



**Nuno Rafael da Silva Peres**

Mestre em Engenharia Civil

## **Formulações da Teoria Generalizada de Vigas para barras de parede fina de eixo curvo**

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em  
**Engenharia Civil**

Orientador: Rodrigo de Moura Gonçalves, Professor Associado  
com Agregação, Universidade NOVA de Lisboa  
Co-orientador: Dinar Reis Zamith Camotim, Professor Catedrático,  
Universidade de Lisboa

Júri

Presidente: Professor Doutor Fernando Manuel dos Anjos Henriques  
Arguentes: Professor Doutor Eduardo de Moraes Barreto Campello  
Professor Doutor Manuel Ritto-Corrêa  
Vogais: Professor Doutor José Manuel de Almeida César de Sá  
Professor Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves  
Professor Doutor Corneliu Cismaşiu





## **Formulações da Teoria Generalizada de Vigas para barras de parede fina de eixo curvo**

Copyright © Nuno Rafael da Silva Peres, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

Esta tese é o culminar do trabalho desenvolvido ao longo dos últimos quatro anos. A sua realização nunca teria sido possível sem o contributo, direto ou indireto, de um conjunto de pessoas, às quais gostaria de aqui deixar o meu mais sincero agradecimento.

Em primeiro lugar, agradeço ao meu orientador científico, o Professor Rodrigo Gonçalves, com o qual tem sido um privilégio trabalhar, não só ao longo deste trabalho, mas desde o início da nossa colaboração em 2013. Estou-lhe eternamente grato pelos conhecimentos transmitidos, pela dedicação, disponibilidade e incentivo demonstrados, pelo rigor e excelência com os quais rege o seu trabalho.

Agradeço também ao Professor Dinar Camotim, meu coorientador, por toda a ajuda que me ofereceu ao longo destes anos, permitindo-me crescer como investigador.

De todos os docentes com quem me cruzei ao longo do meu percurso académico, seria impensável não deixar uma palavra de agradecimento à Professora Ana Luísa Custódio, por todas as conversas que tivemos ao longo destes anos que, de certa forma, me ajudaram a decidir um rumo a tomar no futuro.

Agradeço à minha família, em especial aos meus pais, irmão e avós, por todo o apoio incondicional demonstrado e pelos sacrifícios suportados que me permitiram chegar até esta etapa da minha vida.

Deixo um enorme agradecimento a todos os meus amigos. Em particular, agradeço ao André R., à Carolina, ao Gonçalo, à Margarida e ao Miguel por todas as *vivências* que passámos. Ao Alessandro, ao André B., ao Diogo, à Flávia, ao João e ao Rolando por aguentarem as tardes/noites infindáveis de jogos. Aos meus amigos de *longa* data, especialmente à Alexandra, ao António, à Diana, à Eunice, à Isa e à Neuza.

*Grazie Faustino per il supporto, la comprensione e la pazienza.*

Agradeço aos meus colegas de doutoramento David H., David M. e Hugo Rebelo pela companhia, bons momentos e ajuda.

Agradeço ainda à Fundação para a Ciência e a Tecnologia pelo financiamento concedido através da bolsa de doutoramento SFRH/BD/120062/2016.

Finalmente, gostaria de dedicar esta tese à memória do meu avô.



# Resumo

---

Nesta tese desenvolvem-se, implementam-se (através do método dos elementos finitos) e validam-se formulações da Teoria Generalizada de Vigas (ou GBT, da sua designação em língua inglesa *Generalized Beam Theory*) para modelar rigorosamente e eficientemente o comportamento linear e geometricamente não-linear de barras de parede fina curvas e/ou pré-torcidas. Demonstra-se que os elementos finitos de barra propostos constituem uma alternativa viável face a modelos de elementos finitos de casca, uma vez que permitem uma melhor interpretação do comportamento estrutural e envolvem um esforço computacional mais reduzido.

O trabalho foi desenvolvido em duas fases. Em primeiro lugar desenvolveu-se uma extensão da GBT clássica (para barras retas) para o estudo de barras de eixo circular. Esta formulação permite (i) analisar qualquer tipo de secção transversal (com paredes retas), o que requereu desenvolver procedimentos para a determinação dos modos de deformação da secção que dependem do raio de curvatura, e (ii) recuperar as equações das teorias clássicas de Winkler e de Vlasov. Foram desenvolvidos dois elementos finitos, um de compatibilidade e um misto. O elemento misto permite eliminar os fenómenos de *locking* presentes no elemento de compatibilidade.

Em segundo lugar desenvolveu-se uma formulação geometricamente exata para barras de parede fina de secção deformável e configuração inicial arbitrária. Esta contribuição permite estudar problemas em que a configuração inicial da barra pode ser curva e/ou torcida e envolvendo grandes deslocamentos, rotações finitas e deformação da secção transversal.

Os exemplos numéricos apresentados ao longo da tese demonstram que as formulações desenvolvidas fornecem resultados muito precisos com um reduzido número de graus de liberdade (elementos finitos e modos de deformação).

**Palavras-chave:** Barras de eixo curvo e pré-torcido. Barras de parede fina. Teoria Generalizada de Vigas (GBT). Deformação da secção transversal. Rotações finitas. Formulações geometricamente exatas.

---



# Abstract

---

## Generalised Beam Theory formulations for thin-walled bars with curved axis

In this thesis, Generalised Beam Theory-based (GBT) formulations are developed, implemented (through the finite element method) and validated, aiming at modelling, rigorously and efficiently, the linear and geometrically non-linear behaviour of pre-curved and/or pre-twisted thin-walled bars. It is shown that the proposed finite elements constitute a reliable alternative to shell finite element models, as they allow a better interpretation of the structural behaviour and involve a reduced computational effort.

This work was developed in two phases. First, an extension of the classic GBT (for straight bars) was developed to study the linear behaviour of bars with circular axis. This formulation (i) allows for the analysis of any type of cross-section (with straight walls), a task that required developing procedures to calculate the cross-section deformation modes that are dependent on the curvature radius, and (ii) recovers the classic equations of the Winkler and Vlasov theories. A displacement-based and a mixed displacement-strain-based finite element were developed. The mixed element is capable of eliminating all locking phenomena which arise in the displacement-based one.

Second, a geometrically exact formulation was developed for thin-walled bars with deformable cross-section and arbitrary initial configurations. This contribution allows studying problems where the initial configuration of the bar is curved and/or twisted and involving large displacements, finite rotations, and cross-section deformation.

The numerical examples shown throughout the thesis show that the proposed formulations lead to very accurate results using a reduced number of degrees-of-freedom (finite elements and deformation modes).

**Keywords:** Curved and twisted bars. Thin-walled bars. Generalised Beam Theory (GBT). Cross-section deformation. Finite rotations. Geometrically exact formulations.

---





# Índice

|                                                         |            |
|---------------------------------------------------------|------------|
| <b>Lista de Figuras</b>                                 | <b>xv</b>  |
| <b>Lista de Abreviaturas, Siglas e Símbolos</b>         | <b>xix</b> |
| <b>1 Introdução</b>                                     | <b>1</b>   |
| 1.1 Considerações gerais . . . . .                      | 1          |
| 1.2 Objetivos . . . . .                                 | 5          |
| 1.3 Organização da tese . . . . .                       | 6          |
| 1.4 Publicações . . . . .                               | 7          |
| <b>2 Conceitos Fundamentais</b>                         | <b>9</b>   |
| 2.1 Introdução . . . . .                                | 9          |
| 2.2 Notação . . . . .                                   | 9          |
| 2.3 A derivada direcional . . . . .                     | 10         |
| 2.4 Álgebra tensorial . . . . .                         | 11         |
| 2.4.1 Vetores . . . . .                                 | 11         |
| 2.4.2 Tensores de 2. <sup>a</sup> ordem . . . . .       | 12         |
| 2.4.3 O operador gradiente . . . . .                    | 15         |
| 2.5 Rotações finitas e infinitesimais . . . . .         | 16         |
| 2.5.1 Rotação de vetores e tensores . . . . .           | 16         |
| 2.5.2 O tensor de rotação . . . . .                     | 18         |
| 2.5.3 Rotações infinitesimais e <i>spins</i> . . . . .  | 21         |
| 2.6 Teoria Generalizada de Vigas . . . . .              | 23         |
| 2.6.1 Equações fundamentais da GBT linear . . . . .     | 25         |
| 2.6.2 Determinação dos modos de deformação . . . . .    | 31         |
| <b>3 Formulação linear para barras de eixo circular</b> | <b>35</b>  |
| 3.1 Introdução . . . . .                                | 35         |
| 3.2 Revisão da literatura . . . . .                     | 36         |
| 3.3 Relações deformações-deslocamentos . . . . .        | 38         |
| 3.3.1 Descrição cinemática da GBT . . . . .             | 42         |
| 3.4 Tensão e equilíbrio . . . . .                       | 45         |
| 3.5 Hipóteses simplificativas da GBT . . . . .          | 48         |

|          |                                                                                           |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.6      | As teorias de Winkler e Vlasov . . . . .                                                  | 50         |
| 3.6.1    | Comparação com a teoria clássica de Winkler . . . . .                                     | 52         |
| 3.6.2    | Comparação com a teoria clássica de Vlasov . . . . .                                      | 56         |
| 3.7      | Determinação dos modos de deformação . . . . .                                            | 60         |
| 3.7.1    | Abordagem A1 . . . . .                                                                    | 60         |
| 3.7.2    | Abordagem A2 . . . . .                                                                    | 62         |
| 3.8      | Formulação de um elemento finito de compatibilidade . . . . .                             | 67         |
| 3.9      | Formulação de um elemento finito misto . . . . .                                          | 74         |
| 3.10     | Exemplos numéricos . . . . .                                                              | 77         |
| 3.10.1   | Aplicação da abordagem A1 para estudar secções em I . . . . .                             | 79         |
| 3.10.2   | Secção quadrada . . . . .                                                                 | 86         |
| 3.10.3   | Secção em C com reforços sujeita a uma carga distorcional . . . . .                       | 87         |
| 3.10.4   | Secção fechada com três células sujeita a uma carga transversal<br>excêntrica . . . . .   | 91         |
| 3.10.5   | Secção fechada bitrapezoidal . . . . .                                                    | 93         |
| 3.10.6   | Comparação entre os elementos de compatibilidade e misto . . . . .                        | 96         |
| 3.11     | Sumário . . . . .                                                                         | 105        |
| <b>4</b> | <b>Formulação geometricamente exata para barras de eixo curvo</b>                         | <b>107</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .                                                                      | 107        |
| 4.2      | Revisão da literatura . . . . .                                                           | 108        |
| 4.3      | Descrição cinemática . . . . .                                                            | 110        |
| 4.4      | Deformação . . . . .                                                                      | 113        |
| 4.5      | Tensão e equilíbrio . . . . .                                                             | 119        |
| 4.6      | Formulação de um elemento finito . . . . .                                                | 120        |
| 4.6.1    | Variações de $\Lambda$ , $\Gamma$ e $K$ . . . . .                                         | 121        |
| 4.6.2    | Equações em função dos parâmetros cinemáticos . . . . .                                   | 122        |
| 4.6.3    | Interpolação dos parâmetros cinemáticos . . . . .                                         | 128        |
| 4.7      | Exemplos numéricos . . . . .                                                              | 130        |
| 4.7.1    | Barras pré-torcidas . . . . .                                                             | 134        |
| 4.7.2    | Barras com eixo inicial dado por uma curva tridimensional . . . . .                       | 136        |
| 4.7.3    | Barras de eixo circular . . . . .                                                         | 140        |
| 4.8      | Sumário . . . . .                                                                         | 146        |
| <b>5</b> | <b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>                                              | <b>149</b> |
| 5.1      | Conclusões . . . . .                                                                      | 149        |
| 5.1.1    | Conclusões relativas à formulação linear para barras de eixo circular                     | 149        |
| 5.1.2    | Conclusões relativas à formulação geometricamente exata para bar-<br>ras curvas . . . . . | 151        |
| 5.2      | Desenvolvimentos futuros . . . . .                                                        | 152        |
|          | <b>Referências</b>                                                                        | <b>155</b> |

|                                                     |            |
|-----------------------------------------------------|------------|
| <b>Anexos</b>                                       | <b>169</b> |
| <b>A Formulação de um elemento finito de Vlasov</b> | <b>169</b> |



# Lista de Figuras

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Helix Bridge, Singapura (fonte: <a href="http://www.arup.com/projects/helix-bridge">www.arup.com/projects/helix-bridge</a> ). . .                                                                                                                                                                                                       | 1  |
| 1.2 | Helix Bridge, Singapura: vista do tabuleiro (fonte: <a href="http://www.arup.com/projects/helix-bridge">www.arup.com/projects/helix-bridge</a> ). . . . .                                                                                                                                                                               | 2  |
| 1.3 | Lachlan's Line Bridge, Sydney, Austrália (fonte: <a href="http://www.arup.com/projects/lachlans-line-bridge-sydney">www.arup.com/projects/lachlans-line-bridge-sydney</a> ). . . . .                                                                                                                                                    | 2  |
| 1.4 | Lachlan's Line Bridge: vista aérea (fonte: <a href="http://www.kistudio.com.au/project/lachlans-line-pedestrian-cycle-bridge">www.kistudio.com.au/project/lachlans-line-pedestrian-cycle-bridge</a> ). . . . .                                                                                                                          | 3  |
| 1.5 | Lachlan's Line Bridge: vista do tabuleiro (fonte: <a href="http://www.landcom.com.au/places/lachlans-line-at-macquarie-park">www.landcom.com.au/places/lachlans-line-at-macquarie-park</a> ). . . . .                                                                                                                                   | 3  |
| 1.6 | Dobragem por rolos de uma barra com secção em I em torno do eixo de maior inércia (fonte: <a href="http://www.cmrp.com/blog/industry-news/celebrated-architect-jeanne-gang-visits-a-metal-working-factory-2.html">www.cmrp.com/blog/industry-news/celebrated-architect-jeanne-gang-visits-a-metal-working-factory-2.html</a> ). . . . . | 4  |
| 1.7 | Dobragem por rolos de uma barra com secção em C num forma helicoidal (fonte: <a href="http://www.greinerindustries.com/services/rolling-forming/">www.greinerindustries.com/services/rolling-forming/</a> ). . . . .                                                                                                                    | 4  |
| 1.8 | Dobragem por indução de um tubo circular (Barnshaw, 2018). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                      | 4  |
| 2.1 | Secção arbitrária de parede fina e referencias locais para cada parede. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                         | 25 |
| 2.2 | Ilustração da hipótese de Kirchhoff no plano $xz$ , com $w_{,x} > 0$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                          | 26 |
| 2.3 | Secção em C com reforços: discretização e graus de liberdade no plano. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                          | 32 |
| 3.1 | Eixos globais e locais para uma barra de parede fina de eixo circular. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                          | 39 |
| 3.2 | Orientação positiva das forças exteriores para o caso da teoria de Winkler. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 52 |
| 3.3 | Orientação positiva das forças exteriores para o caso da teoria de Vlasov. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                      | 57 |
| 3.4 | Movimento associado à flexão em torno do eixo horizontal. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                       | 58 |
| 3.5 | Exemplo de aplicação da abordagem A1 a uma secção em I para a função de empenamento associada à flexão em torno do eixo de maior inércia. . . . .                                                                                                                                                                                       | 61 |
| 3.6 | Secção em C com reforços: (a) geometria e discretização da secção e (b) modos de deformação iniciais. . . . .                                                                                                                                                                                                                           | 63 |
| 3.7 | Modos de deformação de uma secção em C com reforços para dois raios distintos: (a) $R_C = 0,4$ m e (b) $R_C = 100$ m. . . . .                                                                                                                                                                                                           | 68 |
| 3.8 | Modos de deformação de uma secção fechada com três células para dois raios distintos: (a) $R_C = 0,4$ m e (b) $R_C = 100$ m. . . . .                                                                                                                                                                                                    | 69 |
| 3.9 | Polinómios cúbicos de Hermite. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 70 |

|      |                                                                                                                                                                                                |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.10 | Funções de interpolação de Lagrange. . . . .                                                                                                                                                   | 71  |
| 3.11 | Modos de deformação para uma secção em I de acordo com a abordagem A1 (no caso dos modos 1 a 4 apenas se representam as funções de empenamento). . . . .                                       | 80  |
| 3.12 | Componentes no plano dos modos de deformação de corpo rígido para barras curvas com secção em I orientada de três formas distintas. . . . .                                                    | 81  |
| 3.13 | Flexão para fora do plano de um arco com secção em I, com a alma contida no plano de curvatura. . . . .                                                                                        | 82  |
| 3.14 | Arco com secção em I rodada 45°. . . . .                                                                                                                                                       | 84  |
| 3.15 | Arco com secção em I sujeito a forças autoequilibradas. . . . .                                                                                                                                | 85  |
| 3.16 | (a) Geometria, discretização e propriedades materiais e (b) modos de deformação para um tubo quadrado. . . . .                                                                                 | 87  |
| 3.17 | Arco com secção tubular quadrada, sujeito a uma carga vertical excêntrica. . . . .                                                                                                             | 88  |
| 3.18 | Secção em C com reforços: (a) geometria, discretização e propriedades materiais e (b) modos de deformação para $R_C = 1,5$ m. . . . .                                                          | 89  |
| 3.19 | Arco com secção em C sujeito a uma carga distorcional. . . . .                                                                                                                                 | 90  |
| 3.20 | Secção fechada com três células: (a) geometria, discretização e propriedades materiais e (b) modos de deformação para $R_C = 2$ m. . . . .                                                     | 91  |
| 3.21 | Secção fechada com três células sujeita a uma carga transversal excêntrica. . . . .                                                                                                            | 92  |
| 3.22 | Secção celular bitrapezoidal: (a) geometria, discretização e propriedades materiais e (b) modos de deformação para $R_C = 2$ m. . . . .                                                        | 94  |
| 3.23 | Secção bitrapezoidal sujeita a carga excêntrica. . . . .                                                                                                                                       | 95  |
| 3.24 | Secção em I: (a) geometria propriedades materiais e discretização, (b) modos de deformação e (c) campos de deformações de membrana assumidas. . . . .                                          | 96  |
| 3.25 | Flexão plana de uma arco com secção em I. . . . .                                                                                                                                              | 98  |
| 3.26 | Secção em C com reforços: (a) geometria, discretização e propriedades materiais, (b) modos de deformação e (c) campos de deformações de membrana assumidas. . . . .                            | 99  |
| 3.27 | Arco com secção em C com reforços sujeito a duas forças segundo Z: geometria, propriedades materiais, configurações deformadas e tabela com os valores do deslocamento do nó interior. . . . . | 100 |
| 3.28 | Arco com secção em C com reforços sujeito a duas forças segundo Z: gráficos de convergência e de amplitude modal. . . . .                                                                      | 101 |
| 3.29 | Secção em L com reforços: (a) geometria, discretização, propriedades materiais, (b) modos de deformação e (c) campos de deformações de membrana assumidas. . . . .                             | 102 |
| 3.30 | Flexão plana de um arco com secção em L com reforços: geometria, propriedades materiais e configurações deformadas. . . . .                                                                    | 103 |
| 3.31 | Flexão plana de um arco com secção em L com reforços: tabela com os valores do deslocamento do ponto de aplicação da força, gráficos de convergência e de amplitude modal. . . . .             | 104 |

---

|      |                                                                                                                                                                                  |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1  | Incompatibilidade entre duas paredes adjacentes, quando ocorre distorção de membrana numa delas (a parede vertical). . . . .                                                     | 110 |
| 4.2  | Configurações de referência, inicial e atual de uma barra de parede fina. . . .                                                                                                  | 111 |
| 4.3  | Rotação dos vetores-base por $\check{\Lambda}_0$ , da configuração de referência para a configuração inicial. . . . .                                                            | 118 |
| 4.4  | Modos de deformação para uma secção em I genérica. . . . .                                                                                                                       | 132 |
| 4.5  | Consola com secção retangular, pré-torcida a $180^\circ$ e sujeita a uma força axial de tração. . . . .                                                                          | 135 |
| 4.6  | Secção retangular de parede fina: discretização e modos lineares de extensão transversal. . . . .                                                                                | 136 |
| 4.7  | Consola com secção em I, pré-torcida a $360^\circ$ e sujeita a uma força axial de tração. . . . .                                                                                | 137 |
| 4.8  | Barra de eixo inicial curvo tridimensional com secção em I compacta: geometria da secção, propriedades materiais, gráfico força-deslocamento e configurações deformadas. . . . . | 139 |
| 4.9  | Gráfico força-deslocamento para as configurações iniciais plana e tridimensional. . . . .                                                                                        | 140 |
| 4.10 | Barra de eixo inicial curvo tridimensional com secção em I esbelta: geometria da secção, propriedades materiais, gráfico força-deslocamento e configurações deformadas. . . . .  | 141 |
| 4.11 | Funções de amplitude modal dos modos locais de placa. . . . .                                                                                                                    | 142 |
| 4.12 | Arco circular de $90^\circ$ com secção transversal compacta: geometria da secção, propriedades materiais, gráfico força-deslocamento e configurações deformadas. . . . .         | 143 |
| 4.13 | Arco circular de $90^\circ$ com secção transversal esbelta: geometria da secção, propriedades materiais, gráfico força-deslocamento e configurações deformadas. . . . .          | 144 |
| 4.14 | Arco circular de $90^\circ$ curto com secção transversal esbelta: geometria da secção, propriedades materiais, gráfico força-deslocamento e configurações deformadas. . . . .    | 145 |





# Lista de Abreviaturas, Siglas e Símbolos

## Abreviaturas, acrónimos e siglas

|        |                                                                   |
|--------|-------------------------------------------------------------------|
| C      | modo de corte                                                     |
| CR     | modo de corpo rígido                                              |
| D      | modo distorcional                                                 |
| E      | modo de extensão axial                                            |
| EF     | elemento(s) finito(s)                                             |
| F2, F3 | modos de flexão em torno dos eixos centrais principais de inércia |
| FC     | modo com fluxo de corte                                           |
| GBT    | <i>Generalized Beam Theory</i> (Teoria Generalizada de Vigas)     |
| LP     | modo local de placa                                               |
| T      | modo de torção                                                    |

## Operações

- $\times$  produto externo entre vetores; multiplicação de escalares
- $\cdot$  produto interno entre vetores
- $\otimes$  produto tensorial

## Índices e operadores

|                            |                                                                            |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $\  \cdot \ $              | norma de um vetor                                                          |
| $\overrightarrow{(\cdot)}$ | vetor definido por dois pontos                                             |
| $\overline{(\cdot)}$       | relativo ao folheto médio da parede ou à linha média da secção transversal |
| $\widetilde{(\cdot)}$      | tensor antissimétrico associado a um vetor                                 |

|                  |                                                                                |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\widehat{()}$   | tensor material relativo à configuração inicial                                |
| $()^{-1}$        | tensor de dois pontos, vetor ou escalar entre as configurações inicial e atual |
| $()_{,k}$        | derivada parcial em ordem a $k$                                                |
| $()'$            | derivada parcial em ordem à direção do eixo da barra                           |
| $()_0$           | relativo à configuração inicial                                                |
| $()^{AS}$        | relativo a grandezas assumidas                                                 |
| $()_C$           | relativo ao centro $C$ da secção transversal                                   |
| $()_c$           | parcela compatível                                                             |
| $()_e$           | relativo ao elemento finito                                                    |
| $()^F$           | parcela de flexão                                                              |
| $()_{geo}$       | parcela geométrica do operador tangente                                        |
| $()^M$           | parcela de membrana                                                            |
| $()_{mat}$       | parcela material do operador tangente                                          |
| $()^T$           | transposição de vetor ou tensor                                                |
| $()_t$           | relativo ao empenamento secundário de torção                                   |
| $()_U$           | relativo ao campo de deslocamentos                                             |
| $()_\varepsilon$ | relativo ao campo de deformações                                               |
| $\nabla()$       | gradiente de um campo vetorial                                                 |
| $d()$            | variação genérica                                                              |
| $D()[ ]$         | derivada direcional                                                            |
| $D^2()[ ]$       | segunda derivada direcional                                                    |
| $\Delta()$       | variação incremental/iterativa                                                 |
| $\delta()$       | variação virtual                                                               |
| $axi()$          | vetor axial de um tensor antissimétrico                                        |
| $\det()$         | determinante de um tensor                                                      |
| $diag()$         | tensor diagonal                                                                |
| $sim()$          | parcela simétrica de um tensor                                                 |
| $skw()$          | parcela antissimétrica de um tensor                                            |
| $P()$            | primitiva                                                                      |

## Letras gregas maiúsculas

|                |                                                                                     |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Gamma$       | medida de deformação da extensão/distorção do eixo da barra                         |
| $\Gamma_0$     | medida de deformação da extensão/distorção do eixo da barra na configuração inicial |
| $\Theta_D$     | matriz auxiliar para o cálculo da variação de um vetor                              |
| $\Theta_{D^2}$ | matriz auxiliar para o cálculo da segunda variação de um vetor                      |
| $\Lambda$      | tensor de rotação                                                                   |

