



ANA SOFIA DE MELO BRITO
Licenciada em Matemática

O USO DA TECNOLOGIA NO ESTUDO DAS FUNÇÕES DE CRESCIMENTO NO ENSINO PROFISSIONAL

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E
DO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa
novembro, 2024



O USO DA TECNOLOGIA NO ESTUDO DAS FUNÇÕES DE CRESCIMENTO NO ENSINO PROFISSIONAL

ANA SOFIA DE MELO BRITO

Licenciada em Matemática

Orientador: Doutor António Manuel Dias Domingos,
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade NOVA de Lisboa

Júri:

Presidente: Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha,
Professora Auxiliar, FCT-NOVA

Arguente: Doutora Nélia Maria Pontes Amado,
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do
Algarve

Orientador: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos,
Professor Auxiliar, FCT-NOVA

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E DO
SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa

Tese de Mestrado: O uso da tecnologia no estudo das funções de crescimento no Ensino Profissional

Copyright © Ana Sofia de Melo Brito, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor António Manuel Dias Domingos pelas orientações, críticas e sugestões manifestadas ao longo do período em que decorreu a elaboração desta dissertação, bem como pela sua disponibilidade e entrega, sem as quais não teria sido possível realizar o trabalho de investigação.

À Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha, coordenadora do mestrado em ensino da matemática da FCT-NOVA, sempre prestável na resposta às minhas dúvidas, incentivando-me a dar o melhor de mim e a cumprir os prazos estipulados.

À minha colega de Mestrado em Ensino da Matemática, Ana Lopes que me incentivou a dar o meu melhor e em momentos mais difíceis me ajudou a não desistir. Revelou-se uma Amiga.

À minha família, pois sem o seu suporte a minha caminhada teria sido mais difícil.

Aos meus filhos João e Inês.

Aos meus alunos pela constante participação e disponibilidade.

“Para ser grande, sê inteiro: nada
Teu exagera ou exclui
Sê todo em cada coisa. Põe quanto és
No mínimo que fazes.
Assim em cada lago a lua toda
Brilha, porque alta vive.”
Ricardo Reis

RESUMO

As tecnologias, nomeadamente a calculadora gráfica e o computador, têm uma grande importância para a matemática e, aliadas a propostas e tarefas adequadas, são uma mais-valia para o processo da aprendizagem desta ciência.

O tema desta dissertação respeita ao modo como os conceitos de função, nomeadamente da função de crescimento, são apreendidos pelos alunos de uma turma de 12.º ano do Ensino Profissional na área de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos. A investigação pretendeu perceber a evolução do processo de reificação de conceitos de função, em particular da função de crescimento, mediado pelo uso do computador e pela calculadora gráfica, e ainda caracterizar as aprendizagens dos conceitos de funções de crescimento assim conseguidas. Para tal realizaram-se três estudos de caso com três alunos dessa turma seguindo uma metodologia qualitativa de índole interpretativa, com vista a descrever, interpretar e compreender o raciocínio dos alunos. Analisou-se o comportamento dos alunos ao ser-lhes solicitada a realização de tarefas utilizando o computador, nomeadamente o *software GeoGebra*, e/ou a calculadora gráfica.

Os resultados sugerem que o uso de tecnologias no processo da aprendizagem permite o desenvolvimento da capacidade de trabalhar funções na generalidade e em particular das funções de crescimento, contribuindo para uma gradual transição de conceções operacionais para conceções estruturais.

Em relação aos três estudos de caso, verificou-se que dois alunos mostraram maior desenvoltura na utilização da tecnologia, tendo desenvolvido processos de instrumentalização mais eficazes, o terceiro aluno também demonstrou ser capaz de utilizar a tecnologia, em benefício da aprendizagem da matemática.

Conclui-se por fim que o uso da tecnologia aliado a tarefas de diferente natureza otimiza a compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos que se pretendem estudar, contudo, o curso de tecnologia ajudou no processo de reificação.

Palavras chave: funções de crescimento, tecnologia, tarefas, representação matemática.

ABSTRACT

Technologies, namely graphing calculators and computers, are of great importance for mathematics and, combined with appropriate proposals and tasks, are an asset to the process of learning this science.

The theme of this dissertation concerns the way in which the concepts of function, namely the growth function, are learned by the students of a 12th grade class of Professional Education in the area of Management and Programming of Computer Systems. The research aimed to understand the evolution of the process of reification of function concepts, in particular the growth function, mediated by the use of the computer and the graphing calculator, and also to characterize the learning of the concepts of growth functions thus achieved. To this end, three case studies from this class were carried out following a qualitative methodology of interpretative nature, in order to describe, interpret and understand the students' reasoning. The behavior of the students was analyzed when asked to perform tasks using the computer, namely the GeoGebra software, and/or the graphing calculator.

The results suggest that the use of technologies in the learning process allows the development of the ability to work functions in general and in particular growth functions, contributing to a gradual transition from operational to structural conceptions.

In relation to the three case studies, it was observed that two students showed greater resourcefulness in using technology, having developed more effective instrumentation processes, the third student also demonstrated some ability to use technology with the main benefit of learning mathematics.

Finally, it is possible to conclude that the use of technology combined with tasks of different nature optimizes the students' understanding of the concepts that are intended to be studied, however, the technology course helped with the reification process.

Keywords: growth functions, technology, tasks, mathematical representation.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Contexto do trabalho de investigação	2
1.1.1	O Ensino profissional – breve apresentação	2
1.1.2	O Ensino profissional em números	3
1.1.3	A Matemática no Ensino profissional	5
1.1.4	Conteúdos e objetivos do estudo de funções	5
1.2	Motivações pessoais e pertinência do estudo	6
1.3	Objetivos e Questões de Investigação	6
1.4	Organização da dissertação	7
2	SUSTENTAÇÃO TEÓRICA	8
2.1	Um olhar sobre a História das Funções	8
2.2	A Tecnologia na Aprendizagem da Matemática	10
2.2.1	O papel da tecnologia	10
2.2.2	Tecnologia Gráfica	12
2.3	As tarefas de diferente natureza em sala de aula	13
2.3.1	O papel das tarefas	13
2.3.2	Implementação de tarefas de diferente natureza	14
2.4	As representações no estudo das funções	15
2.5	Teoria de Reificação de Anna Sfard	17
2.6	Teoria dos Registos de Representações Semióticas (Representação Semiótica de Raymond Duval)	21
3	OPÇÕES METODOLÓGICAS	23
3.1	Metodologia de investigação qualitativa	23
3.2	Estudo de caso	25
3.3	Técnicas de recolhas de dados	26

3.3.1	Observação.....	27
3.3.2	Questionário	28
3.3.3	Entrevista.....	28
3.3.4	Recolha documental.....	29
3.4	Procedimentos metodológicos adotados	30
3.4.1	Processo de Seleção de Participantes	30
3.4.2	Estratégia de Recolha de Dados	32
3.4.3	Os Recursos	33
3.4.4	Tarefas	34
4	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS.....	37
4.1	Estudo de Caso: Joana	37
4.1.1	Considerações finais	46
4.2	Estudo de Caso: Luís.....	46
4.2.1	Considerações finais	53
4.3	Estudo de Caso: Pedro.....	53
4.3.1	Considerações finais	59
5	CONCLUSÕES	60
5.1	Resposta às questões de investigação	60
5.2	Considerações finais.....	62
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	63
	ANEXOS.....	67

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 4.1.....	38
Figura 4.2.....	40
Figura 4.3.....	41
Figura 4.4.....	42
Figura 4.5.....	43
Figura 4.6.....	44
Figura 4.7.....	45
Figura 4.8.....	47
Figura 4.9.....	48
Figura 4.10	49
Figura 4.11	50
Figura 4.12	51
Figura 4.13	51
Figura 4.14	52
Figura 4.15	54
Figura 4.16	55
Figura 4.17	56
Figura 4.18	57
Figura 4.19	58
Figura 4.20	58

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1-1 - Conclusões (nº e %) e idade média de conclusão (nº) por oferta de educação e formação em Portugal (2020/2021)	4
Tabela 2-1 - Exemplos de noções Matemáticas e dualidade de conceções.....	18
Tabela 2-2 - Principais características das abordagens.....	19

SIGLAS E ACRÓNIMOS

EMAIE	Equipa Multidisciplinar de Apoio à Educação Inclusiva
EP	Ensino Profissional
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
RTP	Relatório Técnico Pedagógico
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
UFCD	Unidades de Formação de Curta Duração

1 INTRODUÇÃO

Com este estudo pretende-se analisar como o uso das tecnologias, nomeadamente o computador e a calculadora gráfica, facilitam a aprendizagem dos conceitos relativos à função de crescimento (Função exponencial de base superior a um e Função logarítmica de base a), em modelo contínuo não linear, proposto no 12.º ano de nível secundário do curso de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos no Programa oficial do Módulo A9 – Funções de Crescimento - do Ensino Profissional.

Pretende-se compreender as diferentes representações dos objetos matemáticos envolvidos, complementando com o “papel e lápis” normalmente utilizados e averiguar a capacidade dos alunos para explorar os vários processos de resolução de uma determinada tarefa utilizando como ferramentas o *GeoGebra no Computador* e a Calculadora Gráfica.

Segundo vários autores, existem inúmeras dificuldades com que os alunos se deparam no estudo das funções. Para Sfard (1991) um dos principais obstáculos tem a ver com o facto de os alunos identificarem o conceito de função com uma das suas representações. A este propósito, Domingos (1998) refere: “ser verdade” (p. 34) e Ponte (1992) acrescenta que “A maioria dos alunos chega ao Ensino Secundário com muitas dificuldades no pensamento abstrato. Para muitos, lidar com gráficos cartesianos e expressões algébricas não é uma tarefa fácil” (p. 6).

A manipulação hábil de expressões matemáticas não significa, necessariamente, a compreensão do significado matemático, o reconhecimento de padrões e estruturas ou a capacidade de interpretar os resultados (Goldin & Shteingold, 2001). Deve ser promovida nos alunos a ideia de trabalharem as diversas formas de representação de ideias matemáticas.

Assim sendo, o papel do professor passa por articular a informação obtida através das múltiplas representações (Rocha 2020) e observar a capacidade que os alunos têm em relacionar, conciliar e aproveitar esta abordagem para o desenvolvimento de procedimentos algébricos (Coulombe & Berenson, 2001; Friedlander & Tabach, 2001).

Com exercícios/tarefas adequadas e de diferente natureza, as tecnologias são ferramentas essenciais para ajudar os alunos nas diferentes representações de um objeto matemático e em particular nas funções de crescimento. Domingos (1998), a propósito de um estudo com alunos do 10º ano, sugere que o computador e a calculadora gráfica são essenciais para desenvolver nos alunos a capacidade de distinguir a mesma função nas suas diferentes formas de representação. Segundo o NCTM (2007), “A tecnologia enriquece a extensão e a qualidade das investigações ao fornecer um meio de visualizar noções Matemáticas sob múltiplas perspetivas” (p. 27).

1.1 Contexto do trabalho de investigação

Em 2022/2023 fui professora de matemática na área da grande Lisboa de uma turma do Ensino Profissional (doravante designado por EP) do 12.º ano do curso de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos. A escola oferece vários cursos profissionais, com uma forte ligação ao sector empresarial local e regional. O ensino profissional promove a aprendizagem estimulando o desenvolvimento para o exercício de uma profissão.

A minha prática letiva teve início no mês de setembro de 2022 e o programa do 12.º ano do EP de Matemática consiste na aprendizagem nos módulos A7, A8, A9 e A10, e cada módulo totaliza vinte e sete blocos de sessenta minutos.

Nesta turma os conteúdos programáticos foram na totalidade cumpridos, a organização das atividades letivas, seguiram uma metodologia de trabalho enquadrada nos princípios da Escola e Projeto Educativo. Tive oportunidade de colaborar em todas as atividades: Reuniões de Departamento, Grupo, Conselhos de Turma, e Projetos da Escola, de participar na elaboração das planificações de materiais e estratégias promotoras do interesse e, conseqüentemente, facilitadoras da aprendizagem. Ao longo do ano foi mantida total %colaboração com os colegas do Conselho de Turma de forma a estar bem informada quanto à realidade escolar e extraescolar dos alunos.

Na turma onde foi feito o projeto de investigação, também foi mantida total colaboração com o que foi pedido pela equipa EMAEI (Equipa Multidisciplinar de Apoio à Educação Inclusiva), de modo a ter particular atenção aos alunos com RTP (alunos com Relatório Técnico Pedagógico).

1.1.1 O ensino profissional – breve apresentação

Os cursos profissionais são um dos percursos do nível secundário de educação, caracterizados por uma forte ligação ao mundo profissional. É uma política pública de educação com trinta e três anos em Portugal (desde 1989). A concretização deste percurso ocorreu após a extinção do ensino, que vigorou entre 1976 e 1985, e desenvolveu-se em várias fases: entre 1986 e 2005 concretiza-se a institucionalização do sistema educativo, a criação das escolas profissionais (na dependência do Fundo Social Europeu - apoiada por um projeto específico para o incremento do Ensino Profissional), tendo-se desde 2005 até à atualidade assistido à generalização do ensino profissional.

Com o alargamento da escolaridade obrigatória até aos dezoito anos com a habilitação mínima do 12.º ano, assiste-se a um maior interesse nesta tipologia de ensino que valoriza o desenvolvimento de competências para o exercício de uma profissão, privilegia as ofertas formativas que correspondem às necessidades de trabalho locais e regionais e prepara o acesso a formações pós-secundárias ou ao ensino superior, caso seja a vontade dos alunos.

O Conselho Nacional da Educação (CNE) publicou em 2021 um documento extensivo sobre o Ensino Profissional no âmbito da análise do Estado da Educação. Na página 89 deste documento podemos ler que:

Decreto – lei nº 26/89, de 21 de janeiro, estabeleceu a criação das escolas profissionais e posteriormente o decreto – lei nº 4/98, de 8 de janeiro, veio estabelecer o regime de criação, organização e funcionamento das escolas e dos cursos profissionais nas escolas secundárias públicas.

Atualmente os cursos profissionais estão consignados no decreto – lei nº 55/2018, de 6 de julho e são regulamentados pela portaria nº 235 – A/ 2018, de 23 agosto. Os cursos profissionais constituem uma oferta educativa para a qualificação profissional dos alunos e dão importância à sua inserção no mundo do trabalho ou se o desejarem, o prosseguimento dos estudos (decreto – lei nº 55/ 2018, de 6 julho).

São cursos de dupla certificação, visto que conferem diploma de conclusão do ensino secundário, a par de certificação profissional de nível 4 de qualificação pela ANQEP (Agência Nacional para a Qualificação e o Ensino Profissional).

Nos cursos profissionais as áreas de educação e formação são inúmeras e incluem áreas como a agricultura, silvicultura e pescas, artes, ciências empresariais, engenharia e técnicas afins, indústrias transformadoras, informática, proteção do ambiente, saúde e serviços pessoais.

Tendo uma estrutura modular, cada curso organiza-se por diversos módulos e Unidades de Formação de Curta Duração (UFCD) na componente de formação tecnológica.

Independentemente da área de formação, os cursos profissionais têm as mesmas componentes – geral, científica e tecnológica e integram obrigatoriamente a formação em contexto de trabalho nesta última.

A avaliação dos alunos inclui uma Prova de Aptidão Profissional (PAP), na qual é apresentado um projeto que dê conta das competências e dos saberes desenvolvidos ao longo da formação.

Os cursos profissionais organizam-se de acordo com os perfis profissionais e os referenciais de formação do Catálogo Nacional de Qualificações, sendo todos os cursos criados por portaria.

Os cursos profissionais decorrem ao longo de três anos letivos, sendo que os alunos têm em média cerca de mil horas do currículo, agrupadas em horários semanais de trinta horas de aulas que podem ainda ser completados por horas de formação em contexto de trabalho. Esta formação, ou estágio, pode ocorrer no final do 12.º ano ou ao longo de dois ou mesmo dos três anos em que decorre o curso.

A certificação de 12.º ano depende da conclusão, com aproveitamento, de todos os módulos de todas as disciplinas e de todas as UFCD que integram a matriz curricular do curso, da conclusão da Formação em Contexto de Trabalho (estágio) com a duração de seiscentas horas e da aprovação da Prova de Aptidão Profissional, sendo então emitido ao aluno um diploma de dupla certificação.

1.1.2 O Ensino profissional em números

O estudo de 2021 do CNE revelou que no ano 2020/2021, os cursos profissionais representaram a maior oferta formativa e educativa do ensino secundário, com um total de 2303 cursos em 713 estabelecimentos de educação e ensino, distribuídos pelo território nacional.

Em 2021/2022 a região Norte apresentou o número mais elevado de cursos profissionais com 32,7% da oferta. Seguiu-se a região centro 25,4% e a Área Metropolitana de Lisboa com 24,5%.

No Continente observa-se que existia mais oferta de cursos profissionais no litoral e nas zonas urbanas com mais população, destacando a Área Metropolitana de Lisboa com 565 cursos profissionais, correspondente a 22,8 % desta oferta a nível nacional.

A Área Metropolitana do Porto, com 327 ofertas, ou seja 14,2%. Bastante inferior em ofertas são as regiões do Algarve, de Coimbra e as regiões Autónomas.

Neste estudo destacam-se os 10 cursos com maior oferta - em 2020/2021 os cursos com maior frequência e cobertura do território foram o de Técnico/a de Gestão e o de Programação de Sistemas Informáticos - que representam 6,7% da oferta total e existem em 18 regiões.

Os cursos de Técnico(a) de Restaurante / Bar e de Técnico(a) de Cozinha/Pastelaria, com uma representação de 5,3% e de 5% respetivamente, foram oferta em todas as regiões do território Nacional. De referir ainda que, com exceção do curso de Técnico(a) de Comunicação – Marketing, Relações-Públicas e Publicidade, os cursos acima enumerados surgem na lista dos 10 cursos com mais alunos matriculados.

Genericamente, mais de metade dos cursos disponibilizados para a frequência do ensino secundário são cursos profissionais 51,4%, enquanto os cursos científicos – humanísticos representam cerca de 40% da oferta (CNE, 2021, p. 177).

Apresentam-se os resultados gerais obtidos pelo estudo (CNE, 2021, p. 96):

Tabela 1-1

Conclusões (nº e %) e idade média de conclusão (nº) por oferta de educação e formação em Portugal (2020/2021)

Oferta de educação e formação	Conclusões		Idade Média
	Nº	%	
Cursos científico- humanístico	5910	89,1	17,3
Cursos com planos próprios	1112	97,1	17,3
Cursos artísticos especializados	802	89,8	17,5
Cursos profissionais	28972	83,0	18,1

Nota: Retirado de CNE (p.96).

Algumas das conclusões deste estudo que se afiguram mais pertinentes para este trabalho de investigação são:

1. A renovação do parque informático em 2020/2021, sendo os computadores portáteis os mais utilizados;
2. O número médio de alunos por computador com ligação à internet tem vindo a descer em todos os níveis de ensino, sendo significativamente mais baixo no ensino público do que no privado em 2020/2021;
3. O nível de proficiência dos docentes em competências digitais é baixo, particularmente nos domínios do ensino e aprendizagem, avaliação e promoção da competência digital dos aprendentes. (CNE, p. 260).

1.1.3 A Matemática no ensino profissional

O programa de matemática do Ensino Profissional do 10.º ao 12.º ano é dividido nos seguintes módulos, com carga horária variável:

Módulo A1 – Geometria; Módulo A2 – Funções Polinomiais; Módulo A3 – Estatística; Módulo A4 – Funções Periódicas; Módulo A5 – Funções Racionais; Módulo A6 – Taxa de Variação; Módulo A7 – Probabilidade; Módulo A8 – Modelos Discretos; Módulo A9 – Funções de Crescimento; Módulo A10 – Otimização.

1.1.4 Conteúdos e objetivos do estudo de funções

Do programa oficial do Módulo A9 – Funções de crescimento – e porque é neste âmbito que a investigação decorre, importa conhecer as competências matemáticas que todos os alunos devem desenvolver, designadamente: (Neves, 1998, p. 4)

- Aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso de tecnologias;
- A aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando modelos de crescimento contínuos não lineares;
- A aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo nomeadamente à tecnologia gráfica;
- Capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- Aptidão para usar equações e inequações como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações, inequações, assim como para realizar procedimentos algébricos;
- Capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspeto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, etc.;
- Sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos que traduzem situações enquadráveis em modelos contínuos não lineares das funções de crescimento;
- A capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

Os objetivos de aprendizagem deste módulo são o desenvolvimento, por parte dos alunos, dos seguintes aspetos:

- Reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos exponenciais sejam bons modelos quer para o observado quer para o esperado;
- Usar as regras das exponenciais e as calculadoras gráficas ou um computador para encontrar valores ou gráficos que respondam a possíveis mudanças nos parâmetros;
- Interpretar uma função e prever a forma do seu gráfico;
- Descrever as regularidades e diferenças entre padrões lineares, quadráticos, exponenciais, logarítmicos e logísticos;
- Obter formas equivalentes de expressões exponenciais;
- Definir o número de Neper “e” e o logaritmo natural;
- Resolver equações simples usando exponenciais e logaritmos (no contexto de resolução de problemas);

- Resolver, pelo método gráfico, inequações simples usando as funções exponenciais, logarítmicas e logísticas (no contexto de resolução de problemas);
- Resolver problemas simples e de aplicação usando diferentes funções de crescimento em modelo contínuo não linear.

1.2 Motivações pessoais e pertinência do estudo

A minha prática letiva no ensino da matemática foi sempre ao nível do 3.º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Ao longo do tempo verifiquei que nestes dois ciclos de ensino os alunos revelavam várias dificuldades em relação ao estudo das Funções Reais de Variável Real. Muitas vezes quando lhes era pedido para explorarem tarefas de diferente natureza, revelavam sistematicamente dificuldades diversas.

A motivação para o estudo que agora se apresenta ganhou corpo na sequência da consulta de algumas teses de mestrado que apontavam sugestões de investigação posterior, nomeadamente relativas ao uso do *software GeoGebra* e da calculadora gráfica e a sua influência no estudo das funções nas suas mais variadas representações. A estas pistas aliou-se o facto de facilmente se perceber que os alunos atualmente são muito diferentes dos alunos de há vinte ou mesmo dez anos atrás. Os alunos de hoje já nasceram num ambiente “digital”, rodeados de ferramentas digitais e são utilizadores habituais das mais variadas tecnologias, que vão desde o telemóvel, com acesso a um mundo de informação, a dispositivos como calculadoras gráficas, até a computadores ou telemóveis com *software* matemático como o *GeoGebra*. Faz então todo o sentido a utilização deste tipo de recursos em contexto de sala de aula, não só porque facilitam diversas explorações, mas também porque permitem – potencialmente - um melhor desenvolvimento da aprendizagem dos conhecimentos matemáticos.

Assim sendo, ao longo deste projeto de investigação analisa-se a forma como o uso da tecnologia em ambiente de sala de aula, nomeadamente a calculadora gráfica e o *software GeoGebra*, são instrumentos potenciadores, facilitadores e motivadores da aprendizagem do estudo das funções em geral e dos modelos contínuos não lineares em particular.

1.3 Objetivos e Questões de Investigação

Para dar cumprimento à compreensão da influência da tecnologia no processo da aprendizagem de alguns tipos de funções, colocam-se as seguintes questões, às quais se vai tentar obter resposta com este projeto de investigação:

1. Qual o papel da tecnologia na interpretação do conceito de função e em particular da função exponencial e da função logarítmica?
2. Em que medida o uso da tecnologia favorece a reificação dos conceitos?
3. Como se caracterizam as aprendizagens das funções de crescimento (exponenciais e logarítmicas) mediados pelo uso de tecnologia?

