-0.017	0.017
TGCMP	-0.006	0.006	-0.006	0.012	-0.006	0.012
TGLP	-0.013	0.017	-0.014	0.020	-0.014	0.020
TT	-0.034	0.036	-0.036	0.054	-0.036	0.054

Tabela 4.2: Rentabilidades mínimas e máximas dos dados.

De notar que, o índice referente às ações de GE é o que apresenta a maior e a menor rentabilidade, quer seja no *Bear Market* ou na *Amostra Total*. No *Bull Market* o índice TT é o que apresenta a maior e a menor rentabilidade esperada. Observa-se ainda que o *Bull Market* é o período mais estável, pois apresenta menores variações entre as rentabilidades máximas e mínimas, principalmente do setor privado.

De seguida, calculou-se a matriz de variância-covariância (Σ) para todos os períodos e os respetivos determinantes, com o objetivo de confirmar se as matrizes são não singulares e estamos a respeitar os pressupostos dos modelos. Esta informação é particularmente relevante para a noção de risco que atende à correlação entre ativos e, bem assim, a oportunidades de diversificação e redução de risco numa carteira. Seguem, abaixo as matrizes para todos os períodos em análise:

1º Período - *Bear Market*

	GE	PME	TC	TGCMP	TGLP	TT
GE	2.499	2.280	0.171	-0.010	-0.021	-0.308
PME	2.280	2.374	0.224	0.011	0.032	-0.135
TC	0.171	0.224	0.202	0.073	0.184	0.419
TGCMP	-0.010	0.011	0.073	0.037	0.084	0.180
TGLP	-0.021	0.032	0.184	0.084	0.216	0.486
TT	-0.308	-0.135	0.419	0.180	0.486	1.691

A partir da análise da matriz de variância-covariância constata-se que as variáveis GE e PME têm variâncias altas (2.499 e 2.374, respetivamente) indicando uma grande volatilidade. Além disso, as elevadas covariâncias entre GE e PME, e entre TGLP e TT, sugerem que estes índices apresentam uma interdependência entre si, o que pode aumentar a exposição ao risco devido à baixa diversificação. Em contraste, a covariância negativa entre GE e qualquer índice referente a títulos do governo e obrigações do tesouro de longo prazo indica uma relação quase nula ou fraca entre estes tipos de índices, com pouca ou nenhuma interdependência, sugerindo uma oportunidade de *hedge* e de maior diversificação.

2º Período - *Bull Market*

GE	PME	TC	TGCMP	TGLP	TT
0.904	0.842	0.138	-0.016	0.017	0.072
0.842	1.077	0.176	-0.004	0.058	0.215
0.138	0.176	0.191	0.063	0.165	0.465
-0.016	-0.004	0.063	0.045	0.096	0.243
0.017	0.058	0.165	0.096	0.239	0.644
0.072	0.215	0.465	0.243	0.644	2.435

Observa-se que, mais uma vez as variáveis GE e PME têm variâncias relativamente altas (0.904 e 1.077, respetivamente), com o índice TT a apresentar a maior variância (2.435), indicando maior volatilidade destes índices. As covariâncias elevadas entre GE e PME (0.842) e TGLP e TT (0.644) sugerem uma forte dependência entre si, tal como ocorreu no 1º período, surgindo os TC e TT (0.465) também com uma elevada dependência entre eles. Por outro lado, a covariância negativa entre GE e TGCMP (-0.016), PME e TGCMP (-0.004) e baixa entre GE e TGLP (0.017) indica uma baixa interdependência entre estas variáveis. Neste período, como não existe tantas covariâncias negativas, o benefício de diversificação é inferior comparativamente ao *Bear Market* e apenas o índice TGCMP pode funcionar como *hedge*, resultando exclusivamente com as ações.

Amostra Total

GE	PME	TC	TGCMP	TGLP	TT
1.667	1.533	0.158	-0.011	0.003	-0.098
1.533	1.703	0.205	0.005	0.051	0.060
0.158	0.205	0.198	0.068	0.175	0.446
-0.011	0.005	0.068	0.042	0.091	0.214
0.003	0.051	0.175	0.091	0.229	0.571
-0.098	0.06	0.446	0.214	0.571	2.084

Através da análise da matriz verifica-se que, os índices GE, PME e TT possuem novamente variâncias elevadas, com valores de 1.667, 1.703 e 2.084, respetivamente, sinalizando uma grande volatilidade. As covariâncias elevadas entre GE e PME (1.533) e entre TC e TT (0.446) indicam que estes índices têm uma forte dependência, podendo assim aumentar o risco devido à baixa diversificação. No entanto, as covariâncias negativas entre GE e TT (-0.098) e GE e TGCMP (-0.011) e a baixa covariância entre GE e TGLP (0.003) apontam para relações fracas ou quase nulas entre estas variáveis.

Em suma, as covariâncias obtidas mostram que, entre os títulos privados, há uma maior oportunidade de diversificação durante o *Bear Market*, enquanto que para as obrigações do Estado essa oportunidade manifesta-se no *Bull Market*. A relação entre títulos privados e públicos não parece variar de forma significativa, embora se identifique diferentes oportunidades de redução de risco. No primeiro período, GE tem uma correlação negativa

significativa com cada um dos ativos públicos, enquanto que no segundo período, essa correlação é observada apenas com ações e o índice TGCMP.

4.3 Software R

A escolha do *software R* para a realização deste estudo, deveu-se ao facto de se tratar de um programa com uma linguagem simples, ter um ambiente onde é possível observar os vários dados utilizados, o código e os resultados obtidos numa única janela e por existir diversas bibliotecas relacionadas com vários temas matemáticos.

Neste *software* existe uma excelente coleção de bibliotecas para desenvolver este estudo, salientando:

- *CoopGame* (Staudacher & Anwander, 2021) que é uma biblioteca que se dedica ao estudo de jogos cooperativos com utilidade transferível e visa fornecer um conjunto abrangente de métodos.
- *dplyr* (R, 2023) que é o pacote mais eficiente para a transformação de dados, aliando simplicidade e eficiência de uma forma refinada.
- *xlsx* e *openxlsx* são bibliotecas que permitem importar e exportar documentos em formato *xlsx* para o nosso *desktop*.

A partir destes *packages* temos as ferramentas necessárias para implementar os cálculos propostos para este trabalho.

Com a ajuda do *R* procedeu-se à limpeza de variáveis irrelevantes para o estudo e à exploração das principais características dos dados, de modo a se obter *dataframes* relevantes para o estudo.

Iniciou-se o processo de análise de dados, juntando as informações dos diferentes índices para cada período e selecionando apenas as variáveis *Data* e *Var%*, uma vez que são necessárias apenas as rentabilidades e as respetivas datas em que foram registadas. Após este procedimento, foram obtidos dois *dataframes* distintos: um referente ao primeiro período (*Bear Market*) e outro ao segundo período (*Bull Market*), ambos contendo 7 colunas, representando as variáveis *Data* e as rentabilidades percentuais dos 6 índices.

De seguida, verificou-se que, para algumas datas, nem sempre existiam registos de rentabilidades para todos os índices. Portanto, as linhas com valores ausentes foram removidas, assegurando que os *dataframes* estivessem completos e prontos para a realização de todos os cálculos necessários. Após este processo, a base referente ao primeiro período

ficou com 183 observações diárias, enquanto que o *dataframe* referente ao segundo período ficou com 204 observações. Por último, renomeou-se o nome das diferentes colunas, para ser mais perceptível a que coluna correspondia a rentabilidade de cada índice. Adicionalmente, uniram-se os dois *dataframes* num só, permitindo ter os dados da *Amostra Total*.

Para uma melhor compreensão dos dados calculou-se a média e o desvio-padrão de todos os *dataframes*, através das funções *mean()* e *sd()* do *software R*. Para o cálculo das matrizes de variância-covariância (Σ) recorreu-se à função *cov()* e para o cálculo do determinante à função *det()*.

O principal benefício de utilização do *software R* para este estudo, foi o facto de existir a biblioteca *CoopGame*, que permitiu calcular os valores de Shapley de cada ativo a partir dos valores da função característica. Para isso, apenas necessitou-se de estabelecer todas as coligações possíveis de índices, através da função *combn()*, criar uma lista com todos os desvios- padrão dos subconjuntos e aplicar a função *shapleyValue()* à mesma, obtendo assim os valores de Shapley para cada ativo.

DECOMPOSIÇÃO DO RISCO DA CARTEIRA

Neste capítulo, aborda-se uma nova forma de decomposição do risco de carteiras eficientes utilizando o valor de Shapley. A decomposição do risco de um portfólio consiste na análise da contribuição individual de cada ativo para o risco total do portfólio, medido pela sua variância, dado pela equação (3.2). O risco de cada ativo é avaliado não só pela sua volatilidade isolada, mas também pela sua correlação com os outros ativos, o que afeta a variação conjunta da carteira. Ativos com maior peso na carteira ou com maior risco próprio tendem a ter uma contribuição mais significativa para o risco total. Esta decomposição permite aos gestores identificar quais são os ativos que contribuem mais para o risco e, assim, ajustar a carteira de modo a otimizar a relação risco-retorno, melhorando a diversificação.

5.1 Procedimentos de Cálculo

O valor de Shapley ao ser utilizado como medida para decomposição do risco de um portfólio eficiente nos seus vários componentes, prevê que o processo de formação de carteiras seja interpretado como um jogo cooperativo. A ideia do jogo passa por considerar que os jogadores são os ativos que formam coligações com o objetivo de formar carteiras de risco mínimo. A grande coligação contém os ativos todos e a função característica para cada coligação é o desvio-padrão da carteira eficiente, que se pode construir com os ativos dessa coligação, dada uma rentabilidade que se fixou. Como cada contribuição depende da ordem pela qual os jogadores se juntam à coligação, o valor de Shapley de cada jogador é a média ponderada das suas contribuições em todas as possíveis sequências de formação da grande coligação.

Este novo modelo permite que as contribuições de risco de cada ativo para a carteira sejam mais realistas, visto que as contribuições são derivadas de todas as carteiras eficientes construídas pelas diversas coligações e também são mais úteis, pois permite entender o impacto que terá ao ser adicionado ou excluído um ativo de uma carteira ótima. Pode-se ainda realçar que a medida standard β_i não traduz totalmente a verdadeira contribuição

do ativo i para o risco do portfólio, pois pela decomposição da variância de uma carteira, equação (3.3), observa-se que o σ_{ip} não contém todas as parcelas relativas ao ativo i , logo β_i não incorpora todo o impacto do risco do ativo i na carteira.

Uma vez compreendida a metodologia da utilização do valor de Shapley proposta para resolver as lacunas apresentadas pelas medidas tradicionais, passaremos a apresentar os cálculos efetuados, detalhando cada etapa do processo. Além disso, também iremos expor os cálculos das medidas tradicionais, com o objetivo de comparar os resultados obtidos para as diferentes metodologias. Esta comparação permitirá avaliar a eficácia e a precisão do novo modelo em relação às metodologias anteriormente utilizadas.

Primeiramente, calculou-se a média de cada índice e posteriormente formou-se o vetor das médias dos vários ativos, μ . Seguidamente, calculou-se a matriz de variância-covariância (Σ) dos vários períodos em estudo.

Para se obter a forma convencional de calcular o risco da carteira, efetuou-se os seguintes passos:

1. Calcular os valores das formas quadráticas A, B, C e D, dados pela equação (3.5);
2. Calcular os pesos da carteira p dados pela seguinte equação:

$$\mathbf{w}_p^* = \frac{1}{D}[B\Sigma^{-1}\mathbf{1} - A\Sigma^{-1}\mu] + \frac{1}{D}[C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}\mathbf{1}]\mu_p; \quad (5.1)$$

3. Calcular a rentabilidade esperada da carteira p através da equação (3.1) e a sua variância pela equação (3.6);
4. Calcular o β_i seguindo a seguinte expressão:

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(r_i, r_p)}{\sigma_p^2} \quad (5.2)$$

5. Calcular a parcela de variância (ϕ_i) atribuída a cada ativo i dada pela equação (3.4).

Posteriormente, calculou-se o valor de Shapley para cada ativo. Atendendo que o cálculo da variância da carteira de variância mínima (MVP) torna-se mais simples em comparação ao cálculo da variância de carteiras na fronteira eficiente, separou-se a análise em dois casos. No primeiro, apresenta-se os cálculos efetuados quando consideramos a MVP e no segundo caso apresenta-se os cálculos para um portfólio p com uma dada rentabilidade que pertence à fronteira eficiente.

5.1.1 Carteira de variância mínima - MVP

Nesta primeira situação, seguindo Shalit (2021), os cálculos realizados foram os seguintes:

1. Estabelecer todos os 2^N subconjuntos de ativos do conjunto N ;
2. Calcular a matriz de variância-covariância Σ_S e $C_S = \mathbf{1}'_S \Sigma_S^{-1} \mathbf{1}_S$, para todos os subconjuntos S pertencentes ao conjunto N ;
3. Calcular o desvio-padrão de cada subconjunto S no portfólio de variância mínima dado por $\sigma_{MVP(S)} = \sqrt{\frac{1}{C_S}}$;
4. Calcular o valor de Shapley para cada ativo i dado por:

$$Sh_i(\sigma_{MVP}) = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{(N-s-1)!s!}{N!} \left(\sqrt{\frac{1}{C_{S \cup i}}} - \sqrt{\frac{1}{C_S}} \right) \quad \forall i \in N; \quad (5.3)$$

De notar que esta fórmula é equivalente à fórmula apresentada em (3.10).