---

|                               |                                                                                                |
|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Lambda_0$                   | tensor de rotação da secção transversal entre as configurações de referência-inicial           |
| $\widehat{\Lambda}$           | tensor de rotação da secção transversal entre as configurações inicial-atual                   |
| $\check{\Lambda}_0$           | tensor de rotação da configuração de referência para a inicial                                 |
| $\Xi_D$                       | tensor associado a uma derivada direcional                                                     |
| $\Xi_{D^2}$                   | tensor associado a uma segunda derivada direcional                                             |
| $\Xi_U$                       | matriz auxiliar para a definição de $U$                                                        |
| $\Xi_\varepsilon$             | matriz auxiliar para a definição de $\varepsilon$                                              |
| $\overline{\Xi}_\varepsilon$  | parcela da matriz $\Xi_\varepsilon$ que contém apenas as componentes relativas a barras retas  |
| $\widetilde{\Xi}_\varepsilon$ | parcela da matriz $\Xi_\varepsilon$ que contém apenas a componente $\xi_{11}$                  |
| $\Pi_{HR}$                    | funcional de Hellinger-Reissner                                                                |
| $\Phi$                        | vetor que contém $\phi$ e as suas primeira e segunda derivadas                                 |
| $\Psi, \Psi_\phi$             | matriz que contém as funções de interpolação de $\phi$                                         |
| $\Psi_\varepsilon$            | matriz que contém as funções de interpolação de $\phi_\varepsilon$                             |
| $\Omega$                      | não existe; existem apenas as diferenciais exatas $d\Omega$ , $\delta\Omega$ ou $\Delta\Omega$ |
| $\Omega$                      | rotação de torção da teoria de Vlasov                                                          |

## Letras gregas minúsculas

|                    |                                                                            |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $\alpha$           | vetor das rotações de torção em torno do centro $C$ da secção transversal  |
| $\alpha_k$         | rotação de torção em torno do centro $C$ da secção transversal do modo $k$ |
| $\overline{\beta}$ | parâmetro dado por $R/\overline{R}$                                        |
| $\gamma$           | distorção                                                                  |
| $\varepsilon$      | tensor das deformações infinitesimais                                      |
| $\varepsilon^{AS}$ | tensor das deformações assumidas                                           |
| $\varepsilon$      | extensão linear                                                            |
|                    | extensão axial da teoria de Winkler                                        |
| $\theta$           | vetor de rotação                                                           |
| $\theta_0$         | vetor de rotação do eixo da barra na configuração inicial                  |
| $\widehat{\theta}$ | vetor de rotação do eixo da barra entre as configurações inicial-atual     |
| $\theta$           | norma do vetor de rotação                                                  |

|                      |                                                                                                                                                                                |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\kappa$             | curvatura de flexão no plano da teoria de Winkler<br>curvatura de flexão para fora do plano da teoria de Vlasov<br>componente do vetor das curvaturas $K$                      |
| $\lambda$            | parâmetro ou fator de carga<br>valor próprio                                                                                                                                   |
| $\nu$                | coeficiente de Poisson                                                                                                                                                         |
| $\xi$                | componente da matriz $\Xi_\varepsilon$                                                                                                                                         |
| $\sigma$             | tensor das tensões                                                                                                                                                             |
| $\sigma$             | tensão                                                                                                                                                                         |
| $\tau$               | curvatura de torção da teoria de Vlasov                                                                                                                                        |
| $\varphi$            | vetor de rotação das paredes da secção transversal<br>vetor das funções de amplitude modal da componente de deslocamento $u$<br>vetor dos parâmetros cinemáticos independentes |
| $\varphi$            | norma do vetor de rotação $\varphi$                                                                                                                                            |
| $\varphi_k$          | função de amplitude modal da componente $u$ do modo $k$                                                                                                                        |
| $\phi$               | vetor das funções de amplitude modal dos modos de deformação<br>vetor das funções de amplitude modal da componente de deslocamento $v$                                         |
| $\phi_\varepsilon$   | vetor das funções de amplitude modal das deformações assumidas                                                                                                                 |
| $\phi_k$             | função de amplitude modal do modo $k$<br>função de amplitude modal da componente $v$ do modo $k$                                                                               |
| $\chi^{(i)}$         | funções de forma do modo de deformação $i$                                                                                                                                     |
| $\bar{\chi}^{(i)}$   | funções de forma dos deslocamentos da linha média do modo de deformação $i$                                                                                                    |
| $\bar{\chi}_k^{(i)}$ | função de forma dos deslocamentos da linha média do modo de deformação $i$ segundo a direção $k$                                                                               |
| $\psi$               | vetor das funções de amplitude modal da componente de deslocamento $w$<br>matriz que contém as funções de interpolação                                                         |
| $\psi^{(i)}$         | funções de forma do modo de deformação $i$ , contabilizada na direção da espessura                                                                                             |
| $\psi_k$             | função de amplitude modal da componente $v$ do modo $k$                                                                                                                        |
| $\psi_k^{(i)}$       | função de forma do modo de deformação $i$ segundo a direção $k$ , contabilizada na direção da espessura                                                                        |
| $\psi_{t3}$          | função de empenamento secundário associado à torção                                                                                                                            |

---

$\omega$  não existe; existem apenas as diferenciais exatas  $d\omega$ ,  $\delta\omega$  ou  $\Delta\omega$

## Letras latinas maiúsculas

|               |                                                                                                                                             |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A_v$         | matriz auxiliar na escrita do tensor das deformações em formato vetorial que contabiliza o efeito da configuração inicial ser curva/torcida |
| $A_{ij}$      | matriz auxiliar no cálculo de $a_{ij}$ para contabilizar o efeito da configuração inicial ser curva/torcida                                 |
| $A$           | área da secção transversal<br>origem da linha média da parede                                                                               |
| $B$           | matriz modal da GBT                                                                                                                         |
| $B$           | bimomento                                                                                                                                   |
| $C$           | operador constitutivo elástico (tensor de 2. <sup>a</sup> ordem)                                                                            |
| $C_t$         | operador constitutivo tangente (tensor de 2. <sup>a</sup> ordem)                                                                            |
| $C$           | matriz modal da GBT                                                                                                                         |
| $C$           | centro da secção transversal                                                                                                                |
| $D_i$         | matrizes modais da GBT                                                                                                                      |
| $E$           | retro-rotação de $\widehat{E}$ para a configuração de referência                                                                            |
| $\widehat{E}$ | tensor de deformação de Green-Lagrange associado à configuração inicial                                                                     |
| $E_i$         | vetor-base do eixo $X_i$ de um referencial ortonormado direto                                                                               |
| $E$           | matriz modal da GBT                                                                                                                         |
| $E$           | módulo de elasticidade                                                                                                                      |
| $F$           | gradiente de deformação entre as configurações de referência-atual                                                                          |
| $F_0$         | gradiente de deformação entre as configurações de referência-inicial                                                                        |
| $\widehat{F}$ | gradiente de deformação entre as configurações inicial-atual                                                                                |
| $F$           | matriz modal da GBT                                                                                                                         |
| $G$           | matriz modal da GBT                                                                                                                         |
| $G$           | módulo de distorção                                                                                                                         |
| $H_i$         | polinómios cúbicos de Hermite                                                                                                               |
| $I$           | matriz identidade                                                                                                                           |
| $I$           | momento de inércia segundo o eixo de flexão relevante                                                                                       |
| $I_r$         | momento de inércia modificado na teoria de Winkler                                                                                          |
| $I_w$         | constante de empenamento                                                                                                                    |

|                 |                                                                                                                        |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $J_0$           | determinante de $F_0$                                                                                                  |
| $K$             | matriz de rigidez<br>vetor das curvaturas da parede<br>vetor das curvaturas entre as configurações de referência-atual |
| $K_0$           | vetor das curvaturas entre as configurações de referência-inicial                                                      |
| $\widehat{K}$   | vetor das curvaturas entre as configurações inicial-atual                                                              |
| $K_i$           | curvatura da parede relativamente ao eixo local $i$                                                                    |
| $\bar{L}_A$     | vetor no plano da secção transversal que referencia a origem da linha média da parede na configuração de referência    |
| $L$             | comprimento                                                                                                            |
| $L_i$           | funções de interpolação de Lagrange                                                                                    |
| $M_D$           | matriz auxiliar para escrever a variação das deformações de flexão                                                     |
| $\mathcal{M}$   | matriz modal global da GBT                                                                                             |
| $M_i$           | momento fletor em torno do eixo $i$                                                                                    |
| $N_D$           | matriz auxiliar para escrever a variação das deformações de flexão                                                     |
| $N_{D^2}$       | matriz auxiliar para escrever a segunda variação das deformações de flexão                                             |
| $N$             | esforço axial                                                                                                          |
| $O$             | origem da linha média da parede                                                                                        |
| $Q$             | vetor das forças exteriores                                                                                            |
| $\mathcal{Q}_i$ | vetores modais das forças de volume                                                                                    |
| $R$             | tensor de rotação local das paredes da secção transversal                                                              |
| $R$             | direção radial no referencial de coordenadas cilíndricas                                                               |
| $R_C$           | raio de curvatura do eixo da barra                                                                                     |
| $R_O$           | raio de curvatura da origem $O$ da linha média da parede                                                               |
| $\bar{R}$       | raio de curvatura de um ponto arbitrário da linha média da parede                                                      |
| $S$             | segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff conjugado de $E$                                                         |
| $T$             | tensor que relaciona a variação do vetor de rotação e os <i>spins</i> material e espacial                              |
| $\mathcal{T}_i$ | vetores modais das forças de superfície                                                                                |
| $T_{SV}$        | momento torsor de Saint-Venant                                                                                         |

---

|               |                                                                  |
|---------------|------------------------------------------------------------------|
| $U$           | campo de deslocamentos da parede                                 |
| $V$           | volume da barra na configuração de referência                    |
| $W_{ext}$     | trabalho das forças exteriores                                   |
| $W_{int}$     | trabalho das forças interiores                                   |
| $X$           | vetor-posição de um ponto material na configuração de referência |
| $X$           | coordenada curvilínea do eixo da barra                           |
| $X_i$         | eixo de um referencial ortonormado direto                        |
| $\mathcal{X}$ | esforço generalizado                                             |
| $X$           | matriz modal da GBT                                              |
| $Z$           | direção vertical no referencial de coordenadas cilíndricas       |
| $Z_C$         | cota do plano horizontal do eixo da barra                        |
| $Z_O$         | cota da origem $O$ da linha média da parede                      |
| $\bar{Z}$     | cota de um ponto arbitrário da linha média da parede             |

## Letras latinas minúsculas

|                  |                                                                                                   |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a_{ij}$         | vetores que constituem as colunas da matriz auxiliar $A_v$                                        |
| $a_i(\theta)$    | funções escalares trigonométricas                                                                 |
| $b$              | largura da parede                                                                                 |
| $b_i(\theta)$    | funções escalares trigonométricas                                                                 |
| $c_i(\theta)$    | funções escalares trigonométricas                                                                 |
| $d, d_\phi$      | vetor dos deslocamentos nodais das funções de amplitude modal                                     |
| $d_\varepsilon$  | vetor das deformações nodais assumidas                                                            |
| $d_0$            | vetor nodal dos parâmetros cinemáticos independentes entre as configurações de referência-inicial |
| $\widehat{d}$    | vetor nodal dos parâmetros cinemáticos independentes entre as configurações inicial-atual         |
| $d_{Ck}$         | vetores das translações do centro $C$ da secção transversal na direção do eixo $k$                |
| $\bar{d}_A$      | parâmetro dado por $\bar{L}_A \cdot RE_2$                                                         |
| $e_i$            | vetor-base associado ao eixo $i$ de um referencial ortonormado direto                             |
|                  | vetor <i>push-forward</i> do vetor-base $E_i$                                                     |
| $\check{e}_{0i}$ | vetores-base que definem a rotação $\check{\Lambda}_0$                                            |

|                         |                                                                                                               |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{g}_i$          | retro-rotações dos vetores $\mathbf{e}_i$                                                                     |
| $\mathbf{l}$            | vetor que referencia os pontos da parede da secção transversal em relação ao centro $C$ na configuração atual |
| $m_i$                   | momentos fletores distribuídos ao longo do eixo da barra em torno do eixo $i$                                 |
| $\mathbf{n}$            | vetor normal à parede da secção transversal                                                                   |
| $n$                     | forças axiais distribuídas ao longo do eixo da barra                                                          |
| $p^{(i)}$               | funções escalares de amplitude das funções de forma $\chi^{(i)}$ na configuração atual                        |
| $p_0^{(i)}$             | funções escalares de amplitude das funções de forma $\chi^{(i)}$ na configuração inicial                      |
| $\widehat{p}^{(i)}$     | funções escalares de amplitude das funções de forma $\chi^{(i)}$ entre as configurações inicial-atual         |
| $p_i$                   | forças transversais distribuídas ao longo do eixo da barra segundo o eixo $i$                                 |
| $\mathbf{q}$            | forças distribuídas aplicadas na superfície média da parede                                                   |
|                         | forças de volume                                                                                              |
| $\mathbf{r}_0$          | vetor que define a posição do centro $C$ da secção transversal entre as configurações de referência-inicial   |
| $\mathbf{t}$            | forças de superfície aplicadas nas extremidades                                                               |
|                         | retro-rotação do vetor normal $\mathbf{n}$                                                                    |
| $t$                     | espessura da parede                                                                                           |
| $\overline{\mathbf{u}}$ | vetor das componentes de deslocamento da linha média da parede dos modos de deformação                        |
| $\widehat{\mathbf{u}}$  | vetor dos deslocamentos do eixo da barra entre as configurações inicial-atual                                 |
| $u$                     | componente de deslocamento do plano médio da parede                                                           |
| $\overline{\mathbf{v}}$ | vetor das componentes de deslocamento da linha média da parede dos modos de deformação                        |
| $v$                     | componente de deslocamento do plano médio da parede                                                           |
| $\overline{\mathbf{w}}$ | vetor das componentes de deslocamento da linha média da parede dos modos de deformação                        |
| $w$                     | componente de deslocamento do plano médio da parede                                                           |



---

|     |                                                                   |
|-----|-------------------------------------------------------------------|
| $x$ | eixo local da parede que define a direção do comprimento da barra |
| $y$ | eixo local que define a direção da largura da parede              |
| $z$ | eixo local que define a direção da espessura da parede            |

## Outros símbolos

- $\mathbf{0}$  tensor ou vetor nulo
- $\mathbf{1}$  tensor identidade no espaço tridimensional



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações gerais

Nas últimas décadas tem-se assistido, no setor da construção de edifícios, pontes e estruturas de grande vão, à crescente adoção de peças lineares curvas. Inicialmente, estas formas eram compostas por uma série de segmentos retos (Ziemian, 2010, Capítulo 9), não constituindo, portanto, uma estrutura realmente curva. A crescente popularidade na utilização de barras curvas deve-se, não só aos avanços tecnológicos nos métodos de fabricação deste tipo de peças (Topkaya, 2004), mas também à sua qualidade estética, oferecendo a possibilidade de projetos mais criativos e inovadores.

A título de exemplo, nas Figuras 1.1 e 1.2 mostra-se a *Helix Bridge*, em Singapura, que reflete os avanços significativos que têm vindo a ser alcançados na área da modelação e construção de estruturas constituídas por barras curvas. A ponte consiste num tabuleiro suportado por duas hélices opostas (de diâmetros distintos) fabricadas em tubos circulares de aço inoxidável, perfazendo um vão de 280 metros.

Outro exemplo que permite testemunhar a complexidade estrutural que hoje em dia



Figura 1.1: Helix Bridge, Singapura (fonte: [www.arup.com/projects/helix-bridge](http://www.arup.com/projects/helix-bridge)).

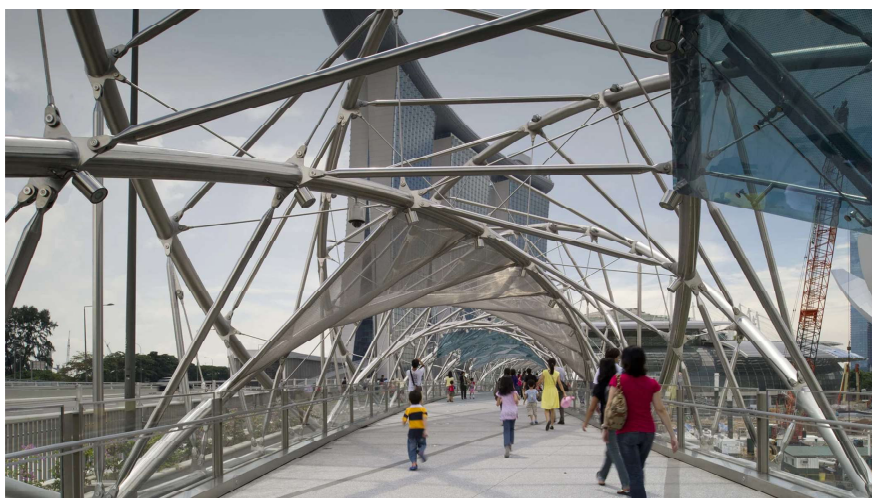


Figura 1.2: Helix Bridge, Singapura: vista do tabuleiro (fonte: [www.arup.com/projects/helix-bridge](http://www.arup.com/projects/helix-bridge)).



Figura 1.3: Lachlan's Line Bridge, Sydney, Austrália (fonte: [www.arup.com/projects/lachlans-line-bridge-sydney](http://www.arup.com/projects/lachlans-line-bridge-sydney)).

é possível atingir, tanto ao nível da modelação computacional como da fabricação, é a *Lachlan's Line Bridge*, em Sydney, Austrália (ver Figuras 1.3-1.5). Esta ponte pedonal tem um vão de 170 metros e possui uma forma helicoidal complexa irregular de diâmetro variável constituída por tubos de secção transversal quadrada.

Hoje em dia, o fabrico de peças curvas de aço laminado a quente pode ser efetuado por meio de rolos de dobragem ou por um processo de indução. Até muito recentemente, o processo de dobragem por rolos (ver Figuras 1.6 e 1.7) não permitia aplicar curvaturas em torno do eixo de maior inércia de barras com secção transversal em I, dado que facilmente se excedia a resistência à encurvadura da alma. Esta dificuldade foi resolvida em meados da década de 70 do século XX, com a introdução de rolos adicionais nos equipamentos de dobragem (King e Brown, 2001). O processo de dobragem por indução foi introduzido na





Figura 1.4: Lachlan's Line Bridge: vista aérea (fonte: [www.kistudio.com.au/project/lachlans-line-pedestrian-cycle-bridge](http://www.kistudio.com.au/project/lachlans-line-pedestrian-cycle-bridge)).

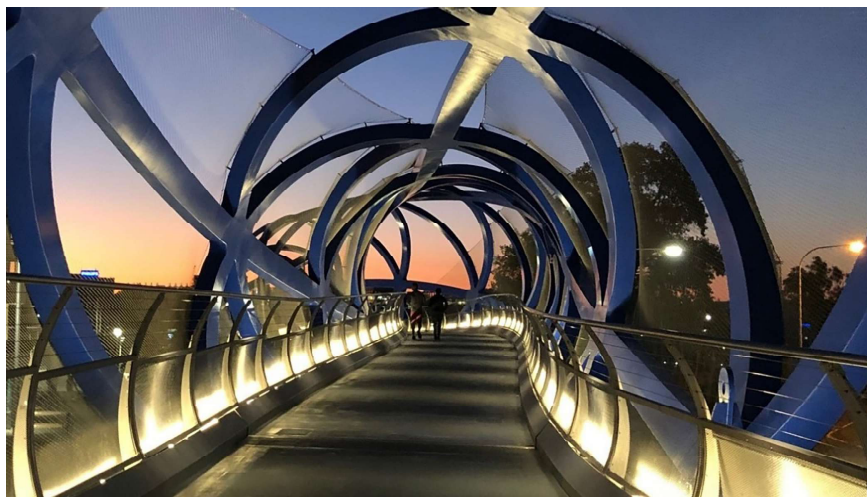


Figura 1.5: Lachlan's Line Bridge: vista do tabuleiro (fonte: [www.landcom.com.au/places/lachlans-line-at-macquarie-park](http://www.landcom.com.au/places/lachlans-line-at-macquarie-park)).

década de 60 do século XX (Barnshaw, 2018) e consiste em fazer passar a barra por um anel que aquece a secção transversal, através de uma corrente elétrica, possibilitando a sua dobragem. Muito embora este processo seja mais dispendioso, permite atingir raios de curvatura mais reduzidos e curvar barras com secção transversal mais esbelta (King e Brown, 2001). Na Figura 1.8 mostra-se a dobragem por indução de um tubo circular.

Naturalmente, a análise estrutural de elementos estruturais curvos é significativamente mais complexa do que a dos seus congéneres retos. O facto dos elementos curvos serem constituídos frequentemente por secções transversais de parede fina constitui uma dificuldade acrescida. Em primeiro lugar, nas peças curvas regista-se um acoplamento entre esforços, tanto no caso plano (esforço axial e flexão) como no caso tridimensional



Figura 1.6: Dobragem por rolos de uma barra com secção em I em torno do eixo de maior inércia (fonte: [www.cmrp.com/blog/industry-news/celebrated-architect-jeanne-gang-visits-a-metal-working-factory-2.html](http://www.cmrp.com/blog/industry-news/celebrated-architect-jeanne-gang-visits-a-metal-working-factory-2.html)).



Figura 1.7: Dobragem por rolos de uma barra com secção em C num forma helicoidal (fonte: [www.greinerindustries.com/services/rolling-forming/](http://www.greinerindustries.com/services/rolling-forming/)).



Figura 1.8: Dobragem por indução de um tubo circular (Barnshaw, 2018).

(flexão e torção). Em segundo lugar, as secções de parede fina são extremamente deformáveis, tanto no seu plano (deformação local “de placa” e distorcional) como para fora deste (deformação associada ao empenamento) e, portanto, a sua capacidade resistente é significativamente afetada pela ocorrência de fenómenos geometricamente não-lineares.

A modelação computacional de barras de parede fina é geralmente feita com recurso a modelos de elementos finitos de casca. Para além de envolverem um número significativo de graus de liberdade, estes modelos são computacionalmente mais exigentes e não fornecem grandezas calculadas ao nível da secção transversal, nomeadamente esforços e correspondentes deformações generalizadas, os quais possuem um maior significado estrutural e são fundamentais para os projetistas. Em alternativa, é possível recorrer ao método das faixas finitas (Cheung e Cheung, 1971), mas este pode ser encarado como um caso particular do método dos elementos finitos em que a solução exata na direção longitudinal é conhecida ou bem aproximada com poucas funções, pelo que possui naturalmente limitações.

Em alternativa aos elementos finitos de casca e ao método das faixas finitas, é possível utilizar uma teoria de barras que permita incluir a deformação da secção transversal, como é o caso da Teoria Generalizada de Vigas (ou GBT, da sua designação em língua inglesa *Generalized Beam Theory*). Esta abordagem com elementos de barra possui duas vantagens fundamentais: (i) a descrição cinemática é baseada em “modos de deformação” da secção transversal, o que permite obter esforços e deformações generalizados, constituído assim uma ferramenta clarificadora para projetistas e investigadores, e (ii) envolve em geral um número muito reduzido de graus de liberdade, permitindo obter resultados muito precisos com esforço computacional relativamente baixo.

## 1.2 Objetivos

Esta tese tem como objetivo principal o desenvolvimento, implementação e validação de formulações baseadas na GBT, capazes de caracterizar rigorosamente e eficientemente o comportamento linear e geometricamente não-linear de barras de parede fina com configuração inicial curva e/ou pré-torcida. Mais concretamente, os objetivos centrais do trabalho são os seguintes:

1. Desenvolver uma formulação linear (geometricamente e fisicamente) da GBT para barras de eixo circular, procurando a sua implementação numérica através do método dos elementos finitos.
2. No contexto das barras de eixo circular, estabelecer um procedimento sistematizado para a determinação dos modos de deformação da GBT.
3. Desenvolver uma formulação geometricamente exata de forma a permitir estudar problemas envolvendo barras pré-curvas e/ou pré-torcidas sujeitas a grandes deslocamentos e rotações finitas, bem como a deformação da secção transversal.



### 1.3 Organização da tese

A tese encontra-se dividida em cinco Capítulos, o primeiro dos quais é a presente Introdução.

No Capítulo 2 apresentam-se alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento das formulações desenvolvidas nos Capítulos subsequentes, procurando promover a autossuficiência do texto. Para além de se descrever a notação adotada, apresentam-se alguns fundamentos matemáticos relacionados com (i) derivadas direcionais, (ii) álgebra tensorial e (iii) rotações finitas e infinitesimais. Por fim, é feita uma introdução à Teoria Generalizada de Vigas para barras retas (a GBT “clássica”).