Pretende-se com esta Investigação contribuir para uma melhor compreensão de como os alunos do 12.º ano do Ensino Profissional, que realizam o seu percurso escolar do 10.º ao 12.º ano feito através de módulos aos quais, em todos os módulos é obrigatória classificação positiva, interpretam o conceito de função, nomeadamente das funções de crescimento, nos modelos contínuos não lineares – exponencial e logarítmico e caracterizar de que forma esses conceitos são apreendidos com recurso ao computador e/ou à calculadora gráfica.

Assim sendo vai-se desenvolver um estudo onde o uso da tecnologia surge como uma ferramenta imprescindível do processo de aprendizagem da matemática.

1.4 Organização da dissertação

Este trabalho está dividido em cinco capítulos: o primeiro descreve a relevância, a contextualização, os objetivos e as questões desta investigação; no capítulo dois é feita uma revisão de literatura dos temas relevantes para este estudo, nomeadamente das teorias relativas ao desenvolvimento e compreensão de representações diferentes no estudo das funções; no capítulo três descreve-se a metodologia utilizada, de natureza qualitativa, o contexto do estudo e a seleção dos alunos participantes, bem como as técnicas de recolha de dados; no capítulo quatro procede-se à análise dos dados recolhidos, fazendo-se uma descrição pormenorizada do desempenho dos alunos na realização das tarefas propostas; por fim, no quinto capítulo, são apresentadas as conclusões do estudo em relação aos casos apresentados e as considerações finais em relação ao uso das tecnologias para o estudo das várias funções propostas, deixando algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 SUSTENTAÇÃO TEÓRICA

Surge oportuna uma breve resenha da história e da didática da Matemática, designadamente no que respeita à implementação de tarefas de diferente natureza relacionadas com as representações das funções e do modo como a tecnologia tem vindo a desempenhar um papel muito relevante na aprendizagem da Matemática.

Desta resenha surgem como significativas a teoria de reificação de Anna Sfard e a Teoria dos registos de representações semióticas de Raymond Duval.

2.1 Um olhar sobre a História das Funções

A didática da matemática é uma área de estudo que se dedica a investigar e desenvolver estratégias e métodos para o ensino da matemática. A didática da matemática faz o planeamento, a organização e execução de práticas pedagógicas que irão facilitar a aprendizagem pelos alunos dos conteúdos matemáticos. Engloba e identifica as melhores maneiras de explicar os conceitos matemáticos, promove o desenvolvimento do raciocínio lógico e habilidade para resolução de problemas. Os avanços nesta área permitem ao professor explorar diferentes abordagens de ensino, diferentes materiais manipulativos, problemas reais, jogos, tecnologias digitais e outras estratégias que favoreçam a compreensão dos conteúdos. (Neves, 1998).

O tema tratado nesta investigação – Função - é um conceito de extrema importância na Matemática atual, e que ganhou expressão como objeto de estudo nos finais do século XVII, com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal, ocupando cada vez mais um papel de destaque nos currículos atuais.

A noção de função está presente no currículo português da Matemática em todos os anos de escolaridade, do 7.º ao 12.º ano, assim como na generalidade dos programas de unidades curriculares ao nível do ensino superior que envolvam Matemática. De facto, o conceito de função tem hoje um papel central na Matemática, mas nem sempre foi assim!

Historicamente a origem do Cálculo está ligada ao estudo das secções cónicas por Apollonius Pergeus, no século II a.C. Apesar das manifestações implícitas do conceito de função remontarem ao século II a.C., foi Leibnitz quem, em 1692, introduziu a “função”. Leibniz diz, por exemplo, que a “tangente é uma função da curva”. (Neves, 1998, p. 8).

A primeira definição formal de função surgiu no século XVIII, em 1718 pela mão de Johann Bernoulli que diz, sem mais explicações, “chamamos função de uma variável a uma quantidade composta de uma qualquer forma por essa variável e constantes” (Kleiner, 2012, p.105).

Durante a primeira metade do século XVIII dá-se um distanciamento progressivo da Análise à sua origem geométrica, processo este que conduziu à substituição do conceito de variável aplicado a objetos geométricos pelo conceito de função como fórmula algébrica. Foi neste contexto que Euler escreveu

'Introduction in Analysis In finitourum', o primeiro trabalho onde o conceito de função assume um papel central e tem por base uma abordagem algébrica. De referir que no volume I desta obra não há uma única figura ou desenho, o que naturalmente não acontecia quando a abordagem geométrica imperava.

Para Euler e seus contemporâneos da primeira metade do século XVIII, a variável independente tinha de tomar todos os valores sobre todos os números reais com exceção dos pontos isolados. A função também era descrita por uma única expressão analítica. Euler, dá-lhe sentido ao explicitar expressões analíticas admissíveis. Estas incluem as operações de adição e multiplicação, mas também de exponenciação, radiciação, logaritmo, seno e cosseno.

Na segunda metade do século XVIII foi o próprio Euler que, introduzindo uma noção de continuidade, alterou o conceito de função anteriormente prevalecente.

O conceito de função contínua introduzido por Euler, aparentemente tão "simples", é na verdade desafiante... A definição de continuidade que hoje conhecemos não foi formulada antes do século XIX, cerca de 150 anos após a invenção do Cálculo por Newton e Leibnitz. Nesta altura já se consideravam funções definidas por séries (somas infinitas de outras funções), derivação e integração.

Por volta de 1821, Cauchy define continuidade essencialmente como nós a entendemos hoje, contudo usando a linguagem de infinitesimais prevalecendo à época. A formulação atual foi introduzida, na década de 50 do século XIX, por Weirstrass.

Para melhor perceber a história do conceito de função temos também de mencionar Fourier. Ele dedicou-se ao estudo de problemas físicos, por exemplo, a propagação de calor, tendo publicado um trabalho neste domínio - Teoria do calor - hoje denominada por série de Fourier. A ideia de representar funções por séries trigonométricas já tinha sido experimentada por vários matemáticos, nomeadamente por Euler, e essa representação era conhecida para algumas funções, mas não para todas. A relevância do trabalho e em particular das séries de Fourier é inegável, porém a afirmação de que qualquer função definida num intervalo se pode representar por uma série de Fourier não é válida para a noção de função dos nossos dias. (Neves, Maria et al. 1998).

Dirichelet foi um dos vultos incontornáveis da primeira metade do século XIX, que contribuiu para a evolução do conceito de função. Foi um dos primeiros a considerar funções definidas sobre intervalos de números reais, e não apenas sobre o conjunto dos números reais no seu todo. Mas, mais importante, adotou o conceito de função como uma correspondência arbitrária e trabalhou-o dessa forma, e não como uma expressão analítica. Para Dirichelet, "y é função de uma variável x, definida no intervalo $a < x < b$, e para cada valor de x nesse intervalo existe um valor definido para a variável y, independentemente da forma sob a qual essa correspondência é estabelecida." (Kleiner, 2012, p.114). Na segunda metade do século XIX, Dedekind generalizou a definição de Dirichelet a funções definidas entre conjuntos arbitrário, conceito que se tornou dominante durante o século XX.

Nicolas Bourbaki foi o pseudónimo adotado por um grupo de matemáticos ex-alunos da École Normale Supérieure – PSL, que se propuseram publicar uma série de compêndios versando sobre várias áreas da matemática e que são genericamente designados por *Éléments de Mathématique*.

Foi em 1939 que Bourbaki, num desses compêndios intitulado *Theorie des Ensembles* (Teoria de Conjuntos), definiu função como subconjunto de um produto cartesiano:

Sejam E e F conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre um elemento x variável em E e um elemento y variável em F diz-se uma relação funcional em y se, para cada x pertencente a E , existe um único y em F que está nessa relação com x . Designamos por função a operação que dessa forma associa a cada elemento x de E o elemento y de F que está em relação com x . Dizemos que y é o valor da função no elemento x , e que a função é determinada pela relação funcional dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (Bourbaki, 1968, p. 351).

O Conceito de função dos nossos dias assenta assim na noção de conjunto, desenvolvida por Cantor na última metade do século XIX e conhecida por teoria informal de conjuntos, que teve continuidade, já no século XX, na teoria axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

Atualmente o paradigma nas escolas passa, sempre que possível, por trabalhar a expressão analítica da função, mas inequivocamente e sem surpresa, o que fazemos é “interpretar uma função como uma correspondência unívoca de um conjunto num outro” (Canavarro et al., 2021, p. 27). As várias formas de representação de funções, diagramas, tabelas, expressões analíticas e gráficos – permitem perceber a abrangência do conceito.

As funções de crescimento estão presentes em diversos contextos e áreas da Matemática e surgiram historicamente a partir da necessidade de descrever e compreender como certos fenómenos ou quantidades variam ao longo do tempo, do espaço ou de acordo com outras variáveis. As funções de crescimento, como as exponenciais e as logarítmicas, foram sendo desenvolvidas e formalizadas ao longo da história, com contribuições significativas de matemáticos como Leonardo Fibonacci, John Napier, Pierre-Simon Laplace, entre outros. Elas desempenham um papel fundamental tanto na modelagem, quanto em aplicações práticas nas ciências e nas engenharias. O estudo das funções de crescimento permite-nos compreender a evolução e o comportamento de sistemas dinâmicos e é uma ferramenta muito importante nas mais diversas áreas como, economia, física, biologia...

Hoje, na era das novas tecnologias e com o aparecimento de calculadoras cada vez mais rápidas e economicamente acessíveis, deixou de fazer sentido uma tabela de logaritmos ou uma régua de cálculo para desenvolver cálculos mais ou menos complexos.

Porém, o estudo da função logarítmica e da sua inversa, a função exponencial, continua a ser uma área importante no ensino da Matemática pela simples razão de que as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza e da análise (Neves, 1998).

2.2 A Tecnologia na Aprendizagem da Matemática

2.2.1 O papel da tecnologia

A sociedade de hoje está em constante mudança: o trabalho requer novas competências, os problemas são complexos e envolvem conhecimentos altamente especializados, a inteligência artificial é já uma realidade que alimenta expectativas em áreas como a medicina ou a exploração espacial, que (re)confirma a natureza do trabalho, mas que simultaneamente suscita muitas questões éticas (CNE, p. 315). A própria Comissão Europeia e os estudos da OCDE têm vindo a alertar para este novo paradigma mundial - o mundo

é digital e as tecnologias digitais estão presentes na vida pessoal, profissional e comunitária. O digital é enunciado como a nova literacia, no quadro das tendências que estão a transformar a educação.

Os jovens parecem cada vez mais conhecedores e habilidosos em relação às competências digitais do que as gerações anteriores, 93% dos postos de trabalho na Europa requerem a utilização de um computador e praticamente não existem empregos onde não sejam necessárias, pelo menos, competências digitais elementares (Comissão Europeia, 2017).

A inaptidão para usar a tecnologia digital pode excluir jovens e adultos do trabalho e ser um fator de exclusão social atendendo ao modo como os instrumentos e os espaços digitais têm vindo a assumir um papel maior na vida privada dos indivíduos (OCDE, 2022).

As novas gerações são diferentes comparando com as crianças nascidas antes de 2010, a geração alfa que frequenta atualmente a educação primária, com a geração Z, os nativos digitais, nascidos a partir da segunda metade dos anos 90, evidenciam que os mais novos são mais visuais, têm janelas de concentração cada vez menores, reagem e compreendem muito mais a narrativa visual dos conteúdos do que a narrativa que acompanha as imagens. Provavelmente, também aprendem de maneira diferente. A atenção a estas diferenças influencia por exemplo, a escolha de recursos e implica a sua diversificação (CNE, 2021, p. 325).

A revisão de literatura segue a mesma tendência: Ponte (2000) enfatiza que “Hoje em dia, as tecnologias de informação e comunicação representam uma força determinante do processo de mudança social, surgindo como a trave-mestra de um novo tipo de sociedade, a sociedade de informação” (p.64). Desta forma, a Escola tem de analisar de que forma o uso das TIC (Tecnologias de Informação e Comunicação) podem contribuir para a melhoria do processo da Aprendizagem.

Oliveira e Domingos (2008) referem que o uso de *software* na Matemática escolar é uma recomendação curricular bastante importante, tanto nacional como internacionalmente, e contribui significativamente para promover conceitos, explorar e relacionar diversas representações, investigar propriedades e relações Matemáticas, auxiliar os processos de modelação etc; acrescentam ainda que, se por um lado as tecnologias fazem parte do nosso quotidiano, por outro há necessidade de se continuar a investir nesta área.

Laborde (2000) considera que menosprezar as novas tecnologias numa sociedade cada vez mais tecnológica seria mais um motivo para os alunos acreditarem que a Matemática é antiquada e nada tem a ver com o mundo real. Esta autora enfatiza a ideia de que as ferramentas tecnológicas matemáticas irão permitir aos alunos visualizar fenómenos matemáticos, fazer conexões, realizar experiências, ou seja, fazer Matemática como esta é feita pelos especialistas.

As orientações internacionais para a disciplina recomendam o recurso à tecnologia em aula, sendo disso exemplo a relevância dada pela NCTM (2007) ao recurso às tecnologias, em particular aos computadores, para o ensino da Matemática. Um dos aspetos mais importantes é a oportunidade de visualizar objetos matemáticos, já que “(...) o poder gráfico das ferramentas tecnológicas possibilita o acesso a modelos visuais que são poderosos, mas que muitos alunos são incapazes ou não estão dispostos a realizar de modo independente” (p. 27).

Oliveira e Domingos (2008) dizem-nos que os professores têm ao seu dispor uma variedade enorme de *softwares*, pelo que propõem uma avaliação de prós e contras, tendo em conta o que se pretende numa determinada aprendizagem.

Esta avaliação deu origem a uma categorização, que apresentaram, tal como Valente (1993), de forma sumariada:

- **Os tutoriais:** o computador desempenha o papel do professor – Ensino Assistido por Computador.
- **Modalidade de exercícios e práticas:** exercícios eletrónicos que os alunos devem resolver, onde se apela à memorização e à repetição de procedimentos (rever e consolidar os conteúdos e procedimentos trabalhados na sala de aula).
- **Jogos educacionais:** de uma forma lúdica e com alguma liberdade, os alunos exploram determinados conteúdos.
- **Simuladores:** estes recursos digitais destacam-se pela possibilidade de criar modelos dinâmicos de fenómenos do mundo real e que vão permitir a exploração de diferentes situações.

Os *softwares* como por exemplo o *GeoGebra* podem ser classificados como simuladores, já que o aluno poderá construir objetos que modelem objetos reais ou matemáticos, alterar esses mesmos objetos e analisar as características e propriedades, permitindo que cada vez mais jovens tenham a experiência do que é fazer matemática.

Se pretendemos conhecer o papel que a tecnologia desempenha no ensino, as vantagens que traz à sala de aula e às aprendizagens e a forma como o uso da tecnologia é encarada pela sociedade, é importante referir que Domingos (2008) diz-nos que, quando se coloca a questão se é útil usar a tecnologia em sala de aula, a resposta é obviamente que sim. Para este investigador, o destaque dado pelo estado, nomeadamente nas Grandes Opções do Plano de 2017, é prova da necessidade de mudança, sendo que é determinado “o reforço da utilização das TIC no âmbito do currículo, tendo em vista a apreensão, desde cedo, de práticas de aprendizagem baseadas nas novas tecnologias” (DR 28/12/2016, p. 4846).

Toda o corpo de investigação existente sinaliza que o uso da tecnologia introduz melhorias na aprendizagem em geral e na Matemática em particular: investigadores em educação matemática como Goos & Bennison (2008) têm estudado o papel da tecnologia no ensino da matemática; autores como Demana & Waits, (2001), Hennessy et al., (2001) ou Ruthven (1990) realçaram a capacidade de as tecnologias digitais permitirem múltiplas representações e relações entre as mesmas. Nesta era digital, os alunos do ensino básico e secundário têm uma destreza natural para as tecnologias, constitui uma mais-valia na aprendizagem da Matemática (Powers & Blubaught, 2005).

2.2.2 Tecnologia Gráfica

O **GeoGebra** é um *software* de Matemática dinâmica, concebido por Markus Hohenwarter e Judith Preiner e pode ser utilizado em qualquer grau de ensino para o ensino e aprendizagem da Matemática.

O GeoGebra combina a facilidade de utilização de um *software* de geometria dinâmica com alguns recursos de um sistema CAS (Computer Algebra System), que permite manipulação simbólica de

expressões e uma folha de cálculo. É possível trabalhar em simultâneo com três janelas/folhas diferentes: gráfica, algébrica e numérica, além da folha de cálculo.

Estas características, aliadas ao facto de todos os alunos terem computador e do *GeoGebra* ser de acesso público gratuito, determinaram a escolha deste *software GeoGebra* para a realização desta investigação. Para (Paiva, 2018), na resolução de tarefas onde os alunos trabalham colaborativamente com recurso a um ambiente de geometria dinâmica (*GeoGebra*) tem grande importância como os alunos constroem diferentes significados matemáticos.

A **Calculadora gráfica** é uma ferramenta essencial para promover as múltiplas representações das funções de crescimento. Uma das principais características desta ferramenta é que permite ligar expressões a gráficos, pelo que os alunos podem obter um *feedback* visual praticamente imediato que ilustra vários aspetos do mesmo objeto. Assim, o professor poderá utilizar esta ferramenta para articular o contacto e promover a relação entre as diferentes representações de uma determinada função (Ponte, 2006; Rocha, 2016).

A calculadora realiza o trabalho mecânico e permite analisar mais exemplos e mais formas de representação do que é possível manualmente (Ponte, 2006). A facilidade e rapidez possibilita a observação de muitos casos para uma determinada situação e também vai permitir, segundo Rocha (2015) “experimentar diferentes relações matemáticas, refletindo sobre elas enquanto procuram identificar regularidades e formar conjecturas” (p.327). No mesmo sentido aponta o NCTM (2007), relevando que desta forma a calculadora servirá de apoio a investigações levadas a cabo pelos alunos.

Mas existe ainda muito caminho a percorrer se pretendemos usar todas as potencialidades destas ferramentas. Atendendo às duas representações, gráfica e algébrica, Ruthven (1990) defende que o uso regular da calculadora permite estabelecer relações entre estas duas representações, mas é necessário avaliar devidamente o tipo de aprendizagem envolvida, pois, tal como defende Ponte (2006), compreender essas representações sem uma aprendizagem prévia pode conduzir a interpretações não correspondentes à realidade. A propósito desta análise crítica, Rocha (2020) exemplifica que é fundamental escolher uma janela de visualização adequada pois existe uma complexidade envolvida no ajustamento dessa janela de visualização para observar as principais características do gráfico, argumentando que é necessário um domínio matemático suficiente para utilizar esta abordagem. Também Leinhardt et al. (1990) alertam para a falta de espírito crítico dos alunos perante os gráficos produzidos pela calculadora, um aspeto muito relevante a ser atentamente analisado pelo professor.

2.3 As tarefas de diferente natureza em sala de aula

2.3.1 O papel das tarefas

O processo de aprendizagem da Matemática tem uma natureza complexa, nele intervindo inúmeros fatores. A própria dinâmica em sala de aula é um jogo complexo de múltiplas variáveis, seja pelas inerentes ao contexto escolar, aos professores, aos alunos, aos pais, ou seja, é uma dinâmica que extravasa a sala de aula e se estende a toda a comunidade escolar. Partindo do princípio de que a gestão curricular e o plano anual de atividades de uma escola deverão ter em consideração a dinâmica acima descrita, Ponte (2005),

diz-nos que o desenvolvimento de tarefas com características diferentes e as estratégias que o professor utiliza para as colocar em prática são dois dos elementos principais para a (re)construção de um currículo.

Ponte (2005) considera diversos tipos de tarefas matemáticas, sendo que os exercícios, problemas e as atividades de exploração serão objetos de interesse particular. Um problema matemático pressupõe o desconhecimento antecipado de um método de resolução (NCTM, 2007). No exercício garante-se um processo imediato para o resolver e o aluno ao conhecer esse processo é capaz de o aplicar, caso contrário é um problema (Ponte, 2005). No entanto para implementar com sucesso um problema em sala de aula é necessário procurar um equilíbrio de forma a evitar um problema demasiado difícil, que possa levar o aluno a desistir rapidamente, ou um problema demasiado acessível que possa ser classificado como um exercício (Ponte, 2005).

As tarefas poderão ser de diferente natureza: as tarefas de carácter fechado, que são de dois tipos, e as tarefas de carácter aberto. Nas tarefas de carácter fechado – de uma única resposta - temos os exercícios que são de curta duração, que procuram a consolidação dos conhecimentos, e os problemas, de duração média, que visam a aplicação criativa dos conhecimentos adquiridos (Ponte, 2006).

Já relativamente às tarefas de carácter aberto, também designadas de tarefas de exploração, (Ponte, 2005, 2016) diz que visam a construção de novos conceitos através de um trabalho que não exija muito planeamento, ou seja, pressupõem que o aluno consiga começar, de imediato, a desenvolver a atividade. Para Oliveira et al. (1989), o professor desempenha um papel fundamental com a colocação de questões, com as interações que promove e, em especial, ao encorajar os alunos a discutir e a explicar o trabalho que desenvolvem.

2.3.2 Implementação de tarefas de diferente natureza

Tal como já referido, são variados os fatores que contribuem para as diferentes dinâmicas das aulas de matemática, visto serem variados os contextos escolares, sociais e pessoais em que os professores e os alunos estão envolvidos, pelo que, tal como referem Christiansen & Walter (1996), a abordagem adotada pelo professor, assim como a seleção de tarefas, são fatores decisivos para a perceção da matemática por parte dos alunos.

Segurado e Pedro (1989) indicam um modelo de estrutura de aula com vista à implementação de tarefas de exploração, utilizado e revisto por vários outros autores, e que segue os seguintes passos:

1. Introdução da tarefa: Para Ponte (2006), na introdução da tarefa e quando há um ponto de partida ou uma questão bem definida é que os alunos iniciam o processo de interpretação da situação e definem a estratégia a adotar.
2. Realização da tarefa: Pires (2011) propõe que, na resolução da tarefa, o professor pode fazer um “questionamento sistemático aos alunos, em tom de desafio, que prolongue e aprofunde explorações e permita a formulação de conjecturas”. Nesta interação os alunos devem ter alguma liberdade para poderem reconstruir conceitos, representações e procedimentos matemáticos para desenvolverem e compreenderem a matemática (Ponte, 2016).

3. Apresentação e discussão resultante dessa apresentação: Stein et al. (2008) apresentam um “modelo de cinco práticas”: a) antecipar a forma como os alunos vão encarar e resolver a tarefa; b) monitorizar atentamente as abordagens seguidas durante a resolução; c) selecionar estrategicamente os alunos para partilhar o trabalho efetuado, para obter contribuições variadas e uma discussão rica; d) sequenciar a ordem pela qual esses alunos partilham o trabalho e por último o ponto e) estabelecer conexões entre as ideias e estratégias que foram apresentadas. Ainda a este respeito, Oliveira et al. (1989), remetem para o professor o papel de moderar a discussão, iniciar e dirigir o discurso, envolver cada um dos alunos, manter o interesse pelo assunto, colocar questões esclarecedoras ou estimulantes e aceitar mais propostas para além daquelas fornecidas pelos alunos habitualmente participativos.

Domingos e Vieira (2012) referem que:

A tecnologia pode ser uma ferramenta muito útil e, quando utilizada de modo adequado, pode ser bastante eficaz na aprendizagem da Matemática ao permitir que os alunos se envolvam mais na sua aprendizagem, proporcionando experiências diversificadas de acordo com o seu nível de conhecimento e maturidade intelectual (Domingos e Vieira, 2012, p. 372).

