

ANA CRISTINA DUARTE LOPES

Licenciada em Matemática, Ramo de Investigação
Operacional

RELATÓRIO DE ESTÁGIO – MODELAÇÃO MATEMÁTICA NA APRENDIZAGEM DA PROPORCIONALIDADE NO 9.º ANO DE ESCOLARIDADE

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO
BÁSICO E NO SECUNDÁRIO

Universidade NOVA de Lisboa
junho, 2024

RELATÓRIO DE ESTÁGIO – MODELAÇÃO MATEMÁTICA NA APRENDIZAGEM DA PROPORCIONALIDADE NO 9.º ANO DE ESCOLARIDADE

ANA CRISTINA DUARTE LOPES

Licenciada em Matemática, Ramo de Investigação Operacional

Orientadora: Doutora Alexandra Sofia da Cunha Rodrigues,
Professora Auxiliar Convidada da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA
de Lisboa

Júri:

Presidente: Doutor António Manuel Dias Domingos,
Professor Auxiliar da NOVA FCT

Arguentes: Doutora Nélia Maria Pontes Amado,
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do
Algarve

Orientadora: Doutora Alexandra Sofia Cunha Rodrigues,
Professora Auxiliar Convidada da NOVA FCT

Vogal: Licenciada Cristina Luísa dos Santos Rodrigues Pina,
Professora da Escola Secundária João de Barros

Relatório de Estágio – Modelação matemática na aprendizagem da proporcionalidade no 9.º ano de escolaridade

Copyright © Ana Cristina Duarte Lopes, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

A ti meu filho, a minha estrela que me guia.

AGRADECIMENTOS

Ao terminar esta jornada não posso deixar de começar por agradecer à professora Alexandra Rodrigues, pelo acompanhamento e orientação no decorrer desta viagem de desenvolvimento pessoal e profissional. Agradeço ainda pelo incentivo ao longo do ano, e, na divulgação dos resultados da minha investigação, quer através da comunicação no ProfMat 2024 intitulada: "A modelação como estratégia de ensino da Matemática", quer pela disponibilidade em escrever em coautoria o artigo intitulado "Build the concept of proportionality using mathematical modelling", com vista à sua publicação no International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.

Agradeço também à professora cooperante que partilhou a sua experiência e conhecimento ao longo do ano letivo e que me fez sentir parte de uma equipa, uma peça importante no processo de ensino-aprendizagem. Aos meus alunos, que aceitaram participar neste desafio comigo. Ao grupo de trabalho na escola que me acolheu e a todos os professores da escola de estágio que de alguma forma contribuíram para o meu crescimento pessoal.

A todos os professores, colegas de profissão, que ao longo desta jornada me apoiaram e ajudaram, deixo também aqui o meu sincero agradecimento.

Gostaria ainda de agradecer aos amigos que fiz no decorrer desta jornada e com quem partilhei alegrias e tristezas, desafios e vitórias.

Por último um agradecimento muito especial à minha família: ao meu filho que esteve sempre presente e me acompanhou nesta caminhada, ao meu companheiro de vida pela paciência, e aos meus pais pelo apoio incondicional.

*“Aquele que reconhece
o valor da educação estuda sempre e quer sempre aprender mais”*

(Martins et al., 2017).

RESUMO

Neste trabalho são descritas as experiências vivenciadas no ano letivo de 2023/2024 que permitiram o desenvolvimento de competências no que concerne à prática docente. Na primeira parte focam-se os aspetos relacionados com a prática letiva, e, na segunda parte a investigação desenvolvida com os alunos do 9.º ano de escolaridade sobre o processo de aprendizagem no tópico da proporcionalidade, recorrendo à modelação matemática. O trabalho de investigação teve como objetivo "Compreender o papel da modelação matemática para a aprendizagem da proporcionalidade" em contexto de sala de aula, pretendendo-se dar resposta às seguintes questões de investigação:

- Que fases do ciclo da modelação matemática os alunos usaram na realização de cada tarefa?
- Quais as aprendizagens desenvolvidas, no estudo da proporcionalidade, recorrendo à resolução de tarefas de modelação matemática?
- Qual o impacto da utilização da calculadora gráfica, enquanto ferramenta da aprendizagem do tema da proporcionalidade?

Existem várias estratégias para abordar este tópico com os alunos, mas no âmbito desta investigação optou-se por desenvolver tarefas em diferentes contextos, recorrendo à modelação matemática e introduzindo a calculadora gráfica. Partiu-se assim de um problema relativo à compreensão da forma de aprendizagem dos alunos sobre o tópico da proporcionalidade e realizou-se uma abordagem qualitativa com um paradigma interpretativo recorrendo a estudos de caso. As técnicas de recolha de dados utilizadas foram a observação participante, inquéritos, entrevista semiestruturada individual a alguns alunos, o diário de bordo e a recolha documental. Com esta investigação conseguiu-se perceber que a introdução de tarefas de modelação matemática para situações extramatemáticas com recurso à calculadora gráfica, aproximou a Matemática à realidade, e, contribuiu de forma positiva para o ensino da proporcionalidade, fomentando a autonomia dos alunos, desenvolvendo o raciocínio matemático e o espírito crítico e cooperativo, essenciais à formação dos cidadãos de futuro.

Palavas chave: Proporcionalidade, Modelação matemática, Conexões matemáticas, Tarefas, Calculadora gráfica.

ABSTRACT

This work describes the lived experiences in the 2023/2024 academic year which allowed the development of skills regarding teaching practice. The first part focuses on aspects related to the teaching-learning process, and in the second part the research carried out with 9th grade regarding the learning process on the topic of proportionality, using mathematical modelling. The research work aimed to "Understand the role of modelling in learning proportionality" in a classroom context, to answer the following research questions:

- What phases of the mathematical modelling cycle did the students use to carry out each task?
- What learning was developed in the study of proportionality, using the resolution of mathematical modelling tasks?
- What is the impact of using a graphing calculator, as a tool that facilitates learning the topic of proportionality?

There are several strategies for approaching this topic with students, but in the scope of this investigation we chose to develop tasks in different contexts, in which mathematical modelling was applied using a graphic calculator. To understand how students learn about the topic of proportionality, a qualitative case study approach was carried out with an interpretative paradigm. The data collection techniques used were participant observation, surveys, individual semi-structured interviews with some students, field notes, and document collection. With this research it was possible to realize that the introduction of mathematical modelling tasks for extra-mathematical situations using the graphing calculator, brought Mathematics closer to reality, and contributed positively to the teaching of proportionality, fostering the autonomy of students, developing mathematical reasoning, critical and cooperative spirit, essential to the formation of future citizens.

Keywords: Proportionality, Mathematical modelling, Mathematical connections, Tasks, Graphing calculator.

ÍNDICE

PRIMEIRA PARTE	1
1 PRÁTICA PEDAGÓGICA SUPERVISIONADA.....	3
1.1 Introdução	3
1.2 Prática Letiva.....	3
1.2.1 Turma principal: 9.º ano de escolaridade	4
1.2.2 Turma secundária : 11.º ano de escolaridade.....	10
1.3 Prática Não Letiva	14
1.4 Reflexão	20
SEGUNDA PARTE	21
1 INTRODUÇÃO.....	23
1.1 Motivação e Pertinência	24
1.2 Problema e Questões de Investigação	24
1.3 Objetivos de Investigação	25
1.4 Organização do documento	25
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	27
2.1 Modelação matemática	27
2.1.1 Oportunidades e desafios do uso de modelação matemática no processo de ensino aprendizagem	32
2.2 A importância das tarefas	35
2.2.1 O modelo sociocultural e a sua relevância na aprendizagem dos alunos	37
2.3 Conexões matemáticas	38

2.4	Proporcionalidade	39
2.4.1	Proporcionalidade e gráfico da função	41
2.5	A importância da tecnologia nas tarefas de modelação e na aprendizagem da proporcionalidade	42
3	METODOLOGIA.....	45
3.1	Investigação de natureza qualitativa	45
3.1.1	Estudo de caso	45
3.1.2	Instrumentos de recolha de dados	46
3.2	Procedimentos Metodológicos adotados na investigação.....	48
3.2.1	Instrumentos de recolha de dados	49
3.2.2	Escolha dos participantes	51
3.2.3	Tarefas	52
3.2.4	Análise documental	55
4	ANÁLISE DE DADOS	56
4.1	Visão global das tarefas	57
4.2	Estudos de Caso	60
4.2.1	Estudo de caso 1: Confiança	61
4.2.2	Estudo de caso 2: Alegria.....	72
4.2.3	Estudo de caso 3: Motivação	81
4.2.4	Estudo de caso 4: Serenidade.....	90
4.2.5	Discussão dos Resultados	99
5	CONCLUSÕES	105
	REFERÊNCIAS.....	109
	ANEXOS.....	117
	APÊNDICES	119

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplo de um dos enunciados desenvolvidos para o 9.º ano de escolaridade	15
Figura 1.2 - <i>Natalmático</i>	15
Figura 1.3 - Palestra "Matemática recreativa ao longo da história"	16
Figura 1.4 - Tarefa para o 11.º ano de escolaridade: "LOVE"	17
Figura 1.5 - Imagens da exposição "Sempre Houve Problemas"	17
Figura 1.6 - Semana da Matemática	18
Figura 1.7 - Notícia para o <i>site</i> da escola	18
Figura 2.1 - Esquema do processo de modelação matemática	28
Figura 2.2 - Dinâmica do processo de modelação matemática	28
Figura 2.3 - Esquema do processo de modelação matemática	29
Figura 2.4 - Esquema de ciclo do processo de modelação matemática	30
Figura 2.5 - Esquema de modelação matemática	31
Figura 2.6 - O que é esperado dos alunos em cada etapa do processo de modelação matemática	32
Figura 2.7 - Abordagens relativas ao envolvimento do estudante	33
Figura 2.8 - Possíveis dificuldades dos alunos no processo de modelação matemática.....	34
Figura 2.9 - Exemplo de uma grandeza diretamente proporcional	40
Figura 2.10 - Exemplo de uma grandeza inversamente proporcional.....	40
Figura 2.11 - Gráfico da função $f(x) = 2x$	41
Figura 2.12 - Ramo positivo do gráfico da função $f(x) = 4x$	42
Figura 4.1 - Momentos da recolha de dados - tarefa 1	58
Figura 4.2 - Momentos da recolha de dados - tarefa 2	59
Figura 4.3 - <i>Workshop</i> : análise das respostas às questões 1 e 5 - grupo do Confiança	61
Figura 4.4 - <i>Workshop</i> : expressão algébrica - grupo do Confiança	61
Figura 4.5 - <i>Workshop</i> : gráfico - grupo do Confiança.....	62
Figura 4.6 - Tarefa 1: tabela originalmente preenchida - grupo do Confiança	62
Figura 4.7 - Tarefa 1: desenvolvimento do modelo - grupo do Confiança.....	63
Figura 4.8 - Tarefa 1: formalização do modelo - grupo do Confiança	63

Figura 4.9 - Tarefa 1: tentativa de resolução do modelo - grupo do Confiança.....	63
Figura 4.10 - Tarefa 1: primeira tentativa de representação gráfica do modelo - grupo do Confiança ..	64
Figura 4.11 - Tarefa 1: tabela revista - grupo do Confiança.....	64
Figura 4.12 - Tarefa 1: expressão algébrica e gráfico final - grupo do Confiança	65
Figura 4.13 - Tarefa 1: expressão algébrica e gráfico final - investigadora com base nos dados do grupo do Confiança	65
Figura 4.14 - Entrevista: tarefa em GeoGebra - Confiança	66
Figura 4.15 - Tarefa 2: tabela com os dados recolhidos - grupo do Confiança	67
Figura 4.16 - Tarefa 2: descrição da relação entre o comprimento do rolo e o comprimento visualizado da fita - grupo do Confiança.....	67
Figura 4.17 - Tarefa 2: determinação da constante de proporcionalidade - grupo do Confiança	67
Figura 4.18 - Tarefa 2: modelo definido (expressão algébrica) - grupo do Confiança	68
Figura 4.19 - Tarefa 2: tentativa de resolução do modelo - grupo do Confiança.....	68
Figura 4.20 - Tarefa 2: interpretação, validação e comunicação da solução - grupo do Confiança.....	69
Figura 4.21 - Entrevista: determinação da constante de proporcionalidade inversa - Confiança	69
Figura 4.22 - Entrevista: formulação do modelo - Confiança	69
Figura 4.23 - Resumo do processo de modelação matemática - Confiança.....	70
Figura 4.24 - <i>Mediação Pragmática</i> - Confiança	71
Figura 4.25 - <i>Workshop</i> : análise das respostas às questões 1 e 2 - grupo da Alegria	72
Figura 4.26 - <i>Workshop</i> : expressão algébrica - grupo da Alegria	73
Figura 4.27 - <i>Workshop</i> : gráfico - grupo da Alegria	73
Figura 4.28 - Tarefa 1: tabela original - grupo da Alegria	74
Figura 4.29 - Tarefa 1: tabela corrigida - grupo da Alegria	74
Figura 4.30 - Tarefa 1: formalização do modelo - grupo da Alegria	74
Figura 4.31 - Tarefa 1: tentativa de resolução do modelo - grupo da Alegria	75
Figura 4.32 - Tarefa 1: interpretação da solução - grupo da Alegria.....	75
Figura 4.33 - Tarefa 1: gráfico - Alegria (durante a entrevista)	76
Figura 4.34 - Tarefa 2: tabela com os dados recolhidos - grupo da Alegria	77
Figura 4.35 - Tarefa 2: descrição da relação entre o comprimento do rolo e o comprimento visualizado da fita - grupo da Alegria	77
Figura 4.36 - Tarefa 2: determinação da constante de proporcionalidade - grupo da Alegria.....	77
Figura 4.37 - Tarefa 2: representação gráfica dos dados recolhidos - grupo da Alegria	78
Figura 4.38 - Tarefa 2: representação gráfica do modelo - Alegria (durante a entrevista)	78
Figura 4.39 - Entrevista: determinação da constante de proporcionalidade inversa - Alegria.....	79
Figura 4.40 - Entrevista: formulação do modelo - Alegria.....	79

Figura 4.41 - Resumo do processo de modelação matemática - Alegria	80
Figura 4.42 - <i>Mediação Pragmática</i> - Alegria	81
Figura 4.43 - <i>Workshop</i> : análise da resposta à questão 1 - grupo da Motivação.....	82
Figura 4.44 - <i>Workshop</i> : análise das respostas às questões 2 e 3 - grupo da Motivação.....	82
Figura 4.45 - <i>Workshop</i> : gráfico - grupo da Motivação.....	82
Figura 4.46 - <i>Workshop</i> : análise da resposta à questão 5 - grupo da Motivação.....	82
Figura 4.47 - Tarefa 1: tabela com os dados recolhidos - grupo da Motivação.....	83
Figura 4.48 - Tarefa 1: desenvolvimento do modelo - grupo da Motivação	83
Figura 4.49 - Tarefa 1: tentativa de resolução do modelo - grupo da Motivação	84
Figura 4.50 - Tarefa 1: interpretação do modelo - grupo da Motivação	84
Figura 4.51 - Tarefa 1: representação gráfica da função - grupo da Motivação	84
Figura 4.52 - Tarefa 1: comunicação da solução - grupo da Motivação.....	85
Figura 4.53 - Tarefa 2: tabela com os dados recolhidos - grupo da Motivação.....	85
Figura 4.54 - Tarefa 2: desenvolvimento e formulação do modelo - grupo da Motivação	86
Figura 4.55 - Tarefa 2: resolução do modelo - grupo da Motivação	86
Figura 4.56 - Tarefa 2: representação gráfica - grupo da Motivação	86
Figura 4.57 - Entrevista: determinação da constante de proporcionalidade inversa - Motivação.....	87
Figura 4.58 - Entrevista: formulação do modelo - Motivação	87
Figura 4.59 - Resumo do processo de modelação matemática - Motivação	88
Figura 4.60 - <i>Mediação Pragmática</i> - Motivação.....	89
Figura 4.61 - <i>Workshop</i> : Análise das respostas às questões 1 e 2 - grupo do Serenidade	90
Figura 4.62 - <i>Workshop</i> : expressão algébrica - grupo do Serenidade.....	91
Figura 4.63 - <i>Workshop</i> : gráfico - grupo do Serenidade	91
Figura 4.64 - Tarefa 1: tabela originalmente preenchida - grupo do Serenidade.....	91
Figura 4.65 - Tarefa 1: tabela revista - grupo do Serenidade	92
Figura 4.66 - Tarefa 1: desenvolvimento e formalização do modelo - grupo do Serenidade	92
Figura 4.67 - Tarefa 1: tentativa de resolução do modelo - grupo do Serenidade.....	93
Figura 4.68 - Tarefa 1: representação gráfica - Serenidade (durante a entrevista)	93
Figura 4.69 - Tarefa 2: tabela com os dados recolhidos - grupo do Serenidade	94
Figura 4.70 - Tarefa 2: descrição da relação entre o comprimento do rolo e o comprimento visualizado da fita - grupo do Serenidade	94
Figura 4.71 - Tarefa 2: determinação da constante de proporcionalidade - grupo do Serenidade	95
Figura 4.72 - Tarefa 2: tentativa de resolução do modelo - grupo do Serenidade	95
Figura 4.73 - Tarefa 2: Interpretação, validação e comunicação da solução - Serenidade (durante a entrevista).....	96
Figura 4.74 - Entrevista: determinação da constante de proporcionalidade inversa - Serenidade	96
Figura 4.75 - Entrevista: formulação do modelo - Serenidade.....	96

Figura 4.76 - Resumo do processo de modelação matemática - Serenidade.....	97
Figura 4.77 - <i>Mediação Pragmática</i> - Serenidade	98
Figura 4.78 - Evolução da postura dos alunos em sala de aula no decorrer das tarefas	99

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.1 - Resumo das aulas do dia 02 de novembro	5
Tabela 1.2 - Resumo das aulas do dia 19 de dezembro	6
Tabela 1.3 - Resumo das aulas do dia 21 de março	7
Tabela 1.4 - Resumo das aulas do dia 30 de abril.....	9
Tabela 1.5 - Resumo das aulas do dia 05 de fevereiro	10
Tabela 1.6 - Resumo das aulas do dia 24 de maio.....	11
Tabela 1.7 - Resumo das aulas do dia 27 de maio.....	12
Tabela 2.1 - Tabela de proporcionalidade direta para a função $f(x) = 2x$	41
Tabela 2.2 - Tabela de proporcionalidade inversa para a função $f(x) = 4x$	42
Tabela 4.1 - Tabela resumo com o cumprimento das fases do processo de modelação matemática	100

SIGLAS

APM	Associação de Professores de Matemática
CT	Conselho de Turma
DT	Diretora de Turma
NOVA FCT	Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
OMS	Organização Mundial de Saúde
PA	Progressão Aritmética
PASEO	Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória
UNESCO	Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura

PRIMEIRA PARTE

PRÁTICA PEDAGÓGICA SUPERVISIONADA

1.1 Introdução

Na primeira parte deste relatório descreve-se a prática pedagógica supervisionada. Esta parte inicia-se com uma breve introdução (1.1) e de seguida inclui-se a prática letiva (1.2) em que se partilha um resumo do plano de cada uma das aulas lecionadas ao longo do ano letivo, assim como uma breve reflexão. No ponto 1.3 descreve-se a prática não letiva, incluindo as atividades implementadas pelo núcleo de estágio. A parte I do relatório termina com uma reflexão (1.4) sobre o impacto deste ano, rico em experiências e aprendizagens para a professora estagiária.

1.2 Prática Letiva

A professora estagiária acompanhou durante o ano letivo de 2023/2024, sob a supervisão da professora cooperante, uma turma de 9.º ano (turma principal)¹ e uma de 11.º ano (turma secundária).

O núcleo de estágio era constituído pela professora cooperante e pela professora estagiária, que reuniam semanalmente às segundas-feiras. Foram desenvolvidas e aceites sugestões da professora estagiária para atividades a serem realizadas ao longo do ano letivo, que foram integradas em aulas lecionadas pela professora titular. Paralelamente, articularam-se entre ambas, datas para o desenvolvimento dos mais diversos materiais de apoio às aulas (planificação de temas, desenvolvimento de fichas de trabalho e de instrumentos de avaliação formativa, desenvolvimento de instrumentos de avaliação sumativa, respetiva correção e definição dos critérios de correção), e desenvolvimento de planos de aula para as aulas a serem lecionadas pela professora estagiária.

Foram lecionadas pela professora estagiária oito aulas de 50 minutos na turma principal e seis aulas de 50 minutos na turma secundária.

No que concerne às aulas lecionadas pela professora estagiária foi definida uma estratégia de articulação, assim sendo, para cada aula a professora estagiária partilhava a sua proposta de plano de aula com a professora cooperante, que o comentava na reunião semanal anterior à aula, garantindo-se que o mesmo era consistente e adequado aos objetivos de aprendizagem definidos. O modelo usado

¹ As turmas de 9.º ano de escolaridade estavam integradas num projeto denominado Grupo de Homogeneidade Relativa. O Grupo de Homogeneidade Relativa funcionou como um núcleo de recuperação, para os alunos que apresentavam diversas dificuldades, nomeadamente problemas pontuais na aquisição e aplicação de um determinado conteúdo, falta de pré-requisitos básicos, falta de hábitos de trabalho e de métodos de estudo. De cada turma foram selecionados até 4 alunos nestas condições para integrar o grupo, ficando a turma principal reduzida, sendo doravante denominada por grupo turma.

para o planeamento das aulas, foi o adotado pela escola, onde a professora estagiária estava a realizar o estágio, e que continha os seguintes aspetos: pré-requisitos; conteúdos de aprendizagem; objetivos gerais; descritores; materiais e recursos; desenvolvimento da aula; estratégias; observações e avaliação (consta no apêndice B um exemplo de uma planificação com base no modelo adotado pela escola e relativa à aula do dia 30 de abril). Na reunião de articulação de estágio, a seguir às aulas observadas, a professora estagiária partilhava a sua reflexão escrita e a professora cooperante o seu *feedback* oral. Quando a Professora Alexandra Rodrigues, professora da NOVA FCT supervisionou as aulas, a reflexão foi conjunta, ou seja, integrando igualmente os seus contributos de forma a tornar mais enriquecedor o processo de aprendizagem da professora estagiária.

1.2.1 Turma principal: 9.º ano de escolaridade

Durante o ano letivo de 2023/24 foram lecionadas pela professora estagiária oito aulas de 50 minutos à turma principal do 9.º ano. A turma era bastante heterogénea, com alguns alunos empenhados e autónomos e outros com problemas pontuais na aquisição e aplicação de um determinado conteúdo, falta de pré-requisitos básicos, hábitos de trabalho e estudo. O apoio da professora estagiária na turma permitiu um esclarecimento individualizado das dúvidas dos alunos durante a aula, melhorando o seu ritmo de trabalho.

O Conselho de Turma classificou, desde a primeira reunião, o comportamento da turma como insuficiente. No entanto, na aula de Matemática e na sequência das regras impostas pela professora cooperante o seu comportamento era adequado. Naturalmente, que sendo alunos com estas características, nas primeiras aulas lecionadas pela professora estagiária, tentaram ultrapassar alguns limites, tendo sido necessário um esforço adicional para que se mantivessem concentrados, empenhados e a trabalhar, mas nas últimas aulas o seu comportamento já se mostrava adequado. Conseguir que a turma tivesse um comportamento ajustado, implicou um crescimento profissional e pessoal. Foram adotadas algumas estratégias para esse efeito e que ajudaram a captar a atenção da turma, nomeadamente pô-los a ler o enunciado, incluir pequenas tarefas ou momentos diferenciadores na aula promovendo a interação entre os alunos e a professora.

Ao nível da calendarização das atividades letivas, a organização da escola é semestral. No primeiro semestre foram lecionadas 4 aulas, e no segundo semestre 4 aulas, garantindo assim uma separação das aulas observadas pelos vários temas abordados nas aprendizagens essenciais, de modo a diversificar a experiência de aprendizagem e as competências pedagógicas da professora estagiária.

No âmbito da prática pedagógica, a professora estagiária procedeu ainda à correção de instrumentos de avaliação sumativa (e respetiva atribuição de uma classificação de acordo com os critérios

de correção definidos para cada instrumento de avaliação), e de instrumentos de avaliação formativa que permitiram partilhar *feedback* com os alunos sobre os conteúdos que precisavam de trabalhar.

1.2.1.1 Aulas do dia 02 de novembro

No dia 02 de novembro foram lecionadas duas aulas de 50 minutos do tema Dados - Probabilidades - Operações com acontecimentos.

Estas aulas centraram-se na abordagem dos acontecimentos compatíveis e sua representação através de um diagrama de Venn. A planificação foi discutida em reunião de parceria, e foi equivalente em todas as turmas de 9.º ano de escolaridade. Nestas aulas, estiveram presentes os alunos do grupo turma, com exceção de uma aluna que no primeiro semestre estava ausente praticamente em todas as aulas.

Tabela 1.1 - Resumo das aulas do dia 02 de novembro

Tema e Tópico	Dados – Probabilidades – Operações com acontecimentos
Sumário	Acontecimentos compatíveis. Representação através de um diagrama de Venn. Resolução de uma ficha de trabalho (Apêndice A).
Objetivos	Representar acontecimentos compatíveis através de um diagrama de Venn. Atribuir significado à união e interseção de acontecimentos, interligando o conceito com a representação e interpretação de um diagrama de Venn.
Recursos	<i>PowerPoint</i> e respetivo material para projeção; manual; ficha de trabalho (Apêndice A).
Momentos da aula	As aulas iniciaram-se com a explicação teórica do significado de acontecimentos compatíveis e da construção de um diagrama de Venn. De seguida realizou-se em grupo uma tarefa do manual adotado. Concluída a tarefa foi proposto aos alunos que resolvessem individualmente dois exercícios de representação através de tabelas de dupla entrada, que foram corrigidos no quadro. À medida que os alunos terminavam os exercícios do manual, foi-lhes distribuída uma ficha desenvolvida pela professora estagiária (Apêndice A), para resolução autónoma.
Metodologia adotada	As aulas tiveram um carácter expositivo, apelando à participação ativa e recorrente dos alunos. Ao nível de conceitos, procurou-se estabelecer pontes com conhecimentos previamente adquiridos e fortalecer o conhecimento dos novos conteúdos. Os alunos foram encorajados a resolver os exercícios autonomamente, partilhando as suas resoluções no quadro, com vista à criação de um ambiente de reflexão coletiva.

Reflexão:

As aulas do dia 02 de novembro foram as primeiras aulas da professora estagiária, optando-se por não informar os alunos previamente. Apesar de não estarem à espera, os alunos aceitaram a transição de forma natural, participaram ativamente nas aulas que correram bem em termos genéricos. As aulas foram essencialmente expositivas, com recurso ao *PowerPoint* ou ao quadro, terminando com a resolução autónoma de uma ficha de trabalho (Apêndice A) e respetiva correção no quadro com a participação dos alunos. Em termos de aspetos a melhorar destaca-se a organização do quadro.

1.2.1.2 Aulas do dia 19 de dezembro

No dia 19 de dezembro foram lecionadas duas aulas de 50 minutos, que se centraram na introdução da temática da geometria com a primeira abordagem à(s):

- Posições relativas de retas no plano e no espaço euclidiano;
- Posição relativa de uma reta e de um plano (critério de paralelismo);
- Posição relativa de dois planos no espaço (critério de paralelismo e de perpendicularidade).

Como estratégia, recorreu-se ao GeoGebra, de modo a facilitar a perceção das posições em estudo. A planificação foi previamente discutida com a professora cooperante.

Nestas aulas estiveram presentes todos os alunos da turma, com exceção de dois alunos do grupo turma que faltaram.

Tabela 1.2 - Resumo das aulas do dia 19 de dezembro

Tema e Tópico	Geometria e Medida
Sumário	• Posições relativas de retas no plano e no espaço euclidiano. • Posição relativa de uma reta e de um Plano (critério de paralelismo). • Posição relativa de dois planos no espaço (critério de paralelismo e de perpendicularidade).
Objetivos	- Compreender a posição relativa de duas retas no espaço; de uma reta e de um plano e de dois planos no espaço; - Determinar a medida de ângulos correspondentes determinados por uma secante de duas retas paralelas; - Resolver pequenos problemas envolvendo ângulos correspondentes determinados por uma secante de duas retas paralelas.
Recursos	Computador com ligação à <i>internet</i> para aceder ao GeoGebra; GeoGebra; projetor.
Momentos de aula	As aulas iniciaram-se com a explicação do que é um ponto, como se constrói uma reta, e de seguida como se constrói um plano. De seguida explicaram-se os diferentes tipos de retas; as posições de retas no plano e no espaço; a posição relativa de uma reta e de um plano. Para a consolidação da informação os alunos além de fazerem apontamentos nos seus cadernos resolveram exercícios que foram corrigidos no quadro. O último aspeto abordado nas aulas concerne a parte da posição relativa de dois planos no espaço, cuja exposição teórica foi seguida da resolução e correção de exercícios.
Metodologia adotada	As aulas tiveram carácter expositivo, apelando à participação ativa dos alunos. A nível de conhecimentos, tentou-se através do recurso ao GeoGebra, criar momentos de aprendizagem diversificados. Os alunos foram, sempre que possível encorajados a resolver os exercícios de forma autónoma, partilhando as resoluções no quadro, tornando-os ativos no seu processo de aprendizagem.

Reflexão:

Estas aulas serviram como introdutórias do tema e para apresentar alguns conceitos a serem consolidados após a interrupção letiva. As aulas não correram como idealizado devido a alguns

problemas técnicos, ao nível da projeção, que inviabilizaram a possibilidade de se mostrar um *applet* previamente preparado sobre as posições dos planos, recorrendo ao GeoGebra 3D. Assim, parte das aulas foram mais expositivas do que o esperado, recorrendo ao quadro e ao *PowerPoint*. No entanto, após resolver os problemas iniciais foi possível usar o GeoGebra 2D para as construções no plano.

Inicialmente os alunos estavam irrequietos e desatentos tendo prejudicado a fluidez da aula, mas serviu como momento de viragem, ou seja, nas aulas seguintes os alunos já tiveram um comportamento ajustado. No entanto, uma maior necessidade de ação por parte da professora estagiária para regular o comportamento dos alunos comprometeu a planificação, tendo ficado por realizar a tarefa final, que tinha sido previamente desenvolvida no GeoGebra e, na qual os alunos iriam construir retas e segmentos de reta, retas paralelas e perpendiculares.

1.2.1.3 Aulas do dia 21 de março

No dia 21 de março foram lecionadas duas aulas de 50 minutos, que se centraram nas funções de proporcionalidade inversa. Este tópico foi o conteúdo escolhido para a recolha de dados (segunda parte) pelo que, a professora estagiária já tinha feito uma tarefa exploratória com todos os alunos da turma², tendo nestas aulas optado por uma abordagem expositiva.

A planificação foi previamente partilhada e discutida com a professora cooperante.

Nestas aulas estiveram presentes todos os alunos da turma, com exceção de três alunos do grupo turma que faltaram.

Tabela 1.3 - Resumo das aulas do dia 21 de março

Tema e Tópico	Funções
Sumário	Funções de Proporcionalidade Inversa.
Objetivos	- Identificar variáveis inversamente proporcionais e calcular a constante de proporcionalidade; - Interpretar e resolver problemas que envolvam a relação de proporcionalidade inversa; - Identificar e desenvolver as capacidades de representação gráfica de uma função de proporcionalidade inversa.
Recursos	Computador com ligação à <i>internet</i> e ao projetor; <i>pen</i> com emulador da <i>Casio</i> .
Momentos de aula	As aulas iniciaram com a indicação do sumário e a verificação das faltas. De seguida foi introduzido o conceito de constante de proporcionalidade inversa a partir de um problema sobre a área de um retângulo. Explicado o conceito, resolveu-se conjuntamente a tarefa 4 da página 101 do manual. A correção foi feita no quadro pela professora estagiária, com o contributo dos alunos, tentando sempre promover a autonomia e a participação.

² No dia 21 de fevereiro foi lecionada pela professora estagiária uma aula de 50 minutos, em que foi realizada uma tarefa exploratória, de modelação matemática no âmbito da proporcionalidade direta. No dia 06 de março, foi lecionada uma aula de 50 minutos pela professora estagiária, na qual foi feita nova tarefa de modelação matemática, no âmbito da proporcionalidade inversa. Estas duas aulas cedidas pela professora de Cidadania, lecionadas a todos os alunos da turma, foram parte integrante da investigação explorada na segunda parte deste relatório. Os alunos, estudo de caso, apesar de nestas aulas estarem integrados em grupo, foram estudados individualmente, tendo sido possível, na entrevista individual, perceber o processo do aluno.

	De seguida procedeu-se da mesma forma com o exercício sobre o aluguer de barcos. Terminados estes 2 exercícios resolveram-se os exercícios 1 e 2 da pág. 102 do manual, que foram de seguida corrigidos no quadro pelos alunos. Num segundo momento resolveram-se 2 problemas com o contributo dos alunos. Consolidado o conceito de constante de proporcionalidade inversa, introduziu-se o conceito de função de proporcionalidade inversa, usando novamente o exemplo do retângulo. Recorreu-se à calculadora gráfica para mostrar a representação gráfica deste tipo de função, explicando que o gráfico obtido corresponde ao ramo da hipérbole.
Metodologia adotada	As aulas foram de carácter expositivo, apelando à participação ativa e recorrente dos alunos. Ao nível de conhecimentos, tentou-se criar momentos de aprendizagem diversificados. Os alunos foram, sempre que possível, encorajados a resolver os exercícios de forma autónoma, partilhando as resoluções no quadro, tornando-os ativos no seu processo de aprendizagem.

Reflexão:

Em termos genéricos as aulas correram bem, apesar de não se ter cumprido a planificação porque os alunos na sua participação ativa, colocaram várias dúvidas que foram esclarecidas pela professora estagiária. Nestas aulas foi projetado o emulador da calculadora, colocado no computador do professor, o que permitiu que os alunos fossem verbalizando os procedimentos que, após validados pela professora estagiária, foram aplicados para a introdução dos dados no emulador e consequente representação gráfica da função. Vivenciar esta realidade foi gratificante, uma vez que esta aprendizagem relativa ao conhecimento da calculadora gráfica decorreu do *workshop* realizado pela professora estagiária no dia 14 de fevereiro³.

Ao nível do desempenho da professora estagiária foi valorizado o acompanhamento constante aos alunos, tendo a mesma estado sempre a circular e a acompanhar o seu ritmo de trabalho, assim como o seu envolvimento e empenho com o ensino e a aprendizagem da turma.

1.2.1.4 Aulas do dia 30 de abril

No dia 30 de abril foram lecionadas duas aulas de 50 minutos que se centraram nas razões trigonométricas de ângulos agudos.

A planificação incluída no Apêndice B foi previamente partilhada e discutida com a professora cooperante.

³ No dia 14 de fevereiro a professora estagiária realizou um *workshop* a todos os alunos da turma, numa aula de 50 minutos, cedida pela professora de Cidadania. O objetivo foi ensinar os alunos a usarem os menus da estatística/listas e o menu dos gráficos da calculadora gráfica, potenciando a sua utilização no momento de resolução das tarefas de modelação matemática. As calculadoras gráficas utilizadas para este *workshop* foram cedidas pela escola, permitindo aos alunos usar um recurso que não é obrigatório no ensino básico. A aula foi parte integrante da investigação explorada na segunda parte deste relatório. Os alunos, estudo de caso, apesar de nesta aula estarem integrados em grupo, foram estudados individualmente, tendo sido possível, na entrevista individual, perceber o processo do aluno.

Nestas aulas estiveram ausentes duas alunas do grupo turma.

Tabela 1.4 - Resumo das aulas do dia 30 de abril

Tema e Tópico	Funções
Sumário	Razões trigonométricas de ângulos agudos.
Objetivos	- Promover a identificação das razões trigonométricas em triângulos retângulos semelhantes tirando partido da conexão com a semelhança de triângulos. - Propor a análise de situações simples que permitam distinguir as razões trigonométricas em presença.
Recursos	Quadro; computador com ligação à <i>internet</i> e retroprojektor; <i>internet</i> e telemóvel dos alunos para a realização de uma tarefa em GeoGebra; tarefa no GeoGebra e ficha de trabalho (Apêndice C).
Momentos de aula	As aulas iniciaram com a indicação do sumário e a verificação das faltas. De seguida foram revistos os critérios de semelhança de triângulos e introduzidos os elementos do triângulo (cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa). Num segundo momento os alunos resolveram uma tarefa exploratória (Apêndice C). A tarefa consistiu na construção e manipulação de três triângulos semelhantes no GeoGebra (Apêndice C). O objetivo desta tarefa foi o de compreenderem que o valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo α , é independente da unidade de comprimento fixada. De seguida sistematizaram-se as razões trigonométricas: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ e $\tan \alpha$. Esta tarefa foi resolvida autonomamente e as conclusões discutidas na turma. Para facilitar a análise foi distribuído aos alunos uma ficha de trabalho (Apêndice C), complementarmente ao GeoGebra, para que registassem os resultados obtidos facilitando a sua interpretação. O último momento das aulas foi de consolidação dos elementos do triângulo e do cálculo de razões através da resolução de exercícios do livro.
Metodologia adotada	As aulas foram de caráter exploratório, apelando ao desenvolvimento do raciocínio matemático e da comunicação matemática. A nível de conhecimentos, tentou-se criar momentos de debate, reflexão e aprendizagem diversificados.

Reflexão:

Em termos genéricos as aulas correram bem, tendo-se cumprido a planificação. Os alunos participaram ativamente na resolução das tarefas e no debate sobre as conclusões.

A prestação da professora estagiária foi valorizada salientando-se positivamente a sua postura e empenho, sempre a circular pela sala e a apoiar os alunos quando solicitada ou se apercebia de alguma dificuldade com a construção inicial no GeoGebra.

Em termos de melhorias salientadas, foi sugerido que as indicações para a construção que constavam do enunciado da tarefa no GeoGebra também constassem da ficha em suporte de papel (Apêndice C), facilitando a leitura no caso dos alunos que tinham telemóveis com um visor mais pequeno. Para além disso, a professora estagiária optou por colocar no quadro as respostas com base na construção que projetou, também foi sugerido que alternativamente tivessem sido colocadas no quadro as respostas dos alunos e que a indicação final das conclusões percecionadas, invés de orais (ditadas) fossem projetadas, facilitando o registo por parte dos alunos.

1.2.2 Turma secundária : 11.º ano de escolaridade

Durante o ano letivo de 2023/24 foram lecionadas pela professora estagiária seis aulas de 50 minutos à turma secundária do 11.º ano. A turma era bastante heterogénea, com alguns alunos empenhados, trabalhadores e com classificações altas, por oposição a outros alunos com classificações negativas. A estratégia de apoio definida para esta turma foi diferente. Apesar de a professora estagiária esclarecer dúvidas a qualquer aluno que solicitasse o seu apoio nos momentos de trabalho autónomo, mantinha um acompanhamento mais próximo aos alunos com classificações negativas, de forma a contribuir para a consolidação das aprendizagens de anos anteriores e essenciais ao sucesso no 11.º ano de escolaridade.

1.2.2.1 Aulas do dia 05 de fevereiro

No dia 05 de fevereiro foram lecionadas duas aulas de 50 minutos, do tema, funções - progressões aritméticas.

Estas aulas foram as primeiras aulas lecionadas pela professora estagiária à turma secundária. A planificação foi previamente partilhada e discutida com a professora cooperante.

Nestas aulas estiveram presentes todos os alunos da turma.

Tabela 1.5 - Resumo das aulas do dia 05 de fevereiro

Tema e Tópico	Funções – Progressões aritméticas (PA)
Sumário	Progressões aritméticas (termo geral e soma de n termos consecutivos).
Objetivos	- Compreender o que são progressões aritméticas (PA) e como podem ser definidas por recorrência; - Determinar o termo geral a partir da sua definição por recorrência, da razão e do primeiro termo ou de quaisquer dois termos; - Determinar um termo ou a ordem a partir da informação fornecida; - Determinar a soma de n termos de uma progressão aritmética.
Recursos	Computador com ligação à <i>internet</i> , <i>PowerPoint</i> , manual, calculadora, GeoGebra.
Momentos da aula	As aulas dividiram-se em cinco momentos que assentaram sempre na introdução de um conceito e subsequente resolução de exercícios. Em todos os casos foi dado tempo aos alunos para tentarem resolver os exercícios de forma autónoma antes de se proceder à correção dos mesmos no quadro. No primeiro momento explorou-se o conceito de progressão aritmética. Para o fazer, a professora estagiária começou por explicar através de breves exemplos que as PA, são um caso particular de sucessões em que a diferença entre termos consecutivos é constante. De seguida apresentou-se a fórmula de uma PA definida por recorrência. Num segundo momento explorou-se o conceito de monotonia utilizando o GeoGebra e a funcionalidade dos seletores. Ao alterar os valores do primeiro termo (u_1) e da razão (r) pretendeu-se constatar que a monotonia de uma progressão aritmética depende apenas do sinal da razão: uma PA

	é estritamente crescente quando a razão for positiva, estritamente decrescente quando a razão for negativa e constante quando a razão for nula. No terceiro momento introduziu-se a fórmula do termo geral a partir de uma tarefa. Assim promoveu-se a componente ativa da aprendizagem ao incentivar os alunos a chegarem intuitivamente à fórmula. No quarto momento introduziu-se o conceito de termo geral em função da razão r e de um termo de ordem p. No quinto momento recorreu-se à calculadora para representar as PA, mas como foi muito no final da aula, nem todos os alunos conseguiram fazer a representação, pelo que se iniciou a aula seguinte com esta funcionalidade.
Metodologia adotada	As aulas apesar de maioritariamente expositivas, incluíram alguns momentos ativos, que estimularam a participação dos alunos. Estabeleceu-se um paralelismo entre conceitos e outras aplicações, e incentivaram-se os alunos a chegar à fórmula do termo geral da PA a partir de um exemplo. Ao longo das aulas, foram sendo realizados exercícios de consolidação de cada um dos conceitos. Apesar de se ter dado tempo para os alunos pensarem em todos os exercícios, o primeiro de cada tipo, foi resolvido no quadro pela professora estagiária, com o contributo dos alunos. Os exercícios escolhidos para estas aulas caracterizam-se pela sua diversidade, permitindo aos alunos perceber as várias possibilidades de abordagem do tema.

Reflexão:

Em termos genéricos as aulas correram bem, com uma boa dinâmica, tendo sido salientado pela positiva a utilização do GeoGebra, a dedução intuitiva da fórmula do termo geral e o tempo dado aos alunos para resolverem os exercícios antes da sua correção.