5. Verificar se os valores de Shapley estão bem calculados, através da equação:

$$\sum_{i=1}^N Sh_i(\sigma_{MVP}) = \sqrt{\frac{1}{C_N}} \quad (5.4)$$

Esta fórmula indica que a soma dos valores de Shapley de todos os instrumentos financeiros tem de ser igual ao desvio-padrão da carteira MVP.

5.1.2 Portfólios ótimos na fronteira eficiente

Nesta situação, o cálculo da variância é dado pela equação (3.6), no entanto, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \frac{C}{D} \left(\mu_p - \frac{A}{C} \right)^2 + \frac{1}{C} \\ &= \frac{C}{D} \left(\mu_p^2 - 2\mu_p \frac{A}{C} + \frac{A^2}{C^2} \right) + \frac{1}{C} \\ &= \frac{C}{D} \mu_p^2 - 2\mu_p \frac{A}{D} + \frac{A^2}{DC} + \frac{1}{C} \\ &= \frac{1}{D} \left(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + \frac{A^2}{C} + \frac{D}{C} \right) \\ &= \frac{1}{D} \left(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Assim sendo, os cálculos para obter o valor de Shapley de cada ativo i , seguindo Shalit (2021), são os seguintes:

1. Estabelecer todos os 2^N subconjuntos de ativos do conjunto N ;
2. Calcular a matriz de variância-covariância Σ_S e as formas quadráticas $A_S = \mathbf{1}'_S \Sigma_S^{-1} \mu_S$, $B_S = \mu'_S \Sigma_S^{-1} \mu_S$, $C_S = \mathbf{1}'_S \Sigma_S^{-1} \mathbf{1}_S$ e $D_S = B_S C_S - A_S^2$ para todos os subconjuntos $S \subseteq N$;

3. Estabelecer um conjunto arbitrário de rentabilidade $\mu_p > \frac{A_N}{C_N}$, onde A_N e C_N são as formas quadráticas quando se consideram todos os ativos, ou seja, o conjunto N ;
4. Calcular a variância da carteira da fronteira eficiente para cada subconjunto $S \cup i \subseteq N$ e para todas as rentabilidades μ_p , usando a equação (5.5) e de seguida o desvio-padrão para cada carteira;
5. Calcular o valor de Shapley para cada ativo i sujeito a uma dada μ_p :

$$Sh_i(\sigma_p; \mu_p) = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{(N-s-1)!s!}{N!} [\sigma_p(\mu_p, S \cup i) - \sigma_p(\mu_p, S)] \quad \forall i \in N \quad (5.6)$$

De notar que, quando estamos perante coligações com apenas 1 ativo, o desvio-padrão $\sigma_p(\mu_p, S)$ é o próprio desvio-padrão do ativo em questão;

6. Verificar se os valores de Shapley estão bem calculados, através da equação:

$$\sum_{i=1}^N Sh_i(\sigma_p; \mu_p) = \sigma_p(\mu_p) \quad (5.7)$$

Este último passo indica que a soma dos valores de Shapley de todos os índices tem de ser igual ao desvio-padrão da carteira p com uma dada rentabilidade esperada, μ_p .

Seguindo estes passos, obtém-se a contribuição exata de risco de cada ativo associado a qualquer portfólio p .

5.2 Resultados e Discussão

Neste capítulo, são apresentados e discutidos em detalhe os resultados da análise nos diferentes períodos considerados.

5.2.1 1º Período - *Bear Market*

Iniciou-se a análise com o *Bear Market* que se encontra definido entre as datas 01/01/2022 a 23/09/2022, contendo 183 observações. Como carteira de mercado utilizou-se o índice *Stoxx Europe 600*, que neste período em concreto, apresenta uma rentabilidade de -0.113 e um desvio-padrão de 1.251.

Os resultados obtidos para a covariância entre cada índice i e a carteira de mercado e o beta de mercado são os seguintes:

Índices	σ_{iM}	β_M
GE	0.002	0.001
PME	0.071	0.045
TC	0.089	0.057
TGCMP	0.023	0.014
TGLP	0.073	0.046
TT	-0.049	-0.032

Tabela 5.1: Covariância entre o índice i e a carteira de mercado e β de mercado dos índices no 1º Período - *Bear Market*.

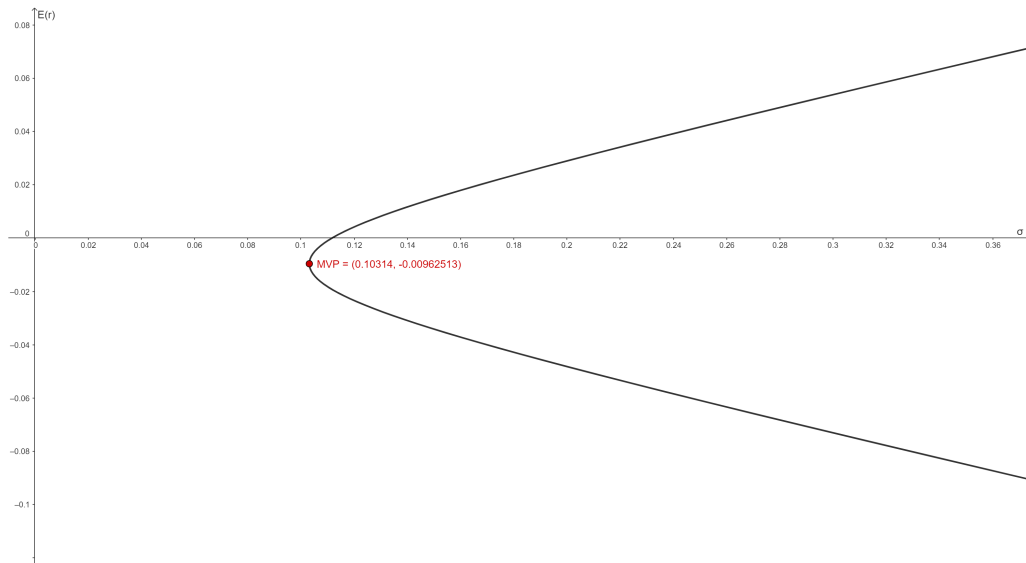
Através da observação da tabela 5.1 verifica-se que os índices GE (0.002), TGCMP (0.023) e TT (-0.049) possuem valores muito baixos ou até mesmo negativos de covariância com a carteira de mercado, sugerindo que têm uma relação fraca com o mercado. Por sua vez, o índice TT destaca-se por apresentar uma covariância negativa, indicando que pode mover-se em sentido contrário ao mercado durante este período. Por outro lado, os índices PME (0.071), TC (0.089) e TGLP (0.073) exibem valores mais altos de covariância, simbolizando movimentações mais alinhadas com o comportamento do mercado, especialmente o índice TC, que apresenta a maior covariância positiva.

Em relação ao beta de mercado (β_M), a maioria dos índices também demonstra uma correlação fraca com o mercado. Os índices GE (0.001), TGCMP (0.014) e TT (-0.032) possuem betas de mercado muito baixos ou negativos. No caso de TT, o beta de mercado negativo reforça a ideia de que este índice pode mover-se na direção oposta ao mercado, funcionando possivelmente como um ativo de refúgio durante o *Bear Market*. Já os índices PME (0.045), TC (0.057) e TGLP (0.046) possuem β_M ligeiramente mais elevados, mas ainda baixos, sugerindo que, embora estes índices sejam mais sensíveis às variações do mercado em comparação aos restantes, esta sensibilidade continua sendo relativamente moderada.

Em suma, a maioria dos índices demonstra ter uma fraca correlação com o mercado, indicando que podem estar relativamente protegidos das grandes oscilações. O índice TT, por apresentar uma covariância e beta de mercado negativos, surge como uma possível proteção (ou *hedge*) contra as quedas de mercado, uma vez que tende a comportar-se de forma oposta ao mercado durante este período. Já os índices PME, TC e TGLP, apesar de apresentarem uma maior sensibilidade ao mercado, ainda assim não sofrem tanto quanto o mercado em geral.

Carteira de Variância Mínima

A fronteira eficiente é apresentada na imagem 5.1, cuja $Carteira_{MVP}$ possui as seguintes coordenadas: (0.103, -0.010).

Figura 5.1: Fronteira Eficiente referente ao período 1º Período - *Bear Market*.

Após os cálculos utilizando a medida convencional para o risco e o valor de Shapley, obtiveram-se os seguintes resultados apresentados na tabela 5.2.

Índices	w_i	β_i	$\phi_i(\%)$	Sh_i	$Sh_i(\%)$
GE	0.014	1	1.423	0.248	240.222
PME	-0.004	1	-0.399	0.242	234.600
TC	-0.050	1	-4.982	-0.083	-80.144
TGCMP	1.568	1	156.786	-0.348	-337.061
TGLP	-0.536	1	-53.600	-0.099	-96.158
TT	0.008	1	0.772	0.143	138.541

Tabela 5.2: Pesos, β , ϕ , valor de Shapley e valor de Shapley normalizado na MVP (1º Período - *Bear Market*).

Observa-se que os TGCMP apresentam o maior peso da carteira de variância mínima enquanto que PME, TC e TGLP apresentam pesos negativos, indicando que se encontram em posição de *short-sales*. Nesta situação, os β_i 's são todos iguais a 1, uma vez que a covariância entre o ativo i e a carteira MVP é igual à variância da carteira MVP. Por conseguinte, a parcela de atribuição de risco a cada ativo, ϕ_i , é igual ao peso de cada ativo. Consequentemente, os ativos que tiverem um maior peso na carteira também têm um maior risco associado, como é o caso dos TGCMP.

Os valores de Shapley podem assumir valores negativos ou positivos, sendo que valores negativos indicam uma contribuição para a diminuição do risco de um portfólio. Neste caso, os índices referentes a títulos corporativos (-80.144%) e títulos do governo (TGCMP: -337.061% e TGLP: -96.158%) são uma boa opção para reduzir o risco da carteira de variância mínima, por apresentarem valores negativos.

Comparando os resultados da medida tradicional, ϕ_i , com o valor de Shapley normalizado ($Sh_i(\%)$), verifica-se uma contradição de resultados, pois os TGCMP, segundo $Sh_i(\%)$ contribuem em 337.061% para a redução do risco da carteira, no entanto os resultados da medida tradicional indicam o oposto. Também se observa que as PME por apresentarem uma posição de *short-sales* contribuem para a redução do risco da carteira atendendo a ϕ_i , contrariamente ao que se observa em $Sh_i(\%)$, que indica que PME contribuem em 234.600% para o aumento do risco da carteira.

Resumidamente, a aplicação do valor de Shapley oferece uma análise mais completa ao comparar as contribuições para o risco, não apenas em relação à carteira de mercado, mas também às carteiras possíveis formadas pelos ativos escolhidos. Esta abordagem revela que as obrigações do tesouro de longo prazo (TT) e as ações (GE e PME) aumentam o risco da carteira, enquanto que as obrigações privadas e governamentais de menor maturidade contribuem para a redução do risco. A discrepância entre o valor de Shapley e ϕ_i é justificada pela abrangência do $Sh_i(\%)$, que fornece uma avaliação mais detalhada. Os resultados para $Sh_i(\%)$ parecem estar em linha com a preferência dos investidores em períodos de *Bear Market* por uma maior alocação em obrigações, enquanto que o índice TT parece representar um mercado específico, possivelmente devido à sua longa maturidade, tornando-se uma escolha estratégica em momentos de instabilidade financeira. Importa ainda notar, que tal como o ϕ_i o beta de mercado, ao medir apenas o risco face à carteira de mercado, mostra resultados diferentes. Concluindo que, numa avaliação de risco de um ativo, o beta de mercado pode induzir em erro o investidor, nomeadamente se este tiver à priori preferência por carteiras com um determinado conjunto de ativos.

Portfólios na fronteira eficiente

Com o objetivo de analisar 3 portfólios pertencentes à fronteira eficiente, escolheu-se 3 rentabilidades e calculou-se a sua variância seguindo a equação (5.5). No gráfico 5.2, mostra-se as carteiras obtidas para o estudo.