Ponte (2000) refere que as tecnologias de informação e comunicação (TIC) são bastante importantes em disciplinas como a Matemática, visto que vão ajudar a realizar atividades de investigação, de modelação, de exploração, entre outras.

2.4 As representações no estudo das funções

As tarefas criteriosamente selecionadas são um fator decisivo no processo da aprendizagem e na dinâmica na aula de matemática. A seleção rigorosa de tarefas vai ajudar a compreender as diferentes representações matemáticas inerentes ao estudo das funções de crescimento.

Os “Princípios e Normas para a Matemática Escolar” explanados no documento do NCTM de 2007 recomenda que os alunos se apropriem desde o início da aprendizagem da álgebra de diversas representações. Por conseguinte, realça-se a importância de incentivar os professores a adotarem práticas que vão permitir articular as diferentes representações (Rocha, 2016). Ao identificar uma determinada representação abstrata e difícil de compreender, podemos relacioná-la com uma representação concreta e “legível” de forma a fornecer um feedback concreto e, conseqüentemente, uma compreensão mais profunda (Kaput, 1989; Rocha, 2015).

As ligações estabelecidas entre as diferentes representações desenvolvem no indivíduo o entendimento, bem como as várias perspetivas de um determinado conceito (Even, 1998).

Para Goldin e Shteingold (2001) existem dois tipos de representação: a representação externa e a representação interna. Na representação externa consideram-se as representações que conseguimos comunicar aos outros, como é o caso dos desenhos, dos esquemas, dos rascunhos geométricos ou das equações. As representações internas referem-se às imagens criadas individualmente para descrever processos

e objetos matemáticos, assim como às estratégias utilizadas na resolução de problemas ou até à apetência para a matemática.

Friedland & Tabach (2001) consideram quatro tipos de representações – verbal, numérica, gráfica e algébrica. Nenhuma representação pode ser compreendida individualmente (Goldin & Shteingold, 2001) e, em conjunto, têm o potencial de valorizar e tornar eficiente o processo de aprendizagem da álgebra (Friedlander & Tabach, 2001).

A representação verbal surge na introdução de um determinado assunto ou questão e na interpretação final dos resultados obtidos. Por um lado, a representação verbal cria um ambiente natural para a compreensão do contexto (se este existir) e para a comunicação da solução do mesmo. Por outro lado, pode suscitar ambiguidades e associações irrelevantes ou enganosas. Por ser menos universal e depender de um estilo pessoal, pode constituir um obstáculo à comunicação matemática (Friedland e Tabach, 2001).

A representação numérica aparece no início do estudo da álgebra. Na fase inicial da resolução de uma determinada questão recorre-se a esta representação, mas ao proporcionar uma visão muito particular, pode ocultar aspetos importantes ou outras soluções (Friedland & Tabach, 2001). Estes mesmos autores, ao contrário de outros autores (Brown & Mehilos, 2010; Cuoco, 2001), não distinguem a representação tabular da representação numérica (Rocha, 2016). Brown & Mehilos (2010) argumentam que a tabela, ao gerar uma listagem de inúmeros exemplos completos, permite aos alunos encarar a variável como um número que varia (Bell & Janvier, 1981) e que resulta na variação do valor das expressões algébricas, diferindo assim da representação numérica.

A representação algébrica é concisa, geral e efetiva, em particular no reconhecimento de padrões e modelos matemáticos. Este tipo de representação afigura-se útil visto ser, em grande parte das vezes, o único método para justificar ou demonstrar determinadas afirmações. No entanto, o uso sistemático e exclusivo de símbolos algébricos (em qualquer nível de aprendizagem) pode ocultar ou obstruir o significado matemático ou a natureza dos objetos representados e, assim, gerar dificuldades na interpretação dos resultados obtidos (Friedland & Tabach ,2001).

A representação gráfica caracteriza-se por produzir uma visão clara de uma função real de variável real. Por serem apelativos e intuitivos, os gráficos são indispensáveis para o desenvolvimento de uma abordagem visual. No entanto, a representação gráfica pode carecer de alguma precisão e ser influenciada por fatores externos (como a escala). O contexto de um problema pode também influenciar a representação gráfica de uma função, em particular o domínio da mesma (Friedlander & Tabach, 2001; Rocha, 2016).

No âmbito do estudo e aprendizagem das funções parte-se do conceito de utilizar um sistema simbólico para expandir e compreender outro, o que faz com que este tema sirva para promover o contacto com as múltiplas representações (Leinhardt et al.,1990).

2.5 Teoria de Reificação de Anna Sfard

A teoria de reificação de Anna Sfard diz-nos que os conceitos matemáticos são apreendidos de duas formas fundamentalmente diferentes: estruturalmente como objetos e operacionalmente como processos (Sfard, 1991, 1992; Sfard e Linchevski, 1994). Sfard (1991) defende que, apesar de aparentemente incompatíveis, estas duas abordagens são na realidade complementares. As duas abordagens são igualmente necessárias e mutuamente dependentes.

Sfard (1991) observa que: “como na sua inacessibilidade a Matemática parece ultrapassar todas as outras disciplinas científicas, tem de haver alguma coisa realmente especial e única no tipo de pensamento envolvido na construção do universo matemático” (p. 2). Assim, para Sfard há uma questão fundamental a ser colocada: “Como é que a abstração Matemática difere dos outros tipos de abstração na sua natureza, na forma como se desenvolve e nas suas funções e aplicações?” (Sfard, 1991, p. 2).

Na busca da resposta à questão colocada, Sfard postula que existe uma teoria unificada que envolve a Filosofia e a Psicologia da Matemática e considera de igual modo o “pensamento matemático” enquanto processo e a “Matemática pensada” como produto. A autora elabora uma perspetiva que considera de natureza ontológica-psicológica combinada, uma vez que tenta abordar em simultâneo a “natureza das entidades Matemáticas” - aspeto ontológico – quando estas são “compreendidas pelo indivíduo cognoscente” – perspetiva psicológica (Sfard, 1991, p. 248)

Baseando-se em exemplos históricos e em algumas teorias cognitivas, Sfard defende que a conceção operacional é normalmente o primeiro passo na aquisição de novas noções Matemáticas. Analisando os estádios da formação dos conceitos, Sfard conclui que a transição do modo operacional para os objetos abstratos é um processo longo e difícil, que engloba três fases, a saber: a fase de interiorização, a de condensação e a de reificação (Sfard, 1991).

É frequente em Matemática ouvir-se ‘Existe uma função tal que...’ tal como em ciências se parte do princípio da existência sobre certas partículas. Sfard (1991) considera que, ao contrário do que acontece com as outras ciências, as construções matemáticas avançadas são totalmente inacessíveis aos nossos sentidos e apenas podem ser vistas com os olhos da mente.

Quando fazemos o gráfico de uma função ou escrevemos um número estamos a dizer que estas são algumas das muitas representações possíveis dessa entidade abstrata que não pode ser vista ou tocada. A capacidade de alguém conseguir ver estes objetos invisíveis parece ser uma componente essencial para a compreensão da Matemática, enquanto a falta dessa capacidade é praticamente impermeável a muitas “mentes bem formadas” (Sfard, 1991, p.3).

A autora refere que o que prevalece na Matemática atual é uma conceção estrutural que assenta na capacidade de ver uma entidade Matemática como um objeto, ou seja, de o referir como se fosse algo real – uma estrutura estática que existe no espaço e no tempo.

O conceito de função pode, por exemplo, ser apresentado não apenas como um conjunto de pares ordenados, mas também como um processo computacional ou como um método de obter um sistema a partir de outro.

A simetria pode aparecer como uma propriedade estática de uma figura geométrica (concepção estrutural) mas também como uma espécie de transformação (concepção operacional). Este tipo de abordagem refere-se essencialmente a processos, algoritmos e ações refletindo uma concepção operacional da noção (Sfard, 1991).

Apesar de existirem diferenças entre as duas concepções, Sfard considera que elas não são mutuamente exclusivas. Há vários exemplos de conceitos que podem ser definidos – e, portanto, concebidos – estrutural ou operacionalmente.

No mesmo sentido aponta Domingos (2003): “Interpretar um conceito como um processo implica encará-lo como uma entidade potencial que se manifesta através de uma sequência de ações” (Domingos, 2003, p.4), ou seja, estamos na presença de uma dualidade processual, já que o objeto pode ser percebido em vários tipos de representações simbólicas e também nas descrições verbais ou definições dos conceitos (Sfard, 1991, 1992; Sfard & Linchevski, 1994)

A Tabela 2-1 apresenta alguns exemplos de noções Matemáticas onde se evidencia a dualidade de concepções processo – objeto.

Tabela 2-1

Exemplos de noções Matemáticas e dualidade de concepções

	Concepção estrutural	Concepção operacional
Função	Conjunto de pares ordenados (Bourbaki, 1934).	Processo computacional ou um método bem definido de obter um sistema a partir de outro (Skemp, 1971).
Simetria	Propriedade de uma figura geométrica.	Transformação de uma figura Geométrica.
Número natural	Propriedade de um conjunto ou a classe de todos os conjuntos com a mesma cardinalidade finita.	0 ou qualquer número que resulte da adição de um com um número natural (contar).
Número racional	Par de inteiros (um elemento de um conjunto de pares especialmente definidos).	Divisão de inteiros.
Circunferência	O conjunto de todos os pontos equidistantes de um dado ponto.	Rotação de um compasso em torno de um ponto fixo.

Nota: Adaptado de Martinho (2018, p. 20)

O programa de computador, por outro lado, corresponde a uma concepção operacional, pois apresenta a função como uma sequência de ações. A representação algébrica por seu lado parece permitir as duas

abordagens: a operacional – enquanto descrição concisa de alguns cálculos – e a estrutural – enquanto relação estática entre duas grandezas (Sfard, 1991).

Sfard (1991) argumenta que essa abordagem visual para ideias abstratas as torna mais tangíveis e, portanto, mais manipuláveis como objetos reais, preservando a sua identidade e significado quando observadas de diferentes pontos de vista e em contextos diferentes.

Na Tabela 2-2 são apresentadas as características principais das duas abordagens.

Tabela 2-2

Principais características das abordagens Operacional e Estrutural

	Concepção operacional	Concepção estrutural
Características gerais	A entidade Matemática é concebida como um produto de certo processo ou é identificada com o próprio processo.	
Representações internas	Apoiadas por representações verbais.	Apoiadas por imagem visual.
O seu lugar no desenvolvimento de conceitos	Desenvolve-se na primeira fase da formação do conceito.	Desenvolve-se a partir da concepção operacional.
O seu papel nos processos cognitivos	É necessária, mas não suficiente para uma eficaz aprendizagem e resolução de problemas.	Facilita todos os processos cognitivos (aprendizagem, resolução de problemas, etc.)

Nota: Adaptado de Martinho (2018, p. 20)

Para Sfard (1991) o processo de formação de conceitos matemáticos surge em três fases de estruturação: interiorização, condensação e reificação.

Na primeira fase – interiorização – o aluno familiariza-se com os processos que, eventualmente, vão dar origem ao novo conceito. No caso do estudo das funções, o aluno estabelece contacto com certos processos que são realizados sobre objetos matemáticos já conhecidos, por exemplo, a manipulação de expressões algébricas. Nesta etapa, o aluno aprende a noção de variável e adquire a capacidade de, usando a expressão analítica, determinar valores da variável dependente.

A segunda etapa – condensação – é a fase em que o aluno adquire a compreensão de sequências de processos, que podem ser longos e complicados, fazendo emergir entidades autónomas mais fáceis de manejar. O aluno desenvolve a capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo, em termos de *input – output*, sem necessidade de atender ao que medeia os dois estados (inicial e final). É o momento “oficial” de nascimento do novo conceito (Sfard, 1991). No estudo de funções, a evolução do aluno nesta fase pode ser observada pela facilidade com que ele alterna entre as diferentes representações, e segundo

a autora, o aluno estará apto para investigar funções, representá-las graficamente e efetuar diversas operações com funções.

A fase da condensação prolonga-se enquanto a nova entidade permanecer firmemente ligada a um determinado processo.

A última etapa – reificação – acontece quando, subitamente, o aluno consegue ver uma nova entidade Matemática como um objeto completo e autónomo, com significado próprio, um membro particular de uma certa categoria, uma estrutura estática e permanente com características próprias, um todo integrado já afastado dos processos que lhe deram origem. Neste caso, diz-se que o conceito foi reificado. Esta última fase é algo que acontece de forma instantânea, é “uma mudança ontológica – uma súbita capacidade de ver algo familiar numa perspetiva completamente nova” (Sfard, 1991, p.19).

No caso das funções, pode dizer-se que o conceito de função foi reificado quando o aluno tiver consciência das diversas representações que uma função pode assumir e conseguir passar facilmente de uma representação para outra, quando for capaz de resolver equações funcionais (onde as ‘incógnitas’ são funções: equações diferenciais, equações com parâmetros, etc.), quando revelar “capacidade de falar acerca de propriedades gerais de diferentes processos realizados com funções” (Sfard, 1991, p. 14) (como composição ou inversão) e pelo derradeiro reconhecimento de que os cálculos podem ser feitos utilizando “papel e lápis” e /ou com recurso às tecnologias.

Algumas das dificuldades dos alunos em relação ao conceito de função, reveladoras da sua não reificação, são:

1. Um grande número de alunos concebe a função como um processo e não como uma construção estática; os alunos associam função a processos de cálculo, (Sfard, 1987, 1989);
2. A função constante é também uma fonte de dificuldades: parece estar implícito, no pensamento dos alunos que “uma mudança na variável independente deve ser seguida por uma mudança na variável dependente – dimensão dinâmica do conceito”;
3. Relutância por parte dos alunos em aceitar “correspondências arbitrárias” como funções; a maioria dos alunos tende a considerar como verdadeiras afirmações do tipo: “Toda a função expressa uma certa regularidade” e “Toda a função expressa uma certa regularidade”;
4. Tendência para identificar o conceito como uma das suas representações (Sfard, 1992).

Sfard (1991) defende que para se estimular o pensamento estrutural é importante:

1. Favorecer a compreensão dos processos subjacentes aos conceitos matemáticos por parte dos alunos (crucial para a compreensão dos próprios conceitos);
2. Não subestimar a competência de executar algoritmos;
3. Utilizar representações adequadas quando se pretende que surja uma nova identidade abstrata, por exemplo, tabelas, símbolos e gráficos, as quais, por serem representações estáticas e integrativas, podem ter um efeito estimulante para a reificação das funções;
4. Promover a discussão sobre a natureza das entidades Matemáticas.

Sfard (1992) refere ainda dois fatores que considera cruciais para o processo de reificação: o tempo e a motivação. A reificação de conceitos matemáticos é em geral um processo longo, pelo que para o aluno alcançar a reificação é necessário tempo e motivação.

2.6 Teoria dos Registos de Representações Semióticas (Representação Semiótica de Raymond Duval)

A Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Raymond Duval ajuda a compreender os problemas que os variados sistemas e as diferentes representações podem trazer aos múltiplos raciocínios desenvolvidos pelo aluno na construção dos objetos matemáticos.

Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês nascido em 1937, foi o responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos Registos de Representação Semiótica, onde procura analisar a influência das representações dos objetos matemáticos no processo da aprendizagem em Matemática. De acordo com esta teoria, numa atividade de ensino, pode-se representar um objeto matemático utilizando os registos de representação semiótica, que podem ser definidos como:

“(...) produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm as suas dificuldades próprias de significado e funcionamento.” (Duval, 1993, p.3.).

“Uma figura geométrica, um enunciado em linguagem natural, uma expressão algébrica, ou um gráfico são representações semióticas que revelam diferentes sistemas semióticos”. (Duval, 1993, p. 3)¹.

Assim, pode entender-se a Teoria de Registos de Representações Semióticas como sendo o emprego de signos (gráficos, figuras, fórmulas e escrita), pertencentes a um sistema de representação constituído de significado e funcionamento, segundo o qual a construção do conhecimento acontece mediante a conversão estabelecida entre duas ou mais formas distintas de registo de representação.

Nas atividades Matemáticas um objeto pode ser representado utilizando múltiplos registos de representação e, de acordo com Duval, é a conversão das várias representações manifestadas sobre um objeto de estudo que possibilita a construção do conhecimento.

Para Duval a mudança de registo constitui-se como condição necessária ao processo de aprendizagem. Para este autor é absolutamente necessária a interação entre as diferentes representações do objeto matemático para a formação do conceito.

Duval acredita que a compreensão Matemática assenta na distinção entre objeto e a sua representação semiótica e qualquer confusão entre eles implicará, a curto ou a longo prazo, uma perda de compreensão. É, pois, muito importante, o uso de representações semióticas no processo de estudo dos objetos matemáticos, uma vez que todo o pensamento matemático é expresso através de registos que devem ser explorados de modo a possibilitar a construção do conhecimento.

Numa primeira fase, o professor deve explicitar o objeto matemático a estudar, quais os registos de representação semiótica inerentes à atividade proposta e trabalhar as representações de transformação semiótica.

¹ Tradução livre do original

Na preparação de uma atividade, o professor deve ter em conta que não basta disponibilizar ao aluno um conjunto de tarefas para que se verifique a aprendizagem de um determinado conceito matemático. Mesmo que o aluno resolva as tarefas propostas, se não tiver trabalhado os diferentes registos de representação semiótica, não estará ainda consciente do tratamento dado ao objeto matemático estudado.

Para que o aluno possa desenvolver, com consciência, o estudo sobre um determinado conceito matemático, tem de trabalhar diferentes registos de representação semiótica em meios que favoreçam o desenvolvimento de conversões entre os múltiplos registos.

Durante o processo de estudo dos objetos matemáticos deve ser dada ênfase a duas transformações de representação semiótica que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões. Segundo Duval (1993), os tratamentos são transformações dentro de um mesmo registo, por exemplo, efetuar cálculos ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou representação. As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registo conservando os mesmos objetos denotados, por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. Como exemplos de conversões de registos de representação semiótica em funções de crescimento podem considerar-se passagens do registo geométrico para o numérico e do registo geométrico para o gráfico.

3 OPÇÕES METODOLÓGICAS

Pretende-se estudar o desempenho dos alunos na realização de tarefas de diferente natureza no âmbito do estudo de funções de crescimento numa turma do Ensino Profissional.

Para Da Silva & Meneses (2005), a definição dos instrumentos de recolha de dados depende dos objetivos da investigação e do que será investigado e deve proporcionar uma interação entre o investigador, o sujeito e o objeto da pesquisa. Tendo em conta o contexto e objetivos desta investigação, a metodologia adotada foi a investigação qualitativa. Este capítulo apresenta a fundamentação teórica subjacente à metodologia adotada e aos instrumentos metodológicos utilizados.

3.1 Metodologia de investigação qualitativa

Um estudo de natureza investigativa deve basear-se numa metodologia qualitativa quando pretende aprofundar e analisar os comportamentos e atitudes evidenciados pelos sujeitos. A investigação qualitativa é utilizada para descrever o que é observado num determinado contexto, e o investigador constrói (ou gera) conhecimento, hipóteses e teoria fundamentada através de dados recolhidos em campo (Johnson & Christensen, 2014).

Bogdan e Bicklen (1994) afirmam que “os investigadores qualitativos que interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” (p. 49), ou seja, centram-se no sujeito e estabelecem “estratégias e procedimentos que lhes permitam considerar as experiências do ponto de vista do informador” (p. 51). Em suma, a análise qualitativa vai incidir primordialmente na evolução do estudo e não propriamente dos resultados ou conclusões do estudo em si. Ou seja, dá-se primazia à opinião, à reação ou ao que o sujeito possa ter sentido.

A investigação qualitativa caracteriza-se então pela sua subjetividade, pelo que é necessário ter atenção para que o observador consiga registar os acontecimentos abstraindo-se da sua visão pessoal.

O investigador passa uma quantidade de tempo considerável no mundo empírico recolhendo laboriosamente e revendo grandes quantidades de dados. Os dados carregam o peso de qualquer interpretação, deste modo, o investigador tem constantemente de confrontar as suas opiniões próprias e preconceitos com eles. (...) Os dados recolhidos proporcionam uma descrição muito mais detalhada dos acontecimentos do que mesmo a mente mais criativamente preconceituosa poderia ter construído, antes do estudo ser efetuado. Adicionalmente, o objetivo principal do investigador é o de construir conhecimento não o de dar opiniões sobre determinado contexto. (Bogdan & Bicklen, 1994, p. 67).

Outro aspeto a ter em conta na metodologia qualitativa é a presença do investigador poder induzir no sujeito alterações do seu comportamento, fenómeno que a comunidade científica chama de “efeito do observador”. Uma forma de ultrapassar esta situação consiste no investigador lidar com o sujeito da forma mais natural possível tentando criar um ambiente relaxante e confiável.

Como os investigadores qualitativos estão interessados no modo como as pessoas normalmente se comportam e pensam nos seus ambientes naturais, Bogdan & Bicklen (1994) enfatizam que estes devem

tentar “agir de modo que as atividades que ocorram na sua presença não sejam significativamente diferentes daquilo que se passa na sua ausência”. (Bogdan & Bicklen, 1994, p. 68).

Bogdan & Bicklen (1994) caracterizam a investigação qualitativa da seguinte forma:

- O investigador é o instrumento principal e o ambiente natural como fonte direta de recolha de dados é privilegiado: O investigador qualitativo não procura interferir no ambiente natural de um determinado contexto;
- É descritiva. Além da descrição pormenorizada dos dados observados, o investigador também deve observar e relatar o meio envolvente (espaço físico, relações entre pessoas, emoções, etc.), já que todos os aspetos do meio ambiente podem interagir, influenciando os aspetos observados;
- Caracteriza-se pelo processo que desenvolve, mais do que pelos resultados. Pretende-se saber como aconteceu, porque aconteceu, o que motivou, muito mais do que simplesmente chegar a conclusões. Os dados consistem, na sua maioria, em transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registos oficiais. O investigador tenta perceber as múltiplas dimensões do contexto a estudar, sejam elas o tipo de pessoas num grupo, as suas formas de pensar ou interagir, ou o tipo de normas e acordos existentes;
- Objetividade/subjetividade. O investigador tende a ser indutivo, sugestivo. Este aspeto deverá ser levado em consideração – o investigador agindo com essa consciência deverá fazer um esforço para manter a maior objetividade possível. O investigador recolhe dados ou provas que não procuram necessariamente confirmar ou inferir hipóteses. O investigador procura diferentes perspetivas dos participantes no estudo para compreender a dinâmica interna das situações, sendo estabelecidos procedimentos e estratégias que permitam conhecer as experiências do ponto de vista dos participantes.

Bogdan e Bicklen (1994) referem ainda princípios éticos que o investigador deve seguir, reforçados por Aires (2015):

- As identidades dos sujeitos devem ser protegidas, de forma a não causar nenhum transtorno ou prejuízo aos participantes. Além disso, o investigador não pode revelar a terceiros a informação recolhida para que a mesma não seja usada, futuramente de forma política ou pessoal;
- Os sujeitos devem ser tratados respeitosamente e na maioria das situações devem ser informados sobre os objetivos da investigação; consideram-se ilícitas as práticas como o registo de conversas e imagens com gravadores escondidos, ou qualquer mentira aos sujeitos;
- Ao negociar a autorização para fazer um estudo, o investigador deve ser claro e explícito com todos os intervenientes relativamente aos termos do acordo e deve respeitar o mesmo até conclusão do estudo;
- O Investigador deve ser autêntico quando escrever os resultados. Mesmo que as conclusões obtidas vão contra as posições ideológicas do investigador, este deve manter a fidelidade dos dados obtidos.