Existiram, no entanto, alguns aspetos a melhorar. Por um lado, denotou-se algum nervosismo na professora estagiária, que fez com que a mesma não circulasse tão ativamente pela sala de aula. A gestão do quadro poderia ser melhorada. Por último foram referidos alguns pormenores relacionados com o ensino das PA que precisavam de ter sido referenciados relativamente à razão, isto é, de que só após se verificar que é uma PA, se pode indicar que o valor obtido é a razão da PA.

1.2.2.2 Dia 24 de maio

No dia 24 de maio foram lecionadas duas aulas de 50 minutos, do tema: estatística.

O plano de aula, e o *PowerPoint* de apoio à aula, foram previamente partilhados e discutidos com a professora cooperante.

Nestas duas aulas esteve ausente uma aluna, e na primeira aula dois alunos chegaram atrasados.

Tabela 1.6 - Resumo das aulas do dia 24 de maio

Tema e Tópico	Estatística
Sumário	Medidas de localização e dispersão em amostras univariadas.
Objetivos	- Compreender, determinar e interpretar as diferentes medidas de localização e dispersão.

Recursos	Computador com ligação à <i>internet</i> , projetor, <i>PowerPoint</i> , <i>pen</i> com o emulador da Casio.
Momentos da aula	As aulas iniciaram-se com a verificação das faltas. De seguida foi explicado o conceito de população <i>versus</i> amostra e de censos <i>versus</i> sondagem e os tipos de variáveis. Fez-se uma revisão das propriedades dos somatórios. De seguida distinguiram-se os tipos de medidas (localização e dispersão). Em particular, foram feitas revisões das medidas de localização, nomeadamente a média, mediana e moda, para as quais foi explorado o cálculo para dados agrupados. De seguida introduziu-se o conceito de percentil, fazendo um exemplo e um exercício resolvido no quadro por um aluno. Posteriormente foram introduzidas as medidas de dispersão, tendo-se realizado exercícios na calculadora para a determinação do desvio-padrão.
Metodologia adotada	As aulas foram de carácter expositivo. Ao nível de conhecimentos, tentou-se criar momentos de debate, reflexão e aprendizagem diversificados durante as resoluções dos exercícios.

Reflexão:

As aulas correram de acordo com o previsto, tendo-se cumprido os requisitos mínimos da planificação, apesar de a professora estagiária não ter introduzido as amostras bivariadas, uma vez que privilegiou o debate e a participação ativa dos alunos no decorrer da realização dos exercícios, sobre medidas de dispersão e localização nas amostras univariadas. No entanto, o planeamento foi pensado para quatro aulas pelo que poder-se-iam fazer ajustes entre as aulas de modo a cumprir a planificação global do tema da estatística.

Nestas aulas a professora estagiária, considerando os aspetos de melhoria que tinham sido previamente sugeridos pelas orientadoras, explorou as várias sugestões de resolução dos alunos, circulando pela sala, atenta às dúvidas e explicando-as ao grupo.

1.2.2.3 Dia 27 de maio

No dia 27 de maio foram lecionadas duas aulas de 50 minutos, do tema: estatística.

O plano das aulas, o *PowerPoint* de apoio às aulas, e a ficha de trabalho (Apêndice D) foram previamente partilhados e discutidos com a professora cooperante.

Nestas duas aulas estiveram presentes todos os alunos da turma.

Tabela 1.7 - Resumo das aulas do dia 27 de maio

Tema e Tópico	Estatística
Sumário	Gráfico de dispersão e Coeficiente de Correlação Linear. Reta dos mínimos quadrados.
Objetivos	- Reconhecer a importância da representação dos dados no diagrama de dispersão, nuvem de pontos, para interpretar a forma, direção e força da associação (linear) entre as duas variáveis. - Identificar o coeficiente de correlação linear r , como medida dessa direção e grau de associação (linear), e saber que assume valores

	pertencentes a $[-1,1]$, dizendo-se com base nesse valor que a correlação é positiva, negativa ou nula. Recorrer à tecnologia para proceder ao cálculo do coeficiente de correlação linear. - Compreender que não se pode confundir correlação com relação causa-efeito, pois podem existir variáveis “perturbadoras” que podem provocar uma aparente associação entre as variáveis em estudo. - Compreender que no caso do diagrama de dispersão mostrar uma forte associação linear entre as variáveis, essa associação pode ser descrita pela reta de regressão (ou reta dos mínimos quadrados). Utilizar a tecnologia para determinar uma equação da reta de regressão. - Utilizar a reta de regressão para inferir o valor da variável dependente ou resposta, para um dado valor da variável independente ou explanatória, quando existe uma forte associação linear entre as variáveis, quer positiva, quer negativa, e desde que este esteja no domínio dos dados considerados.
Recursos	Computador com ligação à <i>internet</i> , projetor, <i>PowerPoint</i> , <i>pen</i> com o emulador da Casio e ficha de trabalho (Apêndice D).
Momentos da aula	As aulas iniciaram-se com a verificação das faltas. De seguida introduziu-se o conceito de amostra bivariada e a sua representação através de um diagrama de dispersão, explicando-se a definição de variável explicativa <i>versus</i> variável de resposta. Interpretou-se inicialmente a associação por observação, tendo-se feito o paralelismo à parte analítica, ou seja, ao coeficiente de correlação linear, explicando-se a sua forma de cálculo e a obtenção através da calculadora. A partir do conceito de associação introduziu-se a reta dos mínimos quadrados, para a qual se explicou quer a determinação analítica, quer a obtenção a partir da calculadora gráfica. Relativamente à reta dos mínimos quadrados, foi explorada a inferência da variável dependente, tendo-se resolvido um exercício que consolidava todos os conceitos anteriores. Para facilitar o acompanhamento dos exercícios foi desenvolvida uma ficha de trabalho (Apêndice D). Relativamente ao coeficiente de correlação linear foi explicado que não se pode confundir correlação com relação causa-efeito, pois podem existir variáveis “perturbadoras” que podem provocar uma aparente associação entre as variáveis em estudo. Por último foi introduzido o conceito de desvio vertical e realizados exercícios da ficha de trabalho e do manual, corrigidos no quadro pelos alunos.
Metodologia adotada	As aulas foram de carácter expositivo. Ao nível de conhecimentos, tentou-se criar momentos de debate, reflexão e aprendizagem diversificados durante as resoluções dos exercícios. Os exercícios foram escolhidos pela sua diversidade e abrangência, de modo a alertarem para situações importantes, nomeadamente ao nível da inferência, realçando-se a importância do domínio dos dados considerados.

Reflexão:

As aulas correram bem, tendo-se cumprido a planificação das aulas e do tema.

Nestas aulas, a professora estagiária, escreveu o sumário, falou devagar, explicando em detalhe as fórmulas e interpretando o seu significado, mantendo-se sempre atenta à turma e às dúvidas. Foi partilhada uma ficha de trabalho (Apêndice D) para facilitar o acompanhamento do enunciado dos

exercícios e a sua resolução autónoma. Os exercícios foram escolhidos de modo a promover a consolidação dos conhecimentos, assim como a interpretação e a compreensão das medidas.

Estas foram as últimas duas aulas de prática pedagógica e foram um processo gratificante e de aprendizagem, rico em experiências que contribuíram para o crescimento enquanto futura professora de Matemática.

1.3 Prática Não Letiva

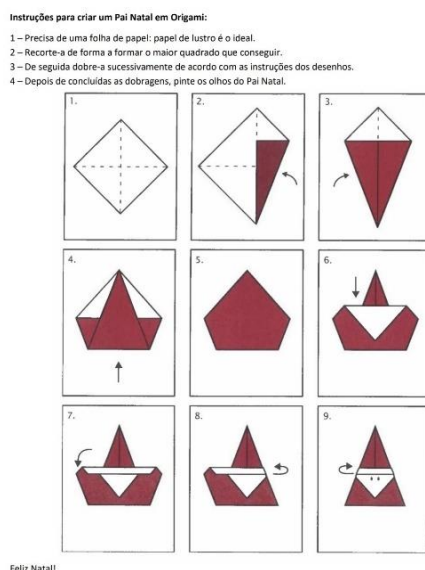
A inserção na comunidade escolar e as capacidades de trabalho cooperativo ao nível da secção de Matemática, do departamento de Matemática e Ciências Experimentais, são aspetos importantes e diferenciadores no decorrer da carreira docente. Nesse sentido a professora estagiária, ao longo do ano participou, propôs e dinamizou atividades sugeridas pela orientadora através do núcleo de estágio, desde palestras, exposições e atividades de enriquecimento curricular com carácter interdisciplinar e lúdico, que abrangeram os alunos das turmas de estágio, mas também alunos de outras turmas e de outros anos de escolaridade.

A primeira atividade em que participou ocorreu no dia 08 de novembro, assistindo à palestra da Dr.^a Paula Varandas intitulada “Educar para o Direito”, que foi organizada pela professora cooperante para os alunos de todas as turmas de 11.º ano. Neste ano de ensino, o tema da Cidadania é transversal a todas as disciplinas, e esta palestra pelo teor e relevância na modelação de comportamentos numa fase crítica da vida dos alunos, foi um momento de promoção dessa transversalidade.

No dia 07 de dezembro, a professora estagiária apoiou a organização da sala e assistiu à palestra do Professor José Paulo Viana, intitulada “Matemáticas Impuras”, organizada para os alunos de todas as turmas de 12.º ano de escolaridade. As palestras do professor José Paulo Viana são sempre uma aproximação da matemática ao mundo real, bem como, um momento de satisfação para todos os que gostem de Matemática.

Anualmente, a secção de Matemática propõe a dinamização de atividades com os alunos para o Natal. Este ano, a atividade foi denominada por *Natalmático* e desenvolvida pela Professora estagiária. Para esta atividade foram criados vários enunciados de tarefas de origamis que foram realizadas pelos alunos de 9.º e 11.º anos de escolaridade. Os trabalhos desenvolvidos embelezaram a entrada, as janelas, os corredores, a biblioteca, a sala de ensino especial, a reprografia e o refeitório. Estes enunciados depois de criados foram partilhados com a professora cooperante que os aprovou.

Figura 1.1 - Exemplo de um dos enunciados desenvolvidos para o 9.º ano de escolaridade



(fonte própria)

Houve também trabalhos desenvolvidos ao nível do 12.º ano de escolaridade, por outros elementos da secção de Matemática. Os alunos desenvolveram verdadeiras obras de arte, pelo que em nome do núcleo de estágio a professora estagiária escreveu uma pequena notícia para o *site* da escola, a destacá-las e a desejar as boas festas a toda a comunidade educativa. Todas as notícias depois de escritas pela professora estagiária foram posteriormente revistas e aprovadas pela professora cooperante.

Figura 1.2 - *Natalmático*

Natalmático

O Natal chegou de novo à escola por iniciativa do núcleo de estágio de Matemática!

Os alunos de 9.º, 11.º e 12.º anos de escolaridade foram convidados, no âmbito da disciplina a criar origamis em forma de estrela, árvore de Natal, Pai Natal e Barrete do Pai Natal.

O empenho e dedicação dos alunos criou verdadeiras obras de arte que se encontram em exposição em janelas, corredores e mesas da escola, desejando a toda a comunidade educativa "Votos de Boas Festas"!



(fonte própria)

No dia 21 de dezembro foi o momento alto do Natal na escola, com uma festa organizada pelos alunos para os alunos, e à qual a professora estagiária assistiu com a sua turma principal, a turma de 9.º ano de escolaridade.

No dia 23 de janeiro, decorreu a palestra conduzida pela Professora Doutora Alexandra Rodrigues, intitulada "Matemática recreativa ao longo da história", dinamizada pelo núcleo de estágio. Foram sessões interativas e divertidas em que os alunos participaram com grande entusiasmo! À semelhança do que tinha feito para o *Natalmático*, a professora estagiária escreveu uma pequena notícia para o *site* da escola a respeito desta palestra e da sua importância.

Figura 1.3 - Palestra "Matemática recreativa ao longo da história"



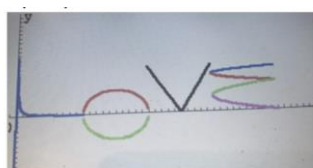
(site da escola)

No dia 08 de fevereiro, conjuntamente com algumas das professoras da secção de Matemática, a professora estagiária assistiu ao plenário organizado pelo Sindicato de Professores da Grande Lisboa (SPGL). A participação neste plenário foi enriquecedora pois, não só permitiu tomar conhecimento acerca dos direitos de horas sindicais, como das razões que estão por trás da luta sindical que tem sido levada a cabo nos últimos anos pelos professores. Durante esta sessão foram ainda abordados os concursos para professores e esclarecidas questões que subsistiam, o que contribuiu para o esclarecimento da professora estagiária sobre estas temáticas.

No Dia dos Namorados, a 14 de fevereiro foi organizada uma tarefa específica para o 9.º ano e para o 11.º ano de escolaridade. Aos alunos de 9.º ano foi proposto que criassem um coração em material reciclado, valorizando-se assim a sustentabilidade e a interdisciplinaridade. A tarefa também tinha naturalmente um cariz lúdico e de consciencialização ambiental pelo uso de material reciclado (Apêndice E).

Aos alunos do 11.º ano foi proposto que escrevessem na calculadora a palavra: "LOVE", usando as funções adequadas (Apêndice F). Esta tarefa aborda vários tipos de funções (trigonométricas, polinomiais, racionais e módulo), o que permitiu consolidar conhecimentos, enquanto se promoveu o espírito criativo e a utilização da calculadora gráfica ou do GeoGebra. Os alunos de 11.º ano, aderiram à atividade e a professora cooperante organizou um vídeo com os resultados dos seus trabalhos, que foi partilhado na televisão situada na entrada da escola.

Figura 1.4 - Tarefa para o 11.º ano de escolaridade: "LOVE"



(fonte própria)

Na semana da Matemática, ou seja, entre os dias 11 e 15 de março, foi apresentada na escola a exposição "Sempre Houve Problemas", requisitada à Associação de Professores de Matemática (APM) pelo núcleo de estágio. A montagem esteve a cargo da professora estagiária e o transporte da mesma esteve a cargo da professora cooperante.

Figura 1.5 - Imagens da exposição "Sempre Houve Problemas"



(fonte própria)

Para promover a exposição foram feitos cartazes pelo núcleo de estágio que foram afixados na escola (Apêndice G).

No dia 14 de março, num contexto interdisciplinar realizou-se um *peddy paper* organizado entre o núcleo de estágio, com o apoio de outros elementos da secção de Matemática e do grupo de Educação Física. Esta atividade foi direcionada para os alunos do 3.º ciclo e juntou a matemática e o desporto. Do 9.º ano de escolaridade participaram quase todas as turmas, incluindo a turma principal da professora estagiária. Organizar esta atividade foi desafiante, houve muitos aspetos a ter em conta, quer antes, quer após a sua realização, nomeadamente para se obterem os resultados da classificação. Para além disso, a combinação de problemas e jogos foi ao encontro do tema do Dia Internacional da Matemática

deste ano: "Brincando com a matemática". À semelhança do que já tinha sido feito anteriormente a professora estagiária escreveu uma pequena notícia para o *site* da escola em que ressaltou as atividades desenvolvidas e partilhou algumas imagens dos momentos de diversão.

Figura 1.6 - Semana da Matemática



(*site* da escola)

Esta notícia foi posteriormente adaptada e incluída na *newsletter* de abril da escola.

Para o Dia da Liberdade, o dia 25 de abril, a professora estagiária desenvolveu vários enunciados de entre os quais se optou pelo da criação de cravos em origami (Apêndice H). Estes trabalhos foram expostos pela escola, e a professora estagiária escreveu uma notícia para o *site* da escola.

Figura 1.7 - Notícia para o *site* da escola

A expressão matemática da liberdade

Este ano a liberdade em Portugal comemora 50 anos.

A Matemática não poderia ficar alheia a este acontecimento e, por isso, apostou na geometria, transformando uma simples folha de papel num dos símbolos mais icónicos da liberdade: o cravo.

Os alunos de 9.º ano foram desafiados a reproduzir cravos em origami. O resultado deste trabalho foi partilhado um pouco por toda a escola, decorando corredores, a papelaria e a secretaria.

Com esta exposição os alunos conseguiram expressar a importância deste dia utilizando a Matemática e os seus conhecimentos de geometria.



(fonte própria)

Participar, pensar, dinamizar atividades ao longo do ano letivo foi gratificante, não só pela aquisição de competências e experiências para a professora estagiária, como e principalmente pelo impacto positivo no desenvolvimento das competências dos alunos, e na sua caminhada para serem cidadãos ativos, com espírito cooperativo e empreendedor como se pretende no futuro.

A vida na escola não se resume ao trabalho em sala de aula e à organização de atividades, pelo que a professora estagiária teve igualmente oportunidade de, ao longo do ano letivo, participar em: uma reunião geral de professores no dia 15 de maio, em que se explicaram os procedimentos relativos às provas de aferição e exames nacionais; em seis reuniões da secção de Matemática; semanalmente em reuniões de parceria realizadas às terças-feiras com vista a planear as atividades de 9.º ano; reuniões de articulação de estágio semanais com a professora cooperante, normalmente às segundas-feiras e num total de vinte e oito. Participar nestas reuniões foi muito enriquecedor, por um lado porque permitiu uma integração na comunidade escolar e nas ações desenvolvidas e por outro lado alargou o leque de oportunidades de aprendizagem.

Ao nível da Direção de Turma, a professora cooperante apesar de no corrente ano não exercer a função de Diretora de Turma (DT), partilhou todos os procedimentos a realizar, em particular, nos momentos que antecediam os Conselhos de Turma (CT) - intercalares ou de final de semestre - assim como os problemas disciplinares, o procedimento de tratamento das faltas e, a forma de funcionamento das reuniões de pais. Ainda assim, a professora estagiária participou na reunião de Direção de Turma do ensino básico, no dia 16.01, que antecedeu as avaliações finais do primeiro semestre e novamente no dia 27.05, que precedeu as avaliações finais do segundo semestre. Nestas reuniões, com base num guião previamente elaborado para apoiar a DT, foram explorados em detalhe cada um dos aspetos que é necessário ter em atenção nas reuniões de final de semestre, o que contribuiu para consolidar o conhecimento adquirido, paralelamente com a participação nos CT quer da turma principal, quer da turma secundária, ajudando a melhorar a perceção da professora estagiária sobre a turma e a formular a estratégia de ensino-aprendizagem mais adequada ao perfil dos alunos.

Paralelamente ao estágio a professora estagiária participou em algumas sessões de formação ao longo deste ano letivo. No dia 04 de novembro de 2023 participou na formação de curta duração “Dias T3 2023/24”, promovida pelo grupo de trabalho da APM – “T3” e pelo Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática. Participou ainda no Seminário Internacional Passado e Presente da Matemática que decorreu entre os dias 28 de outubro e 11 de novembro e nas Palestras ProfNova que decorreram entre os dias 02 de março e 04 de maio, ambos os eventos promovidos pela NOVA FCT. Frequenta ainda uma formação com data de término no dia 20 de junho denominada: "Curso Ambientes 2D e 3D do GeoGebra na aprendizagem de Matemática", promovida pelo Centro de Formação da APM.

Na sequência das novas aprendizagens essenciais que entrarão em vigor no ano letivo de 2024/2025, as escolas terão de adotar novos manuais de Matemática para os 9.º e 10.º anos de escolaridade. A professora estagiária assistiu a sessões de apresentação dos seguintes manuais escolares:

MatPower 9 e Matemática 360 da Raiz Editora que decorreram no dia 15 de abril; MACS 10 e MAT 9 da Texto que decorreram no dia 22 de abril; Prisma 9 da Asa que decorreu no dia 02 de maio.

1.4 Reflexão

A crença de que a aprendizagem deve ser constante é parte integrante da visão da professora estagiária, que tenta encarar todas as oportunidades pela riqueza de conhecimentos que adquire em cada experiência que vive. Assim, naturalmente que apesar de trabalhoso, este ano foi particularmente enriquecedor e um momento de grande desenvolvimento pessoal.

O debate e a reflexão sobre os diversos instrumentos desenvolvidos, nomeadamente planificação de temas, planificação de aulas, desenvolvimento de fichas de trabalho, desenvolvimento de instrumentos de avaliação formativa e de avaliação sumativa, permitiram o desenvolvimento de competências aos mais variados níveis, desde organizativas a comunicacionais e pedagógicas.

Foi por isso um ano de forte (auto)reflexão, encarado pela perspetiva de aluna, a "beber" o conhecimento partilhado pela professora cooperante, pelos "colegas" de secção, pelos professores da NOVA FCT e pelos próprios alunos, e, pela perspetiva de futura professora, enquanto parte integrante da equipa, ajudando a contribuir todos os dias para o desenvolvimento das competências dos alunos.

Na aula de Matemática é importante valorizar os alunos, promover a aprendizagem e por isso, se no decorrer das aulas for necessário fazer ajustes, os mesmos devem ser feitos mantendo-se a coerência e garantindo a participação dos alunos.

Participar na parte mais burocrática, como sejam as reuniões de secção, parceria, Direção de Turma, Conselhos de Turma também foi importante para ajudar a perceber a forma como se estrutura a parte organizacional e como se ultrapassam os desafios que ocorrem nas escolas, desde a organização do planeamento anual das disciplinas, aos problemas de comportamento dos alunos, entre vários outros. Ser professor, é acreditar no futuro, na mudança, na construção diária de conhecimentos que acompanharão os saberes para a vida (saber ser, saber estar, saber pensar, ...), como nos acompanham a cada um de nós. Ser professor não é fácil, é uma profissão repleta de desafios, que este ano de estágio permitiu vivenciar e encarar em algumas das suas dimensões.

O estágio foi o ponto de partida para novas aprendizagens. De futuro, cada nova turma, a participação em formações e em encontros de professores continuarão a contribuir para o progresso, para a melhoria e inovação na prática letiva.

SEGUNDA PARTE

A Educação para todos, é atualmente o primeiro objetivo mundial da UNESCO. Este aspeto destaca a necessidade emergente de perante a diversidade de perfis de estudantes, numa era tecnológica e globalizante, criar condições de aprendizagem enriquecedoras que permitam formar uma geração de cidadãos ativos, autónomos e responsáveis. Aos futuros professores de Matemática cabe a função de propiciar uma matemática para todos, que permita aprender a conhecer, aprender a fazer, desmitificando a cultura das receitas, da rigidez por oposição ao desenvolvimento de um pensamento crítico e inovador (Martins et al., 2017).

Assim, a crença de que todos podem aprender matemática é essencial para o progresso do ensino-aprendizagem, porque cada aluno é *uno* e diferente, o que conduz a uma necessidade de criar múltiplas estratégias para abordar um determinado tema, seja através de tarefas, atividades, exercícios com (ou sem) recurso à tecnologia. A adaptabilidade do modelo de ensino, a inclusão de modelos estratégicos para a resolução de problemas científicos como seja a modelação matemática, associados ao contexto e interligados às conexões matemáticas são aspetos que se relacionam no decorrer da criação de um processo de ensino-aprendizagem rico e diversificado. Realçar que segundo Biembengut e Hein (2003), a modelação matemática é o processo que permite obter um modelo que ajude a explicar um fenómeno real, sublinhando a essencialidade das conexões matemáticas por via da modelação matemática. Importa ainda referir que a conexão entre a matemática e a realidade é objetiva e ocorre sistematicamente, mas muitas vezes esse conhecimento não é reconhecido, porque enquanto ciência, a matemática tem uma linguagem própria, formal e simbólica. Cabe ao professor através da utilização de vários contextos, convidar o aluno a fazer uma viagem pela matemática, implementando atividades em contextos reais, de semirrealidade e matemáticos (Ponte & Quaresma, 2012).

Alcançado este objetivo, é possível desenvolver as competências fundamentais (isto é, uma combinação de conhecimentos, capacidades e atitudes) realçando a interdisciplinaridade o que contribuirá para que o aluno se motive, mostre a sua criatividade, desenvolva o seu raciocínio lógico ou dedutivo, a sua capacidade de comunicar enquanto desenvolve competências de carácter colaborativo, indo ao encontro do preconizado nas aprendizagens essenciais e no PASEO (Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória) (Martins et al., 2017).

1.1 Motivação e Pertinência

Uma vez que consciencializar os alunos sobre a presença, a utilidade e a relevância da matemática na sua vida é um aspeto importante para a investigadora, a mesma optou por uma investigação que não só aproxima a matemática à realidade, como demonstra a sua presença no dia a dia interligando a matemática com outras áreas do saber. Assim, a investigadora optou pela modelação matemática aplicada ao tópico da proporcionalidade, utilizando a matemática na interpretação e intervenção do real (Silva, et al., 2001).

Saúde (2010) refere que através da aplicação da modelação matemática em sala de aula, os alunos percebem que a matemática é útil em situações do dia a dia, contribuindo por um lado para se sentirem mais motivados para o estudo da disciplina e por outro, para os ajudar a interiorizar conceitos e procedimentos matemáticos. O tema da proporcionalidade, apesar da sua importância reconhecida não é de fácil compreensão por parte do aluno, pelo que se pretende perceber, se a utilização da modelação matemática como estratégia pedagógica contribui para o processo de ensino-aprendizagem. O conceito de proporcionalidade está presente em situações reais, e para além da sua conexão extramatemática, pode ainda ser estudado através de diferentes representações dentro da própria Matemática, ou seja, através de percentagens, rácios, quer ao nível da aritmética, quer por exemplo da geometria.

Importa ainda ter presente que o processo de ensino-aprendizagem é importante, e correntes mais construtivistas e conetivistas defendem a inclusão de metodologias mais ativas e centradas no aluno, o que é conseguido no âmbito desta investigação, ao tornar o aluno a peça de criação e desenvolvimento do modelo matemático (Hogan et al., 2015). No entanto, o processo de escolha da situação a modelar pode de acordo com Barbosa (2001a) e Coelho (2022) depender em diferente grau da intervenção do aluno, ou seja, o aluno pode apenas participar na resolução da tarefa ou ser parte ativa e interventiva no desenho da mesma. No âmbito desta investigação, como o propósito é o de perceber o processo de aprendizagem de um conteúdo matemático através da modelação matemática e não o de estudar a modelação matemática *per si*, optou-se por uma abordagem em que a elaboração da situação-problema cabe em exclusivo ao professor e a intervenção do aluno ocorre apenas nas etapas subsequentes (na análise da situação ou problema, no desenvolvimento e formulação do modelo, na resolução do modelo, na interpretação; na validação das conclusões e comunicação da solução).

1.2 Problema e Questões de Investigação

A modelação matemática está presente no quotidiano, segundo Beimbengut e Hein (2003), está presente sempre que é necessário resolver um problema que exija criatividade, intuição e conhecimento matemático, e por isso os seus benefícios são imensuráveis. No entanto para aplicar o processo

de modelação matemática é necessário ter conhecimentos matemáticos, para além de que o processo ainda confere dificuldades ao nível da compreensão do enunciado, conceptuais e comunicacionais que são salientadas por autores como Tavares (2000) e Oliveira (2009).

Com o objetivo de tentar "Compreender o papel da modelação matemática para a aprendizagem da proporcionalidade" em contexto de sala de aula, pretendeu-se dar resposta às seguintes questões de investigação:

- Que fases do ciclo de modelação matemática os alunos usaram na realização de cada tarefa?
- Quais as aprendizagens desenvolvidas, no estudo da proporcionalidade, recorrendo à resolução de tarefas de modelação matemática?
- Qual o impacto da utilização da calculadora gráfica, enquanto ferramenta da aprendizagem do tema da proporcionalidade?

1.3 Objetivos de Investigação

A base que orientou esta pesquisa foi a de identificar uma abordagem mais ativa, que permitisse ao aluno compreender e familiarizar-se com uma situação de proporcionalidade que salienta a interligação da Matemática com o mundo que o rodeia, enquanto formula hipóteses e cria um modelo matemático (modelação matemática).

Assim, no decorrer da investigação pretendeu-se:

- Analisar e identificar os vários procedimentos que os alunos utilizaram para responder às tarefas de modelação matemática propostas;
- Questionar os alunos sobre a sua aprendizagem, conferindo-lhes a oportunidade de refletir sobre a mesma, e sobre a estratégia quer através da inclusão de modelação matemática, quer relativamente ao uso de tecnologias no processo de ensino aprendizagem.

Espera-se com este estudo contribuir positivamente para a investigação na área da modelação matemática no tópico da proporcionalidade.

1.4 Organização do documento

A segunda parte do trabalho está dividida em cinco capítulos.

O capítulo 1 inicia-se com um texto introdutório que inclui a apresentação da temática de estudo, seguido da motivação e pertinência para a realização do mesmo. De seguida apresenta-se o problema e a questão de investigação, assim como os objetivos do estudo. Este capítulo finaliza com o ponto que concerne à organização do documento e onde se descrevem os capítulos e subcapítulos abrangidos pela segunda parte do documento.

No capítulo 2 abordam-se várias temáticas ao nível da revisão da literatura, nomeadamente o conceito de modelação matemática, assim como as oportunidades e desafios que a mesma confere no processo de ensino-aprendizagem. De seguida salienta-se a importância das tarefas e o modelo socio-cultural, que contribui para a compreensão da forma como os alunos de 9.º ano processam a aprendizagem. Inclui-se igualmente uma breve explicação das conexões matemáticas e termina-se a revisão da literatura com o conceito da proporcionalidade e o impacto positivo decorrente do potencial da utilização de tecnologia, neste caso das calculadoras gráficas.

No capítulo 3, metodologia, caracteriza-se a investigação qualitativa, em particular o estudo de caso e os instrumentos de recolha de dados. Este capítulo termina com a inclusão das opções metodológicas selecionadas para a investigação.

No capítulo 4, inclui-se a análise de dados e a discussão dos resultados.

No capítulo 5, sistematizam-se as conclusões em resposta às questões de partida, deixando igualmente algumas sugestões para trabalhos futuros.

Nos Anexos incluiu-se uma lista de perguntas para preparação do professor quando implementa uma tarefa de modelação matemática (Anexo I).

Nos Apêndices, relativamente à segunda parte do trabalho, incluíram-se os questionários partilhados na *Classroom* (Apêndice I, J, K), o guião da entrevista (Apêndice L); material de apoio ao *workshop* realizado para o 9.º ano (Apêndice M); enunciado da tarefa 1 (Apêndice N); enunciado da tarefa 2 (Apêndice O).

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A matemática está presente em diferentes áreas do conhecimento e torna-se por isso indispensável que os alunos sejam capazes de ler e interpretar a matemática, desenvolvendo a sua capacidade criativa e inovadora (Biembengut & Hein, 2003).

Ao longo das últimas décadas os conteúdos a explorar durante os anos de ensino obrigatório têm sofrido uma evolução, e atualmente, nas aprendizagens essenciais, a modelação matemática tem começado a ganhar destaque pela sua crescente influência e utilização como fundamento para a tomada de decisão. Em termos históricos, a discussão sobre o contributo da modelação matemática para a Educação Matemática iniciou-se no século passado “com um movimento apelidado de “utilitarista”, centrado na aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade, que impulsionou a formação de grupos de investigação sobre o tema” (Biembengut, 2009, p.8). Desde então e até à atualidade, pela sua importância no desenvolvimento das competências dos alunos e a sua interligação com outras disciplinas e áreas da Matemática (conexões matemáticas), a sua inclusão como estratégia do processo de ensino-aprendizagem ganhou relevância e importância.

Por esta via é importante compreender como pode a modelação matemática contribuir positivamente para o processo de aprendizagem. Para dar resposta a esta questão importa começar por perceber o que é a modelação matemática e qual a sua importância no ensino da Matemática.

2.1 Modelação matemática

A modelação matemática apareceu e desenvolveu-se naturalmente ao longo da história. Um dos primeiros exemplos de modelação matemática foi deixado por Pitágoras (530 a.C.), relacionando a matemática com a música, ao mostrar que os sons musicais têm duração diferente. Criou um modelo matemático, a escala musical atualmente adotada⁴.

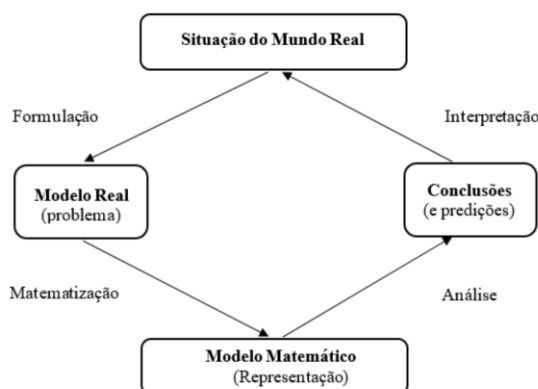
Dada a longa história da modelação matemática, a sua definição não é única. Matos (1995), advoga que a modelação matemática é um processo que permite construir um modelo matemático a partir de um fragmento da realidade. Este autor utiliza o conceito de modelo, que é definido por Ponte

⁴ Pitágoras esticou um fio e verificou o som produzido pela vibração do mesmo. De seguida fixou-o ao meio e vibrou-o novamente. Repetiu o processo até perceber que cada vez que fixava o fio obtinha uma nota uma oitava mais alta. Posteriormente verificou que a oitava tinha a proporção de dois para um, ou seja, permitia uma representação através de frações. Assim, usou frações (conceito que à data ainda não era conhecido tal como agora o é), para medir as distâncias das cordas adicionais. Esta descoberta permitiu criar a escala musical usada atualmente no mundo ocidental (Biembengut & Hein, 2003). Esta descoberta é particularmente relevante porque é um caso de proporcionalidade, tópico em investigação.

(1992), como uma forma simplificada de descrever uma situação seja a mesma real ou imaginária, estabelecendo o paralelismo inequívoco entre a modelação matemática e as conexões matemáticas, realçando assim que o contexto da tarefa pode ser de uma situação quer real, ou de uma situação pensada por um autor, que pode ser o professor de matemática.

Ponte (1992), definiu a seguinte representação do ciclo de modelação matemática:

Figura 2.1 - Esquema do processo de modelação matemática



(Ponte, 1992, p.15)

Desde Ponte (1992), até à atualidade, quer o conceito de modelo, quer o processo de modelação matemática evoluíram. Para a investigação sobre este tema, contribui a sua importância na explicação de fenómenos científicos quer na área da matemática, quer da biologia ou da física.

Biembengut e Hein (2003), no seu livro sobre modelação matemática no ensino definem modelação matemática como a ponte entre a matemática e a realidade, referindo que é esta interação que permite representar uma situação "real", num modelo matemático que apelidam como situação "ferramental", definindo os procedimentos para essa interligação da seguinte forma:

Figura 2.2 - Dinâmica do processo de modelação matemática

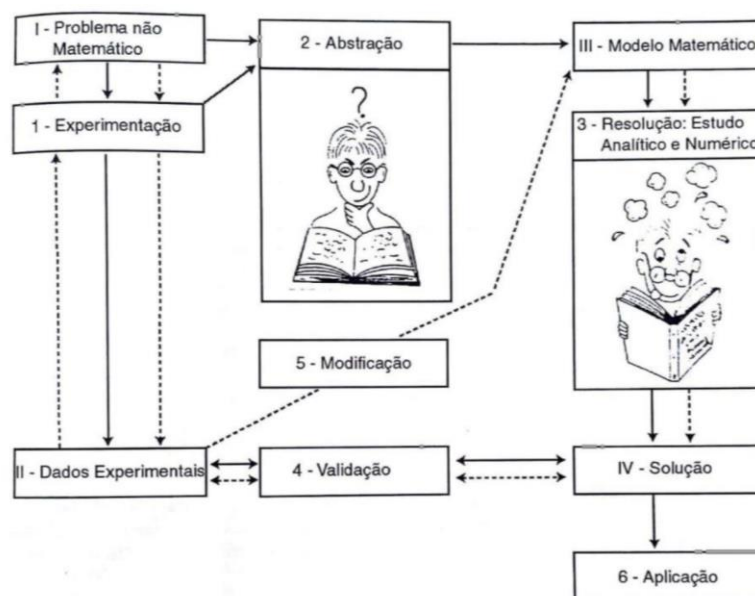


(Biembengut & Hein, 2003, p.15)

A investigação alterou a forma como se apresenta o processo, do ponto de vista de estruturação, mas os aspetos primordiais mantêm-se, ou seja, inicia-se com a interação, momento em que o aluno compreende e se familiariza com a situação. De seguida, na fase que denominam como "Matematização", o aluno formula o problema, analisa as hipóteses e resolve o problema em termos de modelo, ou seja, os alunos traduzem o problema em linguagem matemática, isto é, cria-se o modelo, que será interpretado e validado na última etapa.

Como este não é um processo linear, e nenhum dos modelos anteriores destaca a capacidade de abstração indispensável neste processo, nem o processo para a recolha dos dados, inclui-se também aqui o modelo desenvolvido por Bassanezi (2009), que vai ao encontro do ciclo utilizado no decorrer desta investigação durante as tarefas. Na Figura 2.3 destaca-se ainda o ponto de partida como sendo: problema não matemático.

Figura 2.3 - Esquema do processo de modelação matemática

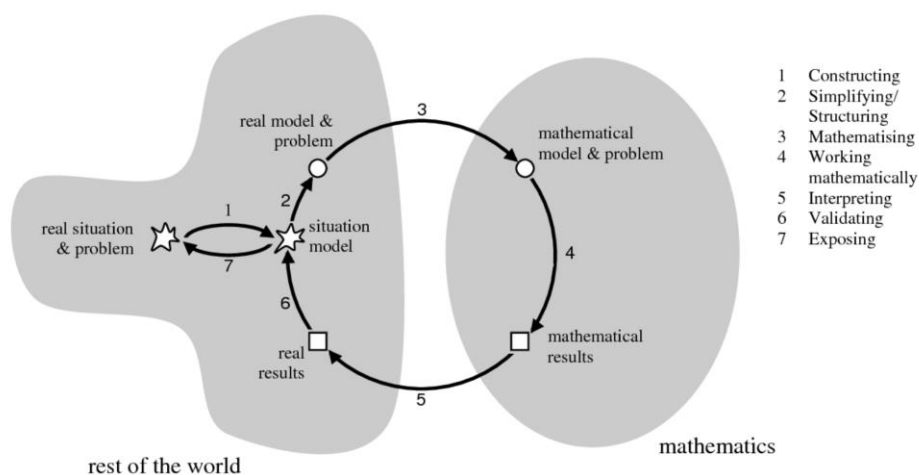


(Bassanezi, 2009, p.27)

Este autor destaca a importância da "experimentação", fase em que são recolhidos os dados, que serão a base para a formulação do modelo, que ocorre na etapa da "abstração". Garantir que o modelo que se cria permite prever outros resultados é essencial ("aplicação"), pelo que se deve garantir a sua fiabilidade e rever o modelo até garantir que o mesmo é satisfatório, pois "o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado." (Bassanezi, 2009, p.38). Assim, segundo este autor, se o professor incluir modelação matemática na sua prática de ensino-aprendizagem, o aluno é agente do seu conhecimento porque, o "processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural" (Bassanezi, 2009, p. 38).

Blum e Ferri (2009), desenvolvem um esquema visualmente mais complexo e estruturado do que os anteriores. Este modelo caracteriza-se por ser bidirecional entre a matemática e o resto do mundo. Uma vez que a modelação matemática é o processo que permite interpretar e modelar uma situação que tem a sua origem num contexto real, transformando-a num problema matemático, de modo, a que a sua interpretação seja feita nesse contexto, Blum e Ferri (2009) criaram assim um ciclo que liga o contexto real à matemática conforme se observa na imagem seguinte:

Figura 2.4 - Esquema de ciclo do processo de modelação matemática



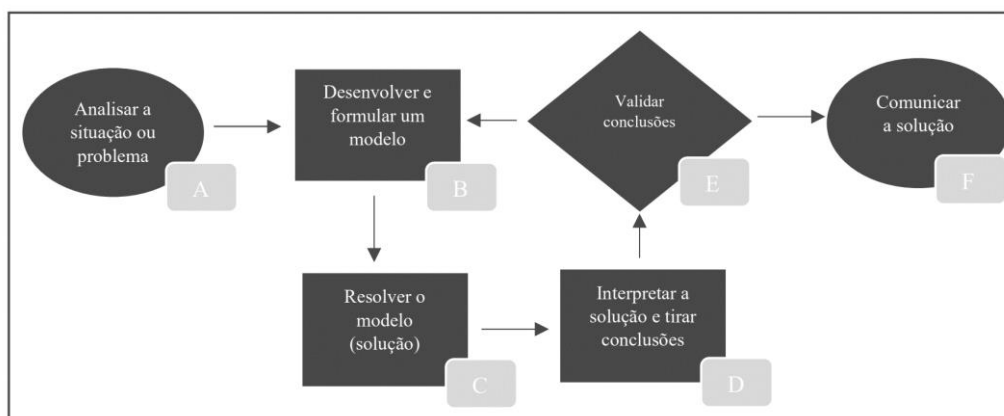
(Blum & Ferri, 2009, p.46)

A primeira fase (1) representa a compreensão da situação, que tem posteriormente de ser simplificada (2), de modo a ser passível de ser estruturada (2), permitindo a criação de um modelo real da mesma. Na terceira fase (3), ocorre o que nos modelos anteriores era apelidado de matematização e que significa transformar o modelo real num modelo matemático. Na quarta fase (4) utilizam-se ferramentas, conhecimentos e práticas matemáticas para estudar o modelo e obter resultados, que são interpretados na fase seguinte (5). A última fase (6), é a fase em que se procede à validação do modelo, que será apresentado e partilhado (7).

De acordo com Carreira (2017), e tal como se observa no modelo de Blum e Ferri (2009), o processo da modelação matemática assenta numa ideia chave de interação do mundo real para a matemática e da matemática para o mundo real. Este modelo reflete a ideia da execução de ciclos, de construção, validação e melhoria do modelo através da sua interpretação do mundo real (Carreira, 2017).

Por último, apresenta-se o modelo usado pelos autores Anhalt e Cortez (2015).

Figura 2.5 - Esquema de modelação matemática



(Traduzido do original de Anhalt & Cortez, 2015)

Este modelo vai ao encontro das visões previamente apresentadas e exploradas, realçando-se, no entanto, que inicia com uma clarificação do que se pretende da atividade e qual o trabalho que se pretende que os alunos desenvolvam (*feed up*).

A sua abordagem termina com a partilha da comunicação da solução encontrada, salientando-se neste esquema o desenvolvimento de uma outra competência ainda não referenciada em esquemas anteriores, a da comunicação matemática.