No Capítulo 3 desenvolve-se uma formulação fisicamente e geometricamente linear para barras de parede fina de eixo circular. Começa-se por fazer uma revisão breve da literatura, apontando os desenvolvimentos e contribuições principais nesta área. As equações fundamentais são obtidas recorrendo a coordenadas cilíndricas e utilizando a descrição cinemática usual da GBT, mostrando-se posteriormente que as hipóteses da GBT clássica podem também ser aplicadas no caso circular, o que apresenta enormes vantagens do ponto de vista da eficiência computacional. Demonstra-se que as teorias clássicas de Winkler e Vlasov podem ser recuperadas a partir da formulação proposta considerando apenas os modos de “corpo rígido” (extensão axial, duas flexões em torno dos eixos principais de inércia e torção). Desenvolvem-se duas abordagens para a determinação dos modos de deformação para barras de eixo circular. Com base no trabalho desenvolvido, são formulados dois elementos finitos: um de compatibilidade e um misto. Demonstra-se que o elemento misto possui uma capacidade preditiva superior à do elemento de compatibilidade. Mostra-se que, para além do já conhecido efeito de retenção (*locking* na designação em língua inglesa) de membrana (resultante do acoplamento entre o esforço axial e o momento fletor), naturalmente existente em barras de eixo curvo, existem várias outras fontes de *locking*. Os exemplos numéricos apresentados demonstram a precisão e eficiência computacional de ambos os elementos desenvolvidos.

No Capítulo 4 propõe-se uma formulação geometricamente exata para barras de parede fina com secção transversal deformável e configuração inicial arbitrária. Este trabalho baseia-se no desenvolvido por Gonçalves et al. (2010a), onde a descrição cinemática permite a ocorrência de grandes deslocamentos, rotações finitas e deformação da secção. Inicialmente é feita uma breve revisão da literatura sobre este tópico. A formulação é desenvolvida adotando algumas hipóteses simplificativas relativamente à deformação de flexão (não é cometida nenhuma aproximação relativamente aos termos de membrana) e a deformação da secção é contabilizada através dos modos de deformação da GBT. É de referir que, nesta formulação, o empenamento secundário associado à torção constitui um grau de liberdade independente, o que permite reduzir significativamente o esforço computacional face ao da formulação de Gonçalves et al. (2010a), uma vez que não é necessário calcular as derivadas e variações da curvatura de torção. A consideração de uma configuração inicial curva não é uma tarefa trivial, sendo necessário recorrer a alguma



manipulação algébrica para simplificar todas as equações necessárias à implementação numérica. Desenvolve-se um elemento finito com base na aproximação dos parâmetros cinemáticos independentes através de polinómios cúbicos de Hermite e efetua-se a sua implementação. A validação é realizada através de uma série de exemplos numéricos, os quais permitem concluir que o elemento proposto é extremamente preciso mesmo em problemas envolvendo configurações iniciais complexas, grandes deslocamentos, rotações finitas e deformação da secção.

Finalmente, no Capítulo 5, é feito um resumo das conclusões principais do trabalho desenvolvido e são apresentados alguns desenvolvimentos futuros que se consideram relevantes na sequência das formulações desenvolvidas.

## 1.4 Publicações

O trabalho desenvolvido no âmbito desta tese encontra-se parcialmente publicado em revistas científicas internacionais e em atas de conferências, prevendo-se a publicação do restante trabalho a curto prazo (foi recentemente submetido, para uma revista internacional, o trabalho relativo ao Capítulo 4).

As contribuições desenvolvidas no Capítulo 3 encontram-se totalmente publicadas, nomeadamente a formulação linear para barras de eixo circular (Peres et al., 2016a,b, 2018b), o procedimento proposto para a determinação dos modos de deformação (Peres et al., 2018a,c,d) e a formulação do elemento finito misto (Peres et al., 2020a).

A formulação geometricamente exata desenvolvida no Capítulo 4 está parcialmente publicada em Peres et al. (2020b).

Refere-se ainda que ao autor foram atribuídos os seguintes prémios:

- *Wei-Wen Yu Outstanding Student Scholars Award*, atribuído pelo Wei-Wen Yu Center for Cold-Formed Steel Structures, Missouri University of Science and Technology, em novembro de 2018, para estudantes que se encontram a realizar investigação no campo das estruturas de aço enformado a frio e que participaram e apresentaram uma comunicação na “Wei-Wen Yu International Conference on Cold-Formed Steel Structures”.
- *Sarada M. and Raju A. Vinnakota Award*, atribuído pelo Structural Stability Research Council, Estados Unidos, em abril de 2020, pelo artigo Peres et al. (2020b).



## Capítulo 2

# Conceitos Fundamentais

### 2.1 Introdução

Este Capítulo tem como objetivo a exposição não exaustiva de alguns conceitos que se consideram fundamentais para o desenvolvimento das formulações apresentadas nos Capítulos 3 e 4. Pretende-se que este Capítulo sirva como auxiliar para uma melhor compreensão da tese sem que seja necessária a consulta de outros textos. Por outro lado, dado que este Capítulo não constitui uma contribuição original, serão sempre indicadas referências que contenham uma abordagem mais detalhada dos temas apresentados.

Na Secção 2.2 começa-se por introduzir a notação utilizada ao longo do texto. Em seguida é introduzido o conceito de *derivada direcional* (Secção 2.3) e são apresentados alguns conceitos de álgebra tensorial (Secção 2.4).

Na Secção 2.5 é feita uma abordagem sucinta acerca do tratamento matemático das rotações finitas e infinitesimais, dada a sua importância para a formulação geometricamente exata apresentada no Capítulo 4.

Por fim, a Secção 2.6 é dedicada à Teoria Generalizada de Vigas (GBT), a qual é essencial para o trabalho desenvolvido nesta tese e, em particular, para o Capítulo 3. É feita uma introdução à GBT, enunciando-se as suas potencialidades e algumas das contribuições mais relevantes para o seu desenvolvimento. São ainda apresentadas as equações fundamentais relativas ao caso linear e é feito um resumo acerca do procedimento de determinação dos modos de deformação.

### 2.2 Notação

De forma a facilitar a leitura do texto, estabelece-se desde já a notação utilizada para representar as diversas grandezas e operações entre si.

As grandezas tensoriais de 1.<sup>a</sup> ordem (vetores) e de 2.<sup>a</sup> ordem, bem como matrizes, são representadas por letras em ***negrito itálico***. Note-se que, embora não seja feita qualquer distinção entre vetores e tensores de 2.<sup>a</sup> ordem, qualquer situação de ambiguidade é devidamente indicada. Todas as grandezas escalares, incluindo as componentes de vetores

e tensores, são representadas por letras em *itálico*. A posição das componentes de vetores e tensores é indicada através de índices inferiores.

De forma a simplificar a escrita das equações, as derivadas parciais são representadas através de uma vírgula em índice inferior, seguida da variável em relação à qual se está a derivar (e.g., se  $f = f(x, y, z)$ , então  $f_{,y} = \partial f / \partial y$ ). Por outro lado, caso a derivada seja relativa à direção do comprimento da barra, por vezes utiliza-se simplesmente a notação  $(\cdot)'$  (e.g., no Capítulo 3,  $f' = \partial f / \partial X$ ).

As grandezas associadas a comportamento de membrana (dizem respeito apenas ao folheto médio da parede) e de flexão (nulas no folheto médio e variando na espessura) são representadas em índice superior, respetivamente, pelas letras  $M$  e  $F$ .

A variação virtual de uma grandeza é denotada por  $\delta$ , a variação iterativa/incremental por  $\Delta$  e, caso não seja necessária distinção, as variações são simplesmente representadas por  $d$ .

### 2.3 A derivada direcional

Na resolução de problemas não-lineares, como é o caso da formulação apresentada no Capítulo 4, é frequente utilizar-se o método de Newton-Raphson devido à sua convergência quadrática (ver, por exemplo, Crisfield, 1991). No entanto, a utilização deste método requer a linearização do sistema de equações a resolver, o que não é, geralmente, uma tarefa trivial. Para tal, torna-se útil recorrer ao conceito de derivada direcional (ver Bonet e Wood (1997) para uma abordagem mais aprofundada sobre este tema).

Seja  $A$  uma função (escalar, vetorial ou tensorial) diferenciável. A *derivada direcional* de  $A$  na direção  $\mathbf{u}$  (um vetor), calculada em  $\mathbf{x}_0$ , é definida por

$$DA(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - A(\mathbf{x}_0)}{t} = \left. \frac{d}{dt} (A(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})) \right|_{t=0} \quad (2.1)$$

e satisfaz as propriedades usuais relativas a derivadas, nomeadamente

$$DA(\mathbf{x}_0)[\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}] = \alpha DA(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}] + \beta DA(\mathbf{x}_0)[\mathbf{v}], \quad (2.2)$$

$$D(A + B)(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}] = DA(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}] + DB(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}], \quad (2.3)$$

$$D(A * B)(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}] = DA(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}] * B(\mathbf{x}_0) + A(\mathbf{x}_0) * DB(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}], \quad (2.4)$$

$$DA(B(\mathbf{x}))(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}] = DA(B(\mathbf{x}_0))[DB(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}]], \quad (2.5)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são escalares, o símbolo  $*$  representa qualquer tipo de produto (e.g., multiplicação de escalares, produto interno ou produto externo entre vetores) e a primeira propriedade demonstra a linearidade da derivada direcional.

Atendendo à definição, torna-se possível calcular a expansão em série de Taylor da função  $A$ , em torno de  $\mathbf{x}_0$  e segundo a direção  $\mathbf{u}$ . Em particular, mantendo apenas os termos lineares, obtém-se

$$A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) \approx A(\mathbf{x}_0) + DA(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}]. \quad (2.6)$$

O conceito de derivada direcional pode ser naturalmente estendido a derivadas de ordem superior sendo, no âmbito deste texto, de particular interesse a segunda derivada direcional. Assim, tomando as direções definidas por dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , a *segunda derivada direcional* é escrita como

$$D(DA(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}])[\mathbf{v}] = D^2A(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}, \mathbf{v}]. \quad (2.7)$$

Ao longo do texto, sempre que a direção da derivada direcional representar uma variação infinitesimal de uma dada grandeza e caso não existam ambiguidades na notação, escreve-se

$$DA(\mathbf{x}_0)[d\mathbf{u}] = dA(\mathbf{x}_0) \quad (2.8)$$

ou, caso o ponto  $\mathbf{x}_0$  seja arbitrário, este pode ser omitido. Conforme foi referido na Secção 2.2, o símbolo  $d$  representa uma variação genérica e, portanto, a notação simplificada é também válida caso se utilizem variações virtuais  $\delta$  e variações incrementais/iterativas  $\Delta$ , substituindo-se  $d$  pelo símbolo adequado para a variação em questão.

## 2.4 Álgebra tensorial

Nesta Secção são apresentados alguns formalismos matemáticos relacionados com a álgebra tensorial, necessários para o desenvolvimento de expressões, tanto neste como nos Capítulos seguintes. Não se pretende fazer uma discussão exaustiva sobre este tema, o qual se encontra pormenorizado, por exemplo, em Bonet e Wood (1997).

Ao longo deste texto consideram-se sempre vetores e tensores definidos no espaço vetorial Euclidiano tridimensional, que (i) possui as propriedades usuais de espaço vetorial relativamente à adição e à multiplicação por um escalar e (ii) está munido com uma operação de produto interno. Naturalmente, os conceitos aqui apresentados podem ser estendidos a espaços vetoriais Euclidianos de ordem superior.

### 2.4.1 Vetores

Seja  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  uma base ortonormada e direta. Um vetor  $\mathbf{u}$  pode ser representado pela combinação linear

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i, \quad (2.9)$$

onde  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são as componentes de  $\mathbf{u}$  na base indicada.

O *produto interno* entre dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  (também designado por *produto interno canónico*) é definido pela operação

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i. \quad (2.10)$$

Por definição, o produto interno num espaço Euclidiano é linear  $((\alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$  e  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ ), simétrico  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$  e (iii) positivo semidefinido  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0)$ . Define-se a *norma* de um vetor  $\mathbf{u}$  como o número real não-negativo dado pela expressão

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \quad (2.11)$$

Finalmente, para vetores arbitrários  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , os *produto externo*  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  e *produto misto*  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$  são definidos da forma usual e com as propriedades que lhes são inerentes.

### 2.4.2 Tensores de 2.<sup>a</sup> ordem

Um tensor de 2.<sup>a</sup> ordem  $A$  pode ser definido como uma transformação linear, que a cada vetor  $\mathbf{u}$  faz corresponder outro vetor  $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$ , satisfazendo as propriedades usuais de linearidade

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}, \quad (2.12)$$

$$A(\alpha \mathbf{u}) = \alpha A\mathbf{u}, \quad (2.13)$$

para quaisquer vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e escalar  $\alpha$ . É possível ainda definir as operações *soma*, *multiplicação por um escalar* e *composição* de transformações lineares por

$$(A + B)\mathbf{u} = A\mathbf{u} + B\mathbf{u}, \quad (2.14)$$

$$(\alpha A)\mathbf{u} = \alpha(A\mathbf{u}), \quad (2.15)$$

$$(AB)\mathbf{u} = A(B\mathbf{u}). \quad (2.16)$$

Um tensor  $A$  pode ser representado através de uma matriz. Atendendo ao facto que se pode escrever

$$A\mathbf{u} = A \sum_{j=1}^3 u_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 u_j A\mathbf{e}_j, \quad (2.17)$$

a componente deste vetor segundo  $\mathbf{e}_i$  é dada por

$$(A\mathbf{u})_i = \mathbf{e}_i \cdot A\mathbf{u} = \sum_{j=1}^3 u_j \mathbf{e}_i \cdot A\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 u_j A_{ij}, \quad (2.18)$$

o que permite concluir que  $A$  é definido por nove componentes, sendo que na base em causa tem-se  $A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot A\mathbf{e}_j$  e, de facto, pode ser representada por uma matriz de dimensão  $3 \times 3$ , i.e.,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

O *produto tensorial* entre dois vetores,  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  é definido pela relação

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}, \quad (2.20)$$

para um vetor arbitrário  $w$ . Note-se que a equação anterior possui uma forma idêntica à Eq. (2.17), permitindo concluir que  $u \otimes v$  é um tensor. Atendendo às Eqs. (2.18) e (2.20), as componentes deste tensor podem ser obtidas através de

$$(u \otimes v)_{ij} = e_i \cdot (u \otimes v) e_j = (e_i \cdot u)(v \cdot e_j) = u_i v_j. \quad (2.21)$$

Por outro lado, é possível escrever

$$Au = \sum_{i,j=1}^3 u_j A_{ij} e_i = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} (e_j \cdot u) e_i = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} (e_i \otimes e_j) u, \quad (2.22)$$

de onde é possível obter a relação

$$A = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} e_i \otimes e_j, \quad (2.23)$$

ou seja, um tensor pode ser escrito como combinação linear dos nove produtos tensoriais  $e_i \otimes e_j$ , com  $i, j = 1, 2, 3$ . Os resultados anteriores permitem ainda obter as componentes da composição de dois tensores, ou seja,

$$AB = \sum_{i,j,k=1}^3 A_{ik} B_{kj} e_i \otimes e_j. \quad (2.24)$$

O produto tensorial possui ainda as seguintes propriedades úteis para o desenvolvimento desta tese

$$(u \otimes v)^T = v \otimes u, \quad (2.25)$$

$$A(u \otimes v) = (Au) \otimes v, \quad (2.26)$$

$$(u \otimes v)A = u \otimes (A^T v), \quad (2.27)$$

$$u \otimes (v + w) = u \otimes v + u \otimes w, \quad (2.28)$$

$$(u \otimes v)(x \otimes y) = (v \cdot x)(u \otimes y), \quad (2.29)$$

onde  $T$  designa o tensor transposto, que será definido um pouco mais à frente.

Dado o tensor  $A$ , pode definir-se a sua *inversa* como sendo o tensor  $A^{-1}$ , que satisfaz

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}. \quad (2.30)$$

O *produto misto* entre três vetores  $u, v$  e  $w$  corresponde ao *determinante* da matriz cujas linhas ou colunas correspondem aos três vetores, pelo que se tem

$$(u \times v) \cdot w = \det(e_1 \otimes u + e_2 \otimes v + e_3 \otimes w) = \det(u \otimes e_1 + v \otimes e_2 + w \otimes e_3), \quad (2.31)$$

onde  $\det(A)$  denota o *determinante* de  $A$ , cujo valor absoluto é o volume do paralelepípedo de arestas  $u, v$  e  $w$ .

O determinante possui algumas propriedades relevantes, nomeadamente

$$\det(A) = \det(A^T), \quad (2.32)$$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \quad (2.33)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \quad (2.34)$$

$$\det(\alpha A) = \alpha \det(A), \quad (2.35)$$

onde  $\alpha$  é um escalar. Note-se que a Eq. (2.34) mostra que uma matriz  $A$  não é invertível se  $\det(A) = 0$ .

A *transformação nula* e a *transformação identidade* denotam-se por  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{1}$ , respetivamente, e verificam as condições seguintes para um vetor arbitrário  $\mathbf{u}$ ,

$$\mathbf{0}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{1}\mathbf{u} = \mathbf{u}. \quad (2.37)$$

Note-se, no entanto, que não é feita qualquer distinção entre o vetor  $\mathbf{0}$  e o tensor  $\mathbf{0}$ .

A *transposta* de um tensor  $A$  é o tensor  $A^T$ , definido por

$$\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot A^T\mathbf{u} \Rightarrow (A^T)_{ij} = A_{ji}, \quad (2.38)$$

para dois vetores arbitrários  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . A transposta da composição de dois tensores pode ser facilmente obtida através de

$$\mathbf{v} \cdot (AB)^T\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot AB\mathbf{v} = (\mathbf{B}\mathbf{v}) \cdot A^T\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^T A^T\mathbf{u} \Rightarrow (AB)^T = \mathbf{B}^T A^T. \quad (2.39)$$

Um tensor diz-se *simétrico* se  $A = A^T$ , e diz-se *antissimétrico* (*skew*, na designação em língua inglesa) se  $A = -A^T$ . Qualquer tensor pode ser decomposto, de forma única, na soma de uma parcela simétrica com uma parcela antissimétrica, ou seja,

$$A = \text{sim}(A) + \text{skw}(A), \quad (2.40)$$

$$\text{sim}(A) = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad (2.41)$$

$$\text{skw}(A) = \frac{1}{2}(A - A^T). \quad (2.42)$$

Por definição, um tensor simétrico possui seis componentes independentes e um tensor antissimétrico possui apenas três. As três componentes independentes de um tensor antissimétrico podem ser escritas através de um vetor, designado por *vetor axial*. Reciprocamente, dado um vetor  $\mathbf{u}$ , é possível definir um tensor antissimétrico que lhe está associado, representado por  $\widetilde{\mathbf{u}}$ , cujas componentes são definidas de forma a verificar a relação

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \quad (2.43)$$

para um vetor arbitrário  $\mathbf{v}$ . A relação anterior permite concluir que o *produto externo* entre dois vetores  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  pode ser visto como uma transformação linear definida por um tensor



antissimétrico  $\tilde{\mathbf{u}}$  (dependente de  $\mathbf{u}$ ) e aplicada a  $\mathbf{v}$ . Verifica-se, portanto, que a forma matricial do tensor  $\tilde{\mathbf{u}}$  é

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

e o vetor axial é representado por

$$\mathbf{u} = \text{axi}(\tilde{\mathbf{u}}). \quad (2.45)$$

Um tensor diz-se *ortogonal* se verificar

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}. \quad (2.46)$$

Um tensor ortogonal define uma transformação linear que (i) preserva a norma, (ii) o produto interno e (iii) a distância entre dois vetores, ou seja,

$$\|\mathbf{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|, \quad (2.47)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.48)$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \quad (2.49)$$

Para além disso, um tensor ortogonal verifica ainda a propriedade

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 1 \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \pm 1. \quad (2.50)$$

Uma transformação ortogonal diz-se *própria* se  $\det(\mathbf{A}) = 1$  e *imprópria* se  $\det(\mathbf{A}) = -1$ . Neste texto, são de particular interesse as transformações ortogonais próprias, que formam um grupo designado por  $\text{SO}(3)$  (*special orthogonal group*, na designação em língua inglesa) e definido da seguinte forma

$$\text{SO}(3) = \{\mathbf{A} \in \text{GL}_3 : \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \wedge \det(\mathbf{A}) = 1\}, \quad (2.51)$$

onde  $\text{GL}_3$  designa o grupo linear das transformações lineares de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^3$ . O interesse nas transformações ortogonais próprias assenta no facto de estas definirem *rotações*, abordadas na Secção 2.5 e fundamentais no contexto da formulação geometricamente exata desenvolvida no Capítulo 4.

### 2.4.3 O operador gradiente

Dado um dado campo vetorial  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , define-se o *gradiente* de  $\mathbf{f}$ , denotado por  $\nabla \mathbf{f}$ , como sendo a transformação linear que, para uma determinada direção  $\mathbf{u}$  e um ponto arbitrário  $\mathbf{x}_0$ , verifica a igualdade

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}]. \quad (2.52)$$

Atendendo à linearidade da derivada direcional, obtém-se

$$\nabla f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} = Df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}] = \sum_{j=1}^3 Df(\mathbf{x}_0)[\mathbf{e}_j]u_j = \sum_{i,j=1}^3 Df_i(\mathbf{x}_0)[\mathbf{e}_j]u_j\mathbf{e}_i = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)u_j\mathbf{e}_i. \quad (2.53)$$

Assim, o tensor  $\nabla f$  pode ser escrito na forma

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (2.54)$$

## 2.5 Rotações finitas e infinitesimais

Como foi já referido, no Capítulo 4 é desenvolvida uma formulação geometricamente exata de barras de parede fina envolvendo, naturalmente, grandes deslocamentos e rotações finitas. De forma a deixar a leitura do texto mais clara, apresentam-se nesta Secção alguns conceitos matemáticos sobre rotações finitas e infinitesimais.

Começa-se por definir a rotação de vetores e tensores através de uma transformação ortogonal e são apresentados os detalhes da sua parametrização através do chamado “vetor de rotação”. São apresentadas ainda as derivadas direcionais do tensor de rotação e os respetivos tensores associados, que serão utilizados no Capítulo 4 para obter as equações de equilíbrio e a sua linearização em função dos parâmetros cinemáticos interpolados no contexto do Método dos Elementos Finitos.

Em seguida, são apresentados conceitos relativos a rotações infinitesimais, sendo que a linearização do tensor de rotação permite obter as relações fundamentais associadas e introduzir o conceito de *spin*. Os *spins* são fundamentais no desenvolvimento da formulação geometricamente exata apresentada no Capítulo 4, estando diretamente relacionados com o conceito de curvatura. São ainda apresentadas as relações entre a variação do vetor de rotação e os *spins*, dadas pelo tensor  $\mathbf{T}$ , bem como as derivadas direcionais deste tensor.

Deve-se referir que o conteúdo apresentado nesta Secção é baseado nas teses de Ritto-Corrêa (2004) e Gonçalves (2007). Em particular, aconselha-se a consulta da primeira para uma abordagem em maior detalhe dos conceitos aqui enunciados.

### 2.5.1 Rotação de vetores e tensores

A *rotação* de um vetor  $\mathbf{U}$  em torno de um eixo fixo pode ser definida como uma transformação linear da forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{U}, \quad (2.55)$$

onde  $\mathbf{u}$  corresponde à rotação de  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{\Lambda}$  é um tensor que define a respetiva rotação. Naturalmente, a rotação de um vetor deve preservar a sua norma e, portanto, o tensor  $\mathbf{\Lambda}$  é ortogonal.

Por outro lado, os vetores da base ortonormada direta  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  verificam a seguinte relação

$$(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \det(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_k) = 1, \quad (2.56)$$

onde os índices  $i - j - k$  permutam ciclicamente. Uma vez que a rotação desta base deve também respeitar a condição anterior, obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \det(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_k) = 1 \\
 \Leftrightarrow & \det\left(\left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_k\right) \mathbf{\Lambda}^T\right) = 1 \\
 \Leftrightarrow & \det(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_k) \det(\mathbf{\Lambda}^T) = 1 \\
 \Leftrightarrow & \det(\mathbf{\Lambda}^T) = 1,
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

ou seja, o tensor  $\mathbf{\Lambda}$  é um elemento de  $\text{SO}(3)$  e, portanto, define uma transformação ortogonal própria, o que está de acordo com a afirmação feita no final da Secção 2.4.2.