3.2 Estudo de caso

São inúmeros os autores que destacam o estudo de caso como sendo um dos métodos mais comuns na investigação qualitativa (Aires, 2015; Bogdan & Biklen, 1994; Bryant, 2002)

Para Ponte (2006):

(...) um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objetivo é compreender em profundidade o “como” e os “porquês” desta entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspetos que interessam ao pesquisador. (Ponte, 2006, p. 2).

O estudo de caso é uma modalidade de investigação única e um dos seus pontos fortes é poder estabelecer relações causa – efeito, uma vez que os efeitos vão ser observados em contextos reais. Neste sentido, as propriedades do estudo de caso para Ponte (2006) serão:

1. Baseia-se em trabalho de campo e/ou análise documental e vai apoiar-se numa variedade de fontes tais como entrevistas, observações, documentos, artefactos, entre outras;
2. Não é uma investigação experimental: o investigador não pretende modificar a situação, mas sim tentar compreendê-la;
3. Os resultados podem ser apresentados de diversas maneiras, no entanto assume com frequência a forma de narrativa, com o objetivo de contar uma história que acrescente algo significativo ao conhecimento existente e seja, tanto quanto possível, interessante e esclarecedora.

Segundo Ponte (2006), uma das críticas que diversas vezes é dirigida a esta metodologia qualitativa é não permitir comparar ou aferir semelhanças e/ou diferenças com outros estudos - não tem fundamento visto que “o objetivo deste tipo de pesquisa não é esse, mas sim produzir conhecimento acerca de objetos muito particulares” e que poderá fazer sentido “formular hipóteses de trabalho a testar em novas investigações” (p.16).

Na implementação desta metodologia, o investigador deverá ao máximo aprofundar o fenómeno em estudo, realizando uma análise descritiva e detalhada no desenvolvimento da pesquisa, pois o objetivo fundamental é a melhor compreensão possível de um caso específico.

Coutinho e Chaves (2002) identificam as seguintes características no estudo de caso e a primeira tarefa do investigador deverá ser definir claramente se:

- É um caso sobre ‘algo’ específico.
- Decorre em ambiente natural.
- Utiliza diversas fontes de recolha de dados tais como: observações diretas e indiretas, entrevistas, questionários, narrativas, registos áudio e vídeo, diários, cartas, documentos, etc.

O estudo de caso baseia-se principalmente na seleção pelo investigador de uma amostra sobre a qual incide o caso ou o sujeito. Os indivíduos deverão ser escrupulosamente escolhidos consoante as questões e os objetivos definidos previamente em relação a esses mesmos sujeitos.

Segundo Aires (2015, p.22) na aplicação desta metodologia a seleção da amostra é um momento determinante para o estudo: a investigação qualitativa procura a máxima variação, pelo que os sujeitos que a constituem não são escolhidos ao acaso, mas sim a partir de critérios bastante específicos e tendo em

conta as várias modalidades de estudos de caso, que, segundo Aires (2015), são distinguíveis pelas características e procedimentos adotados:

- Estudos de caso ao longo do tempo: acompanham um fenómeno, sujeito ou situação a partir de diferentes perspetivas culturais;
- Estudos de caso observacionais: recorrem à observação participante e podem servir para estudar diversas temáticas;
- Estudos de comunidades: estudam e compreendem uma determinada comunidade educativa, como escolas, instituições ou agrupamentos;
- Estudos micro – etnográficos: desenvolvem a investigação em pequenas unidades organizativas ou numa atividade específica;
- Estudos de casos múltiplos: estudam dois ou mais sujeitos, situações ou fenómenos. O investigador pode adotar diferentes modalidades como estudos de caso sucessivos, estudos de aprofundamento sobre um caso e estudos comparativos;
- Estudos multi-situacionais: desenvolvem uma teoria, exigindo a exploração de muitas situações e sujeitos.

Na elaboração de um estudo de caso deve ser claro quem serão os participantes, quantos serão, as suas características (como a idade ou o género) e de que forma serão selecionados para integrarem o estudo (Johnson & Christensen, 2014), de forma a obter o máximo de informação possível (Aires, 2015).

Na recolha de dados, são vários os instrumentos ao dispor de um investigador para maximizar a informação recolhida e tornar mais eficiente a sua análise, pelo que a sua escolha vai sempre depender da metodologia adotada e do objetivo do estudo. Neste trabalho de investigação, foi utilizada uma metodologia qualitativa e para estudo de caso, foram escolhidos alunos com diferentes níveis de desempenho.

3.3 Técnicas de recolhas de dados

A seleção das técnicas a utilizar durante o processo de pesquisa constitui uma etapa que o investigador não pode minimizar, pois desta depende a concretização dos objetivos do trabalho de campo. À semelhança do que acontece com as restantes etapas, esta tem também “um carácter aberto e interativo” (Aires, 2015, p.24). Segundo Aires (2015), a seleção das técnicas a utilizar durante o trabalho de campo depende de várias etapas que não devem ser menosprezadas. As técnicas estão divididas em técnicas diretas (ou interativas) e técnicas indiretas (ou não interativas). Entre as técnicas diretas encontramos a observação participante, as entrevistas qualitativas e as histórias de vida. Nas técnicas indiretas temos os documentos oficiais (como os registos, documentos internos, dossiers ou registos pessoais) e documentos pessoais (como os diários, cartas ou autobiografias).

Para Marchesan e Ramos (2012), “a validade de uma investigação está diretamente relacionada à qualidade dos dados utilizados, porque a discussão dos resultados se assenta sobre as informações coletadas” (p. 459), o que parece concordar com Aires.

Neste trabalho de investigação foram utilizadas técnicas de observação participante, as entrevistas qualitativas e as histórias de vida. Nas técnicas indiretas foram utilizados os documentos oficiais (como os registos, documentos internos e registos pessoais).

3.3.1 Observação

A observação é um método de recolha de dados que procura apresentar uma descrição detalhada das atividades das pessoas, comportamentos, ações e um conjunto de interações interpessoais e progressos organizacionais como um todo do que é possível observar na condição humana.

Quinn (2002) refere que é preciso adotar métodos de observação cuja preparação seja rigorosa e disciplinada, visto que, ao observar-se o mesmo objeto ou situação, devido aos interesses, preconceitos e experiências das pessoas que são todas diferentes, as percepções também são diferentes.

A observação está centrada na perspetiva do observador que assiste presencialmente ao fenómeno em estudo. A observação pode ser participante, caso o investigador interaja diretamente influenciando o meio envolvente, ou não participante, se o investigador não participa no facto. O observador também pode assumir uma atitude sistemática ao definir os fenómenos que quer observar, ou assistemática, quando opta por uma observação livre sem controlo previamente planeado (Da Silva & Meneses, 2005).

Para Olabuenaga (1996) a observação deve ser:

1. orientada em função de um objetivo de investigação, que deverá ser definido previamente;
2. planificada por fases, aspetos, lugares e pessoas;
3. controlada e relacionada com outros aspetos teóricos e explicações profundas;
4. a veracidade, objetividade, fiabilidade e precisão a que é submetida.

Patton (2002) diz-nos ainda que devemos prestar atenção ao objeto do estudo, tirar apontamentos de forma discreta e disciplinada, separar o que é trivial do que é relevante, usar métodos rigorosos para validar os resultados e por fim relatar as vantagens, assim como as limitações, na perspetiva do investigador.

Tal como a maioria dos métodos, a observação apresenta vantagens e acarreta desvantagens, as quais devem ser tomadas em consideração quando da sua utilização. As vantagens são, genericamente:

- capacidade de descrever e conhecer em primeira mão o cenário do estudo, as atividades e as pessoas que participam nessa atividade, estudando as dinâmicas e inter-relações dos grupos;
- obter informações relativas a questões sobre as quais as pessoas não estariam dispostas a falar nas entrevistas (Aires, 2015; Patton, 2002).

Já as desvantagens prendem-se com os seguintes aspetos:

- alguns fenómenos são tão profundos que a observação não será suficiente para os explicar; muitos fenómenos dependem de diversos fatores, a observação pode ficar dependente de uma reflexão mais aprofundada e como a observação depende do agente observador, os dados recolhidos podem ser enviesados por uma convicção ou algum mecanismo emocional desenvolvido pelo investigador (Olabuenaga, 2012).

Esta investigação foi planificada por fases, a investigadora escolheu criteriosamente as tarefas e os alunos que participam neste estudo, estudando as dinâmicas e inter-relações dos grupos e teve atenção aos alunos que devido a fatores vários tiveram diferentes desempenho, nomeadamente o aluno seguido pela EMAIE.

3.3.2 Questionário

O questionário é um documento escrito constituído por um conjunto de questões que foram previamente formuladas, ou mais detalhadamente, segundo Da Silva & Menezes (2005):

Questionário é uma série ordenada de perguntas que devem ser respondidas por escrito pelo informante. O questionário deve ser objetivo, limitado em extensão e estar acompanhado de instruções. As instruções devem esclarecer o propósito da sua aplicação, ressaltar a importância da colaboração do informante e facilitar o preenchimento. (Da Silva & Menezes, 2005, p.33).

Nas pesquisas qualitativas os questionários são um instrumento de recolha de dados que permite obter informação que era impossível obter com simples observação. Não é “buscar evidências que comprovem hipóteses previamente definidas e sim, formular teorias a partir da análise dos dados coletados” (Marchesan & Ramos, 2012, p.459).

Na elaboração de um questionário a linguagem utilizada deve ser clara e objetiva para evitar interpretações subjetivas. Marchesan & Ramos (2012) descrevem os aspetos a ter em conta quando se elabora um questionário:

1. Definição dos objetivos e das questões da pesquisa;
2. Esclarecimento sobre o tema da pesquisa;
3. A tipologia, ou seja, a forma de organizar as perguntas (ordenação, estruturação e apresentação).

Segundo Da Silva & Menezes (2005), a estrutura das perguntas pode ser aberta, fechada ou mista (fechada, mas com uma série de respostas possíveis). Convém ter atenção que as perguntas abertas permitem uma infinidade de respostas, enquanto as perguntas fechadas trarão alternativas específicas para que o informante (sujeito) escolha uma delas.

No que respeita à quantidade de perguntas, Chaer et al. (2011) referem que:

“O pesquisador deverá formular questões em número suficiente para ter acesso às respostas para as perguntas formuladas, mas também em número que não seja grande a ponto de desestimular a participação do investigado.” (p. 263). Em relação a esta investigação, foi utilizado um questionário para saber as dificuldades em relação ao uso da tecnologia e conceitos já apreendidos nos módulos anteriores em relação ao tema Função. No uso da tecnologia os alunos mostraram confiança, visto estarem numa área de estudos em que diariamente é utilizado o computador, mas em relação ao conceito de Função os alunos já não se recordavam de quase nada e foi necessário fazer a revisão do tema.

3.3.3 Entrevista

Uma entrevista é uma conversa entre o investigador (ou alguém que trabalha com o investigador) e o sujeito objeto do estudo (investigado ou participante no estudo). Consoante o objetivo e as características da investigação, a entrevista pode ser individual ou em grupo. Para Aires (2015) a entrevista é definida da seguinte forma:

A entrevista implica sempre um processo de comunicação em que ambos os atores (entrevistador e entrevistado) podem influenciar-se mutuamente, seja consciente ou inconscientemente. Por isso, longe de constituir um intercâmbio social espontâneo compreende um processo um tanto artificial e artificioso, através do qual o investigador cria uma situação concreta (a entrevista). A entrevista compreende assim, o desenvolvimento de uma interação criadora e captadora de significados em que as características pessoais do entrevistador e do entrevistado influenciam decisivamente o curso da mesma. (Aires, 2015, p. 29).

O objetivo da entrevista é perceber o que o sujeito pensa, sabe ou consegue fazer em relação a determinado assunto:

Em investigação qualitativa, as entrevistas podem ser utilizadas de duas formas. Podem constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com a observação participante, análise de documentos e outras técnicas. Em todas estas situações, a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134).

O investigador deve previamente determinar o tipo de entrevista que mais se adequa ao objeto que se pretende estudar, definindo o seu grau de estruturação - fechada ou estruturada, aberta ou não estruturada, e ainda relativamente aberta (semiestruturada).

Na entrevista estruturada as questões são previamente definidas e tem como vantagem o ser mais facilmente categorizável, não permitindo ao entrevistador explorar novas vertentes que surjam no decorrer da mesma. Na entrevista não estruturada o sujeito tem um discurso livre, o que vai permitir ao entrevistador registar informações, mas não intervir no decorrer das mesmas.

Mesmo quando se utiliza um guião, as entrevistas qualitativas oferecem ao entrevistador uma amplitude de temas considerável, que lhe permite levantar uma série de tópicos e oferecem ao sujeito a oportunidade de moldar o seu conteúdo. (...) No outro extremo do contínuo estruturado/não, estruturado situa-se a entrevista muito aberta. Neste caso, o entrevistador encoraja o sujeito a falar sobre uma área de interesse em seguida, explora-a mais aprofundadamente, retomando os tópicos e os temas que o respondente iniciou. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 135).

Na entrevista semiestruturada e estando previamente definidas perguntas-diretoras, consegue-se aprofundar as respostas dadas pelo sujeito no decorrer da conversa e até levantar novas questões. Bogdan & Biklen (1994) referem que esta forma de estrutura da entrevista tem a vantagem de permitir a comparação entre os vários sujeitos, mas não permite conhecer a forma como os sujeitos estruturariam o tema sem a influência do investigador. Nesta investigação foi utilizada a entrevista aberta, a investigadora encorajou o sujeito a falar sobre as tarefas realizadas e encorajou os sujeitos a falarem sobre o seu desempenho.

3.3.4 Recolha documental

Podemos dividir os documentos em duas categorias (Yin, 2003):

1. Documentos pessoais: são narrações produzidas pelos sujeitos que descrevem as próprias ações, experiências ou crenças.
2. Documentos não pessoais ou oficiais: fornecem informações sobre as organizações, a aplicação da autoridade, o poder das instituições educativas, estilos de liderança, a forma de comunicação com os diferentes atores da comunidade educativa, etc. Nesta investigação, foram

utilizados documentos pessoais e oficiais, nos quais a investigadora se baseou para trabalhar o desempenho dos alunos alvo de estudo.

3.4 Procedimentos metodológicos adotados

O trabalho de investigação que agora se apresenta seguiu uma metodologia qualitativa, desenvolvida com base em três estudos de caso de alunos criteriosamente selecionados entre os dezanove alunos de uma turma do Ensino Profissional na área de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos do 12.º ano da zona da Grande Lisboa. Tal como já referido, este estudo pretende aferir como o uso da tecnologia favorece a aprendizagem do estudo de funções mais particularmente o estudo de funções de crescimento.

Relembrem-se as questões às quais se pretende dar resposta:

1. Qual o papel da tecnologia na interpretação do conceito de função, nomeadamente de função de crescimento exponencial e logarítmica?
2. Em que medida o uso da tecnologia favorece a reificação dos conceitos de Função?
3. Como se caracterizam as aprendizagens dos conceitos exponenciais e logarítmicos mediados pelo uso de tecnologia?

A investigação desenvolveu-se em três etapas. Na primeira etapa foi sugerido aos alunos que preenchessem um questionário individual, em simultâneo e sem intervenção da investigadora para se recolher os seguintes dados:

- Percurso escolar;
- Opção pelo Ensino Profissional;
- Nível e tipo de utilização da tecnologia;
- Conhecimentos empíricos e noções teóricas relativas ao estudo de funções reais de variável real.

Na segunda etapa apresentou-se aos alunos, individualmente, um conjunto de tarefas de natureza abstrata, geométrica e algébrica, procurando analisar os seguintes aspetos:

- Primeira reação ao depararem-se com tarefas desta natureza;
- O desenvolvimento do raciocínio abstrato necessário à realização das mesmas;
- Principais dificuldades observadas.

Sobre o conceito de função e as suas representações, a intervenção da investigadora limitou-se à compreensão do processo de raciocínio desenvolvido pelo aluno. Só quando o investigador verificou no aluno dificuldade para prosseguir com a realização da tarefa de forma autónoma, é que a investigadora disponibilizou apoio para permitir o desbloqueio da situação.

A terceira etapa consistiu na entrevista ao aluno, realizada em três momentos - pré – sessão de trabalho, durante a sessão de trabalho e pós – sessão de trabalho - em que se procurou aferir como decorreria a execução das tarefas apresentadas.

3.4.1 Processo de Seleção de Participantes

Os critérios na escolha dos alunos foram cuidadosamente analisados tendo em vista os objetivos e as questões da investigação: observar e analisar o pensamento dos alunos do 12.º ano de uma turma do

Ensino Profissional na resolução de tarefas diversificadas relativas ao estudo das funções de crescimento, recorrendo ao uso da tecnologia.

3.4.1.1 Análise e Descrição da Amostra

3.4.1.1.1 A turma

A turma escolhida para o estudo frequentava o 12.º ano do curso de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos do EP, sendo constituída por dezanove alunos. No 12.º ano os alunos têm de ter classificação positiva nos quatro módulos de matemática: A7, A8, A9 e A10. Seis alunos da turma tinham o módulo A6 (do 10º ano) em atraso. Foi disponibilizada a informação do desempenho escolar (avaliação) dos alunos desta turma até ao módulo A7. A Informação consta do processo de cada aluno e foi consultada pela investigadora. No caso concreto a Escola onde foi realizada a investigação é utilizado o Inovar e neste programa, os professores do Conselho de Turma têm acesso a todo o histórico pessoal e académico do aluno.

A Turma era constituída por 17 rapazes e 2 raparigas e a maioria dos alunos estavam juntos desde o 10º ano. A turma revelou-se bastante coesa apesar de agitada e as duas raparigas estavam bem integradas. Estiveram juntos os três anos em que decorreu o curso de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos do EP. Era frequente encontrar a turma no pátio ou a jogar matraquilhos no Bar dos alunos. O ambiente entre os alunos era bom, provavelmente resultado de serem várias as disciplinas que, desde o 10º ano, estimularam o trabalho a pares ou em grupos mais alargados. Embora agitada, a turma não tinha problemas de indisciplina, o que favoreceu o processo da aprendizagem. O maior problema da turma era a assiduidade, pontualidade e existiam focos de desmotivação por parte de alguns alunos.

3.4.1.1.2 Os alunos

Os alunos mostraram-se sempre bastante colaborantes, disponibilizando-se para participar no estudo em horário extraescolar caso necessário. Quando se iniciou esta investigação, os módulos A7 e A8 já haviam sido lecionados pela investigadora, o que permitiu um melhor conhecimento, apesar do alvo de estudo ser o módulo A9 – funções de crescimento.

Os alunos não tinham manual em formato papel, mas podiam aceder ao mesmo em formato digital, também não dispunham de calculadora gráfica, mas podia ser requisitada na biblioteca, onde existia em número suficiente para todos. Todos os alunos tinham computador e como era necessário noutras disciplinas para a elaboração de trabalhos, este recurso esteve sempre presente e disponível nas aulas de matemática.

3.4.1.2 Escolha dos Participantes

A escolha dos alunos teve em conta três fatores principais:

- Alunos com diferentes níveis de desempenho;
- A classificação obtida nos módulos anteriores do 12.º, A7 (Probabilidades) e A8 (Modelos Discretos);
- A classificação obtida nos módulos anteriores (10.º e 11.º) em que foram estudadas as funções.

A aplicação destes critérios resultou na escolha de três alunos para estudo de caso, cujos nomes fictícios são Joana, Pedro e Luís, e que de seguida se apresentam.

- **Joana:** Dos três alunos escolhidos, a Joana é quem apresenta maiores dificuldades na disciplina de matemática. É uma aluna muito empenhada, trabalhadora, assídua e pontual, sem retenções no seu percurso escolar. Resolve muitos exercícios, apresenta dúvidas e empenha-se na realização de todas as tarefas propostas, contudo tentava memorizar os exercícios que resolvia, revelando dificuldades em perceber situações novas.
- **Pedro:** É um aluno bastante empenhado, sempre gostou de informática. Frequentou durante dois anos o ensino geral do curso de ciências e tecnologia, mas dificuldades em Matemática e Físico-Química fizeram com que ingressasse no Ensino Profissional na área de Informática. Pretende fazer o exame de Matemática A ou Matemática B no final do ano letivo. O Conselho de Turma deu indicação de que o Pedro era muito intuitivo com o computador, o que se confirmou com o decorrer da prática letiva. Conseguia compreender com facilidade os conteúdos, fazer generalizações, resolver problemas de modelação matemática, utilizando tanto o computador como a calculadora gráfica.
- **Luís:** Aluno seguido pela psicóloga, beneficiando de aulas de apoio e de tempo extra para realizar os testes. O relatório psicológico que o aluno apresentou, descreve um quadro compatível com Transtorno de Espectro Autístico Leve (Síndrome de Asperger). De entre os três participantes era o mais tímido e tinha vergonha de expor dúvidas. O Luís teve sempre mais facilidade em resolver os conteúdos, utilizando a tecnologia. Quando ao longo do ano os conteúdos eram lecionados com suporte no “papel e lápis” o aluno perdia a motivação.

3.4.2 Estratégia de Recolha de Dados

A recolha de dados desenvolveu-se no âmbito da atividade letiva. No decorrer dos dois primeiros módulos de vinte e sete horas cada, foi realizada observação em ambiente natural -sala de aula - e foi sendo registada a informação pertinente com os objetivos propostos, nomeadamente:

- Motivação e participação na aula;
- Atenção aos conteúdos lecionados;
- Realização dos trabalhos de casa;
- Registos dos conteúdos no caderno diário;
- Capacidade de elaborar raciocínios em matemática.

A recolha de dados foi efetuada através da observação participante e não participante, da recolha documental do material produzido pelos alunos durante a implementação das tarefas e de entrevistas semi-estruturadas.

Enquanto os alunos resolviam as tarefas, a observação foi maioritariamente não participante para o investigador conseguir identificar as dificuldades consoante fossem surgindo. Só se recorreu à observação participante quando surgiam questões que fossem impeditivas de os alunos continuarem a resolver a tarefa proposta.

3.4.2.1 Entrevista semiestruturada

As entrevistas semiestruturadas serviram o propósito de conduzir uma entrevista guiada por algumas questões principais, mas dando alguma liberdade ao entrevistado para poder dar respostas ou informações. Estas entrevistas decorreram em janeiro de 2023, após terem sido realizadas as tarefas em sala de aula.

3.4.2.2 Recolha documental

Para a recolha documental foi considerado o que os alunos realizaram durante a resolução das tarefas. As tarefas foram realizadas nos dias dezassete e dezanove de janeiro. No início da tarefa os alunos trabalharam individualmente e foi registado pelos alunos toda a atividade ao longo da resolução da tarefa proposta.

3.4.2.3 Sessões de Trabalho

A recolha de dados ocorreu em quatro sessões de trabalho: duas aulas em janeiro, com a duração de noventa minutos cada uma, tendo as outras duas sessões sido realizadas posteriormente, com a duração de quarenta e cinco minutos cada, para realizar as entrevistas.

A primeira sessão de trabalho decorreu no dia dezassete de janeiro, com início às 9h45m, tendo sido realizada a tarefa “Explorar parâmetros” que pode ser consultada em Anexo 1. A segunda sessão de trabalho decorreu durante a aula de vinte e seis de janeiro, onde foi realizada a segunda tarefa que se encontra no Anexo 2. A terceira e quartas sessões de trabalho, dedicadas à implementação da tarefa de Modelação matemática (Anexo 3) e a realização das entrevistas, foram realizadas em janeiro durante o horário dedicado ao Apoio da Matemática. Todas as sessões decorreram numa sala de aula da escola.