Apesar dos benefícios que a modelação matemática pode ter no enriquecimento e facilitação do processo de ensino-aprendizagem, segundo Barbosa (2001b) a mesma é percecionada pelos professores como tendo um grau de dificuldade considerável. De acordo com Viseu e Menezes (2014), algumas das preocupações dos professores são ao nível das dificuldades antecipadas na condução das atividades de modelação matemática, no acompanhamento aos alunos e no próprio domínio dos conteúdos matemáticos. Carreira (2017) destaca igualmente a ideia, ainda existente, de que os alunos precisam de uma base de conhecimentos matemáticos prévios, defendendo, no entanto que os alunos desde cedo: "têm a capacidade de trabalhar em problemas de modelação matemática e de criar modelos válidos e interessantes para diversas situações sobre as quais são capazes de pensar, refletir e investigar" (Carreira, 2017, p.44). De forma a ultrapassar possíveis dificuldades um dos cuidados a ter por parte do professor passa por antecipar o que é esperado de cada aluno em cada etapa, tal como sistematizado de seguida.

Figura 2.6 - O que é esperado dos alunos em cada etapa do processo de modelação matemática

Fase modelação	O devo fazer?
A. Definição da situação/problema	1) Identificação clara do problema no contexto apresentado; 2) Fazer pesquisa ou ter acesso a dados que sejam necessários, se necessário; 3) Dar sentido à situação/problema e compreender a questão - Que problema específico o modelo irá dar resposta? (o modelo irá dizer...);
B. Desenvolver e formular um modelo	4) Definir qual a informação apresentada é necessária; 5) Estabelecer pressupostos/variáveis – Porque foram realizadas essas escolhas?; 6) Traduzir para linguagem matemática a informação apresentada, os pressupostos e as variáveis – Como chegaram aos números que estão a ser usados no modelo?; 7) Uso do conteúdo matemático apropriado à situação/problema para desenhar o modelo;
C. Resolver o modelo (solução)	8) Resolver o problema (solução); 9) Analisar e realizar operações no modelo - Que imagens, diagramas, expressões algébricas, gráficos, podem ajudar na compreensão da informação, do modelo e dos resultados?; 10) Ver se matematicamente está tudo correto;
D. Interpretar a solução e tirar conclusões	11) Interpretar a solução obtida na resolução do modelo no contexto original; 12) Retirar conclusões a partir da solução obtida;
E. Validar conclusões	13) Refletir se a solução faz sentido no contexto original; 14) Se as conclusões forem satisfatórias e sem necessidade de melhoria, prosseguir, caso contrário voltar ao ponto 4);
F. Comunicar a solução	15) Partilhar as conclusões e o racional implícito.

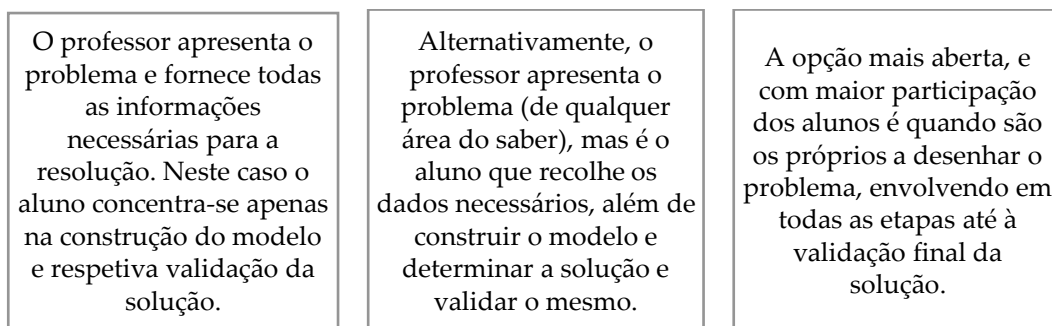
(Traduzido do original de Anhalt & Cortez, 2015)

2.1.1 Oportunidades e desafios do uso de modelação matemática no processo de ensino aprendizagem

Usar modelação matemática na sala de aula é um desafio para o professor, porque exige uma visão diferente e quebra com a tradicional aula expositiva a que os docentes estão habituados, e, para os próprios alunos, "visto que na construção de um modelo matemático é necessário ter em conta vários aspetos simultaneamente aumentando a complexidade na compreensão da experiência e na interpretação dos resultados" (Viseu, 2015, p.32).

A função do professor inicia-se com a criação da tarefa, que pode ser feita apenas pelo professor, ou em parceria com os alunos de forma a envolvê-los ainda mais no processo, e, mantém-se até à conclusão da mesma. De acordo com Coelho (2022), existem três abordagens distintas relativas ao envolvimento do estudante:

Figura 2.7 - Abordagens relativas ao envolvimento do estudante



(Adaptado de Coelho, 2022)

Independentemente da opção que o professor possa escolher, para se preparar melhor para este tipo de tarefas, pode previamente criar uma lista de pontos que podem surgir no decorrer da mesma, conforme aconselha Hernández et al. (2016), conforme consta no Anexo I.

A dificuldade dos alunos em identificarem e traduzirem por meio de objetos matemáticos os elementos essenciais de uma situação, é antiga e foi destacada por Lesh na década de 80, pelo que importa encontrar soluções para a ultrapassar (Lesh, 1985). Os alunos devem desenvolver competências que contribuam para que consigam perspetivar situações de vários ângulos, e introduzir a modelação matemática com este intuito, é assim essencial.

Para melhor perceber esta problemática, e o quanto a mesma é pertinente começa por se destacar o modelo de resolução de problemas, com quatro fases desenvolvido por Pólya (1954):

- i) compreensão do problema;
- ii) estabelecimento de um plano;
- iii) execução do plano;
- iv) examinação da solução obtida.

Mais tarde, Blum e Niss (1991), caracterizaram a resolução de problemas como o processo de trabalhar uma situação problemática na tentativa de encontrar uma solução, e que para isso não basta apenas compreender a linguagem, os símbolos e as palavras que a descrevem. Por sua vez, Boavida et al. (2008) simplificaram o modelo de Pólya (1954), para um modelo de apenas três etapas, fundindo numa única etapa, as fases ii e iii do modelo de Pólya (1954):

- i) leitura e compreensão do problema;
- ii) planeamento e execução de um plano;
- iii) verificação da resposta.

Carreira (2017) reforça que "a modelação matemática é, evidentemente, um campo fértil para desenvolver a capacidade de resolução de problemas. E (...) fomentar o espírito investigativo dos alunos." (Carreira, 2017, p.49).

Apesar de a resolução de problemas e a modelação matemática serem distintas, como se observa existe um paralelismo entre as competências que é necessário desenvolver aquando da

resolução de problemas, e o processo de modelação matemática, ou seja, introduzir tarefas de resolução de problemas contribui e confere “uma oportunidade de envolver os alunos, desde muito cedo, em questões de modelação matemática que, tradicionalmente, são consideradas como tópicos de matemática mais avançada.” (Boavida et al., 2008, p.14).

Não obstante, Tavares (2000), destaca que existem aspetos que podem dificultar o processo de modelação matemática e que foram adaptados e agrupados no esquema seguinte:

Figura 2.8 - Possíveis dificuldades dos alunos no processo de modelação matemática

Enunciado	Comunicacionais	Conceptuais
• compreensão da situação; • criação de restrições não existentes; • não observação de condições ou dados importantes; • dificuldade de identificação dos aspetos essenciais.	• dificuldade em traduzir o problema para linguagem matemática; • dificuldades de ter presentes vários aspetos; • dificuldade de identificar o significado de uma operação matemática em termos da situação de partida.	• dificuldade de mudar a perspetiva (abstração); • dificuldade em identificar os conceitos matemáticos a utilizar numa dada situação; • domínio deficiente de alguns conceitos matemáticos.

(Adaptado de Tavares, 2000)

As dificuldades anteriores podem segundo Tavares (2000) colocar os alunos num impasse, e nessa altura o professor deve intervir com vista a chegar a uma solução.

Por oposição, Barbosa (2003) realça cinco aspetos que tornam a inclusão da modelação matemática no currículo, um aspeto essencial e que são nomeadamente:

- Motivação para o ensino da disciplina, que decorre de os alunos perceberem a aplicabilidade do que estudam na escola;
- Facilitação das aprendizagens. Ao serem capazes de conectar várias áreas do saber, isto é conectar conteúdos distintos, torna-se mais fácil para os alunos compreender as ideias matemáticas;
- Desenvolvimento da capacidade de usar a matemática em diferentes áreas. Ao desenvolver esta capacidade os alunos ficam mais preparados para o futuro e para o mercado de trabalho;
- Desenvolvimento da capacidade de exploração/investigação;
- Compreensão do papel sociocultural da Matemática.

Também no que diz respeito a dificuldades e a benefícios, a recolha bibliográfica é diversa, no entanto, independentemente das dificuldades que possam surgir, a sua introdução é fundamental. Os

alunos não devem limitar-se a resolver exercícios e estudar para os testes, devem ter oportunidades de fazer debates, realizar trabalho prático e de projeto, resolver problemas aplicando a matemática a contextos reais (Teixeira et al., 1997). No entanto, o foco não é desenvolver algo divertido por si só, é importante o caráter motivacional, mas o foco é o caráter cognitivo de desenvolvimento que decorre da aplicação de tarefas de modelação matemática (Lesh et al., 2000).

2.2 A importância das tarefas

Dada a importância do desenvolvimento da capacidade de raciocínio no ensino da Matemática, o mesmo deve ser trabalhado de forma contínua em contexto de sala de aula, introduzindo tarefas que, por um lado requerem o raciocínio e, por outro lado, estimulem o raciocínio (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012).

Estas tarefas podem ser de três tipos: realísticas, de semirrealidade e matemáticas. Segundo Ponte e Quaresma (2012), as tarefas reais são retiradas do dia a dia do aluno, por oposição às atividades matemáticas, que se centram em exclusivo na Matemática. A definição mais complexa é a das tarefas semirreais, ou seja, são questões que não existem na vida diária, mas representam-na, sendo construídas como fins educativos: "O João vai comprar 1kg de maçãs e gasta 0,85€, se invés de 1kg comprasse 2kg quanto gastaria? E se comprasse 15kg? Como se estabelece esta relação?". Normalmente não se compram 15kg de maçãs para consumo em casa, e por isso esta é uma situação, que apesar de assente numa possibilidade real, é artificial, inventada para praticar conhecimentos de proporcionalidade direta. Este tipo de tarefas são, segundo os mesmos autores, os mais usados em contexto de sala de aula.

Com este tipo de caracterização e contextualização em mente, importa criar enunciados nos quais não esteja perfeitamente indicado tudo o que é dado e pedido, e que se define por problemas ou exercícios. Isto não significa não fornecer informação, pode ser fornecida informação e estarmos ainda assim perante uma investigação, caso se deixe espaço para o aluno elaborar uma estratégia de resolução, ou em termos da formulação específica das próprias questões (Ponte, 2005).

As tarefas podem ser de muitos tipos, umas mais desafiantes, outras mais acessíveis, umas mais abertas, outras mais fechadas, umas referentes a contextos da realidade, outras formuladas em termos puramente matemáticos (Ponte, 2005, p.8).

Além do tipo de tarefa propriamente dito, cabe ainda ao professor definir o tipo de ensino que pretende na sua sala de aula, se um ensino expositivo, misto, em que existe espaço para trabalho exploratório dos alunos combinado com uma abordagem mais direta da matéria, ou ainda um ensino-aprendizagem totalmente exploratório (Ponte, 2005).

A estratégia escolhida deve ser algo com que o professor se identifique, apesar da importância que o cariz mais exploratório tem no desenvolvimento das competências dos alunos. A diversidade, as

características dos alunos e a sua reação ao tipo de abordagem do professor são igualmente aspetos essenciais aquando da decisão do processo.

Uma vez que as tarefas introduzidas no âmbito desta investigação tiveram carácter exploratório, e o seu objetivo final era o da sistematização do conceito de proporcionalidade, é necessário explorar o quadro teórico adotado e que foi o modelo das quatro fases:

1. Introdução da tarefa;
2. Desenvolvimento da tarefa;
3. Discussão da tarefa;
4. Sistematização das aprendizagens matemáticas.

Os quatro pontos acima evidenciam o carácter multidimensional e relacional do ensino, reconhecidamente complexo no ensino exploratório (Canavarro et al., 2012), presente nas tarefas de modelação matemática.

As chamadas tarefas de modelação são, no fundo, tarefas que se apresentam num contexto de realidade. Estas tarefas revestem-se, de um modo geral, de natureza problemática e desafiante, constituindo problemas ou investigações, conforme o grau de estruturação do respetivo enunciado (Ponte, 2005, p. 8).

As tarefas de modelação matemática contribuem para estimular o raciocínio matemático, uma vez que os alunos definem uma estratégia, interpretam os resultados obtidos e validam os seus modelos, assim como a comunicação matemática, uma vez que têm de justificar as suas escolhas. Nestas tarefas os alunos conjeturam e generalizam através da obtenção de um modelo que seja aplicável no contexto do problema. Por último, desenvolvem a capacidade de trabalho em equipa quando as tarefas aplicadas são desenhadas para ser realizadas em grupo, estimulando a interação entre pares.

Segundo Web et al. (2001) quando os alunos realizam trabalhos de grupo, dão e recebem ajuda, reconhecem e resolvem contradições decorrentes de diferentes abordagens, contribuindo assim para a interiorização de processos e estratégias que consolidam aprendizagens. Para além disso, quando um aluno tem de partilhar as conclusões e justificações aos colegas, aprofunda a sua compreensão, pode caso as suas ideias não sejam partilhadas por todos passar por um processo de incerteza cognitiva, mas que fomenta o desenvolvimento do seu próprio raciocínio através da acomodação das perspetivas dos colegas. As soluções que provêm do debate são tendencialmente melhores do ponto de vista qualitativo (Peres & Pimenta, 2004).

Uma vez que se trata de tarefas de modelação matemática, existem especificidades no seu desenvolvimento. De acordo com Ferri (2010), numa boa tarefa de modelação matemática, para os alunos aprenderem a percorrer todo o ciclo de modelação matemática, é importante que sejam respeitados cinco critérios na construção e implementação das tarefas de modelação matemática:

- 1) Significado da tarefa de modelação matemática;

- 2) Contexto realista adequado à idade;
- 3) Provocação de questões;
- 4) Estimulação de formas holísticas de aprendizagem;
- 5) Nível de linguagem adequado.

Se forem construídas tarefas adequadas, o grande papel do aluno é trabalhar a competência de modelação matemática segundo Blum (2002), ou seja, a capacidade de estruturar, matematizar, interpretar e solucionar problemas, bem como analisar e comparar modelos.

Realizar este tipo de tarefas desenvolve a autonomia dos alunos, e quanto mais autônomos forem os alunos, segundo Tavares (2000), mais fácil será construírem um modelo matemático. Mendes (2001), descreve o trabalho do aluno perante uma tarefa como *desenvolvimento de atividades*, e ressalva a interação que se gera entre alunos, entre alunos e o professor como sendo um aspeto essencial ao desenvolvimento cognitivo do aluno.

2.2.1 O modelo sociocultural e a sua relevância na aprendizagem dos alunos

A Organização Mundial de Saúde (OMS) define a adolescência como sendo o período da vida que começa aos 10 anos de idade e termina aos 19 anos, ou seja, que engloba o ensino básico e secundário. Tendo os alunos do 9.º ano em média entre os 14 e os 15 anos de idade, significa que estão entre o patamar da pré-adolescência e da adolescência propriamente dita. Nesta fase os alunos enfrentam muitas mudanças psicológicas e estão numa fase importante quer ao nível das suas emoções, quer do seu desenvolvimento cognitivo, que de acordo com o psicólogo Vygotsky (1991), advém da educação e das experiências sociais. Esta teoria denominada por teoria sociocultural, é bastante utilizada na educação, uma vez que na escola o aluno vivencia a riqueza da partilha de experiências quer com os seus pares, quer com o professor (Vygotsky, 1991).

Segundo Vygotsky (1991) existe uma distância entre o que uma criança é capaz de fazer sozinha (nível de desenvolvimento real), e o que é capaz de fazer com ajuda dos pares ou sob a orientação de um adulto (nível de desenvolvimento potencial), que é denominada por *zona de desenvolvimento proximal*, e é neste processo que o aluno aprende. O debate entre colegas de grupo que ocorre durante a realização de uma atividade de modelação matemática mediada pelo professor, são uma ferramenta possível para ampliar as suas capacidades cognitivas.

Para além dos aspetos já referidos importa mencionar que esta teoria enfatiza a importância do ambiente em que ocorre a o processo de aprendizagem. Normalmente em projetos de modelação matemática, o ambiente de aprendizagem é frequentemente enriquecido com recursos, como ferramentas tecnológicas, nomeadamente a calculadora. Para além disso os autores Subtil e Domingos (2018) indicam que é benéfica a introdução da calculadora gráfica sendo particularmente importante para alunos de diferentes perfis e níveis de desempenho, permitindo uma diferenciação pedagógica, aspeto

essencial e que vai ao encontro da génese das adaptações curriculares que privilegiam a matemática para todos, notando-se um aumento da motivação, envolvimento, cooperação, confiança e capacidades tecnológicas dos alunos (Dias, 2019).

Assim, importa salientar que é em momentos de interação e aprendizagem entre alunos mediados pelas orientações do professor que se ativa a zona de desenvolvimento proximal, contribuindo assim para a consolidação e desenvolvimento das competências dos estudantes. Esta conceção e a estrutura permitem, segundo esta teoria, criar oportunidades para uma apropriação do conhecimento e o desenvolvimento de competências matemáticas avançadas.

A matemática está interligada à realidade e ao desenvolvimento de capacidades cognitivas através do processo de interação social que ocorre durante o processo de modelação matemática e que favorece, como vimos, o processo de aprendizagem do aluno. Lesh e Kaput (1988), realçaram a partir das suas investigações que existe uma evolução gradual das capacidades cognitivas dos alunos, decorrente do processo de construção. À medida que os alunos resolvem um problema desenvolvem as suas capacidades para resolver um novo problema no momento que surgir, estando mais preparados para dar resposta a outros problemas noutras áreas de saber. Assim, o processo de modelação matemática facilita e favorece as conexões matemáticas.

2.3 Conexões matemáticas

Segundo Amado et al. (2019), o tema das conexões matemáticas é bastante amplo, permitindo diversas abordagens, linhas de trabalho e problemas de investigação.

De acordo com Canavarro (2017), o conceito data do ano de 2000, e a sua aplicação em sala de aula, com os alunos, pode ser implementada recorrendo a duas estratégias: a exploração de representações múltiplas e através da utilização de modelação matemática.

O grande propósito das conexões é que ampliem a compreensão das ideias e dos conceitos que nelas estão envolvidos e, conseqüentemente, permitam aos alunos dar sentido à Matemática e entender esta disciplina como coerente, articulada e poderosa (Canavarro, 2017, p. 38).

Segundo esta autora, existem duas estratégias que apoiam a forma como se abordam as conexões em sala de aula, isto é, através da exploração de representações múltiplas e suas interrelações, ou através da utilização de modelação matemática (Canavarro, 2017).

Para que existam conexões matemática, é preciso de acordo com García-García e Dolores-Flores (2017) que exista compreensão. Para Amado et al. (2019), compreender implica que o aluno seja capaz de relacionar, fazer ligação entre ideias, conceitos, procedimentos, representações e significados, aspeto igualmente essencial no decorrer do desenvolvimento de uma tarefa de modelação

matemática. Por essa via, e para Amado et al. (2019) realçam a essencialidade do processo cognitivo, e das conexões aos dois níveis: conexão intra-matemática, que se refere à interligação entre ideias, conceitos, definições, teoremas e diferentes representações; e, conexões extramatemáticas, que relacionam os conteúdos de diferentes disciplinas ou situações do mundo real.

Dada a interligação entre os conceitos de conexões e de modelação matemática, com vista a analisar o impacto da modelação matemática no processo de ensino-aprendizagem, a investigação sobre o contributo da modelação matemática deverá ser analisada sobre a perspetiva das conexões matemáticas, em particular no que diz respeito ao contexto real.

2.4 Proporcionalidade

A proporcionalidade é um tema que acompanha o aluno ao longo da vida, razão pela qual é tão importante. Alguns exemplos do conceito de proporcionalidade direta no quotidiano são: a variação do preço dos produtos em função da quantidade comprada, quantidade de combustível gasto em função da distância percorrida. De proporcionalidade inversa são: tempo gasto numa viagem em função da velocidade média do veículo; relação entre o número de trabalhadores necessários e o tempo para a realização de uma determinada tarefa.

A proporcionalidade direta é um tópico das aprendizagens essenciais do 7.º ano, devendo em termos de estratégias ser abordada em contextos matemáticos e não matemáticos, através da análise e representação de funções, relacionando as suas diversas representações (DGE, 2018b).

Para percebermos o conceito de proporcionalidade é necessário ter presente o significado de razão e de proporção. A razão entre dois números corresponde ao seu quociente, ou seja, a razão entre a e b (com $b \neq 0$) pode ser representada em forma de fração: $\frac{a}{b}$.

Quando duas razões são iguais, formam uma proporção, ou seja, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ com $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

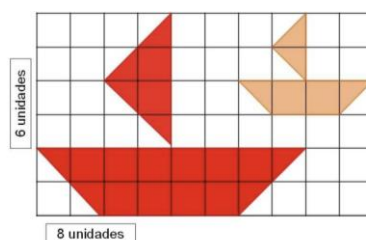
Ao longo do ensino básico (DGE, 2018b), os alunos começam por lidar com situações de proporcionalidade direta de forma intuitiva, recorrendo a uma de três estratégias: método direto⁵, redução à unidade ou o uso da regra de três simples.

No 9.º ano de escolaridade (DGE, 2018a), surgem no currículo escolar as relações de proporcionalidade inversa, relações estas mais complexas e que exigem maior grau de raciocínio. Em particular no 9.º ano, de acordo com as aprendizagens essenciais em vigor, pretende-se que os alunos usem equações para modelar situações em contexto variado, resolvendo-as e debatendo as soluções obtidas (DGE, 2018a). De acordo com Nobre et al. (2014) a compreensão desta relação é parcialmente facilitada pela compreensão prévia do conceito de proporcionalidade direta, uma vez que duas grandezas x e y são inversamente proporcionais se x é diretamente proporcional ao inverso de y .

⁵ O método direto é aplicável em casos em que os números simples, como seja por exemplo: se para pôr a secar uma camisola são necessárias 2 molas, para pôr a secar 2 camisolas são necessárias 4 molas.

Assim é possível sistematizar que existem dois tipos de proporções: grandezas diretamente proporcionais (Figura 2.9) e grandezas inversamente proporcionais (Figura 2.10).

Figura 2.9 - Exemplo de uma grandeza diretamente proporcional



(Beiral, 2017, p.15)

Na Figura 2.9, mantém-se a proporção entre os dois barcos. Se pensarmos na relação entre o barco mais pequeno e o barco maior, quando a altura duplica, o comprimento também duplica de forma a manter-se a relação.

$$\frac{\text{Comprimento barco vermelho}}{\text{altura vermelho}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = \frac{\text{comprimento barco laranja}}{\text{altura barco laranja}}$$

Ao quociente anterior dá-se o nome de constante de proporcionalidade.

Sistematizando, no caso da Figura 2.9, as grandezas variam na mesma razão, ou seja, quanto maior (menor) for x , maior (menor) será y .

Na Figura 2.10, como se observa, quando a altura aumenta, o comprimento diminui, ou seja, a altura é inversamente proporcional ao comprimento, o que significa que as duas grandezas variam sempre uma na razão inversa da outra.

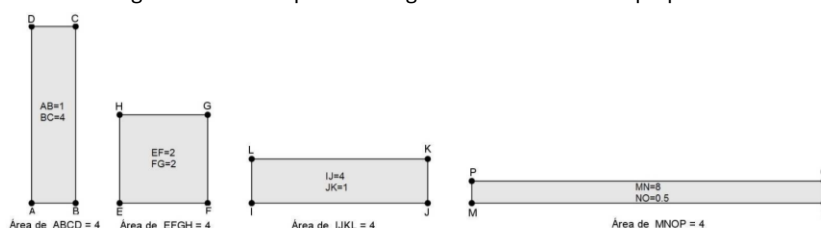
Sabendo que:

$$\text{área} = 4 = \text{altura} \times \text{base}$$

Para uma base x , e altura h , e área 4, tem-se que $h = \frac{4 (\text{área})}{x (\text{base})}$

Sistematizando, no caso da Figura 2.10, quanto maior (menor) for x , menor (maior) será y .

Figura 2.10 - Exemplo de uma grandeza inversamente proporcional



(Beiral, 2017, p. 20)

2.4.1 Proporcionalidade e gráfico da função

Existe uma relação entre proporcionalidade e o gráfico de uma função, que relativamente à proporcionalidade direta foi lecionada no 7.º ano, de acordo com as Aprendizagens Essenciais de 2018, em vigor para os alunos atualmente no 9.º ano de escolaridade.

Quando existe proporcionalidade direta entre duas grandezas, o gráfico que une os pontos correspondentes é uma reta que contém a origem (é uma situação particular de um gráfico de uma função afim, conhecida como função linear).

Considere-se um caso de proporcionalidade direta em que a constante de proporcionalidade é o valor a . Pelo exposto anteriormente $a = \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$)

Ou seja, $y = ax$, que é o mesmo que dizer que $f(x) = ax$.

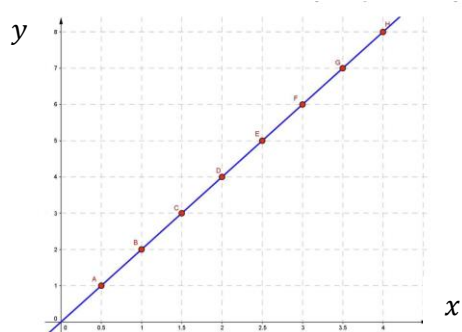
Concretizando num exemplo. Para determinar o gráfico da função $f(x) = 2x$, basta substituir o x por valores aleatórios e obtém-se a seguinte tabela, para alguns valores do domínio:

Tabela 2.1 - Tabela de proporcionalidade direta para a função $f(x) = 2x$

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8

(Beiral, 2017, p. 21)

Figura 2.11 - Gráfico da função $f(x) = 2x$



(Beiral, 2017, p. 21)

Quando a proporcionalidade é inversa entre duas grandezas, o gráfico que une os pontos correspondentes, é uma linha curva, dividida em dois ramos, a que se chama hipérbole. A curva aproxima-se cada vez mais dos eixos, conforme a grandeza a variar se aproxima do zero.

Usando exemplo dos retângulos exposto na Figura 2.10, tem-se que $h = \frac{4 \text{ (área)}}{x \text{ (base)}}$, ou seja, $y = \frac{a}{x}$, que é o mesmo que dizer que $f(x) = \frac{a}{x}$.

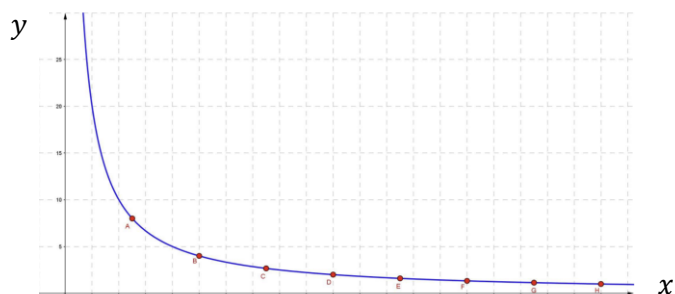
Pelo que é possível construir a tabela de suporte ao gráfico a desenhar (Figura 2.12), para alguns valores do domínio.

Tabela 2.2 - Tabela de proporcionalidade inversa para a função $f(x) = \frac{4}{x}$

x	0,5	1	2	4
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

(Beiral, 2017, p.22)

Figura 2.12 - Ramo positivo do gráfico da função $f(x) = \frac{4}{x}$



(Beiral, 2017, p.22)

2.5 A importância da tecnologia nas tarefas de modelação matemática e na aprendizagem da proporcionalidade

Em 1992, no artigo escrito por Carreira relativamente às aplicações e modelação matemática, a autora referia que bastava a consciência da difusão das novas tecnologias para servir como forma de pressão para a presença de tecnologia no espaço educativo. De acordo com Carreira (1992), a utilização da calculadora iria diminuir as dificuldades de manipulação algébrica e de cálculo que muitas vezes é observada nos alunos, evitando o fracasso da experiência de modelação matemática, ou condicionando-a por aspetos que facilmente podem ser simplificados com recurso à calculadora, ou a outra tecnologia.

Cerca de três décadas depois, após uma reflexão sobre a importância da inclusão tecnológica no ensino da matemática a mesma é parte integrante das novas aprendizagens essenciais (DGE, 2018b).

Os gráficos obtidos nas figuras (Figura 2.11 e Figura 2.12) podem ser feitos manualmente, isto é, recorrendo a papel e lápis, e tradicionalmente são feitos assim em sala de aula. No entanto a utilização de ferramentas auxiliares como a calculadora permite aos alunos que o enfoque na exploração de

regularidades e na realização de experiências, não na construção, contribuindo assim para o desenvolvimento de conceitos, e para a investigação de modelos matemáticos reais enquanto colocam a ênfase na resolução de problemas (Bilheó, 2012). Naturalmente que poderiam ser utilizadas outras opções diferentes da calculadora gráfica, como o GeoGebra ou a folha de cálculo. A grande vantagem da calculadora face às restantes opções, é a sua disponibilidade nas escolas, sem que seja necessária uma sala com acesso a computadores ou ligação à *internet*. Apesar de o GeoGebra poder ser usado no telemóvel, se não houver na escola disponibilidade de *internet*, ou existirem alunos sem telemóvel, a sua utilização pode criar desigualdades de oportunidades que não ocorrem se o material for idêntico e disponibilizado pela própria escola, como é o caso das calculadoras.

Apesar de no contexto do GeoGebra, mas também aplicável às calculadoras gráficas Amado et al. (2015) advogam que:

Os alunos podem e devem combinar o trabalho apoiado no uso de tecnologias com o trabalho baseado em papel e lápis, de modo a construírem uma aprendizagem assente numa compreensão mais profunda e sólida dos conceitos, que possa ser geradora de maior motivação, autoestima e empenho. (Amado et al., 2015, p. 640)

Pelo exposto na literatura pode-se assumir que as calculadoras facilitam o processo de traçar um gráfico com precisão, permitindo que a parte gráfica e numérica contribuam em paralelo para a interpretação e compreensão do problema. Algumas das dificuldades em perceber o conceito de função podem advir da forma abstrata como o mesmo é introduzido na aprendizagem. Ao ser utilizada a calculadora gráfica, a função ganha forma, o aluno pode interpretar o seu significado, para além de o motivar e estimular para a interpretação de gráficos e tabelas, pelo que Dias (2019) refere que: "Nada melhor que a visualização concreta, para intuir e questionar o que à primeira vista pode ser tomado como verdadeiro." (Dias, 2019, p. 48).

A utilização da tecnologia, neste caso a calculadora gráfica, é descrita como uma mais-valia indiscutível, no processo de descoberta e também, na sistematização dos resultados (Dias, 2019). Em particular, o uso da calculadora na modelação matemática, contribui para potenciar o pensamento matemático que está a ser promovido pela tarefa e as competências necessárias para que a experiência seja bem sucedida (Bilheó, 2012).

Para além disso e de acordo com Rocha (2015), é possível encontrar estratégias para que os próprios alunos percebam a vantagem de recorrer quer a abordagens mais intuitivas, quer a outras mais formais, mesmo com a presença constante da tecnologia, em particular da calculadora gráfica.

Os alunos podem ainda usar o potencial da calculadora gráfica em três perspetivas (*pragmática*, *epistémica* e *justificativa*) de acordo com o destacado por Thomsen et al. (2022) e que se passam a descrever de seguida. Estes autores sobre o contributo das tecnologias digitais destacam inicialmente duas abordagens: as *mediações pragmáticas* e *epistémicas*, que segundo os mesmos tiveram a sua génese fora da educação matemática. As *mediações pragmáticas* têm relação com o sistema cognitivo do aluno, sendo observadas quando a calculadora é usada como forma eficaz de agir perante uma

situação, ou seja, por exemplo na resolução de um problema. Por sua vez, se a utilização da calculadora por parte do aluno servir para aprofundar a compreensão, então está-se perante uma *mediação epistémica*.

Decorrente do uso massificado de tecnologias digitais, os autores destacaram uma terceira abordagem denominada de *mediações justificativas*. Neste caso o aluno não usa a calculadora nem como ferramenta para resolver um problema ou para aprofundar a compreensão. A utilização é feita com vista à verificação e à justificação, estabelecendo segurança do próprio sistema cognitivo.

Neste capítulo inclui-se uma breve descrição teórica das características da investigação qualitativa, da caracterização de estudo de caso e de alguns instrumentos de recolha de dados.

O capítulo termina com os procedimentos metodológicos adotados nesta investigação.

3.1 Investigação de natureza qualitativa

Aires (2015) caracteriza a abordagem qualitativa como interdisciplinar e transdisciplinar, que permite criar investigações ricas e reflexivas dos fenómenos que se pretendem analisar. Neste tipo de abordagem sobressaem os processos, não é a quantidade de informação recolhida que importa, mas a sua relevância para a compreensão e interpretação dos fenómenos.

A abordagem qualitativa e interpretativa, em que o investigador é o agente principal da recolha de dados permite enfatizar a descrição, a indução, a teoria fundamentada assim como o estudo das percepções pessoais, sendo o investigador que atribui um significado subjetivo à realidade que investiga (Bogdan & Biklen, 1994).

Aires (2015) com base em Denzin e Lincon (1994), refere que o processo de investigação qualitativa é um processo tanto complexo como reflexivo, pois vai do campo ao texto e do texto ao leitor, ou seja, cabe ao investigador com base no trabalho de campo, e tendo como foco as questões de investigação definidas, interpretar as suas observações, o seu diário de bordo que conjuntamente com a recolha documental e a fundamentação teórica lhe permite refletir e expor as suas conclusões.

3.1.1 Estudo de caso

Bogdan e Biklen (1994) caracterizam o estudo de caso como um dos métodos mais comuns na investigação qualitativa definindo-o como um estudo detalhado de uma situação, sujeito ou acontecimento. Por sua vez, Yin (2003) descreve o estudo de caso como uma estratégia eficaz a ser utilizada numa investigação cujo objetivo seja o de responder a questões que se prendam com o “como” e o “porquê”, assumindo que a mesma ocorre num ambiente real, e no qual o investigador não controla a ocorrência dos acontecimentos. Este autor (Yin, 2003) especifica ainda três tipos de estudo de caso:

- (i) exploratório: o tema é pouco conhecido e a recolha de dados não visa adquirir conhecimento, mas alternativamente pretende identificar problemas, dando resposta aos objetivos do estudo;
- (ii) descritivo: através do qual são obtidos relatos detalhados;
- (iii) explicativo: onde são evidenciadas as relações de causa-efeito.

Por sua vez, Ponte (2006), reforça que o estudo de caso permite evidenciar a identidade, "e características próprias, nomeadamente nos aspetos que interessam ao pesquisador" (Ponte, 2006, p. 2). No entanto, destaca alguns aspetos menos positivos, nomeadamente o de não permitir comparações com outros estudos. Não obstante, é possível formular hipóteses que possam vir posteriormente a ser testadas e validadas em futuras investigações (Ponte, 2006).

No entanto, de acordo com Cohen et al. (2007), existem cinco aspetos que importa ter presentes quando se pretende aplicar estudos de caso, nomeadamente:

- (i) questões de investigação - aspeto essencial e a base para a construção da investigação. Para que os resultados da investigação sejam os pretendidos, isto é, para evitar que ocorram desvios face ao objetivo do estudo, é indispensável clarificar as questões a que o investigador gostaria de dar resposta;
- (ii) propostas de estudo - uma proposta é um aspeto que requer a atenção do investigador pelo que importa sistematizá-las;
- (iii) unidade de análise - o "caso" que pode ser uma pessoa, um grupo, uma comunidade, ...;
- (iv) relação entre os dados recolhidos e as propostas de estudo - aspetos fundamentais para cada proposta e em função de cada unidade de análise;
- (v) critérios de interpretação dos dados - o investigador deve ser capaz de independentemente de todos serem verdadeiros discernir sobre a relevância dos dados a apresentar.

3.1.2 Instrumentos de recolha de dados

Depois de o investigador selecionar a abordagem metodológica que pretende adotar, precisa de optar pelas técnicas de recolha adequadas ao seu problema de investigação. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), no âmbito de uma investigação de índole qualitativa do tipo estudo de caso, o investigador pode usar vários instrumentos, de entre os quais no âmbito desta investigação se selecionaram os seguintes: i) observação; ii) questionário iii) entrevista; iv) diário de bordo; e v) recolha documental.

3.1.2.1 Observação

Segundo Aires (2015), a observação é uma das técnicas base de recolha de dados, permitindo obter uma imagem completa da realidade que rodeia o investigador, contribuindo para a compreensão da informação de carácter objetivo por meio da articulação com a informação de carácter subjetivo. Segundo Aires (2015), Gil (2008), Meirinhos e Osório (2010) e Yin (2003) a observação pode ser participante (ativa) ou não participante (passiva). Para Bogdan e Biklen (1994), o investigador não precisa de optar por uma posição extrema, ou seja, pode existir uma continuidade entre a observação participante e não participante, ou seja, a participação do investigador não é absoluta, mas o mesmo intervém caso seja necessário.

Havendo um cariz participante, segundo Richardson (1999), as condições para a compreensão das características do grupo-alvo em estudo (hábitos, atitudes, interesses, etc.) são mais favoráveis. Bogdan e Biklen (1994) reforçam ainda como vantagens da observação participante a imersão no grupo-alvo, o aumento da confiança, facilitando um registo mais natural do que se ouve e se observa. No entanto, Meirinhos e Osório (2010) advertem para o facto da observação participante requerer aprendizagem de forma a permitir ao investigador desempenhar, em simultâneo, quer o papel de investigador quer de participante.

3.1.2.2 Questionário

O inquérito por questionário é uma técnica de recolha de dados usada comumente na investigação social e na educação. Meirinhos e Osório (2010) caracterizam este instrumento como “criação de um formulário, previamente elaborado e normalizado” (Meirinhos & Osório, 2010, p. 62).

A riqueza da sua recolha depende do tipo de questões incluídas (abertas ou fechadas) e da qualidade do questionário construído, por essa via Gil (2008) alerta para os seguintes cuidados na construção do questionário: confirmação da eficácia com vista ao alcance dos objetivos; verificação da forma e do conteúdo das questões; quantidade e ordenação das questões; cuidado na construção das alternativas e na apresentação do questionário.

3.1.2.3 Entrevista

Aires (2015), Amado (2017), Bogdan e Biklen (1994), Poupart (2008) e Yin (2003) destacam a importância da entrevista como estratégia fundamental para a recolha de informação rica, diversificada sobre os mais variados aspetos, e que permite compreender e interpretar os seres humanos, pois permite estabelecer uma interação entre o investigador e o entrevistado. No entanto, Bogdan e Biklen (1994) advertem para o carácter subjetivo decorrente da interpretação que o investigador faz dos dados "puros" que recolhe. Por sua vez Yin (2003) alerta para questões éticas, nomeadamente no que concerne à gravação da entrevista e à previa assinatura por parte dos encarregados de educação do consentimento informado, aspeto essencial e particularmente indispensável em situações em que os sujeitos são menores de idade. Para além disso é importante que os sujeitos percebam o motivo da entrevista, se sintam à vontade, sabendo igualmente que o que dizem será anonimizado, e que as suas respostas não terão impacto na sua avaliação disciplinar.

Relativamente ao tipo de entrevista, Amado (2017) define 3 tipos:

- entrevista estruturada ou diretiva - foca-se num tema, que é abordado a partir de questões pré-determinadas. O investigador controla o ritmo da entrevista, para a qual segue um padrão, é direto e não expressa opiniões. Neste caso, todos os entrevistados respondem exatamente às mesmas perguntas, e pela mesma ordem, obtendo-se respostas mais fechadas, o que facilita a análise;
- entrevista semiestruturada ou semidiretiva - neste tipo de entrevista os tópicos são a base, estão organizados de uma forma lógica, mas existe abertura para o entrevistador os abordar de

forma a enriquecer a investigação, conferindo assim também maior liberdade de resposta ao entrevistado. Decorrente destas características, este género de entrevista é muito usado nas pesquisas de natureza qualitativa;

- entrevista não estruturada ou não diretiva - o formato é do tipo estímulo/resposta, não existindo nem perguntas definidas, nem um esquema fixo de tópicos a abordar podendo ser gerida, a ordem dos mesmos, pelo investigador.

3.1.2.4 Diário de Bordo

Segundo Bogdan e Biklen (1994), o diário de bordo é um mecanismo de recolha de informação minucioso, um retrato fidedigno e cronológico do observado e vivenciado pelo investigador. Neste documento o investigador descreve o seu envolvimento, as estratégias usadas, as dificuldades, os imprevistos, a condução do professor e outras observações que ocorram durante a aula, e posteriormente à mesma inclui uma breve reflexão sobre a sua perceção relativa ao seu desenvolvimento.

3.1.2.5 Recolha Documental

Outra ferramenta de recolha de dados é a recolha documental, que segundo Aires (2015) contribui para "validar" e complementar a informação obtida a partir de outros métodos, permitindo assim corroborar evidências (Yin, 2003). A recolha documental pode ser de documentos oficiais, ou pessoais (isto é, produções dos sujeitos no decorrer da realização de tarefas). Naturalmente que como todos os métodos tem vantagens, e desvantagens. Por um lado, é exata e com grande cobertura em termos de espaço e tempo, mas por outro lado pode ser de difícil acesso, seletiva e tendenciosa (Yin, 2003).

3.2 Procedimentos Metodológicos adotados na investigação

A investigação levada a cabo pela autora é de natureza qualitativa, com um paradigma interpretativo incluindo **quatro estudos de caso**. Assume um papel descritivo uma vez que é fundamentada em evidências empíricas, como sendo: o envolvimento observado; as competências demonstradas; os conhecimentos; e as dificuldades evidenciadas pelos alunos no estudo da proporcionalidade, recorrendo ao processo de modelação matemática. Tem ainda um carácter explicativo porque procura identificar os efeitos do recurso à modelação matemática na compreensão dos conceitos de proporcionalidade. Inclui um carácter indutivo, uma vez que a base são os dados observados e não factos de que se dispunha previamente.