Considere-se agora um tensor  $\mathbf{A}$ , que transforma um vetor arbitrário  $\mathbf{u}$  de acordo com

$$\mathbf{U}_A = \mathbf{A} \mathbf{U}. \tag{2.58}$$

A rotação do vetor  $\mathbf{U}_A$  (o índice inferior indica que o vetor  $\mathbf{U}_A$  foi obtido através da transformação do vetor  $\mathbf{U}$  pelo tensor  $\mathbf{A}$ , que não é, necessariamente, um tensor de rotação), pode ser escrita como

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}_A = \mathbf{\Lambda} \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{A} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{u}, \tag{2.59}$$

onde se identifica  $\mathbf{\Lambda} \mathbf{A} \mathbf{\Lambda}^T$  como sendo a rotação do tensor  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{\Lambda}$ . Tendo em conta as propriedades de  $\mathbf{\Lambda}$ , a rotação inversa será  $\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{A} \mathbf{\Lambda}$ .

No Capítulo 4 são desenvolvidas expressões que recorrem às propriedades dos tensores de rotação já abordadas. Em acréscimo, utiliza-se a relação

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{u} \times \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}, \tag{2.60}$$

para dois vetores arbitrários  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Para a demonstrar, recorre-se ao facto de o tensor  $\mathbf{\Lambda}$  ser ortogonal próprio para calcular a componente  $i$  do vetor  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ , obtendo-se

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{\Lambda}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}))_i &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{\Lambda}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
 &= \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
 &= \det(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{u} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{v}) \\
 &= \det(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{u} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{v}) \det(\mathbf{\Lambda}^T) \\
 &= \det(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{\Lambda} \mathbf{u} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}) \\
 &= \det(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{\Lambda} \mathbf{u} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}) \\
 &= \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{\Lambda} \mathbf{u} \times \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}) \\
 &= (\mathbf{\Lambda} \mathbf{u} \times \mathbf{\Lambda} \mathbf{v})_i.
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Finalmente, importa referir que as rotações não são aditivas, ou seja, a soma de dois tensores ortogonais não é um tensor ortogonal. Por outro lado, embora a composição de rotações seja uma operação válida, esta não é comutativa, i.e., o resultado da composição depende da ordem pela qual as rotações são aplicadas (isto é facilmente demonstrado, uma vez que, em geral,  $\mathbf{A} \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \mathbf{A}$ ). Existem, no entanto, exceções a esta última afirmação, como é o caso da composição de rotações que partilham o mesmo eixo de rotação.

### 2.5.2 O tensor de rotação

Embora um tensor de rotação possa ser representado por uma matriz de ordem 3, as suas nove componentes não são independentes entre si. A condição de ortogonalidade (2.46) conduz a seis constrangimentos, permitindo concluir que apenas três das componentes de um tensor de rotação são independentes. No entanto, a adoção de uma parametrização com três parâmetros nunca está livre da existência de singularidades (Stuelpnagel, 1964). Em contrapartida, ao se adotar um número superior de parâmetros de forma a evitar singularidades, torna-se necessário introduzir constrangimentos em número igual à quantidade de parâmetros adotados menos 3.

Muito embora existam diversas formas de parametrizar o tensor de rotação, a sua revisão está fora do âmbito deste texto, aconselhando-se a consulta dos trabalhos de Argyris (1982), Goldstein (1980), Crisfield (1997), Stuelpnagel (1964), Ritto-Corrêa e Camotim (2002) e Ritto-Corrêa (2004). Neste trabalho (nomeadamente no Capítulo 4) adota-se o vetor de rotação  $\theta$  para parametrizar tensores de rotação, dado que o seu significado geométrico é simples (define a direção do eixo de rotação, o seu módulo representa o ângulo de rotação e o sentido é determinado pela chamada “regra da mão direita”) e permite aplicar facilmente as condições de fronteira cinemáticas do problema. No entanto, o vetor de rotação não é definido biunivocamente, conduzindo a singularidades sempre que a sua norma é um múltiplo de  $2\pi$ . Outra vantagem desta parametrização é o facto de envolver apenas três parâmetros (o número mínimo possível), não sendo necessário considerar restrições adicionais e, por outro lado, permite uma abordagem semelhante à utilizada para as translações.

Um tensor de rotação  $\Lambda$  pode ser escrito através do respetivo vetor de rotação  $\theta$  utilizando a chamada “fórmula de Rodrigues”, a qual pode ser escrita das duas formas (ver, e.g., Goldstein (1980))

$$\Lambda = \mathbf{1} + a_1 \tilde{\theta} + a_2 \tilde{\theta}^2 = a_0 \mathbf{1} + a_1 \tilde{\theta} + a_2 \theta \otimes \theta, \quad (2.62)$$

onde as funções escalares  $a_i$  são dadas por

$$a_0 = \cos \theta, \quad a_1 = \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad a_2 = \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}, \quad a_3 = \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3}, \quad (2.63)$$

com  $\theta = \|\theta\|$  (a função  $a_3$  será necessária um pouco mais à frente). A Eq. (2.62) permite obter, conforme esperado,

$$\Lambda \theta = \theta, \quad (2.64)$$

$$\Lambda^T \theta = \theta, \quad (2.65)$$

ou seja, a rotação de vetores paralelos ao eixo de rotação não provoca nestes qualquer alteração.

No Capítulo 4 descreve-se a posição relativa das paredes de uma secção transversal de parede fina através de uma rotação em torno do eixo  $X_3$ . Dado que esta rotação ocorre em torno de um eixo específico, é feita a distinção relativamente ao tensor de rotação

tridimensional arbitrário da secção transversal  $\mathbf{\Lambda}$ , designando-se assim o *tensor de rotação local* das paredes por  $\mathbf{R}$  e o respetivo vetor de rotação por  $\boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{E}_3$ , onde  $\mathbf{E}_3$  é o vetor de base correspondente ao eixo  $X_3$ . Para este tensor de rotação, a fórmula de Rodrigues (2.62) fornece

$$\mathbf{R} = \sin \varphi \widetilde{\mathbf{E}}_3 + \cos \varphi (\mathbf{1} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3) + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3. \quad (2.66)$$

As derivadas direcionais do tensor de rotação são obtidas recorrendo às funções escalares trigonométricas definidas por Ritto-Corrêa e Camotim (2002), dadas por

$$b_i(\theta) = \frac{a'_i(\theta)}{\theta}, \quad c_i(\theta) = \frac{b'_i(\theta)}{\theta}, \quad i = 0, 2, 3, 4, \quad (2.67)$$

onde  $(\cdot)' = d(\cdot)/d\theta$  e as funções  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são dadas explicitamente por (note-se que as funções  $a_i$  foram já definidas em (2.63))

$$\begin{aligned} a_0 &= \cos \theta, & a_1 &= \frac{\sin \theta}{\theta}, \\ a_2 &= \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}, & a_3 &= \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3}, \\ b_0 &= -\frac{\sin \theta}{\theta}, & b_1 &= \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^3}, \\ b_2 &= \frac{\theta \sin \theta - 2 + 2 \cos \theta}{\theta^4}, & b_3 &= \frac{3 \sin \theta - 2\theta - \theta \cos \theta}{\theta^5}, \\ c_0 &= \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\theta^3}, & c_1 &= \frac{(3 - \theta^2) \sin \theta - 3\theta \cos \theta}{\theta^5}, \\ c_2 &= \frac{8 - 5\theta \sin \theta + (\theta^2 - 8) \cos \theta}{\theta^6}, & c_3 &= \frac{8\theta + (\theta^2 - 15) \sin \theta + 7\theta \cos \theta}{\theta^7}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Todas estas funções têm a particularidade de serem funções pares e de exibirem um “amortecimento” à medida que o ângulo aumenta. Estas funções permitem escrever as derivadas direcionais do tensor de rotação de uma forma mais simples, uma vez que se relacionam através de

$$da_i(\theta) = a'_i(\theta)d\theta = a'_i(\theta)\frac{\boldsymbol{\theta} \cdot d\boldsymbol{\theta}}{\theta} = b_i(\theta)\boldsymbol{\theta} \cdot d\boldsymbol{\theta}, \quad (2.69)$$

$$db_i = c_i \boldsymbol{\theta} \cdot d\boldsymbol{\theta}. \quad (2.70)$$

A formulação desenvolvida no Capítulo 4 requer o uso da primeira e segunda derivadas direcionais do tensor de rotação. Assim, atendendo à Eq. (2.62), as derivadas direcionais de  $\mathbf{\Lambda}$  e  $\mathbf{\Lambda}^T$  segundo a direção  $\mathbf{u}$  e calculadas para um vetor de rotação arbitrário  $\boldsymbol{\theta}$ , são dadas por (ver, e.g., Ritto-Corrêa e Camotim (2002))

$$D\mathbf{\Lambda}[\mathbf{u}](\boldsymbol{\theta}) = a_1 \widetilde{\mathbf{u}} + a_2 (\widetilde{\mathbf{u}} \widetilde{\boldsymbol{\theta}} + \widetilde{\boldsymbol{\theta}} \widetilde{\mathbf{u}}) + b_1 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{u}) \widetilde{\boldsymbol{\theta}} + b_2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{u}) \widetilde{\boldsymbol{\theta}}^2. \quad (2.71)$$

$$D\mathbf{\Lambda}^T[\mathbf{u}](\boldsymbol{\theta}) = -a_1 \widetilde{\mathbf{u}} + a_2 (\widetilde{\mathbf{u}} \widetilde{\boldsymbol{\theta}} + \widetilde{\boldsymbol{\theta}} \widetilde{\mathbf{u}}) - b_1 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{u}) \widetilde{\boldsymbol{\theta}} + b_2 (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{u}) \widetilde{\boldsymbol{\theta}}^2. \quad (2.72)$$

A segunda derivada direcional é obtida através da derivada direcional de (2.71) segundo a direção  $v$ , obtendo-se

$$\begin{aligned} D^2\Lambda[u, v](\theta) = & a_2(\widetilde{u}\widetilde{v} + \widetilde{v}\widetilde{u}) + b_1\left((\theta \cdot u)\widetilde{v} + (\theta \cdot v)\widetilde{u} + (u \cdot v)\widetilde{\theta}\right) \\ & + b_2\left((\theta \cdot u)(\widetilde{v}\widetilde{\theta} + \widetilde{\theta}\widetilde{v}) + (\theta \cdot v)(\widetilde{u}\widetilde{\theta} + \widetilde{\theta}\widetilde{u}) + (u \cdot v)\widetilde{\theta}^2\right) \\ & + c_1(\theta \cdot v)(\theta \cdot u)\widetilde{\theta} + c_2(\theta \cdot u)(\theta \cdot v)\widetilde{\theta}^2. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Note-se que, como a ordem de derivação é irrelevante, a troca de posição entre os vetores  $u$  e  $v$  não produz quaisquer alterações na expressão (2.73).

Conforme foi já referido, a parametrização através do tensor de rotação conduz a singularidades para ângulos múltiplos de  $2\pi$ , ou seja,  $\theta = 2k\pi$ , com  $k$  inteiro. De facto, substituindo este valor em (2.71) obtém-se

$$D\Lambda[u] = \frac{1}{4k^2\pi^2}(\theta \cdot u)\widetilde{\theta}, \quad (2.74)$$

que se anula sempre que  $\theta \cdot u = 0$ , ou seja, se  $u$  for perpendicular a  $\theta$  — isto significa que o tensor de rotação não sofre variações nesta direção, que portanto constitui um grau de liberdade do problema estrutural com rigidez nula.

No contexto da formulação geometricamente exata apresentada no Capítulo 4, de forma a ser possível escrever o operador tangente em função dos parâmetros cinemáticos que constituem as incógnitas do problema, é vantajoso escrever as derivadas direcionais (2.71)-(2.73) através dos chamados *tensores associados*, na forma

$$D\Lambda[u]a = \Xi_{D\Lambda}(a)u, \quad (2.75)$$

$$D\Lambda^T[u]a = \Xi_{D\Lambda^T}(a)u, \quad (2.76)$$

$$D^2\Lambda[u, v]a \cdot b = \Xi_{D^2\Lambda}(a, b)u \cdot v, \quad (2.77)$$

onde  $a$  e  $b$  são vetores arbitrários. Estes tensores associados foram originalmente obtidos em Ritto-Corrêa e Camotim (2002) e são explicitamente dados por

$$\Xi_{D\Lambda}(a) = -a_1\widetilde{a} - a_2(\widetilde{\theta}a + \widetilde{\theta}\widetilde{a}) + b_1(\widetilde{\theta}a \otimes \theta) + b_2(\widetilde{\theta}^2 a \otimes \theta), \quad (2.78)$$

$$\Xi_{D\Lambda^T}(a) = a_1\widetilde{a} - a_2(\widetilde{\theta}a + \widetilde{\theta}\widetilde{a}) - b_1(\widetilde{\theta}a \otimes \theta) + b_2(\widetilde{\theta}^2 a \otimes \theta), \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{D^2\Lambda}(a, b) = & a_2(\widetilde{a}\widetilde{b} + \widetilde{b}\widetilde{a}) + b_1(\widetilde{a}b \otimes \theta + \theta \otimes \widetilde{a}b + (\widetilde{\theta}a \cdot b)\mathbf{1}) \\ & + b_2\left((\widetilde{a}\widetilde{b} + \widetilde{b}\widetilde{a})\theta \otimes \theta + \theta \otimes (\widetilde{a}\widetilde{b} + \widetilde{b}\widetilde{a})\theta + (\widetilde{\theta}^2 a \cdot b)\mathbf{1}\right) \\ & + \left(c_1\widetilde{\theta}a \cdot b + c_2\widetilde{\theta}^2 a \cdot b\right)\theta \otimes \theta. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Note-se a semelhança das expressões obtidas para  $\Xi_{D\Lambda}$  e  $\Xi_{D\Lambda^T}$ , diferindo apenas no sinal dos termos associados às funções  $a_1$  e  $b_1$ . Por outro lado, o tensor  $\Xi_{D^2\Lambda}$  é simétrico (embora a ordem dos argumentos não o seja), estando de acordo com a comutatividade da ordem de derivação.

### 2.5.3 Rotações infinitesimais e *spins*

Considere-se agora o caso das rotações infinitesimais. O tensor de rotação pode ser obtido através da linearização de  $\Lambda$  em torno de  $\theta = 0$  e na direção de uma variação infinitesimal  $d\theta$ . Atendendo à Eq. (2.6), obtém-se

$$\Lambda = \Lambda(0) + D\Lambda(0)[d\theta] = \mathbf{1} + d\tilde{\theta}. \quad (2.81)$$

Assim, a rotação (infinitesimal) de um vetor arbitrário  $U$  fornece

$$\Lambda U = (\mathbf{1} + d\tilde{\theta})U = U + d\theta \times U, \quad (2.82)$$

sendo possível verificar que as rotações infinitesimais (i) são aditivas, (ii) comutativas e (iii) não preservam a norma do vetor, uma vez que  $\|U + d\theta \times U\| > \|U\|$  (desde que  $d\theta \times U \neq 0$ ).

Considere-se agora a linearização de  $\Lambda$  em torno de um vetor de rotação arbitrário  $\theta \neq 0$ . Para tal, seja  $u$  a rotação do vetor  $U$  e  $d\Lambda = D\Lambda(\theta)[d\theta]$  (esta escolha de notação está em conformidade com o que foi referido na Secção 2.3). Deste modo, obtém-se

$$u + du = (\Lambda + d\Lambda)U = u + d\Lambda U. \quad (2.83)$$

Este resultado permite escrever, em função do vetor rodado  $u$ , a variação  $du$  e um vetor  $dU$ , correspondente à retro-rotação, para a posição inicial, da variação  $du$  (ou seja,  $dU = \Lambda^T du$ , mas note-se que  $dU$  não representa a variação do vetor  $U$ ). Tem-se assim

$$du = (d\Lambda)U = d\Lambda \Lambda^T u = \tilde{d\omega} u \Rightarrow \tilde{d\omega} = d\Lambda \Lambda^T, \quad (2.84)$$

$$dU = \Lambda^T du = \Lambda^T d\Lambda U = \tilde{d\Omega} U \Rightarrow \tilde{d\Omega} = \Lambda^T d\Lambda, \quad (2.85)$$

onde os tensores  $\tilde{d\omega}$  e  $\tilde{d\Omega}$  designam-se por *tensor espacial* e *tensor material de rotação infinitesimal*, respetivamente. Importa referir que  $\tilde{d\omega}$  e  $\tilde{d\Omega}$  não representam variações infinitesimais de outras quantidades (i.e., não existem as grandezas  $\tilde{\omega}$  e  $\tilde{\Omega}$ ). No entanto, o símbolo  $d$  é mantido para que seja possível identificar o tipo de variação considerada (por exemplo, para uma variação virtual utilizar-se-ia  $\delta$  no lugar de  $d$ ).

Conforme sugere a sua representação, os tensores  $\tilde{d\omega}$  e  $\tilde{d\Omega}$  são antissimétricos, sendo isso facilmente demonstrado através de

$$\tilde{d\omega} + \tilde{d\omega}^T = d\Lambda \Lambda^T + \Lambda d\Lambda^T = d(\Lambda \Lambda^T) = 0, \quad (2.86)$$

$$\tilde{d\Omega} + \tilde{d\Omega}^T = \Lambda^T d\Lambda + d\Lambda^T \Lambda = d(\Lambda^T \Lambda) = 0. \quad (2.87)$$

Assim, é possível definir os vetores axiais de  $\tilde{d\omega}$  e  $\tilde{d\Omega}$  como

$$d\omega = \text{axi}(d\Lambda \Lambda^T), \quad (2.88)$$

$$d\Omega = \text{axi}(\Lambda^T d\Lambda), \quad (2.89)$$

onde  $d\omega$  e  $d\Omega$  se designam, respetivamente, por *spin espacial* e *spin material*. A relação entre estes vetores/tensores pode ser obtida diretamente de (2.84) e (2.85), obtendo-se

$$\widetilde{d\omega} = \Lambda \widetilde{d\Omega} \Lambda^T \Rightarrow d\omega = \Lambda d\Omega, \quad (2.90)$$

$$\widetilde{d\Omega} = \Lambda^T \widetilde{d\omega} \Lambda \Rightarrow d\Omega = \Lambda^T d\omega. \quad (2.91)$$

As expressões anteriores permitem verificar que  $\widetilde{d\omega}$  e  $d\omega$  são, respetivamente, as rotações de  $\widetilde{d\Omega}$  e  $d\Omega$ . Para além disso, é possível agora escrever

$$\mathbf{u} + d\mathbf{u} = \mathbf{u} + d\omega \times \mathbf{u}, \quad (2.92)$$

$$\mathbf{U} + d\mathbf{U} = \mathbf{U} + d\Omega \times \mathbf{U}, \quad (2.93)$$

o que significa, atendendo à Eq. (2.82), que  $d\omega$  e  $d\Omega$  representam fisicamente vetores de rotação infinitesimal.

Os *spins*  $d\omega$  e  $d\Omega$  podem ser relacionados com  $d\theta$  através de (Ibrahimbegović et al., 1995; Ritto-Corrêa e Camotim, 2002)

$$d\omega = \mathbf{T} d\theta, \quad (2.94)$$

$$d\Omega = \mathbf{T}^T d\theta, \quad (2.95)$$

onde os tensores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}^T$  são dados de forma explícita por (recorde-se as funções  $a_i$  (2.63))

$$\mathbf{T} = \mathbf{1} + a_2 \widetilde{\theta} + a_3 \widetilde{\theta}^2, \quad (2.96)$$

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{1} - a_2 \widetilde{\theta} + a_3 \widetilde{\theta}^2. \quad (2.97)$$

Conforme foi feito na Secção 2.5.2, é necessário obter as derivadas direcionais de  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}^T$ , dadas, para duas direções arbitrárias  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , por (Ritto-Corrêa e Camotim, 2002)

$$D\mathbf{T}[\mathbf{u}](\theta) = a_2 \widetilde{\mathbf{u}} + a_3 (\widetilde{\mathbf{u}}\widetilde{\theta} + \widetilde{\theta}\widetilde{\mathbf{u}}) + b_2(\theta \cdot \mathbf{u})\widetilde{\theta} + b_3(\theta \cdot \mathbf{u})\widetilde{\theta}^2, \quad (2.98)$$

$$D\mathbf{T}^T[\mathbf{u}](\theta) = -a_2 \widetilde{\mathbf{u}} + a_3 (\widetilde{\mathbf{u}}\widetilde{\theta} + \widetilde{\theta}\widetilde{\mathbf{u}}) - b_2(\theta \cdot \mathbf{u})\widetilde{\theta} + b_3(\theta \cdot \mathbf{u})\widetilde{\theta}^2, \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} D^2\mathbf{T}[\mathbf{u}, \mathbf{v}](\theta) &= a_3 (\widetilde{\mathbf{u}}\widetilde{\mathbf{v}} + \widetilde{\mathbf{v}}\widetilde{\mathbf{u}}) + b_2 ((\theta \cdot \mathbf{u})\widetilde{\mathbf{v}} + (\theta \cdot \mathbf{v})\widetilde{\mathbf{u}} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\widetilde{\theta}) \\ &\quad + b_3 ((\theta \cdot \mathbf{u})(\widetilde{\theta}\widetilde{\mathbf{v}} + \widetilde{\mathbf{v}}\widetilde{\theta}) + (\theta \cdot \mathbf{v})(\widetilde{\theta}\widetilde{\mathbf{u}} + \widetilde{\mathbf{u}}\widetilde{\theta}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\widetilde{\theta}^2) \\ &\quad + c_2(\theta \cdot \mathbf{u})(\theta \cdot \mathbf{v})\widetilde{\theta} + c_3(\theta \cdot \mathbf{u})(\theta \cdot \mathbf{v})\widetilde{\theta}^2. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Como o único termo antissimétrico de  $\mathbf{T}$  está associado com a função  $a_2$ , a derivada direcional de  $\mathbf{T}^T$  é diretamente obtida de  $\mathbf{T}$ , através de uma troca de sinal dos termos associados a  $a_2$  e  $b_2$ .

As derivadas direcionais de  $\mathbf{T}$  podem também ser escritas com recurso a tensores associados, à semelhança do que foi feito para o tensor  $\Lambda$ . Deste modo, para dois vetores arbitrários  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , as derivadas direcionais de  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}^T$ , segundo as direções arbitrárias  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , satisfazem (Ritto-Corrêa e Camotim, 2002)

$$D\mathbf{T}[\mathbf{u}]\mathbf{a} = \Xi_{DT}(\mathbf{a})\mathbf{u}, \quad (2.101)$$

$$D\mathbf{T}^T[\mathbf{u}]\mathbf{a} = \Xi_{DT^T}(\mathbf{a})\mathbf{u}, \quad (2.102)$$

$$D^2\mathbf{T}[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \Xi_{D^2T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.103)$$



onde os respetivos tensores associados são dados por

$$\mathbf{\Xi}_{DT}(\mathbf{a}) = -a_2 \tilde{\mathbf{a}} - a_3 (\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{a} + \tilde{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathbf{a}}) + b_2 (\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{a} \otimes \boldsymbol{\theta}) + b_3 (\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 \mathbf{a} \otimes \boldsymbol{\theta}), \quad (2.104)$$

$$\mathbf{\Xi}_{DT^T}(\mathbf{a}) = a_2 \tilde{\mathbf{a}} - a_3 (\tilde{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{a}) - b_2 (\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{a} \otimes \boldsymbol{\theta}) + b_3 (\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 \mathbf{a} \otimes \boldsymbol{\theta}), \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Xi}_{D^2T}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = & a_3 (\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{a}}) + b_2 (\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}} \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes \tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}} + (\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{1}) \\ & + b_3 ((\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{a}}) \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \otimes (\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{a}}) \boldsymbol{\theta} + (\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{1}) \\ & + (c_2 \tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + c_3 \tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Novamente, as expressões obtidas para  $\mathbf{\Xi}_{DT}$  e  $\mathbf{\Xi}_{DT^T}$  diferem apenas no sinal dos termos associados às funções  $a_2$  e  $b_2$ . Verifica-se também que o tensor  $\mathbf{\Xi}_{D^2T}$  é simétrico em virtude da comutatividade da ordem de derivação, embora a ordem dos seus argumentos não seja comutativa.

## 2.6 Teoria Generalizada de Vigas

A Teoria Generalizada de Vigas (ou GBT, da sua designação em língua inglesa *Generalized Beam Theory*) é, na sua génese, uma teoria de barras prismáticas de parede fina que tem em conta a deformação da secção transversal, no seu plano e para fora deste (empenamento), inspirada no chamado “método variacional geral” de Vlasov (1958). A GBT foi originalmente desenvolvida por Schardt e colaboradores (Schardt, 1966, 1989), para efetuar principalmente análises de 1.<sup>a</sup> ordem, análises lineares de estabilidade e de vibração livre deste tipo de barras — uma lista detalhada das publicações deste grupo pode ser consultada em [www.gbt.info](http://www.gbt.info).