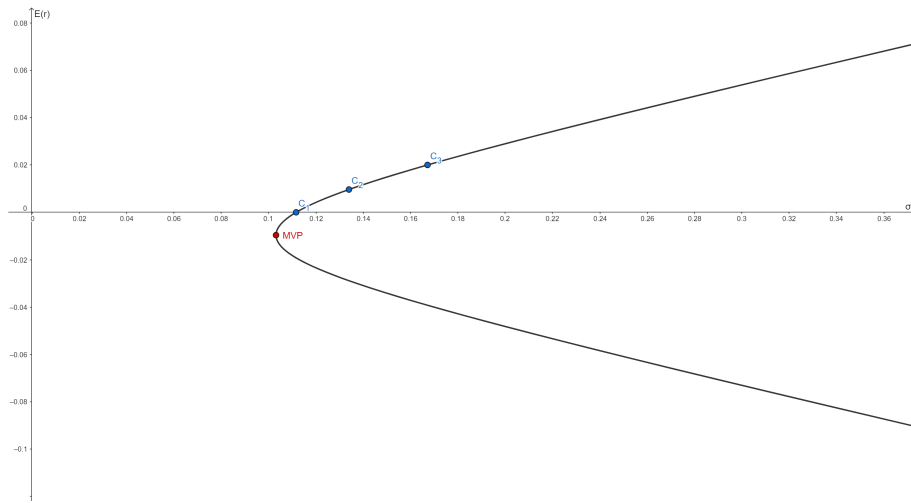


Figura 5.2: Fronteira eficiente referente ao 1º período (*Bear Market*), com os portfólios a estudar.

De seguida, apresenta-se na tabela 5.3 os valores obtidos utilizando a medida convencional e valor de Shapley para os vários índices nas 3 carteiras selecionadas.

Índices	w_i	β_i	$\phi_i(\%)$	Sh_i	$Sh_i(\%)$
$C_1 = (0.112, 0.000)$					
GE	0.038	-0.995	-3.745	0.238	253.901
PME	-0.043	-2.013	8.652	0.629	563.460
TC	-0.050	-0.264	1.315	-0.243	-217.360
TGCMP	1.624	0.502	81.584	-0.838	-750.169
TGLP	-0.552	-0.145	8.007	-0.279	-249.465
TT	-0.017	-2.461	4.187	0.558	499.632
$C_2 = (0.134, 0.010)$					
GE	0.061	-1.975	-12.057	0.301	224.660
PME	-0.082	-3.388	27.781	0.642	479.127
TC	-0.050	-0.960	4.777	-0.236	-175.923
TGCMP	1.680	0.105	17.656	-0.863	-644.351
TGLP	-0.568	-0.794	45.096	-0.272	-203.173
TT	-0.042	-4.011	16.747	0.562	419.661
$C_3 = (0.167, 0.020)$					
GE	0.086	-2.157	-18.611	0.320	191.338
PME	-0.124	-3.554	44.074	0.655	392.057
TC	-0.050	-1.153	5.740	-0.227	-135.832
TGCMP	1.741	-0.101	-17.634	-0.885	-529.624
TGLP	-0.585	-0.990	57.908	-0.264	-157.748
TT	-0.068	-4.169	28.523	0.568	339.809

Tabela 5.3: Pesos, β , ϕ , valor de Shapley e valor de Shapley normalizado nos 3 portfólios da fronteira eficiente (1º Período - *Bear Market*).

Para uma melhor análise da tabela 5.3, reforça-se que a medida ϕ_i , ao resultar da multiplicação do peso do ativo i na carteira p pelo β_i , nem sempre concorda com o β_i , o qual não tem em conta o uso do ativo como empréstimo, isto é, *short-sales*. Assim sendo,

ϕ_i incorpora mais informação relativa à relação entre todos os ativos do que β_i .

Observa-se que na carteira C_1 , que tem uma rentabilidade de 0%, os TGCMP possuem o maior peso da carteira, estando assim associado um maior risco a este índice, atendendo à sua parcela de risco (ϕ_i) com valor de 81.584%. Apenas o índice de GE apresenta um ϕ_i negativo, indicando que ativos desta categoria contribuem para a diminuição do risco da carteira. Observando os valores de Shapley normalizados, o índice referente a TGCMP por apresentar um valor negativo de 750.169% indica que é o índice que mais contribui para a redução do risco da carteira. Por sua vez, os índices referentes a PME e TT são os que mais contribuem para o aumento do risco do portfólio contribuindo em 563.460% e 499.632%, respetivamente. Comparando os resultados obtidos utilizando $Sh_i(\%)$ e ϕ_i , verifica-se uma contradição de resultados, realçando-se os casos dos índices de TGCMP e GE.

Na carteira C_2 , com rentabilidade de 1%, o índice que apresenta um maior peso e consequentemente um ϕ_i superior, ou seja, apresenta um maior risco para a carteira é TGCMP. Contudo, se considerarmos $Sh_i(\%)$, o índice TGCMP pertence ao grupo de índices, que por terem um valor negativo, contribuem para a redução do risco da carteira. Assim, estamos perante uma contradição de resultados. Também se observa este tipo de contradição com o índice GE que apresenta um ϕ_i de -12.057 (%) e $Sh_i(\%)$ de 224.660% e com TGLP com valores de 45.096% de ϕ_i e -203.173% de $Sh_i(\%)$.

Na carteira C_3 , com rentabilidade de 2%, verifica-se que os índices de PME e TGLP adicionam um maior risco ao portfólio com valores de 44.074% e 57.908%, respetivamente, segundo a medida tradicional de risco (ϕ_i). No entanto, os TGLP por apresentarem um valor negativo, fazem parte do conjunto de índices que permite diminuir o risco da carteira de acordo com o valor de Shapley. Novamente, existe uma contradição de resultados, não só em TGLP, mas também em GE e TC.

Ainda é possível observar que, conforme se aumenta o retorno e a volatilidade das carteiras na fronteira eficiente, a contribuição que cada ativo proporciona para o risco, segundo o valor de Shapley normalizado, diminui. Contrariamente, através do ϕ_i , todos os índices em posição de *short-sales* apresentam um acréscimo de risco, conforme aumenta a volatilidade das carteiras.

Neste período, de acordo com ϕ_i , o esperado seria que os índices referentes a títulos do governo aumentassem o risco das carteiras e que ativos de grandes empresas por apresentarem sempre ϕ_i negativo, fossem um investimento mais seguro. No entanto, o valor de Shapley indica-nos o oposto, podendo-se explicar pelo facto de que em momentos de crise, o receio nos mercados financeiros pode levar a que os investidores substituam ações por títulos, pois são considerados um "porto seguro", contribuindo assim para alocações

de portfólio bem diversificadas e proporcionando benefícios de *hedge* durante uma crise, como aborda Nasir et al. (2023).

De modo geral, observa-se que nas diversas carteiras há um padrão semelhante ao da carteira MVP, reduzindo-se os contributos de todos os ativos para o risco total da carteira. Neste contexto, as obrigações do Estado de curto prazo (TGCMP) desempenham um papel crucial na diminuição do risco em qualquer carteira, assim como na MVP. Este facto, ocorre devido à menor volatilidade deste ativo em comparação com os restantes, além de ter um maior retorno. Adicionalmente, o padrão de covariâncias, incluindo a covariância negativa com GE, que tem um peso positivo nas carteiras, reforça este papel. Contudo, é importante notar que, apesar da sua função de redução do risco, TGCMP apresentam uma baixa rentabilidade e uma volatilidade relativamente elevada, mas inferior aos restantes ativos.

5.2.2 2º Período - *Bull Market*

Nesta secção, analisou-se o *Bull Market* que se encontra definido entre as datas de 24/09/2022 até 28/07/2023, contendo 204 observações. Mais uma vez, como carteira de mercado utilizou-se o índice *Stoxx Europe 600*, que neste período em concreto, apresenta uma rentabilidade de 0.128 e um desvio-padrão de 0.841. Através da carteira de mercado, observa-se que houve um aumento da rentabilidade e uma diminuição do desvio-padrão relativamente ao *Bear Market*, comprovando-se uma melhor situação do mercado, como seria de esperar no *Bull Market*.

Neste caso, os resultados obtidos para a covariância entre cada índice e carteira de mercado e β de mercado foram os seguintes:

Índices	σ_{iM}	β_M
GE	-0.042	-0.059
PME	-0.020	-0.028
TC	0.030	0.043
TGCMP	0.016	0.022
TGLP	0.030	0.043
TT	0.122	0.172

Tabela 5.4: Covariância entre o índice i e a carteira de mercado e β de mercado dos índices no 2º Período - *Bull Market*.

Com base na tabela 5.4, verifica-se que a covariância dos índices, GE e PME, apresenta valores negativos, indicando que tendem a mover-se em sentido oposto ao do mercado. Em contraste, os restantes índices apresentam covariâncias positivas, sugerindo que acompanham o mercado nas suas oscilações, com TT (0.122) sendo o mais correlacionado.

Tendo em conta β_M , constata-se que GE e PME novamente destacam-se, com betas de mercado negativos, reforçando o seu comportamento inverso ao do mercado. Já o índice TT apresenta o maior β_M (0.172), revelando que é o mais volátil e sensível às mudanças no desempenho do mercado. Os índices TC, TGCMP e TGLP possuem β_M positivos, mas inferiores a 1, indicando que acompanham o mercado de forma mais estável.

Em resumo, GE e PME comportam-se de maneira inversa ao mercado, enquanto TT é o mais volátil, sendo fortemente impactado pelas oscilações do mercado. Os restantes índices, seguem o mercado com mais moderação, apresentando menor sensibilidade. Estas observações são importantes para investidores que pretendem ajustar as carteiras de acordo com o risco e o comportamento esperado dos ativos em diferentes cenários de mercado.

Importa notar que, neste período, assim como no anterior, a media de risco β_M retrata o risco face ao mercado acionista, não face a ações e obrigações, ativos que por vezes são combinados em fundos de investimento. Pelo que, a análise que se segue, e como feito anteriormente, contempla os resultados recorrendo à medida standard, nomeadamente o ϕ_i , uma medida parcial, e à medida de risco baseada no valor de Shapley, o $Sh_i(\%)$, uma medida mais cabal.

Carteira de Variância Mínima

A fronteira eficiente é apresentada na figura 5.3, cuja $Carteira_{MVP}$ possui as seguintes coordenadas: (-0.0004, 0.12037).

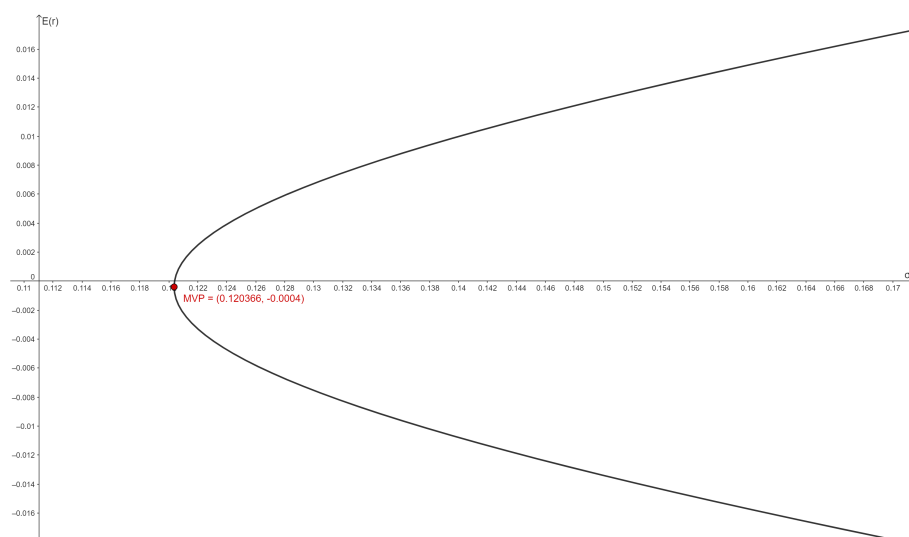


Figura 5.3: Fronteira Eficiente referente ao 2º período - Bull Market

Após os cálculos utilizando a medida convencional para o risco e o valor de Shapley, obteve-se os seguintes resultados:

Índices	w_i	β_i	$\phi_i(\%)$	Sh_i	$Sh_i(\%)$
GE	0.025	1	2.503	0.124	103.243
PME	0.024	1	2.390	0.148	123.054
TC	0.031	1	3.133	-0.043	-35.346
TGCMP	1.466	1	146.600	-0.269	-223.469
TGLP	-0.540	1	-53.997	-0.059	-49.032
TT	-0.006	1	-0.629	0.219	181.550

Tabela 5.5: Pesos, β , ϕ , valor de Shapley e valor de Shapley normalizado na MVP (2º Período - *Bull Market*).

Tendo em conta a tabela 5.5, verifica-se que os TGCMP apresentam o maior peso na carteira MVP e os índices referentes a TGLP e TT possuem posições de *short-sales*, por apresentarem w_i negativos. Nesta situação, os β_i 's são todos iguais a 1, uma vez que a covariância entre o ativo e a carteira MVP é igual à variância de MVP. Consequentemente, ativos que possuem um maior peso na carteira, como TGCMP, são os que apresentam uma maior contribuição para o risco da carteira, segundo ϕ_i , devido à forma como é calculado este indicador. Por sua vez, TGLP e TT (-53.997% e -0.629%, respetivamente) são os que mais contribuem para a diminuição do risco do portfólio.

Quanto ao valor de Shapley normalizado ($Sh_i(\%)$), é de notar que o índice referente a TT apresenta um valor elevado, indicando que é o índice que mais contribui, em 181.550%, para o risco da carteira. Verifica-se que os títulos corporativos e os títulos do governo são os que mais contribuem para a redução do risco da carteira, por apresentarem valores $Sh_i(\%)$ negativos.