As tarefas aplicadas nesta investigação foram de carácter exploratório, com recurso à modelação matemática. Privilegiaram a utilização de materiais, envolveram experimentação, interpretação e análise. Para além disso a construção do modelo matemático para cada uma das tarefas, permitiu gerar

uma importante discussão, e foi necessário uma compreensão e exploração da situação experimental. Assim e apesar de os estudos de caso selecionados terem sido pessoas individuais (alunos), aquando da participação no *workshop* e no decorrer da realização das tarefas de modelação matemática, estiveram integrados em grupos o que potenciou o desenvolvimento da perspetiva cognitiva, o debate de ideias e por conseguinte a capacidade de raciocínio (Vygotsky, 1991; Peres & Pimenta, 2004; Baioa & Carreira, 2019).

De seguida descrevem-se as opções metodológicas, quer ao nível da definição dos instrumentos de recolha de dados; dos participantes e das tarefas desenvolvidas para dinamizar o processo de ensino-aprendizagem, assim como a análise documental.

3.2.1 Instrumentos de recolha de dados

No âmbito desta investigação recorreu-se à utilização de tabelas de observação, questionários, entrevistas individuais, diário de bordo e recolha documental.

No que diz respeito à observação, a postura da investigadora alterou entre participante e não participante indo ao encontro do referido por Bogdan e Biklen (1994) que consideram que a participação não tem de ser absoluta. Assim, a investigadora apoiou os alunos de acordo com as necessidades e o contexto, tentando sempre estimular a autonomia e o trabalho colaborativo entre pares.

Paralelamente, utilizou-se também o questionário para obter uma fotografia da perceção global da turma após a conclusão de cada uma das tarefas. Os questionários foram desenvolvidos em *google forms*, e partilhados através da *Classroom*, após o *workshop* (Apêndice I), a tarefa 1 (Apêndice J) e a tarefa 2 (Apêndice K).

Com vista a uma compreensão mais detalhada do raciocínio desenvolvido pelos alunos na resolução das tarefas propostas foram igualmente realizadas quatro entrevistas semiestruturadas, no decorrer das quais os alunos realizaram mais duas pequenas tarefas. As entrevistas permitiram à investigadora alguma flexibilidade na condução das mesmas com vista à obtenção de respostas mais espontâneas e genuínas por parte dos alunos, e a uma melhor perceção da aprendizagem durante a resolução das tarefas. O guião da entrevista (que inclui as tarefas adicionais) encontra-se no Apêndice L. No decorrer da investigação, existiu o cuidado de manter a imparcialidade, fomentando a sinceridade dos alunos entrevistados, ressaltando que as suas respostas eram confidenciais, e não seriam alvo de avaliação.

A recolha das perceções dos alunos foi realizada através de questionário e de entrevista, e precedida de um consentimento informado para garantir o respeito pelas questões éticas associadas à recolha de informação.

Complementarmente a investigadora utilizou ainda o diário de bordo em cada uma das sessões de recolha de dados, tendo optado por acompanhar o seu levantamento com reflexões pertinentes

feitas quer no momento, quer após cada momento de recolha de informação. O diário de bordo contempla duas partes, uma preenchida no decorrer da aula relativa ao seu envolvimento, às estratégias usadas, às dificuldades, aos imprevistos, à condução do professor e outras observações, e uma segunda parte, preenchida posteriormente, que integra as reflexões sobre cada aula. Pela riqueza de informação recolhida, este instrumento contribuiu para enriquecer e sistematizar a análise dos dados.

Por último, foi usada a recolha documental do trabalho realizado pelos alunos de forma a complementar a informação recolhida a partir de outros instrumentos.

3.2.1.1 Sessões de Trabalho

A recolha dos dados decorreu entre os dias 14 de fevereiro e 28 de março.

Fase 1: Contexto Letivo

No dia 14 de fevereiro, foi realizado um **workshop** da utilização de calculadora gráfica (Apêndice M). O objetivo desta sessão, foi introduzir aos alunos a utilização dos menus de estatística/listas e gráficos para lhes facilitar a utilização da calculadora durante as tarefas de modelação matemática. No final desta sessão todos os alunos foram convidados a responder a um questionário construído no *google forms* e disponibilizado na *Classroom* (Apêndice I). No questionário solicitou-se aos alunos que descrevessem a aula em detalhe, o que aprenderam, onde tiveram mais dificuldades, se gostaram ou não de usar a calculadora e porquê, como é que a calculadora contribuiu para a resolução da tarefa.

No dia 21 de fevereiro foi realizada a **tarefa 1: "Modelação do comprimento de uma vela"** (Apêndice N). Nesta aula foi solicitado aos alunos que realizassem, uma tarefa de modelação matemática no âmbito da proporcionalidade direta. No final desta sessão todos os alunos foram convidados a responder a um novo questionário disponibilizado na *Classroom* (Apêndice J). No questionário foi solicitado aos alunos que descrevessem a aula em detalhe, que indicassem os aspetos positivos e negativos do trabalho realizado, que enumerassem as dificuldades sentidas, o que mais tinham gostado, assim como as aprendizagens adquiridas no decorrer da tarefa.

No dia 06 de março, os alunos realizaram a **tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo"**, sobre proporcionalidade inversa (Apêndice O), que visava introduzir este conceito e que, uma vez mais, recorreu à modelação matemática. No final desta sessão todos os alunos foram convidados a responder a um novo questionário construído e disponibilizado na *Classroom* (Apêndice K), idêntico ao disponibilizado após a tarefa 1.

Durante esta primeira fase, a investigadora encontrava-se em regime de observador-participante apoiando os alunos, esclarecendo dúvidas e registando as suas observações quer na tabela de

observação, quer no diário de bordo. A autonomia dos alunos foi crescente. No início do *workshop* foi necessário muito acompanhamento dos alunos por ter sido o primeiro contacto com a calculadora gráfica. Na tarefa 1 foi necessário um apoio adicional para a realização de uma atividade diferente do que é habitual, dado o seu carácter exploratório, e a própria utilização da calculadora gráfica. Na tarefa 2, o nível de autonomia aumentou em alguns grupos, assumindo a investigadora uma postura maioritariamente não participante, ou seja, passando a intervir apenas em caso de necessidade, o que aconteceu quando os alunos se depararam com um novo tema, o da proporcionalidade inversa, que foi debatido em grupo. No fim de cada tarefa procedeu-se ainda à recolha documental, isto é, anotações/resoluções dos alunos.

Fase 2: Contexto não letivo

Após concluída a primeira fase, foram escolhidos os participantes, que responderam a uma entrevista individual semiestruturada, entre os dias 06 de março e 28 de março e que permitiu à investigadora complementar a sua investigação. Ao longo deste período foram realizadas quatro entrevistas individuais. No início da entrevista a investigadora, explorou com cada um dos estudos de caso o que tinham feito nas tarefas 1 e 2, incentivando-os a concluí-las sempre que necessário. Na entrevista a investigadora teve a oportunidade de perceber o envolvimento com a disciplina, o processo individual do aluno na realização de cada uma das tarefas anteriores, e a sua perceção do impacto da utilização da calculadora gráfica. Para finalizar a investigadora explorou as aprendizagens desenvolvidas sobre os tópicos da proporcionalidade direta e inversa, recorrendo à realização de duas tarefas complementares: a manipulação de um *applet* no âmbito da proporcionalidade direta e a realização de uma tarefa de contexto puramente matemático no âmbito da proporcionalidade inversa.

3.2.2 Escolha dos participantes

Na escolha dos quatro estudos de caso, optou-se por relevar o seu envolvimento, permitindo assim uma diversidade maior de perceções e uma compreensão mais detalhada dos impactos positivos (ou não) da introdução da modelação matemática como estratégia para a aprendizagem do conceito de proporcionalidade. Paralelamente e de modo a garantir um grupo heterogéneo, incluíram-se sujeitos de ambos os sexos, com métodos de trabalho diversificados, empenho, autonomia e capacidade de compreensão e raciocínios distintos.

Os alunos estudo de caso escolhidos estiveram originalmente integrados em grupos (cada um deles esteve num grupo distinto), porque o trabalho de grupo fomenta o debate e aprofunda a compreensão (Web et al., 2001; Peres & Pimenta, 2004). Para além disso o *workshop*, a tarefa 1: "Modelação do comprimento de uma vela" e a tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo", foram realizadas em contexto letivo, isto é, em sala de aula.

3.2.3 Tarefas

Nesta investigação foram propostas três tarefas, realizadas por todos os alunos da turma, em sala de aula (**workshop, tarefa 1 e 2**). A sequência com que as mesmas foram aplicadas seguiu o planeamento do tema, mas também uma sequência lógica em termos de conteúdos (começar com a proporcionalidade direta para de seguida explorar a proporcionalidade inversa), quer de metodologias com a introdução da utilização da calculadora gráfica, quer da modelação matemática.

No decorrer da entrevista individual os alunos realizaram adicionalmente mais **duas tarefas** de forma autónoma (uma pequena tarefa em GeoGebra de proporcionalidade direta e uma tarefa de proporcionalidade inversa). Cada um dos estudos de caso participou na resolução de cinco tarefas.

3.2.3.1 *Workshop* realizado no dia 14 de fevereiro (contexto letivo)

Esta tarefa foi realizada numa aula de Cidadania, cedida pela professora da disciplina, onde um dos temas escolhido foi a sustentabilidade ajudando a promover a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Cidadania, demonstrando a importância das conexões matemáticas externas.

O objetivo desta sessão, foi introduzir a forma de utilização dos menus de estatística/listas e gráficos para promover a utilização da calculadora no momento de resolução das tarefas de modelação matemática. As calculadoras gráficas utilizadas foram cedidas pela escola. Foi criado um manual de apoio que foi disponibilizado conjuntamente com o enunciado (Apêndice M).

Em concreto a tarefa dividiu-se em duas partes. Na primeira parte o aluno não foi um elemento tão ativo no processo, pois a resolução foi projetada para ajudar a rever conceitos e ensinar como se usavam os menus quer de estatística/listas, quer dos gráficos. A segunda parte, resolvida de forma autónoma, incluía cinco questões: na primeira os alunos tinham de preencher uma tabela, na segunda solicitava-se uma resolução do modelo, na terceira pedia-se para definir o modelo, na quarta a representação gráfica e na quinta uma interpretação do modelo. Com esta tarefa os alunos usaram a calculadora gráfica e iniciaram a introdução à modelação matemática, com uma tarefa de natureza puramente matemática.

3.2.3.2 Tarefa 1 realizada no dia 21 de fevereiro (contexto letivo)

A tarefa 1: "Modelação do comprimento de uma vela" foi realizada a pares numa aula de Cidadania, cedida pela professora da disciplina, com recurso às calculadoras gráficas disponibilizadas pela escola. Foi novamente partilhado o manual da calculadora gráfica de forma a apoiar os alunos na utilização da mesma.

Esta tarefa consistiu numa experiência em que foi distribuído a cada grupo uma vela de aniversário, que foi sendo acesa em intervalos de 30 segundos por forma a determinar a quantidade de vela ardeida em função do tempo, de modo que os alunos recolhessem dados suficientes, permitindo-lhes

determinar o modelo que explicasse a relação entre as variáveis *tempo* e *quantidade de vela ardidada*. Na preparação desta tarefa houve um cuidado especial com a segurança tendo sido disponibilizados isqueiros mais seguros e criadas bases não inflamáveis para a colocação das velas de modo a prevenir possíveis acidentes durante a recolha dos dados.

Esta tarefa (Apêndice N) caracterizou-se por ser uma tarefa exploratória, de modelação matemática no âmbito da proporcionalidade direta. De acordo com Ponte e Quaresma (2012), a tarefa foi semirreal uma vez que o contexto e as questões incluídas não existem efetivamente no dia a dia do aluno, tendo sido desenvolvidas para fins educativos. No entanto, e como se recolheram dados reais, obtidos por medições, observações e registos, segundo Skovsmose (2000), podem-se classificar, este tipo de tarefas, como reais não obstante o contexto ter sido adaptado.

Relativamente à construção do enunciado, a pergunta inicial correspondia à recolha dos dados reais, aspeto essencial para a realização das restantes questões. Nesta tarefa, as perguntas 2 e 3, foram de resolução do modelo, seguidas da respetiva interpretação da relação e determinação do modelo (4 e 5). Obtido o modelo, os alunos eram convidados a avaliá-lo e interpretá-lo comunicando a solução que tinham obtido (6).

Esta tarefa permitiu não só introduzir este tipo de tarefas exploratórias com recurso à modelação matemática, como também perceber os conhecimentos previamente adquiridos sobre o tema, permitindo paralelamente explorar quer o conceito de constante de proporcionalidade direta, quer a representação de função linear.

3.2.3.3 Tarefa 2 realizado no dia 06 de março (contexto letivo)

A tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo" foi realizada numa aula de Cidadania, cedida pela professora da disciplina, com recurso às calculadoras gráficas disponibilizadas pela escola. Partilhou-se novamente o manual da calculadora gráfica.

Esta tarefa consistiu numa experiência, cujo objetivo era o de relacionar as *dimensões de uma imagem* (recorrendo a uma fita métrica afixada na parede), observada através de um cilindro oco (rolo de cozinha), com as *dimensões do mesmo*. Para a realização desta tarefa formaram-se grupos de 3 a 4 alunos⁶, contribuindo assim para fomentar o debate e por causa do espaço disponível na sala, dado que cada grupo tinha de colar uma fita métrica na parede e distar 1 m da mesma, para proceder à observação e respetivo registo dos valores.

A tarefa 2 (Apêndice O) caracterizou-se, por ser uma tarefa exploratória de modelação matemática no âmbito da proporcionalidade inversa, real, de acordo com Skovsmose (2000) pois recolheram-se dados reais.

⁶ Os alunos foram organizados na sala em função da sua posição. Nas filas em que existem 4 mesas, cada uma com dois alunos, formaram-se grupos de 4 alunos, nas filas em que apenas existem 3 mesas e, portanto, 6 alunos formaram-se dois grupos de 3 alunos.

Relativamente à construção do enunciado, o mesmo foi mais aberto comparativamente com os anteriores, não se tendo colocado a numeração para promover a autonomia. Começou-se por estimular a recolha dos dados reais, aspeto essencial para a realização das restantes questões. De seguida os grupos procederam à interpretação da relação e determinação do modelo. Obtido o modelo, os grupos foram convidados a avaliá-lo e interpretá-lo, comunicando a solução obtida. A tarefa terminava com a resolução do modelo que, entretanto, já tinha sido validado nas fases anteriores.

Propositadamente a ordem das perguntas não foi a mesma entre a tarefa 1 e 2 para estimular o espírito crítico e de raciocínio. Também se optou por não seguir integralmente a ordem de nenhum modelo teórico de modelação matemática, para promover igualmente a criatividade dos próprios alunos.

Com a segunda tarefa pretendia-se introduzir um novo conceito, o da função de proporcionalidade inversa, assim como a sua representação gráfica.

3.2.3.4 Tarefa de proporcionalidade direta realizada no GeoGebra (durante a entrevista)

A tarefa de proporcionalidade direta realizada no GeoGebra (Apêndice L) foi uma tarefa muito simples, cujo objetivo era o de os alunos a partir da manipulação de um *applet*, previamente desenvolvido, observarem o enchimento de um recipiente, enquanto observavam a respetiva representação gráfica desse fenómeno, de modo a perceberem que uma função de proporcionalidade direta é sempre representada por uma reta, que passa sempre na origem do referencial, ou seja, representada por uma função linear. No decorrer da entrevista a investigadora forneceu um *applet* construído no GeoGebra, cujo manuseamento ajudava a estabelecer um paralelismo entre a realidade e a representação gráfica, ou seja, o aluno simulava o enchimento de um prisma quadrangular e em paralelo observava como ficava a representação gráfica dessa função de proporcionalidade direta.

3.2.3.5 Tarefa de proporcionalidade inversa (durante a entrevista)

A tarefa de proporcionalidade inversa (Apêndice L), teve como objetivo perceber o contributo da tarefa 2, para a aprendizagem da manipulação da constante de proporcionalidade inversa, da definição da expressão algébrica da função, e perceber a integração da calculadora gráfica na sua resolução. Na segunda tarefa complementar partilhou-se uma tarefa de contexto puramente matemático, na qual os alunos identificavam e determinavam a constante de proporcionalidade inversa.

Em termos de enunciado a tarefa era constituída por três questões, a primeira em que os alunos começavam por determinar a constante de proporcionalidade inversa, identificando-a e depois tinham que usar a mesma para determinar valores de x ou y em falta. Na questão seguinte os alunos tinham que escrever a expressão algébrica e na última questão indicar como é que a calculadora gráfica tinha sido integrada no seu raciocínio.

3.2.4 Análise documental

Entre os métodos de análise de dados utilizados nas pesquisas de natureza qualitativa destaca-se a análise de conteúdo. Bardin (2004) caracteriza-a como sendo um conjunto de técnicas de estudo dos momentos de comunicação. O objetivo desta análise segundo esta autora é o de, por meio de procedimentos sistemáticos e objetivos, analisar o conteúdo transmitido. Por sua vez, Richardson (1999), refere que, a análise de conteúdo se foca na forma, ou seja, nos símbolos, palavras, temas, expressões, permitindo verificar a "tendência" do texto e a adequação do conteúdo. Uma caracterização desta técnica foi partilhada por Amado (2017) ao afirmar que:

Análise de conteúdo consiste numa técnica central, básica, mais metódica e exigente, ao dispor das mais diversas orientações analíticas e interpretativas (análise fenomenológica, *grounded theory*, etc.), cuja diferenciação depende sobretudo daquilo que se procura em especial, ou, ainda, dos conteúdos que são privilegiados na análise entre muitos outros disponíveis no acervo dos dados (Amado, 2017, p. 300).

De acordo com Bardin (2004) a análise de conteúdo incorpora as seguintes três etapas:

- 1) Pré-análise: antes de iniciar a análise o investigador deve formular as hipóteses e os objetivos; decidir quais os documentos que irá analisar de modo a elaborar os indicadores que fundamentem a interpretação final;
- 2) Descrição analítica: fase em que o investigador analisa o material que recolheu, tendo como base as hipóteses e o referencial teórico. Nesta fase procede-se à codificação, categorização e classificação, permitindo sistematizar as ideias coincidentes e divergentes.
- 3) Interpretação referencial: momento em que o investigador reflete sobre as ideias que sistematizou estabelecendo relações e conexões entre as mesmas.

Assim, indo igualmente ao encontro de Aires (2015) que cita Miles e Huberman e Colás, a análise de dados pode ser encarada como a fase em que se reduz, extrai e tira conclusões, realizando-se uma análise sistemática dos dados em complementaridade com a revisão da literatura, dando assim resposta às questões de investigação.

ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo é incluída a análise dos dados recolhidos, tendo por base as questões de investigação e o objetivo de estudo. Os alunos que participaram no estudo pertenciam à turma principal da professora estagiária, a turma de 9.º ano de escolaridade. Todos os alunos da turma participaram num **workshop** com a calculadora gráfica (Apêndice M) e posteriormente realizaram as **tarefas 1** (Apêndice N) e **2** (Apêndice O). Nos três momentos foram convidados a responder a um questionário em que partilharam a sua perceção sobre as tarefas. Posteriormente, quatro alunos da turma (estudos de caso) responderam a uma entrevista individual aprofundada durante a qual realizaram **duas tarefas adicionais** (Apêndice L).

Assim, este capítulo está organizado em duas secções. Na primeira secção apresenta-se uma visão genérica da atividade dos alunos durante a resolução das tarefas em contexto letivo, por observação da investigadora, com base no diário de bordo e na perceção dos alunos sobre as mesmas, de acordo com as respostas aos questionários implementados e disponibilizados na *Classroom* após cada tarefa. Nesta secção todas as referências aos alunos foram anonimizados sendo os alunos referenciados como aluno 1, aluno 2, aluno 3. A Investigadora foi referenciada com I.

Na segunda, apresenta-se a análise anonimizada dos dados recolhidos através dos **quatro estudos de caso (Confiança, Alegria, Motivação e Serenidade)**. Com base nos dados recolhidos, de modo a dar resposta às questões de investigação, foram criadas três categorias de análise:

- Na **primeira categoria**: Estratégias usadas na realização de cada tarefa.

A base desta categoria de análise é a observação participante registada no diário de bordo, as tarefas de modelação matemática e as respostas fornecidas no decorrer da entrevista. Nesta fase pretendeu-se perceber se existiu (ou não) um paralelismo (total ou parcial) entre a abordagem utilizada pelos alunos para a resolução das tarefas de modelação matemática e o modelo de Anhalt e Cortez (2015) (Figura 2.5).

Pretendeu-se ainda perceber como funcionou a dinâmica do grupo, como foram distribuídas as etapas e quais os contributos individuais de cada um dos elementos.

- Na **segunda categoria**: Aprendizagem da proporcionalidade.

Nesta categoria é analisada a compreensão dos diferentes conceitos: constante de proporcionalidade; expressão analítica da função; representação gráfica da função. Analisou-se o comportamento perante a aprendizagem, os conhecimentos mobilizados e as dificuldades sentidas pelos alunos.

- Na **terceira categoria**: Impacto da utilização da calculadora gráfica.

Pretendeu-se perceber se os alunos percecionam a introdução da calculadora gráfica como um aspeto facilitador da aprendizagem do tema da proporcionalidade. Para dar resposta a esta categoria analisaram-se as respostas dos alunos à parte 2 da tarefa realizada no *workshop*, aos questionários e à entrevista. Com base no referencial teórico proposto por Thomsen et al. (2022) pretendeu-se ainda perceber qual o *tipo de mediação* usada por cada um dos estudos de caso.

4.1 Visão global das tarefas

A turma participou no **workshop** para aprender a trabalhar com a calculadora gráfica no dia 14 de fevereiro.

Esta era uma tarefa para ser realizada a pares, e o registo do diário de bordo da investigadora indica que, na maioria dos grupos, os alunos uniram-se e tentaram resolver a tarefa juntos, comunicando entre eles. A base era a proporcionalidade direta, pelo que, no início da aula a investigadora fez algumas pequenas revisões sobre este tema. As dificuldades dos alunos revelaram-se quer na temática, quer no uso da calculadora. Apesar de ter sido disponibilizado um manual sobre a utilização da calculadora, os alunos tiveram bastantes dúvidas, o que implicou alguma condução na realização da tarefa e a investigadora assumiu um papel de observadora-participante. Para além disso e dada a importância deste primeiro momento, foi dado *feedback* individualizado aos alunos, que será explicitado para cada caso na análise de dados dos estudos de caso.

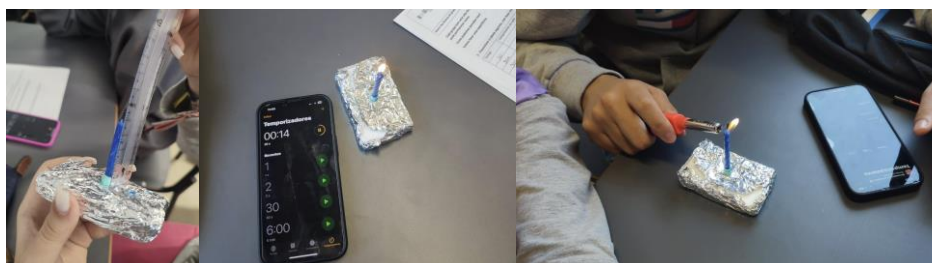
Não obstante, no diário de bordo, a investigadora registou que houve um envolvimento e participação dos alunos da turma. A observação vai ao encontro da opinião transmitida pelos alunos quando responderam ao questionário: 81,8% respondeu que gostaram de usar a calculadora⁷, caracterizando-o como: "A atividade foi muito interessante" ou "gostei bastante". Um aluno disse que não gostou do *workshop* referindo: "Não gostei porque ainda não sei mexer na calculadora e foi a atividade mais seccante que fizemos". Ainda assim, este aluno, quando questionado sobre o que aprendeu referiu que: "A mexer minimamente na calculadora".

Relativamente aos motivos para gostarem de usar a calculadora referiram: "Porque nunca tinha usado, e achei interessante"; "Porque nunca a tinha usado e há respostas que ficam mais claras através desta calculadora porque tem mais opções de símbolos"; "Foi uma experiência nova"; "Porque é muito útil para resolver problemas".

⁷ No questionário administrado através da *Classroom* e após a realização do *workshop*, foi perguntado aos alunos se gostaram de usar a calculadora, sendo as opções de resposta de "sim" ou "não", o que permitiu esta quantificação sobre a percentagem de alunos que afirmaram ter gostado.

Posteriormente, no dia 21 de fevereiro, os alunos realizaram a **tarefa 1: "Modelação do comprimento de uma vela"**.

Figura 4.1 - Momentos da recolha de dados - tarefa 1



(fonte própria)

No diário de bordo, e em comparação com o *workshop*, a investigadora registou que a autonomia dos alunos aumentou. No entanto, ainda houve necessidade de apoiar alunos, o que ocorreu em resposta às solicitações pontuais dos grupos, quando a investigadora percebeu que havia grupos que tinham preenchido mal a tabela com os dados, o que teria impacto na resolução da tarefa, e, quando os alunos perceberam que quando fizeram os quocientes de cada um dos valores de y pelo respetivo valor de x , não obtinham um valor constante, como tinha acontecido na tarefa realizada no *workshop*. A diferença é que esta tarefa implicou a recolha de dados reais, dificultando o desenvolvimento e formulação do modelo, pelo que foi preciso definir uma estratégia, que foi definida conjuntamente com a turma. Assim, dependendo dos resultados abordou-se a possibilidade de os grupos optarem por uma de duas estratégias: quando apenas havia um par ordenado díspar (*outlier*), o mesmo era desconsiderado; alternativamente os alunos podiam calcular o valor médio dos vários quocientes ($\frac{y_i}{x_i}$) e assumiam que a constante seria o valor médio determinado.

Aluno 1: Professora, fizemos os quocientes e deu sempre valores diferentes. Temos proporcionalidade direta? A professora não tinha dito que a divisão tinha de dar sempre o mesmo valor?
I: Sim, é verdade, a ideia é essa, mas neste caso vocês recolheram os dados reais e existem pequenos erros de medição. Por exemplo, havia velas com mais cera no pavio e por isso ardeu menos quantidade de vela na primeira vez. Outras vezes a vela também não ardia uniformemente.

Aluno 2: Então que fazemos?

I: Lembra-se da primeira matéria que demos este ano? Quando queriam encontrar uma medida, que representasse por exemplo as idades dos alunos na turma, o que faziam?

Aluno 3: A média?

I: Sim, uma das hipóteses é determinar o valor médio dos valores que já calcularam e esse valor ser a vossa constante. Dúvidas até aqui?

Se não têm dúvidas ainda podem fazer outra coisa. Imaginem que queriam saber a média de idades da vossa turma e tinham um colega que tinha 20 anos, isso iria alterar muito a média de idades, certo?

Todos: Sim!

I: Se estiverem perante a situação que apenas um dos valores recolhido é estranho, ou seja, que apenas um dos valores da coluna do x é estranho, podem excluir esse par ordenado, para não influenciar os dados.

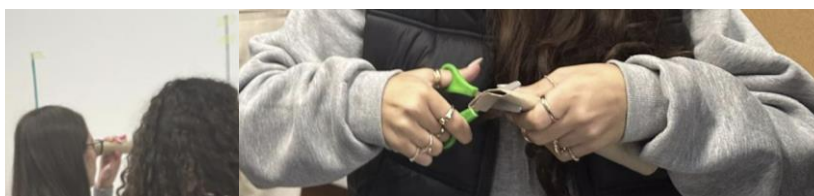
A última intervenção foi na exploração da expressão algébrica ($f(x) = ax$) da qual alguns alunos não se recordavam.

Para **compreender a percepção dos alunos**, no decorrer do questionário foi solicitado aos alunos que descrevessem a tarefa e de seguida incluem-se algumas das descrições obtidas: "Fiz uma experiência onde contei os cm que a vela ia derretendo ao longo de 30s, 4 vezes seguidas e depois elaborei uma ficha de trabalho." ; "Acendemos uma vela de 30 em 30 segundos para ver quanto ela queimava, em seguida tínhamos que medir com uma régua, ao fazermos isso estávamos a trabalhar com a calculadora para depois fazermos a representação no gráfico." ; "Acendemos uma vela 4 vezes e descrevemos o que aconteceu numa folha dada pela professora."

Em termos de aspetos negativos associados à realização da tarefa, dois alunos mencionaram "não ter acabado tudo".

No dia 06 de março, os alunos da turma realizaram a **tarefa 2: " Aproximando a Matemática através de um canudo "**.

Figura 4.2 - Momentos da recolha de dados - tarefa 2



(fonte própria)

Apesar desta tarefa introduzir uma temática nova, foi aquela em que de acordo com os registos da investigadora no diário de bordo os alunos foram mais autónomos, ou seja, foi nesta tarefa em que a abordagem da investigadora foi essencialmente não participante. Espontaneamente os alunos no decorrer da recolha de dados perceberam que se estava perante um caso de proporcionalidade, mas neste uma grandeza aumentava enquanto a outra diminuía, na mesma proporção, ou seja, por exemplo se uma das grandezas duplicasse, a outra diminuiria para metade.

Assim que esta relação foi percecionada pelos alunos promoveu-se um momento de debate, que se transcreve de seguida, tendo os alunos concluído que isto seria outro tipo de relação de proporcionalidade, que a investigadora indicou que se chamava de inversa porque contrariamente ao que acontecia na proporcionalidade direta em que as grandezas variavam em sentidos iguais, neste caso variavam de forma proporcional, mas em sentidos opostos.

I: Como é que acham que se calcula a constante de proporcionalidade neste caso?

Aluno 1: Então se na direta é $a = \frac{y}{x}$ aqui se calhar é $a = \frac{x}{y}$

Aluno 2: Eu já tentei isso e não dá...

I: Vamos partir da lógica da constante de proporcionalidade direta e pensar que se neste caso é inversa então pode ser porque a operação entre as variáveis na proporcionalidade inversa é a inversa da proporcionalidade direta...

Aluno 3: então multiplica-se o $x \times y$?

I: Sim, é assim que se determina a constante de proporcionalidade inversa.

Entretanto, como os dados recolhidos foram reais o resultado da multiplicação de cada um dos $x \times y$ não foi constante. Esta questão já tinha sido debatida previamente na turma, como previamente exposto aquando da resolução da tarefa 1 relativamente à determinação do quociente de y por x , tendo sido encontradas estratégias para a ultrapassar e que passaram por desconsiderar um par ordenado de valores, ou, determinar a média do quociente das grandezas. Por isso houve de imediato alunos na turma a questionar se mais uma vez poderiam usar a média, neste caso da multiplicação dos valores, para construírem a expressão algébrica do modelo.

A Investigadora não interferiu na obtenção da expressão matemática para deixar o tema à exploração dos alunos. Este aspeto é explorado em detalhe nos quatro estudos de caso.

No final da tarefa e à semelhança do que foi feito anteriormente, solicitou-se aos alunos que descrevessem a mesma: "Tínhamos um rolo de papel e uma fita métrica na parede, demos um metro de distância e vimos o campo de visão que o rolo ocupava. E a cada vez que víamos tirávamos 2 cm, acho eu. Depois resolvemos questões."; "Analisar a área observada com diferentes tamanhos do rolo e ver que quanto menor o comprimento do rolo, maior o campo de visão".

Ao nível dos aspetos positivos alguns dos aspetos realçados foram: "Reparei que nem toda a gente vê o mesmo."; "Aprendi mais sobre proporcionalidade inversa."; "Aprender mais sobre a proporcionalidade".

Ao nível das dificuldades, não foram identificados no questionário aspetos que relevassem para a aprendizagem do tema, tendo a maioria dos alunos indicado que não tinham sentido nenhuma dificuldade.

4.2 Estudos de Caso

Como referido anteriormente para recolher informação mais detalhada, de forma a dar resposta às questões de investigação foram realizadas entrevistas individuais a **quatro estudos de caso**, que serão de seguida analisados em função das três categorias pré-definidas.

Os nomes utilizados para referenciar cada um dos estudos de caso são fictícios e representam algumas das emoções positivas (**Confiança, Alegria, Motivação e Serenidade**). As emoções positivas contribuem para a capacidade de uma pessoa conseguir abordar os problemas de várias perspectivas, com uma visão mais ampla, melhorando a construção abstrata o que ajuda a desenvolver o raciocínio essencial na Matemática e, contribuindo para a construção de novas aprendizagens conforme se pretende com esta investigação.

A Investigadora é referenciada com I.

4.2.1 Estudo de caso 1: Confiança

O aluno Confiança (C) caracteriza-se por ser um aluno participativo, empenhado e que gosta da disciplina, conforme assume na sua entrevista:

I: Fala-me sobre a tua relação com a disciplina de Matemática.

C: Gosto, gosto de Matemática e de Ciências.

É um aluno que estuda autonomamente, não de uma forma regular, mas mencionou na entrevista que iniciava o seu estudo para um teste com cerca de uma semana e meia de antecedência. Realizou quase sempre os trabalhos de casa solicitados. Em termos de observação do seu comportamento ao longo de todo o ano letivo, revelou-se um aluno interessado com aptidão para resolver situações novas.

O primeiro momento de recolha de dados foi o **workshop de calculadora gráfica** onde o grupo no qual estava inserido o Confiança resolveu autonomamente a tarefa. O *feedback* transmitido após a realização dessa tarefa foi o seguinte:

- necessidade de melhorar a forma como apresentava o raciocínio (1 e 5) pois não explicaram o raciocínio subjacente à resposta;

Figura 4.3 - Workshop: análise das respostas às questões 1 e 5 - grupo do Confiança

1. Usando a informação disponibilizada no enunciado preencham a seguinte tabela:

TEMPO (minutos)	0	1	2	3
NÍVEL DA ÁGUA (mm)	0	6	12	18

5. Comentem a seguinte afirmação: "Se o recipiente tem 15 centímetros de altura, demorará de mais 30 minutos a encher".

Falso demorara 25 minutos

(fonte própria)

- a expressão algébrica deve ser apresentada recorrendo às variáveis do enunciado (3);

Figura 4.4 - Workshop: expressão algébrica - grupo do Confiança

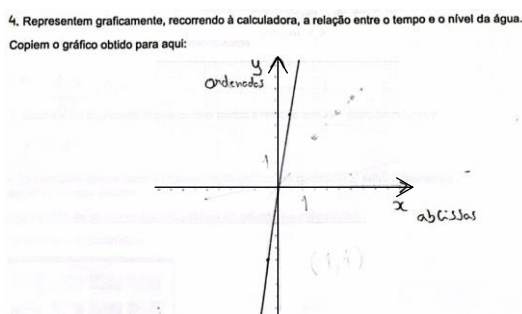
3. Qual será a expressão algébrica que traduz esta relação?

$y = 6x$

(fonte própria)

- nos eixos devem-se colocar as variáveis do enunciado e, o gráfico (4) só deveria ter sido desenhado para valores de *tempo* > 0, pois o *tempo* nunca é um valor negativo. O gráfico apresentado foi uma transposição do obtido na calculadora gráfica, atingindo-se os objetivos propostos.

Figura 4.5 - *Workshop*: gráfico - grupo do Confiança



(fonte própria)

Apesar da necessidade de melhorar o nível do rigor matemático na apresentação do raciocínio, na sua resposta ao questionário, o Confiança valorizou a utilização da calculadora desde o *workshop*, tendo-a caracterizado no questionário disponibilizado após a realização do mesmo, da seguinte forma: "Foi uma experiência divertida, porque é uma atividade fora do comum", referindo ainda que a calculadora ajudou "Na construção do gráfico".

Analisemos agora em detalhe os procedimentos adotados na **tarefa 1: "Modelação do comprimento de uma vela"**. Começemos por perceber se existe algum paralelismo entre a abordagem usada e o modelo de Anhalt e Cortez (2015). O modelo teórico adotado estabelece como primeira fase: *análise da situação ou problema*. O grupo no qual estava integrado o Confiança, determinou inicialmente a quantidade da vela ardida, não de forma acumulada, mas em função do comprimento imediatamente anterior, ou seja, não abordou corretamente o problema.

Figura 4.6 - Tarefa 1: tabela originalmente preenchida - grupo do Confiança

Tempo	Comprimento da vela	Quantidade de vela ardida
0s	5,6 cm	0 cm
30s	4,8 cm	0,8 cm
60s	4,5 cm	0,3 cm
90s	4,2 cm	0,3 cm
120s	4,0 cm	0,2 cm

(fonte própria)

Terminado o preenchimento original da tabela, o passo seguinte seria: *desenvolver e formular o modelo*. Quando iniciaram este processo perceberam que a quantidade ardida não era sempre a

mesma "nos primeiros 30 segundos a vela ardeu 0,8 cm, mas a seguir a vela ardeu consideravelmente menos".

Foram os elementos deste grupo que primeiramente se aperceberam deste facto, que levou a uma paragem na tarefa e a um debate com a turma para se encontrarem soluções conforme explicado na visão geral da tarefa 1. Como referido anteriormente uma das hipóteses que se considerou foi a de se calcular o valor médio dos quocientes das duas grandezas. Este grupo apesar de usar a média, usou uma estratégia diferente da discutida em sala de aula, ou seja, não determinaram a média dos quocientes, mas alternativamente a média da quantidade de vela ardida como se observa de seguida:

Figura 4.7 - Tarefa 1: desenvolvimento do modelo - grupo do Confiança

$$\frac{0,8 + 0,3 + 0,3 + 0,2}{4} = 0,4 \quad \text{em média a vela arde } 0,4 \text{ cm por } 30\text{s}$$

(fonte própria)

Usaram o valor da média obtido para *formular o modelo* conforme se mostra de seguida:

Figura 4.8 - Tarefa 1: formalização do modelo - grupo do Confiança

$$y = 0,4x$$

(fonte própria)

De seguida, e com vista à *resolução do modelo* os alunos deveriam ter sido capazes de indicar, a porção de vela que ardeu após 4 minutos. O grupo do Confiança não recorreu à expressão encontrada, mas duplicou os valores de quantidade ardida que tinha originalmente obtido, para os 120 segundos:

Figura 4.9 - Tarefa 1: tentativa de resolução do modelo - grupo do Confiança

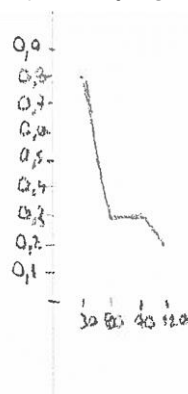
$$0,8 \times 2 + 0,3 \times 2 + 0,3 \times 2 + 0,2 \times 2 = 3,2$$

(fonte própria)

Na tarefa esta questão era anterior à construção do modelo, pelo que é perceptível que a resolução não tenha ido ao encontro da mobilização de conhecimentos matemáticos anteriores, que passavam pela substituição do x por 4. Ainda assim, e uma vez que o grupo considerou todos os valores, incluindo o primeiro que era um *outlier*, para o cálculo da média, a resposta, apesar de precisar de ser representada numa linguagem matemática mais adequada, equivale à resposta que teriam obtido se tivessem usado a expressão algébrica.

De seguida, houve uma tentativa de fazer o gráfico na calculadora, mas dados os valores originalmente recolhidos não conseguiram, tentando fazer uma representação manual que imediatamente perceberam que não estava a fazer sentido, pelo que partilharam as suas dúvidas.

Figura 4.10 - Tarefa 1: primeira tentativa de representação gráfica do modelo - grupo do Confiança



(fonte própria)

Nesta questão ficaram evidenciados alguns conhecimentos deficientes de alguns conceitos matemáticos, pois nem sequer foi incluído o par ordenado $(0,0)$ na representação gráfica. No entanto, importa destacar que os próprios alunos, apesar de não saberem o que estava errado, refletiram sobre a solução e perceberam que existia algum erro no que tinham feito, retornando ao ponto de verificar a informação inicial, momento em que pediram a intervenção e apoio da investigadora.

C: Professora isto está esquisito. E na calculadora deu erro.

I: Deixem-me ver os dados que recolheram. Verifiquem a quantidade de vela ardida e expliquem-me o que fizeram.

C: Subtraímos

I: Reparem no que fizeram no tempo, foram acumulando o tempo que passou, certo? Então o que acham que devem fazer na quantidade de vela ardida?

C: Então temos que subtrair e somar?

Após a intervenção da investigadora e da explicação sobre qual o problema na tabela, os dados foram corrigidos conforme se observa na Figura 4.11.

Figura 4.11 - Tarefa 1: tabela revista - grupo do Confiança

Tempo	Comprimento da vela	Quantidade de vela ardida
0s	5,6 cm	0 cm
30s	4,8 cm	0,8 cm 0,3
60s	4,5 cm	0,3 cm 0,6
90s	4,2 cm	0,3 cm 0,9
120s	4,0 cm	0,2 cm 1,1

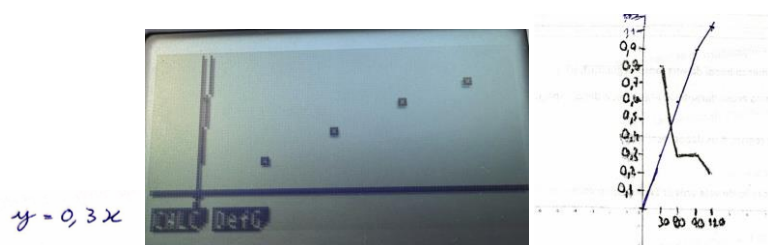
(fonte própria)

Ao analisar-se a tabela anterior verifica-se que o grupo excluiu o *outlier* (quantidade de vela ardida de 0,8 cm) e assumiu que na primeira iteração a vela se não fosse o pavio teria ardido apenas 0,3 cm.

I: Como é que obtiveram o 0,3 que está à frente do 0,8 cm?

C: Excluimos os 0,5 cm que eram do pavio, é como se a vela só medisse 5,1 cm e assim faz mais sentido.

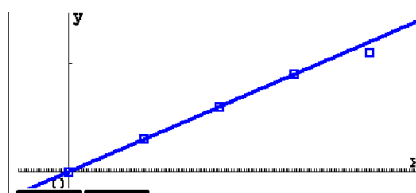
Figura 4.12 - Tarefa 1: expressão algébrica e gráfico final - grupo do Confiança



(fonte própria)

Com base nos dados revistos da quantidade de vela ardida, o grupo do Confiança chegou a uma nova expressão que introduziram na calculadora. De seguida foi necessário *interpretar a solução e tirar conclusões*, *validar as conclusões* e de seguida *comunicar a solução*. Era a primeira vez que o grupo analisava um modelo e considerou-o "um bom modelo", apesar de esta interpretação não ser correta, e a reta estar muito desajustada dos dados, pois o valor que assumiram: 0,3 corresponde ao valor mais frequente em termos de quantidade de vela ardida entre interações, e não ao valor do quociente da *quantidade de vela ardida* em função do *tempo*. Percebe-se assim que os alunos não verificaram se matematicamente estava tudo correto. Usando os valores da tabela final este grupo deveria ter obtido a expressão: $y = 0,01x$, e este modelo ajustaria bem os dados como se observa de seguida:

Figura 4.13 - Tarefa 1: expressão algébrica e gráfico final - investigadora com base nos dados do grupo do Confiança



(fonte própria)

Durante a entrevista foi solicitado ao Confiança, que refletisse sobre os conhecimentos prévios que tinha sobre **proporcionalidade direta** antes da realização da tarefa 1, e quais tinha adquirido aquando da realização da entrevista.