3.4.3 Os Recursos

Foram lecionadas por semana cinco horas de matemática e as aulas desenrolaram-se em duas salas de aula diferentes: quatro horas, divididas em dois blocos de duas horas cada, que tiveram lugar numa sala de aula com mesas de dois lugares, todas orientadas para o quadro e para a mesa do professor, situados no mesmo plano; a hora restante foi lecionada no laboratório de física, onde existiam mesas para grupos de quatro pessoas. Ambas as salas dispunham de projetor vídeo e computador para o professor, sendo que os alunos traziam sempre o computador para a aula pois necessitavam dele para mais do que uma disciplina.

Os recursos utilizados foram os seguintes:

- Manual do módulo em versão digital;
- Bibliografia existente na biblioteca;
- Calculadora Gráfica;
- Computador e projetor de vídeo;
- Fichas de trabalho e/ou guiões de trabalho;
- Plataformas de e-learning: “Moodle” e/ou “Teams”.

3.4.3.1 As aulas

A unidade de ensino A9 foi iniciada em 5 de dezembro de 2022 e terminou em 6 de fevereiro de 2023. A sua estrutura define vinte e sete blocos, de sessenta minutos cada, organizados a cada semana em dois

blocos de cento e vinte minutos, calendarizado às segundas e sextas-feiras, e um bloco de sessenta minutos às terças-feiras, ou seja, por semana de cinco blocos.

As tarefas foram realizadas individualmente, o que foi possível tendo em conta a organização espacial das salas disponibilizadas.

Houve aulas em que foram feitas revisões e outras em que se realizaram várias atividades de consolidação de conhecimentos. Para isso os alunos utilizavam o computador e resolviam a tarefa individualmente. No final a tarefa era enviada para o e-mail escolar do professor/investigador.

3.4.4 Tarefas

As tarefas selecionadas caracterizam-se por envolverem o uso de diversas representações: em primeiro lugar, por apelarem à familiarização com uma dada representação inicial; em segundo lugar, por promoverem a tradução entre diversas representações, algébricas e gráficas ao longo da resolução; por último, concedem a liberdade de recorrer a uma ou mais representações para responder às questões (Gafanhoto & Canavarro, 2014).

Os exercícios, tarefas e exemplos foram cuidadosamente escolhidos, de modo que a sua diversidade fosse a maior possível e os objetivos também são distintos. A sequência foi pensada de modo a testar a aprendizagem dos alunos, assim como a evolução na resolução dos mesmos. Os primeiros exercícios são diretos e os seguintes vão evoluindo para um maior grau de complexidade.

A escolha das tarefas teve sempre presente promover o sucesso educativo de todos os alunos, visto que existiam alunos com RTP, elaborado pela EMAIE, e a sua realização contou com a aprovação prévia dos pais e/ou Encarregados de Educação.

Foi então escolhida uma sequência de três tarefas de aprendizagem para tentar dar resposta às questões de investigação. A primeira tarefa teve um carácter exploratório; a segunda tarefa consistiu na apresentação de uma equação que podia ser resolvida pelo método algébrico ou recorrendo à tecnologia, já na terceira tarefa a resolução de um problema que consistia na aplicação das funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais.

3.4.4.1 Implementação das tarefas

Tanto na escolha como na implementação das tarefas, foi sempre considerado o enquadramento e as orientações para o programa de Matemática A extensíveis ao programa de Matemática do Ensino Profissional.

Previamente à implementação das tarefas foi feita uma breve revisão dos módulos A2, A4 e A5 com a finalidade de relembrar os conceitos de função, domínio, contradomínio, zeros, monotonia e assíntotas, visto os alunos do Ensino Profissional realizarem a avaliação por módulos e não terem presentes estes conceitos.

Posteriormente introduziu-se o conceito de função de crescimento nos modelos contínuos não lineares: exponencial, logarítmico e logístico.

As tarefas propostas foram realizadas em aula e divididas em três momentos:

1. Introdução da tarefa;
2. Desenvolvimento da atividade, realizada individualmente ou a pares;
3. Apresentação e discussão dos resultados, momento em que formalizaram os conceitos trabalhados.

Tarefas 1:

Analisar as propriedades das funções exponenciais:

$$1. \quad f(x) = 2^x \quad g(x) = 3^x \quad h(x) = 10^x$$

1.1 As funções exponenciais serão monótonas?

1.2 Qual será o seu domínio? E o seu contradomínio? O gráfico das funções exponenciais terá assíntotas?

2. Considere agora as funções definidas por:

$$f(x) = e^x \quad g(x) = e^{x-2} \quad h(x) = e^{x+2}$$

As funções exponenciais serão monótonas? Qual será o seu contradomínio? O gráfico das funções exponenciais terá assíntotas? Partindo do gráfico da função f , descreva como pode obter o gráfico das funções $g(x)$ e $h(x)$.

3. Considere agora as funções definidas por:

Sejam agora as funções

$$f(x) = \log(x) \quad g(x) = \log(x+3) \\ h(x) = \log(x-3)$$

Tendo em conta o ponto 1, diga tudo o que pode concluir sobre estas funções?

Tarefa 2:

Resolva as seguintes equações utilizando métodos analíticos e recorrendo ao uso de tecnologia (calculadora gráfica ou computador).

$$\log(x^2) = \log(2x) \\ 4e^x + 3 = 403$$

Tarefa 3: Resolver problemas envolvendo funções de crescimento; construir modelos de situações ligadas ao mundo real; recorrendo à calculadora gráfica e ao computador, saber determinar a interseção de duas funções.

Aplicação das funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais.

O uso de funções exponenciais e de funções logarítmicas como modelos de matemáticos de situações do mundo real é muito frequente. Por forma a compreender melhor a sua aplicação, apresentam-se seguidamente a seguinte tarefa:

A altura das plantas

Admita que a altura h , em metros, das plantas de uma dada espécie é dada em função do tempo t ($t \geq 1$), em meses, por:

$$h(t) = 0,32 + 0,89 \ln(t) \text{ (} \ln \text{ designa logaritmo de base e)}$$

1. Uma planta tem 50 cm de altura. Quantos meses tem a planta? Apresente a resposta arredondada às décimas.

2. Mostre que, para qualquer valor de t , $h(3t) - h(t)$ é constante. Determine um valor aproximado às centésimas e interprete esse valor no contexto do problema.

Os meios necessários para a realização das tarefas propostas estiveram sempre acessíveis: o computador era ferramenta sempre presente, nestas tarefas os alunos foram avisados previamente para requisitarem na biblioteca a calculadora gráfica, caso seja necessário.

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Os participantes pertencem todos a uma turma do 12.º ano do ensino profissional. Os nomes utilizados são fictícios de modo a preservar a identidade dos participantes. Os nomes utilizados são a Joana, o Pedro e o Luís. Os alunos estudados ao longo deste capítulo vão ser identificados através das iniciais do seu nome, nomeadamente por “J”, “P” e “L”. A investigadora vai ser identificada pela letra “I”.

As tarefas realizadas - tarefa 1, tarefa 2 e tarefa 3 já foram explanadas no capítulo anterior e encontram-se nos anexos 1, 2 e 3 respetivamente.

As tarefas foram realizadas individualmente pelos alunos.

Apresentam-se agora os resultados obtidos para proceder à análise dos dados recolhidos nas tarefas propostas aos alunos e analisar como os conceitos de função e função de crescimento são apreendidos utilizando tecnologia, nomeadamente o *software* GeoGebra no computador e/ou a calculadora gráfica. Relembra-se novamente as questões a serem trabalhadas neste trabalho de investigação às quais se vai tentar obter resposta:

- 1 Qual o papel da tecnologia na interpretação do conceito de função e em particular da função-exponencial e da função logarítmica?
- 2 Em que medida o uso da tecnologia favorece a reificação dos conceitos?
- 3 Como se caracterizam as aprendizagens das funções de crescimento (exponenciais e logarítmicas) mediados pelo uso de tecnologia?

4.1 Estudo de Caso: Joana

A primeira tarefa foi analisar as propriedades das funções exponenciais e consistiu na resolução de três exercícios. No primeiro exercício pedia-se para analisar as propriedades das funções exponenciais:

1. $f(x) = 2^x$ $g(x) = 3^x$ $h(x) = 10^x$

1.1 As funções exponenciais serão monótonas?

1.2 Qual será o seu domínio? E o seu contradomínio? O gráfico das funções exponenciais terá assíntotas?

A Joana começou por utilizar o computador pessoal, no qual já estava instalado o *software* GeoGebra. Foi sugerida a configuração da folha gráfica e a Joana revelou o domínio de alguns processos no que se refere à utilização do GeoGebra. A aluna também tinha consigo a calculadora gráfica que havia sido previamente requisitada na biblioteca escolar.

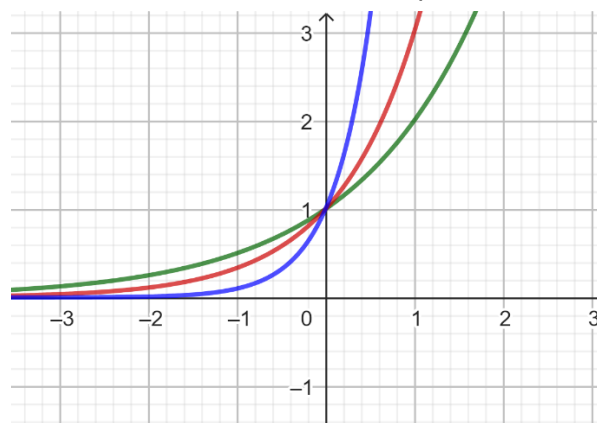
A aluna estava sentada sozinha na secretária e confidenciou à investigadora que embora a turma tivesse 19 alunos, ficava sempre sozinha, mesmo nas outras disciplinas. Só quando era necessário fazer trabalhos a pares ou em grupo é que se juntava aos restantes elementos da turma.

A Joana confidenciou à investigadora que gostou bastante do primeiro exercício, onde foram exploradas várias funções de crescimento. Foi uma tarefa que a motivou para entender certos conceitos como monotonia, domínio, contradomínio e assíntotas.

A Joana enviou via email para a investigadora, os gráficos obtidos do exercício 1 da Tarefa 1, figura 4.1, referindo que a azul é a função $h(x) = 10^x$, a vermelho é a função $g(x) = 3^x$ e a verde é a função $f(x) = 2^x$.

Figura 4.1

Funções de crescimento de base maior que 1



Nota: Fonte própria

A investigadora referiu que a aluna devia legendar cada função pois nem sempre podemos ter acesso a gráficos onde se visualizam as cores.

A Joana referiu que as três funções estavam sempre a crescer e que intersetavam o eixo das ordenadas no ponto (0,1).

A aluna verificou pela análise dos gráficos que o domínio das três funções é R e que o contradomínio também é R . A investigadora pediu à Joana para verificar se alguma função intersetava o eixo das abcissas em algum ponto, ao qual a aluna respondeu que as três funções estavam acima deste eixo, mas não conseguiu determinar que era R^+ . Verifica-se assim que ela tem dificuldade em identificar o contradomínio de uma função, mesmo quando parece compreender o seu comportamento gráfico. A aluna referiu que as três funções não tinham assíntotas verticais nem oblíquas e que as três funções tinham uma assíntota horizontal no eixo do Ox mas não conseguiu determinar qual a equação dessa assíntota. A investigadora pediu para a aluna resolver este exercício não recorrendo à tecnologia, mas a aluna disse que dava muito trabalho pois tinha de fazer função a função e juntar todos os pontinhos que fosse obtendo. Esta abordagem parece indicar a necessidade de criar uma representação tabelar para depois poder fazer a representação desses pontos num referencial unindo-os. Em resumo, a Joana identifica com facilidade o domínio, mas revelou

dificuldades em determinar o contradomínio e as assíntotas das funções de crescimento apresentadas pela ferramenta utilizada. Ela denota alguma sensibilidade para uma eventual representação tabelar, mas considera que tal abordagem é muito difícil de desenvolver e de representar. Nota-se que conseguiu interiorizar alguns dos conceitos em estudo, quando suportados em gráficos, mas apenas os conceitos mais elementares, como o caso do domínio ou ponto de interseção.

Quando questionada acerca do trabalho desenvolvido a Joana mostrou alguma satisfação acerca da compreensão dos conceitos envolvidos na representação gráfica.

I: O que achaste da primeira tarefa?

J: Gostei bastante desta tarefa, quando a professora deu uma aula de revisão sobre vários conceitos como o que era uma função, o domínio de uma função, a monotonia, o contradomínio e as assíntotas não percebi muito bem, mas agora que fui metendo as funções no computador (GeoGebra), já consegui entender melhor os conceitos que me são propostos.

I: Achas que o uso do computador facilita a aprendizagem da matéria a estudar?

J: Sim, consigo visualizar melhor a matéria e compreendo melhor o que me é pedido.

I: E porque não utilizaste a calculadora gráfica?

J: Porque estou mais habituada a utilizar o computador, como todos os alunos da turma têm de trazer computador para a escola por causa das aulas de programação estamos mais habituados ao uso dessa ferramenta. Muitas vezes se não requisitarmos a tempo a calculadora, a escola não dispõe para todos os alunos.

Segundo ela a visualização das propriedades no gráfico foram uma ajuda para a sua compreensão, ainda que não consiga explicar alguns desses conceitos verbalmente.

A Joana fez individualmente um relatório completo da tarefa proposta. Considerou que tira melhor conclusões usando o computador pois pode pintar todas as funções de diferentes cores e assim estudar melhor cada uma delas e o écran é maior. Também utilizou a folha de cálculo para determinar algumas imagens e usou a lupa para melhor ver o domínio e o contradomínio.

I: Se não tivesses o computador sabias resolver a tarefa?

J: Não, só se tivesse uma folha de cálculo e a cada x tentava chegar a uma imagem e depois juntava todos os pontinhos obtidos. Era assim, não era?

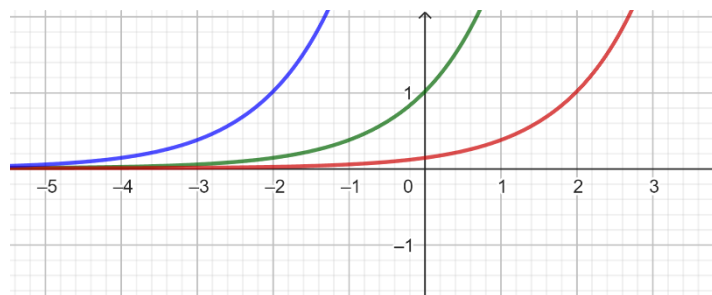
A aluna revela aqui alguns traços do conceito de função, ainda que de forma dispersa. Resolveu individualmente a tarefa e a investigadora ficou satisfeita com a motivação demonstrada pela aluna. Retirou as conclusões necessárias do que lhe havia sido proposto, ainda que com ajuda, e formulou conjeturas sobre o que observou no computador.

No segundo exercício pedia-se para analisar as propriedades das funções exponenciais $f(x) = e^x$ $g(x) = e^{x-2}$ $h(x) = e^{x+2}$ nomeadamente como se obtinha as funções g e h através da função f .

A investigadora pediu para a aluna resolver este exercício não recorrendo à tecnologia, mas novamente verificou que a aluna se mostrava mais motivada em utilizar a tecnologia. Conseguiu através do software GeoGebra obter a representação gráfica da figura 4.2.

Figura 4.2

Translação de funções de crescimento



Nota: Fonte própria

A Joana referiu verbalmente à investigadora que a função a cor verde é a função $f(x) = e^x$, a função a vermelho é a função $g(x) = e^{x-2}$ e a função azul é $h(x) = e^{x+2}$. Nota-se que conseguiu interiorizar alguns dos conceitos em estudo, quando suportados em gráficos, mas apenas os conceitos mais elementares, como o caso do domínio e do contradomínio e a aluna conseguiu referir que as três funções cresciam e que o domínio delas é R . Em relação a se os gráficos das funções exponenciais têm assíntotas, a Joana referiu que as três têm uma assíntota horizontal de equação $y = 0$ (eixo Ox). A aluna não conseguiu referir o conceito de limite de uma função relacionado ao estudo das funções. Em relação à questão que pedia para ‘partindo do gráfico da função f , descreva como pode obter o gráfico das funções $g(x)$ e $h(x)$ ’, a Joana referiu que o gráfico vermelho se movia para a direita em relação ao gráfico verde e o gráfico azul movia-se para a esquerda em relação ao gráfico verde.

A aluna não conseguiu associar esse movimento a uma translação associada a um vetor, assim como as unidades da deslocação. Em resumo a Joana identificou os gráficos de forma elementar o que permite afirmar que a aluna se encontra numa fase inicial de interiorização do conceito. Pode-se concluir que utilizando o GeoGebra e podendo visualizar, em simultâneo três gráficos cartesianos, permitiu à Joana perceber as alterações nos gráficos, embora sem conseguir formalizar a translação associada a um vetor. Verifica-se assim que o uso da tecnologia lhe permitiu tirar conclusões necessárias face ao que lhe havia sido proposto e formulou conjecturas sobre o que observou no computador. A investigadora denotou algum avanço no desempenho da aluna.

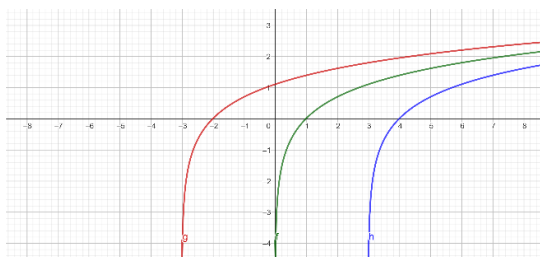
No exercício 3 da tarefa 1 foi pedido à aluna a representação gráfica das seguintes funções:

$i(x) = \log(x)$; $j(x) = \log(x + 3)$ e $k(x) = \log(x - 3)$, tendo sido pedido à aluna o que se podia concluir sobre estas funções?

A Joana começou por fazer a representação gráfica recorrendo ao software GeoGebra, como se ilustra na figura 4.3, abaixo.

Figura 4.3

Translação da função logaritmo



Nota: Fonte própria

Ela associou a função $f(x) = \log(x)$ à cor verde, o vermelho a $g(x) = \log(x + 3)$ e a cor azul à função $h(x) = \log(x - 3)$. A Joana referiu à investigadora que estas funções estavam ao contrário do que foi feito nos exercícios anteriores da tarefa 1, mas não conseguiu referir-se ao conceito de função inversa.

A Joana referiu novamente que sem ter usado a tecnologia, nomeadamente o *software* GeoGebra no computador muito dificilmente tinha conseguido passar da representação algébrica para a representação gráfica.

A aluna referiu que as três funções eram crescentes e o seu contradomínio era R . Referiu ainda que a função azul se obtinha através da função verde andando três pontos para a direita e a função vermelha obtinha-se através da função verde andando três pontos para a esquerda. Mais uma vez não conseguiu associar este deslocamento a uma translação associada a um vetor. Durante esta atividade, a Joana foi revelando uma gradual destreza na utilização do GeoGebra e usando esta ferramenta em benefício das suas aprendizagens. Em resumo a Joana identificou de forma elementar os diferentes gráficos que permite afirmar que a aluna se encontra numa fase inicial de interiorização do conceito. Pode-se concluir que utilizando o GeoGebra e podendo visualizar, em simultâneo três gráficos cartesianos, permitiu à Joana perceber, embora sem conseguir dar o nome “translação associada a um vetor que o uso da tecnologia lhe permitiu conjecturar e tirar algumas conclusões para responder ao que lhe havia sido proposto.

Quanto à tarefa 2: Resolva as seguintes equações utilizando métodos analíticos e recorrendo ao uso de tecnologia (calculadora gráfica ou computador).

$$\log(x^2) = \log(2x)$$

$$4e^x + 3 = 403$$

A aluna teve grandes dificuldades em resolver as equações pelo método algébrico.

I: O que estás a achar da tarefa 2?

J: Não estou a conseguir resolver as equações a “papel e lápis”, sempre tive dificuldades em resolver equações desde o 7.º ano.

I: Mas eu dei exemplos de como se resolviam equações utilizando a exponencial e os logaritmos.

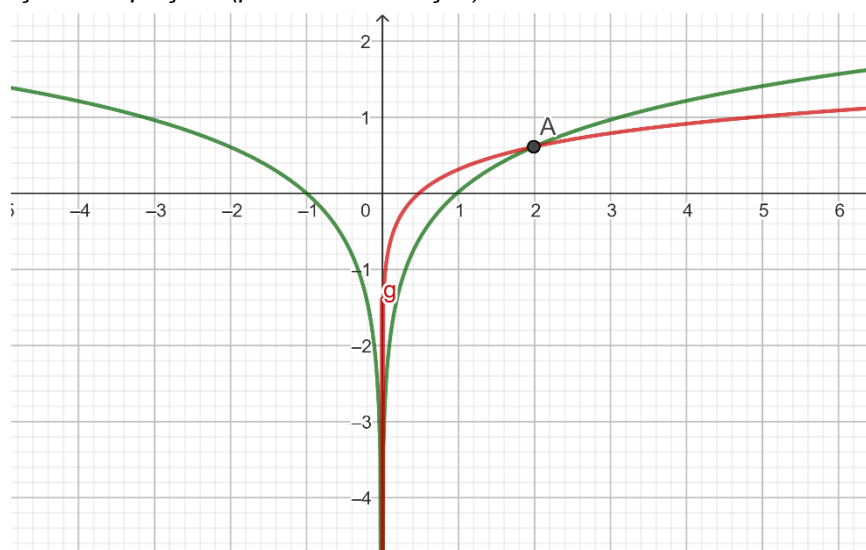
J: Eu sei, mas não entendi.

I: Tenta resolver este exercício utilizando uma ferramenta (o computador ou a calculadora gráfica) e depois escreve um relatório sobre as conclusões.

A aluna mostra não dominar a componente algébrica na resolução de equações argumentando que as atividades desenvolvidas anteriormente não tinham sido compreendidas e, portanto, denotando uma fraca interiorização dos conceitos. Começou por fazer a representação gráfica das funções envolvidas na primeira equação, figura 4.4 e procurou responder às questões colocadas a partir da visualização dos gráficos obtidos.

Figura 4.4

Resolução de equações (ponto de interseção)



Nota: Fonte própria

A aluna começou por não perceber o domínio da função logaritmo e disse à investigadora que a função $\log(x^2)$ representada pela cor verde, tinha duas formas e ela não entendia porquê. A investigadora lembrou a Joana que domínio de uma função logarítmica é sempre R^+ , visto que não existe $\log(0)$ e $\log(n^\circ$ negativo). A investigadora disse à Joana para meter na calculadora $\log(0)$ e $\log(n^\circ$ negativo) ao que a aluna respondeu: dá sempre erro! A investigadora lembrou que neste caso o domínio é $R \setminus \{0\}$ visto que os números negativos também pertencem ao domínio, na medida em que qualquer número real elevado ao quadrado é sempre um número positivo.

A Joana disse que não sabia resolver a equação no GeoGebra e a investigadora sugeriu para usar a calculadora gráfica. A Investigadora verificou que a Joana conseguia fazer conjecturas cada vez de forma mais positiva à medida que avançava na resolução das tarefas.

J: utilizamos a calculadora com a janela de visualização onde meto o domínio e o contradomínio certo?

I: Já representaste o primeiro membro e o segundo membro na calculadora gráfica, o que achas que é resolver a equação?

J: É o ponto de interseção? Lembro-me de ter feito isso com o professor de matemática do ano passado. Vou tentar descobrir como se obtém?