Muito embora Schardt tenha publicado algum do seu trabalho em língua inglesa (Schardt, 1994a,b), a maior parte da sua investigação foi publicada em língua alemã, devendo-se a divulgação da GBT junto da comunidade científica internacional a Davies e seus colaboradores (Davies e Leach, 1994; Leach, 1994; Davies et al., 1994, 1997; Davies, 1998, 2000). Deste então, vários investigadores têm-se dedicado ao desenvolvimento e aplicação da GBT, dos quais se destaca Camotim e colaboradores (uma lista completa e atualizada de publicações deste grupo pode ser consultada em [www.civil.ist.utl.pt/gbt](http://www.civil.ist.utl.pt/gbt)). Uma descrição histórica do desenvolvimento da GBT pode ser consultada na tese de Silvestre (2005). Mais recentemente, a GBT tem sido utilizada para efetuar uma gama relativamente alargada de análises (lineares ou não lineares, estáticas ou dinâmicas), envolvendo vários tipos de material (e.g., aço, betão, FRP) e não somente barras isoladas, mas também estruturas reticuladas.

Apesar de a maior parte dos desenvolvimentos e aplicações recentes da GBT se dever ao grupo de investigação liderado por Camotim, deve referir-se que vários outros investigadores se têm dedicado a este tópico, sendo de realçar que, hoje em dia, existem grupos de investigação da GBT sediados em vários países, como Espanha (Casafont et al., 2018),

Roménia (Nedelcu, 2011, 2012), Dinamarca (Andreassen e Jönsson, 2012a,b), Estados Unidos (Cai e Moen, 2016; Cai, 2019), China (Duan e Zhao, 2019), Itália (de Miranda et al., 2017; Ferrarotti et al., 2017) ou Austrália (Ranzi e Luongo, 2011; Taig et al., 2016).

A GBT tem-se revelado uma ferramenta de análise estrutural (i) *clarificadora*, devido ao facto de utilizar uma descrição cinemática baseada em “modos de deformação” da secção transversal, permitindo uma interpretação estrutural dos resultados, (ii) *eficiente* do ponto de vista computacional, dado que em geral conduz a resultados muito precisos com poucos graus de liberdade (por vezes é possível obter soluções semianalíticas ou mesmo analíticas), e (iii) *versátil*, uma vez que permite incluir/excluir efeitos específicos de forma simples (Camotim et al., 2010a,b; Camotim e Basaglia, 2013).

Conforme se referiu no parágrafo anterior, no contexto da GBT, a descrição cinemática da barra baseia-se na sobreposição dos chamados “modos de deformação” da secção transversal, cujas amplitudes ao longo do eixo da barra constituem as incógnitas do problema. Estes modos são subdivididos em vários conjuntos de acordo com critérios específicos e são ordenados de forma a que, em geral, os primeiros sejam os que mais caracterizam o comportamento estrutural da barra. De facto, os primeiros quatro modos constituem os modos clássicos da teoria das peças lineares (extensão axial, duas flexões em torno dos eixos centrais principais de inércia e torção em torno do centro de corte), sendo a deformação da secção, tanto no plano como para fora deste, contabilizada através de modos de ordem superior.

O carácter modal da GBT oferece algumas vantagens que a destacam relativamente aos métodos clássicos de análise de barras de parede fina (o método das faixas finitas e o método dos elementos finitos de casca), nomeadamente: (i) a introdução de hipóteses simplificativas, relativas aos campos de tensões e/ou deformações, conduz a uma redução do número de graus de liberdade do problema sem que a precisão da solução seja afetada e (ii) a análise da participação modal de cada um dos modos de deformação permite tecer conclusões acerca da importância relativa de cada um. É ainda de salientar que, em certos casos, conforme foi já mencionado, a GBT permite obter soluções semianalíticas ou analíticas, mesmo em problemas relativamente complexos, fornecendo uma visão única do problema em causa — a título de exemplo, refere-se que (i) Schardt (1994a,b) analisou a bifurcação de barras uniformemente comprimidas e fletidas, (ii) Gonçalves e Camotim (2013) forneceram soluções para o problema de bifurcação de tubos poligonais regulares sujeitos à torção e (iii) em Henriques et al. (2016) apresentam-se soluções analíticas para o problema de *shear lag* em vigas mistas aço-betão.

Finalmente, importa referir que, para peças retas, os modos de deformação para secções arbitrárias (abertas, fechadas ou “mistas”), constituídas por paredes retas, podem ser obtidos através do programa GBTUL 2.06 (Bebiano et al., 2018), disponível em [www.civil.ist.utl.pt/gbt](http://www.civil.ist.utl.pt/gbt), o qual segue os procedimentos propostos por Gonçalves et al. (2010b, 2014) e Bebiano et al. (2015).

Em seguida, apresentam-se (i) as equações fundamentais da formulação da GBT para

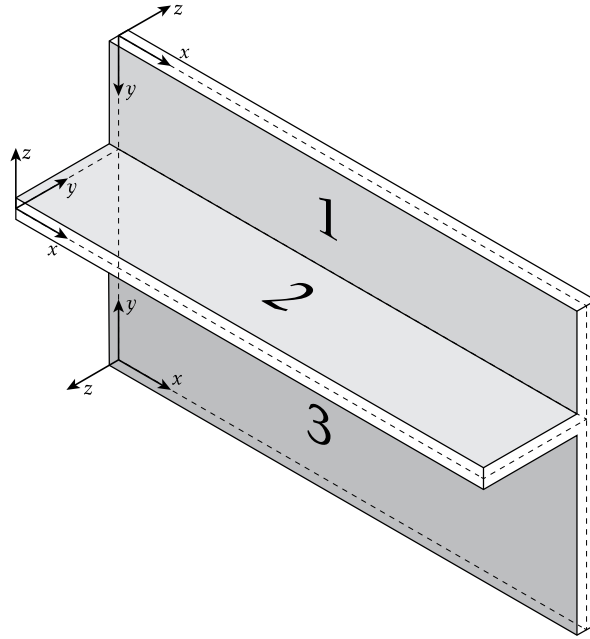


Figura 2.1: Secção arbitrária de parede fina e referencias locais para cada parede.

barras de eixo reto e (ii) resume-se o procedimento para o cálculo dos modos de deformação (mencionado no parágrafo anterior), de forma a permitir uma comparação direta com a formulação para barras de eixo circular apresentada no Capítulo 3 (Secções 3.3-3.5) e a abordagem proposta para o cálculo dos respectivos modos de deformação (Secção 3.7.2).

### 2.6.1 Equações fundamentais da GBT linear

No que se segue, utiliza-se a notação adotada por Gonçalves et al. (2010b).

Considere-se uma secção transversal arbitrária e seja  $(x, y, z)$  o referencial local direto que é fixo em cada parede, conforme ilustrado na Figura 2.1, onde  $x$  corresponde ao eixo longitudinal,  $y$  acompanha a linha média e  $z$  define a direção da espessura. O campo de deslocamentos de cada parede no referencial local é dado pelo vetor

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix}, \quad (2.107)$$

onde  $U_x$ ,  $U_y$  e  $U_z$  são as componentes do deslocamento segundo cada um dos eixos locais.

Considerando a hipótese dos pequenos deslocamentos, as componentes do tensor de

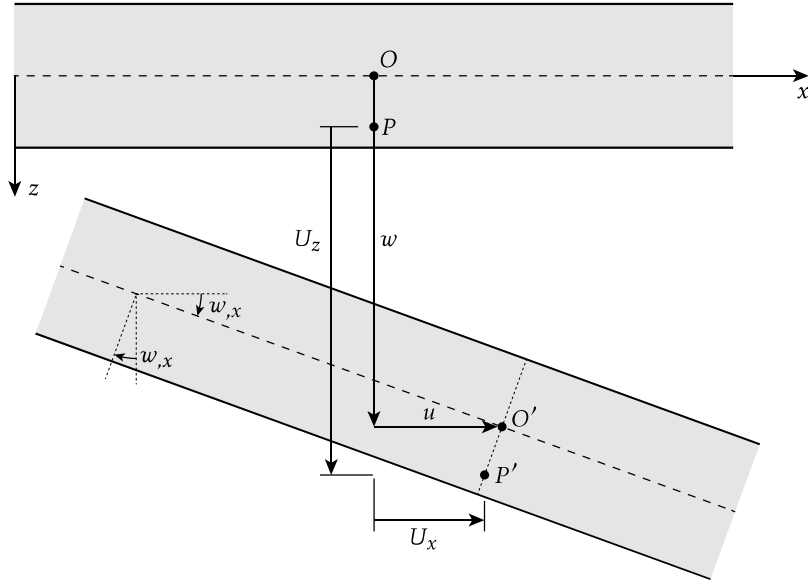


Figura 2.2: Ilustração da hipótese de Kirchhoff no plano  $xz$ , com  $w_{,x} > 0$ .

deformação são dadas por

$$\varepsilon_{xx} = U_{x,x}, \quad (2.108)$$

$$\varepsilon_{yy} = U_{y,y}, \quad (2.109)$$

$$\varepsilon_{zz} = U_{z,z}, \quad (2.110)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = U_{x,y} + U_{y,x}, \quad (2.111)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = U_{x,z} + U_{z,x}, \quad (2.112)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = U_{y,z} + U_{z,y}. \quad (2.113)$$

Em virtude da espessura reduzida das paredes, é possível adotar a hipótese de Kirchhoff, i.e., as fibras normais ao plano médio da parede permanecem indeformáveis e perpendiculares a este plano após a deformação, o que corresponde a adotar

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (2.114)$$

A hipótese de Kirchhoff permite escrever o tensor de deformação numa forma mais concisa e, adotando a notação de Voigt, tem-se que as componentes não nulas são agrupadas na forma

$$\varepsilon(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

Conforme mostra a Figura 2.2 (para o plano  $xz$ ), a hipótese de Kirchhoff permite escrever o deslocamento de um ponto arbitrário  $P$  em função do deslocamento do plano médio da parede  $O$ . Sejam  $u$ ,  $v$  e  $w$  as componentes do deslocamento do plano médio da parede segundo os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. De acordo com a figura e procedendo

de forma análoga para o plano perpendicular  $yz$ , o deslocamento do ponto  $P$ , situado à cota  $z$ , é dado por

$$U_x(P) = u - zw_{,x}, \quad (2.116)$$

$$U_y(P) = v - zw_{,y}, \quad (2.117)$$

$$U_z(P) = w. \quad (2.118)$$

Deste modo, o campo de deslocamentos (2.107) pode ser escrito apenas em função dos deslocamentos do plano médio, ou seja,

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u - zw_{,x} \\ v - zw_{,y} \\ w \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

e pode ser decomposto numa parcela de membrana  $[u \ v \ w]^T$  e numa parcela de flexão  $[-zw_{,x} \ -zw_{,y} \ 0]^T$ .

Conforme foi já referido, a descrição cinemática da GBT escreve o campo de deslocamentos como uma combinação linear de modos de deformação da secção transversal, cada um multiplicado por uma função que define a sua amplitude ao longo do eixo da barra (estas funções de amplitude constituem as únicas incógnitas do problema). Assim, os deslocamentos do plano médio da parede  $u$ ,  $v$  e  $w$  são escritos por

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^D \bar{u}_k(y) \varphi_k(x) = \bar{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\varphi}, \quad (2.120)$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^D \bar{v}_k(y) \phi_k(x) = \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\phi}, \quad (2.121)$$

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^D \bar{w}_k(y) \psi_k(x) = \bar{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\psi}, \quad (2.122)$$

onde  $\bar{u}_k$ ,  $\bar{v}_k$  e  $\bar{w}_k$  são as componentes de deslocamento da linha média associadas ao modo de deformação  $k = 1, \dots, D$  ( $D$  é o número de modos de deformação considerados) e  $\varphi_k$ ,  $\phi_k$  e  $\psi_k$  são as respectivas funções de amplitude. Todas as formas vectoriais destas grandezas constituem vetores-coluna com dimensão igual a  $D$ . A determinação das funções  $\bar{u}_k$ ,  $\bar{v}_k$  e  $\bar{w}_k$  será abordada de forma sucinta na Secção seguinte, para barras retas.

Muito embora cada componente de deslocamento  $u$ ,  $v$  e  $w$  possua uma função de amplitude diferente ( $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\boldsymbol{\phi}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$ , respetivamente), é possível deduzir uma relação entre estas três funções. Em primeiro lugar, para uma secção transversal genérica, a existência de deslocamentos  $\bar{v}$  numa parede não pode ocorrer sem que tal provoque deslocamentos  $\bar{w}$  noutras paredes da secção, de modo a respeitar as condições de compatibilidade. Assim, é necessário impor a relação,

$$\phi_k(x) = \psi_k(x). \quad (2.123)$$

Por outro lado, nas formulações da GBT é comum impor a chamada “hipótese de Vlasov”, que consiste em admitir que as distorções no plano médio da parede são nulas ( $\gamma_{xy}^M = 0$ ), o que é geralmente aceitável para barras longas com secção aberta de parede fina<sup>1</sup>. Atendendo às expressões anteriormente definidas, tem-se

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}^M = 0 &\Leftrightarrow u_{,y} + v_{,x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^D \bar{u}_k(y) \varphi_k(x) \right)_{,y} + \left( \sum_{k=1}^D \bar{v}_k(y) \phi_k(x) \right)_{,x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^D \bar{u}_{k,y}(y) \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^D \bar{v}_k(y) \phi'_k(x) = 0,\end{aligned}\quad (2.124)$$

onde  $\phi'_k = \phi_{k,x}$ . De modo a respeitar a igualdade, é necessário que se verifique simultaneamente

$$\bar{u}_{k,y}(y) = -\bar{v}_k(y), \quad (2.125)$$

$$\varphi_k(x) = \phi'_k(x), \quad (2.126)$$

ou seja, deve existir uma relação entre as componentes  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  de cada modo e entre as respetivas funções de amplitude. No que se segue, considera-se que  $\varphi_k(x) = \phi'_k(x)$  para todos os modos de deformação, mesmo que a hipótese de Vlasov não seja adotada (o que não constitui nenhuma limitação). Deste modo, as Eqs. (2.120)-(2.122) podem ser escritas utilizando apenas as funções de amplitude  $\phi_k$ , resultando em

$$u = \bar{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\phi}', \quad (2.127)$$

$$v = \bar{\mathbf{v}}^T \boldsymbol{\phi}, \quad (2.128)$$

$$w = \bar{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\phi}. \quad (2.129)$$

Com vista à implementação numérica, adota-se a notação matricial introduzida por Gonçalves e Camotim (2011), segundo a qual se escreve

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \boldsymbol{\Xi}_U(y, z) \boldsymbol{\Phi}(x), \quad (2.130)$$

com

$$\boldsymbol{\Xi}_U = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^T - z\bar{\mathbf{w}}^T & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{v}}^T - z\bar{\mathbf{w}}_{,y}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{w}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.131)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\phi}' \\ \boldsymbol{\phi}'' \end{bmatrix}. \quad (2.132)$$

<sup>1</sup>Para secções fechadas, a hipótese de Vlasov não permite capturar corretamente o comportamento de torção, uma vez que este envolve distorções de membrana não-nulas. Por outro lado, as barras curtas são, em geral, afetadas pela deformação por corte, não fazendo sentido considerar a hipótese de Vlasov

Relativamente às deformações, tem-se

$$\varepsilon(x, y, z) = \Xi_\varepsilon(y, z) \Phi(x), \quad (2.133)$$

$$\Xi_\varepsilon(y, z) = \Xi_\varepsilon^M(y, z) + \Xi_\varepsilon^F(y, z), \quad (2.134)$$

$$\Xi_\varepsilon^{(\cdot)}(y, z) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left(\xi_{13}^{(\cdot)}\right)^T \\ \left(\xi_{21}^{(\cdot)}\right)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(\xi_{32}^{(\cdot)}\right)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.135)$$

onde os vetores-coluna  $\xi_{ij}^{(\cdot)}$  dizem respeito às componentes de membrana (M) ou flexão (F), sendo dados por

$$\xi_{13}^M = \bar{u}, \quad (2.136)$$

$$\xi_{21}^M = \bar{v}_{,y}, \quad (2.137)$$

$$\xi_{32}^M = \bar{u}_{,y} + \bar{v}, \quad (2.138)$$

$$\xi_{13}^M = -z\bar{w}, \quad (2.139)$$

$$\xi_{21}^M = -z\bar{w}_{,yy}, \quad (2.140)$$

$$\xi_{32}^M = -2z\bar{w}_{,y}. \quad (2.141)$$

Na GBT é usual admitir que as paredes da secção transversal estão sujeitas a um estado plano de tensão, o que é inconsistente com o estado plano de deformação imposto pela hipótese de Kirchhoff, quando  $\nu \neq 0$ , mas tal não conduz a erros significativos. Deste modo,  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0$  e o tensor das tensões pode ser escrito na forma vetorial

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.142)$$

Neste trabalho considera-se sempre uma lei material de Saint-Venant-Kirchhoff (nesta Secção e no Capítulo 3 aplicada ao caso da elasticidade infinitesimal), pelo que a relação constitutiva é dada por

$$\sigma = C\varepsilon, \quad (2.143)$$

onde  $C$  é a matriz constitutiva típica para estados planos de tensão e é dada por

$$C = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (2.144)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e  $G$  o módulo de distorção. No entanto, na GBT é também comum utilizar ainda a hipótese  $\varepsilon_{yy}^M = 0$  (as paredes são

inextensíveis na direção transversal  $y$ ), o que é aceitável numa grande gama de problemas. Nesse caso admite-se também  $\sigma_{yy}^M = 0$  e adota-se, apenas para os termos de membrana, a matriz constitutiva

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (2.145)$$

Considerando apenas um carregamento constituído por forças distribuídas  $\mathbf{q}$  aplicadas na superfície média das paredes, as equações de equilíbrio podem ser obtidas diretamente a partir do princípio dos trabalhos virtuais, ou seja,

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \Leftrightarrow - \int_{A \times [0, L]} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA dx + \int_{\Gamma \times [0, L]} \delta \mathbf{U}^T \mathbf{q} d\Gamma dx = 0, \quad (2.146)$$

onde  $A$  é a área da secção transversal,  $L$  é o comprimento do eixo da barra e  $\Gamma$  é a linha média da secção transversal.

Atente-se agora à parcela das forças interiores da Eq. (2.146). Esta pode ser escrita em função das chamadas “matrizes modais da GBT”, obtendo-se

$$\delta W_{int} = - \int_{[0, L]} \delta \boldsymbol{\Phi}^T \mathcal{M} \boldsymbol{\Phi} dx, \quad (2.147)$$

onde  $\delta \boldsymbol{\Phi}^T = [(\delta \phi)^T \quad (\delta \phi')^T \quad (\delta \phi'')^T]$  e a matriz modal global é dada por

$$\mathcal{M} = \int_A \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon dA = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (2.148)$$

sendo constituída pelas matrizes modais da GBT clássica

$$\mathbf{B} = \int_A \frac{E}{1 - \nu^2} \boldsymbol{\xi}_{21} \boldsymbol{\xi}_{21}^T dA, \quad (2.149)$$

$$\mathbf{C} = \int_A \frac{E}{1 - \nu^2} \boldsymbol{\xi}_{13} \boldsymbol{\xi}_{13}^T dA, \quad (2.150)$$

$$\mathbf{D}_1 = \int_A G \boldsymbol{\xi}_{32} \boldsymbol{\xi}_{32}^T dA, \quad (2.151)$$

$$\mathbf{D}_2 = \int_A \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \boldsymbol{\xi}_{21} \boldsymbol{\xi}_{13}^T dA. \quad (2.152)$$

Caso se adote  $\varepsilon_{yy}^M = 0$ , o termo  $E/(1 - \nu^2)$  é substituído por  $E$  na parcela de membrana da matriz  $\mathbf{C}$  e as componentes de membrana das matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}_2$  são nulas. Por outro lado, para os modos que adotam a hipótese de Vlasov, as respetivas componentes da matriz  $\mathbf{D}_1$  são nulas.

Em alternativa, o trabalho virtual das forças interiores pode ser escrito em função de esforços generalizados, ou seja,

$$\delta W_{int} = - \int_{[0, L]} \delta \boldsymbol{\Phi}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_{yy} \\ \boldsymbol{\chi}_{xy} \\ \boldsymbol{\chi}_{xx} \end{bmatrix} dx, \quad (2.153)$$



onde e os vetores dos esforços generalizados são dados por

$$\mathcal{X}_{yy} = \mathbf{B}\phi + \mathbf{D}_2\phi'' = \int_A \frac{E}{1-\nu^2} \xi_{21} (\xi_{21}^T \phi + \nu \xi_{13}^T \phi'') dA, \quad (2.154)$$

$$\mathcal{X}_{xy} = \mathbf{D}_1\phi' = \int_A G \xi_{32} \xi_{32}^T \phi' dA \quad (2.155)$$

$$\mathcal{X}_{xx} = \mathbf{D}_2^T \phi + \mathbf{C}\phi'' = \int_A \frac{E}{1-\nu^2} \xi_{13} (\nu \xi_{21}^T \phi + \xi_{13}^T \phi'') dA. \quad (2.156)$$

### 2.6.2 Determinação dos modos de deformação

Os modos de deformação são funções de forma que definem o espaço do campo de deslocamentos da linha média da secção transversal, sendo dados pelas funções  $\bar{u}_k(y)$ ,  $\bar{v}_k(y)$  e  $\bar{w}_k(y)$ . As funções  $\bar{u}_k$  dizem-se *de empenamento* (para fora do plano da secção) e as funções  $\bar{v}_k$  e  $\bar{w}_k$  referem-se aos *deslocamentos no plano* da secção transversal. Conforme foi já mencionado, estas funções podem ser obtidas pelo programa GBTUL 2.06 (Bebiano et al., 2018), cujo cálculo segue o procedimento proposto por Gonçalves et al. (2010b, 2014) e Bebiano et al. (2015), o qual vai ser descrito de forma sucinta nesta Secção.

Em primeiro lugar, a secção transversal é discretizada utilizando (i) *nós naturais*, localizados automaticamente nas interseções das linhas médias de cada parede e, caso existam, nas extremidades livres, e (ii) *nós intermédios*, colocados arbitrariamente ao longo de cada parede entre os nós naturais — em geral, estes encontram-se igualmente espaçados e, na verdade, são os nós intermédios que definem o grau de discretização da secção transversal, uma vez que são dependentes do utilizador. A cada nó são associados quatro graus de liberdade: três translações (uma de empenamento e duas no plano da secção transversal) e uma rotação no plano da secção. A Figura 2.3 mostra a discretização e os graus de liberdade associados (no plano), para uma secção em C com reforços (os graus de liberdade dos nós de extremidade e dos nós intermédios estão orientados segundo o referencial local da respetiva parede).

Em seguida, é gerada uma base inicial para os modos de deformação com base nos deslocamentos nodais. Na GBT clássica (Schardt, 1989), adotam-se as hipóteses de Vlasov e de inextensibilidade transversal das paredes ( $\epsilon_{yy}^M = 0$ ), o que implica que as funções  $\bar{v}_k$  têm de ser constantes e as funções  $\bar{u}_k$  são lineares. Para as funções  $\bar{w}_k$  consideram-se polinómios cúbicos de Hermite, mas as rotações são condensadas estaticamente. Já o programa GBTUL adota  $\bar{v}_k$  lineares e  $\bar{w}_k$ ,  $\bar{u}_k$  cúbicas, condensado estaticamente os graus de liberdade de rotação. No presente trabalho, no Capítulo 3, dedicado à análise linear de barras de eixo circular, consideram-se funções  $\bar{v}_k$  e  $\bar{u}_k$  lineares, mas  $\bar{w}_k$  cúbicas e condensam-se os graus de liberdade de rotação. No Capítulo 4 adotam-se os modos do GBTUL, os quais são complementados com funções  $\bar{v}_k$  quadráticas hierárquicas (na notação desse Capítulo estas funções são dadas por  $\bar{\chi}_2^{(k)}$ ), tendo em conta que se analisam problemas geometricamente não-lineares (Gonçalves e Camotim, 2012).