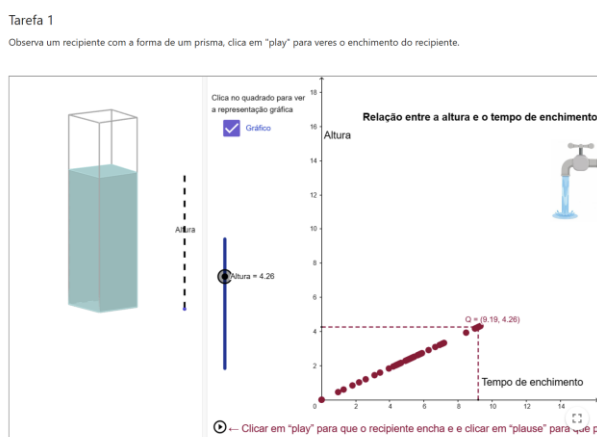
O Confiança referiu que: "Lembrava-me muito por alto, não me lembrava da matéria aprofundada". "Aprendi sobre a proporcionalidade direta mais do que sabia."

Em concreto o aluno identificou as seguintes aprendizagens: "Como se fazia a função"; "A representação gráfica foi uma novidade para mim".

O facto de o Confiança referir que a representação gráfica da função de proporcionalidade direta tinha sido uma novidade corrobora as dificuldades conceptuais percecionadas ao nível do domínio deficiente de alguns conceitos matemáticos. Ao refletir sobre as dificuldades, o Confiança disse ainda que: "As maiores dificuldades foram na matéria que já tinha dado e da qual já não me lembrava assim tão bem."

Uma vez, que no decorrer da tarefa 1: "Modelação do comprimento de uma vela", se denotou que alguns alunos não estavam familiarizados com o gráfico da função de proporcionalidade direta (e que o mesmo era sempre representado por uma reta, que passava sempre na origem), na entrevista realizou-se uma pequena tarefa no GeoGebra que ajudou a consolidar esses conhecimentos. Esta tarefa apesar de pouco ativa, permitiu aos alunos, visualizar do lado esquerdo o enchimento de um recipiente em forma de prisma e no lado direito, como é que esse comportamento se representa em termos de função.

Figura 4.14 - Entrevista: tarefa em GeoGebra - Confiança



(fonte própria)

Relativamente a esta tarefa o Confiança afirmou que: "Gostei, este gráfico interativo ajudou-me mesmo a perceber porque nos está a mostrar tudo ao mesmo tempo, está-nos a mostrar o recipiente a encher e quanto mais enche mais sobe a altura e a linha vai-se formando sempre em reta, porque vai enchendo sempre à mesma velocidade."

Analisemos agora em detalhe os procedimentos adotados na **Tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo"**.

Na fase inicial, relativa à *análise da situação ou problema*, o grupo do Confiança preencheu corretamente a tabela, conforme se observa de seguida na Figura 4.15.

Figura 4.15 - Tarefa 2: tabela com os dados recolhidos - grupo do Confiança

Comprimento do rolo em cm (x)	20	18	16	14	12
Comprimento visualizado da fita em cm (y)	23	28	33	38	43

(fonte própria)

Este não foi o primeiro grupo a perceber e partilhar a relação, mas depois de ser debatida em sala, conforme exposto na visão geral da tarefa 2, interiorizou-a da seguinte forma:

Figura 4.16 - Tarefa 2: descrição da relação entre o comprimento do rolo e o comprimento visualizado da fita - grupo do Confiança

Como descrevem essa relação por palavras?
quanto menor o comprimento do rolo maior o angular de visão. Estamos perante a proporcionalidade inversa.

(fonte própria)

Esta explicação evidencia que a percepção do Confiança sobre as grandezas inversamente proporcionais não está correta, pelo que no decorrer da entrevista a investigadora explicou o conceito de proporcionalidade inversa ao aluno, ou seja, de que no caso da proporcionalidade inversa, a variação entre as duas grandezas era contrária, mas proporcional (uma aumentava na mesma proporção, em que a outra diminuía).

Para *desenvolverem e formularem o modelo*, começaram por multiplicar cada valor de x pelo y respetivo e depois determinaram a média, usando-a como constante de proporcionalidade, conforme tinha sido debatido previamente com a turma:

Figura 4.17 - Tarefa 2: determinação da constante de proporcionalidade - grupo do Confiança

Comprimento do rolo em cm (x)	20	18	16	14	12
Comprimento visualizado da fita em cm (y)	23	28	33	38	43

$15 - x$
 $x = 22,5$
 $15 \leftarrow 18 \leftarrow 460 + 504 + 528 + 532 + 516 = 508$
 5

(fonte própria)

No decorrer da entrevista foi revisitada esta tarefa identificando-se os aspetos a melhorar relativos à apresentação do raciocínio utilizado para a determinação da constante de proporcionalidade.

O modelo foi definido da seguinte forma:

Figura 4.18 - Tarefa 2: modelo definido (expressão algébrica) - grupo do Confiança

$$f(x) = \frac{508}{x} \rightarrow \text{média dos multiplicados}$$

(fonte própria)

A forma genérica da constante de proporcionalidade inversa foi, como explicado na visão global da tarefa 1 e 2, debatida com a turma, por um lado porque era necessário avaliar a possibilidade de exclusão de *outliers* e de determinação da média, por outro, porque se estava a introduzir um novo conceito relativo à determinação da constante de proporcionalidade inversa. No entanto, chegarem à expressão algébrica ficou a cargo de cada grupo.

Como se observa de seguida, não houve uma correta *resolução do modelo*, usando a expressão algébrica. Contrariamente ao que ocorreu na tarefa 1, nesta tarefa o grupo já tinha a expressão algébrica da função, mas não a utilizaram para resolver a questão seguinte, o que demonstra dificuldades conceptuais e de relação do modelo algébrico com o contexto real.

Figura 4.19 - Tarefa 2: tentativa de resolução do modelo - grupo do Confiança

Para terminar: Qual deverá ser o comprimento do rolo de papel de cozinha para que se consiga visualizar 15cm de fita na parede?

$$\begin{array}{l} 11 \rightarrow 22 \\ 15 \rightarrow x \end{array} \quad x = 22,5$$

(fonte própria)

Este grupo nesta fase já não demonstrava nenhuma dificuldade ao nível do manuseamento da calculadora, pelo que procedeu à correta representação gráfica dos pontos, da expressão algébrica e consequente *interpretação da solução, validação das conclusões e comunicação das conclusões*, assumindo que era um bom modelo porque a sua representação gráfica ajustava-se ao conjunto de pontos recolhidos (Figura 4.20).

Figura 4.20 - Tarefa 2: interpretação, validação e comunicação da solução - grupo do Confiança



Sim, é um bom modelo, porque ~~o modelo~~ a função que defini passei pelos pontos no gráfico, só o último ponto está um pouco errado.

(fonte própria)

À semelhança do que tinha sido feito relativamente à proporcionalidade direta também na **proporcionalidade inversa** o Confiança resolveu uma pequena tarefa durante a entrevista. Esta tarefa (enunciado na parte III do Guião da Entrevista - Apêndice L) foi feita após a sistematização da tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo", tornando-se evidente o impacto positivo da modelação matemática para as aprendizagens deste tema.

Figura 4.21 - Entrevista: determinação da constante de proporcionalidade inversa - Confiança

Número de rifas (n)	100	150	300	?	?
Preço de cada rifa, em euros (p)	18	?	?	1,80	1,50

$100 \times 18 = 1800$
 $150 \times ? = 1800 \Rightarrow ? = \frac{1800}{150} = 12$
 $300 \times ? = 1800 \Rightarrow ? = \frac{1800}{300} = 6$
 $1,80 \times ? = 1800 \Rightarrow ? = \frac{1800}{1,80} = 1000$
 $1,50 \times ? = 1800 \Rightarrow ? = \frac{1800}{1,50} = 1200$

O que concluíste? Qual é a constante de proporcionalidade inversa?
 A constante de proporcionalidade inversa é 1800

(fonte própria)

Quando foi solicitado ao Confiança que completasse a tabela explicando o raciocínio, ele fê-lo corretamente, conforme se observa na Figura 4.21, determinando a constante de proporcionalidade inversa e detalhando algebricamente os passos para a obtenção dos valores em falta.

Figura 4.22 - Entrevista: formulação do modelo - Confiança

Escreve p como função de n .

$$f(n) = \frac{1800}{n}$$

(fonte própria)

O aluno resolveu corretamente o desafio que lhe foi proposto no decorrer da entrevista sem qualquer intervenção da investigadora.

Posteriormente o mesmo exercício de reflexão foi feito relativamente às novas aprendizagens adquiridas e sobre as quais o Confiança refere:

"Sobre a proporcionalidade inversa foi tudo novo, aprendi tudo."; "A constante, a função e a representação gráfica".

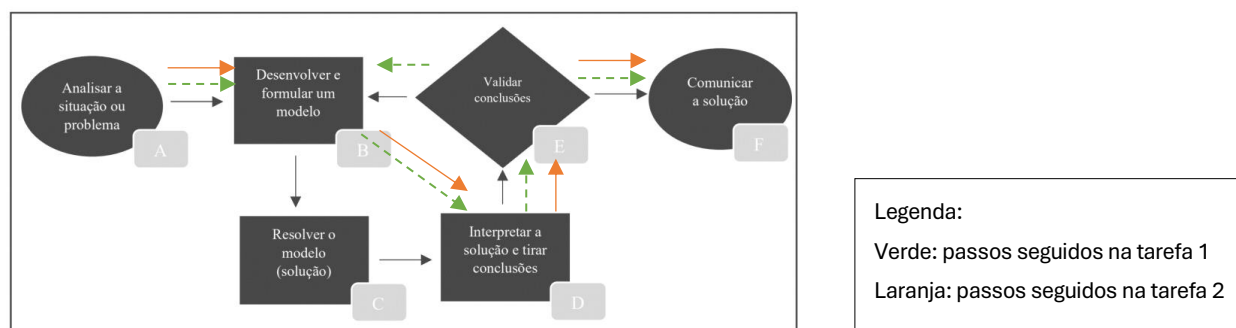
4.2.1.1 Considerações Finais

Quando questionado sobre a **estratégia de abordagem das tarefas** adotada, referiu que esta obedeceu aos seguintes passos: "começamos por ver primeiro o enunciado", depois "recolhemos os dados" e, "com os valores que tínhamos, descobrimos a resposta ao que se estava a perguntar".

A abordagem adotada como estratégia para a resolução das tarefas 1 e 2 vai ao encontro da defendida por Boavida et al. (2008) relativa à resolução de problemas, que se aplica nesta situação dado o paralelismo entre as competências que são necessárias desenvolver aquando da resolução de problemas e durante o processo de modelação matemática.

Em termos de cumprimento das fases do modelo de Anhalt e Cortez (2015), e conforme sintetizado na Figura 4.23, em ambas as tarefas o grupo no qual se encontrava integrado o Confiança não cumpriu corretamente o passo *resolver o modelo (solução)*. Para além disso, e conforme se observa na Figura 4.23 para a tarefa 1, o modelo foi mal formalizado pelo que as restantes etapas apesar de terem sido realizadas, ficaram a tracejado pois na *interpretação e validação* o grupo deveria ter percebido a necessidade de rever novamente o que tinha feito, formulando um novo modelo. Na tarefa 2, as etapas foram cumpridas de forma correta, tendo o grupo obtido um modelo ajustado aos dados recolhidos.

Figura 4.23 - Resumo do processo de modelação matemática - Confiança



(fonte própria)

Relativamente às dificuldades observadas, as mesmas seguem a linha das que são expectáveis, e realçadas por Tavares (2000), com maior ênfase nas comunicacionais e nas conceptuais, ou seja, denota-se alguma dificuldade inicial em traduzir o problema para a linguagem matemática, assim como alguma dificuldade em identificar os conceitos matemáticos a usar numa dada situação e algum domínio deficiente dos conhecimentos matemáticos.

O Confiança integrou a **calculadora gráfica** nas tarefas com uma abordagem pragmática, pois considerou que a mesma contribuiu para a resolução do problema e facilitação dos cálculos algébricos:

Figura 4.24 - Mediação Pragmática - Confiança

Recorreste à calculadora? Como é que a calculadora te ajudou?
Ajudou-me a descobrir a constante de proporcionalidade inversa
e a fazer as divisões para descobrir o nº de rufos e o preço de cada rufos.

(fonte própria)

Mencionou ainda na entrevista que a calculadora "ajuda a perceber melhor e conseguimos resolver os problemas mais rápido e somos mais eficazes na resolução de problemas com a calculadora".

Assim, considera-se que este aluno também usou a calculadora com uma *mediação epistémica* porque o Confiança refere que a calculadora o ajudou a aprofundar a compreensão.

O Confiança referiu ainda, nos questionários a que respondeu a seguir a cada tarefa, os aspetos que mais gostou: "Gostei de usar a calculadora" (*workshop*); "aprendi a relacionar valores da tabela com o gráfico" (tarefa 1); "aprendi a fazer gráficos" (tarefa 2). Relativamente à tarefa 2, o Confiança referiu ainda, no decorrer da entrevista, que "a calculadora me ajudou a ver se era um bom modelo".

Das afirmações do Confiança percebe-se que este aluno, usou ainda a calculadora com uma *mediação justificativa*, de forma a perceber a qualidade de cada um dos modelos definidos.

A sua integração da utilização da calculadora gráfica foi positiva e contribuiu para auxiliar, compreender e validar.

O Confiança afirma que gostou bastante de todas as tarefas que realizou durante a recolha de dados no âmbito desta investigação, considerando que as mesmas contribuíram para aprendizagem ("Definitivamente estas aulas mais práticas ajudaram-me mais a saber do que se a professora chegasse ali e escrevesse no quadro."). Ainda assim destaca a tarefa 1 como a mais interessante, desafiadora e divertida ("Gostei das aulas terem sido muito práticas, gosto deste tipo de aulas e porque tivemos um pouco de liberdade para descobrir e mexer na calculadora").

Em termos de dificuldades este aluno diz que sentiu algumas dificuldades iniciais na proporcionalidade inversa porque era um tema que nunca tinha sido abordado anteriormente, mas diz que "definitivamente a tarefa ajudou" a introduzir este tema porque como "é uma aula mais descontraída temos tendência a ficar mais atentos e a tentar chegar lá por nós".

Não obstante, as resoluções apresentadas pelo Confiança terem alguns aspetos a melhorar, revelaram compreensão e capacidade de abstração independentemente do problema em causa. Este aluno demonstrou capacidade de questionar os resultados obtidos. Notou-se facilidade no aluno em comunicar, em se esforçar, apesar de ser necessário trabalhar ao nível da comunicação matemática.

4.2.2 Estudo de caso 2: Alegria

A aluna Alegria (A), é uma aluna com um desempenho satisfatório na disciplina, que manifesta algumas dificuldades na compreensão e consolidação das aprendizagens.

I: Eu gostava de perceber como é a tua relação com a Matemática.

A: Eu prefiro os... não gosto muito das equações, matemática não é uma matéria que goste muito, nunca fui muito boa, nunca consegui compreender algumas coisas, mas depois os professores ajudam e eu consigo entender. Eu gosto da matéria de desenhar, mas... é isso.

I: Como é que costuma ser a tua rotina de estudo?

A: Eu faço os trabalhos de casa e tento, mas sozinha é confuso, às vezes estudo com a (nome da colega). E a mãe achou que era melhor ter explicações, comecei agora, por causa da prova e assim...

A Alegria referiu ter dificuldades em estudar sozinha, admitindo que apenas consegue estudar quando acompanhada por uma colega. Esta aluna faz sempre os trabalhos de casa, é participativa em sala de aula, mas em momentos de avaliação sumativa muitas vezes não consegue refletir os conhecimentos que parece ter adquirido ao longo das aulas, por falta de trabalho de consolidação da matéria em casa. Para tentar ultrapassar estas dificuldades no decorrer do ano letivo iniciou um apoio externo, explicação, de modo a manter um acompanhamento mais constante das aulas e a preparar-se para a prova final de 9.º ano.

O primeiro momento de recolha de dados foi o **workshop de calculadora gráfica** onde o grupo da Alegria resolveu autonomamente uma tarefa, ao fim da qual foi partilhado o *feedback* seguinte:

- nas respostas às questões 1 e 2 era necessário terem explicado o raciocínio utilizado;

Figura 4.25 - Workshop: análise das respostas às questões 1 e 2 - grupo da Alegria

1. Usando a informação disponibilizada no enunciado preencham a seguinte tabela:

TEMPO (minutos)	0	1	2	3
NÍVEL DA ÁGUA (mm)	0	6	12	18

2. Qual será o nível de água no recipiente ao fim de 1 minuto? E ao fim de 15 minutos?

1 min = 6 mm
15 min = 90 mm

(fonte própria)

- a expressão algébrica estava correta;

Figura 4.26 - *Workshop*: expressão algébrica - grupo da Alegria

3. Qual será a expressão algébrica que traduz esta relação?

$$\frac{n}{t} = 6 \quad / \quad n = 6t \quad y = 6x$$

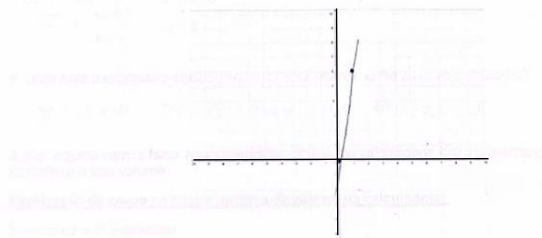
(fonte própria)

- nos eixos devem-se colocar as variáveis respetivas e, o gráfico (4) só deveria ter sido desenhado para valores de *tempo* > 0, pois o *tempo* nunca é um valor negativo. O gráfico apresentado foi uma transposição do obtido na calculadora atingindo-se os objetivos propostos.

Figura 4.27 - *Workshop*: gráfico - grupo da Alegria

4. Representem graficamente, recorrendo à calculadora, a relação entre o tempo e o nível da água.

Copiem o gráfico obtido para aqui:



(fonte própria)

Relativamente à opinião sobre a introdução da calculadora gráfica e sobre as contribuições positivas e as dificuldades sentidas na sua utilização, a Alegria respondeu no questionário a seguir ao *workshop* que "gostei de usar a calculadora porque aprendi a usá-la e ajudou-me nos gráficos".

Durante a entrevista disse ainda que:

A: Estou a começar a aprender a usar a parte gráfica da calculadora, no início foi... ah... talvez difícil pôr naquela tabelinha, mas nada de mais. Mas ajuda-me a ver melhor.

I: Como?

A: Está aqui o gráfico na calculadora e é só nós fazermos no papel o que está na calculadora.

Analisemos agora em detalhe os procedimentos adotados na **Tarefa 1: "Modelação do comprimento de uma vela"**. O primeiro aspeto é o de perceber se existe algum paralelismo entre a abordagem usada e o modelo de Anhalt e Cortez (2015). O modelo teórico adotado estabelece como primeira fase: *análise da situação ou problema*.

O grupo no qual estava integrada a Alegria, preencheu inicialmente a tabela da seguinte forma:

Figura 4.28 - Tarefa 1: tabela original - grupo da Alegria

Tempo	Comprimento da vela	Quantidade de vela ardida
0s	5,5	0
30s	4,5	0,2
30s	4,3	0,2
30s	4,1	0,2
30s	3,9	0,2

(fonte própria)

Esta tabela revela dificuldade na compreensão da situação, e na identificação de aspetos essenciais quando, o grupo não percebeu que quer o *tempo* quer a *quantidade de vela ardida* tinham de ser cumulativos. O grupo procedeu à correção da tabela após intervenção da investigadora.

Figura 4.29 - Tarefa 1: tabela corrigida - grupo da Alegria

Tempo	Comprimento da vela	Quantidade de vela ardida
0s	5,5	0
0,5 30s	4,5	0,2 1
1 60s	4,3	0,2 1,2
1,5 90s	4,1	0,2 1,4
2 120s	3,9	0,2 1,6

(fonte própria)

Na sequência *formalizaram o modelo* recorrendo à expressão algébrica $f(x) = 0,2x$, conforme observado na Figura 4.30.

Figura 4.30 - Tarefa 1: formalização do modelo - grupo da Alegria

5 - Indiquem uma expressão algébrica que modele [traduza] esta situação.

$$f(x) = 0,2x$$

(fonte própria)

Denotam-se dificuldades no grupo da Alegria relativamente ao desenvolvimento do modelo. O grupo interpretou a constante de proporcionalidade como sendo a quantidade de vela ardida e não o quociente entre a *quantidade de vela ardida* e o *tempo* que passou. Durante a entrevista foi revista esta etapa com a Alegria:

I: Alegria, tu referes que existe uma relação de proporcionalidade direta entre o tempo e o comprimento da vela. Porque é que achas que existe essa relação?

A: Porque ardia sempre 0,2 cm todas as vezes.

I: Recordas-te como é que se determina a constante de proporcionalidade direta?

A: ... ah... divide-se o y pelo x.

I: Certo. E neste caso, a que variável é que corresponde o y e a que variável é que corresponde o x? O y corresponde ao tempo ou à quantidade de vela ardida?

A: À quantidade.

I: Então, podes usar a calculadora, peço-te que faças as contas?

A: Para todas as linhas?

I: Para todas menos para a primeira que corresponde ao par ordenado (0,0), porque não se divide 0 por 0.

A: 1 a dividir por 0,5 dá 2; a seguir dá 1,2; 0,93333; 0,8

I: Não obtiveste um valor constante porque são dados reais, então neste caso que valor é que ias usar, ainda te recordas do que falamos na aula?

A: A média?

I: Sim

A: ah então é 1,23

I: Certo, então assim sendo como é que fica o modelo?

A: $f(x) = 1,23x$

Com vista à *resolução do modelo* os alunos deveriam ser capazes de indicar, a porção de vela que ardeu após 4 minutos. O grupo da Alegria não recorreu à expressão, fez uma tentativa errada de duplicar os valores de quantidade de vela ardida, que tinha originalmente obtido (porque os valores não foram corretamente transcritos a partir da tabela, tendo colocado um 0,1 que não se conhece a sua origem).

Figura 4.31 - Tarefa 1: tentativa de resolução do modelo - grupo da Alegria

2 - Passados 4 minutos, que porção de vela ardeu? Expliquem o vosso raciocínio.

$$1 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 = 2,5$$

R: Ao fim de 4 minutos a porção de vela que ardeu foi 2,5.

(fonte própria)

Na tarefa esta questão era anterior à construção do modelo, pelo que se percebe que a resolução não tenha recorrido à expressão algébrica, uma vez que a mesma só foi determinada numa fase posterior. De qualquer maneira, mesmo que tivessem usado a expressão algébrica, como no decorrer da tarefa não obtiveram a expressão algébrica correta, não teriam obtido o valor correto.

O grupo no qual estava integrada a Alegria não conseguiu concluir a tarefa na aula, assim não concretizaram as etapas: *interpretar a solução e criar conclusões; validar conclusões e comunicar a solução*.

Figura 4.32 - Tarefa 1: interpretação da solução - grupo da Alegria

3- Quanto tempo pode permanecer a vela acesa. Podem explicar porquê?

11 minutos.

(fonte própria)

O grupo ainda apresentou uma resposta que não estava correta sobre o tempo que a vela poderia permanecer acesa, mas sem explicar o raciocínio.

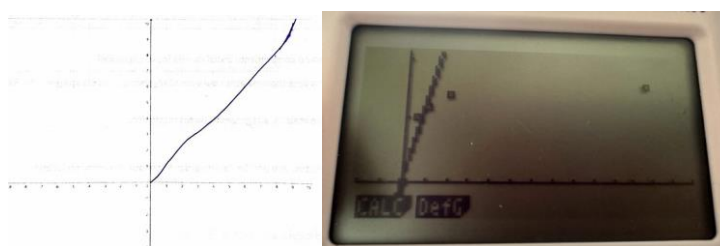
Durante a entrevista e após obter a expressão algébrica foi solicitado à Alegria que avaliasse a qualidade do modelo, denotando-se por parte da aluna alguma dificuldade nesta etapa.

I: Ainda te recordas como é que se representam graficamente os pontos e se avalia a qualidade do modelo?

A: Sim.

I: Então podes fazer sff.

Figura 4.33 - Tarefa 1: gráfico - Alegria (durante a entrevista)



(fonte própria)

I: O que concluíste?

A: Os coisões... [pontos]... não estão como nos outros... estão para os lados... não sei bem...

De seguida a Alegria realizou uma pequena tarefa no GeoGebra que ajudou a consolidar alguns conhecimentos sobre proporcionalidade direta. Esta tarefa correspondia a manusear um *applet* que simulava o enchimento de um prisma quadrangular, em paralelo com a construção gráfica da função de proporcionalidade direta respetiva.

A Alegria realizou sem dificuldades a tarefa no GeoGebra e referiu "*isto ajudou-me a perceber melhor, gosto de desenhos ... ajudam-me*".

Durante a entrevista foi solicitado à Alegria, que refletisse sobre os conhecimentos prévios que tinha sobre **proporcionalidade direta** antes da realização da tarefa 1, e os que adquiriu após a realização da mesma e da tarefa no GeoGebra. A aluna tem uma noção geral do conceito, mas não consegue definir proporcionalidade direta como se pode observar no diálogo seguinte:

I: O que é que te lembravas de proporcionalidade direta?

A: Quando você falou eu lembrei-me assim da matéria, mas já não me lembrava como se calculava, como é que tínhamos que resolver.

I: Gostaria agora que me explicasses por palavras tuas o que aprendeste?

A: Proporcionalidade direta é quando a relação é direta e ,... não sei... quando por exemplo o do garrafão de água, quando o tempo passa a água aumenta na mesma, como é que se diz... quantidade?

I: Proporção?

A: Sim isso.

Analisemos agora em detalhe os procedimentos adotados na **Tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo"**.

Na fase inicial, relativa à *análise da situação ou problema*, o grupo da Alegria preencheu corretamente a tabela, que se expõe de seguida:

Figura 4.34 - Tarefa 2: tabela com os dados recolhidos - grupo da Alegria

Comprimento do rolo em cm (x)	20	18	16	14	12
Comprimento visualizado da fita em cm (y)	17	46 21	20 26	32	44

(fonte própria)

Este não foi o primeiro grupo a perceber e partilhar a relação, mas depois de a mesma ter sido debatida na sala de aula, como referido anteriormente.

Este grupo percecionou-a da seguinte forma:

Figura 4.35 - Tarefa 2: descrição da relação entre o comprimento do rolo e o comprimento visualizado da fita - grupo da Alegria

Como descrevem essa relação por palavras?
quanto menor for o rolo mais se vê a fita.

(fonte própria)

Nesta explicação faltou explicarem que a variação a que se referem tem de ser proporcional.

Para *desenvolverem e formularem o modelo*, perceberam que precisavam de multiplicar cada valor de x pelo y , mas não concretizaram o cálculo da constante de proporcionalidade, como se observa na Figura 4.36:

Figura 4.36 - Tarefa 2: determinação da constante de proporcionalidade - grupo da Alegria

Tentem descobrir o modelo que melhor se ajusta aos dados obtidos.
~~1720~~ ~~4618~~ Constante = $y \times x$

(fonte própria)

Apesar dos elementos do grupo terem estado atentos à explicação (conforme anotado pela investigadora no seu diário de bordo) e terem sido capazes de transcrever para o papel a fórmula subjacente ao cálculo da constante não a conseguiram determinar, pelo que também não chegaram à expressão algébrica do modelo. Durante a entrevista a resolução da tarefa foi revisitada com a Alegria:

I: Vocês durante a atividade não terminaram esta alínea. O que é que escreveram aqui?

A: Escrevi: $\text{constante} = y \times x$

I: Então olha para a tabela e vê lá o que achas que tens de fazer?

A: Multiplicar o 20×17 ; 18×21 ;...

I: Certo, então calcula lá.

A: Dá 340; 378; 416; 448; 528

I: Novamente, temos o problema de não teres um valor constante. O que fazes neste caso?

A: A média... deu 442,5; posso pôr antes 443?

I: Experimenta e avalia. O que fazes a seguir?

A: Aquilo do y... $y = \frac{443}{x}$

Uma vez que o grupo da Alegria não tinha chegado a um modelo também não cumpriram a etapa *resolução do modelo*. Este grupo conseguiu recolher os dados, perceber a relação entre as variáveis, o que os motivou a corrigir os próprios dados recolhidos, mas não conseguiu concretizar o cálculo da constante de proporcionalidade e por conseguinte chegar à expressão algébrica, mas introduziram os dados recolhidos na calculadora (Figura 4.37).

Figura 4.37 - Tarefa 2: representação gráfica dos dados recolhidos - grupo da Alegria



(fonte própria)

Uma vez que não conseguiram definir um modelo também não conseguiram completar as etapas *interpretação da solução*, *validação das conclusões* e *comunicação das conclusões* no decorrer da atividade, no entanto, a Alegria terminou a análise no decorrer da entrevista.

I: Já fizeste a representação gráfica do teu modelo. O que concluis?

A: Este está melhor... os pontos não estão tão longe da linha como no outro.

Figura 4.38 - Tarefa 2: representação gráfica do modelo - Alegria (durante a entrevista)



(fonte própria)

À semelhança do que tinha sido feito relativamente à proporcionalidade direta também na **proporcionalidade inversa** a Alegria resolveu uma pequena tarefa durante a entrevista. Esta tarefa (enunciado na parte III do Guião da Entrevista - Apêndice L) foi feita após a sistematização da tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo". Nesta tarefa a Alegria determinou e identificou a constante, determinando os valores solicitados como se observa na Figura 4.39:

Figura 4.39 - Entrevista: determinação da constante de proporcionalidade inversa - Alegria

Número de rifas (n)	100	150	300	?	?
Preço de cada rifa, em euros (p)	18	?	?	1,80	1,50

$100 \times 18 = 1800$
 O que concluíste? Qual é a constante de proporcionalidade inversa?
 1800

$1800 : 150 = 12$
 $1800 : 300 = 6$
 $1800 : 1,80 = 1000$
 $1800 : 1,50 = 1200$

(fonte própria)

Quando foi solicitado à Alegria que completasse a tabela explicando o raciocínio, ela fê-lo corretamente, identificando a constante de proporcionalidade inversa.

Figura 4.40 - Entrevista: formulação do modelo - Alegria

Escreve p como função de n .

$$f(x) = \frac{1800}{x}$$

(fonte própria)

A aluna resolveu corretamente o desafio que lhe foi proposto no decorrer da entrevista sem qualquer intervenção da investigadora, apesar de não ter usado as variáveis solicitadas: n e p .

Posteriormente o mesmo exercício de reflexão foi feito relativamente às novas aprendizagens adquiridas de proporcionalidade inversa. Salienta-se que apesar de a aluna ter resolvido a tarefa, não se apropriou do conceito matemático, mas exprimiu por palavras a sua perceção.

I: O que aprendeste sobre proporcionalidade inversa?

A: Na proporcionalidade inversa era a quantidade de água no garrafão a aumentar e a outra coisa diminui.

I: E mais?

A: Na direta dividíamos pelo coiso $[x]$... a... e aqui multiplicamos.

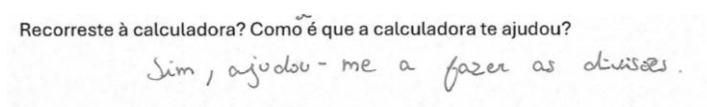
I: Quais foram as tuas maiores dificuldades?

A: Ai! Na compreensão é que eu não sou muito boa, isto é, na matemática em geral, mas mesmo assim algumas matérias são mais fáceis.

4.2.2.1 Considerações Finais

Quando questionada sobre a **estratégia de abordagem das tarefas** adotada nos grupos de trabalho em que esteve inserida, refere que "nós íamos escrevendo e fazendo"; "houve partes em que uns faziam uma coisa e outros outra", "repartimos assim".

Figura 4.42 - *Mediação Pragmática* - Alegria



(fonte própria)

A Alegria disse ainda que "gostei muito das atividades, do que desenvolvemos e do que aprendemos", e "não houve nada que não gostasse".

Insistindo nos motivos para ter gostado, a Alegria respondeu que "foram divertidas" e "também me ajudaram a perceber melhor a proporcionalidade direta e inversa".

Em termos de dificuldades esta aluna diz que tem dificuldades em compreender a matemática.

I: Achas que o tipo de tarefas que fizeste facilitaram a compreensão da matéria?

A: Hum, sim... gosto destas aulas, ajudaram-me, mas nas outras estou mais focada, faço mais coisas iguais e isso também me ajuda muito.

Não obstante, as resoluções às tarefas realizadas pela Alegria apenas terem sido terminadas no decorrer da entrevista, revelaram alguma compreensão do problema em causa e alguma aquisição dos conhecimentos. Esta aluna tem de trabalhar a sua capacidade de expor o raciocínio, pois por mais do que uma vez indicou o resultado sem o explicar.

4.2.3 Estudo de caso 3: **Motivação**

A aluna Motivação (M), é uma aluna empenhada e bastante participativa que gosta da disciplina: "gosto da parte de calcular números e equações e isso tudo, não gosto parte da geometria"; "sempre fui boa aluna".

Estuda autonomamente, de forma regular, realizando quase sempre os trabalhos de casa que lhe são solicitados, colocando dúvidas sobre os mesmos. Em termos de observação do seu comportamento ao longo de todo o ano letivo é uma aluna que revelou alguma aptidão para resolver situações novas, interessada e atenta, mas que demonstrou que a repetição contribuiu para a consolidação dos seus conhecimentos.

O primeiro momento de recolha de dados foi o **workshop de calculadora gráfica** onde o grupo no qual estava inserida a Motivação resolveu autonomamente a tarefa. O *feedback* transmitido ao grupo da Motivação após a realização dessa tarefa foi o seguinte:

- deviam ter indicado o raciocínio utilizado na resolução da questão 1;

Figura 4.43 - *Workshop*: análise da resposta à questão 1 - grupo da Motivação

1. Usando a informação disponibilizada no enunciado preencham a seguinte tabela:

TEMPO (minutos)	0	1	2	3
NÍVEL DA ÁGUA (mm)	0	6	12	18

(fonte própria)

- resolveram corretamente as questões 2 e 3;

Figura 4.44 - *Workshop*: análise das respostas às questões 2 e 3 - grupo da Motivação

2. Qual será o nível de água no recipiente ao fim de 1 minuto? E ao fim de 15 minutos?

$$\frac{N}{t} = \frac{6}{1} = 6 \text{ mm} \quad \frac{N}{15} = 6 \Rightarrow N = 6 \times 15 \Rightarrow N = 90 \text{ mm}$$

3. Qual será a expressão algébrica que traduz esta relação?

$$y = 6x \quad \text{ou} \quad N = 6t \quad \text{ou} \quad f(t) = 6t$$

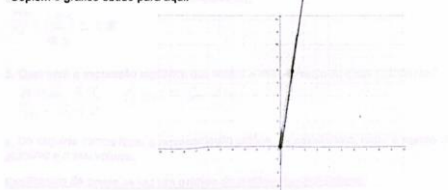
(fonte própria)

- nos eixos deviam ter colocado as variáveis do enunciado. É sempre necessário referenciar os eixos. O gráfico apresentado foi uma transposição do obtido na calculadora.

Figura 4.45 - *Workshop*: gráfico - grupo da Motivação

4. Representem graficamente, recorrendo à calculadora, a relação entre o tempo e o nível da água.

Copiem o gráfico obtido para aqui:



(fonte própria)

- na questão 5 cometeram um erro na conversão entre *mm* e *cm* o que levou a que a conclusão não fosse a correta. 6 *mm* são 0,6 *cm* e não 0,006 *cm* como indicaram.

Figura 4.46 - *Workshop*: análise da resposta à questão 5 - grupo da Motivação

5. Comentem a seguinte afirmação: "Se o recipiente tem 15 centímetros de altura, demorará de mais 30 minutos a encher".

$$6 \text{ mm} = 0,006$$

$$\frac{1 \text{ min}}{0,006 \text{ cm}} = \frac{15 \text{ cm}}{0,006} = 2500 \text{ min}$$

Sim, esta afirmação é verdadeira, pois irá demorar 2500 min

(fonte própria)

A Motivação, desde o *workshop* que valorizou a utilização da calculadora, tendo referido que "é muito útil para resolver problemas", tornando a resolução mais fácil e rápida.

Analise agora em detalhe os procedimentos adotados na **Tarefa 1: "Modelação do comprimento de uma vela"**. À semelhança do que tem sido feito, começou-se por perceber se existiu algum paralelismo entre a abordagem usada e o modelo de Anhalt e Cortez (2015). O modelo teórico adotado estabelece como primeira fase: *análise da situação ou problema*. O grupo no qual esteve integrada a Motivação, procedeu a uma correta interpretação do enunciado e recolha dos dados.

Figura 4.47 - Tarefa 1: tabela com os dados recolhidos - grupo da Motivação

Tempo	Comprimento da vela	Quantidade de vela ardida
0s	5,7 cm	0 cm
30s	4,7 cm	1 cm
60s	4,4 cm	1,3 cm
90s	4 cm	1,7 cm
120s	3,7 cm	2 cm

(fonte própria)

Terminado o preenchimento original da tabela, o grupo passou ao: *desenvolvimento e formulação do modelo*. Tendo percebido que os quocientes não eram sempre iguais, o grupo na sequência do debato na sala de aula determinou o valor médio. Este grupo foi ainda alertado para o facto de que não deve colocar o $\frac{0}{0}$ pois 0 não é divisível por 0.

Figura 4.48 - Tarefa 1: desenvolvimento do modelo - grupo da Motivação

$$\frac{0}{0} \neq \frac{1}{30} \neq \frac{1,3}{60} \neq \frac{1,7}{90} \neq \frac{2}{120} \rightarrow \text{médio} = 0,22638222 \approx 0,2$$

5 - Indiquem uma expressão algébrica que modele [traduza] esta situação.

$$f(t) = 0,2t$$

(fonte própria)

O grupo, como se observa na Figura 4.48 não explicou a relação por palavras, nem indicou os valores usados para determinar a média, mas ainda assim percebe-se por análise da figura o raciocínio subjacente à *formulação do modelo*, uma vez que consideraram a média obtida a constante de proporcionalidade direta.

Relativamente à *resolução do modelo* o grupo da Motivação teve um raciocínio idêntico ao observado no grupo do Confiança, não recorreram à expressão algébrica para dar resposta a esta questão e duplicaram o valor da quantidade ardida. No entanto, este grupo explicou corretamente o seu raciocínio, conforme se observa na Figura 4.49.

Figura 4.49 - Tarefa 1: tentativa de resolução do modelo - grupo da Motivação

2 - Passados 4 minutos, que porção de vela ardeu? Expliquem o vosso raciocínio.

Se no tempo 0s a vela tem 5,7 cm e no tempo 2min a vela tem 3,7, então ao fim de 4min a vela terá 1,7 cm

(fonte própria)

De seguida, foi necessário *interpretar a solução e tirar conclusões, validar as conclusões* e de seguida *comunicar a solução*.

Apesar de a interpretação não ter por base a expressão algébrica determinada, segue um raciocínio interpretativo relacionando esta resposta com a anterior. Assim, e como se observa de seguida, a relação é corretamente explicada por palavras, pois o grupo assume que em cada 90 *segundos* (1 minuto e 30 segundos) a vela arde 1,7 *cm*, que é precisamente a quantidade de vela que falta arder após os 4 *minutos* que tinham sido a base para a interpretação da questão 2.

Figura 4.50 - Tarefa 1: interpretação do modelo - grupo da Motivação

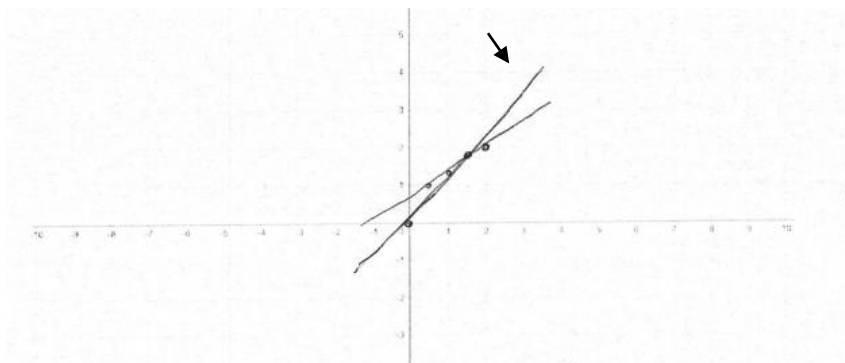
3- Quanto tempo pode permanecer a vela acesa. Podem explicar porquê?

pode ficar acesa 5 min e 30 segundos, pois se passado 4 min a vela fica com 1,7 cm vai ser preciso mais 1 min e 30 segundos para ficar com 0 cm, pois aos 90 s ela perde 1,7 cm, exatamente o que precisamos

(fonte própria)

Este grupo procedeu ainda a uma correta representação gráfica (a reta correta, segundo confirmou a Motivação no decorrer da entrevista, é "a reta que passa na origem apesar de não passar em todos os pontos do gráfico") e *comunicação do modelo*, conforme se observa nas duas figuras seguintes (Figura 4.51 e Figura 4.52).

Figura 4.51 - Tarefa 1: representação gráfica da função - grupo da Motivação



(fonte própria)

Figura 4.52 - Tarefa 1: comunicação da solução - grupo da Motivação

Apesar do modelo ajustar os dados, a reta não passa em todos os pontos do gráfico.

(fonte própria)

Este grupo conseguiu construir o modelo, representá-lo e avaliá-lo.

Durante a entrevista foi solicitado à Motivação, que refletisse sobre os conhecimentos prévios que tinha sobre **proporcionalidade direta** antes da realização da tarefa 1 e quais tinha adquirido.

I: O que te lembravas de proporcionalidade direta?