Comparando os resultados de ambas as medidas, verifica-se uma contradição de resultados, salientando as situações referentes a TGCMP e TT. A diferença de resultados entre as duas medidas, como já foi referido, é justificada pela abrangência do $Sh_i(\%)$, que fornece uma avaliação mais detalhada.

Em comparação com o período anterior, observa-se que os valores de Shapley normalizados refletem um aumento na contribuição do risco associado aos TT passando de 138.541% para 181.550% e um decréscimo geral do risco associado aos restantes índices. Esta situação pode ser justificada pelo facto de que em períodos *Bull*, títulos com maturidades inferiores costumam ser preferíveis, já que são menos afetados pelas oscilações das taxas de juros e pela inflação, como abordado por Zaremba et al. (2020). Além disso, investidores tendem a direcionar mais recursos para ativos de maior risco, como ações, com o objetivo de maximizar os retornos.

Portfólios na fronteira eficiente

Nesta fase, foram escolhidas três rentabilidades, e foi calculada a variância das carteiras utilizando a equação (5.5), permitindo assim a obtenção de três portfólios que fazem parte da fronteira eficiente, conforme ilustrado na imagem 5.4.

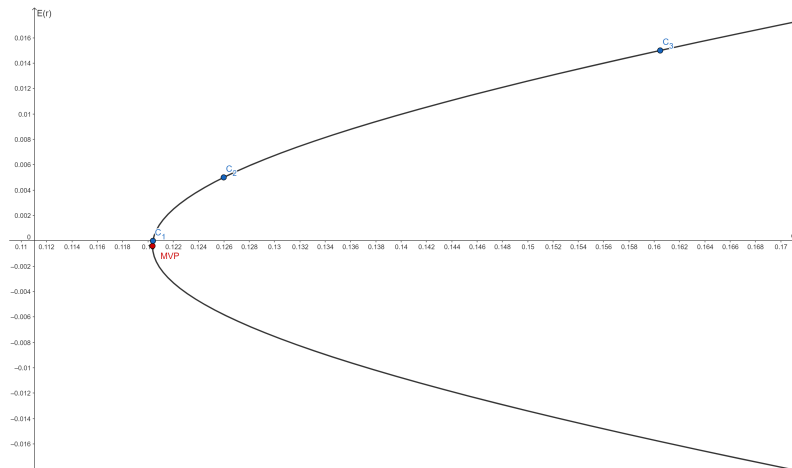


Figura 5.4: Fronteira Eficiente referente ao 2º período (*Bull Market*), com os portfólios a estudar.

Os valores utilizando a medida convencional e o valor de Shapley, para medição do risco, obtidos para as três carteiras, são apresentados na tabela 5.6.

Índices	w_i	β_i	$\phi_i(\%)$	Sh_i	$Sh_i(\%)$
$C_1 = (0.120, 0.000)$					
GE	0.029	1.132	3.228	0.150	124.295
PME	0.022	1.089	2.428	0.170	141.450
TC	0.031	1.012	3.153	-0.059	-49.051
TGCMP	1.457	0.995	144.947	-0.316	-262.119
TGLP	-0.531	0.999	-52.997	-0.054	-44.474
TT	-0.008	0.909	-0.758	0.229	189.900
$C_2 = (0.126, 0.005)$					
GE	0.072	2.525	18.088	0.133	105.561
PME	0.002	2.007	0.467	0.158	125.039
TC	0.029	1.070	3.079	-0.066	-52.272
TGCMP	1.345	0.857	115.241	-0.271	-215.483
TGLP	-0.414	0.906	-37.527	-0.034	-27.197
TT	-0.034	-0.194	0.652	0.207	164.352
$C_3 = (0.160, 0.015)$					
GE	0.158	3.397	53.608	0.090	56.111
PME	-0.038	2.485	-9.342	0.133	82.894
TC	0.024	0.839	2.018	-0.070	-43.771
TGCMP	1.122	0.464	52.077	-0.166	-103.420
TGLP	-0.182	0.550	-10.011	0.007	4.484
TT	-0.084	-1.381	11.649	0.166	103.702

Tabela 5.6: Pesos, β , ϕ , valor de Shapley e valor de Shapley normalizado nos 3 portfólios da fronteira eficiente (2º Período - *Bull Market*).

Após observação da tabela 5.6, verifica-se que na carteira C_1 , com rentabilidade de 0%, os TGCMP têm o maior peso, assim como na carteira MVP, sendo os principais responsáveis pelo aumento do risco total (144.947%), segundo ϕ_i . Por outro lado, os TGLP e TT estão em posições de *short-sales* e apresentam β_i muito próximos de 1, indicando que estão a contribuir para um menor risco. Apesar dos β_i 's de todos os índices estarem próximos de 1, as ações (GE e PME) apresentam valores ligeiramente superiores, refletindo uma maior volatilidade em relação à carteira C_1 .

No que diz respeito ao valor de Shapley normalizado ($Sh_i\%$), os TT destacam-se com a maior contribuição para o risco total da carteira (189.900%), o que é contra intuitivo em comparação com ϕ_i . O mesmo tipo de contradição ocorre com os TGCMP que contribuem em 262.119% para a redução do risco, sugerindo que são uma boa escolha para investidores avessos ao risco, contudo pela medida tradicional, este ativo é o responsável pelo maior risco da carteira.

Na carteira C_2 , com rentabilidade de 0.05%, verifica-se o mesmo comportamento que ocorreu na carteira C_1 , atendendo às comparações entre o valor de Shapley normalizado e o ϕ_i . A principal alteração é o crescimento dos β_i 's associados às ações (GE e PME) e o TT passou a apresentar um β_i negativo, indicando que este ativo tem um movimento oposto à carteira C_2 .

Relativamente à carteira C_3 , com 1,5% de rentabilidade, apesar de manter a maior parte dos comportamentos das carteiras com retornos e volatilidades inferiores, verifica-se uma alteração no índice referente a PME, que por ter uma posição de *short-sales*, o ϕ_i obtido passou a ser negativo, logo este índice contribui para a diminuição do risco da carteira, apesar de terem um $\beta_i > 1$.

O valor de Shapley normalizado permite-nos observar que, ao longo da fronteira eficiente, há um decréscimo na contribuição do risco associado a cada índice. Neste período, embora a medida padrão indique que, ocasionalmente, os índices PME e TT sejam os que menos contribuem para o risco da carteira, $Sh_i(\%)$ revela o contrário, mostrando que estes índices são os principais responsáveis pelo aumento do risco.

Com base nas medidas tradicionais de risco, como o desvio-padrão e β_M , investir em ações de grandes empresas (GE) não seria recomendado devido à sua elevada volatilidade. O valor de Shapley normalizado confirma este resultado, apontando que GE é o índice que mais contribui para o risco da carteira, juntamente com PME e TT.

Quando comparamos os resultados com o primeiro período, há um decréscimo generalizado nas contribuições de risco dos índices, segundo o valor de Shapley normalizado. Além disso, nota-se uma mudança no índice que mais contribui para o risco da carteira.

No primeiro período, era PME, enquanto no segundo período, são os TT, embora ambos continuem a contribuir para o aumento do risco em ambos os períodos. Considerando a medida ϕ_i , no primeiro período as ações GE contribuíam para a redução do risco da carteira, mas no segundo período passaram a aumentá-lo, em conformidade com o valor de Shapley. Também as obrigações do Estado de curto prazo (TGCMP) continuam a ter o maior peso, tanto na contribuição para a redução do risco nas várias carteiras como no w_i que apresentam nos dois períodos.

5.2.3 Amostra Total

Uma vez obtidos os resultados dos dois períodos anteriores, realizou-se a análise ao conjunto de dados total, ou seja, entre as datas de 01/01/2022 a 28/07/2023. Este período, por considerar dois períodos com tendências de mercado distintas, pode conduzir a resultados dúbios e consequentemente a conclusões menos acertadas, reforçando a importância da análise individual de cada período.

Novamente, a carteira de mercado utilizada foi o índice *Stoxx Europe 600*, que neste período em concreto, apresenta uma rentabilidade de 0.015 e um desvio-padrão de 1.059. Este período, apresenta um decréscimo da rentabilidade e um ligeiro aumento da volatilidade, comparativamente ao *Bull Market*, continuando a ser um período mais favorável do que o *Bear Market*.

Neste caso, os resultados obtidos para a covariância entre cada índice e a carteira de mercado e β de mercado são os seguintes:

Índices	σ_{iM}	β_M
GE	-0.009	-0.008
PME	0.036	0.033
TC	0.064	0.057
TGCMP	0.021	0.018
TGLP	0.055	0.049
TT	0.053	0.047

Tabela 5.7: Covariância entre o índice i e a carteira de mercado e β de Mercado dos índices na *Amostra Total*.

Com base na tabela 5.7 verifica-se que o índice GE é o único com covariância negativa (-0.009), indicando que os seus retornos movem-se de forma oposta aos retornos da carteira de mercado, ou seja, quando o mercado está em alta, o índice GE tende a cair, e vice-versa. Os restantes índices apresentam covariâncias positivas, sendo o índice TC o que possui a maior covariância (0.064), sugerindo uma correlação positiva mais forte com o mercado, acompanhando de forma mais próxima as suas variações.

Quanto ao β_M , o índice GE (-0.008) apresenta um valor negativo e próximo de zero, indicando que é pouco sensível às variações do mercado, movendo-se de forma ligeiramente inversa. Já os outros índices possuem betas de mercado positivos, com destaque para o índice TC (0.057), que apresenta o maior valor, indicando que estes índices reagem de forma positiva às variações do mercado, mas com sensibilidade moderada, visto que os valores de β_M são inferiores a 1.

De maneira geral, o índice GE é o mais desvinculado do comportamento da carteira de mercado, devido à correlação inversa e baixa sensibilidade às variações de mercado. Por outro lado, o índice TC é o que mais acompanha o mercado, com a maior covariância e β_M , sugerindo uma maior correlação com os retornos do mercado. No entanto, nenhum dos índices analisados apresenta uma grande sensibilidade, constatando-se que todos têm uma volatilidade inferior à do mercado.

Carteira de Variância Mínima

A fronteira eficiente é apresentada na figura 5.5, cuja $Carteira_{MVP}$ possui como coordenadas (0.116, -0.007).

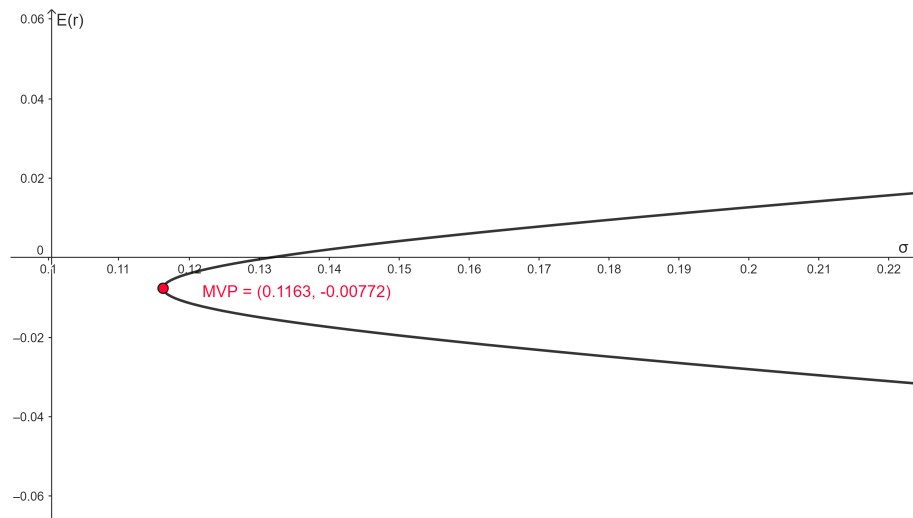


Figura 5.5: Fronteira Eficiente referente à *Amostra Total*.

Após os cálculos da contribuição do risco de cada ativo para a carteira MVP utilizando a medida convencional e o valor de Shapley, obteve-se os seguintes resultados, apresentados na tabela 5.8.

Índices	w_i	β_i	$\phi_i(\%)$	Sh_i	$Sh_i(\%)$
GE	0.009	1	0.914	0.194	166.439
PME	0.008	1	0.830	0.200	171.645
TC	0.030	1	3.047	-0.066	-56.979
TGCMP	1.521	1	152.076	-0.311	-267.821
TGLP	-0.568	1	-56.842	-0.084	-72.574
TT	0.000	1	0.026	0.185	159.290

Tabela 5.8: Pesos, β , ϕ , valor de Shapley e valor de Shapley normalizado na MVP (*Amostra Total*).

Com base na tabela 5.8, observa-se que os TGCMP possuem o maior peso na carteira, o que está diretamente associado a um maior risco relacionado a este índice, pois os β_i 's são todos iguais a 1 nesta situação, como já foi referido anteriormente. Em contrapartida, os índices que estão em posições de *short-sales* são os que apresentam um menor risco para o portfólio. É importante destacar que os TT, por apresentarem $w_i = 0$, não fazem parte da carteira de variância mínima (MVP).