Considerando a base inicial e efetuando uma série de operações de mudança de base, utilizando problemas de valores e vetores próprios generalizados, obtêm-se os modos de

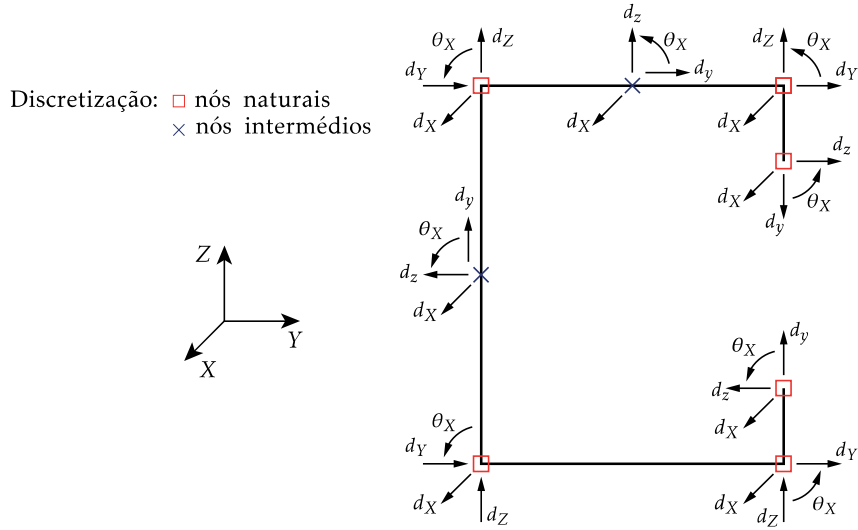


Figura 2.3: Secção em C com reforços: discretização e graus de liberdade no plano.

deformação finais. Nos problemas de valores e vetores próprios são utilizadas as matrizes modais da GBT (2.149)-(2.152). Este procedimento conduz a uma subdivisão dos modos de deformação em quatro conjuntos, nomeadamente (para uma explicação detalhada do procedimento aconselha-se a consulta de Gonçalves (2010b, 2014) e Bebiano et al. (2015)):

- **Modos naturais de Vlasov**, caracterizados por serem gerados pelos graus de liberdade de empenamento dos nós naturais, com  $\gamma_{xy}^M = 0$ ,  $\varepsilon_{yy}^M = 0$  e funções de empenamento lineares. Estes modos são ainda subdivididos em modos (i) distorcionais, que envolvem a flexão transversal das paredes da secção, e (ii) de corpo rígido (extensão, flexão em torno dos eixos centrais principais e torção em torno do centro de corte). Note-se que o modo de torção para secções fechadas não pertence aos modos naturais de Vlasov, uma vez que envolve distorção de membrana ( $\gamma_{xy}^M \neq 0$ ). A separação dos modos de extensão e de flexão envolve uma matriz modal adicional  $\mathbf{X}$ ,

$$\mathbf{X} = \int_A (\overline{v}v^T + \overline{w}w^T) dA, \quad (2.157)$$

que surge no problema de valores e vetores próprios associado à bifurcação de colunas uniformemente comprimidas com torção restringida — a razão para esta escolha deve-se ao facto de, neste caso, os modos de instabilidade (por flexão) surgirem desacoplados.

- **Modos locais de placa**, que também satisfazem  $\gamma_{xy}^M = \varepsilon_{yy}^M = 0$ , mas são caracterizados por (i) envolverem flexão transversal das paredes sem deslocamentos dos nós naturais internos (são gerados pelos graus de liberdade segundo  $z$  dos nós intermédios e dos nós naturais de extremidade) e (ii) terem empenamento nulo. No processo original de Schardt (1989) estes modos são determinados em conjunto com os modos naturais de Vlasov, o que implica que envolvem empenamento (embora reduzido).

- **Modos de corte**, com  $\gamma_{xy}^M \neq 0$  mas  $\varepsilon_{yy}^M = 0$ . Estes modos são subdivididos em três subconjuntos: (i) *modos de fluxo de corte* (também designados por *modos de corte I*), que surgem apenas para secções fechadas e, neste caso, incluem o modo de torção, (ii) *modos de corte II*, correspondentes às funções de empenamento dos modos de Vlasov, e (iii) *modos de corte III*, envolvendo funções de empenamento adicionais.
- **Modos de extensão transversal**, com  $\varepsilon_{yy}^M \neq 0$ . No programa GBTUL, estes modos são subdivididos nas seguintes categorias: (i) *modos naturais (ou globais) de extensão transversal*, os quais são calculados com base nos graus de liberdade dos nós naturais e envolvem extensões transversais constantes nas paredes da secção (entre nós naturais), e (ii) *modos locais de extensão transversal*, associados a extensões transversais constantes entre nós intermédios. Conforme foi já referido, no Capítulo 4 consideram-se, para além destes modos, funções quadráticas entre nós (naturais e intermédios).



## Capítulo 3

# Formulação linear para barras de eixo circular

### 3.1 Introdução

Neste Capítulo apresenta-se uma formulação geometricamente e fisicamente linear da Teoria Generalizada de Vigas para barras de parede fina de eixo circular. Conforme se verá, a formulação desenvolvida permite acomodar as hipóteses simplificativas da formulação clássica (hipóteses de Kirchhoff, de Vlasov e de extensões transversais de membrana nulas), conduzindo a uma significativa redução do número de modos de deformação necessários para obter resultados muito precisos (e, portanto, uma redução do esforço computacional). Para além disso, mostra-se que as teorias clássicas de Winkler (1868) e Vlasov (1958) podem ser obtidas a partir da formulação proposta, caso se introduzam hipóteses adicionais e se considerem apenas os modos de extensão, flexão e torção da secção transversal.

Na Secção 3.2 é feita uma breve revisão da literatura na área vasta das formulações para barras de eixo circular. Na Secção 3.3 deduzem-se as relações deformação-deslocamento recorrendo a coordenadas cilíndricas e utilizando a descrição cinemática usual da GBT. Na Secção 3.4 obtêm-se as equações de equilíbrio, as quais são escritas em termos de esforços generalizados ou das matrizes modais da GBT (verifica-se que surgem três novas matrizes e um novo esforço generalizado devido à curvatura da barra). As hipóteses de Vlasov (distorções de membrana nulas) e de extensões transversais de membrana nulas são introduzidas na Secção 3.5 e é feita uma comparação com as expressões das componentes de deformação obtidas por Cheung e Cheung (1971) para o método das faixas finitas.

Os modos de deformação de “corpo rígido” (extensão, duas flexões e torção) para secções abertas são abordados na Secção 3.6, sendo utilizados para recuperar as expressões das teorias clássicas de Winkler (1868) e Vlasov (1958) para barras de eixo circular. Na Secção 3.7 são apresentadas duas abordagens distintas para o cálculo dos modos de deformação de barras curvas. A primeira abordagem (Secção 3.7.1) destina-se a secções simples

e utiliza as funções de empenamento da GBT para barras prismáticas para determinar os deslocamentos no plano da secção transversal, enquanto que a segunda (Secção 3.7.2) generaliza o procedimento proposto por Gonçalves et al. (2010b, 2014), onde são utilizados problemas de valores e vetores próprios generalizados para obter e subdividir os modos de deformação de secções arbitrárias constituídas por paredes retas.

Na Secção 3.8 apresenta-se a formulação de um elemento finito de compatibilidade (i.e., com aproximação direta das funções de amplitude modal dos modos de deformação), que corresponde à extensão ao caso curvo do elemento desenvolvido por Gonçalves e Camotim (2011, 2012), e na Secção 3.9 propõe-se um elemento finito misto com aproximação das funções de amplitude modal e das deformações longitudinais de membrana, com vista a eliminar o fenómeno de *locking*, naturalmente existente em barras de eixo curvo.

Finalmente, na Secção 3.10 são apresentados exemplos de aplicação e validação dos dois elementos finitos propostos.

## 3.2 Revisão da literatura

O estudo e desenvolvimento de teorias para barras de eixo curvo recebeu uma grande atenção desde cedo, devido à relevância destas peças em várias áreas da Engenharia. Os detalhes históricos relativos às primeiras contribuições nesta área podem ser consultados em, e.g., Love (1906) e Timoshenko (1953).

As teorias clássicas para barras de eixo circular podem ser divididas em dois casos particulares: (i) o caso plano, onde se assume que o eixo da barra sofre deslocamentos apenas no seu plano de curvatura, e (ii) o caso tridimensional, sendo normalmente admitido que apenas ocorre flexão para fora do plano de curvatura e torção (naturalmente, o comportamento verdadeiramente tridimensional corresponde a considerar os dois casos em simultâneo).

Relativamente ao caso plano, Armero e Valverde (2012a) remetem para as contribuições iniciais de Kirchhoff e Clebsch, que foram posteriormente refinadas por Winkler (1868), tendo este último dado origem à teoria que ainda hoje tem o seu nome. À semelhança da teoria de Euler-Bernoulli, estas contribuições admitem que a deformação por corte é desprezável. Naturalmente, nesta teoria surgem apenas tensões normais na secção transversal, que geram esforço axial e momento fletor.

A implementação da teoria de Winkler através de elementos finitos de compatibilidade, com aproximação polinomial em coordenadas curvilíneas do campo de deslocamentos, mostrou desde cedo um fraco desempenho, nomeadamente (i) *falta de invariância* face a deslocamentos de corpo rígido, o que quer dizer que estes deslocamentos (mesmo infinitesimais) produzem deformação (Crisfield, 1986) e (ii) a ocorrência de *locking* de membrana, associado à incapacidade de reproduzir o campo de deslocamentos da flexão pura (Stolarski e Belytschko, 1982). O efeito de *locking* pode ser mitigado recorrendo a integração reduzida ou a formulações do tipo misto. Já o efeito da falta de invariância

reduz-se à medida que a discretização aumenta (Haisler e Stricklin, 1967; Mebane e Stricklin, 1971; Meck, 1980), mas pode ser eliminado para o caso elástico linear e barras de eixo circular utilizando funções sinusoidais (Ashwell e Sabir, 1971; Ashwell et al. 1971; Ashwell e Gallagher, 1976; Cantin e Clough, 1968; Cantin, 1970; Guimaraes e Heppler, 1992), obtendo a matriz de rigidez exata (Kikuchi, 1982; Yamada e Ezawa, 1977). Naturalmente, utilizando uma descrição cinemática baseada num referencial Cartesiano, o elemento torna-se invariante — é o caso das formulações de Armero e Valverde (2012a, 2012b), para o caso linear, e da formulação apresentada no Capítulo 4, para grandes deslocamentos e rotações finitas.

O caso tridimensional, incluindo empenamento associado à torção, foi desenvolvido por Vlasov (1958) para barras de eixo circular com secções abertas duplamente simétricas (o centro de corte coincide com o centróide). Dabrowski (1964, 1965, 1968) também apresentou contribuições fundamentais neste campo, nomeadamente ao desenvolver expressões para analisar barras com secções fechadas e ao abordar a distorção da secção transversal (embora de forma simplificada). Em geral, a teoria de Vlasov constitui a base de vários elementos finitos geometricamente lineares. Por exemplo, El-Amin e Kasem (1978) implementaram um elemento finito para estudar pontes metálicas, utilizando uma aproximação direta do deslocamento vertical e da rotação de torção através de polinómios de grau 3 e 7, respetivamente.

À semelhança da teoria de Winkler, os elementos finitos de compatibilidade para o caso tridimensional apresentam naturalmente falta de invariância e *locking* de membrana. Contudo, recentemente, Ishaquddin et al. (2013) mostraram que também pode ocorrer *locking* associado ao acoplamento flexão-torção.

Hoje em dia, os desenvolvimentos neste campo têm-se centrado na utilização da abordagem isogeométrica (ver, por exemplo, Auricchio et al., 2013; Greco e Cuomo, 2015).

Os trabalhos e formulações supracitados não consideram a deformação arbitrária da secção transversal e não são obtidas a partir do contínuo (normalmente admite-se que podem ser utilizadas pelo menos algumas das propriedades da secção para barras retas). No entanto, a possibilidade de incluir deformação da secção em barras de parede fina de eixo curvo apresenta um grande interesse prático na análise e dimensionamento de estruturas metálicas, uma vez que estas peças são frequentemente constituídas por secções de parede fina, as quais são muito suscetíveis à deformação plano da secção transversal e para fora deste (empenamento). As formulações clássicas para pontes utilizam um único modo de deformação distorcional (Dabrowski, 1968; Schlaich e Scheef, 1982) — para secções fechadas em caixão, Vieira (2017) mostrou que o modo distorcional destas teorias corresponde ao fornecido pela abordagem utilizada pela GBT. Este tipo de abordagem continua a ser utilizado hoje em dia (ver, por exemplo, Arici e Granata, 2016).

Não existem formulações para barras de parede fina genuinamente curvas que consideram a deformação genérica da secção — por exemplo, as formulações lineares de Choi et al. (2017) ou Nguyen et al. (2017) consideram a curvatura adotando elementos finitos retos de pequeno comprimento. No entanto, deve mencionar-se que Sapountzakis



e Tsipstis (2015) consideram secções arbitrárias (mas não de parede fina) e incluem funções de empenamento para ter em conta a deformação por corte provocada por flexão e torção. Subsequentemente, estes autores acrescentaram a deformação no plano da secção associada à flexão e torção (Tsipstis e Sapountzakis, 2017), mas sempre no caso elástico linear.

Tendo em conta o que acabou de ser referido, é de todo o interesse desenvolver a GBT para o caso curvo, dado que esta teoria apresenta enormes vantagens do ponto de vista computacional e da interpretação dos resultados, conforme foi já referido. Para além de um elemento finito de compatibilidade, ir-se-á apresentar um elemento misto. Resta assim salientar que as formulações não-convencionais da GBT são relativamente recentes. De Miranda et al. (2015) propuseram um elemento finito de flexibilidade de dois nós para barras retas em regime elástico. Esta abordagem envolve deslocamentos nodais generalizados e o equilíbrio de tensões generalizadas no interior do elemento, o que está na base da sua superioridade relativamente à abordagem clássica (aproximação de deslocamentos). Mais recentemente, foi desenvolvido um elemento finito misto com aproximação de tensões e deslocamentos, baseado no Método Corotacional Implícito (Garcea et al., 2012a,b), e aplicado à obtenção de cargas de bifurcação (de Miranda et al., 2017) e de trajetórias de pós-encurvadura (Ruggerini, 2019).

### 3.3 Relações deformações-deslocamentos

Considere-se a barra de eixo circular com secção transversal de parede fina representada na Figura 3.1. O referencial global  $(\theta, Z, R)$  define um sistema de coordenadas cilíndricas, com vetores-base representados por  $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_Z, \mathbf{e}_R)$ . O eixo circular  $X$ , cujo centro se situa sobre o eixo  $Z$ , define a coordenada associada ao comprimento de arco do eixo da barra, pertence ao plano horizontal  $Z = Z_C$  e possui curvatura constante igual a  $1/R_C$ , sendo  $C$  o ponto de intersecção do eixo da barra com o plano da secção transversal.

O campo de deslocamentos, descrito no referencial global de coordenadas cilíndricas, é dado por

$$\mathbf{U}(\theta, Z, R) = u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_Z \mathbf{e}_Z + u_R \mathbf{e}_R \quad (3.1)$$

e, de acordo com Reddy (2013), as relações deformações-deslocamentos, também associadas ao referencial  $(\theta, Z, R)$ , são dadas por

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_R + u_{\theta,\theta}}{R}, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{ZZ} = u_{Z,Z}, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{RR} = u_{R,R}, \quad (3.4)$$

$$\gamma_{\theta Z} = 2\varepsilon_{\theta Z} = u_{\theta,Z} + \frac{u_{Z,\theta}}{R}, \quad (3.5)$$

$$\gamma_{\theta R} = 2\varepsilon_{\theta R} = u_{\theta,R} + \frac{u_{R,\theta} - u_\theta}{R}, \quad (3.6)$$

$$\gamma_{ZR} = 2\varepsilon_{ZR} = u_{Z,R} + u_{R,Z}. \quad (3.7)$$



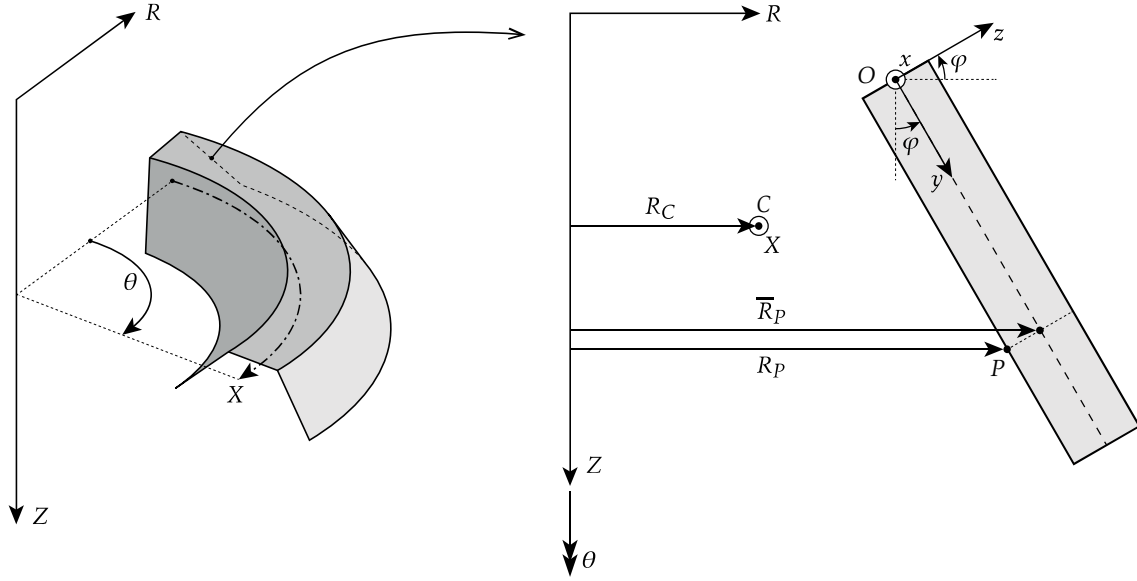


Figura 3.1: Eixos globais e locais para uma barra de parede fina de eixo circular.

Seguindo a abordagem usual da GBT, é fixado um referencial local  $(x, y, z)$  em cada parede, conforme ilustrado na Figura 3.1 para uma das paredes da secção transversal. Os eixos  $y$  e  $z$  definem as direções da linha média e da espessura, respectivamente, e o eixo  $x$  é concêntrico com  $X$ . Os vetores-base locais  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  relacionam-se com os vetores-base globais  $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_Z, \mathbf{e}_R)$  através de

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_\theta, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_Z \cos \varphi + \mathbf{e}_R \sin \varphi, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_Z \sin \varphi + \mathbf{e}_R \cos \varphi, \quad (3.10)$$

onde  $\varphi$  é o ângulo que define a rotação entre os dois referenciais (ver Figura 3.1). Atendendo a estas relações, o campo de deslocamentos (3.1) pode ser escrito, relativamente ao referencial local, com

$$\mathbf{U}(x, y, z) = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z, \quad (3.11)$$

onde as componentes de deslocamento no referencial local  $(u, v, w)$  são da forma

$$u = u(\theta, y, z), \quad v = v(\theta, y, z), \quad w = w(\theta, y, z) \quad (3.12)$$

e relacionam-se com as componentes no referencial cilíndrico através de

$$u_\theta = u, \quad (3.13)$$

$$u_Z = v \cos \varphi - w \sin \varphi, \quad (3.14)$$

$$u_R = v \sin \varphi + w \cos \varphi. \quad (3.15)$$

De seguida, efetua-se uma transformação de coordenadas para escrever as relações (3.2)–(3.7) em relação ao referencial local. Para tal, recorre-se às relações geométricas

$$R = R_O + y \sin \varphi + z \cos \varphi, \quad (3.16)$$

$$Z = Z_O + y \cos \varphi - z \sin \varphi, \quad (3.17)$$

onde  $(Z_O, R_O)$  define a origem do referencial local no plano da secção transversal (ver Figura 3.1). Assim, utilizando as Eqs. (3.13)–(3.15) e notando que  $(\cdot)_{,R} = (\cdot)_{,y} \sin \varphi + (\cdot)_{,z} \cos \varphi$  e  $(\cdot)_{,Z} = (\cdot)_{,y} \cos \varphi - (\cdot)_{,z} \sin \varphi$ , obtém-se

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_{,\theta}}{R} + \frac{v \sin \varphi + w \cos \varphi}{R}, \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_{yy} = v_{,y}, \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_{zz} = w_{,z}, \quad (3.20)$$

$$\gamma_{\theta y} = u_{,y} + \frac{v_{,\theta} - u \sin \varphi}{R}, \quad (3.21)$$

$$\gamma_{\theta z} = u_{,z} + \frac{w_{,\theta} - u \cos \varphi}{R}, \quad (3.22)$$

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y}. \quad (3.23)$$

De acordo com a expressão (3.16),  $R$  depende de  $y$  e de  $z$ . Antes de prosseguir, para simplificar as expressões subsequentes,  $R$  é escrito em função do raio da linha média  $\bar{R}$  (a Figura 3.1 mostra  $R$  e  $\bar{R}$  para um ponto arbitrário  $P$ ), ou seja,

$$R = \bar{R} + z \cos \varphi, \quad (3.24)$$

$$\bar{R} = R_O + y \sin \varphi. \quad (3.25)$$

Conforme foi referido anteriormente, a espessura reduzida das paredes da secção transversal permite assumir como válida a hipótese de Kirchhoff, que implica

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad (3.26)$$

$$\gamma_{\theta z} = 0, \quad (3.27)$$

$$\gamma_{yz} = 0. \quad (3.28)$$

Tendo em conta (3.20), a Eq. (3.26) fornece imediatamente

$$\varepsilon_{zz} = w_{,z} = 0 \Rightarrow w = w(\theta, y), \quad (3.29)$$

ou seja, a componente de deslocamento  $w$  é constante segundo a direção da espessura. Impondo agora a condição (3.28), a Eq. (3.23) conduz a

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} = 0 \Rightarrow v_{,z} = -w_{,y}(\theta, y), \quad (3.30)$$

de onde se conclui que a componente de deslocamento  $v$  varia de forma linear segundo  $z$  e pode ser escrita na forma

$$v = v^M(\theta, y) - z w_{,y}(\theta, y), \quad (3.31)$$

onde  $v^M$  denota a parcela de membrana de  $v$ . É de notar que as Eqs. (3.29)–(3.31) são idênticas às obtidas na GBT clássica. Finalmente, com a Eq. (3.22), a condição (3.27) resulta em

$$\gamma_{\theta z} = u_{,z} + \frac{w_{,\theta} - u \cos \varphi}{R} = 0 \Rightarrow u_{,z} = \frac{u \cos \varphi - w_{,\theta}}{R}. \quad (3.32)$$

De modo a que a componente de deslocamento  $u$  possa ser decomposta em parcelas de membrana e de flexão, escreve-se

$$u = u^M(\theta, y) + z\alpha(\theta, y), \quad (3.33)$$

onde  $u^M$  é a respetiva parcela de membrana e  $\alpha$  é uma função a determinar. Atendendo à Eq. (3.32), tem-se

$$\alpha(\theta, y) = \left. \frac{u \cos \varphi - w_{,\theta}}{R} \right|_{z=0} = \frac{u^M \cos \varphi - w_{,\theta}}{\bar{R}}. \quad (3.34)$$

Considerando as Eqs. (3.29), (3.31), (3.32) e (3.34), o campo de deslocamentos pode ser escrito em função dos deslocamentos da linha média das paredes ( $u^M, v^M, w$ ) e do raio de curvatura  $\bar{R}$ ,

$$u = u^M(\theta, y) + z \frac{u^M(\theta, y) \cos \varphi - w_{,\theta}(\theta, y)}{\bar{R}(y)}, \quad (3.35)$$

$$v = v^M(\theta, y) - zw_{,y}(\theta, y), \quad (3.36)$$

$$w = w(\theta, y). \quad (3.37)$$

O próximo passo consiste em introduzir o campo de deslocamentos (3.35)–(3.37) nas relações deformações-deslocamentos (3.18)–(3.23). No entanto, a substituição direta conduz a expressões não-lineares segundo  $z$  nas parcelas de flexão de  $\varepsilon_{\theta\theta}$  e  $\gamma_{\theta y}$ . Tendo em conta que a espessura é reduzida, efetua-se uma expansão em série de Taylor em torno de  $z = 0$ , desprezando-se os termos de ordem superior a um. Procedendo deste modo, obtêm-se as componentes de deformação de membrana

$$\varepsilon_{\theta\theta}^M = \frac{u_{,\theta}^M + v^M \sin \varphi + w \cos \varphi}{\bar{R}}, \quad (3.38)$$

$$\varepsilon_{yy}^M = v_{,y}^M, \quad (3.39)$$

$$\gamma_{\theta y}^M = u_{,y}^M + \frac{v_{,\theta}^M - u^M \sin \varphi}{\bar{R}} \quad (3.40)$$

e de flexão

$$\varepsilon_{\theta\theta}^F = -z \left( \frac{w_{,y} \sin \varphi}{\bar{R}} + \frac{w_{,\theta\theta} + v^M \sin \varphi \cos \varphi + w \cos^2 \varphi}{\bar{R}^2} \right), \quad (3.41)$$

$$\varepsilon_{yy}^F = -zw_{,yy}, \quad (3.42)$$

$$\gamma_{\theta y}^F = -z \left( \frac{2w_{,\theta y} - u_{,y}^M \cos \varphi}{\bar{R}} + \frac{u^M \sin \varphi \cos \varphi + v_{,\theta}^M \cos \varphi - 2w_{,\theta} \sin \varphi}{\bar{R}^2} \right), \quad (3.43)$$

onde se utilizou a simplificação  $R \approx \bar{R}$ . Estas expressões podem também ser escritas da seguinte forma,

$$\varepsilon_{\theta\theta}^F = -z \left( \frac{w_{,y} \sin \varphi}{\bar{R}} + \frac{w_{,\theta\theta}}{\bar{R}^2} + \frac{\cos \varphi}{\bar{R}} \left( \varepsilon_{\theta\theta}^M - \frac{u_{,\theta}^M}{\bar{R}} \right) \right), \quad (3.44)$$

$$\gamma_{\theta y}^F = -z \left( \frac{2w_{,\theta y} - 2u_{,y}^M \cos \varphi}{\bar{R}} + \frac{2u^M \sin \varphi \cos \varphi - 2w_{,\theta} \sin \varphi}{\bar{R}^2} + \frac{\gamma_{\theta y}^M \cos \varphi}{\bar{R}} \right), \quad (3.45)$$

as quais coincidem com as apresentadas por Cheung e Cheung (1971), no contexto do método das faixas finitas, se se desprezarem os termos com  $\varepsilon_{\theta\theta}^M$  e  $\gamma_{\theta y}^M$ .