M: Muito pouco, isto ajudou-me a lembrar, mas também já tinha esquecido de quase tudo ...

I: E consegues-me dizer agora o que aprendeste?

M: Temos proporcionalidade direta quando a gente divide o y por x e dá sempre a mesma constante.

No decorrer da entrevista a Motivação realizou sem dificuldades a tarefa no GeoGebra sobre proporcionalidade direta, não existindo nenhum aspeto a destacar.

Analisemos agora em detalhe os procedimentos adotados na **Tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo"**.

Na análise da situação ou problema, o grupo da Motivação recolheu os seguintes dados, conforme se observa na Figura 4.53.

Figura 4.53 - Tarefa 2: tabela com os dados recolhidos - grupo da Motivação

Comprimento do rolo em cm (x)	20	18	16	14	12
Comprimento visualizado da fita em cm (y)	17	11	36	55	33

(fonte própria)

Apercebendo-se de que tinham dados que consideraram estranhos (comprimentos da fita associados aos 18 cm e 12 cm de comprimento do rolo) questionaram-se, e partilharam as suas preocupações com a investigadora:

M: Nós percebemos que quanto menor for o rolo maior o comprimento da fita, mas isso não aconteceu nestes dois casos... (apontaram os casos). Temos de repetir ou podemos fazer aquilo do outro dia e não os pomos nas contas [referem-se a excluir os outliers]?

I: Idealmente deveriam repetir a recolha de dados nesses casos. Posso dar-vos um novo rolo.

M: Mas... não podemos fazer a média só com os valores que sobram, estes.... (apontam)...

I: A atividade é vossa, deixo ao vosso critério.

O grupo da Motivação optou por avançar a sua análise apenas com os restantes resultados.

Para *desenvolverem e formularem o modelo*, começaram por multiplicar cada valor de x pelo y respetivo e depois determinaram a média, usando-a como constante de proporcionalidade, conforme também tinha sido debatido em turma no decorrer da tarefa 1.

Figura 4.54 - Tarefa 2: desenvolvimento e formulação do modelo - grupo da Motivação

Conseguem identificar a relação entre o comprimento do rolo e o comprimento da fita?

$$20 \times 17 = 340 \quad 14 \times 55 = 770$$

16 x 36 = 576 Quanto medirá o rolo se o comprimento da fita for 15cm?

Como descrevem essa relação por palavras? *de fita que vem*

proporção inversa

Tentem descobrir o modelo que melhor se ajusta aos dados obtidos.

$$\frac{340 + 576 + 770}{3} = \frac{1686}{3} = 562 \quad f(x) = \frac{562}{x}$$

(fonte própria)

O cálculo da constante de proporcionalidade inversa ($k = x \times y$) foi um dos aspetos que se consolidou com a turma no decorrer da tarefa 2, no entanto, chegarem à expressão algébrica ficou a cargo de cada grupo, tendo este grupo obtido a expressão correta.

O grupo da Motivação fez uma correta *resolução do modelo*, usando a expressão algébrica. Contrariamente ao que ocorreu na tarefa 1, nesta tarefa o grupo já tinha a expressão algébrica da função, e utilizaram-na para a resolução do modelo.

Figura 4.55 - Tarefa 2: resolução do modelo - grupo da Motivação

Para terminar: Qual deverá ser o comprimento do rolo de papel de cozinha para que se consiga visualizar 15cm de fita na parede?

$$f(15) = \frac{562}{15} \approx 37,5$$

(fonte própria)

Este grupo nesta fase já não demonstrava nenhuma dificuldade ao nível do manuseamento da calculadora, pelo que procedeu à correta representação gráfica dos pontos e da expressão algébrica.

Figura 4.56 - Tarefa 2: representação gráfica - grupo da Motivação



(fonte própria)

Apesar de terem feito a representação gráfica correta na calculadora, não a transcreveram na íntegra para o enunciado nem a interpretaram, ou seja, não procederam a uma verdadeira *Interpretação, validação e comunicação da solução*, pelo que no decorrer da entrevista a investigadora tentou perceber com a Motivação que razões estavam por trás desta não conclusão da etapa.

I: Porque é que não transcreveram o gráfico da calculadora para o papel?

M: risos... porque não sabia como...

I: O que achas do modelo que definiram neste caso?

M: Ajusta mais ou menos porque só passa num dos pontos.

À semelhança do que tinha sido feito relativamente à proporcionalidade direta também na **proporcionalidade inversa** a Motivação resolveu uma pequena tarefa durante a entrevista. Esta tarefa (enunciado na parte III do Guião da Entrevista - Apêndice L) foi feita após a sistematização da tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo", o que pelas respostas obtidas evidenciou, uma vez mais, o impacto positivo da modelação matemática para as aprendizagens deste tema.

Figura 4.57 - Entrevista: determinação da constante de proporcionalidade inversa - Motivação

Completa a tabela seguinte, explicando o raciocínio que utilizaste:

Número de rifas (n)	100	150	300	?	?
Preço de cada rifa, em euros (p)	18	?	?	1,80	1,50

(fonte própria)

Quando foi solicitado à Motivação que completasse a tabela explicando o raciocínio, ela completou a tabela corretamente, mas não explicou o raciocínio utilizado. Apesar de no decorrer das tarefas 1 e 2 os grupos em que a Motivação esteve integrada terem explicado quase sempre e de forma correta o raciocínio, a aluna não o fez nesta tarefa individual. A investigadora observou que o raciocínio utilizado foi o correto, mas alertou a Motivação sobre a importância de indicar sempre o raciocínio utilizado.

Figura 4.58 - Entrevista: formulação do modelo - Motivação

Escreve p como função de n .

$$p(n) = \frac{1800}{x}$$

(fonte própria)

A aluna percebeu como se procede à formulação do modelo, como se observa na Figura 4.58, mas utilizou x invés de n , não indo ao encontro do solicitado no enunciado. Foi-lhe explicado que a expressão correta do modelo era: $p = \frac{1800}{n}$.

I: Consegues-me dizer agora o que aprendeste sobre proporcionalidade inversa?

M: hum... como é que eu vou explicar... a inversa também dá sempre um número certo, mas é quando vai aumentado um valor e a outra não... não consigo explicar.

M: quanto menor o... enquanto uma aumenta, a outra diminui.

I: Como se chega a esse valor que referiste ser sempre igual?

M: Multiplica-se.

I: Que dificuldades sentiste?

M: Foi mais na parte de definir as proporcionalidades e, identificar a relação.

Quando questionada sobre a **estratégia de abordagem das tarefas** adotada, referiu que: "*leram primeiro enunciado, pensaram juntos e tentaram resolver o que se pretendia*".

A sistematização do cumprimento das fases do modelo de Anhalt e Cortez (2015) encontra-se na Figura 4.59 na tarefa 1, o grupo procedeu à *resolução do modelo*, e à *interpretação*, mas sem usar a expressão algébrica, pelo que esta etapa está referenciada a tracejado. Na tarefa 2, a Motivação apenas *comunicou a solução* já no decorrer da entrevista, pelo que esta etapa está representada a tracejado e não procederam à *interpretação do modelo*.

```

graph LR
    A([Analisar a situação ou problema]) -- Verde --> B[Desenvolver e formular um modelo]
    A -- Laranja --> E{Validar conclusões}
    B -- Verde --> E
    B -- Laranja --> C[Resolver o modelo (solução)]
    C -- Verde --> D[Interpretar a solução e tirar conclusões]
    C -- Laranja --> E
    D -- Verde --> E
    E -- Verde --> F([Comunicar a solução])
  
```

Legenda:
 Verde: passos seguidos na tarefa 1
 Laranja: passos seguidos na tarefa 2

Relativamente às dificuldades observadas, foi neste caso que se observaram menos dificuldades, ainda assim, denotaram-se algumas dificuldades conceptuais, e maior necessidade de rigor ao nível da *comunicação* matemática (exemplo: Figura 4.58).

A integração da **calculadora gráfica** nas tarefas pela Motivação caracteriza-se por uma abordagem *pragmática*, pois contribuiu para a facilitação dos cálculos algébricos:

Figura 4.60 - *Mediação Pragmática* - Motivação

Recorreste à calculadora? Como é que a calculadora te ajudou?

Sim, a calculadora ajudou-me a perceber que valores usava.

(fonte própria)

Relativamente à utilização da calculadora na entrevista disse ainda que:

I: Achas que usar a calculadora gráfica te ajudou a resolver as tarefas?

M: Sim, é mais fácil para olhar para os valores e perceber o que tenho que fazer e aonde, e ver o tipo de gráfico que vou ter é mais fácil para desenhá-lo.

Ao nível da *mediação* da utilização da calculadora percebe-se assim que além de *pragmática* foi ainda *epistémica*, porque ajudou a "compreender melhor o gráfico".

A sua integração da utilização da calculadora gráfica foi positiva pois contribuiu para auxiliar e compreender.

A Motivação gostou das tarefas, mas achou-as extensas, teve algumas dificuldades iniciais que sentiu ter superado. A percepção da aluna vai ao encontro do observado pela investigadora e dos dados documentais recolhidos.

Em concreto a Motivação referiu que:

I: De que gostaste menos?

M: Não sei... talvez a parte de ter que fazer muitos exercícios.

I: De que mais gostaste nas tarefas de modelação matemática?

M: Da parte prática.

I: De que não gostaste nestas tarefas?

M: Sei lá, gostei de tudo.

I: E sentiste dificuldades?

M: No início sim, mas depois de fazer uma ou duas, à terceira já era mais fácil, percebi que na realidade não é tudo como nos livros. Senti que me ajudou.

Referir ainda que esta aluna acredita que uma das aprendizagens que adquiriu foi: "que os problemas reais se aplicam à matemática".

Não obstante, as resoluções, apresentadas pela Motivação terem alguns aspetos a melhorar, revelam compreensão e capacidade de abstração independentemente do problema em causa. Esta aluna demonstra capacidade de questionar e comunicar os resultados obtidos.

4.2.4 Estudo de caso 4: Serenidade

O aluno estudo de caso 4: Serenidade (S), gosta mais ou menos da disciplina de Matemática. Durante a entrevista referiu que:

I: O que mais gostas da disciplina de matemática?

S: O que mais gosto? Não tenho uma coisa que eu goste mais.

I: Mas gostas de Matemática?

S: Sim, mais ou menos.

I: E o que é que não gostas?

S: Não gosto tipo de fazer a quantidade de exercícios que fazemos, fazemos muitos exercícios mesmo. Muitas vezes nós vamos fazendo e eu não consigo tipo prestar atenção ao exercício que eu percebi menos, não consigo tipo olhar para aquilo e ver se eu percebi ou não, eu vou fazendo, fazendo, e não consigo ter a noção do que não sei. Precisava que o ritmo fosse mais devagar.

Caracteriza-se por ser um aluno empenhado que obtém resultados positivos decorrentes de muito trabalho autónomo, que é suportado com explicações duas vezes por semana. Refere que estuda regularmente e diz que em aula precisava que o ritmo fosse mais lento para compreender se tinha efetivamente adquirido os novos conceitos quando são introduzidos.

O primeiro momento de recolha de dados foi o **workshop de calculadora gráfica** onde o grupo no qual estava inserido o Serenidade resolveu autonomamente uma tarefa, tendo sido transmitido ao grupo o seguinte *feedback*:

- necessidade de melhorar a forma de apresentação do raciocínio (1 e 2) pois não explicaram o raciocínio subjacente à resposta 1, nem completamente o da 2;

Figura 4.61 - Workshop: Análise das respostas às questões 1 e 2 - grupo do Serenidade

1. Usando a informação disponibilizada no enunciado preencham a seguinte tabela:

TEMPO (minutos)	0	1	2	3
NÍVEL DA ÁGUA (mm)	0	6	12	18

2. Qual será o nível de água no recipiente ao fim de 1 minuto? E ao fim de 15 minutos?

1 minuto - 6 mm
15 minutos - 90 mm

(fonte própria)

- a expressão algébrica deve ser apresentada recorrendo às variáveis do enunciado (3);

Figura 4.62 - *Workshop*: expressão algébrica - grupo do Serenidade

3. Qual será a expressão algébrica que traduz esta relação?

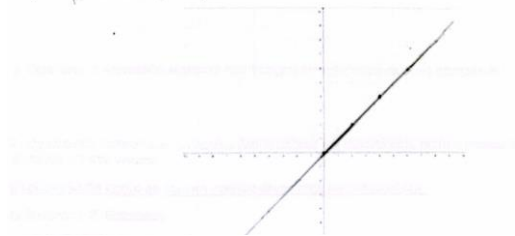
$$y = 6x$$

(fonte própria)

- nos eixos devem-se sempre colocar as variáveis e, o gráfico (4) só deveria ter sido desenhado para valores de *tempo* > 0, pois o *tempo* nunca é um valor negativo. O gráfico apresentado foi uma transposição do obtido na calculadora.

Figura 4.63 - *Workshop*: gráfico - grupo do Serenidade

4. Representem graficamente, recorrendo à calculadora, a relação entre o tempo e o nível da água.
Copiem o gráfico obtido para aqui:



(fonte própria)

Relativamente à valorização da utilização da calculadora o Serenidade referiu o seguinte:

S: Achei interessante porque nós tipo mais tarde não sei se é no 10.º ou nos anos mais à frente vamos precisar de usar calculadora gráfica e na faculdade também, e por isso é uma forma de nós conseguirmos aprender a usar a calculadora gráfica.

I: Para que é que usaste a calculadora?

S: A calculadora ajudou-me principalmente a fazer o gráfico.

Analisemos agora em detalhe os procedimentos adotados na **Tarefa 1: "Modelação do comprimento de uma vela"**. Inicia-se esta análise com a identificação da existência de algum paralelismo entre a abordagem usada e o modelo de Anhalt e Cortez (2015). O modelo teórico adotado estabelece como primeira fase: *análise da situação ou problema*. O grupo do Serenidade, preencheu a tabela da seguinte forma:

Figura 4.64 - Tarefa 1: tabela originalmente preenchida - grupo do Serenidade

Tempo	Comprimento da vela	Quantidade de vela ardida
0h	6,50 cm	0 cm
30 s	4 cm	1,50 cm
30 s	3,50 cm	0,50 cm
30 s	3 cm	0,50 cm
30 s	2,50 cm	0,50 cm

(fonte própria)

Esta tabela revelou dificuldades na compreensão da situação e na identificação de aspetos essenciais, pois o grupo não percebeu que o *tempo* e a *quantidade de vela ardida* eram cumulativos.

O grupo procedeu à correção da tabela, conforme se observa de seguida (Figura 4.65), após intervenção da investigadora, que sugeriu ainda que podiam na variável *tempo* converter os *segundos* para *minutos*, com vista a facilitar a posterior leitura do gráfico.

Figura 4.65 - Tarefa 1: tabela revista - grupo do Serenidade

	Tempo	Comprimento da vela	Quantidade de vela ardida
	0h	5,50 cm	0 cm
	30s	4 cm	1,50 cm
1.	60 30s	3,50 cm	0,50 cm 2 cm
1,5	90 30s	3 cm	0,50 cm 2,50 cm
2	120 30s	2,50 cm	0,50 cm 3 cm

(fonte própria)

Com vista ao *desenvolvimento e formulação do modelo* começaram por determinar o $\frac{y}{x}$ e depois determinaram o valor médio, dos valores encontrados. No entanto, consideraram o y como sendo o *comprimento da vela* e a *quantidade ardida* como sendo o x , invés do *tempo*, não obtendo assim o modelo correto conforme se observa na Figura 4.66.

Figura 4.66 - Tarefa 1: desenvolvimento e formalização do modelo - grupo do Serenidade

$4 : 1,50 = 2,6$
 $3,50 : 0,50 = 7$
 $3 : 0,5 = 6$
 $2,50 = 5$
 $\frac{2,6 + 7 + 6 + 5}{4} = 3,9$

5 - Indiquem uma expressão algébrica que modele [traduza] esta situação.

$F(x) = 3,9x$

(fonte própria)

Este grupo também apresentou algumas dificuldades na *resolução do modelo* ao assumirem que em 4 minutos ardeu 3,9 cm, ou seja, o valor que tinham obtido para a (Figura 4.66).

Figura 4.67 - Tarefa 1: tentativa de resolução do modelo - grupo do Serenidade

2 - Passados 4 minutos, que porção de vela ardeu? Expliquem o vosso raciocínio.

Em 4 min ardeu 3,9 cm 4

3- Quanto tempo pode permanecer a vela acesa. Podem explicar porquê?

30s — 0
30s — 3,50 R: Eva fez 50 4 min e 30s
30s — 3
30s — 2,50
30s — 2
30s — 1,5
1 30s — 1
30s — 0,5
30s — 0

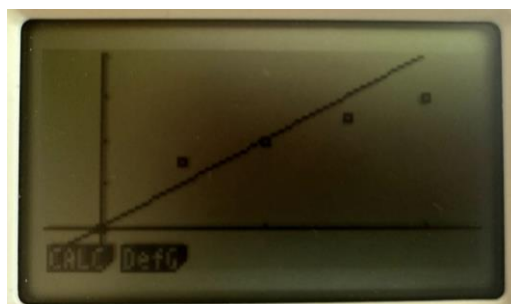
(fonte própria)

No entanto, e uma vez que tinham percebido que a diminuição que verificavam a cada 30 segundos era de 0,5 cm, apresentaram um raciocínio para obter o *tempo* que a vela demoraria a arder por completo. Este raciocínio precisava de alguma melhoria em termos de rigor e não usava o modelo obtido.

O grupo do Serenidade não conseguiu concretizar as fases: *Interpretar a solução e criar conclusões*, *validar conclusões* e *comunicar a solução* durante a aula porque o gráfico que obtiveram não foi o correto, pois uma vez que estavam a usar o *tempo* e o *comprimento da vela*, tinham uma grandeza que aumentava e outra que diminuía.

O Serenidade refez a determinação do modelo no decorrer da entrevista agora considerando o *y*, como sendo a *quantidade da vela ardida*, e o *x* como sendo o *tempo*, obtendo o seguinte modelo: $f(x) = 2,04x$, que representaram graficamente:

Figura 4.68 - Tarefa 1: representação gráfica - Serenidade (durante a entrevista)



(fonte própria)

O Serenidade considerou que o modelo não era perfeito porque *"a reta está um pouco afastada de alguns pontos"*. O Serenidade neste caso foi influenciado pela janela de visualização. Por sugestão da investigadora converteu os segundos em minutos, o que fez com que os valores no eixo do *x* estivessem a variar apenas entre 0 e 2. Uma vez que a utilização da calculadora gráfica como ferramenta estava a ser introduzida aos alunos, definiu-se um ajuste automático da janela de visualização. Como a janela

ajustou automaticamente ao intervalo de valores do x , ou seja, x a variar entre 0 e 2, desvios pequenos "pareceram" grandes dando ao Serenidade a percepção de que o modelo não é um bom modelo.

Durante a entrevista foi solicitado ao Serenidade, que refletisse sobre os conhecimentos prévios que tinha sobre **proporcionalidade direta**, e quais tinha adquirido aquando da realização da entrevista:

I: Ainda te recordavas de alguma coisa sobre proporcionalidade direta?

S: Não.

I: Consegues-me dizer o que aprendeste de proporcionalidade direta?

S: Nós quando temos uma proporcionalidade direta por exemplo no gráfico tem que começar no (0,0), ah, que temos que também fazer o y a dividir pelo x para obter a constante.

No decorrer da entrevista o Serenidade realizou sem dificuldades a tarefa no GeoGebra sobre proporcionalidade direta, não existindo nenhum aspeto a destacar.

Analisemos agora em detalhe os procedimentos adotados na **Tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo"**.

Na fase inicial, relativa à *análise da situação ou problema*, o grupo do Serenidade preencheu a tabela corretamente, conforme se observa de seguida:

Figura 4.69 - Tarefa 2: tabela com os dados recolhidos - grupo do Serenidade

Comprimento do rolo em cm (x)	20	18	16	14	12
Comprimento visualizado da fita em cm (y)	14	21	27	30	41

(fonte própria)

Este não foi o primeiro grupo a perceber e partilhar a relação, mas como referido previamente a mesma foi analisada em turma. Em concreto este grupo definiu-a da seguinte forma:

Figura 4.70 - Tarefa 2: descrição da relação entre o comprimento do rolo e o comprimento visualizado da fita - grupo do Serenidade

Conseguem identificar a relação entre o comprimento do rolo e o comprimento da fita?

Quanto mais pequeno o rolo, mais se consegue ver,

Como descrevem essa relação por palavras?

proporcionalidade inversa

(fonte própria)

Esta explicação não está completa, pelo que no decorrer da entrevista a investigadora explicou o conceito de proporcionalidade inversa ao Serenidade, ou seja, de que no caso da proporcionalidade inversa, a variação entre as duas grandezas era contrária, mas proporcional (uma aumentava na mesma proporção, em que a outra diminuía).

Para desenvolverem e formularem o modelo, multiplicaram cada valor de x pelo y respetivo:

Figura 4.71 - Tarefa 2: determinação da constante de proporcionalidade - grupo do Serenidade

Tentem descobrir o modelo que melhor se ajusta aos dados obtidos.

(fonte própria)

A forma genérica da constante de proporcionalidade inversa foi discutida com a turma no decorrer da tarefa, no entanto, a obtenção da expressão algébrica foi feita individualmente por cada grupo. O grupo do Serenidade não obteve a expressão algébrica do modelo, pelo que consequentemente também não fez uma correta *resolução do modelo*, como se observa na Figura 4.72.

Figura 4.72 - Tarefa 2: tentativa de resolução do modelo - grupo do Serenidade

Para terminar: Qual deverá ser o comprimento do rolo de papel de cozinha para que se consiga visualizar 15cm de fita na parede?

(fonte própria)

Na entrevista o Serenidade foi convidado a formular o modelo.

I: Explica-me o que fizeste aqui (apontando para a Figura 4.71)?

S: Multiplicamos os valores da tabela.

I: Para quê?

S: Para chegarmos à constante de proporcionalidade.

I: Então qual é o valor da constante de proporcionalidade?

S: Não chegamos a determiná-la.

I: Queres fazer agora?

S: Está bem. Vou calcular a média de: 280; 378; 432; 420; 492. Posso fazer na calculadora?

I: Podes.

S: Dá...2002/5 que é 400,4.

I: Consegues-me indicar a expressão algébrica do modelo.

S: $f(x) = \frac{400,4}{x}$

I: E agora, o que te falta fazer?

S: Pôr na calculadora e verificar.

Figura 4.73 - Tarefa 2: Interpretação, validação e comunicação da solução - Serenidade (durante a entrevista)



(fonte própria)

I: O que achas do modelo?

S: Parece bom, porque esta linha já está mais perto dos pontos, só no primeiro e no último é que falha um pouco.

À semelhança do que tinha sido feito relativamente à proporcionalidade direta também na **proporcionalidade inversa** o Serenidade resolveu uma pequena tarefa durante a entrevista (enunciado na parte III do Guião da Entrevista - Apêndice L) que foi feita após a sistematização da tarefa 2, realçando-se o impacto positivo da modelação matemática para a aprendizagem deste tema.

Figura 4.74 - Entrevista: determinação da constante de proporcionalidade inversa - Serenidade

Número de rifas (n)	100	150	300	1800	1800
		12	6	1000	1200
Preço de cada rifa, em euros (p)	18	?	?	1,80	1,50

O que concluíste? Qual é a constante de proporcionalidade inversa?

1800

(fonte própria)

Quando foi solicitado ao Serenidade que completasse a tabela explicando o raciocínio, ele fê-lo sem indicar o raciocínio à semelhança do que já tinha sido observado na Motivação. A investigadora como acompanhou a realização da tarefa, de forma não participante, observou que o aluno raciocinou de forma correta, mas no final da tarefa alertou-o para a importância de explicar o raciocínio.

Figura 4.75 - Entrevista: formulação do modelo - Serenidade

Escreve p como função de n .

$$f(x) = \frac{1800}{x}$$

(fonte própria)

O aluno não usou a nomenclatura do enunciado, mas o raciocínio subjacente à formulação do modelo foi o correto.

Posteriormente o mesmo exercício de reflexão foi feito relativamente às novas aprendizagens adquiridas e sobre as quais o Serenidade referiu que:

I: Indica-me os conhecimentos que adquiriste de proporcionalidade inversa?

S: Na proporcionalidade inversa temos de fazer o y vezes o x , ou seja, a multiplicar para obter a constante.

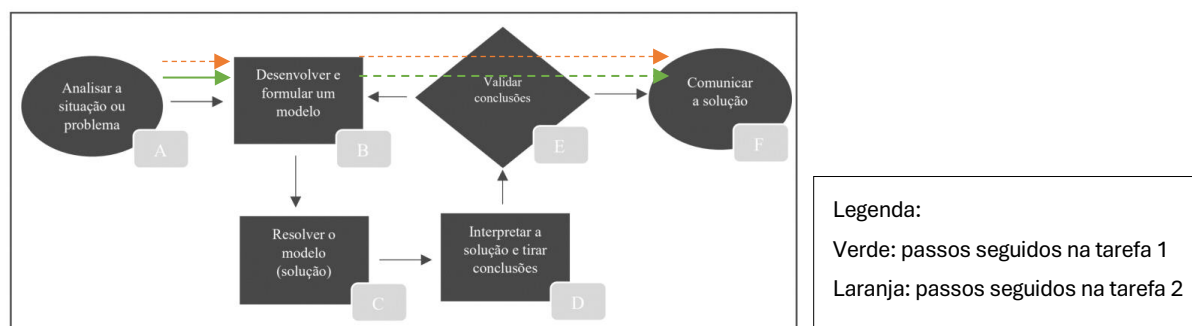
4.2.4.1 Considerações Finais

Quando questionado sobre a **estratégia de abordagem das tarefas** adotada, disse: "Eu ia fazendo e a minha colega de grupo ia-me ajudando, na última a do rolo, a aluna x ia observando e ajudando na recolha de dados e eu ia registando e focando na resolução da tarefa."

A abordagem adotada como estratégia para a resolução das tarefas 1 e 2 não vai ao encontro da defendida por Boavida et al. (2008) e parece não ter existido a cooperação necessária para o debate aquando do seu desenvolvimento, parecendo que o apoio ou a interação entre pares se resumiu à parte da recolha de dados.

Em termos de cumprimento das fases do modelo de Anhalt e Cortez (2015), em ambas as tarefas o grupo no qual se encontrava integrado não cumpriu todas as fases do modelo de acordo com o referencial teórico, conforme se sistematiza na Figura 4.76. Na tarefa 1 formularam autonomamente o modelo, e o Serenidade representou-o graficamente e avaliou-o no decorrer da entrevista (razão pela qual esta concretização foi colocada a tracejado). Relativamente à tarefa 2, apenas na entrevista o Serenidade terminou a formulação do modelo, o representou graficamente e o avaliou, pelo que todas as etapas estão a tracejado.

Figura 4.76 - Resumo do processo de modelação matemática - Serenidade

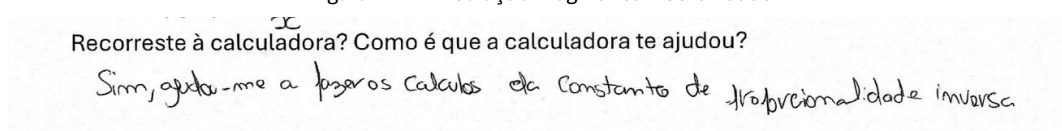


(fonte própria)

Relativamente às dificuldades observadas, as mesmas seguiram a linha das realçadas por Tavares (2000), originalmente no enunciado (apenas na tarefa 1), e também comunicacionais e conceptuais. Denotou-se alguma dificuldade em traduzir o problema e o raciocínio para linguagem matemática e ainda em identificar os conceitos matemáticos a usar numa dada situação, assim como um domínio deficiente dos conhecimentos matemáticos.

Pela forma como o Serenidade integrou a **calculadora gráfica** nas tarefas pode-se assumir uma abordagem *pragmática*, pois contribuiu para a resolução do problema e facilitação dos cálculos algébricos:

Figura 4.77 - *Mediação Pragmática* - Serenidade



(fonte própria)

Relativamente à valorização da utilização da calculadora o Serenidade referiu o seguinte:

S: Achei interessante porque nós tipo mais tarde não sei se é no 10.º ou nos anos mais à frente vamos precisar de usar calculadora gráfica e na faculdade também e por isso é uma forma de nós conseguirmos aprender a usar a calculadora gráfica.

I: Para que é que usaste a calculadora?

S: A calculadora ajudou-me principalmente a fazer o gráfico.

Com base no diálogo anterior, percebe-se que a integração da utilização da calculadora gráfica foi percecionada como positiva, tendo contribuído para auxiliar na construção do gráfico.

O Serenidade afirma que gostou bastante de todas as tarefas que realizou durante a recolha de dados no âmbito desta investigação, considerando que as mesmas contribuíram para aprendizagem.

Em particular disse que:

S: As fichas que fizemos ajudaram-me sim, tive que chegar ao resultado e pensar nestas aulas.

I: De que é que não gostaste?

S: Não tem nada assim que eu não gostei.

I: De tudo o que aprendeste o que foi mais difícil?

S: Foi a proporcionalidade inversa, foi difícil perceber inicialmente os exercícios.

I: O que poderia ter feito de diferente para te facilitar a compreensão?

S: Nada, você explica bem.

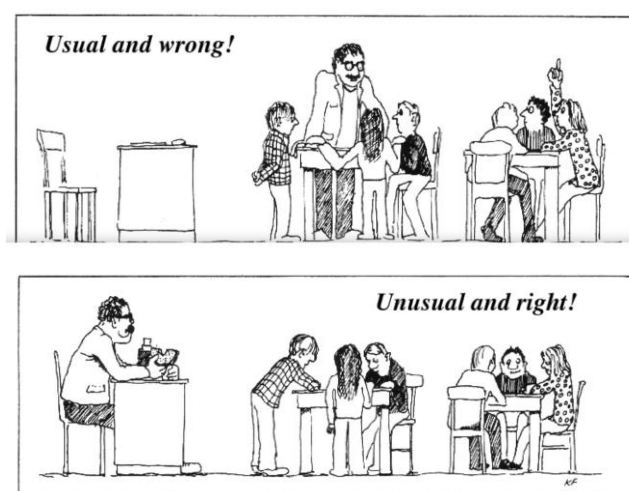
Não obstante, as resoluções apresentadas pelo Serenidade terem alguns aspetos a melhorar, revelam alguma compreensão, tendo o aluno referido que poderia ser importante realizar mais tarefas do tipo das implementadas, de modo a aumentar o seu contributo para o desenvolvimento das aprendizagens, indo ao encontro do preconizado nas aprendizagens essenciais.

4.2.5 Discussão dos Resultados

Analisando os estudos de caso de forma global percebe-se que houve uma evolução e uma apropriação parcial dos conceitos do tema da proporcionalidade direta e inversa, decorrente do uso de tarefas exploratórias com recurso à modelação matemática.

Apesar de ter havido sempre alguma condução, observou-se alguma evolução em termos de autonomia dos alunos, a caminho do considerado por Blum e Ferri (2009) como "correto e não usual", conforme se lê na figura seguinte:

Figura 4.78 - Evolução da postura dos alunos em sala de aula no decorrer das tarefas



(Blum & Ferri, 2009)

De seguida serão sistematizados os resultados para cada uma das categorias previamente definidas.

4.2.5.1 Estratégias usadas na realização de cada tarefa

O comportamento dos grupos em que se incluem os estudos de caso foi distinto, quer entre eles, quer no mesmo grupo entre as tarefas conforme se observou.

O modelo teórico adotado para a análise do processo de modelação matemática foi o de Anhalt e Cortez (2015) - Figura 2.5.

De seguida sistematizam-se as fases cumpridas em cada uma das tarefas por cada um dos estudos de caso.

Tabela 4.1 - Tabela resumo com o cumprimento das fases do processo de modelação matemática

	Confiança		Alegria		Motivação		Serenidade	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Analisar a situação ou problema	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Desenvolver e formular o modelo	!	✓	E	E	✓	✓	E	E
Resolver o modelo	×	×	×	×	✓ ⁸	✓	×	×
Interpretar a solução e tirar conclusões	!	✓	×	×	✓	✓	×	×
Validar conclusões	!	✓	E	E	✓	✓	E	E
Comunicar a solução	!	✓	E	E	✓	✓	E	E

Legenda: ✓ significa cumprido autonomamente; ! Modelo incorreto; E cumprida no decorrer da entrevista; × fase não cumprida.

Recordar que na *fase A: analisar a situação ou problema* era fundamental que os alunos lessem o enunciado de forma a identificar claramente o problema que tinham de resolver. Uma leitura atenta do enunciado era determinante para perceberem o que efetivamente deveriam fazer, isto é, que dados teriam de recolher.

Como observado, a identificação clara do problema foi um dos primeiros aspetos em que os alunos revelaram dificuldades, indo ao encontro do destacado por Tavares (2000). Tavares indica que ao nível do enunciado podem ser detetadas as seguintes dificuldades:

- compreensão da situação ;
- criação de restrições não existentes;
- não observação de condições ou dados importantes;
- dificuldade de identificação dos aspetos essenciais.

Para evitar um impasse, a investigadora teve no decorrer da tarefa 1, uma postura participante, intervindo de forma a ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades que foram sendo identificadas. Realçar que o grupo em que estava integrada a Motivação preencheu corretamente a tabela inicial. No

⁸ O grupo da Motivação resolveu e interpretou o modelo sem recorrer à expressão algébrica.

caso da tarefa 2 não houve necessidade de intervenção a este nível, pois os alunos já tinham percebido a importância de uma leitura atenta do enunciado, evidenciando evolução de aprendizagens no processo de resolução.

Na fase B: *desenvolver e formular o modelo*, os alunos deveriam perceber quais os dados a modelar, ou seja, qual a informação necessária, estabelecer pressupostos e traduzir para a linguagem matemática a informação apresentada, construindo assim o modelo solicitado. Nesta fase foram denotadas dificuldades na tarefa 1. Apenas o grupo da Motivação conseguiu formular corretamente o modelo da tarefa 1 no decorrer da aula. Para a tarefa 2, quer o grupo do Confiança, quer o grupo da Motivação formularam corretamente o modelo no decorrer da aula. Nos restantes dois casos, os alunos obtiveram os modelos corretos, quer da tarefa 1, quer da tarefa 2 no decorrer da entrevista, quando foram revistas as tarefas.

Na fase C: *resolver o modelo*, apenas o grupo da Motivação na tarefa 2 recorreu à expressão algébrica obtida. Na tarefa 1 podem não o ter feito porque a pergunta em que tal era solicitado apareceu antes da obtenção da expressão, apesar de isto ter sido pensado para estimular o espírito crítico e de raciocínio, futuramente seria importante alterar a ordem desta questão na tarefa. Percebe-se aqui uma necessidade de interligação de conceitos e a importância de os alunos fazerem mais trabalho autónomo ao nível da resolução de problemas.

Existe uma clara interligação entre as três últimas fases do modelo: *interpretar a solução e criar conclusões* (D), *validar conclusões* (E) e *comunicar a solução* (F). Apenas os estudos de caso Confiança e Motivação conseguiram durante a realização da tarefa *avaliar e comunicar uma solução*. No caso do Confiança, o modelo desenvolvido na tarefa 1 não estava correto e a sua inexperiência na avaliação, pode ter influenciado de forma negativa a incorreta avaliação do modelo tendo, no entanto, superado estas dificuldades na tarefa 2, na qual a avaliação já foi a correta. Relativamente à *interpretação*, apenas a Motivação mostrou alguma capacidade imediata de interpretar o modelo.

4.2.5.2 Aprendizagem da proporcionalidade

O objetivo desta investigação é o de compreender o papel da modelação matemática para a aprendizagem da proporcionalidade, em particular da proporcionalidade inversa que é a temática estudada no 9.º ano de escolaridade. No entanto, como os alunos não estavam familiarizados com a realização de tarefas exploratórias, nem com problemas de contexto real, nem com a modelação matemática, nem com a utilização da calculadora gráfica, realizou-se previamente um *workshop* de calculadora gráfica. O objetivo deste **workshop** foi trabalhar uma função linear em contexto matemático, que é um conhecimento previamente apreendido e com isto apoiar os alunos na perceção do ciclo de modelação matemática em contexto real. De seguida realizaram-se duas tarefas de modelação matemática (1 e 2), uma usando conhecimentos prévios, outra como introdutória de uma nova temática, o que pode

permitir perceber se a modelação matemática é mais eficaz como suporte à consolidação das aprendizagens ou como forma de introduzir novos conceitos.

Com este objetivo em mente e tendo por base a análise feita na categoria anterior, conjuntamente com as tarefas resolvidas no âmbito da entrevista e a sistematização dos alunos relativamente aos conhecimentos adquiridos é possível refletir sobre a aprendizagem da proporcionalidade.

Na **tarefa 1** (proporcionalidade direta) e pela forma como os alunos abordaram o problema ficou claro que o conceito de proporcionalidade direta e de função linear que se esperava ser um pré-requisito não estava consolidado para a maioria dos alunos. A recordação destes conceitos adveio das breves revisões que tinham sido feitas no decorrer do *workshop*. Realçar, no entanto, que o objetivo do *workshop* não foi de todo rever conhecimentos de anos anteriores, mas introduzir a utilização da calculadora gráfica usando-se problemas simples de proporcionalidade direta, tendo apenas sido revistos os aspetos fundamentais para esse efeito nomeadamente de: referencial cartesiano, eixos, par ordenado, e, paralelamente de constante de proporcionalidade direta, a sua expressão algébrica e a representação gráfica. Apesar de no *workshop* já se ter focado a proporcionalidade direta, ainda houve inicialmente alguns erros na determinação da constante durante a resolução da tarefa 1, não por ser um problema de contexto real, mas ao nível da fórmula. No entanto, ser uma situação com um contexto familiar em que os alunos recolheram os dados por experimentação, contribuiu para perceber que a matemática existe no dia a dia, ajudando a desenvolver competências relativas à abordagem e interpretação de dados reais. Na formulação do modelo, optou-se por calcular a média dos valores obtidos dos quocientes de cada y por cada x , assumindo-se o valor médio como sendo o da constante. Alternativamente excluiu-se a quantidade da vela ardida aos 30 segundos, pois na maioria dos casos, este era o único *outlier*.

No final da aula a maioria dos alunos conseguiram indicar uma expressão analítica da função, no entanto observaram-se situações em que a mesma não recorreu às variáveis indicadas no enunciado.

Com mais ou menos dificuldade e apoio no decorrer da tarefa, todos os grupos conseguiram no final recolher os dados e perceber que estavam perante uma situação em contexto real de proporcionalidade direta. No entanto, apenas dois dos quatro estudos de caso (Confiança e Motivação) mostraram conhecimentos ao nível da representação gráfica quer no papel, quer com recurso à calculadora gráfica. Porém, durante a entrevista foi notório que nenhum dos quatro estudos de caso conseguiu formular corretamente o que são variáveis diretamente proporcionais revelando, no entanto, conhecimentos dos procedimentos para a resolução de exercícios.

A **tarefa 2** (proporcionalidade inversa) revelou-se um desafio maior, visto ter sido uma aprendizagem nova, pelo que foi revista na entrevista, dando oportunidade aos alunos que não tinham conseguido terminá-la na aula, de a completarem, tendo ainda de seguida resolvido um pequeno desafio com vista à verificação dos conhecimentos apreendidos.

Pela análise dos dados percebe-se que existem vários conceitos que precisam de ser trabalhados, em particular, no que diz respeito ao cruzamento de temas matemáticos e ao desenvolvimento do raciocínio. “A passagem do informal para o formal, não é fácil para a maioria dos alunos. (...) na maior parte das vezes, as estratégias são automatizadas” (Nobre et al, 2015, p.90). Considerando os resultados da tarefa de proporcionalidade inversa que os alunos resolveram autonomamente no decorrer da entrevista, percebe-se essa automatização dos procedimentos, revelando ainda assim alguma compreensão limitada do seu significado. Apesar de decorrente da automatização existirem dificuldades em expor o raciocínio matematicamente de forma escrita, mas uma vez que se observou a verbalização do mesmo considera-se que as aulas de modelação foram, uma oportunidade de desenvolver competências ao nível do raciocínio, comunicação, trabalho em grupo e autonomia.

4.2.5.3 Impacto da utilização da calculadora gráfica

O *workshop* com as calculadoras gráficas foi bem recebido pelos alunos e serviu claramente para introduzir a utilização deste recurso. Em particular, quando os estudos de caso foram no decorrer da entrevista questionados sobre a sua concordância com a frase: "O que mais gostei foi de aprender a usar a calculadora gráfica.", usando a escala: não concordo nada; concordo só um pouco, concordo e concordo muito, o Serenidade concordou muito, o Confiança e a Motivação concordaram e a Alegria concordou só um pouco.

Realçar que esta ferramenta não é de utilização obrigatória para os alunos do ensino básico, pelo que foi utilizada pelos alunos, pela primeira vez no âmbito desta investigação. A sua integração decorreu do potencial positivo que a mesma pode ter em associação com a modelação matemática, uma vez que de acordo com Bilheó (2012), a sua utilização contribui para potenciar o pensamento matemático que está a ser promovido pela tarefa e as competências necessárias para que a experiência seja bem sucedida.

Indo ao encontro de Amado et al. (2015), deve existir uma combinação do uso de tecnologia com a utilização do papel e lápis, razão pela qual, apesar de se ter introduzido esta ferramenta se solicitou paralelamente a representação no papel, visando uma interpretação mais completa e uma compreensão mais profunda dos problemas.

Os alunos com mais facilidade em encontrar uma estratégia na resolução das tarefas tiveram uma maior oportunidade de usar a calculadora e uma abordagem mais completa da sua utilização.

Os alunos que resolveram as tarefas mais lentamente, não tiveram oportunidade de tirar o mesmo valor da calculadora, por isso a sua utilização resumiu-se mais a um apoio para a parte algébrica, como fazem normalmente com a calculadora científica.

Em termos de impacto, importa ter presente o referencial teórico. Segundo Thomsen et al. (2022) existem três perspetivas para a utilização da calculadora:

- As mediações pragmáticas têm relação com o sistema cognitivo do aluno, sendo observadas quando a calculadora é usada como forma eficaz de agir perante uma situação, ou seja, por exemplo na resolução de um problema;
- A mediação epistêmica, se a utilização da calculadora por parte do aluno servir para aprofundar a compreensão;
- A mediação justificativa quando a utilização visa a verificação e a justificação, estabelecendo segurança do próprio sistema cognitivo.