Por fim, o valor de Shapley normalizado ($Sh_i(\%)$) indica que, assim como nos períodos anteriores, os TGCMP são os que mais contribuem para a redução do risco da carteira, com uma redução significativa de 267,821%. Em contrapartida, os TT, juntamente com os índices relacionados com ações (GE e PME), são responsáveis pela maior contribuição para o aumento do risco da carteira.

Comparando ambas as medidas e tendo em atenção a diferença de cálculo de ambas, já salientado anteriormente, observa-se contradições de resultados nos índices referentes a TC, TGCMP e TT.

Portfólios na fronteira eficiente

Nesta fase, escolheu-se 3 rentabilidades distintas e calculou-se a sua variância pela equação (5.5), de forma a obtermos 3 carteiras pertencentes à fronteira eficiente, como se observa no gráfico 5.6.

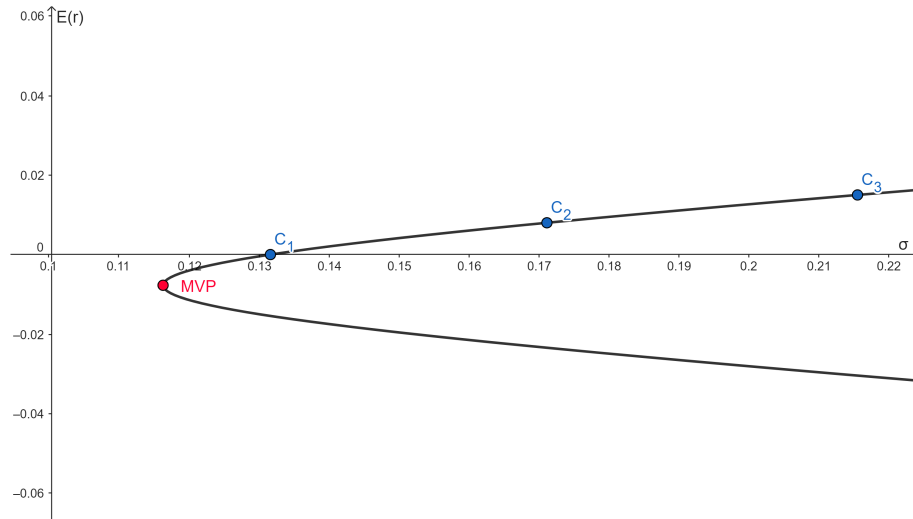


Figura 5.6: Fronteira Eficiente referente à *Amostra Total* com as carteiras a analisar.

Os valores para a medida convencional e valor de Shapley, reportados em desvio-padrão, obtidos para as três carteiras são apresentados na tabela 5.9.

Índices	w_i	β_i	$\phi_i(\%)$	Sh_i	$Sh_i(\%)$
$C_1 = (0.132, 0.00)$					
GE	0.070	0.729	5.072	0.219	166.638
PME	-0.061	-0.650	3.993	0.189	143.539
TC	0.032	0.024	0.077	0.113	85.723
TGCMP	1.497	0.503	75.279	-0.458	-348.161
TGLP	-0.490	-0.023	1.117	0.115	87.230
TT	-0.047	-3.085	14.461	-0.046	-34.969
$C_2 = (0.171, 0.008)$					
GE	0.132	0.400	5.284	0.249	145.537
PME	-0.134	-1.261	16.864	0.169	98.981
TC	0.033	-0.449	-1.505	0.161	94.085
TGCMP	1.472	0.127	18.749	-0.439	-256.462
TGLP	-0.409	-0.506	20.685	0.166	97.276
TT	-0.095	-4.195	39.922	-0.136	-79.417
$C_3 = (0.216, 0.015)$					
GE	0.187	0.235	4.387	0.276	127.897
PME	-0.197	-1.279	25.189	0.152	70.575
TC	0.035	-0.539	-1.878	0.205	94.895
TGCMP	1.450	-0.014	-1.971	-0.418	-193.948
TGLP	-0.338	-0.591	-19.955	0.212	98.542
TT	-0.137	-3.953	54.317	-0.211	-97.961

Tabela 5.9: Pesos, β , ϕ , Valor de Shapley e Valor de Shapley normalizado nos 3 portfólios da fronteira eficiente (*Amostra Total*).

De acordo com a tabela 5.9, observa-se que na carteira C_1 , com rentabilidade de 0%, os TGCMP é o índice que mais contribui para o risco da carteira (75.279%), atendendo à parcela de atribuição de risco ϕ_i . Já TC, por apresentar w e β_i muito próximos de zero, é o

índice que menos contribui para o risco deste portfólio (0.077%), atendendo ϕ_i . Quanto ao valor de Shapley normalizado, observa-se que os únicos índices que contribuem para a redução do risco desta carteira são os TGCMP e os TT (384.161% e 34.969%, respetivamente). Comparando ϕ_i e $Sh_i(\%)$, verifica-se que os índices que menos contribuem para o risco, segundo a medida tradicional (TC e TGLP), são os que apresentam uma contribuição elevada para o risco com base no valor de Shapley.

Na carteira C_2 , com rentabilidade de 0.8%, verifica-se que apenas os TC, segundo ϕ_i , contribuem para a redução do risco e os TT devido à sua forte correlação negativa (-4.195) com o portfólio C_2 , são responsáveis pela maior parcela de atribuição de risco. Relativamente ao $Sh_i(\%)$, observa-se que os TGCMP e TT apresentam valores negativos, sugerindo uma contribuição para a redução do risco do portfólio. Segundo esta medida, o índice GE é o maior responsável para a contribuição do risco em 145.537%. Novamente, existem várias situações de contradição de resultados, como é o caso dos TGCMP e TT.

Por último, na carteira C_3 , com rentabilidade de 1.5%, verifica-se que os índices referentes a títulos corporativos e títulos do governo ajudam na diminuição do risco deste portfólio, seguindo os resultados de ϕ_i por apresentarem valores negativos. Já os índices referentes a PME e TT apresentam valores superiores de atribuição de risco (25.189% e 54.317%, respetivamente). Considerando os resultados de $Sh_i(\%)$, os TGCMP e TT são os principais responsáveis para a redução do risco do portfólio, contudo o índice GE é o que mais contribui para o risco, em 127.897%, assim como TGLP, TC e PME. Como temos vindo a verificar nos portfólios anteriores, comprova-se também uma contradição de resultados entre ambas as medidas, como é o caso dos TGLP e TT.

Relativamente aos restantes períodos analisados, a maior diferença passa por considerar os TT uma boa opção para a redução do risco da carteira, facto que nunca tinha ocorrido anteriormente. Também os TGLP deixam de ser uma boa escolha como se tinha verificado nos períodos anteriores.

Comparando o β_M com o β_i calculado pela equação (5.2), observa-se que o único índice que inicialmente apresentava um comportamento inverso ao mercado era GE. No entanto, ao avaliar a sua sensibilidade em relação aos portfólios selecionados na fronteira eficiente, o índice GE exibe sempre valores de β_i positivos e inferiores a 1, o que indica uma menor volatilidade em comparação com as carteiras selecionadas. Nota-se ainda, que apesar de serem os TGLP, TGCMP e TC que apresentam uma menor volatilidade, segundo o desvio-padrão, o valor de Shapley indica-nos que o mais adequado seria investir em TGCMP e TT.

Os principais resultados obtidos em Shalit (2021), cuja metodologia é a base deste estudo, utilizando dados americanos entre janeiro 1926 até agosto 2019 e os resultados do

presente estudo com dados europeus, foram os seguintes:

Carteiras	GE		PME		TC		TGCMP		TGLP		TT	
	$\phi_i(\%)$	$Sh_i(\%)$	$\phi_i(\%)$	$Sh_i(\%)$	$\phi_i(\%)$	$Sh_i(\%)$	$\phi_i(\%)$	$Sh_i(\%)$	$\phi_i(\%)$	$Sh_i(\%)$	$\phi_i(\%)$	$Sh_i(\%)$
Resultados Shalit (2021)												
MVP (0.25,0.28)	0.06	386.5	0.13	581.4	1.31	129.4	-1.31	-262.5	-0.22	168.6	100	-903.5
#2 (1.11,0.47)	22.66	75.5	21.29	125.2	24.49	-1.27	57.34	-51.2	-26.58	10.1	0.8	-58.33
#4 (3.24,0.86)	23.35	17.42	21.72	33.03	23.85	22.78	58.14	8.07	-26.8	34.93	-0.26	-16.23
#6 (5.39, 1.25)	23.37	5.39	21.68	19.99	23.59	32.46	57.97	13.31	-26.7	44.29	0.09	-22.43
1º Período - Bear Market												
MVP (0.103,-0.010)	1.423	240.222	-0.399	234.600	-4.982	-80.144	156.786	-337.061	-53.600	-96.158	0.772	138.541
C ₁ = (0.112, 0.000)	-3.745	253.901	8.652	563.460	1.315	-217.360	81.584	-750.169	8.007	-249.465	4.187	499.632
C ₂ = (0.134, 0.010)	-12.057	224.660	27.781	479.127	4.777	-175.923	17.656	-644.351	45.096	-203.173	16.747	419.661
C ₃ = (0.167, 0.020)	-18.611	191.338	44.074	392.057	5.740	-135.832	-17.634	-529.624	57.908	-157.748	28.523	339.809
2º Período - Bull Market												
MVP (-0.0004, 0.120)	2.503	103.243	2.390	123.054	3.133	-35.346	146.600	-223.469	-53.997	-49.032	-0.629	181.550
C ₁ = (0.120, 0.000)	3.228	124.295	2.428	141.450	3.153	-49.051	144.947	-262.119	-52.997	-44.474	-0.758	189.900
C ₂ = (0.126, 0.005)	18.088	105.561	0.467	125.039	3.079	-52.272	115.241	-215.483	-37.527	-27.197	0.652	164.352
C ₃ = (0.160, 0.015)	53.608	56.111	-9.342	82.894	2.018	-43.771	52.077	-103.420	-10.011	4.484	11.649	103.702
Amostra Total												
MVP (0.116, -0.007)	0.914	166.439	0.830	171.645	3.047	-56.979	152.076	-267.821	-56.842	-72.574	0.026	159.290
C ₁ = (0.132, 0.00)	5.072	166.638	3.993	143.539	0.077	85.723	75.279	-348.161	1.117	87.230	14.461	-34.969
C ₂ = (0.171, 0.008)	5.284	145.537	16.864	98.981	-1.505	94.085	18.749	-256.462	20.685	97.276	39.922	-79.417
C ₃ = (0.216, 0.015)	4.387	127.897	25.189	70.575	-1.878	94.895	-1.971	-193.948	-19.955	98.542	54.317	-97.961

Tabela 5.10: Resultados Shalit (2021) vs Resultados com dados europeus.

Importa referir que, o período considerado em Shalit (2021), por ser tão extenso, engloba a crise de 1929-1933, os choques petrolíferos dos anos setenta e a crise de 2007-2008, assim como, nos demais períodos, tempos de crescimento económico. No entanto, nota-se na tabela 5.10 semelhanças entre os resultados de Shalit (2021) e o nosso estudo: as ações apresentam um contributo positivo decrescente à medida que consideramos carteiras com maior retorno e maior risco; as obrigações privadas contribuem negativamente para o risco em carteiras com menor retorno e menor risco (#2 em Shalit (2021) e MVP no corrente estudo no período *Amostra Total*); as obrigações do Estado de curto prazo (TGCMP) têm um papel central na redução do risco. Há diferenças nas demais obrigações públicas, podendo tal acontecer pelas discrepâncias de região e, em particular, do período em análise. As obrigações públicas poderão também ser influenciadas por fatores macroeconómicos diversos, como a globalização, os ciclos económicos, as políticas monetárias e orçamentais, entre outros fatores. Alguns destes idiossincráticos (por exemplo Carvalho e Schmitz (2023)) indicam heterogeneidade no espaço europeu ao comparar diferentes períodos.

Reforça-se que a existência de contradição, ao longo das várias análises, entre a medida ϕ_i e $Sh_i(\%)$ tem a ver com o facto da última considerar mais informação sobre a relação entre os diferentes ativos, enquanto que a primeira é mais restrita, tendo em conta apenas a covariância, conforme exposto na equação 3.3.

Se observarmos os resultados obtidos no estudo que serviu de motivação para este trabalho, nota-se que se consideramos apenas o ϕ_i , não é possível acompanhar a evolução das contribuições de cada ativo para o risco do portfólio ao longo das carteiras eficientes, uma vez que os valores não apresentam variações significativas. Como observado, as mudanças nos valores dessa medida são mais notáveis apenas na transição da MVP para

as outras carteiras da fronteira eficiente. Através do valor de Shapley obtém-se uma melhor visão da verdadeira contribuição dos ativos ao longo da fronteira eficiente, visto que se consegue acompanhar a verdadeira contribuição do ativo ao longo das diferentes carteiras. Comparando com os resultados da *Amostra Total* do presente estudo, que é o período que não contém a separação das diferentes tendências de mercado, permitindo assim uma comparação direta com os resultados de Shalit (2021), as oscilações dos valores de ϕ_i não são tão visíveis. Apenas se nota que nos índices GE e TC, os valores de ϕ_i têm o mesmo comportamento que em Shalit (2021).