Finalmente, salienta-se que as Eqs. (3.38)–(3.43) permitem recuperar as relações deformações-deslocamentos da formulação da GBT para barras prismáticas. De facto, atendendo a que, para barras de eixo reto,  $\bar{R} = \infty$  e  $\bar{R}d\theta = dx$ , obtém-se

$$\varepsilon_{xx}^M = u_{,x}^M, \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_{yy}^M = v_{,y}^M, \quad (3.47)$$

$$\gamma_{xy}^M = u_{,y}^M + v_{,x}^M, \quad (3.48)$$

$$\varepsilon_{xx}^B = -zw_{,xx}, \quad (3.49)$$

$$\varepsilon_{yy}^B = -zw_{,yy}, \quad (3.50)$$

$$\gamma_{xy}^B = -2zw_{,xy}, \quad (3.51)$$

o que coincide com (2.133) ao adotar as relações (2.127)–(2.129), com  $u = u^M$  e  $v = v^M$ .

### 3.3.1 Descrição cinemática da GBT

A descrição cinemática usual da GBT consiste em definir o campo de deslocamentos como uma combinação linear de modos de deformação da secção transversal, cada um multiplicado por uma função que define a sua amplitude ao longo do eixo da barra. Esta técnica de separação de variáveis permite escrever os deslocamentos do plano médio de cada parede por

$$u^M = \sum_{k=1}^D \bar{u}_k(y) \phi'_k(X) = \bar{\mathbf{u}}^T(y) \boldsymbol{\phi}'(X), \quad (3.52)$$

$$v^M = \sum_{k=1}^D \bar{v}_k(y) \phi_k(X) = \bar{\mathbf{v}}^T(y) \boldsymbol{\phi}(X), \quad (3.53)$$

$$w = \sum_{k=1}^D \bar{w}_k(y) \phi_k(X) = \bar{\mathbf{w}}^T(y) \boldsymbol{\phi}(X), \quad (3.54)$$

onde  $X = R_C \theta$ ,  $\bar{u}_k$ ,  $\bar{v}_k$ ,  $\bar{w}_k$  são as componentes de deslocamento da linha média associadas ao modo  $k = 1, \dots, D$  ( $D$  é o número de modos de deformação considerados),  $\phi_k$  são as funções de amplitude correspondentes,  $\phi'_k = d\phi_k/dX$  e  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{\mathbf{w}}$ ,  $\boldsymbol{\phi}$  são vetores-coluna que contêm  $\bar{u}_k$ ,  $\bar{v}_k$ ,  $\bar{w}_k$ ,  $\phi_k$ , respetivamente. Note-se que as funções  $\bar{u}_k$  estão associadas

à derivada das funções de amplitude,  $\phi_k$  (ou seja,  $\phi'_k$ ), tal como na GBT clássica. Esta abordagem é seguida para permitir que a hipótese de Vlasov ( $\gamma_{xy}^M = 0$ ) possa ser imposta (ver Secção 3.5).

No que se segue, as expressões vão ser escritas em função das componentes do vetor das curvaturas de cada parede,  $\mathbf{K} = \mathbf{e}_Z/R_C$ , mais concretamente em termos das componentes deste vetor nos eixos locais, dadas por

$$K_y = \frac{\cos \varphi}{R_C}, \quad K_z = -\frac{\sin \varphi}{R_C}. \quad (3.55)$$

Para além disso, introduz-se ainda o parâmetro

$$\bar{\beta} = \frac{R_C}{R}. \quad (3.56)$$

Utilizando estas relações e as Eqs. (3.52)–(3.54), o campo de deslocamentos (3.35)–(3.37) pode ser escrito em formato matricial como

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \mathbf{\Xi}_U(y, z) \mathbf{\Phi}(X), \quad (3.57)$$

com

$$\mathbf{\Xi}_U = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^T + zK_y\bar{\beta}\bar{\mathbf{u}}^T - z\bar{\beta}\bar{\mathbf{w}}^T & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{v}}^T - z\bar{\mathbf{w}}_{,y}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{w}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

$$\mathbf{\Phi}(X) = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi' \\ \phi'' \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

onde se verifica que o efeito da curvatura é claramente refletido nos termos associados a  $U_x$ . Note-se que (3.58) coincide com (2.131) se a curvatura for nula.

Introduzindo as Eqs. (3.52)–(3.56) nas relações deformações-deslocamentos (3.38)–(3.43), obtêm-se as expressões finais para as componentes de deformação de membrana,

$$\varepsilon_{xx}^M = \bar{\beta} \left( (K_y\bar{\mathbf{w}}^T - K_z\bar{\mathbf{v}}^T) \phi + \bar{\mathbf{u}}^T \phi'' \right), \quad (3.60)$$

$$\varepsilon_{yy}^M = \bar{\mathbf{v}}_{,y}^T \phi, \quad (3.61)$$

$$\gamma_{xy}^M = (\bar{\beta}\bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\beta}K_z\bar{\mathbf{u}}^T + \bar{\mathbf{u}}_{,y}^T) \phi' \quad (3.62)$$

e para as componentes de deformação de flexão,

$$\varepsilon_{xx}^F = -z\bar{\beta} \left( -K_z\bar{\mathbf{w}}_{,y}^T - \bar{\beta}K_yK_z\bar{\mathbf{v}}^T + \bar{\beta}K_y^2\bar{\mathbf{w}}^T \right) \phi - z\bar{\beta}^2\bar{\mathbf{w}}^T \phi'', \quad (3.63)$$

$$\varepsilon_{yy}^F = -z\bar{\mathbf{w}}_{,yy}^T \phi, \quad (3.64)$$

$$\gamma_{xy}^F = -z\bar{\beta} \left( 2\bar{\mathbf{w}}_{,y}^T + 2\bar{\beta}K_z\bar{\mathbf{w}}^T - K_y\bar{\mathbf{u}}_{,y}^T - \bar{\beta}K_yK_z\bar{\mathbf{u}}^T + \bar{\beta}K_y\bar{\mathbf{v}}^T \right) \phi'. \quad (3.65)$$

Em alternativa, pode-se escrever estas relações em formato matricial,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon(y, z) \boldsymbol{\Phi}(X), \quad (3.66)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^M = \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M(y, z) \boldsymbol{\Phi}(X), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^F = \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F(y, z) \boldsymbol{\Phi}(X), \quad (3.67)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon = \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M + \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F, \quad (3.68)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^{(\cdot)} = \begin{bmatrix} \left( \boldsymbol{\xi}_{11}^{(\cdot)} \right)^T & \mathbf{0} & \left( \boldsymbol{\xi}_{13}^{(\cdot)} \right)^T \\ \left( \boldsymbol{\xi}_{21}^{(\cdot)} \right)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left( \boldsymbol{\xi}_{32}^{(\cdot)} \right)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

onde as componentes  $\boldsymbol{\xi}_{ij}^{(\cdot)}$  são vetores-coluna dados por

$$\boldsymbol{\xi}_{11}^M = \bar{\beta} (K_y \bar{w} - K_z \bar{v}), \quad (3.70)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{13}^M = \bar{\beta} \bar{u}, \quad (3.71)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{21}^M = \bar{v}_{,y}, \quad (3.72)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{32}^M = \bar{\beta} \bar{v} + \bar{\beta} K_z \bar{u} + \bar{u}_{,y}, \quad (3.73)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{11}^F = -z \bar{\beta} (-K_z \bar{w}_{,y} + \bar{\beta} K_y^2 \bar{w} - \bar{\beta} K_y K_z \bar{v}), \quad (3.74)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{13}^F = -z \bar{\beta}^2 \bar{w}, \quad (3.75)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{21}^F = -z \bar{w}_{,yy}, \quad (3.76)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{32}^F = -z \bar{\beta} (2 \bar{w}_{,y} + 2 \bar{\beta} K_z \bar{w} - K_y \bar{u}_{,y} + \bar{\beta} K_y \bar{v} - \bar{\beta} K_y K_z \bar{u}). \quad (3.77)$$

Para peças retas,  $K_y = K_z = 0$  e  $\bar{\beta} = 1$ , recuperando-se as equações para o caso reto (2.136)-(2.141), as quais são dadas explicitamente por (ver (2.136)-(2.141))

$$\boldsymbol{\xi}_{11}^M = \mathbf{0}, \quad (3.78)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{13}^M = \bar{u}, \quad (3.79)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{21}^M = \bar{v}_{,y}, \quad (3.80)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{32}^M = \bar{v} + \bar{u}_{,y}, \quad (3.81)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{11}^F = \mathbf{0}, \quad (3.82)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{13}^F = -z \bar{w}, \quad (3.83)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{21}^F = -z \bar{w}_{,yy}, \quad (3.84)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{32}^F = -2z \bar{w}_{,y}. \quad (3.85)$$

Note-se que, no caso das barras retas, tem-se  $\boldsymbol{\xi}_{11} = \mathbf{0}$ , o que quer dizer que os deslocamentos no plano da secção transversal  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  não provocam extensão longitudinal  $\varepsilon_{xx}$ , algo que é intrínseco ao comportamento das barras de eixo curvo.

### 3.4 Tensão e equilíbrio

Conforme foi referido na Secção 2.6.1, nas formulações clássicas da GBT é usual admitir-se que as paredes estão sujeitas a um estado plano de tensão ( $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ ). Deste modo, o tensor das tensões pode ser escrito na forma vetorial

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

e é obtido a partir das deformações através da relação constitutiva típica para estados planos de tensão,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.87)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e  $G$  o módulo de distorção. Note-se que a utilização de um estado plano de tensão é inconsistente com o estado plano de deformação imposto pela hipótese de Kirchhoff, quando  $\nu \neq 0$ , mas tal não acarreta erros significativos.

A parcela do trabalho virtual das forças interiores pode ser escrita como

$$\delta W_{int} = - \int_{A \times [0, L]} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \frac{R}{R_C} dA dX, \quad (3.88)$$

onde  $A$  é a área da secção transversal,  $L$  é o comprimento do eixo da barra e  $(R/R_C)dX$  representa o comprimento infinitesimal das fibras longitudinais. Para um ponto genérico  $P$  pode-se escrever

$$R = R_O + y \sin \varphi + z \cos \varphi = R_c + \left( \overrightarrow{CO}_z + z \right) \cos \varphi + \left( \overrightarrow{CO}_y + y \right) \sin \varphi, \quad (3.89)$$

onde  $(\cdot)_y, (\cdot)_z$  designam as componentes de um vetor segundo  $y$  e  $z$ , respetivamente. Assim, é possível escrever

$$\frac{R}{R_C} = 1 + K_y \left( \overrightarrow{CO}_z + z \right) - K_z \left( \overrightarrow{CO}_y + y \right). \quad (3.90)$$

Utilizando as expressões (3.70)–(3.77) e efetuando a integração na secção transversal, obtém-se

$$\delta W_{int} = - \int_{[0, L]} \delta \boldsymbol{\Phi}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_{xx}^* + \boldsymbol{\chi}_{yy} \\ \boldsymbol{\chi}_{xy} \\ \boldsymbol{\chi}_{xx} \end{bmatrix} dX, \quad (3.91)$$

onde

$$\delta\Phi = \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\phi' \\ \delta\phi'' \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

e os vetores dos esforços generalizados são dados por

$$\mathcal{X}_{xx}^* = \int_A \frac{R}{R_C} \xi_{11} \sigma_{xx} dA = \int_A \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R}{R_C} \xi_{11} \left( (\xi_{11}^T + \nu \xi_{21}^T) \phi + \xi_{13}^T \phi'' \right) dA, \quad (3.93)$$

$$\mathcal{X}_{yy} = \int_A \frac{R}{R_C} \xi_{21} \sigma_{yy} dA = \int_A \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R}{R_C} \xi_{21} \left( (\nu \xi_{11}^T + \xi_{21}^T) \phi + \nu \xi_{13}^T \phi'' \right) dA, \quad (3.94)$$

$$\mathcal{X}_{xy} = \int_A \frac{R}{R_C} \xi_{32} \sigma_{xy} dA = \int_A \frac{GR}{R_C} \xi_{32} \xi_{32}^T dA \phi', \quad (3.95)$$

$$\mathcal{X}_{xx} = \int_A \frac{R}{R_C} \xi_{13} \sigma_{xx} dA = \int_A \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R}{R_C} \xi_{13} \left( (\xi_{11}^T + \nu \xi_{21}^T) \phi + \xi_{13}^T \phi'' \right) dA. \quad (3.96)$$

Os vetores  $\mathcal{X}_{xx}$ ,  $\mathcal{X}_{xx}^*$  estão associados a tensões normais longitudinais,  $\mathcal{X}_{yy}$  é relativo a tensões normais transversais e  $\mathcal{X}_{xy}$  são esforços associados a tensões de corte. A comparação entre estas resultantes e as obtidas para barras retas (recordar as Eqs. (2.154)-(2.156)) mostra que o caso curvo envolve muitos mais termos e, em particular, surgem os esforços  $\mathcal{X}_{xx}^*$  devido à componente  $\xi_{11}$ . Reciprocamente, as Eqs. (2.154)-(2.156) podem ser recuperadas a partir das Eqs. (3.94)-(3.96), atendendo ao facto de que, para barras retas, se tem  $\xi_{11} = \mathbf{0}$  e  $R/R_C = 1$ .

Em alternativa, o trabalho virtual das forças interiores pode ser escrito em função das chamadas matrizes modais da GBT, como é habitual na GBT clássica. Assim, substituindo (3.93)–(3.96) na Eq. (3.91), obtém-se

$$\delta W_{int} = - \int_{[0,L]} \delta\Phi^T \mathcal{M} \Phi dX, \quad (3.97)$$

onde a matriz modal global

$$\mathcal{M} = \int_A \Xi_\epsilon^T C \Xi_\epsilon \frac{R}{R_C} dA = \begin{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{E} + \mathbf{E}^T + \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 + \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{D}_2 + \mathbf{F})^T & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (3.98)$$

é constituída pelas matrizes modais da GBT clássica (recordar as Eqs. (2.149)-(2.152), embora estas possuam agora termos adicionais devido à existência de curvatura)

$$\mathbf{B} = \int_A \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R}{R_C} \xi_{21} \xi_{21}^T dA, \quad (3.99)$$

$$\mathbf{C} = \int_A \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R}{R_C} \xi_{13} \xi_{13}^T dA, \quad (3.100)$$

$$\mathbf{D}_1 = \int_A \frac{GR}{R_C} \xi_{32} \xi_{32}^T dA, \quad (3.101)$$

$$\mathbf{D}_2 = \int_A \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{R}{R_C} \xi_{21} \xi_{13}^T dA, \quad (3.102)$$



e pelas novas matrizes modais (que surgem devido a  $\xi_{11}$ )

$$\mathbf{E} = \int_A \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \frac{R}{R_C} \xi_{11} \xi_{21}^T dA, \quad (3.103)$$

$$\mathbf{F} = \int_A \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{R}{R_C} \xi_{11} \xi_{13}^T dA, \quad (3.104)$$

$$\mathbf{G} = \int_A \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{R}{R_C} \xi_{11} \xi_{11}^T dA. \quad (3.105)$$

As Eqs. (3.93)–(3.96) permitem ainda concluir que os esforços generalizados estão relacionados com as matrizes modais através das relações seguintes,

$$\mathcal{X}_{xx}^* = (\mathbf{G} + \mathbf{E})\phi + \mathbf{F}\phi'', \quad (3.106)$$

$$\mathcal{X}_{yy} = (\mathbf{E}^T + \mathbf{B})\phi + \mathbf{D}_2\phi'', \quad (3.107)$$

$$\mathcal{X}_{xy} = \mathbf{D}_1\phi', \quad (3.108)$$

$$\mathcal{X}_{xx} = (\mathbf{F} + \mathbf{D}_2)^T \phi + \mathbf{C}\phi'', \quad (3.109)$$

as quais permitem recuperar as primeiras igualdades das Eqs. (2.154)–(2.156) se  $\mathbf{E} = \mathbf{F} = \mathbf{0}$  (caso reto).

Considerem-se agora forças de volume  $\mathbf{q}$  e forças de superfície aplicadas nas extremidades  $\mathbf{t}$ . Nestas condições, o trabalho virtual das forças exteriores é dado por

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \int_{A \times [0, L]} \delta \mathbf{U}^T \mathbf{q} \frac{R}{R_C} dA dX + \int_A \delta \mathbf{U}^T \mathbf{t} \frac{R}{R_C} dA \Big|_{X=0, L} \\ &= \int_{[0, L]} \delta \Phi^T \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y + \mathcal{Q}_z \\ \mathcal{Q}_x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dX + \delta \Phi^T \begin{bmatrix} \mathcal{T}_y + \mathcal{T}_z \\ \mathcal{T}_x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Big|_{X=0, L}, \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde os vetores modais das forças de volume  $\mathcal{Q}$  e das forças de superfície  $\mathcal{T}$  foram calculados atendendo a (3.57)–(3.58) e são dados por

$$\mathcal{Q}_x = \int_A \left( \bar{u} + zK_y \bar{\beta} \bar{u} - z\bar{\beta} \bar{w} \right) \frac{q_x R}{R_C} dA, \quad (3.111)$$

$$\mathcal{Q}_y = \int_A \left( \bar{v} - z\bar{w}_{,y} \right) \frac{q_y R}{R_C} dA, \quad (3.112)$$

$$\mathcal{Q}_z = \int_A \bar{w} \frac{q_z R}{R_C} dA, \quad (3.113)$$

$$\mathcal{T}_x = \int_A \left( \bar{u} + zK_y \bar{\beta} \bar{u} - z\bar{\beta} \bar{w} \right) \frac{t_x R}{R_C} dA, \quad (3.114)$$

$$\mathcal{T}_y = \int_A \left( \bar{v} - z\bar{w}_{,y} \right) \frac{t_y R}{R_C} dA, \quad (3.115)$$

$$\mathcal{T}_z = \int_A \bar{w} \frac{t_z R}{R_C} dA. \quad (3.116)$$

As equações de equilíbrio e as condições de fronteira são obtidas partindo da equação dos trabalhos virtuais, efetuando integração por partes e recorrendo ao lema fundamental

do cálculo das variações. Em termos de esforços generalizados, obtém-se

$$\mathcal{X}_{xx}^* + \mathcal{X}_{yy} - \mathcal{X}_{xy}' + \mathcal{X}_{xx}'' = \mathcal{Q}_y + \mathcal{Q}_z - \mathcal{Q}_x', \quad (3.117)$$

$$(\mathcal{X}_{xy} - \mathcal{X}_{xx}' = \mathcal{Q}_x + \mathcal{T}_y + \mathcal{T}_z) \Big|_{X=L}, \quad (3.118)$$

$$(\mathcal{X}_{xy} - \mathcal{X}_{xx}' = \mathcal{Q}_x - \mathcal{T}_y - \mathcal{T}_z) \Big|_{X=0}, \quad (3.119)$$

$$(\mathcal{X}_{xx} = \mathcal{T}_x) \Big|_{X=L}, \quad (3.120)$$

$$(\mathcal{X}_{xx} = -\mathcal{T}_x) \Big|_{X=0}. \quad (3.121)$$

Por outro lado, as Eqs. (3.106)–(3.109) permitem escrever as equações anteriores em função das matrizes modais, conduzindo a

$$\mathbf{C}\phi'''' - (\mathbf{D} - \mathbf{F} - \mathbf{F}^T)\phi'' + (\mathbf{G} + \mathbf{E} + \mathbf{E}^T + \mathbf{B})\phi = \mathcal{Q}_y + \mathcal{Q}_z - \mathcal{Q}_x', \quad (3.122)$$

$$((\mathbf{D}_1 - \mathbf{F}^T - \mathbf{D}_2^T)\phi' - \mathbf{C}\phi''') \Big|_{X=L} = \mathcal{Q}_x + \mathcal{T}_y + \mathcal{T}_z, \quad (3.123)$$

$$((\mathbf{D}_1 - \mathbf{F}^T - \mathbf{D}_2^T)\phi' - \mathbf{C}\phi''') \Big|_{X=0} = \mathcal{Q}_x - \mathcal{T}_y - \mathcal{T}_z, \quad (3.124)$$

$$((\mathbf{F} + \mathbf{D}_2)^T \phi + \mathbf{C}\phi'') \Big|_{X=L} = \mathcal{T}_x, \quad (3.125)$$

$$((\mathbf{F} + \mathbf{D}_2)^T \phi + \mathbf{C}\phi'') \Big|_{X=0} = -\mathcal{T}_x, \quad (3.126)$$

onde se introduziu a notação  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_2^T$ .

### 3.5 Hipóteses simplificativas da GBT

Na Secção 3.3 utilizou-se a hipótese de Kirchhoff para simplificar as relações deformações-deslocamentos. Nas formulações clássicas da GBT são consideradas duas hipóteses simplificativas adicionais para as componentes de deformação, nomeadamente:

(H1)  $\varepsilon_{yy}^M = 0$ , i.e., assume-se a inextensibilidade das paredes no plano da secção transversal;

(H2)  $\gamma_{xy}^M = 0$ , também conhecida por hipótese de Vlasov.

Estas duas hipóteses constituem uma contribuição importante para a eficiência da formulação e da sua implementação através do método dos elementos finitos, uma vez que permitem reduzir significativamente o número de modos de deformação necessários para obter resultados precisos e, em particular, a hipótese de Vlasov elimina efeitos de *locking* de corte. Para além disso, estas duas hipóteses são úteis na subdivisão dos modos de deformação, conforme irá ser discutido na Secção 3.7. Assim, deve salientar-se que mesmo que estas hipóteses *não sejam* adotadas para reduzir o número de modos de deformação, são úteis para eliminar os efeitos de *locking* e subdividir os modos de deformação.

Atendendo à Eq. (3.61), a hipótese H1 fornece

$$\varepsilon_{yy}^M = 0 \Rightarrow \bar{v}_{k,y} = 0, \quad (3.127)$$

ou seja, as funções  $\bar{v}_k$  devem ser constantes em cada parede, tal como ocorre na GBT clássica. Sempre que esta hipótese for considerada, para que a resposta estrutural não seja excessivamente rígida, os termos de membrana e de flexão devem ser desacoplados e deve considerar-se  $\sigma_{yy}^M = 0$ , adotando uma matriz constitutiva para os termos de membrana dada por

$$C = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (3.128)$$

Para os termos de flexão utiliza-se a relação (3.87), relativa a estados planos de tensão. Os termos de membrana e de flexão são facilmente desacoplados se for feita a substituição  $R/R_C \approx \bar{R}/R_C = 1/\bar{\beta}$  na expressão do trabalho virtual das forças interiores (3.88).

Relativamente à hipótese de Vlasov (H2), a Eq. (3.62) conduz a

$$\gamma_{xy}^M = 0 \Rightarrow \bar{v}_k = -\frac{\bar{u}_{k,y}}{\bar{\beta}} - K_z \bar{u}_k. \quad (3.129)$$

Esta relação deve ser comparada com a restrição análoga para o caso reto,  $\bar{v}_k = -\bar{u}_{k,y}$  (recordar (2.125)). Verifica-se que a Eq. (3.129) é mais complexa devido ao efeito da curvatura, que surge através do termo adicional  $K_z \bar{u}_k$  e de  $\bar{\beta}$ . Caso (3.129) seja substituída nas Eqs. (3.63) e (3.65), obtêm-se as seguintes expressões para as respetivas componentes de deformação de flexão,

$$\varepsilon_{xx}^F = -z\bar{\beta} \left( -K_z \bar{w}_{,y}^T + \bar{\beta} K_y^2 \bar{w}^T + K_y K_z \bar{u}_{,y}^T + \bar{\beta} K_y K_z^2 \bar{u}^T \right) \phi - z\bar{\beta}^2 \bar{w}^T \phi'', \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^F &= -2z\bar{\beta} \left( \bar{w}_{,y}^T + \bar{\beta} K_z \bar{w}^T - K_y \bar{u}_{,y}^T - \bar{\beta} K_y K_z \bar{u}^T \right) \phi' \\ &= -2z\bar{\beta} \left( \bar{w}_{,y}^T + \bar{\beta} K_z \bar{w}^T + \bar{\beta} K_y \bar{v}^T \right) \phi'. \end{aligned} \quad (3.131)$$

A Eq. (3.131) coincide exatamente com a obtida por Cheung e Cheung (1971), o que quer dizer que estes autores estão a considerar a hipótese de Vlasov na determinação dos termos de flexão. De facto, referiu-se na Secção 3.3 que a distorção de flexão (3.45) permite recuperar a expressão de Cheung e Cheung (1971) se for desprezado o termo  $\gamma_{\theta y}^M$ , o que corresponde exatamente à imposição da hipótese de Vlasov.