Com base na visão dos autores percebeu-se pela análise dos estudos de caso Alegria e Serenidade que a utilização da calculadora refletiu uma *mediação* exclusivamente *pragmática*, porque se limitaram a usar a calculadora como ferramenta de apoio na resolução de um problema.

A aluna Motivação, além de uma *mediação pragmática* também revelou uma *mediação epistêmica*, pois além de a ter ajudado nos cálculos algébricos, a mesma também ajudou a compreender o gráfico, facilitando a sua representação.

Por último o aluno Confiança, revelou a integração das três *mediações: pragmática, epistêmica e justificativa*. No caso deste aluno a calculadora gráfica ajudou na resolução de problemas ao facilitar os cálculos algébricos, contribuiu para aprofundar a compreensão do problema e para perceber a qualidade de cada um dos modelos definidos.

Os restantes estudos de caso também usaram a calculadora para avaliarem a qualidade do modelo, no entanto, apenas o Confiança percebeu a importância da mesma para este fim.

CONCLUSÕES

Com esta investigação pretendeu-se compreender o papel da modelação matemática para a aprendizagem da proporcionalidade em contexto de sala de aula, percebendo como a modelação matemática pode contribuir de forma positiva, suportando a definição de estratégias potenciadoras da melhoria do processo de ensino-aprendizagem. Com este objetivo foram definidas as seguintes questões de investigação:

- Que fases do ciclo de modelação matemática os alunos usaram na realização de cada tarefa?
- Quais as aprendizagens desenvolvidas, no estudo da proporcionalidade, recorrendo à resolução de tarefas de modelação matemática?
- Qual o impacto da utilização da calculadora gráfica, enquanto ferramenta da aprendizagem do tema da proporcionalidade?

A importância da **modelação matemática** não é recente, Carreira (1992) destaca cinco razões que Niss (1989) tinha indicado como base para que a modelação matemática fosse incluída no currículo da Matemática. Por um lado, fomentam competências de criatividade e resolução de problemas, enquanto desenvolvem o espírito crítico do aluno para situações extramatemáticas, o que contribui para a preparação dos alunos noutros campos, e para o seu desenvolvimento enquanto cidadãos de futuro. Para além disso, pela sua diversidade e transversalidade não só motiva os alunos a interessar-se pela disciplina, como auxilia na compreensão de conceitos matemáticos.

Apesar da sua importância, atualmente ainda existe alguma reticência na inclusão da modelação matemática no ensino-aprendizagem, quer por receio dos professores na construção das tarefas e na condução das aulas, quer por se assumir que é necessária uma base prévia de conhecimentos para que o aluno consiga desenvolver um modelo matemático (Carreira, 2017; Oliveira & Barbosa, 2011; Viseu, 2015). Para além disso existe a questão do receio com o cumprimento do programa, uma vez que estas tarefas precisam de tempo para serem implementadas, executadas e avaliadas (Carreira, 2011; Viseu, 2015). No entanto, como se observou pela diferenciação dos estudos de caso, após a realização da tarefa de modelação matemática todos mostraram aquisição de conhecimentos sobre o tema que se estava a explorar, e à medida que os alunos se ambientavam com o tipo de tarefas mostraram-se mais capazes de pensar, refletir e investigar.

Do ponto de vista do professor, e com base na vivência desta investigação existe uma concordância com a visão de que para se ultrapassarem potenciais receios o importante é a preparação quer na construção das tarefas, quer na sua implementação. Assim é fundamental respeitar os cinco critérios de acordo com Ferri (2010) para a construção das tarefas. Desenvolver um enunciado de uma boa tarefa de modelação matemática é um desafio, encontrar um contexto realista adequado à idade, e, usar um nível de linguagem adequado são aspetos fundamentais, pois contribuem primeiro para captar a atenção do aluno e de seguida para a interpretação do enunciado que são algumas das dificuldades expectáveis. Para além disso facilita a antecipação do trabalho do professor pensar-se previamente nas questões definidas por Hernández et al. (2016) (anexo I), nas quais se inclui o apoio que o professor poderá ter de dar no decorrer das tarefas. No caso concreto desta investigação e como já se antecipavam possíveis dificuldades ao nível dos conhecimentos prévios, já se incluíram no *workshop* pequenas revisões de preparação para uma tarefa de proporcionalidade direta, a fim de facilitar posteriormente a resolução da tarefa 1. Para além disso escolheram-se tarefas com contextos apelativos e enunciados detalhados. Como os dados recolhidos eram reais também se antecipou a necessidade de um maior acompanhamento na definição da estratégia para a obtenção da constante (valor médio e exclusão dos *outliers*).

As **dificuldades** salientadas por Tavares (2000), quer ao nível do enunciado, comunicacionais e conceptuais eram expectáveis e dada a preparação prévia, foram observadas e maioritariamente ultrapassadas no decorrer da investigação.

Tendo presente a investigação à volta da modelação matemática, ao longo das últimas décadas, a seleção das perspetivas teóricas a incluir no referencial teórico não foi uma tarefa trivial, tendo-se optado por incluir vários modelos que mostrassem a sua evolução e a forma como tem sido explicada. Em termos de escolha sobre o modelo a aplicar para a análise dos estudos de caso, a mesma recaiu no modelo de Anhalt e Cortez (2015) pela sua atualidade e por ser um modelo que permite uma análise adequada dos dados recolhidos, privilegiando a capacidade de comunicar matematicamente, o que potencia a compreensão matemática.

Em termos de concretização, a Motivação respeitou todas as etapas do modelo, quer na tarefa 1, quer na tarefa 2, apesar de na tarefa 1 não ter usado a expressão algébrica para *resolver o modelo*. O Confiança não cumpriu em nenhuma das duas tarefas a etapa relativa à *resolução do modelo*. A Alegria e o Serenidade por razões distintas revisitaram os modelos referentes a ambas as tarefas no decorrer da entrevista, completando-os.

Ao nível do empenho, o mesmo foi notório e transversal aos quatro estudos de caso.

A modelação matemática, no seu objetivo pedagógico, pode ser encarada com vários fins, um mais didático, onde os modelos são estruturados para promover a aprendizagem do aluno, ou uma finalidade mais conceptual em que a modelação matemática é utilizada para introduzir novos conceitos

e os desenvolver. A modelação matemática pode ainda ser encarada como um processo cognitivo que permite a análise do processo mental do aluno aquando da sua implementação (Gaisman, 2009). Apesar de não ser um objetivo à priori, o facto de no decorrer desta investigação a modelação matemática ter sido usada quer para consolidar conceitos, quer para os introduzir, e, na entrevista se ter aprofundado a compreensão sobre o processo mental do aluno, poderá contribuir para o desenvolvimento da investigação neste âmbito. Na tarefa 1: "Modelação do comprimento de uma vela", que se centrava em conhecimentos prévios, alguns inclusivamente revistos no decorrer do *workshop*, os alunos chegaram mais facilmente a um modelo, no entanto, nem sempre foi o correto. No caso da tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo", foi mais difícil concretizarem o modelo, por ser uma aprendizagem nova, mas após uma sistematização, quando voltaram a ser confrontados com uma situação de proporcionalidade inversa no decorrer da entrevista, os quatro estudos de caso resolveram a tarefa. Pode assim ser mais difícil introduzir novas temáticas, mas a modelação matemática também parece uma abordagem adequada para esse efeito, o que vai ao encontro do defendido por Carreira (2017), que salienta que as tarefas de modelação matemática podem ser pensadas quer para o surgimento de conceitos matemáticos, quer para aprofundar esses conceitos.

Genericamente, os **conteúdos** foram aprendidos uma vez que os alunos mostraram conhecimentos dos procedimentos para a resolução de exercícios, apesar de se denotar alguma necessidade de melhoria ao nível da comunicação matemática, do rigor, da concretização e tradução do raciocínio para linguagem matemática.

A **introdução da calculadora gráfica** como ferramenta foi valorizada pelos alunos, que consideraram ter contribuído para a facilitação da resolução das tarefas. Para a escolha do referencial de apoio que suporta a utilização da calculadora acredita-se, de acordo com Thomsen et al. (2022), que a escolha remete para a motivação, ou seja, se a mesma é usada como ferramenta ou como objetivo, isto é, se a sua motivação foi *epistémica*, *pragmática* ou *justificativa*. Na quase totalidade dos casos a abordagem foi *pragmática*, com exceção do Confiança que combinou as três *mediações* (*pragmática*, *epistémica* e *justificativa*) e da Motivação que combinou a *mediação pragmática* e *epistémica*.

Realçar, no entanto, que a introdução da calculadora não exclui o trabalho baseado em papel e lápis, este trabalho deve ser complementar indo ao encontro de Amado et al. (2015), contribuindo para uma construção mais sólida dos conhecimentos. Em Canavarro et al. (2021), é exposta a importância das representações múltiplas, salientando-se que um aumento da familiaridade dos alunos com a conjugação de diversas representações contribui para a clarificação das ideias.

Em termos de limitações, a investigadora gostaria de ter tido oportunidade de recolher os dados de cada das tarefas que implementou em contexto letivo em blocos de 100 minutos, isto é, em duas aulas seguidas de 50 minutos, o que teria permitido uma discussão final mais rica de cada uma, e uma sistematização mais profunda das aprendizagens matemáticas. Para além disso e em particular no caso da proporcionalidade inversa uma aula com mais tempo teria permitido começar por realizar uma

tarefa inicial mais simples, nomeadamente da exploração da área do retângulo, em função do comprimento de um dos lados, antes de evoluir para a tarefa realizada. A tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo" pode ter sido demasiado ambiciosa para primeira tarefa da proporcionalidade inversa, uma vez de acordo com Skovsmose (2000) pode ser classificada como real, tendo implicado uma maior necessidade de abstração decorrente de potenciais erros de medição na recolha dos dados, além da complexidade de ser uma temática totalmente nova.

Após esta investigação sugere-se, indo ao encontro das aprendizagens essenciais, que os professores ultrapassem potenciais receios e incluam tarefas exploratórias de modelação matemática na sua prática letiva. A aplicação regular deste tipo de tarefas contribuirá de forma determinante para o desenvolvimento de competências com impacto positivo nas aprendizagens dos alunos.

Ao nível de investigação futura seria interessante medir o contributo da modelação matemática na construção do conceito de proporcionalidade, numa turma, num estudo mais longo, ou seja, durante o 3.º ciclo do ensino básico.

Essencialmente, espera-se com este estudo contribuir positivamente para a introdução da modelação matemática como técnica promotora de aprendizagens das funções em particular da proporcionalidade.

REFERÊNCIAS

- Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Universidade Aberta.
- Amado, J. (2017). *Manual de investigação qualitativa em educação* (3ª Edição). Imprensa da Universidade de Coimbra.
- Amado, N., Carreira, S., & Canavarro, A. P. (2019). Sobre o tema conexões matemáticas. In Amado, N., Carreira, S., Canavarro, A. P., Ferreira, R. T., & Vale, I. (Eds.) (2019). *Atas do EIEM 2019 Encontro em Investigação Matemática*, SPIEM, pp. 3–6.
https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2019.pdf
- Amado, N., Sanchez, J., & Pinto, J. (2015). A utilização do GeoGebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 52, 637-657.
<https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a11>
- Andrade, C., Pereira, J. C., & Pimenta, P. (2024). *Matemática 360*. Raiz Editora.
- Anhalt, C. O., & Cortez, R. (2015). Mathematical modelling: A structured process. *The Mathematics Teacher*, 108(6), 446-452.
<https://eric.ed.gov/?redir=https%3a%2f%2fdoi.org%2f10.5951%2fmathteacher.108.6.0446>
- Baioa, A. M., & Carreira, S. (2019). Modelação matemática experimental para um ensino integrado de STEM. *Educação e Matemática*, 152, 9-12.
<https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2556>
- Barbosa, J. C. (2001a). Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: *Reunião Anual da NAPED*, 24, 1-30.
https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf
- Barbosa, J. C. (2001b). Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática* 14 (15), 5-23.
<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10622>
- Barbosa, J. C. (2004). Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? *Veritati*, 4, p. 73-80.
http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_veritati_jonei.pdf
- Bardin, L. (2004). *Análise de Conteúdo*. Edições 70.
- Bassanezi, R. C. (2009). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Contexto.
- Beiral, L. N. (2017). *A proporcionalidade no cotidiano: uma proposta para o ensino fundamental*. [Dissertação de Mestrado da Universidade Federal de Viçosa]. Repositório da Universidade Federal de Viçosa. <http://www.locus.ufv.br/handle/123456789/11647>

- Biembengut, M. S., & Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática no Ensino*. Contexto.
- Biembengut, M. S. (2009). 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 7-32. <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37939>
- Bilheó, L. A. (2012). *O ensino de funções em escola técnica de nível médio por meio de modelagem matemática e uso de calculadora gráfica*. [Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Carlos]. Repositório da Universidade Federal de São Carlos. <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4434>
- Blum, W. H. (2002). ICMI Study 14: Application and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1-2), 149-171. <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1022435827400>
- Blum, W. H., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58. https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH601/3rd%20%26%204rth%20unit/3rd%20unit_Modelling%20cycle.pdf
- Blum, W. H., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68. <https://link.springer.com/article/10.1007/bf00302716>
- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. DGIDC, ME.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Canavarro, A. P.(Coord.), Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M. Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. (2021). *Aprendizagens Essenciais [9.º ano]*. Ministério da Educação. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_9.o_ano.pdf
- Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da Matemática com conexões – ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Educação e Matemática*, 144-145, 38-42. <http://hdl.handle.net/10174/23007>
- Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In Canavarro, P., Santos, L., Boavida, A., Oliveira, H., Menezes, L., & Carreira, S. (Orgs), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática*. (pp. 255-266). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. <http://hdl.handle.net/10451/7041>
- Carreira, S. (1992). "Aplicações e modelação" nos currículos da matemática: contornos do debate atual. *Quadrante*, 1(1), 73-91. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22618>

- Carreira, S. (2011). Looking Deeper into Modelling Processes: Studies with a Cognitive Perspective – Overview. In: Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G. (eds) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, vol 1. Springer, Dordrecht.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_17
- Carreira, S. (2017). Sublinhando resultados da investigação em modelação matemática e aplicações na aprendizagem. *Educação e Matemática*, 144-145, 44-50.
- Coelho, J. R. (2022). *As etapas do STEAM nas práticas didáticas com modelagem matemática na Educação Básica*. [Dissertação de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná]. Repositório da Universidade Federal do Paraná. <https://hdl.handle.net/1884/75111>
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. Routledge.
- Conceição, A., & Almeida, M. (2019). *Matematicamente Falando 9*. Areal Editores.
- Conceição, A., & Almeida, M. (2023). *MSI 7 – Matemática Sob Investigação*. Areal Editores.
- Costa, B., & Rodrigues, E. (2019). *Novo Espaço*. Porto Editora.
- Costa, B., Rodrigues, E., & Rodrigues, L. M. (2024). *Espiral 10*. Porto Editora.
- Denzin, N. & Lincoln, Y. (1994). *Handbook of qualitative research*. Sage Publications.
- DGE. (2018a). *Aprendizagens Essenciais [9.º ano]*. Ministério da Educação.
https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_9a_ff_18julho_rev.pdf
- DGE. (2018b). *Aprendizagens Essenciais [7.º ano]*. Ministério da Educação.
https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/matematica_3c_7a_ff_18julho_rev.pdf
- Dias, M. (2019). *Relatório de Estágio e Influência da Calculadora Gráfica no Processo de Demonstração* [Dissertação de mestrado, FCT-UNL]. Repositório da FCT_UNL.
<http://hdl.handle.net/10362/90749>
- Faria, L., Almeida, P. R., Antão, C., & Ferreira, M. (2019). *Matemática Dinâmica*. Porto Editora.
- Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 110, 19-25. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1897>
- Gaisman, M. T. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87. <https://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894008.pdf>
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 227-252.
- Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (6.ª ed.). Editora Atlas.
- Grupo de trabalho T3. (2011). *Funções no 3.º ciclo com tecnologia*. APM.

- Hernandéz, M., Levy, R. Felton-Koestler, M. & Zbiek, R. (2016). Mathematical modelling in high school curriculum. *Mathematics Teacher*, 110(5), 336-342.
<https://doi.org/10.5951/mathteacher.110.5.0336>
- Hogan, P., Carlson, B. R. & Kirk, C. (2015). Open Educational Practices' Models using open Educational Resources. *Open Education Global Consortium Conference*. Banff, Alberta, Canada. n.p.
https://commons.nmu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1064&context=facwork_conferencepapers
- Lesh, R. (1985). Processes, Skills, and Abilities Needed to Use Mathematics in Everyday Situations. *Sage Journals*, 17(4), 439-446. <https://doi.org/10.1177/0013124585017004007>
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In R. Lesh & A. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp 591-646). Routledge.
- Lesh, R., & Kaput, J. (1988). Interpreting modeling as local conceptual development. In J. DeLange & M. Doorman (Eds.), *Senior secondary mathematics education*. OW&OC.
- Martins, G. O., Gomes, C. A., Brocardo, J. M., Pedroso, J. V., Carrilo, J. L., Silva, L. M., Encarnação, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. F., & Rodrigues, S. M. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Ministério da Educação.
https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf
- Matos, J. (1995). *Modelação Matemática*. Universidade Aberta.
- Meirinhos, M., & Osório, A. (2010). O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EDUSER - Revista de Educação*, 2(2), 50-65. <http://hdl.handle.net/10198/3961>
- Mendes, E. J. (2001). A propósito de atividade. *Educação e Matemática*, 61, 36-39.
<https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/63/66>
- Neves, M. A., & Silva, A. P. (2019). *Matemática*. Porto Editora.
- Neves, M. A, Machado, A., Roque, B., Almeida, P. R., Silva, A. P., & Guerreiro, L. (2024). *Máximo*. Porto Editora.
- Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modelling In Mathematics curricula. In Blum et al. (eds), *Applications and modelling in learning and teaching Mathematics*. Ellis Horwood Limited.
- Nobre, S.; Amado, N.; Ponte, J. P. (2014). O papel das diversas representações na resolução de problemas, em diferentes contextos, no estudo da proporcionalidade inversa. In Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) (2014). *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, Braga: APM., pp. 425-442.
https://www.apm.pt/files/files/SIEM/2014/ataspdf/_P26_534365df0d46a.pdf

- Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. P. (2015). A resolução de problemas com a folha de cálculo na aprendizagem de métodos formais algébricos. *Quadrante*, 24(2), 85–110.
<https://doi.org/10.48489/quadrante.22921>
- Oliveira, I. B. (2009). *Aplicações e modelação matemática com recurso à calculadora gráfica e aos sensores, no estudo de funções com alunos de 9.º ano de escolaridade*. [Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho]. Repositório da Universidade do Minho.
<https://hdl.handle.net/1822/11129>
- Oliveira, A. M., & Barbosa, J. C. (2011). Modelagem matemática e situações de tensão na prática pedagógica dos professores. *Boletim de Educação Matemática*, 24(38), 265-296.
<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4603>.
- Peres, P., & Pimenta, P. (2004). Uma Experiência de Trabalho Colaborativo no Estudo da Modelação de Sistemas de Informação. In *Actas da conferencia eLes-eLearning no Ensino Superior*.
https://www.academia.edu/8028933/Uma_experi%C3%Aancia_de_trabalho_colaborativo_no_estudo_da_modela%C3%A7%C3%A3o_de_sistemas_de_Informa%C3%A7%C3%A3o?uc-sb-sw=4169361
- Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press.
- Ponte, J. P. (1992). A modelação no processo de aprendizagem. *Educação e Matemática*, 23, 15-19.
<https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/321>
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 25, 105-132. <http://hdl.handle.net/10451/3007>
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Práxis Educativa*, 7(2), 355-377. <http://hdl.handle.net/10451/22606>
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções*, 22, 196-216. <http://hdl.handle.net/10451/22634>
- Poupart, J. (2008). A entrevista de tipo qualitativo: considerações epistemológicas, teóricas e metodológicas. In J. Poupart, J. Deslauriers, L. Groulx, A. Laperrière, R. Mayer & A. Pires (Eds.). *A pesquisa qualitativa, Enfoques epistemológicos e metodológicos* (pp. 215-253). Editora Vozes.
- Richardson, R. J. (1999). *Pesquisa social: Métodos e técnicas*. Atlas.
- Rocha, H. (2015). O formalismo matemático num contexto de utilização da tecnologia. In A. P. Canavarro, L. Santos, C. C. Nunes & H. Jacinto (orgs). *Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 22-35). APM.
https://www.apm.pt/files/files/SIEM/Atas_SIEM/2015_Evora_ATAS_XXVI_SIEM.pdf

- Rodrigues, D. F. (2021). *Modelagem Matemática no Ensino de Função Afim*. [Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul]. Repositório Institucional da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. <https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/4253>
- Saúde, M. A. (2010). *Articulação curricular entre a Matemática e a Física*. [Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro]. Repositório da Universidade de Aveiro. <http://hdl.handle.net/10773/4323>
- Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., Fonseca, C., & Lopes, I. (2001). *Matemática B para 10.º ou 11.º anos*. DGE. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Programas/matematica_b_10.pdf
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 13(14), 66-91. <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635>
- Subtil, M. M., & Domingos, A. (2018). A génese instrumental com a calculadora gráfica na demonstração do Teorema de Pitágoras no 8.º ano de escolaridade. In A. Caseiro, A. Domingos, J. Matos, F. Santos, M. Almeida, P. Teixeira & R. Machado (Org.), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 155-171). APM. https://www.apm.pt/files/files/SIEM/Atas_SIEM/2018_Almada_ATAS_XXIX_SIEM.pdf
- Tavares, F. (2000). Dificuldades Reveladas por Alunos em Contextos de Aplicação ou Modelação Matemática. *Millenium*, 17, n.p. <http://hdl.handle.net/10400.19/927>
- Thomsen, M., Jankvist, U. T., & Clark, K. M. (2022). The interplay between history of Mathematics and Digital Technologies: a review. *ZDM – Mathematics Education* 54, 1631–1642. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01368-0>
- Thudichum, B., Passos, I. C., & Correia, O. F. (2019). *Matemática em ação* 9. Raiz Editora.
- Viseu, F., & Menezes, L. (2014). Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.º ciclo: O confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática. *Revista latino-americana de investigación en matemática educativa*, 17(3), 347-374. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1734>
- Viseu, F. (2015). A atividade de alunos do 9.º ano com tarefas de modelação no estudo de funções. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 10(1), 24-51. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2015v10n1p24>
- Vygotsky, L. S. (1991). *A formação social da mente*. Editora Martins Fontes.
- Web, N., Farivar, S. & Mastergerorge, A. (2001). *Productive Helping in Cooperative Groups*. University of California.

- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções: 10.º ano de escolaridade*. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário – Ministério da Educação.
- Yin, R. (2003). *Case study research: design and methods*. Sage Publications.

ANEXOS



LISTA DE PERGUNTAS PARA PREPARAÇÃO DO PROFESSOR QUANDO IMPLEMENTA UMA TAREFA DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA:

1. Requer que os alunos tomem decisões em como abordar o problema matematicamente?
2. O contexto e conceitos matemáticos são familiares aos alunos?
3. Que questões levantarão os alunos sobre o contexto do problema?
4. Que informações adicionais irão necessitar para desenvolver o processo?
5. Como terão acesso a essa informação adicional?
6. Que pressupostos farão para iniciar o seu modelo?
7. Como apoiar os alunos para que se sintam confortáveis em definir pressupostos?
8. Que estratégias serão provavelmente usadas pelos alunos?
9. Como pretende fazer o balanço entre o trabalho em pequeno grupo e em grande grupo?
10. Em que pontos do processo de modelação costumam os alunos ficar bloqueados?
11. Que estratégias poderá utilizar para intervir sem diminuir o desafio?
12. Que ferramentas irão os alunos recorrer para analisar e avaliar o modelo?

(Hernández et al., 2016)

APÊNDICES

FICHA DE TRABALHO (AULA DIA 02.11.2023)

	ESCOLA DO ESTÁGIO Ficha formativa sobre Diagrama de Venn	Ano letivo 2023/2024
		9.º Ano
Nome do Aluno: _____ Nº _____ Turma: _____ Data: ____/____/2023		

Apresente todos os resultados na forma de fração irredutível.

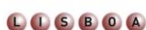
- O diagrama de Venn ao lado refere-se à resposta dada à seguinte questão colocada a algumas pessoas: Tem cão ou gato?
 Todas as pessoas responderam à questão.
 1.1. A quantas pessoas foi colocada a questão?
 1.2. Encontrada ao acaso uma dessas pessoas, qual é o mais provável: que tenha cão e gato ou não tenha cão nem gato?
 1.3. Formule mais três questões cuja resposta possa ser dado através do diagrama apresentado. Responda às questões que formulou.



- O diagrama de Venn ao lado refere-se aos 20 alunos da turma da Inês e aos desportos que praticam. Selecionou-se ao acaso um aluno da turma da Inês. Determine a probabilidade de:
 2.1. Praticar apenas natação;
 2.2. Não praticar futebol;
 2.3. Não praticar nenhuma das modalidades.



- As letras da palavra LISBOA foram distribuídas por seis bolas como é indicado na figura.



A Lisa introduziu as seis bolas num saco e vai retirar, ao acaso, uma bola e registar a sua letra.

- Represente, num diagrama de Venn, os acontecimentos:
 C: A letra da bola retirada é sempre uma vogal
 D: A letra da bola retirada faz parte da palavra LISA.
 3.2. Determine:
 3.2.1. $P(C)$
 3.2.2. $P(D)$

- 3.2.3. $P(C \cap D)$
 3.2.4. $P(C \cup D)$

1

- Numa turma há 30 alunos que estudam pelo menos uma de duas línguas estrangeiras: inglês e/ou francês, de acordo com a informação que consta da figura:



- 4.1. Sendo I o conjunto dos alunos que estudam inglês e F o conjunto dos alunos que estudam francês, represente a informação através de um diagrama de Venn.
 4.2. Escolhido um aluno ao acaso da turma, determine a probabilidade de:
 4.2.1. Estudar as duas línguas estrangeiras;
 4.2.2. Estudar apenas inglês.
- Num jantar organizado pelos 24 alunos de uma turma do 9.º ano, perguntaram a todos os alunos se queriam comer gelado de morango ou bolo de chocolate à sobremesa.
 - 11 responderam que queriam comer gelado de morango;
 - 4 queriam comer gelado de morango e bolo de chocolate;
 - 3 não gostam de doces e vão comer fruta à sobremesa.
- Construa um diagrama de Venn que represente a situação.
- Calcule a probabilidade de, escolhendo um aluno ao acaso, o aluno só comer bolo de chocolate.
- Durante a realização de um estudo de mercado perguntou-se a 200 pessoas qual a marca de leite que consumiam em casa. Foram apresentadas aos inquiridos apenas duas opções de marcas: a marca A e a marca B.
 No final do estudo concluiu-se que:
 - 100 compravam a marca A;
 - 50 compravam a marca B;
 - 20 compravam as duas marcas.
- Construa o diagrama de Venn que represente os resultados obtidos.
- Escolhendo ao acaso uma das 200 pessoas inquiridas, qual a probabilidade de a mesma ter respondido:
 - Apenas marca A;
 - Ambas as marcas.

2

Adaptado de manuais de 9.º ano (Costa & Rodrigues, 2019; Faria et al, 2019; Neves & Silva, 2019; Thudichum et al., 2019)

Resolução da ficha de trabalho:

	ESCOLA SECUNDÁRIA DO ESTÁGIO Ficha formativa sobre Diagrama de Venn	Ano letivo 2023/2024 9.º Ano
	Nome do Aluno: _____ Nº _____ Turma: _____ Data: ____/____/2023	

1. O diagrama de Venn ao lado refere-se à resposta dada à seguinte questão colocada a algumas pessoas: Tem cão ou gato?
- Todas as pessoas responderam à questão.
- 1.1. A quantas pessoas foi colocada a questão?
- $10 + 12 + 3 + 5 = 30$ pessoas
- 1.2. Encontrada ao acaso uma dessas pessoas, qual é o mais provável: que tenha cão e gato ou não tenha cão nem gato?
- A: ter cão e gato
B: não ter cão nem gato
- $P(A) = \frac{3}{30}$
 $P(B) = \frac{5}{30}$
- E mais provável que não tenha nem cão, nem gato.
- 1.3. Formule mais três questões cuja resposta possa ser dado através do diagrama apresentado. Responda às questões que formulou.
- Quantas dessas pessoas têm apenas cão? 10 pessoas.
Quantas dessas pessoas têm apenas gato? 12 pessoas.
Quantas dessas pessoas não têm gato? 30-12-3=15 pessoas

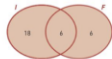


2. O diagrama de Venn ao lado refere-se aos 20 alunos da turma da Inês e aos desportos que praticam. Selecionou-se ao acaso um aluno da turma da Inês. Determine a probabilidade de:
- 2.1. Praticar apenas natação;
A: praticar apenas natação
 $P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
- 2.2. Não praticar futebol;
B: praticar futebol



1

4. Numa turma há 30 alunos que estudam pelo menos uma de duas línguas estrangeiras: inglês e/ou francês, de acordo com a informação que consta da figura:
- 4.1. Sendo I o conjunto dos alunos que estudam inglês e F o conjunto dos alunos que estudam francês, represente a informação através de um diagrama de Venn.



Raciocínio:

Sabe-se que a turma tem 30 alunos.
Somando as frequências relativas de alunos que estudam inglês (24) e alunos que estudam francês (12), obtém-se 36.
Pelo que se percebe que existem $36 - 30 = 6$ alunos que estudam ambas as línguas.
Então para se determinar o número de alunos que apenas estudam inglês faz-se:
 $24 - 6 = 18$ alunos.
Usa-se o mesmo raciocínio para determinar os alunos que apenas estudam francês:
 $12 - 6 = 6$ alunos.

- 4.2. Escolhido um aluno ao acaso da turma, determine a probabilidade de:

- 4.2.1. Estudar as duas línguas estrangeiras;
A: estudar ambas as línguas estrangeiras
 $P(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$
- 4.2.2. Estudar apenas inglês.
 $P(I) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

5. Num jantar organizado pelos 24 alunos de uma turma do 9.º ano, perguntaram a todos os alunos se queriam comer gelado de morango ou bolo de chocolate à sobremesa.
- 11 responderam que queriam comer gelado de morango;
 - 4 queriam comer gelado de morango e bolo de chocolate;
 - 3 não gostam de doces e vão comer fruta à sobremesa.
- 5.1. Construa um diagrama de Venn que represente a situação.

3

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

- 2.3. Não praticar nenhuma das modalidades.

C: não praticar nenhuma das modalidades

$$P(C) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

3. As letras da palavra LISBOA foram distribuídas por seis bolas como é indicado na figura.



A Lisa introduziu as seis bolas num saco e vai retirar, ao acaso, uma bola e registar a sua letra.

- 3.1. Represente, num diagrama de Venn, os acontecimentos:

C: A letra da bola retirada é sempre uma vogal
D: A letra da bola retirada faz parte da palavra LISA.



- 3.2. Determine:

3.2.1. $P(C)$
 $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3.2.2. $P(D)$
 $P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3.2.3. $P(C \cap D)$
 $P(C \cap D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3.2.4. $P(C \cup D)$
 $P(C \cup D) = \frac{5}{6}$

2



Raciocínio:

Sabe-se que a turma tem 24 alunos.

Sabendo:

- 11 responderam que queriam comer gelado de morango;
 - 4 queriam comer gelado de morango e bolo de chocolate;
- Significa que $11 - 4 = 7$ alunos iam comer apenas gelado de morango.

Ora de 7 alunos iam comer apenas gelado de morango, 4 comiam gelado de morango e bolo de chocolate e, 3 nem gelado de morango nem bolo de chocolate e o total de alunos é 24, significa que $24 - 7 - 4 - 3 = 10$ alunos que iam comer apenas bolo de chocolate.

- 5.2. Calcule a probabilidade de, escolhendo um aluno ao acaso, o aluno só comer bolo de chocolate.

$$P(\text{bolo}) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

6. Durante a realização de um estudo de mercado perguntou-se a 200 pessoas qual a marca de leite que consumiam em casa.
- Foram apresentadas aos inquiridos apenas duas opções de marcas: as marcas líderes de mercado, ou seja, a marca A e a marca B.

No final do estudo concluiu-se que:

- 100 compravam a marca A;
- 50 compravam a marca B;
- 20 compravam as duas marcas.

- 6.1. Construa o diagrama de Venn que represente os resultados obtidos.



4

Raciocínio:

Ora se 100 compravam a marca A e 20 as duas marcas, isto significa que

$100 - 20 = 80$ inquiridos compravam apenas a marca A.

Ora se 50 compravam a marca B e 20 as duas marcas, isto significa que

$50 - 20 = 30$ inquiridos compravam apenas a marca B.

Daqui vem que: $80 + 20 + 30 = 130$ compravam as marcas A e/ou B, mas foram inquiridos 200, ou seja: $200 - 130 = 70$ não compravam nem a marca A, nem a marca B.

6.2. Escolhendo ao acaso uma das 200 pessoas inquiridas, qual a probabilidade de a mesma ter respondido:

6.2.1. Apenas marca A:

$$P(\text{marca A}) = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$$

6.2.2. Ambas as marcas:

$$P(\text{marca A} \cup \text{marca B}) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$$

PLANO DA AULA OBSERVADA (AULA DIA 30.04.2024)

Plano da Aula Observada 30/04

Matemática – 9.º Ano

2023/2024

Ano:	9.º ano	Turma:	9.ºCJ	Disciplina:	Matemática	Tópico(subdomínio):	Trigonometria
Sala:	C014	Data:	30/04/2024	Hora:	09:55	Duração da aula:	100 minutos
Lições n.º:	Sumário: Razões trigonométricas de ângulos agudos						
Pré-Requisitos:	- Classificação de ângulos quanto à amplitude - Critérios de semelhança de triângulos			Conteúdos de Aprendizagem:	Revisões de classificação de ângulos; semelhança de triângulos. Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo. Distinguir as razões trigonométricas através da confrontação de situações simples.		
Objetivos essenciais de aprendizagem, conhecimentos, capacidades e atitudes transversais							
Objetivos Gerais:	- Desenvolver raciocínio matemático (conjeturar, classificar e generalizar) - Comunicação matemática (expressão de ideias)			Descritores	- Promover a identificação das razões trigonométricas em triângulos retângulos semelhantes tirando partido da conexão com a semelhança de triângulos. - Propor a análise de situações simples que permitam distinguir as razões trigonométricas em presença.		
Materiais e Recursos:	Quadro; computador com ligação à internet e retroprojeto; internet e telemóvel dos alunos para a realização de uma tarefa em GeoGebra; ficha de trabalho.						

Desenvolvimento da aula:

A aula iniciará com o sumário e com a verificação das presenças (ausências) dos alunos da turma.

De seguida a professora estagiária deve rever: Classificação de ângulos; Critérios de semelhança de triângulos.

Terminada a revisão e sistematização anterior, a professora estagiária fará uma breve explicação sobre os elementos do triângulo interligando com o GeoGebra e como se pode criar triângulos semelhantes, explicando para isso os passos iniciais de construção (criação de um ponto; de uma reta; de um segmento de reta; de uma reta perpendicular; como se determina o ângulo e como se mede um comprimento).

Após a explicação, os alunos são convidados a realizar uma tarefa no GeoGebra (<https://www.geogebra.org/classroom/vfq8jpb>) através da qual se pretende que compreendam que o valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo α é independente da unidade de comprimento fixada.



De seguida serão sistematizados os conhecimentos adquiridos no caderno, indicando-se a que corresponde cada uma das razões que calcularam, isto é, seno, cosseno e tangente.

Idealmente terminar-se-á a aula, com a resolução de alguns exercícios introdutórios: Pág. 51, ex. 1, 2 e 3.

Estratégias:

O objetivo desta aula é o de recordar conceitos prévios, consolidando-os enquanto se introduzem as razões trigonométricas de ângulos agudos através da realização de uma tarefa exploratória no GeoGebra.

Observações:

A tarefa foi pensada e planeada para ser realizada individualmente, mas caso algum(a) aluno(a) não tenha o telemóvel ou não consiga aceder à internet, ou o telemóvel não seja adequado para a realização da tarefa, a mesma poderá ser realizada a pares.

Possíveis exercícios adicionais a serem resolvidos em aula: Pág. 61 ex. 1, 2 e, Pág. 64 ex. 1.

Avaliação:

Avaliação formativa por observação com recurso a *feed back*/oral, com base nas atividades desenvolvidas.

TAREFA: "RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ÂNGULOS AGUDOS" (AULA DIA 30.04.2024)

Razões trigonométricas de ângulos agudos

Autor: Ana Lopes

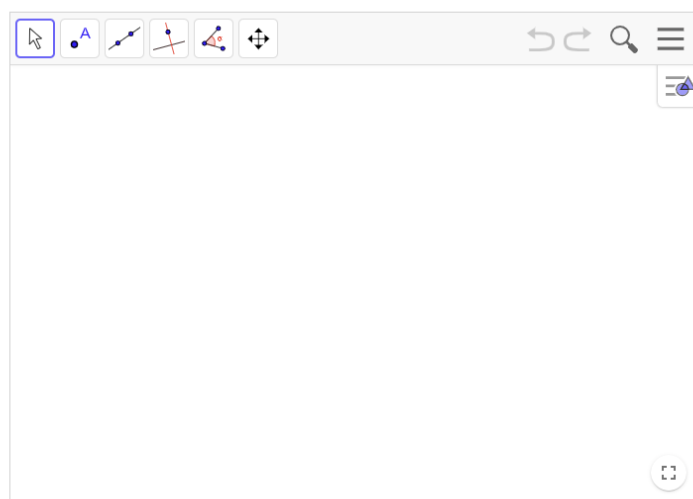
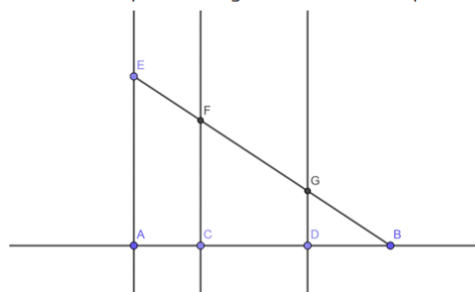
Triângulos retângulos semelhantes

Usando o GeoGebra desenha três triângulos retângulos semelhantes.

Para isso segue os seguintes passos:

- Marca dois pontos (A e B conforme consta da figura)
- Define uma reta que passe entre A e B
- Traça uma reta perpendicular à reta anterior (AB) e que passe no ponto A.
- Marca mais dois pontos entre A e B que serão denominados de C e D.
- Marca um ponto na reta perpendicular que será denominado por E.
- Traça um segmento cujas extremidades serão os pontos B e E.
- Traça uma reta perpendicular à reta AB e que passe no ponto C.
- Traça uma reta perpendicular à reta AB e que passe no ponto D.
- Marca os pontos F e G na interseção das retas conforme imagem abaixo.

Pretende-se que os triângulos tenham um aspeto idêntico ao seguinte:





REPÚBLICA PORTUGUESA
ENQUADRO

Razões Trigonométricas de Ângulos Agudos

Ano letivo
2023/2024
9.º Ano

Nome do Aluno: _____ Nº _____ Turma: _____ Data: ____/____/2024

1. Identifica os três triângulos que estão presentes na construção que fizeste:

$\Delta[\quad]$
 $\Delta[\quad]$
 $\Delta[\quad]$



2. Qual a amplitude do ângulo α ? _____
 Qual a amplitude do ângulo $\widehat{BAE}$? _____

Nota: Para determinar a amplitude do ângulo α usa-se o seguinte botão:



e depois selecionam-se ordenadamente os vértices E B A.

3. Os três triângulos são semelhantes. Porquê?

4. Completa a seguinte tabela:

	$\Delta[\quad]$	$\Delta[\quad]$	$\Delta[\quad]$
Comprimento do cateto oposto ao ângulo de amplitude α			
Comprimento do cateto adjacente ao ângulo de amplitude α			
Comprimento da hipotenusa			

Nota: Para determinar um comprimento usa-se o botão  que se encontra em:



De seguida selecionam-se os dois pontos entre os quais se quer medir a distância.

5. Com base nos resultados anteriores completa a tabela seguinte:

	$\Delta[\quad]$	$\Delta[\quad]$	$\Delta[\quad]$
Comp. cateto oposto ao ângulo de amplitude α			
Comp. hipotenusa			
Comp. cateto adjacente ao ângulo de amplitude α			
Comp. hipotenusa			
Comp. cateto oposto ao ângulo de amplitude α			
Comp. cateto adjacente ao ângulo de amplitude α			

6. O que concluis ao observar a tabela anterior?

Os valores que calculaste na tabela anterior (da pergunta 5) correspondem às seguintes razões trigonométricas:

$\sin \alpha =$	Comp. cateto oposto ao ângulo de amplitude α Comp. hipotenusa
$\cos \alpha =$	Comp. cateto adjacente ao ângulo de amplitude α Comp. hipotenusa
$\tan \alpha =$	Comp. cateto oposto ao ângulo de amplitude α Comp. cateto adjacente ao ângulo de amplitude α

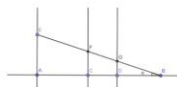
7. Move os pontos A, C e D. Para isso seleciona o "Mover" e depois o ponto.





Compara os quocientes.
O que verificas?

8. Move o ponto E, o que alterará a amplitude do ângulo.
Compara os quocientes. O que verificas?



Botões do GeoGebra (nesta tarefa):

Na janela inicial temos a barra de ferramentas seguinte:



Nesta tarefa usam-se as seguintes ferramentas:

 **Mover** – depois de seleccionares o objeto permite-te movê-lo para onde quiseres.

 **Ponto**: Para criar um novo ponto é necessário clicar primeiro neste botão e depois na zona geométrica.

 **Ponto em objeto**: Este comando permite criar os pontos "F" e "G".

 **Reta**: Marcar dois pontos e depois selecionar este comando para construir uma reta.

 **Segmento**: Existindo 2 pontos, selecionar este comando para construir um segmento cujos extremos são esses dois pontos.

 **Reta Perpendicular**: Começa por desenhar uma reta. Depois para desenhares uma reta perpendicular a essa, seleciona um ponto da primeira reta e depois clica na primeira reta.