Uma das principais conclusões apresentadas por Shalit (2021) é que para carteiras com um menor retorno e por conseguinte uma menor volatilidade, as ações são as que mais favorecem este tipo de portfólios. No entanto, para rentabilidades esperadas médias a altas e consequentemente volatilidades elevadas, são os títulos do governo a melhor opção de investimento. Nesta análise, confirma-se também que para carteiras com volatilidades mais elevadas os títulos do governo são de facto a melhor opção por contribuírem para a redução do risco.

Os TT e os TGCMP são os que mais contribuem para a redução do risco do portfólio nos dois estudos, seguindo a nova abordagem proposta por Shalit (2021). Também se observam as contradições referidas em Shalit (2021) ao comparar o ϕ_i com os valores $Sh_i(\%)$ nas várias carteiras.

Ao realizar a comparação de resultados entre os períodos *Bear* e *Bull*, verifica-se que segundo ϕ_i , no *Bear market*, ações de grandes empresas contribuem para redução do risco, contudo não se verificou esta situação no período *Bull*. Observando a carteira MVP nos dois períodos, também se constata que PME e TC contribuem para a diminuição do risco no *Bear market* e o mesmo não se sucede no período *Bull*. Uma outra diferença entre estes dois períodos seguindo a medida ϕ_i é que TGLP e TT contribuem para a redução do risco no *Bull market*, o que não se verifica no período *Bear*. Considerando o valor de Shapley normalizado, não existe este tipo de contradições entre os dois períodos, visto que GE, PME e TT contribuem para aumentar o risco, e TC, TGCMP e TGLP contribuem para a redução do risco. De realçar que as contribuições associadas a cada ativo medidas pelo valor de Shapley são inferiores no período *Bull*.

Por último, se compararmos os valores obtidos entre os períodos *Bear* e *Bull* com o período *Amostra Total* a principal diferença, observando $Sh_i(\%)$ é que TT passou a contribuir para diminuir o risco da carteira e TGLP contribui para o aumento do risco. Também se constata que ao longo da fronteira eficiente as contribuições do valor de Shapley diminuem em todos os períodos, exceto no período *Amostra Total* nos casos dos índices TC e TGLP.

De modo geral, os resultados obtidos nos períodos *Bear* e *Bull*, embora haja similitude

não são uniformes. Esta distinção, salienta-se quando comparamos os resultados *Amostra total* com estes sub períodos, permitindo que haja uma contribuição original desta tese face a Shalit (2021), no sentido de mostrar que um período heterogéneo não deve ser tratado como um todo, pois cada fase tem características diferentes e implicações diferentes para a constituição de carteiras.

Em suma, o valor de Shapley é a média ponderada dos riscos incrementais dos ativos adicionados ao portfólio. Para portfólios ótimos, a inclusão de ativos numa carteira reduz o risco, exceto quando adicionamos um ativo a um portfólio vazio. Valores de Shapley negativos indicam uma contribuição importante para a redução do risco, contrariamente a valores positivos que refletem um aumento do risco à medida que o retorno médio aumenta. É importante destacar que a contradição entre as medidas ϕ_i e $Sh_i(\%)$ ocorre porque a medida $Sh_i(\%)$ leva em consideração uma quantidade maior de informações sobre as interações entre os diferentes ativos, enquanto a ϕ_i é mais limitada, focando apenas na covariância.

ESCOLHA DE CARTEIRA UTILIZANDO O VALOR DE SHAPLEY

Neste capítulo, aborda-se uma nova forma de construção de carteiras utilizando o valor de Shapley. A escolha de portfólio é o processo de seleção e alocação de instrumentos financeiros, equilibrando o risco e o retorno conforme os objetivos e a tolerância ao risco do investidor, baseada na teoria moderna do portfólio.

6.1 Método

Este estudo tem como base a abordagem de Simonian (2019), que aplica o valor de Shapley na criação de portfólios eficientes, partindo do princípio de que os portfólios podem ser tratados como um jogo cooperativo de utilidade transferível. Neste contexto, os jogadores são os ativos que têm como objetivo minimizar a diferença nos pesos atribuídos a cada um em diferentes carteiras ótimas, de modo a que se forme uma nova carteira eficiente que distribua o peso ideal para cada ativo. Tendo esta perspectiva em mente, seria também interessante utilizar o valor de Shapley, não só para medir o risco associado a cada ativo, mas também, avaliar se é possível utilizá-lo na escolha de carteiras.

Na construção de carteiras, por vezes, o peso associado a cada ativo tem uma grande discrepância, dependendo se o ativo pertence a uma carteira na fronteira eficiente ou à carteira de variância mínima. Por exemplo, se compararmos os pesos dos TT na carteira MVP no período *Amostra Total* com a carteira C_3 desse mesmo período, verifica-se que na MVP os TT têm peso igual a 0, logo não estão a ser considerado neste portfólio e no portfólio C_3 admitem uma posição de *short-sales* tendo como peso, $w = -0.137$.

A nova abordagem utilizada neste capítulo, tem como objetivo harmonizar os pesos dos ativos de carteiras construídas de forma "natural", conjugando os pesos da carteira de variância mínima com uma carteira da fronteira eficiente.

O processo inicia-se com a determinação dos pesos máximos de cada ativo na carteira de variância mínima (MVP) e na fronteira eficiente (FE). Considerando que para um conjunto de n ativos existem $n!$ combinações possíveis de formação da grande coligação (carteira), a ordem em que cada ativo é adicionado influencia o seu peso. Consequentemente, o ativo pode ser incluído com o seu peso máximo ou com um valor inferior, garantindo que a soma dos pesos em cada combinação possível seja igual a 1. Após atribuir os pesos a todos os ativos nas $n!$ combinações possíveis de formação de carteira, o próximo passo, passa por somar os pesos atribuídos a cada ativo e dividir o resultado da soma por $n!$, ou seja, calcular a média ponderada de pesos dos ativos nas várias combinações de portfólios possíveis. Assim, é possível calcular o novo peso de cada ativo utilizando o valor de Shapley e obter uma alocação de ativos mais equilibrada.

O valor de Shapley poderá ser a solução para harmonizar os pesos dos ativos num portfólio, visto que os novos pesos calculados serão uma média ponderada de todos os pesos possíveis nas diferentes combinações de construção de carteira.

Após o cálculo dos pesos dos ativos nas novas carteiras, procedeu-se à avaliação de performance, de forma a verificar se este novo método permite a criação de portfólios mais rentáveis. Para isso, utilizou-se o *Rácio de Sharpe* e o *VaR* para avaliar as carteiras entre si. A primeira medida avalia o retorno excedente de um investimento em relação ao seu risco, indicando que quanto maior o seu valor melhor será o investimento e a segunda medida indica a perda máxima esperada de uma carteira.

O cálculo do Rácio de Sharpe seguiu a equação (3.9), onde foi considerado como r_f a rentabilidade do índice referente aos TGCMP, por apresentarem em todos os períodos um desvio-padrão inferior aos restantes índices. Para o cálculo do VaR, seguiu-se a equação (3.8), relativa ao VaR Normal, devido à sua simplicidade de cálculo e considerou-se um α de 5%, ou seja, considerou-se um nível de confiança de 95%.

6.2 Resultados e Discussão

Nesta secção apresenta-se os resultados obtidos através do novo método de escolha de carteira para os vários períodos analisados. De forma a se obter uma melhor compreensão dos valores obtidos, separou-se os resultados em duas etapas. Na primeira etapa, apresenta-se os pesos dos índices nas carteiras originais e nas novas carteiras, obtidas através da combinação da carteira MVP com uma outra carteira pertencente à fronteira eficiente. Na segunda fase, analisa-se a performance dos vários portfólios e compara-se as carteiras originais com as carteiras obtidas através deste método, de forma a se verificar se esta abordagem permite gerar carteiras mais eficientes.

6.2.1 1º Período - *Bear Market*

As carteiras utilizadas neste método são as mesmas do capítulo 5 referentes ao *Bear Market*, garantindo assim a continuidade da análise.

Pesos das Carteiras

De seguida, apresenta-se os pesos das várias carteiras, já incluindo os portfólios gerados pela combinação da carteira MVP com as carteiras C_1 , C_2 e C_3 . As três novas carteiras geradas por este método, são designadas por C_{SV_1} , C_{SV_2} e C_{SV_3} , onde C_{SV_1} é a combinação da carteira MVP com C_1 , C_{SV_2} a combinação da carteira MVP com C_2 e C_{SV_3} é a combinação da carteira MVP com C_3 .

Índices	C_{MVP}	C_1	C_2	C_3	C_{SV_1}	C_{SV_2}	C_{SV_3}
GE	0.014	0.038	0.061	0.086	0.003	0.013	0.024
PME	-0.004	-0.043	-0.082	-0.124	-0.020	-0.023	-0.025
TC	-0.050	-0.050	-0.050	-0.050	-0.047	-0.048	-0.051
TGCMP	1.568	1.624	1.680	1.741	1.376	1.374	1.372
TGLP	-0.536	-0.552	-0.568	-0.585	-0.307	-0.300	-0.302
TT	0.008	-0.017	-0.042	-0.068	-0.006	-0.015	-0.017

Tabela 6.1: Pesos dos índices nas carteiras: 1º Período - *Bear Market*.

A partir da análise da tabela 6.1, observa-se que a carteira MVP destaca-se por apresentar um peso significativamente elevado no índice TGCMP (1.568), enquanto outros índices, como PME e TC, possuem pesos negativos. As carteiras C_1 , C_2 e C_3 mostram alguma progressão nos pesos, com o índice GE aumentando gradualmente e o índice PME diminuindo, indicando mudanças na alocação de ativos e diferentes exposições ao risco e retorno. De notar que TC tem sempre o mesmo peso nas carteiras originais.

Ao combinar a carteira MVP com as carteiras C_1 , C_2 e C_3 , verifica-se que os pesos nas novas carteiras (C_{SV_1} , C_{SV_2} e C_{SV_3}) tornam-se mais moderados. O índice TGCMP, que apresentava um peso elevado nos portfólios originais, diminui significativamente nas carteiras combinadas, enquanto que o índice PME, que possuía valores negativos acentuados, também é suavizado. Estes resultados indicam que o método sugerido por Simonian (2019) resulta em carteiras mais equilibradas, reduzindo os extremos nos pesos e promovendo uma diversificação mais eficiente.

Portanto, as carteiras geradas por este novo método parecem ser mais eficientes em termos de distribuição de risco, oferecendo uma alocação de ativos mais moderada e equilibrada em comparação com as carteiras originais. Assim, sugere-se que a combinação de portfólios da fronteira eficiente com a carteira MVP tende a suavizar a volatilidade e

melhorar a eficiência geral das carteiras.

Indicadores de performance de carteira

Seguidamente, são apresentados os valores de rentabilidade esperada e desvio-padrão de todas as carteiras, juntamente com as respetivas medidas de performance.

Carteiras	$E[r_p]$	σ_p	Rácio de Sharpe	VaR(%)
C_{MVP}	-0.010	0.103	0.223	17.929
C_1	0.000	0.112	0.293	18.365
C_2	0.010	0.134	0.316	21.074
C_3	0.020	0.167	0.315	25.499
C_{SV_1}	0.068	0.126	0.803	13.841
C_{SV_2}	0.068	0.120	0.844	12.845
C_{SV_3}	0.078	0.116	0.953	11.277

Tabela 6.2: Indicadores de performance de carteira: 1º Período - *Bear Market*.

A análise da tabela 6.2 revela que em termos de rentabilidade esperada, as carteiras combinadas (C_{SV_1} , C_{SV_2} e C_{SV_3}) destacam-se com valores significativamente mais elevados. Por exemplo, a carteira C_{SV_3} apresenta uma rentabilidade esperada de 0.078, muito superior à da carteira C_3 que tinha apenas 2% de rentabilidade. Assim, a combinação de portfólios com a MVP aumenta o retorno potencial das carteiras.

No que toca ao desvio-padrão, as carteiras combinadas mostram-se menos voláteis do que as originais. A carteira C_{SV_3} tem um desvio-padrão de 0.116, inferior à carteira C_3 (0.167), o que significa que, além de gerar um maior retorno, o risco associado também é inferior. Apenas a carteira C_{SV_1} apresenta uma volatilidade superior que as suas carteiras originais (MVP e C_1).

O Rácio de Sharpe, indicador que avalia a relação entre risco e o retorno, é consideravelmente superior em todas as carteiras combinadas. Por exemplo, a carteira C_{SV_3} apresenta um rácio de 0.953, bastante superior aos rácios das carteiras MVP e C_3 (0.223 e 0.315, respetivamente). Com estes resultados verifica-se que as carteiras combinadas oferecem retornos muito melhores por unidade de risco, tornando-as mais eficientes.

Por fim, o VaR mostra que as carteiras combinadas estão menos expostas a grandes perdas em condições adversas. Considerando, mais uma vez, a carteira C_{SV_3} como exemplo, observa-se que o seu VaR é de 11.277%, significativamente menor que o de C_3 (25.499%) e MVP (17.929%), confirmando que as perdas potenciais são menores nas carteiras combinadas.

Em suma, as carteiras combinadas com a MVP no período *Bear Market* apresentam uma alocação de ativos mais harmonizada, uma melhor relação risco-retorno, maior rentabilidade esperada e menores perdas potenciais em comparação com as carteiras originais, tornando-as uma opção mais eficiente e atrativa para a construção de portfólios.