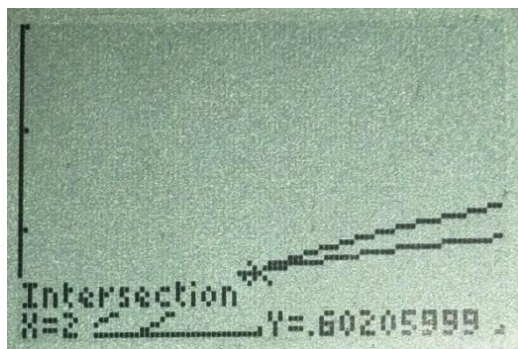
I: Tudo o que concluíres, escreve um pequeno relatório.

J: Está bem, já estou a perceber melhor a matéria.

Em geral a Joana não revela dificuldades utilizando a tecnologia em converter registos algébricos em registos gráficos, e perceber que a resolução de uma equação pode ser dada, recorrendo ao ponto de interseção das funções que compõem os dois membros como está representado na figura 4.5, mas como não consegue resolver as equações pelo método algébrico, pode-se concluir que com esta abordagem a resolução de equações ainda está em fase de interiorização e a necessitar de uma abordagem processual mais profunda.

Figura 4.5

Resolução de equações com a calculadora gráfica: função logarítmica



Nota: Fonte própria

Desta forma a Joana mostra ser capaz de resolver a equação dada em termos gráficos, determinando o ponto de interseção correspondente à solução da equação. Esta abordagem, essencialmente gráfica é a forma que ela reificou para a resolução de equações.

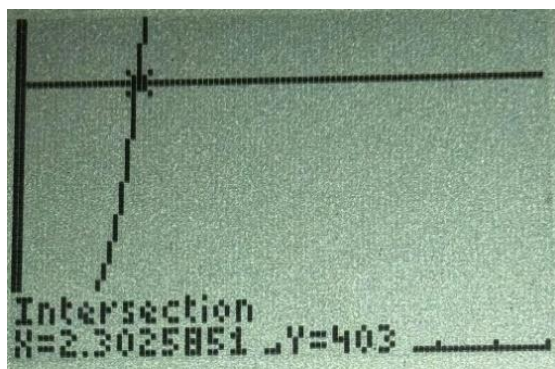
A investigadora pediu à Joana resolver a equação seguinte: $4e^x + 3 = 403$.

A Joana verificou que $Y = 403$, recorrendo ao GeoGebra, era muito difícil de encontrar pois estava num lugar muito acima no eixo dos YY .

Utilizou a calculadora gráfica, pois na Janela de visualização podia escolher a melhor janela de visualização, Figura 4.6.

Figura 4.6

Resolução de equações com a calculadora gráfica: função exponencial



Nota: Fonte própria

Conseguiu visualizar o ponto de interseção dos 2 gráficos e resolver a equação e verificou que o ponto de interseção era a solução pedida. A Investigadora concluiu que a tecnologia, nomeadamente o GeoGebra e a calculadora gráfica motivaram a aluna para a aprendizagem dos conceitos a serem estudados. A resolução gráfica de equações parece ser um dos tópicos que a Joana já conseguiu reificar.

Em relação à terceira tarefa: Aplicação das funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais foi proposta a seguinte tarefa:

A altura das plantas

Admita que a altura h , em metros, das plantas de uma dada espécie é dada em função do tempo t ($t \geq 1$), em meses, por:

$$h(t) = 0,32 + 0,89 \ln(t) \text{ (ln designa logaritmo de base e)}$$

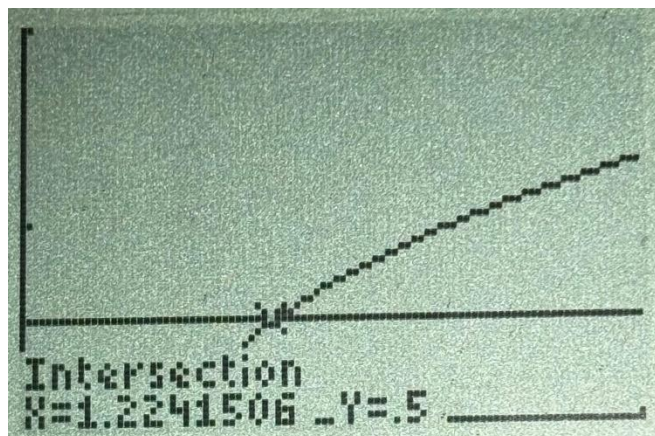
1. Uma planta tem 50 cm de altura. Quantas meses tem a planta? Apresente a resposta arredondada às décimas.

2. Mostre que, para qualquer valor de t , $h(3t) - h(t)$ é constante. Determine um valor aproximado às centésimas e interprete esse valor no contexto do problema.

A aluna começou por tentar interpretar o que lhe era pedido, utilizando a calculadora gráfica, e ajustando a janela de visualização de forma a tentar resolver o que lhe era pedido e obteve o seguinte gráfico:

Figura 4.7

Tarefa de modelação



Nota: Fonte própria

A Joana utilizou novamente a tecnologia, nomeadamente a calculadora gráfica. Verificou que o t correspondia ao x do eixo das abcissas e converteu $50\text{ cm} = 0.5\text{m}$.

Ajustou novamente a janela de visualização e procurou o ponto de interseção. Assim constata-se que ela consegue resolver as equações por processos gráficos sempre que tal lhe é permitido. A tecnologia surge aqui como uma ferramenta fundamental para ela mostrar as suas competências na resolução de problemas. A Joana não fez a alínea 2 porque não demonstrou consolidação dos conceitos necessários para a resolução da mesma. Evidenciou-se a importância de consolidar conceitos de geometria. A Joana parece melhorar o seu desempenho e compreensão com base na resolução de tarefas gráficas desta natureza.

I: Gostas de resolver problemas em matemática?

J: Não gostava muito porque a maioria das vezes não percebia o que me era pedido, nem para que servia. Mas como nesta tarefa foi dado um exemplo parecido com a tarefa 2, entendi melhor o que me era pedido.

I: Consideras que o recurso à resolução de problemas é benéfico para desenvolver o raciocínio matemático?

J: Sim, gostei bastante desta tarefa.

Com estas tarefas a Joana revelou um reforço positivo em relação à matemática, denotando uma melhor compreensão dos conceitos abordados pela via gráfica.

I: Como é que os usos destas ferramentas te ajudaram na resolução das tarefas

J: Tenho mais dificuldade em usar a calculadora gráfica, mas acho que sem estas ferramentas era muito difícil visualizar o que me era pedido. Também vi que a calculadora gráfica é muito útil para exercícios

em que o domínio e o contradomínio das funções são valores muito grandes ou muito pequenos pois no GeoGebra não consigo fazer essas escalas.

Neste processo de resolução é interessante notar que a Joana precisa de combinar a utilização de diferentes ferramentas para resolver determinadas situações específicas. Esta abordagem mostra que não tem um domínio mais aprofundado de nenhuma das ferramentas, mas que consegue usar as duas em simultâneo.

4.1.1 Considerações finais

A Joana, embora tendo feito as tarefas sozinha, conseguiu na maioria dos casos justificar e explicar as suas conclusões, embora a um nível de interiorização dos conceitos. A sua maior dificuldade foi resolver equações pelo método algébrico, pelo que acabou por recorrer à tecnologia. Cada vez que superava uma tarefa, mostrava mais motivação para resolver novos exercícios propostos.

Na primeira tarefa teve dificuldades em entender alguns conceitos como contradomínio de uma função, função logarítmica como inversa da função exponencial e translações de funções associadas a um vetor.

Em relação às assíntotas teve alguma dificuldade com a definição de assíntota e confundiu algumas vezes assíntota horizontal com vertical.

A sua maior dificuldade foi resolver equações pelo método algébrico, pelo que acabou por recorrer à tecnologia. Verificou que o uso da tecnologia é uma mais-valia no processo da aprendizagem da matemática e que há tarefas em que o uso do computador é mais fácil do que o uso da calculadora gráfica e vice-versa. Revelou dificuldades na tarefa 3 ao nível da interpretação da resolução de problemas.

Pode-se concluir que a Joana recorreu a propriedades conhecidas e que o uso da tecnologia foi fundamental para desempenhar as tarefas propostas.

4.2 Estudo de Caso: Luís

O Luís é seguido pela psicóloga, beneficiando de aulas de apoio e de tempo extra para realizar os testes. O relatório psicológico que o aluno apresentou descreve um quadro compatível com Transtorno de Espectro Autístico Leve (Síndrome de Asperger). O aluno gosta de frequentar as aulas, relacionando-se bem com os seus colegas. Está a frequentar o 12.º ano pela primeira vez, e manifesta alguma lentidão na execução das atividades escolares, apresentando-se, no entanto, consciente das suas dificuldades. Apresenta alguma ansiedade perante situações novas e duvida das suas capacidades, principalmente nos momentos de avaliação. Muitas vezes afirma ter já compreendido os conteúdos, embora tal não se venha a confirmar.

De entre os três participantes era o mais tímido e tinha vergonha de expor dúvidas. O Luís teve sempre mais facilidade em resolver as tarefas propostas, utilizando a tecnologia. Quando ao longo do ano os conteúdos eram lecionados usando “papel e lápis” o aluno perdia a motivação.

A primeira tarefa foi analisar as propriedades das funções exponenciais e consistiu na resolução de três exercícios. No primeiro exercício pedia-se para analisar as propriedades das funções exponenciais:

$$1. \quad f(x) = 2^x \quad g(x) = 3^x \quad h(x) = 10^x$$

1.1 As funções exponenciais serão monótonas?

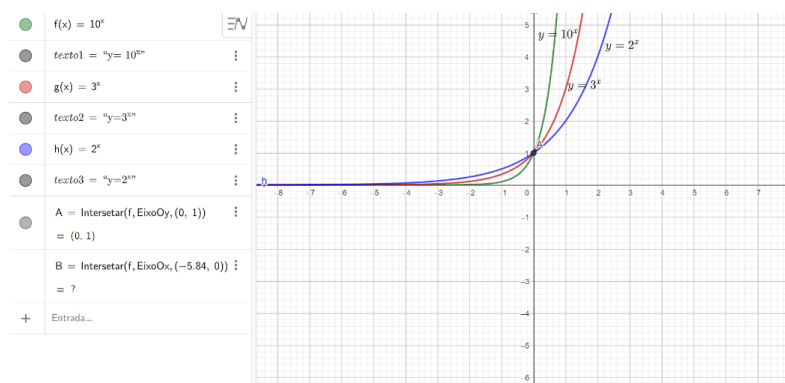
1.2 Qual será o seu domínio? E o seu contradomínio? O gráfico das funções exponenciais terá assíntotas?

O Luís começou por utilizar o computador pessoal, no qual já estava instalado o *software* GeoGebra. Foi sugerida a configuração da folha gráfica e este aluno revelou excelente domínio de alguns processos no que se refere à utilização do GeoGebra. O aluno também tinha consigo a calculadora gráfica e era o único aluno da turma que tinha essa ferramenta sem ser necessário requisitar na biblioteca da escola.

Visualizou o seguinte gráfico na calculadora:

Figura 4.8

Função de crescimento de base superior a um



Nota: Fonte própria

Em relação à tarefa 1, no primeiro exercício o aluno desempenhou a tarefa com alguma facilidade. Em relação ao domínio da função, verificou que nas três funções pedidas é R . Quanto ao contradomínio, foi verificando que as três funções nunca intersestavam o eixo das abcissas.

I: Qual é o contradomínio das três funções?

L: Como nunca é zero e nunca está abaixo do eixo dos XX , é sempre positivo

I: ou seja?

L: R^+

O Luís verificou que as três funções eram sempre positivas, mas confundiu assíntota vertical com assíntota horizontal, tendo dito que como as três funções nunca tocavam no eixo das abcissas $0x$, tinham uma assíntota vertical $x = 0$.

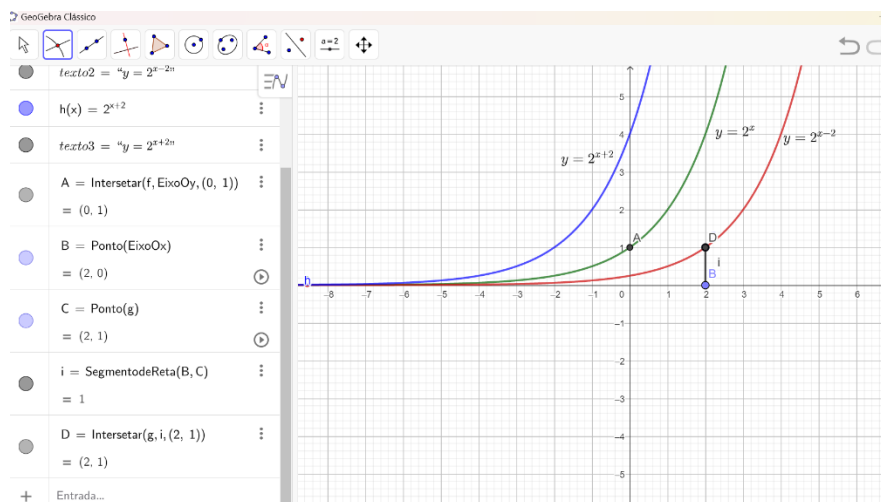
O aluno revela aqui alguns traços do conceito de função, mas mais consolidados do que a sua colega Joana. Resolveu individualmente a tarefa e a investigadora ficou satisfeita com a motivação demonstrada pelo aluno visto ter sido referido pela equipa da EMAIE que o aluno se encontrava desmotivado em relação à escola no geral e em particular à disciplina de matemática. Retirou as conclusões que as funções estudadas eram monótonas crescentes. O domínio é R e o contradomínio R^+ , mas não conseguiu determinar quais as assíntotas das funções estudadas.

No segundo exercício pediu-se ao aluno para analisar as propriedades das funções exponenciais $f(x) = e^x$ $g(x) = e^{x-2}$ $h(x) = e^{x+2}$ nomeadamente como se obtinha as funções g e h através da função f . A investigadora pediu para o aluno resolver este exercício não recorrendo à tecnologia, mas novamente verificou que o aluno se mostrava reticente em utilizar "papel e lápis" e preferia utilizar a tecnologia.

Passou à representação gráfica das figuras, como se ilustra na figura 4.9:

Figura 4.9

Translação de funções de crescimento



Nota: Fonte própria

Em relação ao exercício 2 da Tarefa 1, o Luís verificou que as três funções estudadas tinham o mesmo domínio e o mesmo contradomínio que no exercício anterior, o que levou a investigadora a concluir que estes conceitos tinham ficado aprendidos com a resolução do que no exercício anterior foi proposto. O aluno referiu que a função a vermelho se descocava duas unidades para a direita em relação à equação a verde

e equação a azul se deslocava duas unidades para a esquerda em relação à equação a verde. Verificou no GeoGebra que as coordenadas do ponto *A* são (0, 1); e as coordenadas do ponto *D* são (2, 1). Revelando alguma autonomia foi pesquisar no motor de busca Google o significado e respondeu que as funções obtidas eram resultado de uma translação associada ao vetor (2,0) e (-2,0) respetivamente. O Luís mostra assim que consegue caracterizar as funções em estudo e visualiza que os gráficos sofrem deslocamentos relativamente a um deles. Consegue pesquisar e classificar essas deslocamentos. Parece que neste caso o Luís está numa fase de condensação destas características, desempenho este que é proporcionado pela representação gráfica potencializada pela tecnologia.

No exercício 3 da tarefa 1 foi pedido ao aluno a representação gráfica das funções abaixo:

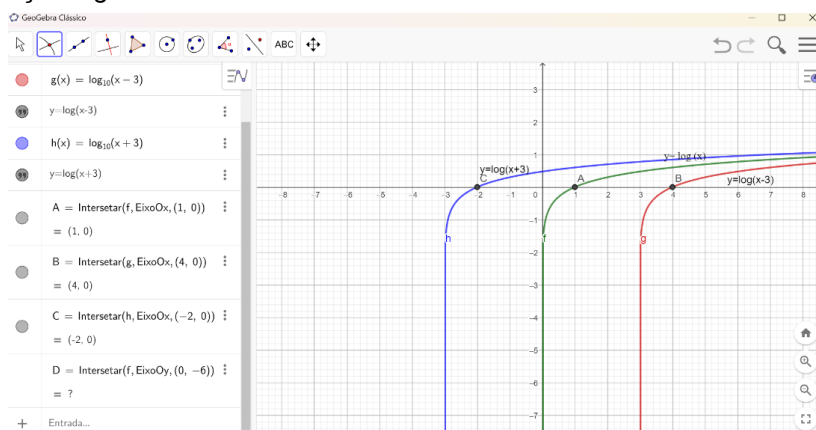
$$i(x) = \log(x) \quad j(x) = \log(x + 3)$$

$$k(x) = \log(x - 3).$$

O Luís começou por fazer a representação gráfica das três funções, figura 4.10:

Figura 4.10

Translação da função logarítmica



Nota: Fonte própria

Através da análise dos gráficos obtidos, o Luís disse que estas funções estavam ao contrário das funções estudadas no exercício anterior, mas não relacionou a função logarítmica como a função inversa da função exponencial, ou seja, não formulou conjecturas sobre as funções a estudar e as anteriormente representadas. Verifica-se assim que ele preserva algumas imagens mentais dos gráficos que vai obtendo, mas não sente a curiosidade para os traçar em simultâneo e os comparar. Também não conseguiu referir que o domínio das 3 funções estudadas era sempre diferente. Conseguiu verbalmente referir as translações obtidas em relação à função $i(x)$.

Referiu que gosta de trabalhar com o GeoGebra visto que ao escrever na forma algébrica a função no computador, este rapidamente faz o estudo gráfico onde ele facilmente pode responder ao que lhe é pedido.

Em relação a esta tarefa a investigadora verificou que o aluno embora tenha conseguido obter os gráficos pedidos das 3 funções, não conseguiu em relação à função logarítmica dizer qual era o domínio, o contradomínio e a existência de assíntotas e que a função logarítmica é a função inversa da função exponencial o que leva a investigadora a concluir que estes conceitos não estão reificados e quando são identificados têm por base a visualização

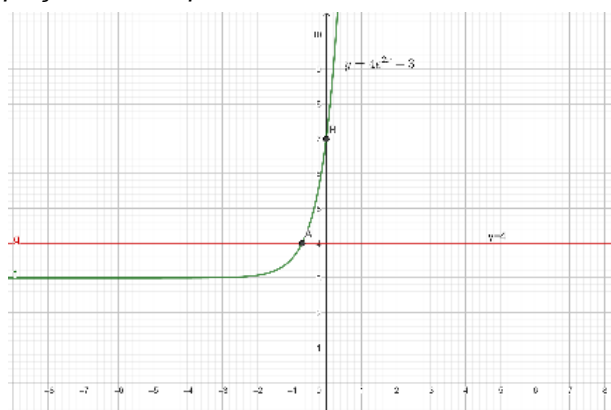
Quanto à translação das funções em relação à função $i(x)$, a investigadora conclui que o uso da tecnologia favoreceu a consolidação deste conceito.

Em relação à tarefa 2, onde foi pedido o estudo da equação $4e^x + 3 = 403$ o Luís verificou que podia usar as duas funções $y = 4e^x + 3$ e $y = 403$ e fazer o ponto de interseção das duas funções.

Recorreu ao GeoGebra mas verificou que não encontrava o 403 no eixo das ordenadas e foi tentar com $y = 4$ como se pode verificar na figura 4.11 abaixo:

Figura 4.11

Resolução de equações com exponencial



Nota: Fonte própria

Embora tendo uma solução diferente pois o que foi pedido é o ponto de interseção $y = 4e^x + 3$ e $y = 403$ o Luís percebeu que alterando a reta horizontal $y = 4e^x + 3$ para $y = 403$ obtinha a solução pretendida, ou seja, o Luís já forma conjeturas com bastante facilidade e começa a ter cada vez melhor desempenho nos conceitos a estudar.

Com as dificuldades de representação gráfica de ambos os membros da equação no GeoGebra, o Luís questionou a investigadora:

L: Professora, não consigo achar o 403, como posso fazer?

I: Usa a calculadora gráfica e tenta ajustar a janela de visualização de modo que possas resolver o exercício.

L: Já consegui

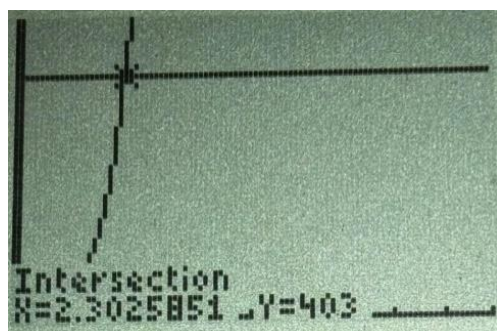
I: Tenta resolver o exercício sem recorrer ao uso da tecnologia.

L: A professora já explicou como se resolvem equações com exponenciais, mas para mim é muito difícil, mas vou tentar.

O Luís pediu à investigadora se podia utilizar a calculadora gráfica pois verbalmente disse que o ponto de interseção que iria visualizar na janela da calculadora gráfica seria a resolução da tarefa proposta e chegou à seguinte representação gráfica, figura 4.12.

Figura 4.12

Resolução de equações na calculadora gráfica: função logarítmica



Nota: Fonte própria

O aluno mostrou alguma destreza em formular conjeturas e em resolver tarefas. Nesta tarefa o aluno teve um desempenho bastante positivo e o uso da tecnologia foi fundamental para a sua resolução. Sem o uso da tecnologia, o Luís teria perdido o interesse e a desmotivação em relação à disciplina seria maior. A abordagem do Luís foi essencialmente gráfica e foi desta forma que o Luís reificou a resolução de equações.

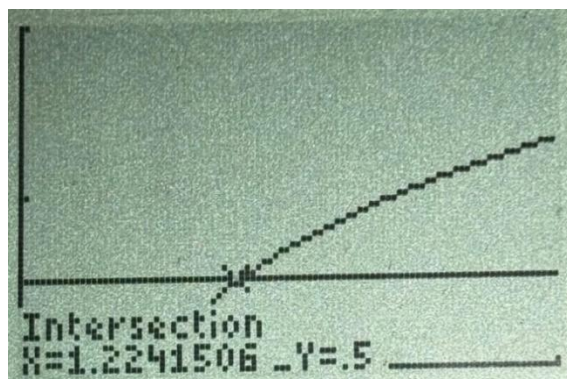
Em relação ao segundo exercício da tarefa 2, em que foi proposto a resolução da seguinte equação, $\log(x^2) = \log(2x)$.

O Luís pediu à investigadora se podia utilizar a calculadora gráfica pois verbalmente disse que o ponto de interseção que iria visualizar na janela da calculadora gráfica seria a resolução da tarefa proposta.

O Luís realizou o que sugeriu pedido tendo obtido o seguinte gráfico:

Figura 4.13

Resolução de equações na calculadora gráfica: função exponencial



Nota: Fonte própria

A investigadora concluiu que em relação à tarefa 2, o uso da tecnologia foi importante para a resolução da tarefa, pois sempre que foi pedido ao aluno para resolver equações pelo método algébrico, ele perdia o interesse e a motivação. Com o recurso à representação gráfica e à visualização das soluções mostrou ter um bom desempenho, com os conceitos em estudo a apresentar características de reificação.

Em relação à terceira tarefa: Aplicação das funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais, foi solicitada a sua resolução.