 **Reta Paralela**: Seleciona um ponto e depois a reta a partir da qual queres desenhar uma reta paralela a essa.

 **Ângulo**: Seleciona-se esta ferramenta quando se quer traçar o ângulo definido por três pontos.

 **Distância, Comprimento e Perímetro**: Esta ferramenta fornece a distância entre dois pontos.

 **Distância, Comprimento e Perímetro**: Esta ferramenta fornece a distância entre dois pontos.

Adaptado do manual de 9.º ano - *Matematicamente Falando 9* (Conceição & Almeida, 2019)

FICHA DE TRABALHO (AULA DIA 27.05.2024)

 REPÚBLICA PORTUGUESA EDUCAÇÃO	ESCOLA SECUNDÁRIA DO ESTÁGIO Ficha de trabalho Estatística	Ano letivo
		2023/2024
		11.º Ano
Nome do Aluno: _____ Nº _____ Turma: _____ Data: ____/____/2024		

1. O Sr. Silva aquece a sua casa com gás natural. A quantidade de gás utilizada depende da temperatura exterior e o Sr. Silva pretende fazer um estudo dos gastos durante os 9 meses em que se observem menores temperaturas, para poder estabelecer uma previsão para os gastos em função da temperatura exterior.

Na tabela seguinte estão representadas as temperaturas médias observadas em cada um dos meses (em graus celsius) e o respetivo volume de gás despendido pelo Sr. Silva (em metros cúbicos).

Mês	out	nov	dez	jan	fev	mar	abr	mai	jun
Temperatura	16,1	12,4	10,3	8,9	10,1	12,8	13,2	15,9	16,4
Volume de gás	0,01	0,10	0,24	0,26	0,19	0,09	0,05	0,03	0,01

- Qual deverá ser a variável explicativa e a variável de resposta?
 - Represente os dados num referencial ortogonal e diga se é razoável a existência de uma relação linear entre as duas variáveis.
 - Determine as médias dos valores de cada uma das amostras representadas (com os mesmos valores de casas decimais que os valores da amostra).
 - Determine a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados (ou reta de regressão linear) e o coeficiente de correlação linear. Apresente os resultados com arredondamento às centésimas.
 - Utilizando a equação obtida em d., determine qual o consumo esperado para um mês em que a temperatura média seja de 7°C.
2. O Nuno pratica atletismo. Depois de terminada uma prova anotou as suas pulsações. Os dados recolhidos foram os seguintes:

Minutos decorridos após a prova ter terminado	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
Número de pulsações	150	140	128	114	110	90	82	78

- Desenhe o diagrama de dispersão.
- Use a calculadora para obter a reta de regressão e represente-a no gráfico.
- Use a calculadora para determinar quantas pulsações teria o Nuno 1,8 minutos depois da prova ter terminado? E quantas pulsações teria o Nuno 30 minutos depois da prova ter terminado?

3. Uma revista publicou um artigo no qual se escrevia que em Portugal, há uma relação entre a altura das esposas e dos maridos. Considere os seguintes pares que dizem respeito às alturas (em cm) de dez casais.

Esposa (altura em cm)	Marido (altura em cm)
172	185
166	170
169	180
167	175
166	169
163	162
168	167
163	168
164	167
165	166

- Represente os pontos num diagrama de dispersão. Tendo em consideração a representação gráfica obtida, é de esperar que o coeficiente de correlação seja, em valor absoluto, grande ou pequeno? Cerca de 1 ou de -1? Justifique a resposta.
 - Calcule o coeficiente de correlação.
4. Após o início de uma experiência, a temperatura de uma substância foi medida em vários momentos, tendo-se obtido os seguintes resultados:

Tempo após início (min)	2	7	10	12	15	20	24	30
x_i								
Temperatura (°C) y_i	26,5	35,2	39,2	38,4	45,7	48	54,5	62,4

- A partir da nuvem de pontos, indique o tipo de correlação linear existente entre as variáveis.
 - Determine o coeficiente de correlação linear. Apresente a resposta arredondada às décimas.
5. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados, em segundos, de sete atletas que competiram em duas provas de juvenis femininos, no campeonato nacional de desporto escolar.

80 metros barreiras	12,25	11,77	12,98	15,67	15,24	11,95	13,05
100 metros	12,54	12,15	13,98	14,57	14,08	12,20	13,20

Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, responda às questões que se seguem:

- Calcule, com arredondamento às centésimas de segundo, a média dos resultados de cada uma das provas.
- Admita um modelo em que a associação entre as variáveis “resultado na prova dos 80 metros barreiras (x)” e “resultado na prova dos 100 metros (y)” é aproximadamente linear. Considere a

equação $y = ax + b$, da reta de regressão linear. Indique os valores de a , b e do coeficiente de correlação linear, com arredondamento às milésimas.

- c. Tendo em conta o coeficiente linear obtido, pode-se afirmar que a correlação linear é:
1. Positiva fraca
 2. Nula
 3. Negativa forte
 4. Positiva forte
- d. Faça uma estimativa, com arredondamento à centésima de segundo, do resultado do atleta na prova dos 100 metros, sabendo que realizou a prova dos 80 metros barreiras em 13,20 segundos.

6. A temperatura média anual e a latitude de algumas capitais dos países da União Europeia são, aproximadamente, as que estão registadas na tabela ao lado.

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, responda às questões que se seguem:

- a. Calcule a média e o desvio-padrão das variáveis temperatura e latitude.
- b. Averigue se existe algum tipo de correlação entre as variáveis.

Capitais	Temperatura (°C)	Latitude N (°)
Lisboa	19	39
Madrid	19	40
Paris	15	49
Londres	14	53
Amesterdão	13	54
Bruxelas	14	52
Luxemburgo	14	50
Bona	13	52
Roma	22	42
Atenas	24	37
Dublin	13	53
Copenhaga	11	54

7. A Inês está a fazer um plano de treinos que inclui corrida. Em cada treino de corrida utilizou uma aplicação para obter a distância percorrida e a energia gasta. Na tabela apresentam-se os valores registados em alguns desses treinos, sendo x a distância percorrida em km , e y a correspondente energia gasta, em calorias.

Admita como válido o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados na tabela ao lado.

Num dos treinos de corrida, a aplicação não funcionou corretamente, mas a Inês sabe que nesse treino, correu $9 km$.

Estime com base neste modelo de regressão, a energia, em calorias, gasta pela Inês nesse treino de corrida. Na resposta, apresente: os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x , arredondando às centésimas; o valor pedido arredondado às unidades.

Distância percorrida, em km (x)	Energia gasta, em calorias (y)
5	340
6,5	450
7	478
7,7	515
8	550
8,6	580
9,4	630

Resolução da ficha de trabalho:

	Ano letivo	
	2023/2024	
	11.º Ano	
Ficha de trabalho Estatística		
Nome do Aluno: _____ Nº _____ Turma: _____ Data: ____/____/2024		

1. O Sr. Silva aquece a sua casa com gás natural. A quantidade de gás utilizada depende da temperatura exterior e o Sr. Silva pretende fazer um estudo dos gastos durante os 9 meses em que se observem menores temperaturas, para poder estabelecer uma previsão para os gastos em função da temperatura exterior.

Na tabela seguinte estão representadas as temperaturas médias observadas em cada um dos meses (em graus celsius) e o respetivo volume de gás despendido pelo Sr. Silva (em metros cúbicos).

Mês	out	nov	dez	jan	fev	mar	abr	mai	jun
Temperatura	16,1	12,4	10,3	8,9	10,1	12,8	13,2	15,9	16,4
Volume de gás	0,01	0,10	0,24	0,26	0,19	0,09	0,05	0,03	0,01

- a. Qual deverá ser a variável explicativa e a variável de resposta?

Variável explicativa – temperatura

Variável de resposta – volume de gás

- b. Represente os dados num referencial ortogonal e diga se é razoável a existência de uma relação linear entre as duas variáveis.



Existência de uma correlação linear negativa.

- c. Determine as médias dos valores de cada uma das amostras representadas (com os mesmos valores de casas decimais que os valores da amostra).

2-Var	16,1	12,4	10,3	8,9	10,1	12,8	13,2	15,9	16,4
$\bar{x}$	12,9								
$\bar{y}$		0,10888888							
Σx^2	118,1								
Σy^2		0,098							
Σxy	1560,13								
σ_x	2,63396616								
σ_y		0,09206814							
sx	2,785743								
sy		0,09765301							
n	9								
Σxy		10,559							

$$\bar{x} = 12,9^\circ\text{C} \text{ e } \bar{y} = 0,109\text{m}^3$$

- d. Determine a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados (ou reta de regressão linear) e o coeficiente de correlação linear. Apresente os resultados com arredondamento às centésimas.

1

```

LinearReg(ax+b)
a = -0,03386
b = 0,53923321
r = -0,9543928
r^2 = 0,91086571
MSe = 9,7142e-04
y = ax + b
    
```

$$y = -0,03x + 0,54$$

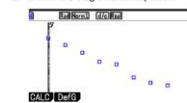
- e. Utilizando a equação obtida em d., determine qual o consumo esperado para um mês em que a temperatura média seja de 7°C .

$$\hat{y} = -0,03 \times 7 + 0,54 = 0,33\text{m}^3$$

2. O Nuno pratica atletismo. Depois de terminada uma prova anotou as suas pulsações. Os dados recolhidos foram os seguintes:

Minutos decorridos após a prova ter terminado	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
Número de pulsações	150	140	128	114	110	90	82	78

- a. Desenhe o diagrama de dispersão.



- b. Use a calculadora para obter a reta de regressão e represente-a no gráfico.

```

LinearReg(ax+b)
a = -21,714285
b = 149,5
r = -0,9921017
r^2 = 0,98426553
MSe = 13,1904761
y = ax + b
    
```

$$y = -21,7x + 149,5$$

- c. Use a calculadora para determinar quantas pulsações teria o Nuno 1,8 minutos depois da prova ter terminado? E quantas pulsações teria o Nuno 30 minutos depois da prova ter terminado?

Substituindo para 1,8 minutos vem que: $\hat{y} = -21,7 \times 1,8 + 149,5 \approx 110$

Substituindo para 30 minutos vem que: $\hat{y} = -21,7 \times 30 + 149,5 \approx -501$

2

Como não é possível ter pulsações negativas percebe-se que o modelo não é fiável para analisar as pulsações 30 minutos após a prova. Considerando que num adulto o ritmo cardíaco normal varia entre 60 e 100 pulsações, podemos assumir o mínimo e determinarmos até quantos minutos após a prova o modelo seria fiável.

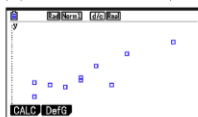
Vem que:

$60 = -21,7x + 149,5 \Leftrightarrow x \approx 4,12$ ou seja, este modelo só era fiável para medir estimar as pulsações até cerca de 4 minutos após a prova.

3. Uma revista publicou um artigo no qual se escrevia que em Portugal, há uma relação entre a altura das esposas e dos maridos. Considere os seguintes pares que dizem respeito às alturas (em cm) de dez casais.

Esposa (altura em cm)	Marido (altura em cm)
172	185
166	170
169	180
167	175
166	169
163	162
168	167
163	168
164	167
165	166

- a. Represente os pontos num diagrama de dispersão. Tendo em consideração a representação gráfica obtida, é de esperar que o coeficiente de correlação seja, em valor absoluto, grande ou pequeno? Cerca de 1 ou de -1? Justifique a resposta.



Por observação visual percebe-se que o coeficiente de correlação é positivo e que é possível traçar uma reta de declive positivo que se aproxime dos pontos do gráfico pelo que o valor do coeficiente será grande, não sendo, no entanto, uma correlação perfeita.

- b. Calcule o coeficiente de correlação.

3

```

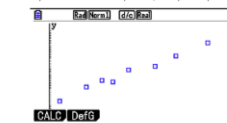
LinearReg(ax+b)
a = 2,16782248
b = 159,80887
r = 0,87269025
r^2 = 0,76158833
MSe = 13,2586685
y = ax + b
    
```

O valor do coeficiente de correlação é de: $r \approx 0,873$.

4. Após o início de uma experiência, a temperatura de uma substância foi medida em vários momentos, tendo-se obtido os seguintes resultados:

Tempo após início (min)	2	7	10	12	15	20	24	30
x_i								
Temperatura ($^\circ\text{C}$) y_i	26,5	35,2	39,2	38,4	45,7	48	54,5	62,4

- a. A partir da nuvem de pontos, indique o tipo de correlação linear existente entre as variáveis.



Correlação positiva

- b. Determine o coeficiente de correlação linear. Apresente a resposta arredondada às décimas.

```

LinearReg(ax+b)
a = 1,21939799
b = 25,4465301
r = 0,9910932
r^2 = 0,98226874
MSe = 2,87662221
y = ax + b
    
```

O valor do coeficiente de correlação é de: $r \approx 1$

5. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados, em segundos, de sete atletas que competiram em duas provas de juvenis femininos, no campeonato nacional de desporto escolar.

80 metros barreiras	12,25	11,77	12,98	15,67	15,24	11,95	13,05
100 metros	12,54	12,15	13,98	14,57	14,08	12,20	13,20

Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, responda às questões que se seguem:

4

- a. Calcule, com arredondamento às centésimas de segundo, a média dos resultados de cada uma das provas.

2-Variable	1-Variable
$\bar{x} = 13.2728571$	$\bar{y} = 13.2457142$
$\Sigma x = 92.91$	$\Sigma y = 92.79$
$\Sigma x^2 = 1247.9873$	$\Sigma y^2 = 1235.9258$
$\sigma x = 1.45438008$	$\sigma y = 0.90893748$
$sx = 1.57088843$	$sy = 0.98178468$
$n = 7$	$\Sigma xy = 1239.022$

$$\bar{x} = 13.27 \text{ seg}; \bar{y} = 13.25 \text{ seg}$$

- b. Admita um modelo em que a associação entre as variáveis "resultado na prova dos 80 metros barreiras (x)" e "resultado na prova dos 100 metros (y)" é aproximadamente linear. Considere a equação $y = ax + b$, da reta de regressão linear. Indique os valores de a , b e do coeficiente de correlação linear, com arredondamento às milésimas.

2-Variable	1-Variable
$a = -0.5648119$	$b = 5.74904859$
$r = 0.90373039$	$r^2 = 0.81673948$
$MS_e = 0.2119054$	$y = ax + b$

$$y = 0.565x + 5.749$$

O valor do coeficiente de correlação é de: $r \approx 0.904$

- c. Tendo em conta o coeficiente linear obtido, pode-se afirmar que a correlação linear é:

1. Positiva fraca
2. Nula
3. Negativa forte
4. Positiva forte

- d. Faça uma estimativa, com arredondamento à centésima de segundo, do resultado do atleta na prova dos 100 metros, sabendo que realizou a prova dos 80 metros barreiras em 13,20 segundos.

$$\hat{y} = 0,565 \times 13,20 + 5,749 = 13,21 \text{ seg}$$

6. A temperatura média anual e a latitude de algumas capitais dos países da União Europeia são, aproximadamente, as que estão registadas na tabela ao lado.

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, responda às questões que se seguem:

- a. Calcule a média e o desvio-padrão das variáveis temperatura e latitude.

Capital	Temperatura (°C)	Latitude N (°)
Lisboa	19	39
Madrid	19	40
Paris	15	49
Londres	14	53
Amsterdão	13	54
Bruxelas	14	52
Luxemburgo	14	50
Borna	13	52
Roma	22	42
Aterras	24	37
Dublin	13	53
Copenhaga	11	54

5

2-Variable	1-Variable
$\bar{x} = 15.9186868$	$\bar{y} = 47.9186868$
$\Sigma x = 101$	$\Sigma y = 3223$
$\Sigma x^2 = 90423559$	$\Sigma y^2 = 15359258$
$\sigma x = 4.07764108$	$\sigma y = 6.19755776$
$n = 12$	$\Sigma xy = 847313796$

2-Variable	1-Variable
$a = -1.4929384$	$b = 71.678271$
$r = -0.9404968$	$r^2 = 0.88453434$
$MS_e = 3.32200455$	$y = ax + b$

$$\text{Temperatura: } \bar{x} = 16^\circ\text{C e } s = 4^\circ\text{C}$$

$$\text{Latitude: } \bar{x} = 47^\circ \text{ e } s = 6^\circ$$

- b. Averigue se existe algum tipo de correlação entre as variáveis.

2-Variable	1-Variable
$a = -1.4929384$	$b = 71.678271$
$r = -0.9404968$	$r^2 = 0.88453434$
$MS_e = 3.32200455$	$y = ax + b$

Existe uma correlação linear negativa forte.

7. A Inês está a fazer um plano de treinos que inclui corrida. Em cada treino de corrida utilizou uma aplicação para obter a distância percorrida e a energia gasta. Na tabela apresentam-se os valores registados em alguns desses treinos, sendo x a distância percorrida em km, e y a correspondente energia gasta, em calorias.
- Admita como válido o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados na tabela ao lado.

Distância percorrida, em km (x)	Energia gasta, em calorias (y)
5	340
6,5	450
7	478
7,7	515
8	550
8,6	580
9,4	630

Num dos treinos de corrida, a aplicação não funcionou corretamente, mas a Inês sabe que nesse treino, correu 9 km. Estime com base neste modelo de regressão, a energia, em calorias, gasta pela Inês nesse treino de corrida. Na resposta, apresente: os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x , arredondando às centésimas; o valor pedido arredondado às unidades.

6

2-Variable	1-Variable
$a = 65.5579496$	$b = 17.2678611$
$r = 0.99811883$	$r^2 = 0.9962408$
$MS_e = 40.8585393$	$y = ax + b$

$$y = 65,56x + 17,27$$

Para $x = 9 \text{ km}$ vem que: $\hat{y} = 65,56 \times 9 + 17,27 = 607 \text{ calorias}$

7

ENUNCIADO DA TAREFA DO DIA DOS NAMORADOS PARA O 9.º ANO

No dia 14 de fevereiro celebra-se o Dia do Amor, da Amizade e isso estende-se à Matemática.
Com um pouco de imaginação e criatividade, usa os teus conhecimentos e cria  reciclados.

Valorizamos o uso de material reciclado porque a sustentabilidade ambiental é importante. Podes criar corações de qualquer tipo, desde que sejam espetaculares!

Deixamos-te aqui algumas ideias do que podes construir.
Usando tampas de garrafas:



Caixas de cartão que podes decorar a gosto:



Rolhas de cortiça ou latas:

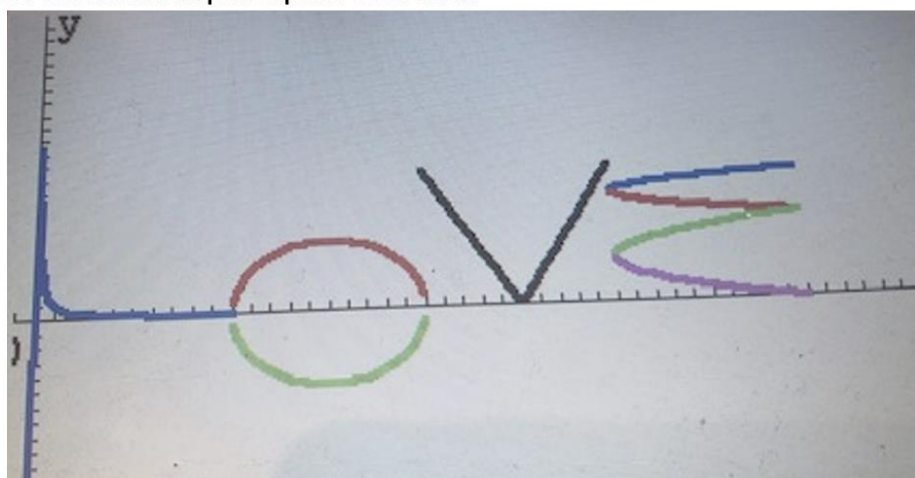


O importante é usares a criatividade!

ENUNCIADO DA TAREFA DO DIA DOS NAMORADOS PARA O 11.º ANO

No dia 14 de fevereiro celebra-se o Dia do Amor, e temos um desafio para ti.

Primeiro usa a tua calculadora para exprimir o teu amor:



Que funções tens de usar?

O teu segundo desafio começa agora: como é que podes mostrar o amor aos teus colegas?

Pensa numa forma criativa de expores o teu trabalho na escola e celebra o amor!



**CARTAZ DESENVOLVIDO PELO NÚCLEO DE ESTÁGIO
PARA DINAMIZAR A EXPOSIÇÃO "SEMPRE HOUE PRO-
BLEMAS"**

EXPOSIÇÃO
**SEMPRE HOUE
PROBLEMAS**

11 A 15
DE
MARÇO



Local: Biblioteca da Escola

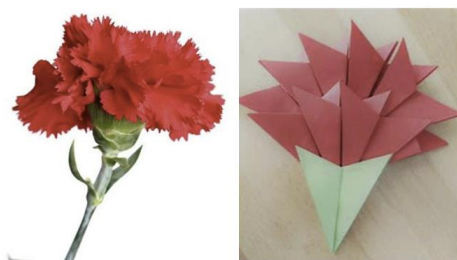
Conhece um pouco sobre a história da Matemática através da exposição *Sempre Houve Problemas*. Regressa ao século XVI, aceita os desafios e resolve os problemas dos nossos antepassados.

NÚCLEO DE ESTÁGIO DE MATEMÁTICA

ENUNCIADO DA TAREFA DO 25 DE ABRIL PARA O 9.º ANO

O dia 25 de abril de 1974 foi um marco da história portuguesa e este ano celebram-se os 25 anos deste acontecimento histórico.

Um dos símbolos da revolução foi o cravo, que muitas vezes é construído recorrendo à geometria.

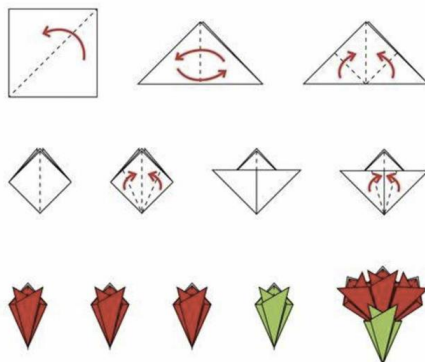


Nesta atividade propomos-te que vejas o seguinte vídeo:

[Origami Carnation Flower | Paper Flower | Origami Craft Ideas \(youtube.com\)](#)

E celebres o 25 de abril e a Matemática criando um cravo em origami.

Ou alternativamente podes guiar-te pela explicação seguinte:



Acrescenta-lhe um pé e partilha uma mensagem!



QUESTIONÁRIO DISPONIBILIZADO NA CLASSROOM A SEGUIR AO WORKSHOP

Os dados recolhidos neste questionário serão usados exclusivamente como materiais de trabalho, estando garantida a vossa privacidade e anonimato, ou seja, as vossas opiniões não serão partilhadas de forma individualizada, nem as vossas respostas terão impacto na vossa nota final.

E-mail *

E-mail válido

Este formulário está coletando e-mails. [Alterar configurações](#)

Indica o teu nome *

Texto de resposta curta

Descreve a atividade que realizaste no dia 14 de fevereiro? *

Texto de resposta longa

O que aprendeste nessa aula? *

Texto de resposta longa

Onde é que tiveste mais dificuldades? *

Texto de resposta longa

Gostaste de usar a calculadora? *

☐ Sim

☐ Não

Porquê? *

Texto de resposta longa

Como é que usares a calculadora para resolver o exercício te ajudou?

Texto de resposta longa

QUESTIONÁRIO DISPONIBILIZADO NA CLASSROOM A SEGUIR À TAREFA 1

Modelação do comprimento de uma vela (21 de fevereiro)

B I U ↺ ↻

Os dados recolhidos neste questionário serão usados exclusivamente como materiais de trabalho, estando garantida a vossa privacidade e anonimato, ou seja, as vossas opiniões não serão partilhadas de forma individualizada, nem as vossas respostas terão impacto na vossa nota final.

E-mail *

E-mail válido

Este formulário está coletando e-mails. [Alterar configurações](#)

Indica o teu nome *

Texto de resposta curta

Descreve a tua aula de hoje, explicando detalhadamente o que fizeste: *

Texto de resposta longa

Indica os aspetos positivos do teu trabalho: *

Texto de resposta longa

Indica os aspetos negativos do teu trabalho: *

Texto de resposta longa

De tudo o que fizeste hoje na aula onde é que sentiste mais dificuldades? *

Texto de resposta longa

O que é que gostaste mais de fazer? *

Texto de resposta longa

O que aprendeste? *

Texto de resposta longa

QUESTIONÁRIO DISPONIBILIZADO NA CLAS-SROOM A SEGUIR À TAREFA 2

Aproximando a Matemática através de um canudo

B *I* U  

Os dados recolhidos neste questionário serão usados exclusivamente como materiais de trabalho, estando garantida a vossa privacidade e anonimato, ou seja, as vossas opiniões não serão partilhadas de forma individualizada, nem as vossas respostas terão impacto na vossa nota final.

E-mail *

E-mail válido

Este formulário está coletando e-mails. [Alterar configurações](#)

Indica o teu nome *

Texto de resposta curta

Descreve a tua aula de hoje, explicando detalhadamente o que fizeste: *

Texto de resposta longa

Indica os aspetos positivos do teu trabalho: *

Texto de resposta longa

Indica os aspetos negativos do teu trabalho: *

Texto de resposta longa

De tudo o que fizeste hoje na aula onde é que sentiste mais dificuldades? *

Texto de resposta longa

O que é que gostaste mais de fazer? *

Texto de resposta longa

O que aprendeste? *

Texto de resposta longa



GUIÃO DA ENTREVISTA

Esta entrevista pretende ajudar-me a perceber a tua opinião sobre o trabalho desenvolvido ao longo destas aulas relativas à aprendizagem da proporcionalidade e à realização de tarefas de modelação matemática.

Os dados recolhidos nesta entrevista só serão usados no âmbito do trabalho de mestrado que estou a realizar, e não terão nenhuma influência na tua classificação na disciplina.

Introdução:

O que pensas da disciplina de Matemática?

[aprofundar]

Gostas? Não gostas? Porquê?

Como é que descreves os teus hábitos de estudo? Costumas fazer os trabalhos de casa?

Parte I - Perspetivas sobre a modelação matemática:

Ao longo das últimas duas semanas lecionei algumas aulas. O que mais gostaste destas aulas que eu lecionei? E menos?

[aprofundar]

O que mais gostaste das tarefas de modelação matemática que realizaste?

Consegues descrever-me qual a estratégia que usaste para as resolver?

O que menos gostaste das tarefas de modelação matemática que realizaste?

Que dificuldades sentiste nas tarefas de modelação matemática [se alguma]?

Achas que o que aprendeste sobre a utilização da calculadora te facilitou para a realização da última tarefa?

No decorrer destas aulas estivemos a explorar o tema da proporcionalidade. Recordavas-te dos conceitos de proporcionalidade direta que tinhas aprendido ao longo dos anos anteriores do ensino básico?

Consegues-me descrever o que aprendeste?

Que dificuldades sentiste nos conteúdos matemáticos da proporcionalidade?

Achas que a modelação matemática te ajudou a perceber melhor a proporcionalidade direta e inversa, assim como a representação gráfica das suas funções?

Se sim como? Se não, o que achas que poderia ter sido útil?

Parte II: Tarefa no GeoGebra sobre proporcionalidade direta

A tarefa está disponível em:

<https://www.geogebra.org/m/brdhrdqn>

Função de proporcionalidade direta

Autor: Ana Lopes, Maria

Na realização de uma determinada experiência, foi necessário encher, com água, um recipiente, com a forma de um prisma, inicialmente vazio. A quantidade de água que sai da torneira, por unidade de tempo, até o recipiente ficar cheio, é **constante**.

Com esta atividade pretende-se que consigas perceber qual é a relação entre a altura da água, num recipiente, com o tempo que decorre desde o início até ao enchimento do mesmo. Identificar gráficos de recipientes a partir das características das suas formas.

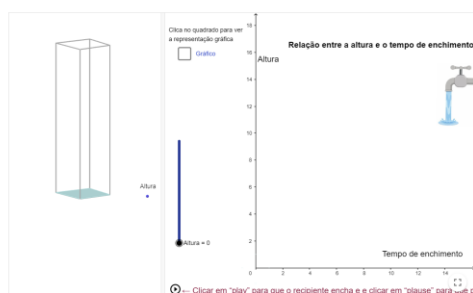
Questões essenciais:

Qual é a relação entre a altura de um recipiente e o tempo de enchimento, de acordo com as características das suas formas?

Que características, das suas formas, terão os recipientes para que o seu gráfico represente uma função de proporcionalidade direta?

Tarefa 1

Observa um recipiente com a forma de um prisma, clica em "play" para veres o enchimento do recipiente.



Parte III: Tarefa de proporcionalidade inversa

Uma viagem de final de curso vai custar 1000 €, mas o grupo organizador quer vender rifas para a viagem para conseguirem angariar 800€ para despesas extra. As rifas serão todas vendidas ao mesmo preço.

O número de rifas (n) é inversamente proporcional ao preço (p), em euros, de cada rifa.

Completa a tabela seguinte, explicando o raciocínio que utilizaste:

Número de rifas (n)	100	150	300	?	?
Preço de cada rifa, em euros (p)	18	?	?	1,80	1,50

O que concluíste? Qual é a constante de proporcionalidade inversa?

Recorreste à calculadora? Como é que a calculadora te ajudou?

Para terminar escreve p como função de n .

Adaptado do manual *Matemática Dinâmica do 9.º ano de escolaridade* (Faria et al., 2019)

Parte IV: Autoavaliação

Para cada um dos aspetos seguintes atribuiu a classificação de "Não concordo", "Concordo só um pouco", "Concordo", "Concordo muito"

Frases:	Não concordo	Concordo só um pouco	Concordo	Concordo muito
As tarefas de modelação matemática ajudaram-me a perceber melhor a matéria.				
O que mais gostei das tarefas de modelação matemática foi que trabalhei em grupo.				
O que mais gostei das tarefas foi o facto de serem diferentes e nos obrigarem a encontrar uma estratégia para as resolver.				
Senti-me muito empenhado nestas aulas.				
Tive muita dificuldade em acompanhar a matéria.				
O que mais gostei foi de aprender a usar a calculadora gráfica.				

WORKSHOP (14.02.2024)

Workshop de Introdução à utilização da calculadora gráfica:

O Tomás está a estudar a relação entre a massa, m , do alumínio [sólido] e o seu volume, v . Das experiências que realizou, a uma temperatura de 20°C e a uma pressão atmosférica normal, registou a massa e o respetivo volume na tabela seguinte.

Volume (cm ³)	0,5	1,5	2	3
Massa (gramas)	1,35	4,05	5,4	8,1

1. As grandezas m e v são diretamente proporcionais? Em caso afirmativo, qual é a constante de proporcionalidade?

(esta resolução foi feita no quadro)

$$\frac{1,35}{0,5} = 2,7 ; \frac{4,05}{1,05} = 2,7 ; \frac{5,4}{2} = 2,7 ; \frac{8,1}{3} = 2,7$$

Então a constante de proporcionalidade é: $\frac{m}{v} = 2,7$

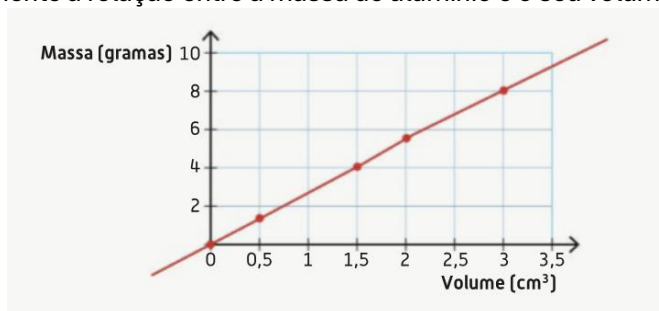
O quociente entre a massa e o volume são constantes pelo que as grandezas são diretamente proporcionais.

2. Qual será a expressão algébrica que traduz esta situação?

(esta resolução foi feita no quadro)

$$f(x) = 2,7x$$

3. Representa graficamente a relação entre a massa do alumínio e o seu volume.



Tarefa para resolverem com o vosso(a) colega de carteira:

A sustentabilidade ambiental é importante, portanto vamos estudar como varia o nível da água em função do *tempo* que uma torneira está aberta. Sabe-se que, por cada minuto, o nível de água sobe 6mm.

1. Usando a informação disponibilizada no enunciado preencham a seguinte tabela:

TEMPO (minutos)	0	1	2	3
NÍVEL DA ÁGUA (mm)				

2. Qual será o nível de água no recipiente ao fim de 1 minuto? E ao fim de 15 minutos?
3. Qual será a expressão algébrica que traduz esta relação?
4. Representem graficamente, recorrendo à calculadora, a relação entre o *tempo* e o *nível da água*.
5. Comentem a seguinte afirmação. Se o recipiente tem 15 centímetros de altura, demorará de mais 30 minutos a encher.

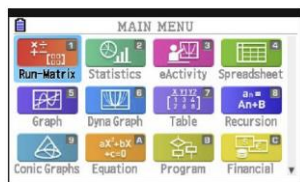
Adaptado do manual de 7.º ano *Matemática Sob Investigação 7* (Conceição & Almeida, 2023)

Manual de apoio:

CASIO fx-9860G III:

Explicação de como se faz um gráfico de pontos na calculadora:

Selecionar o 2: Estatística

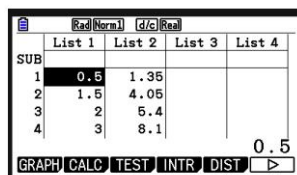


Introduzir os dados: Exemplo dos dados a introduzir

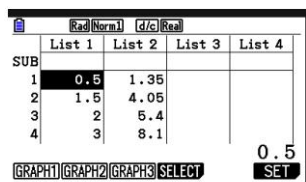
Volume (cm ³)	0,5	1,5	2	3
Massa (gramas)	1,35	4,05	5,4	8,1

De acordo com este exemplo, na lista 1 (List 1) devem colocar os dados do volume e na lista 2 (List 2) os dados da massa.

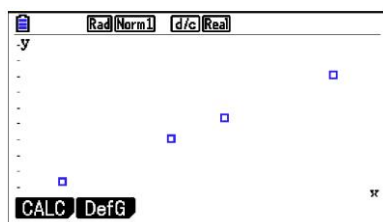
Use o ponto para introduzir números decimais, ou seja, introduzam "0.5". Após introduzirem cada um dos valores carreguem no **EXE**.



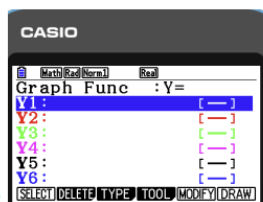
Quando tiverem introduzido todos os dados carreguem no F1 (**GRAPH**)



E novamente no F1 (**GRAPH 1**) e aparecerá a seguinte janela:



Carreguem F2 (DefG).



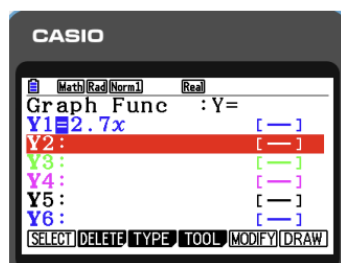
Aparece a seguinte janela:

No Y1: introduzam a expressão obtida neste exemplo: $2,7x$

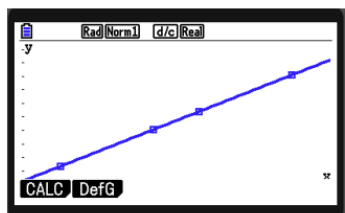
Para introduzirem o x têm que usar a tecla:



De seguida, carreguem no EXE.



Use a seta $\uparrow$ para voltarem ao Y1, carreguem em F1 (SELECT) e depois no F6 (DRAW) e obtêm o gráfico.



Como a função definida passa pelos pontos introduzidos, o modelo introduzido está ajustado aos dados (é um bom modelo).

Este é o procedimento que devem usar para representar um gráfico de pontos e a respetiva função, neste modelo de calculadora.

TAREFA 1 (21.02.2024)

Tarefa 1: "Modelação do comprimento de uma vela"

Cada grupo tem uma vela de aniversário assente numa base e vocês querem perceber quanto *tempo* pode permanecer acesa.

Como podemos perceber isso?

Vamos fazer uma experiência:



1 - Preencham a tabela seguinte com base nas instruções a seguir à tabela:

Tempo	Comprimento da vela	Quantidade de vela ardida

Comecem por medir o comprimento inicial da vela (0 segundos).

Acendam a vela e mantenham-na acesa durante 30 segundos, e depois apaguem-na. Registem novamente o comprimento.

Repitam o processo mais 3x, e registem os dados recolhidos.

2 - Passados 4 minutos, que porção de vela ardeu? Expliquem o vosso raciocínio.

3 - Quanto tempo pode permanecer a vela acesa. Podem explicar porquê?

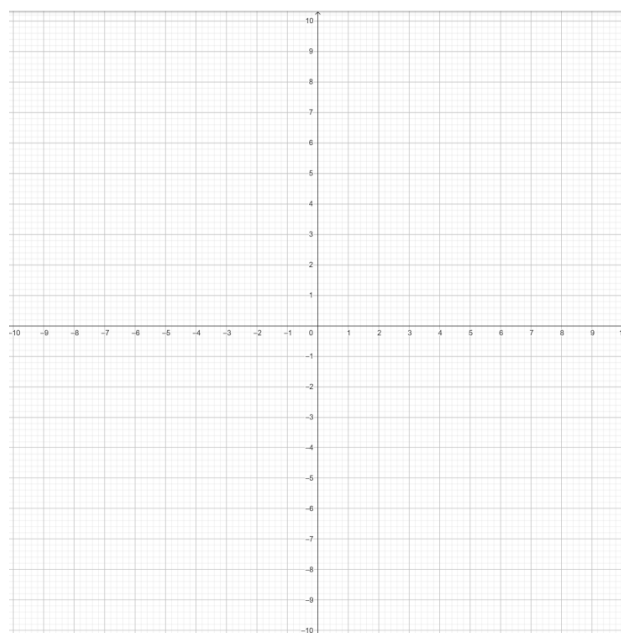
4- Que relação existe entre o tempo e o comprimento da vela? Expliquem.

5 - Indiquem uma expressão algébrica que modele [traduza] esta situação.

6 - Com base nos conhecimentos adquiriram representem graficamente na calculadora a função que relaciona o tempo (t em segundos) com a quantidade de vela ardida ao fim desse tempo (v em cm).

Acham que o modelo que encontraram é um bom modelo para os dados? Explica porquê.

Para registo desenhem aqui o gráfico obtido na calculadora.



Adaptado do manual de 7.º ano *Matemática Sob Investigação 7* (Conceição & Almeida, 2023)

TAREFA 2 (06.03.2024)

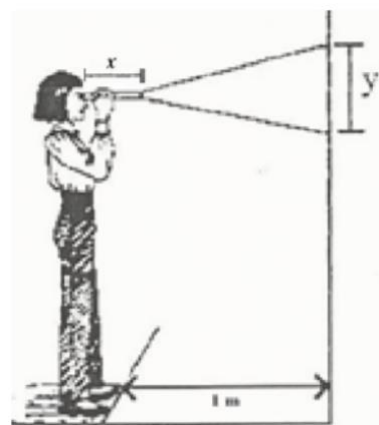
Tarefa 2: "Aproximando a Matemática através de um canudo"

As dimensões de um telescópio, bem como as lentes utilizadas, são determinantes nas descobertas efetuadas pelos astrónomos.

Nesta tarefa pretende-se que relacionem as dimensões de uma imagem que se consegue observar através de um cilindro oco com as dimensões do mesmo cilindro.

Assim, devem fazer o seguinte:

- Fixar uma fita métrica numa parede;
- Um dos elementos do grupo deve posicionar-se a 1 m da parede, com o cilindro oco de um rolo do papel de cozinha (de 20 cm) na mão;
- Registem o comprimento da fita visualizada à vossa frente como se observa na figura ao lado;
- Repitam o procedimento, cortando sucessivamente, com uma tesoura, 2 cm , no comprimento do rolo, e registando os dados obtidos na tabela abaixo:



Comprimento do rolo em cm (x)	20	18	16	14	12
Comprimento visualizado da fita em cm (y)					



Para evitar erros de medida: É muito importante que seja sempre o mesmo elemento a medir o comprimento visualizado da fita, que se posicione sempre no mesmo sítio e que mantenha a cabeça na mesma posição.

Conseguem identificar a relação entre o *comprimento do rolo* e o *comprimento da fita*?

Como descrevem essa relação por palavras?

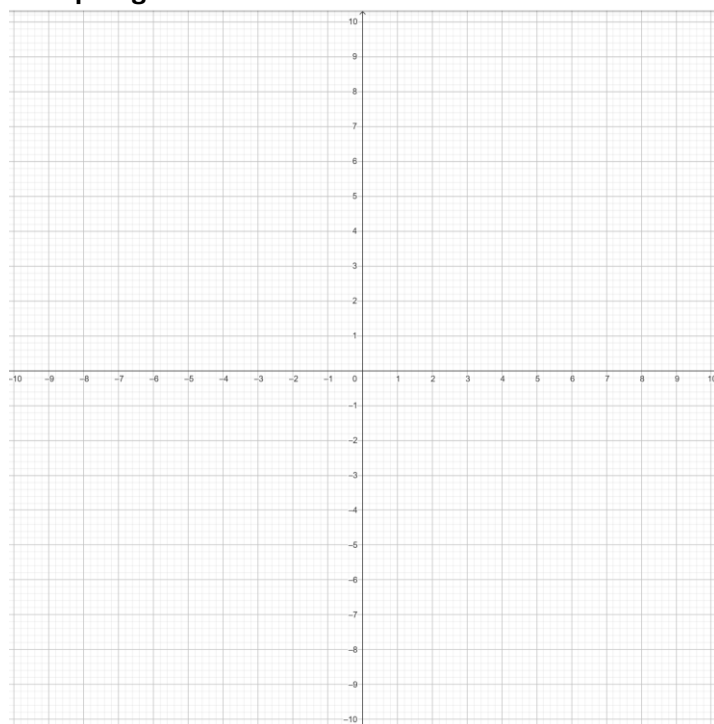
Tentem descobrir o modelo que melhor se ajusta aos dados obtidos.

Agora que já conhecem a relação, introduzam os dados recolhidos na calculadora gráfica e construam um gráfico de pontos.

Depois introduzam a expressão que já encontraram.

Observem o que obtiverem na calculadora e comentem se acham que o modelo que encontraram é um bom modelo para os dados que recolheram?

Para registo desenhem aqui o gráfico obtido na calculadora.



Para terminar: Qual deverá ser o comprimento do rolo de papel de cozinha para que se consiga visualizar 15 cm de fita na parede?

Adaptado de Grupo de trabalho T3 (2011)



2024

Ana Cristina Lopes

RELATÓRIO DE ESTÁGIO – MODELAÇÃO MATEMÁTICA NA APRENDIZAGEM DA PROPORCIONALIDADE
NO 9.º ANO DE ESCOLARIDADE