6.2.2 2º Período - *Bull Market*

As carteiras utilizadas neste período são as mesmas do capítulo 5 no *Bull Market*, garantindo assim a continuidade da análise.

Pesos das Carteiras

De seguida, apresenta-se os pesos das várias carteiras, já incluindo os portfólios gerados pela combinação da carteira MVP com as carteiras C_1 , C_2 e C_3 . As três novas carteiras geradas por este método, são designadas por C_{SV_1} , C_{SV_2} e C_{SV_3} , onde C_{SV_1} é a combinação da carteira MVP com C_1 , C_{SV_2} a combinação da carteira MVP com C_2 e C_{SV_3} é a combinação da carteira MVP com C_3 .

Índices	C_{MVP}	C_1	C_2	C_3	C_{SV_1}	C_{SV_2}	C_{SV_3}
GE	0.025	0.029	0.072	0.158	0.003	0.020	0.063
PME	0.024	0.022	0.002	-0.038	0.000	-0.004	-0.004
TC	0.031	0.031	0.029	0.024	0.005	0.000	0.000
TGCMP	1.466	1.457	1.345	1.122	1.295	1.224	1.065
TGLP	-0.540	-0.531	-0.414	-0.182	-0.283	-0.223	-0.107
TT	-0.006	-0.008	-0.034	-0.084	-0.019	-0.019	-0.019

Tabela 6.3: Pesos dos índices nas carteiras: 2º Período - *Bull Market*.

Através da observação da tabela 6.3, verifica-se uma redução significativa no peso do índice TGLP ao longo das carteiras na fronteira eficiente e MVP, que tendo uma posição de *short-sales*, permite reduzir o risco da carteira. Nas carteiras combinadas (C_{SV_1} , C_{SV_2} e C_{SV_3}), os pesos de TGLP são menores do que nas carteiras originais (C_1 , C_2 e C_3), sendo que a maior redução ocorre no portfólio C_{SV_3} , onde o peso cai de -0.182 (em C_3) para -0.107, sugerindo assim uma menor aversão ao risco nas carteiras combinadas, especialmente em C_{SV_3} . Também se observa, que o índice TGCMP mantém um peso substancial em todas as carteiras, embora os pesos diminuam um pouco nas carteiras combinadas, comprovando que TGCMP continua a ser o índice dominante em todas as carteiras, indicando a sua importância na composição dos portfólios.

Além disso, os índices com pesos inferiores como GE, PME e TT apresentam algumas variações nas novas carteiras geradas, mas não de forma tão significativa. Por exemplo,

o peso de GE diminui ao combinar C_1 com a MVP, mas aumenta ao combinar C_3 com a MVP. O índice PME, que já tinha um peso pequeno ou negativo nas carteiras originais, continua a apresentar valores muito baixos ou até mesmo nulos nas carteiras combinadas, sugerindo que é um ativo com pouca relevância. O índice TT, que apresenta um peso negativo pequeno, também permanece relativamente estável nas carteiras combinadas.

Por fim, as carteiras combinadas com a MVP resultam em portfólios com pesos mais equilibrados e conservadores, com uma redução na exposição de índices de maior risco, como o TGLP, e uma manutenção significativa de TGCMP, que continua a ser o principal componente dos portfólios. Estas combinações permitem suavizar as variações de pesos e manter uma exposição equilibrada.

Indicadores de performance de carteira

Seguidamente, são apresentados os valores de rentabilidade esperada e desvio-padrão de todas as carteiras, juntamente com as respetivas medidas de performance.

Carteiras	$E[r_p]$	σ_p	Rácio de Sharpe	VaR(%)
C_{MVP}	-0.0004	0.120	0.029	19.839
C_1	0.000	0.120	0.032	19.804
C_2	0.005	0.126	0.070	20.224
C_3	0.015	0.160	0.118	24.894
C_{SV_1}	-0.003	0.143	0.005	23.905
C_{SV_2}	-0.001	0.148	0.016	24.479
C_{SV_3}	0.003	0.164	0.044	26.627

Tabela 6.4: Indicadores de performance de carteira: 2º Período - *Bull Market*.

Através da análise da tabela 6.4, verifica-se que as carteiras que apresentam maior rentabilidade esperada, como C_2 (0.005) e C_3 (0.015), também são as que apresentam um maior desvio-padrão, indicando maior volatilidade e risco. No entanto, estas carteiras também exibem os melhores Rácios de Sharpe, especialmente C_3 (0.118), que apresenta a melhor relação entre retorno e risco de entre todas as carteiras analisadas. Por outro lado, a carteira MVP, apesar de ter o menor desvio-padrão (0.120), apresenta um retorno esperado negativo (-0.0004) e um Rácio de Sharpe baixo (0.029), o que indica que, embora minimize o risco, não oferece um bom desempenho ajustado ao risco.

As novas carteiras geradas por este método (C_{SV_1} , C_{SV_2} e C_{SV_3}) apresentam, de forma geral, uma performance inferior às carteiras C_1 , C_2 e C_3 , uma vez que apresentam uma menor rentabilidade e um maior desvio-padrão em relação à carteira MVP e, em alguns casos, como C_{SV_1} , uma rentabilidade negativa (-0.003) e um Rácio de Sharpe quase nulo

(0.005). No entanto, a carteira C_{SV_3} destaca-se entre os portfólios C_{SV_1} e C_{SV_2} , por apresentar um retorno positivo (0.003) e um Rácio de Sharpe superior às outras combinações, ainda que inferior à carteira C_3 , a carteira original.

Ao analisar o VaR, as carteiras combinadas com a MVP apresentam uma maior exposição a perdas do que a própria carteira MVP, realçando o portfólio C_{SV_3} que apresenta o maior VaR (26.627). Estes resultados sugerem que, apesar da tentativa de equilibrar o risco através da combinação de carteiras da fronteira eficiente com a MVP, os novos portfólios gerados ainda enfrentam uma considerável exposição a perdas. De forma geral, a carteira C_3 parece ser a melhor em termos de desempenho ajustado ao risco, oferecendo o maior retorno potencial com um equilíbrio aceitável entre risco e performance.

Resumidamente, existe uma descida das rentabilidades, assim como do Rácio de Sharpe destas novas carteiras, e o risco passou a ser superior. Para este período não é aconselhável seguir esta abordagem, como se comprovou ser útil em períodos de queda de mercado (*Bear Market*). Este novo método, sugere-nos que em períodos de mercado bons, não existe a necessidade de construir carteiras com pesos mais conservadores, pois irá diminuir a performance das carteiras.

6.2.3 Amostra Total

As carteiras utilizadas neste período são as mesmas do capítulo 5 referentes ao período *Amostra Total*, garantindo assim a continuidade da análise. Os resultados que se seguem evidenciam uma combinação não trivial dos dois períodos, que, como visto, se diferenciam significativamente em termos de escolha de carteira, além do já mencionado na avaliação do risco. Assim, ao considerar apenas um único período, corre-se o risco de selecionar uma carteira inadequada, com desempenho inferior devido à falta de ajuste às diferentes tendências do mercado.

Pesos das Carteiras

De seguida, apresenta-se os pesos das várias carteiras, já incluindo os portfólios gerados pela combinação da carteira MVP com as carteiras C_1 , C_2 e C_3 . As três novas carteiras geradas por este método, são designadas por C_{SV_1} , C_{SV_2} e C_{SV_3} , onde C_{SV_1} é a combinação da carteira MVP com C_1 , C_{SV_2} a combinação da carteira MVP com C_2 e C_{SV_3} é a combinação da carteira MVP com C_3 .

Índices	C_{MVP}	C_1	C_2	C_3	C_{SV_1}	C_{SV_2}	C_{SV_3}
GE	0.009	0.070	0.132	0.187	0.018	0.049	0.076
PME	0.008	-0.061	-0.134	-0.197	-0.013	-0.013	-0.013
TC	0.030	0.032	0.033	0.035	0.006	-0.001	0.005
TGCMP	1.521	1.497	1.472	1.450	1.277	1.205	1.141
TGLP	-0.568	-0.490	-0.409	-0.338	-0.271	-0.222	-0.192
TT	0.000	-0.047	-0.095	-0.137	-0.016	-0.017	-0.017

Tabela 6.5: Pesos dos índices nas carteiras - *Amostra Total*.

A análise dos pesos das várias carteiras da tabela 6.5 revela que o índice TGCMP destaca-se como o principal componente em todas as carteiras, como se tem comprovado ao longo dos vários períodos, com um peso elevado que diminui gradualmente nas combinações (C_{SV_1} , C_{SV_2} e C_{SV_3}), mas ainda assim permanece o maior, sugerindo que o TGCMP é um índice chave para a performance das carteiras, possivelmente devido à sua contribuição na diminuição do risco, como se comprovou através dos resultados do valor de Shapley na análise realizada no capítulo anterior.

Observa-se também uma redução dos pesos negativos nas carteiras combinadas, associados aos ativos de maior risco, como TGLP e PME, sendo demonstrado este facto na análise do capítulo anterior. O peso negativo do TGLP, por exemplo, diminui de -0.568 na carteira MVP para -0.192 na carteira C_{SV_3} , refletindo uma abordagem mais conservadora nas combinações, reduzindo a exposição a ativos mais voláteis. O peso negativo do índice PME, que é mais acentuado nas carteiras C_1 a C_3 , mantém-se constante nas combinações, indicando que a sua influência negativa é mitigada, mas ainda existe.

Por outro lado, se observarmos o peso do índice GE nas carteiras originais e nas combinadas, individualmente, verifica-se um constante crescimento, comprovando uma maior relevância deste índice quando se tem como objetivo maximizar a rentabilidade. Por exemplo, na carteira C_1 o seu peso é de 0.070 e em C_3 é de 0.187, o mesmo se verifica em C_{SV_1} que apresenta um peso de 0.018 e em C_{SV_3} de 0.076. No entanto, se compararmos os pesos das carteiras originais com as geradas pelo novo método verifica-se um decréscimo dos pesos de GE. O índice TC, por sua vez, apresenta variações mínimas, sugerindo que não tem um impacto significativo no perfil de risco ou retorno das carteiras.

Em síntese, as carteiras combinadas com a MVP conseguem equilibrar melhor o risco e o retorno, reduzindo a exposição a ativos mais arriscados, como o PME e o TGLP, e fortalecendo ativos mais estáveis e com maior peso, como o TGCMP e o GE. Resultando numa composição mais equilibrada e conservadora, mas ainda com potencial para captar retornos de ativos relevantes.

Indicadores de performance de carteira

Seguidamente, são apresentados os valores de rentabilidade esperada e desvio-padrão de todas as carteiras, juntamente com as respetivas medidas de performance.

Carteiras	$E[r_p]$	σ_p	Rácio de Sharpe	VaR(%)
C_{MVP}	-0.008	0.116	0.084	19.902
C_1	0.000	0.132	0.133	21.652
C_2	0.008	0.171	0.149	27.349
C_3	0.015	0.216	0.151	33.949
C_{SV_1}	-0.010	0.137	0.056	23.452
C_{SV_2}	-0.010	0.142	0.051	24.394
C_{SV_3}	-0.011	0.156	0.043	26.788

Tabela 6.6: Indicadores de performance de carteira - *Amostra Total*.

Observando os indicadores de performance das várias carteiras da tabela 6.6, nota-se que todas as carteiras geradas pelo método utilizado apresentam rentabilidades negativas variando entre -0.010 (C_{SV_1} e C_{SV_2}) a -0.011 (C_{SV_3}). Por outro lado, a carteira C_3 apresenta a maior rentabilidade esperada (0.015), indicando ser a mais atrativa em termos de retorno.

Se considerarmos o desvio-padrão, que mede a volatilidade dos retornos, mostra-se que as carteiras C_3 e C_2 são as mais arriscadas, com desvios-padrão de 0.216 e 0.171, respetivamente. Em contrapartida, as carteiras C_{SV_1} e C_{SV_2} têm os desvios-padrão mais baixos (0.137 e 0.142), mas, apesar do risco reduzido, apresentam rentabilidades negativas. A carteira C_{MVP} é a menos arriscada, com um desvio-padrão de 0.116, confirmando o seu objetivo de ser a carteira de menor risco.

O Rácio de Sharpe mostra que a carteira C_3 é a mais eficiente, com um valor de 0.151, sugerindo que, embora seja arriscada, oferece uma boa compensação em termos de rentabilidade. Por outro lado, a carteira C_{SV_3} tem o pior Rácio de Sharpe (0.043), indicando que não compensa o risco com retornos. Os portfólios C_2 e C_3 destacam-se como os mais equilibrados entre risco e retorno, enquanto as novas carteiras apresentam os piores desempenhos em termos de eficiência risco-retorno.

Por fim, o VaR, mostra que as carteiras C_3 e C_2 são as mais arriscadas, com valores de 33.949% e 27.349%, respetivamente. Já a carteira C_{MVP} apresenta o menor VaR, de 19.902%, confirmando novamente ser o portfólio de menor risco.