A altura das plantas

Admita que a altura h , em metros, das plantas de uma dada espécie é dada em função do tempo t ($t \geq 1$), em meses, por:

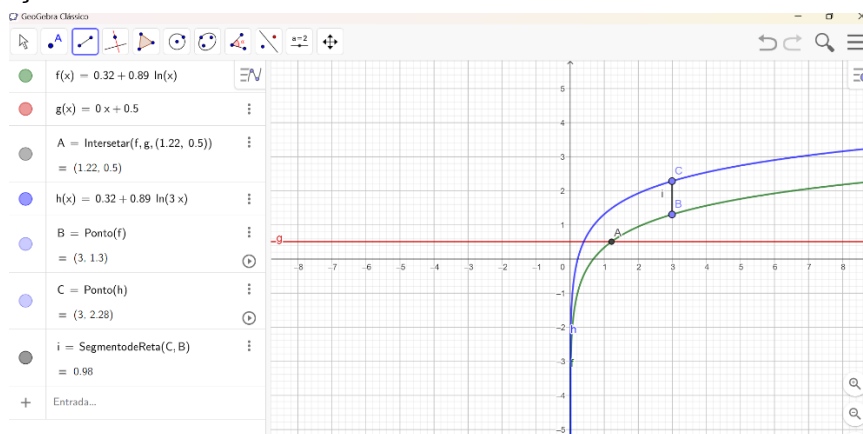
$$h(t) = 0,32 + 0,89 \ln(t) \text{ (ln designa logaritmo de base e)}$$

1. Uma planta tem 50 cm de altura. Quantas meses tem a planta? Apresente a resposta arredondada às décimas.
2. Mostre que, para qualquer valor de t , $h(3t) - h(t)$ é constante. Determine um valor aproximado às centésimas e interprete esse valor no contexto do problema.

O Luís começou por traçar o gráfico das funções envolvidas, figura 4.14:

Figura 4.14

Tarefa de modelação



Nota: Fonte própria

Após o traçado dos gráficos conseguiu interpretar a solução e identificar o ponto de interseção de ambos. O aluno parece já estar interiorizado com o procedimento conseguindo mesmo apresentar as coordenadas do ponto de interseção, conforme se observa na janela algébrica do GeoGebra que consta no lado esquerdo da figura 4.14.

Seguidamente conseguiu determinar o segmento $[CB]$, onde C e B representam os pontos de interseção do segmento com ambas as funções, correspondendo à distância entre as imagens das duas funções e obtendo o valor de 0,98. De seguida deslocou o segmento para a direita e para a esquerda e verificou que

esta distância se mantinha inalterada, constatando assim que o crescimento simulado pelas duas funções se mantinha sempre o mesmo.

Verificamos assim que o Luís consegue obter uma resposta para o problema proposta a partir da abordagem gráfica que o software lhe facilita. Podemos inferir que nesta fase ele se encontra num processo de condensação dos conceitos, tendo os conceitos mais elementares sido já reificados.

4.2.1 Considerações finais

A utilização do GeoGebra na tarefa 1 permitiu que o Luís desenvolvesse processos gerais de identificação de propriedades da família de funções de crescimento. Na representação gráfica, conseguiu dar significado a essas propriedades. Revelou facilidade em passar da representação algébrica para a representação gráfica e o uso da tecnologia revelou-se imprescindível para o desenvolvimento do processo de aprendizagem do conceito de função em geral e do conceito de função de crescimento em particular.

No que diz respeito à resolução de problemas de modelação, o Luiz revelou alguma tendência a utilizar só umas representações semióticas, dando em geral, preferência às representações gráficas, parecendo ter desenvolvido alguma fluidez nas conversões entre a representação algébrica para a representação gráfica. Aparentemente, o Luís considerou que a utilização desse sistema de representação semiótica favorece a compreensão das propriedades relevantes à resolução de problemas utilizando as funções de crescimento.

Em relação à resolução de equações exponenciais, o Luiz privilegiou a representação gráfica, parecendo sentir-se confortável nos tratamentos dentro deste registo de representação, onde, em geral, apresentou bons desempenhos.

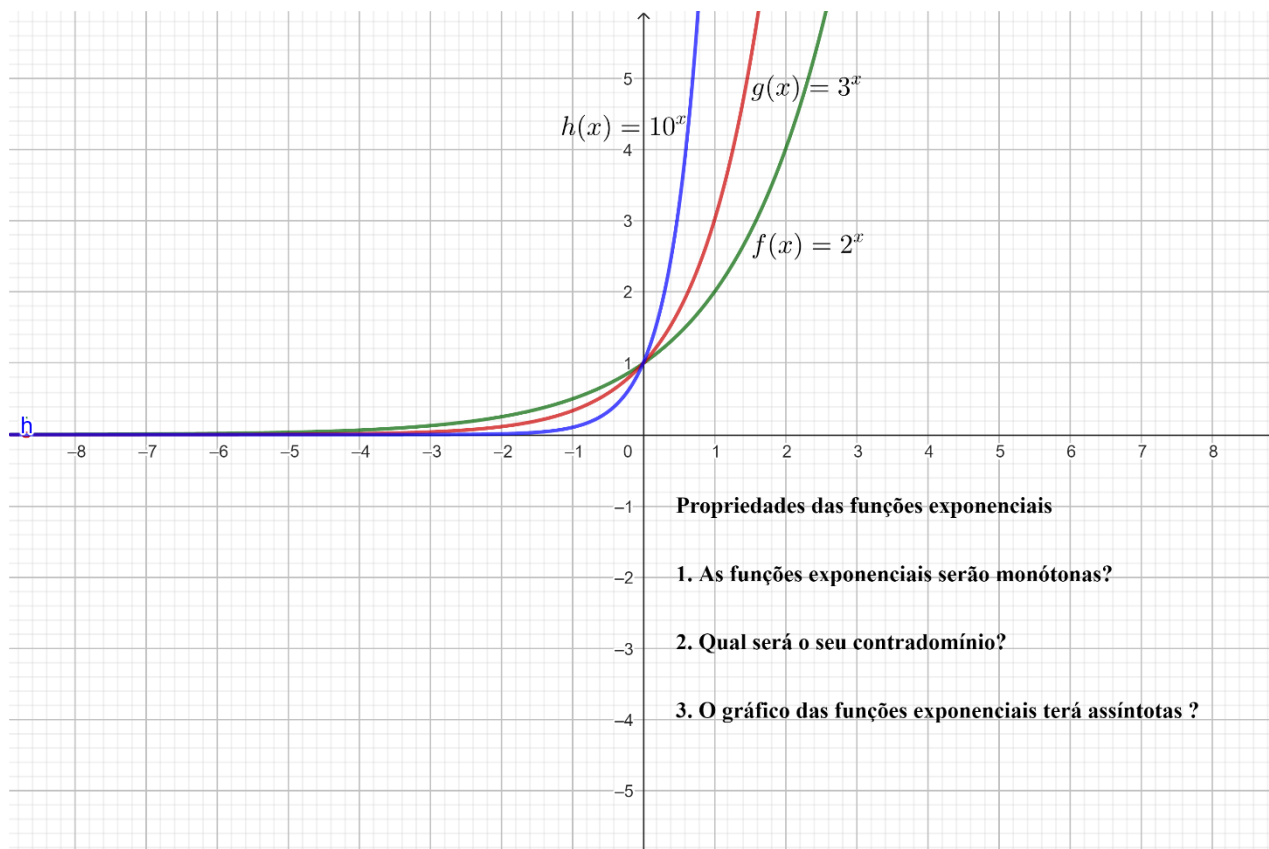
4.3 Estudo de Caso: Pedro

O Pedro é um aluno bastante empenhado, sempre gostou de informática. Frequentou durante dois anos o ensino geral do curso de ciências e tecnologia, mas dificuldades em Matemática e Físico-Química fizeram com que ingressasse no Ensino Profissional na área de Informática. Pretende fazer o exame de Matemática A ou Matemática B no final do ano letivo. O Conselho de Turma deu indicação de que o Pedro era muito intuitivo com o computador, o que se confirmou com o decorrer da prática letiva. Conseguia compreender com facilidade os conteúdos, fazer generalizações, resolver problemas de modelação matemática, utilizando tanto o computador como a calculadora gráfica. Quando realizou todas as tarefas pedidas pela investigadora, escreveu em Word em cada tarefa o que lhe era pedido, tendo dito à investigadora que assim podia estudar o exercício à posterior.

Em relação ao exercício 1 da primeira tarefa, foi pedido ao aluno que estudasse as funções representadas na figura 4.15.

Figura 4.15

Função exponencial de base superior a um



Nota: Fonte própria

O Pedro conseguiu elaborar o gráfico das várias funções pedidas, utilizando o *software* GeoGebra e acrescentou as questões que eram apresentadas na tarefa.

Conseguiu depois de visualizar os gráficos referir que as funções de crescimento f , g e h são crescentes e referiu que quanto maior era o número que estava na base das funções estudadas mais perto a 'forma' da função estava do eixo das ordenadas.

O Pedro consegue discutir as diferenças dos vários gráficos e reconhece o crescimento das funções pictoricamente. O papel da tecnologia foi fundamental para traduzir as várias funções da forma algébrica para a forma gráfica. Reconheceu que todas as funções intersectavam o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,1)$ e que nunca intersectavam o eixo Ox .

Referiu que as três funções só tinham uma assíntota no eixo Ox pois não tinham nenhum ponto em comum com esse eixo. Esta abordagem é essencialmente pictórica sem que ele tenha dado uma justificação algébrica para tal. Quando a investigadora pediu para ele referir qual seria a reta que definia essa função, o aluno respondeu $x = 0$, não denotando qualquer reflexão sobre a afirmação que produzira.

O aluno lembrava-se que o domínio de uma função se via no eixo das XX e o contradomínio da função via-se no eixo dos YY . Conseguiu responder que o domínio de todas as funções é R e o contradomínio é R^+

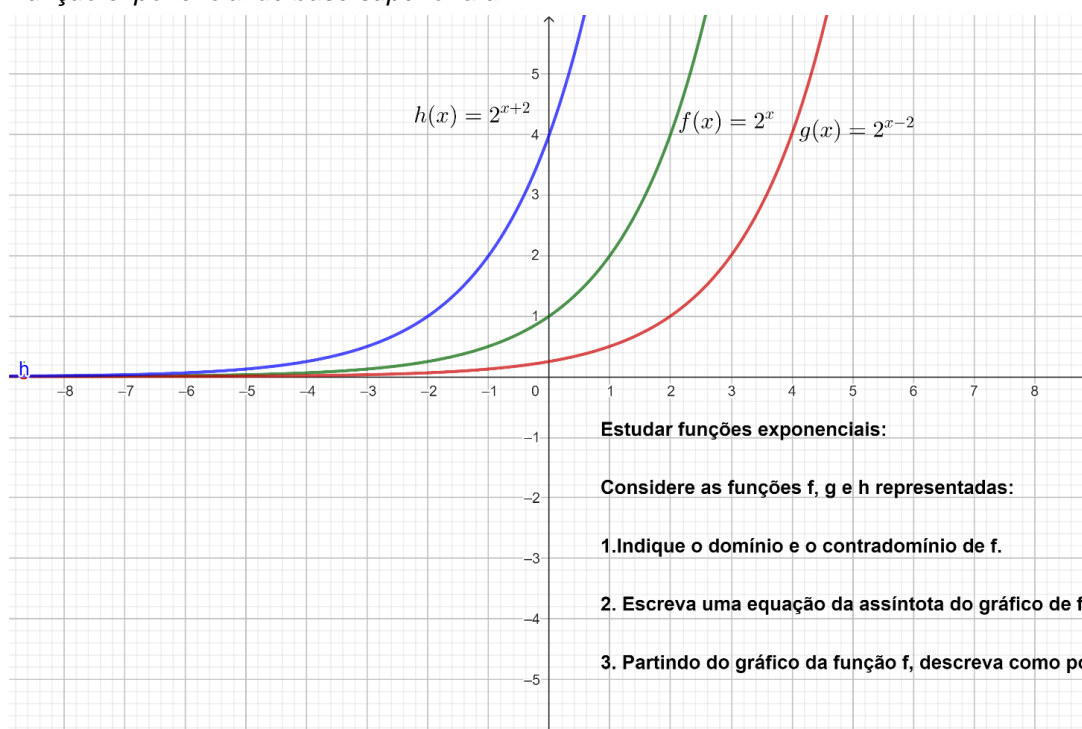
O aluno referiu que as três funções eram contínuas pois lembrava-se que ao desenhar as funções, elas tinham um traço contínuo, ou seja, se as desenhasse à mão nunca levantava o lápis do papel. Mais uma vez ele usa a abordagem pictórica, baseado na representação gráfica, para concluir sobre a continuidade das funções em estudo. Verificou-se assim que este aluno apresenta uma grande amplitude nos conhecimentos manifestados. Há alguns conceitos que parecem ter já sido reificados enquanto que outros parecem estar na fase da interiorização. Todas as conclusões que ele tira são essencialmente baseadas na visualização que a ferramenta gráfica lhe proporciona.

A investigadora concluiu que este aluno tinha vários conceitos reificados.

Em relação ao exercício 2 da tarefa 1, o Pedro obteve os seguintes gráficos utilizando o *software* GeoGebra:

Figura 4.16

Função exponencial de base superior a um



Nota: Fonte própria

Ao resolver esta tarefa, e depois da resolução da tarefa anterior, o Pedro domina o computador, nomeadamente o *software* GeoGebra e conseguiu facilmente obter o gráfico destas três funções. Ao visualizar o gráfico obtido das três funções, o Pedro facilmente percebeu que o domínio das três funções é R e o contradomínio das três funções é R^+ , à semelhança do que tinha sido feito anteriormente.

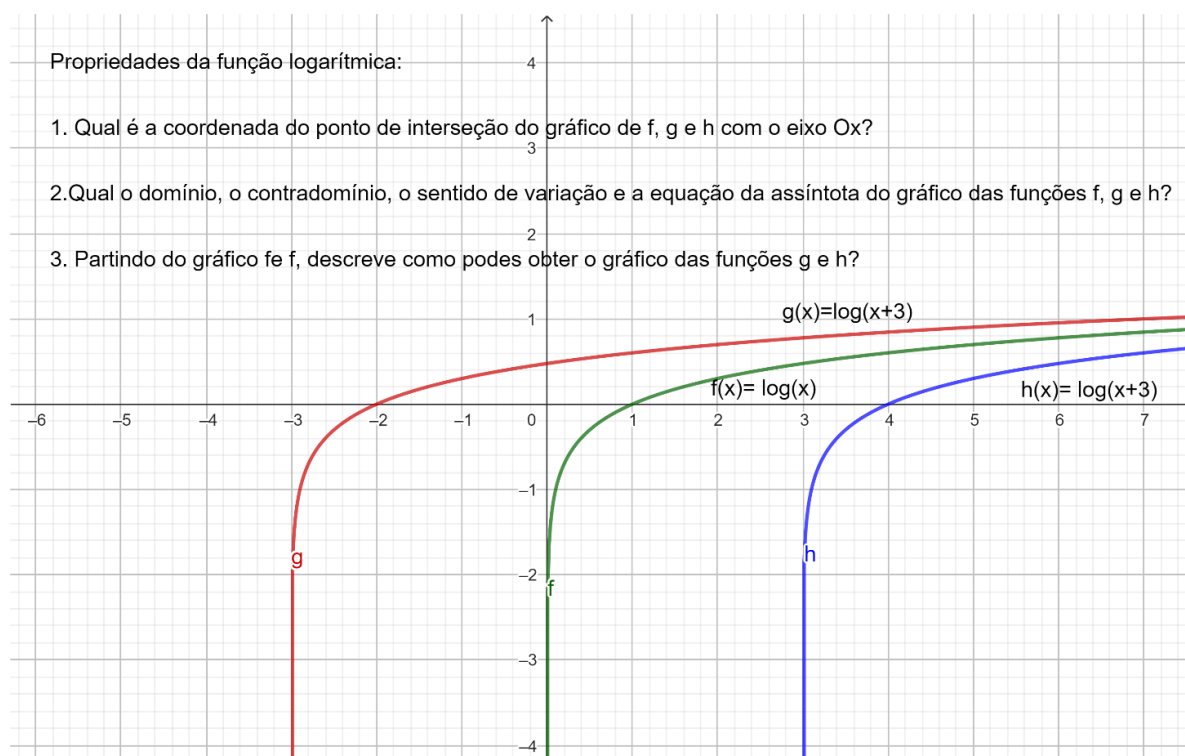
O Pedro referiu que ainda se lembrava que a reta horizontal $y = 0$ era a equação da assíntota horizontal.

Na interpretação dos gráficos traçados referiu que o gráfico da função g era igual ao da função f mas essa função deslocava-se dois números para a direita e o gráfico da função h era obtido deslocando a função duas unidades para a esquerda. O aluno referiu que se lembrava da Matemática A que esse deslocamento se chamava de translação associada a um vetor. Pode-se concluir que nesta abordagem o Pedro já se encontra na fase de condensação dos conceitos em estudo.

Para a resolução do exercício 3 da tarefa 1 o Pedro começou por representar graficamente as funções dadas (figura 4.17).

Figura 4.17

Translação da função logarítmica



Nota: Fonte própria

Em relação a estas funções, a investigadora verificou que o Pedro facilmente conseguia obter o gráfico das funções utilizando o computador.

Através a visualização, facilmente referiu que as três funções intersectavam o eixo Ox no ponto de coordenadas $(1,0)$, o contradomínio é \mathbb{R} e as três funções são crescentes. O Pedro não conseguiu dizer qual o domínio das três funções.

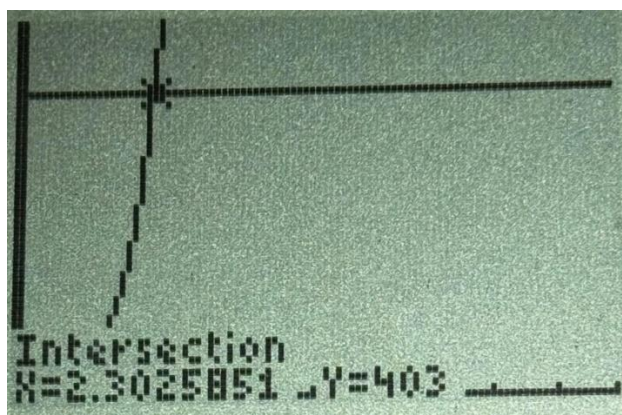
Desta forma pode inferir-se que o seu domínio dos conceitos depende da complexidade dos mesmos. Perante conceitos mais complexos o Pedro manifesta uma compreensão instrumental ao nível da interiorização, mesmo suportado na visualização que a tecnologia lhe permite. Esta constatação mostra que há necessidade de trabalhar, em simultâneo, diferentes representações dos conceitos e não apenas de uma delas.

Como na tarefa anterior já tinham sido feitas revisões sobre assíntotas, o Pedro referiu que tinha uma assíntota vertical de equação $x = 0$ (o que só era verdadeiro para a função $Y = \log(x)$ e que não existiam mais assíntotas). As três funções eram contínuas. A função $h(x)$ é obtida através da função f deslocando a função três unidades para a direita e que a função $g(x)$ é obtida através da função $f(x)$ deslocando esta função para a esquerda. Nesta tarefa o aluno já referiu que eram translações associadas a um vetor. Mais uma vez mostra alguma irregularidade nas respostas dadas e na análise que faz de cada um dos conceitos envolvidos.

Em relação à tarefa 2, o Pedro utilizou vários registos semióticos e começou por resolver as equações, tendo utilizado a calculadora gráfica com uma janela de visualização adequada para verificação dos resultados obtidos anteriormente, como se pode verificar na figura 4.18:

Figura 4.18

Resolver equações



Nota: Fonte própria

Na resolução de equações utilizando exponenciais e logaritmos, tem as concepções estruturais interiorizadas. Pode assim concluir-se que o conceito de equação foi reificado.

Em relação à terceira tarefa: Aplicação das funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais, foi solicitada a resolução da seguinte tarefa:

A altura das plantas

Admita que a altura h , em metros, das plantas de uma dada espécie é dada em função do tempo t ($t \geq 1$), em meses, por:

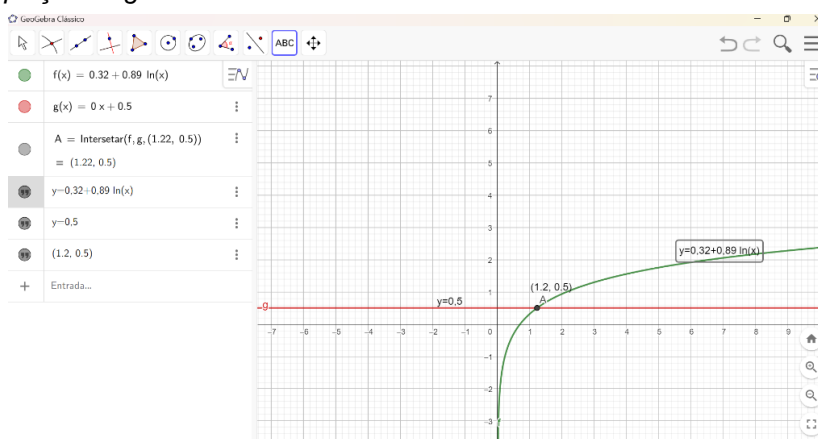
$$h(t) = 0,32 + 0,89 \ln(t) \text{ (ln designa logaritmo de base e)}$$

1. Uma planta tem 50 cm de altura. Quantas meses tem a planta? Apresente a resposta arredondada às décimas.
2. Mostre que, para qualquer valor de t , $h(3t) - h(t)$ é constante. Determine um valor aproximado às centésimas e interprete esse valor no contexto do problema.

O Pedro recorreu mais uma vez ao computador e traçou os gráficos da função de crescimento da planta e da altura da planta que era dada (figura 4.19).

Figura 4.19

Resolução de equações logarítmicas

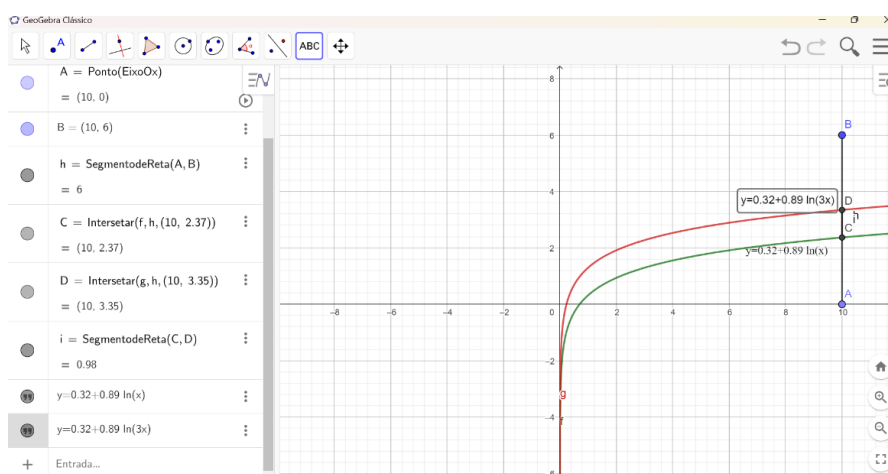


Nota: Fonte própria

Em seguida resolveu a segunda parte da tarefa proposta tendo obtido o gráfico em baixo (figura 4.20):

Figura 4.20

Tarefa de modelação



Nota: Fonte própria

As conclusões obtidas pelo Pedro podem-se observar na janela algébrica do GeoGebra.

Após o traçado dos gráficos conseguiu interpretar a solução, identificando no ponto de interseção de ambos. Este procedimento parece já estar interiorizado conseguindo mesmo apresentar as coordenadas do ponto de interseção. Após ter concluído esta parte da tarefa passou à segunda parte e procedeu de forma semelhante: traçou os gráficos das funções dadas e fez a sua interseção com o segmento de reta vertical $[AB]$. Seguidamente conseguiu determinar o segmento $[CB]$, onde C e B representam os pontos de interseção do segmento com ambas as funções, correspondendo à distância entre as imagens das duas funções e obtendo o valor de 0,98. De seguida deslocou o segmento para a direita e para a esquerda e verificou que esta distância se mantinha inalterada, constatando assim que o crescimento simulado pelas duas funções se mantinha sempre o mesmo.

Verificamos assim que o Pedro consegue obter uma resposta para o problema proposta a partir da abordagem gráfica que o software lhe facilita. Podemos inferir que nesta fase ele se encontra num processo de condensação dos conceitos, tendo os conceitos mais elementares sido já reificados.

Neste processo de resolução o Pedro demonstra ter um domínio aprofundado das ferramentas tecnológicas tendo conseguido realizar a tarefa de modelação com sucesso.

4.3.1 Considerações finais

A utilização do GeoGebra nas tarefas 1 permitiram que o Pedro desenvolvesse processos gerais de identificação de propriedades da família de funções de crescimento. Na representação gráfica, conseguiu dar significado a essas propriedades. Revelou facilidade em passar do método algébrico para o método gráfico e vice-versa e o uso da tecnologia revelou-se uma forma de verificar se o raciocínio estava correto em relação ao processo de aprendizagem do conceito de função em geral e do conceito de função de crescimento em particular. Quando a investigadora pediu para resolver as equações pelo método algébrico, o Pedro foi o único dos alunos que desempenhou com sucesso o que lhe foi proposto

No que diz respeito à resolução de problemas de modelação, o Pedro revelou que consegue utilizar as duas representações semióticas, dando em geral, preferência às representações gráficas, parecendo ter desenvolvido alguma fluidez nas conversões entre a representação algébrica para a representação gráfica.

O Pedro revelou bons conhecimentos no uso da tecnologia, revelando encontrar-se numa fase avançada de instrumentalização do artefacto. Com o diálogo que o aluno foi mantendo com a investigadora e registado por ela em notas, verifica-se que o aluno utiliza procedimentos operacionais interiorizados pois consegue baseando-se em diferentes sistemas de representação semiótica os diversos conceitos pedidos. Em relação à resolução de equações o uso da tecnologia permitiu ao aluno validar os resultados obtidos pelo método gráfico

Por tudo o que foi exposto este aluno encontra-se na fase de condensação.

5 CONCLUSÕES

O ensino será, porventura, a mais nobre das funções docentes, já que o processo da aprendizagem da matemática é uma via de sentido duplo: ensinamos a aprender e aprendemos a ensinar. Mas para que este processo possa desenvolver-se com comprometimento de todos os envolvidos, não podemos escamotear as dificuldades e obstáculos, nomeadamente as regras e padrões institucionais, o contexto socioeconómico e as expectativas.

Num mundo cada vez mais tecnológico, e sabendo que a tecnologia tornou o mundo mais pequeno e aproximou os povos, esta poderá ser a forma de cativar os alunos para conteúdos programáticos tradicionalmente encarados como mais abstratos.

Neste capítulo apresentam-se as conclusões obtidas a partir dos dados recolhidos e analisados e propõe-se uma reflexão sobre a forma como decorreu o processo de aprendizagem.

As conclusões estão organizadas de acordo com as questões de investigação colocadas:

1. Qual o papel da tecnologia na interpretação do conceito de função exponencial e logarítmica?
2. Em que medida o uso da tecnologia favorece a reificação dos conceitos de função?
3. Como se caracterizam as aprendizagens dos conceitos exponenciais e logarítmicos mediados pelo uso de tecnologia?

5.1 Resposta às questões de investigação

No que respeita à primeira questão, relativa ao papel do *software GeoGebra* e da calculadora gráfica na conversão entre várias representações semióticas, pode-se considerar que todos revelaram progressos na capacidade de analisar situações matemáticas através das diferentes representações, sejam verbais, numéricas, algébricas, geométricas ou gráficas.

O Pedro e o Luís mostraram maior capacidade a converter diferentes representações de um mesmo objeto matemático e a estabelecer conexões entre as mesmas.

No que se refere a funções reais de variável da família exponencial e logaritmo, foi visível a importância do *GeoGebra* para trabalhar a influência dos parâmetros na representação de elementos destas famílias, sendo suficiente para que os alunos partindo da representação da função exponencial ou função logarítmica, e para trabalhar outras da mesma família efetuassem conversões entre diferentes registos de representações, também se verificou que no que se refere a situações de modelação também foi fundamental o acesso às representações gráficas, que por vezes foram coordenadas com relações geométricas, como é o caso da questão 2.

Nas aulas, a manipulação dinâmica proporcionada pelo uso do *GeoGebra* no computador permitiu desenvolver um bom nível de compreensão ao converter registos de representação algébrica em registos de representação gráfica. Em situações onde o uso do *GeoGebra* não favorecia as representações pretendidas os alunos foram capazes de recorrer à calculadora gráfica para resolver os desafios propostos.

Em resumo, a utilização do GeoGebra no computador e da calculadora gráfica permitiram uma forte ligação entre as diferentes representações semióticas, proporcionando abordagens mistas e integradas, melhorando significativamente a capacidade de conversão entre as referidas representações, o que, de acordo com Duval (1993), é condição absolutamente necessária para a formação de conceitos matemáticos.

Relativamente à segunda questão - evolução do processo de reificação – o recurso às ferramentas tecnológicas indicadas permitiu aos alunos objetivar o conceito de função, domínio, contradomínio, função exponencial, função logarítmica, o que, patamar a patamar, conseguiu favorecer a condensação e reificação destes conceitos.

Pela análise dos dados recolhidos nos casos consegue-se perceber que os três alunos têm de forma suficiente estruturado o trabalho com os vários tipos de função - exponencial, logarítmica - o que lhes permitiu modelar a situação apresentada na tarefa 3, podendo considerar-se estes conceitos reificados a um nível da instrumentalização em relação ao Luís e ao Pedro

No que se refere ao trabalho com funções, Sfard (1991) defende que uma das dificuldades dos alunos se prende com a dualidade processo/ objeto, considerando necessário que estes desenvolvam uma visão orientada para o objeto, de modo a conseguirem compreender, por exemplo, transformações e operações com funções.

Em termos das transformações de funções exponenciais é possível inferir, da análise dos dados recolhidos, que são ou não invariantes em relação a translações.

Conclui-se assim que, a utilização do *GeoGebra* pode ser determinante na evolução do processo de reificação de conceitos ligados ao estudo de funções, nomeadamente em relação às funções de crescimento.

No que se refere às aprendizagens dos conceitos estudados, utilizando as ferramentas tecnológicas, refira-se em primeiro lugar que, a presença da tecnologia permitiu centrar o processo nos alunos, a partir da realização de tarefas.

Apesar de os alunos terem sempre ao seu dispor o computador, observou-se que eles não conseguem desenvolver os tratamentos algébricos previstos pelas metas curriculares relativas ao domínio “Função de crescimento”.

Analisando, por exemplo, os processos utilizados na resolução de problemas, constata-se que os alunos privilegiaram as representações gráficas e raramente conseguem trabalhar a forma algébrica.

Constatou-se ainda que, as representações gráficas validam o processo obtido, mas se lhes é pedido a validação pelo método algébrico os alunos denotam grandes dificuldades.

Na tarefa 3, os alunos foram confrontados com um problema que, apesar de apresentado de forma segmentada e orientada, os obrigou a trabalhar num nível cognitivo mais exigente. Neste caso particular, a presença da tecnologia, onde os alunos podiam explorar a situação com que eram confrontados, funcionou não só como fator de motivação como ajudou a desbloquear algumas situações de maior dificuldade.

Relativamente aos processos utilizados na resolução de equações, constata-se que os três alunos utilizam quase sempre a representação gráfica, apresentando desempenhos positivos e bastante semelhantes, tendo sido esses processos estruturados e interiorizados em aula, podendo concluir-se que o conceito

de equação exponencial se encontra num processo de reificação tendo vários conceitos sido já condensados, sendo o Pedro o que obteve melhor desempenho.

O uso do computador e da calculadora gráfica, teve uma ajuda preciosa para uma melhor compreensão dos objetos matemáticos em estudo, tornando as aprendizagens mais significativas.

5.2 Considerações finais

O Computador, utilizando o *software GeoGebra* e a calculadora gráfica apresentam características que permitem uma utilização intuitiva, uma vez que quando os alunos utilizavam essa tecnologia os alunos envolviam-se na resolução das tarefas e eram as poucas vezes em que estes alunos pediam ao professor esclarecimento de dúvidas relacionadas com o uso da tecnologia. Quanto mais diversificada for a utilização da tecnologia, mais o aluno a vai integrando na sua atividade, tornando-se com o tempo cada vez mais eficaz.

Em relação aos casos, verificou-se que o Pedro e o Luís mostraram maior desenvoltura na utilização da tecnologia, tendo desenvolvido processos de instrumentalização mais eficazes, a Joana e também demonstrou ser capaz de utilizar a tecnologia, em benefício da aprendizagem da matemática

A tecnologia como o computador e a calculadora gráfica, nomeadamente o *software GeoGebra* pode também desempenhar um papel importante no que se refere ao estabelecimento de conexões entre as representações algébrica e gráfica.

Em resumo os resultados do estudo revelaram lacunas na aplicação e compreensão dos conceitos matemáticos, as conclusões retiradas sugerem que os alunos do 12.º ano têm conceitos- definição de função categorizados em definição enviesada da definição de Dirichlet-Bourbaki, função como equação matemática e função como representação gráfica. Neste modelo, a compreensão do conceito de função apresenta predominância da influência das imagens e representações mentais individuais e dos exemplos de funções conhecidos. No contexto da Teoria da reificação de Sfard, os alunos do 12.º ano demonstram ter uma conceção de função ao nível dos procedimentos, apresentando-se ainda na fase de interiorização.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Universidade Aberta
- Amado, J. (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Universidade de Coimbra.
- Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics*, 2(1), 34–42.
- Bodgan, R., & Biklen, S (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Bourbaki, N. (1968). *Theory of Sets*. Hermann e Addison- Wesley (original 1939, em francês, pelos mesmos autores).
- Bryant, I. (2002). Action research and reflective practice. In D. Scott & R. Usher (Eds.), *Understanding education research* (pp. 114-127). Routledge.
- Brown, S., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532–538.
- Brown, S., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532-538.
- Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de célia. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255 – 266). SPIEM.
- Canavarro, A. P., Albuquerque, C., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M.J., Correia, P., Marques, P.M. & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática- 7º ano do Ensino Básico*. DGE.
- Canavarro, A.P., Albuquerque, C., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P.M.& Espadeiro, R. G.(2021). *Aprendizagens Essenciais: Articulação como perfil do aluno. Ensino Básico*. DGE. <https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica>.
- Carvalho e Silva, J., Canavarro, A.P., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Almiro, J., Santoa, L., Seabra, O., & Correia, P. (2020). *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática* (p. 345). Direção Geral da Educação – Ministério da Educação.
- Carvalho e Silva, J., Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Graça Martins, M.E., Santos, T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R.G., & Carreira, S.(2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática do do Ensino Secundário*. Direção Geral da Educação – Ministério da Educação. <http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario>.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, G. Howson & M.Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 243 -307). Springer.
- Cuoco, A. (2001). Preface. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. ix-xiii). NCTM
- Coulombe, W., & Berenson, S. (2001). Representations of patterns and functions: tools for learning. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 166–172). NCTM.
- Demana, F., & Waits, B. K. (2001). Waits, B.K., & Demana, F.D. (2000). Calculators in Mathematics Teaching and Learning: Past, Present, and Future. Part 2: Technology and the Mathematics Classroom.

In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning Mathematics for a New Century: 2000 Yearbook*. NCTM.

- DGE (2017). Perfil dos alunos à saída da escolaridade Obrigatória. ME. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf
- Domingos, A. (1998). O papel da tecnologia na aprendizagem da Matemática. Um exemplo com recurso ao GeoGebra. *Revista em Educação Matemática*.
- Domingos, A. (2003). Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A Matemática no início do superior. Tese de doutoramento. Lisboa: Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade Nova de Lisboa.
- Drijvers, P., & Doorman, M. (1996). The graphics calculator in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 15 (4), 425 – 440.
- Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique e fonctionnement cognitif da lapensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, v5.
- Domingos, A. (s/d). *A tecnologia na escola...sim porque...* Editorial da APM.
- Euler, L. (1989). Introduction in *Analysin Infinitorium*, Vols. 1 e 2, tradução para inglês por J. Blanton, Springer (original de 1748).
- Fernandes, D. (2022). *Avaliar e aprender numa cultura de inovação pedagógica*. Leya Educação.
- Fernandes, D., Miguéns, M., Lobo, A., Rodrigues, A., Sérgio, A., Dias, A., Gregório, C., Gonçalves, C., Faria, E., Procópio, M., & Perdigão, R. (2022). Estado da Educação 2021 (1ª ed.). Conselho Nacional de Educação. https://www.cnedu.pt/content/EE2021/EE2021-Web_site.pdf
- Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in álgebra. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in Scholl mathematics* (pp. 173 – 185). NCTM.
- Gafanhoto, A., & Canavarro, A. P. (2014). A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações. In J. P. Ponte (Ed.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 121 – 134). SPIEM
- Gimeno, J. S. (2000). *O currículo- uma reflexão sobre a prática*. Artmed.
- Goos, M., & Bennison, A. (2008). Surveying the technology landscape: Teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 20(3), 102–130.
- Goldin, G., & Kaput J. (1996). A Join perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of Mathematical Learning*, 409 -442.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1 -23) .NCTM.
- Hennessey, S., Fung, P., & Scanlon, E. (2001). The role of the graphic calculator in mediating graphing activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(2), 267–290.
- Johnson, R. B., & Christensen, L. (2014). *Educational research quantitative, qualitative and mixed approaches*. Sage publications.
- Kaput, J. (1989). Information technologies and affect in mathematical experience. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving* (pp. 89 – 103). Spriger.
- Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515 – 556). Springer.
- Kleiner, I. (2012). *Excursions in the History of Mathematics*. Birkhauser.
- Laborde, C. (2000). Why techonology is indispensable today in the teaching and learning of mathenatics? Em Contribution to the T3 World-Wide conference in Tokyo. Disponível em <http://bit.ly/2dNH18h>

- Laborde, C. (2002). Working in small groups: a learning situation? In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strasser, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 147 -158). Kluwer Academic Publishers.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60 (1), 1 -64.
- Ministério da Educação e Ciência (2014). Programa e Metas Curriculares, Matemática A. Lisboa.
- Nacional Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Neves, A., Pereira, C., Santos, F., Godinho, R. e Pereira, T. (2010). Avaliação Externa do Impacto da Expansão dos Cursos Profissionais no Sistema Nacional de Qualificações. IESE. ANQ
- Neves, M.A., Pereira, A., *Matemática A9 - Ensino Profissional Nível 3*. Porto Editora.
- Neves, M.A.F., Faria, M.L.M., *Exercícios, Matemática 12.º ano – 2.ª Parte*. Porto Editora.
- CNE, 2021. O Estado da Educação. <https://www.cnedu.pt/pt/noticias/cne/1874-estado-da-educacao-2021>
- OECD. (2018). PISA 2021 Mathematics Framework (DRAFT). OECD Publishing. <https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf>
- Olabeuena, J.I.R. (2002). *Metodología de la investigación cualitativa*. Universidad de Deusto.
- Oliveira, H., Segurado, M. I., & Pedro, J. (1989). Tarefas de investigação em matemática: história da sala de aula. In *Encontro de Investigação em Educação Matemática*. APM.
- Oliveira, H., & Domingos, A. (2008). Software no ensino e aprendizagem da Matemática: algumas ideias para discussão. Em A. P. Canavaro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação Matemática* (pp. 98 -109). Lisboa: SEM – SPCE.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. Library of Congress Cataloging.
- Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *Mathematics Educator*, (vol 3, n,2 pp3-8 Sum 1992).
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3 (I), 3 -18.
- Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios. *Revista Iberoamericana de Educación*, 24, 63-90.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11 – 34). APM.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em Educação Matemática, *Bolema*, 25 105 – 132
- Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavaro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). SEM -SPCE.
- Ponte, J. P. (2016). O que nos diz a investigação em didática da matemática? In M. H. Martinho T. Ferreira, A. R., V. I., & H. Guimarães (Eds), *Atas do XXVII Seminário em Investigação em Educação Matemática* (pp.5 – 19). APM
- Powers, R., & Blubaugh, W. (2005). Technology in mathematics education: preparing teachers for the future. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 5(3), (pp. 254 -270).
- Rocha, H. (2002). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrante*, II (2), (pp. 3 -27).
- Rocha, H. (2015). Múltiplas abordagens, múltiplas representações: um contributo para incrementar a relevância da representação algébrica. In L. Santos (Ed.). *Investigação em Educação Matemática 2015 – Representações matemáticas* (pp. 327 – 339). SPIEM.
- Rocha, H. (2016). Teacher's representational fluency in a context of technology use. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 35 (2), (pp. 53 -64).

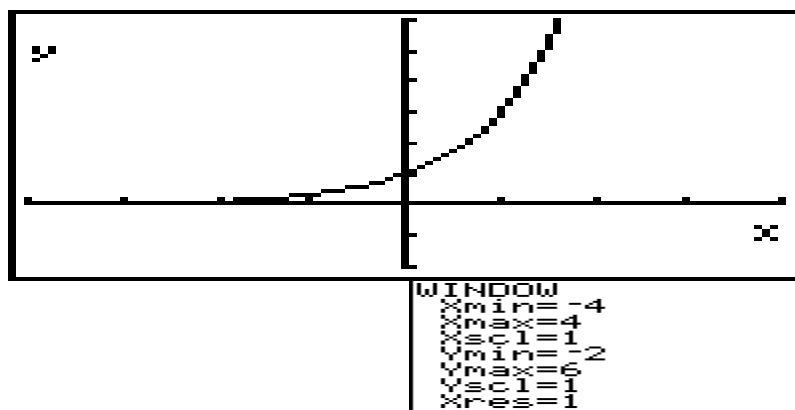
- Rocha, H. (2020). Using tasks to develop pre – service teacher's knowledge for teaching mathematics with digital technology ZDM- *Mathematics Education*, 52 (7), 1381 -1396.
- Rodrigues, A.S.C. (2015). A matemática no ensino profissional. Os programas e as representações dos professores. Tese de doutoramento. UBI
- Rodrigues, A. (2015). A Matemática no ensino profissional. Os programas e as representações dos professores. (Tese de Doutoramento, Universidade da Beira Interior).
- Rodrigues, A. (2018). Ensino profissional: educar para o futuro. In A. Caseiro, A. Domingos, J. M. Matos, F. L. Santos, M. Almeida, P. Teixeira & R. Machado (Eds), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 8-18). Lisboa: APM.
- Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics*, 21(5), 431–450.
- Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. Em J. C. Bergeron, N. Herscovics e C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference Psychology of Mathematics Education*. PME-XI (Vol. 3, pp.162-169). Montreal.
- Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. Em G. Vergnaud, J. Rogalski e M. Artigue (Eds.), *Actes de la 13 éme Conference Internationale Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 151-158). Paris, France.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects a diferente sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of the reification – The case of function. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 59-84). Washington, EUA: Mathematical Association of America.
- Sfard, A., Linchevsky, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*., 26, 191-228.
- Silva, J., Rodrigues, A., Domingos., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, E., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Santos, M., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R., &Carreira. *Aprendizagens Essenciais de Matemática A- 10º ano do Ensino Secundário* .DGE
- World Economic Forum. (2018). The future of jobs report 2018. Center for the NEW economy and Society.
- Yin, R.K. (2003). *Case study research: designs and methods*. Sage

ANEXOS

Anexo 1. Tarefa 1

Tendo em conta as PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Função Exponencial $f(x) = a^x$



Analisar as propriedades das funções exponenciais:

4. As funções exponenciais serão monótonas?
5. Qual será o seu domínio? E o seu contradomínio? O gráfico das funções exponenciais terá assíntotas?

Considere agora as funções definidas por:

$$f(x) = 2^x \quad g(x) = 3^x \quad h(x) = 10^x$$

$$f(x) = e^x \quad g(x) = e^{x-2} \quad h(x) = e^{x+2}$$

As funções exponenciais serão monótonas? Qual será o seu contradomínio? O gráfico das funções exponenciais terá assíntotas?

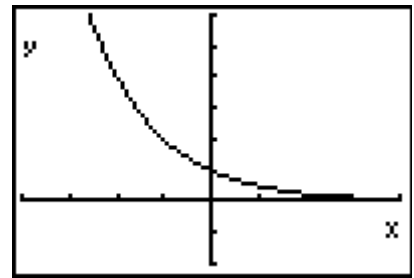
Indique o domínio e o contradomínio das funções f , g , h e escreva uma equação da assíntota do gráfico das funções anteriores e partindo do gráfico da função f , descreva como pode obter o gráfico das funções $g(x)$ e $h(x)$.

CURIOSIDADE:

Considera agora $f : (x) = a^x$, com $0 < a < 1$

Observa que se $0 < a < 1$, nem todas as propriedades se verificam. Neste caso

- A função é estritamente decrescente
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$



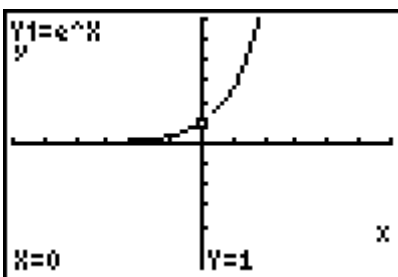
```
WINDOW
Xmin=-4
Xmax=4
Xscl=1
Ymin=-2
Ymax=6
Yscl=1
Xres=1
```

Dê exemplos e faça o estudo de funções dadas no exemplo da figura anterior.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Consideremos a função exponencial

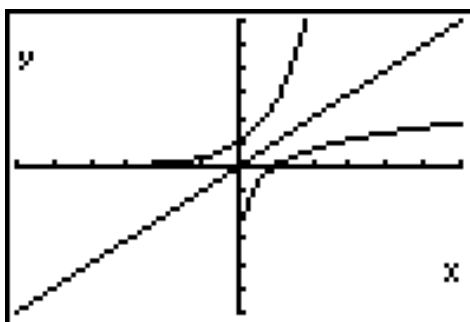
$$f(x) = e^x$$



Sendo $f(x)$ uma função exponencial é injetiva logo admite inversa.

A função inversa da função $f(x)$ representa-se por f^{-1}

e os gráficos de f e de f^{-1} são simétricos relativamente à reta de equação $y = x$.



Sejam agora as funções

$$i(x) = \log(x) \quad j(x) = \log(x+3)$$

$$k(x) = \log(x-3)$$

O que pode concluir sobre estas funções?

Anexo 2. Tarefa 2

Resolva as seguintes equações utilizando métodos analíticos e recorrendo ao uso de tecnologia (calculadora gráfica ou computador).

$$\log(x^2) = \log(2x)$$

$$4e^x + 3 = 403$$

Anexo 3. Tarefa 3

Aplicação das funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais.

O uso de funções exponenciais e de funções logarítmicas como modelos de matemáticos de situações do mundo real é muito frequente. Por forma a compreender melhor a sua aplicação, apresentam-se seguidamente a seguinte tarefa:

A altura das plantas

Admita que a altura h , em metros, das plantas de uma dada espécie é dada em função do tempo t ($t \geq 1$), em meses, por:

$$h(t) = 0,32 + 0,89 \ln(t) \text{ (ln designa logaritmo de base e)}$$

1. Uma planta tem 50 cm de altura. Quantas meses tem a planta? Apresente a resposta arredondada às décimas.

2. Mostre que, para qualquer valor de t , $h(3t) - h(t)$ é constante. Determine um valor aproximado às centésimas e interprete esse valor no contexto do problema.



2024

Ana Sofia de Melo Brito

O USO DA TECNOLOGIA NO ESTUDO DAS FUNÇÕES DE CRESCIMENTO