Em suma, confirma-se que a carteira C_{MVP} é a de menor risco, mas com uma rentabilidade negativa, enquanto que os portfólios C_2 e C_3 apresentam a melhor relação entre

risco e retorno, sendo os mais atrativos para investidores que pretendem maximizar a rentabilidade e estão dispostos a assumir mais risco. As carteiras geradas pela combinação da carteira MVP com as carteiras C_1 , C_2 e C_3 , por sua vez, mostram-se pouco compensadoras, com baixos retornos e elevada exposição ao risco.

Assim, como ocorreu no período *Bull Market*, esta nova abordagem não constrói carteiras mais eficientes e atrativas para os investidores, pelo contrário, vem a diminuir os retornos esperados e aumentar as volatilidades. Conclui-se que para períodos onde o mercado não se encontra em queda de preços, não se justifica utilizar esta nova abordagem.

CONCLUSÃO

Este trabalho aborda a aplicação do valor de Shapley, uma solução de teoria dos jogos cooperativos, na decomposição do risco de portfólios eficientes. O estudo tem como objetivo demonstrar que o valor de Shapley oferece uma maneira mais precisa de avaliar a contribuição individual de cada ativo para o risco total de uma carteira, superando as limitações das métricas tradicionais, como a covariância com a carteira e o beta de mercado. Além disso, abordamos de que forma o valor de Shapley pode ser utilizado na construção de portfólios equilibrados, ajustando-se melhor às dinâmicas de mercado, especialmente em mercados com tendências distintas.

Ao decompor o risco da carteira utilizando o valor de Shapley, verificou-se que, no período *Bear Market*, os índices TC, TGCMP e TGLP são os principais responsáveis por reduzir o risco, ajudando a proteger a carteira em momentos de maior instabilidade. Já no período *Bull*, estes mesmos índices continuam a contribuir para a diminuição do risco, porém com um impacto menor, refletindo o comportamento mais estável do mercado. Na análise da *Amostra Total*, os índices TGCMP e TT são os que mais se destacam na redução do risco. Esta diferença deve-se ao facto de que o período *Amostra Total* engloba combinações de tendências de mercado bastante distintas, o que pode gerar conclusões incorretas. Este resultado evidencia a importância de analisar-se o mercado separadamente, levando em consideração as diferentes fases, como períodos *Bear* e *Bull*, para obter uma avaliação mais precisa e realista das contribuições individuais dos ativos para o risco da carteira. Comprova-se também que, nos períodos *Bear* e *Bull*, à medida que a rentabilidade das carteiras eficientes aumenta, as contribuições de risco de cada ativo tendem a diminuir. No entanto, na *Amostra Total*, este comportamento nem sempre se verifica, sugerindo que a mistura de diferentes condições de mercado interfere na relação direta entre rentabilidade e risco.

Ao considerar-se os resultados obtidos através da parcela de atribuição de risco a cada ativo (ϕ_i), as conclusões diferem das obtidas com o valor de Shapley. No período *Bear*, os índices GE e TC são os que mais contribuem para a redução do risco, com a principal

diferença a residir no impacto do ativo GE. Já no período *Bull*, os maiores redutores de risco são TGLP e TT, destacando-se uma contradição no ativo TT, embora o setor privado também apresente contribuições muito baixas para o risco. Por fim, na *Amostra Total*, os ativos TC e TGLP são os que mais evidenciam-se na mitigação do risco, o que revela uma variação significativa nas conclusões conforme a metodologia utilizada.

Ao analisar-se os três períodos considerados neste estudo, a principal diferença nos resultados da decomposição do risco utilizando o valor de Shapley surge ao comparar os períodos *Bear* e *Bull* com a *Amostra Total*. No entanto, quando se utiliza a métrica standard ϕ_i , a principal diferença ocorre entre os períodos *Bear* e *Bull*, realçando que as contribuições de risco variam significativamente dependendo do método aplicado e do contexto de mercado analisado.

De acordo com Shalit (2021), os principais índices que contribuem para a redução do risco, quando se utiliza o valor de Shapley, são TGCMP e TT. Por outro lado, ao analisar-se a métrica ϕ_i , os índices que mais destacam-se são TGLP e TT (exceto TT na MVP). Ao comparar estes resultados com o período *Amostra Total*, verifica-se que os índices que mais reduzem o risco estão alinhados quando aplica-se o valor de Shapley. No entanto, surgem algumas divergências ao considerar-se a métrica tradicional, como no caso de TT, que apresenta valores elevados para o risco neste estudo.

A aplicação do valor de Shapley na construção de carteiras proporciona uma alocação de ativos mais equilibrada, devido à harmonização dos pesos dos ativos na carteira. Observa-se que, nos três períodos analisados, as novas carteiras resultantes da combinação da carteira MVP com uma carteira da fronteira eficiente reduzem a exposição a ativos mais arriscados, resultando numa composição de carteira mais conservadora. Esta abordagem permite que os investidores mantenham um perfil de risco mais controlado, promovendo uma gestão mais eficaz e alinhada aos seus objetivos financeiros em diferentes cenários de mercado.

Ao analisar a performance das carteiras geradas por este novo método, observa-se que, no período *Bear*, a alocação de ativos mais harmonizada resulta numa maior rentabilidade esperada e menores perdas potenciais em comparação com as carteiras originais. Esta característica torna as novas carteiras uma opção mais eficiente e atrativa para a construção de portfólios. Em contrapartida, no período *Bull*, houve uma queda nas rentabilidades, assim como no Rácio de Sharpe das novas carteiras, com o risco apresentando-se superior. Na *Amostra Total*, a situação é semelhante à apresentada no *Bull Market*, resultando numa diminuição dos retornos esperados e um aumento das volatilidades, evidenciando a complexidade das dinâmicas de risco e retorno em diferentes condições de mercado.

Em suma, esta nova abordagem de construção de carteiras, embora proteja melhor os

investidores durante períodos de adversidade, acaba por limitar os ganhos em tempos bons. As implicações de *trading* são significativas, visto que esta gestão equilibrada do risco pode levar a uma performance menos volátil e a uma proteção em tempos difíceis, contudo também pode resultar numa potencial redução de lucro durante períodos de crescimento, refletindo o *trade-off* entre segurança e maximização de retornos.

Ao longo de toda a análise, observa-se que o período *Amostra Total*, por englobar uma combinação de períodos com tendências completamente distintas, pode resultar em conclusões equivocadas. Assim, destaca-se a importância de realizar análises separadas para diferentes tipos de mercado, permitindo uma avaliação mais precisa e evitando a distorção dos resultados causada pela mistura de fases de mercado com comportamento divergente.

Para trabalhos futuros, seria pertinente realizar os cálculos que permitam determinar a contribuição relativa de um ativo para o risco sistemático e a contribuição relativa de um ativo para o risco específico. Esta análise complementaria o trabalho atual, que se concentrou apenas na contribuição relativa de um ativo para o risco total da carteira, proporcionando uma visão mais detalhada das componentes de risco envolvidas na decomposição do risco da carteira. Também sugeria aplicar o conceito do valor de Shapley na decomposição do risco de uma carteira ótima considerando mercados que não permitam vendas a descoberto, visando uma melhor compreensão da contribuição de um ativo para o risco total de um portfólio ótimo, neste contexto mais restritivo.

BIBLIOGRAFIA

- Auer, B., & Hiller, T. (2018). Can cooperative game theory solve the low-risk puzzle? *International Journal of Finance & Economics*, 24. <https://doi.org/10.1002/ijfe.1696> (ver p. 7).
- Carvalho, D., & Schmitz, M. (2023). Shifts in the portfolio holdings of euro area investors in the midst of COVID-19: Looking-through investment funds. *Review of International Economics*, 31. <https://doi.org/10.1111/roie.12681> (ver p. 46).
- DWS. (2024). *Xtrackers II Eurozone Government Bond 5-7 UCITS ETF 1C*. Obtido 2024-01-12, de <https://etf.dws.com/en-ch/LU0290357176-eurozone-government-bond-5-7-ucits-etf-1c/> (ver p. 20).
- Hiller, T. (2023). Shapley-based risk rankings: some theoretical considerations. *International Review of Economics*, 71, 1–8. <https://doi.org/10.1007/s12232-023-00434-7> (ver p. 7).
- Huang, C.-F., & Litzenberger, R. H. (1988). *Foundations for Financial Economics*. Prentice Hall. (Ver p. 12).
- Investment, D. (2024). *Deka iBoxx EUR Liquid Sovereign Diversified 1-3 UCITS ETF*. Obtido 2024-01-12, de <https://www.justetf.com/en/etf-profile.html?isin=DE000ETFL128#overview> (ver p. 20).
- Jorion, P. (1997). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk* (1st). McGraw-Hill. (Ver p. 14).
- Lourenço, J. M. (2021). *The NOVAthesis L^AT_EX Template User's Manual*. NOVA University Lisbon. <https://github.com/joaomlourenco/novathesis/raw/main/template.pdf> (ver p. i).
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91. <https://doi.org/10.2307/2975974> (ver pp. 1, 6, 11).
- Moehle, N., Boyd, S., & Ang, A. (2021). Portfolio Performance Attribution via Shapley Value. *arXiv preprint* (ver p. 8).

- Morelli, G. (2023). Responsible investing and portfolio selection: a shapley - CVaR approach. Annals of Operations Research. <https://doi.org/10.1007/s10479-022-05144-x> (ver p. 8).
- Mussard, S., & Terraza, V. (2006). The Shapley decomposition for portfolio risk. Applied Economics Letters, 15. <https://doi.org/10.1080/13504850600748968> (ver p. 5).
- Nasir, M. A., Le, T., Ghabri, Y., & Huynh, L. (2023). Sovereign Bonds and Flight to Safety: Implications of the COVID-19 Crisis for Sovereign Debt Markets in the G-7 and E-7 Economies. International Review of Financial Analysis, 86, 102548. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2023.102548> (ver p. 36).
- Ortmann, K. M. (2016). The link between the Shapley value and the beta factor. Decisions in Economics and Finance, 39. <https://doi.org/10.1007/s10203-016-0178-0> (ver p. 6).
- R. (2023). Introduction to dplyr. Obtido 2023-12-03, de <https://cran.r-project.org/web/packages/dplyr/vignettes/dplyr.html> (ver p. 25).
- Shalit, H. (2020a). Using the Shapley value of stocks as systematic risk. The Journal of Risk Finance, 21(4), 459–468 (ver p. 6).
- Shalit, H. (2020b). The Shapley value of regression portfolios. Journal of Asset Management, 21. <https://doi.org/10.1057/s41260-020-00175-0> (ver p. 6).
- Shalit, H. (2021). The Shapley value decomposition of optimal portfolios. Annals of Finance, 17, 1–25. <https://doi.org/10.1007/s10436-020-00380-2> (ver pp. 2, 7, 8, 19, 21, 28, 29, 45–48, 60).
- Shalit, H. (2023). Weighted Shapley values of efficient portfolios. Risk and Decision Analysis, 9, 1–8. <https://doi.org/10.3233/RDA-231507> (ver p. 7).
- Shapley, L. S. (1953). A Value for n-Person Games. Em H. W. Kuhn & A. W. Tucker (Eds.), Contributions to the Theory of Games II (pp. 307–317). Princeton University Press. (Ver pp. 2, 16).
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance, 425–442 (ver p. 9).
- Sharpe, W. F. (1994). The Sharpe Ratio. Journal of Portfolio Management, 21(1), 49–58 (ver p. 16).
- Shorrocks, A. F. (1999). Decomposition procedures for distributional analysis: a unified framework based on the shapley value [Mimeo, University of Essex]. (Ver p. 5).
- Simonian, J. (2019). Portfolio selection: a game-theoretic approach. Journal of Portfolio Management, 45(6), 108–116 (ver pp. 2, 8, 49, 51).
- Staudacher, J., & Anwander, J. (2021). Using the R package CoopGame for the analysis, solution and visualization of cooperative games. <https://cran.r-project.org/web/packages/CoopGame/vignettes/UsingCoopGame.pdf> (ver p. 25).

- STOXX. (2024a). EURO STOXX 50. Obtido 2024-01-12, de <https://stox.com/index/sx5e/> (ver p. 19).
- STOXX. (2024b). STOXX Europe Small 200 Index. Obtido 2024-01-12, de <https://stox.com/index/scxgr/> (ver p. 19).
- VanEck. (2023). Corporate Bond ETF, VanEck iBoxx EUR Corporates UCITS ETF. Obtido 2024-01-12, de <https://www.vaneck.com/pt/en/investments/corporate-bonds-etf/overview/> (ver p. 20).
- Vanguard. (2024). Vanguard 20+ Year Euro Treasury Index Fund Eur Acc. Obtido 2024-01-12, de <https://www.vanguard.co.uk/professional/product/fund/bond/9385/20-year-euro-treasury-index-fund-institutional-plus-eur-acc> (ver p. 20).
- Zaremba, A., Kizys, R., Aharon, D., & Umar, Z. (2020). Term Spreads and the COVID-19 Pandemic: Evidence from International Sovereign Bond Markets. SSRN Electronic Journal. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3727882> (ver p. 38).



2024 Contributo de Shapley: Medição do risco e constituição de carteira em mercados com tendência distinta

Jéssica Ascensão