Tal como foi já visto, a imposição da hipótese H1 obriga a que as funções  $\bar{v}_k$  sejam constantes em cada parede. Assim, se ambas as hipóteses H1 e H2 forem adotadas, tal como no caso da GBT clássica, as funções  $\bar{u}_k$  têm de ser, no máximo, lineares em cada parede. De facto, se  $\bar{u}_k = a + by$ , onde  $a, b$  são constantes, a Eq. (3.129) conduz a

$$\begin{aligned} \bar{v}_k &= -\frac{\bar{R}}{R_C} b - aK_z - byK_z \\ &= -\frac{R_O}{R_C} b + byK_z - aK_z - byK_z \\ &= -\frac{R_O}{R_C} b - aK_z, \end{aligned} \quad (3.132)$$

o que corresponde a uma constante, conforme era exigido. Para além disso, assumindo que a contribuição de  $z$  para  $R$  pode ser desprezada (ver Eq. (3.24)), tem-se  $R = \bar{R}$ , o que implica que  $R/R_C = 1/\bar{\beta}$  e os termos de membrana e de flexão surgem desacoplados, conforme foi já referido.

Devido às hipóteses H1 e H2, obtém-se imediatamente  $\xi_{21}^M = \xi_{32}^M = \mathbf{0}$  e as parcelas de membrana das matrizes modais da GBT assumem a forma (considerando a matriz constitutiva (3.128))

$$\mathbf{B}^M = \mathbf{D}_1^M = \mathbf{D}_2^M = \mathbf{E}^M = \mathbf{0}, \quad (3.133)$$

$$\mathbf{C}^M = \int_A \frac{E}{\bar{\beta}} \xi_{13} \xi_{13}^T dA, \quad (3.134)$$

$$\mathbf{F}^M = \int_A \frac{E}{\bar{\beta}} \xi_{11} \xi_{13}^T dA, \quad (3.135)$$

$$\mathbf{G}^M = \int_A \frac{E}{\bar{\beta}} \xi_{11} \xi_{11}^T dA. \quad (3.136)$$

As parcelas de flexão das matrizes modais mantêm-se inalteradas (embora se utilize  $R/R_C = 1/\bar{\beta}$ ). Finalmente, os vetores dos esforços generalizados são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{xx}^* &= \int_A \frac{\sigma_{xx}}{\bar{\beta}} \xi_{11} dA \\ &= \int_A \sigma_{xx} \left( K_y \bar{w} + K_z \frac{\bar{u}_{,y}}{\bar{\beta}} + K_z^2 \bar{u} - z \left( -K_z \bar{w}_{,y} + \bar{\beta} K_y^2 \bar{w} + K_y K_z \bar{u}_{,y} + \bar{\beta} K_y K_z^2 \bar{u} \right) \right) dA, \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\mathcal{X}_{yy} = \int_A \frac{\sigma_{yy}}{\bar{\beta}} \xi_{21} dA = - \int_A z \frac{\sigma_{yy}}{\bar{\beta}} \bar{w}_{,yy} dA, \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{xy} &= \int_A \frac{\sigma_{xy}}{\bar{\beta}} \xi_{32} dA \\ &= -2 \int_A z \sigma_{xy} \left( \bar{w}_{,y} + \bar{\beta} K_z \bar{w} - K_y \bar{u}_{,y} - \bar{\beta} K_y K_z \bar{u} \right) dA, \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\mathcal{X}_{xx} = \int_A \frac{\sigma_{xx}}{\bar{\beta}} \xi_{13} dA = \int_A \sigma_{xx} (\bar{u} - z \bar{\beta} \bar{w}) dA. \quad (3.140)$$

### 3.6 As teorias de Winkler e Vlasov

Nesta Secção mostra-se que a formulação desenvolvida permite recuperar as expressões clássicas desenvolvidas para o caso plano por Winkler (1868) e para o caso tridimensional por Vlasov (1958). Para o efeito, utilizam-se apenas os modos de deformação que definem os movimentos de corpo rígido (extensão axial, flexão e torção) e restringe-se o estudo ao caso de secções abertas em virtude de, neste caso, poder ser utilizada a hipótese de Vlasov, o que permite simplificar significativamente as equações<sup>1</sup>.

Assim, os modos de deformação são obtidos adotando as hipóteses H1 e H2 e não envolvem flexão transversal das paredes ( $\varepsilon_{yy}^F = 0$ ). Em acréscimo, para simplificar as

<sup>1</sup>Em secções fechadas o modo de torção envolve em geral  $\gamma_{xy}^M \neq 0$ , pelo que a hipótese de Vlasov não é válida.

expressões, tendo em conta que a espessura das paredes é reduzida, desprezam-se os termos associados à extensão longitudinal de flexão ( $\varepsilon_{xx}^F \approx 0$ ). Restam assim apenas três vetores  $\xi_{ij}$  não-nulos, nomeadamente

$$\xi_{11}^M = \bar{\beta} (K_y \bar{w} - K_z \bar{v}), \quad (3.141)$$

$$\xi_{13}^M = \bar{\beta} \bar{u}, \quad (3.142)$$

$$\xi_{32}^F = -2z\bar{\beta} (\bar{w}_{,y} + \bar{\beta} K_z \bar{w} + \bar{\beta} K_y \bar{v}). \quad (3.143)$$

Com estes vetores, os esforços generalizados são dados por

$$\mathcal{X}_{xx}^* = \int_A \sigma_{xx} \frac{\bar{u}_R}{R_C} dA, \quad (3.144)$$

$$\mathcal{X}_{yy} = 0, \quad (3.145)$$

$$\mathcal{X}_{xy} = -2 \int_A z \sigma_{xy} \left( \bar{w}_{,y} + \frac{\bar{u}_Z}{R} \right) dA, \quad (3.146)$$

$$\mathcal{X}_{xx} = \int_A \sigma_{xx} \bar{u} dA, \quad (3.147)$$

onde os vetores de deslocamentos modais da linha média  $(\bar{u}_Z, \bar{u}_R)$ , relativos aos eixos globais, são dados por

$$\bar{u}_Z = -\bar{w} \sin \varphi + \bar{v} \cos \varphi, \quad (3.148)$$

$$\bar{u}_R = \bar{w} \cos \varphi + \bar{v} \sin \varphi. \quad (3.149)$$

Os deslocamentos associados a movimentos de corpo rígido podem ser escritos em função do deslocamento do centro  $C$  da secção transversal e da rotação em torno de  $C$ . Para cada modo  $k$ , denotando as componentes de translação por  $d_{CZk}$ ,  $d_{CRk}$  e a rotação por  $\alpha_k$ , é possível escrever

$$\bar{u}_Z = d_{CZ} + (R_C - \bar{R}) \alpha, \quad (3.150)$$

$$\bar{u}_R = d_{CR} + (\bar{Z} - Z_C) \alpha, \quad (3.151)$$

onde  $\bar{Z}$  é a parcela de  $Z$  associada à linha média. Note-se que a rotação é simplesmente dada por

$$\alpha_k = \bar{w}_{k,y}. \quad (3.152)$$

Utilizando estas relações nas Eqs. (3.141) e (3.143) obtém-se

$$\xi_{11}^M = \frac{\bar{u}_R}{R}, \quad (3.153)$$

$$\xi_{32}^F = -2z\bar{\beta} \left( \alpha + \frac{\bar{u}_Z}{R} \right) \quad (3.154)$$

e, procedendo de forma análoga para as Eqs. (3.144) e (3.146), é-se conduzido a

$$\mathcal{X}_{xx}^* = \frac{d_{CR}}{R_C} \int_A \sigma_{xx} dA + \frac{\alpha}{R_C} \int_A (\bar{Z} - Z_C) \sigma_{xx} dA, \quad (3.155)$$

$$\mathcal{X}_{xy} = -(d_{CZ} + R_C \alpha) \int_A \frac{2z\sigma_{xy}}{R} dA. \quad (3.156)$$

Os esforços generalizados das expressões (3.144)–(3.147) e (3.155)–(3.156) possuem um significado físico claro:

- (i)  $\mathcal{X}_{xx}$  corresponde ao esforço axial, ao momento fletor e ao bimomento se as respectivas funções de empenamento estiverem incluídas nas entradas do vetor em  $\bar{\mathbf{u}}$ .
- (ii)  $\mathcal{X}_{xx}^*$  são os esforços generalizados associados ao efeito da curvatura, que desaparecem para barras retas ( $R_C = \infty$ ) ou deslocamentos radiais nulos ( $\bar{u}_{Rk} = 0$ ) — ver Eq. (3.144). Em particular, o primeiro termo de (3.155) corresponde ao esforço axial  $N$  e o segundo ao momento em torno de um eixo paralelo a  $R$  e que passa por  $C$  ( $M_R$ ). Logo

$$\mathcal{X}_{xx}^* = \frac{N}{R_C} d_{CR} - \frac{M_R}{R_C} \alpha. \quad (3.157)$$

- (iii)  $\mathcal{X}_{xy}$  são os momentos torsores resultantes da variação das tensões de corte na direção da espessura  $z$ , que se anulam se  $d_{CZk} = -R_C \alpha_k$ .

### 3.6.1 Comparação com a teoria clássica de Winkler

Considere-se o caso particular de uma barra cujo eixo circular se deforma no seu próprio plano ( $Z = Z_C$ ). Neste caso existe um acoplamento entre esforço axial e momento fletor em torno de  $Z$ . Suponha-se que  $C$  coincide com o centróide e o centro de corte da secção transversal e que os eixos centrais principais são paralelos a  $(Z, R)$ . As forças exteriores distribuem-se ao longo do eixo da barra e consistem em forças axiais ( $n$ ), transversais ( $p_R$ ) e momentos ( $m_Z$ ) — consideram-se positivas se atuarem segundo a direção positiva dos eixos globais. Na Figura 3.2 indica-se a orientação positiva das forças exteriores para um ponto arbitrário do eixo.

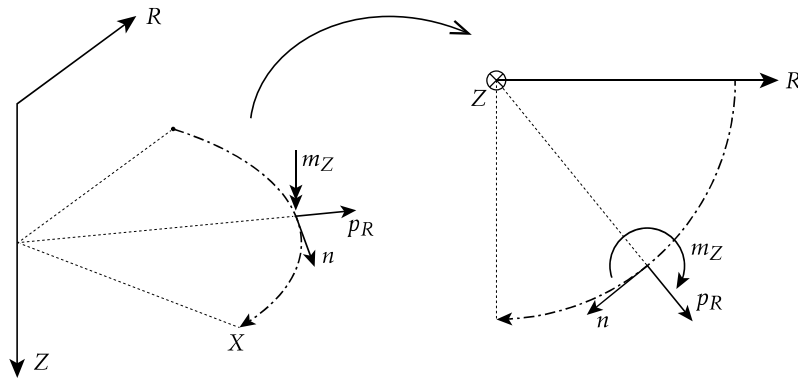


Figura 3.2: Orientação positiva das forças exteriores para o caso da teoria de Winkler.

No que se segue consideram-se dois modos de deformação: (i) o primeiro é caracterizado por um deslocamento axial  $\bar{u} = 1$  (omite-se o índice  $k$  por simplicidade) e (ii) o segundo corresponde a uma rotação de corpo rígido em torno do eixo principal paralelo a  $Z$ . Estes modos não correspondem ao campo de deslocamentos associados a esforço

axial e flexão (ver Secção 3.7), mas constituem um conjunto que define o mesmo espaço e são, por agora, mais fáceis de definir.

Em relação ao primeiro modo, a hipótese de Vlasov (3.129) fornece

$$\bar{v} = \frac{\sin \varphi}{R_C} = -K_z. \quad (3.158)$$

Considerando, por exemplo,  $\varphi = 90^\circ$ , obtém-se, de (3.149),  $\bar{u}_R = 1/R_C$ . É claro que este deslocamento deve ser independente de  $\varphi$ , pelo que se obtém

$$\begin{aligned} \bar{u}_R = \frac{1}{R_C} &\Leftrightarrow \bar{w} \cos \varphi + \bar{v} \sin \varphi = \frac{1}{R_C} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 \varphi}{R_C} + \bar{w} \cos \varphi = \frac{1}{R_C} \\ &\Leftrightarrow \bar{w} = \frac{\cos \varphi}{R_C} = K_y. \end{aligned} \quad (3.159)$$

É claro que para este modo axial deve ter-se  $d_{CX} = 1$  e as expressões obtidas para  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  permitem concluir, de (3.148), (3.149) e (3.152), que  $\bar{u}_R = 1/R_C$ ,  $\bar{u}_Z = 0$  e  $\alpha = 0$ . Em resumo, as relações cinemáticas que definem o modo de extensão axial são

$$\bar{u} = 1, \quad \bar{v} = \frac{\sin \varphi}{R_C} = -K_z, \quad \bar{w} = \frac{\cos \varphi}{R_C} = K_y, \quad (3.160)$$

$$d_{CX} = 1, \quad \bar{u}_R = d_{CR} = \frac{1}{R_C}, \quad \bar{u}_Z = d_{CZ} = 0, \quad \alpha = 0. \quad (3.161)$$

Atendendo às relações (3.147), (3.156) e (3.157), as relações anteriores permitem escrever

$$\mathcal{X}_{xx} = N, \quad \mathcal{X}_{xx}^* = \frac{N}{R_C^2}, \quad \mathcal{X}_{xy} = 0, \quad (3.162)$$

sendo  $N$  o esforço axial. Relativamente às forças exteriores, tem-se

$$\mathcal{Q}_x = n \, d_{CX} = n, \quad (3.163)$$

$$\mathcal{Q}_y + \mathcal{Q}_z = p_R \, d_{CR} = \frac{p_R}{R_C}. \quad (3.164)$$

O segundo modo, associado à rotação de corpo rígido em torno do eixo  $Z$ , tem função de empenamento dada por  $\bar{u} = \bar{R} - R_C$ . Procedendo de forma análoga ao caso anterior, obtém-se

$$\bar{u} = \bar{R} - R_C = R_O - R_C + y \sin \varphi, \quad (3.165)$$

$$\bar{v} = -\sin \varphi, \quad \bar{w} = -\cos \varphi, \quad (3.166)$$

$$d_{CX} = 0, \quad \bar{u}_R = d_{CR} = -1, \quad \bar{u}_Z = d_{CZ} = 0, \quad \alpha = 0. \quad (3.167)$$

Os esforços generalizados associados às relações anteriores são dados por

$$\mathcal{X}_{xx} = M_Z, \quad \mathcal{X}_{xx}^* = -\frac{N}{R_C}, \quad \mathcal{X}_{xy} = 0 \quad (3.168)$$

e as forças exteriores são (o modo corresponde a uma rotação unitária em torno do eixo  $Z$ )

$$\mathcal{Q}_x = m_Z, \quad (3.169)$$

$$\mathcal{Q}_y + \mathcal{Q}_z = p_R d_{CR} = -p_R. \quad (3.170)$$

A substituição dos dois conjuntos de resultantes de tensões (3.162)–(3.164) e (3.168)–(3.170) na equação de equilíbrio (3.117) permite obter as equações

$$\frac{N}{R_C^2} + N'' = \frac{p_R}{R_C} - n', \quad (3.171)$$

$$-\frac{N}{R_C} + M_Z'' = -p_R - m_Z', \quad (3.172)$$

que coincidem com as expressões clássicas de Winkler (Winkler, 1868; Armero e Valverde, 2012a).

Atendendo aos deslocamentos modais calculados e às Eqs. (3.141)–(3.143), as componentes de deformação (3.142), (3.153) e (3.154) resultam em (a componente dos vetores corresponde ao número do modo de deformação)

$$\xi_{11}^M = \frac{\bar{\beta}}{R_C} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (3.173)$$

$$\xi_{13}^M = \bar{\beta} \begin{bmatrix} 1 & \bar{R} - R_C \end{bmatrix}^T, \quad (3.174)$$

$$\xi_{32}^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.175)$$

e, consequentemente, as matrizes modais da GBT (3.99)–(3.105) assumem a forma

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (3.176)$$

$$\mathbf{C} = E \begin{bmatrix} A + \frac{I_r}{R_C^2} & -\frac{I_r}{R_C} \\ -\frac{I_r}{R_C} & I_r \end{bmatrix}, \quad (3.177)$$

$$\mathbf{F} = E \begin{bmatrix} \frac{A}{R_C^2} + \frac{I_r}{R_C^4} & -\frac{I_r}{R_C^3} \\ -\frac{A}{R_C} - \frac{I_r}{R_C^3} & \frac{I_r}{R_C^2} \end{bmatrix}, \quad (3.178)$$

$$\mathbf{G} = E \left( A + \frac{I_r}{R_C^2} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{R_C^4} & -\frac{1}{R_C^3} \\ -\frac{1}{R_C^3} & \frac{1}{R_C^2} \end{bmatrix}, \quad (3.179)$$

onde  $A$  é a área da secção transversal,  $I_r$  representa o momento de inércia modificado utilizado na teoria clássica de Winkler (1868), dado por

$$I_r = \int_A \frac{(\bar{R} - R_C)^2}{1 + \frac{\bar{R} - R_C}{R_C}} dA, \quad (3.180)$$



e foram utilizadas as relações

$$\frac{I_r}{R_C} = \int_A \frac{\bar{R} - R_C}{1 + \frac{\bar{R} - R_C}{R_C}} dA, \quad (3.181)$$

$$A + \frac{I_r}{R_C^2} = \int_A \frac{1}{1 + \frac{\bar{R} - R_C}{R_C}} dA. \quad (3.182)$$

Deve-se notar que o cálculo das relações (3.181) e (3.182) não é trivial. Atendendo ao facto de

$$\int_A (\bar{R} - R_C) dA = 0, \quad (3.183)$$

onde o integral representa o momento estático da secção, que é nulo em virtude dos eixos principais da secção serem paralelos ao referencial global, é possível obter

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\bar{R} - R_C}{1 + \frac{\bar{R} - R_C}{R_C}} dA &= \int_A \left( \frac{\bar{R} - R_C}{1 + \frac{\bar{R} - R_C}{R_C}} - (\bar{R} - R_C) \right) dA \\ &= -\frac{1}{R_C} \int_A \frac{(\bar{R} - R_C)^2}{1 + \frac{\bar{R} - R_C}{R_C}} dA \\ &= -\frac{I_r}{R_C} \end{aligned} \quad (3.184)$$

e

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{1 + \frac{\bar{R} - R_C}{R_C}} dA &= \int_A \frac{1 + \frac{\bar{R} - R_C}{R_C} - \frac{\bar{R} - R_C}{R_C}}{1 + \frac{\bar{R} - R_C}{R_C}} dA \\ &= \int_A \left( 1 - \frac{1}{R_C} \frac{\bar{R} - R_C}{1 + \frac{\bar{R} - R_C}{R_C}} \right) dA \\ &= A + \frac{I_r}{R_C^2}. \end{aligned} \quad (3.185)$$

É ainda possível obter as medidas de deformação conjugadas de  $N$  e  $M_Z$ , escritas em termos dos deslocamentos do centro  $C$ , tal como na teoria de Winkler. Utilizando os deslocamentos definidos em (3.161) e (3.167), os deslocamentos do centro  $C$ , escritos no referencial  $(X, Z, R)$ , são dados por

$$U_{CX} = \mathbf{d}_{CX}^T \boldsymbol{\phi}' = \phi'_1, \quad (3.186)$$

$$U_{CZ} = \mathbf{d}_{CZ}^T \boldsymbol{\phi} = 0, \quad (3.187)$$

$$U_{CR} = \mathbf{d}_{CR}^T \boldsymbol{\phi} = \frac{\phi_1}{R_C} - \phi_2. \quad (3.188)$$

Utilizando estas relações e a Eq. (3.91), mostra-se facilmente que  $N$  e  $M_Z$  formam um par conjugado com as expressões clássicas da extensão axial e da curvatura, dadas respectivamente por

$$\delta \varepsilon = \frac{\delta U_{CR}}{R_C} + \delta U'_{CX}, \quad (3.189)$$

$$\delta \kappa = \frac{\delta U'_{CX}}{R_C} - \delta U''_{CR}. \quad (3.190)$$

Estas medidas de deformação relacionam-se com os modos de deformação definidos anteriormente através de

$$\varepsilon = \frac{\phi_1}{R_C^2} + \phi_1'' - \frac{\phi_2}{R_C}, \quad (3.191)$$

$$\kappa = \phi_2''. \quad (3.192)$$

Finalmente, a Eq. (3.109) permite recuperar as relações da teoria de Winkler,

$$N = E \left( A + \frac{I_r}{R_C^2} \right) \varepsilon - \frac{EI_r}{R_C} \kappa, \quad (3.193)$$

$$M_Z = -\frac{EI_r}{R_C} \varepsilon + EI_r \kappa. \quad (3.194)$$

### 3.6.2 Comparação com a teoria clássica de Vlasov

Considere-se agora que o arco pode sofrer deslocamentos de corpo rígido para fora do seu plano. Este tipo de movimento está associado a um acoplamento entre a flexão para fora do plano do arco e a torção. De forma análoga à Secção anterior, assume-se que  $C$  coincide com o centróide e o centro de corte, e que os eixos centrais principais da secção são paralelos aos eixos  $(Z, R)$ . Para além disso, o cálculo dos modos de deformação tira partido da hipótese de Vlasov (3.129), o que quer dizer que se admite que a secção é aberta, e de relações cinemáticas simples. As forças exteriores consistem em forças verticais ( $p_Z$ ) e momentos torsores ( $m_X$ ), distribuídos ao longo do eixo da barra e consideram-se positivos se atuarem segundo as direcções positivas dos eixos. A orientação positiva das forças é indicada na Figura 3.3.

O modo de deformação associado à flexão em torno de  $R$  possui uma função de empenamento dada por

$$\bar{u} = Z_C - \bar{Z} = Z_C - Z_O - y \cos \varphi \quad (3.195)$$

e, utilizando a hipótese de Vlasov (3.129), obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{v} &= -K_z (Z_C - Z_O) + \frac{R_O}{R_C} \cos \varphi \\ &= \frac{\cos \varphi}{R_C} R_O + \frac{\sin \varphi}{R_C} (Z_C - Z_O). \end{aligned} \quad (3.196)$$

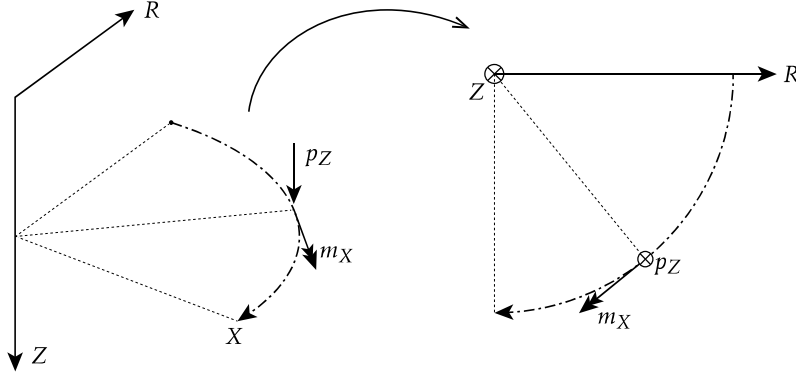


Figura 3.3: Orientação positiva das forças exteriores para o caso da teoria de Vlasov.

Considerando  $\varphi = 0^\circ$  e  $\varphi = 90^\circ$  obtém-se, respetivamente,

$$\varphi = 0^\circ : \quad \bar{v} = \bar{u}_R = \frac{Z_C - Z_O}{R_C} \quad (3.197)$$

$$\varphi = 90^\circ : \quad \bar{v} = \bar{u}_Z = \frac{R_O}{R_C}. \quad (3.198)$$

As expressões obtidas para estes dois casos permitem retirar duas conclusões, nomeadamente que (i) o centro  $C$  verifica  $Z_O = Z_C$  e  $R_O = R_C$ , pelo que tem deslocamentos  $d_{CR} = 0$  e  $d_{CZ} = 1$ , e (ii) o deslocamento vertical da secção transversal,  $\bar{u}_Z$ , varia com  $R_O$ , pelo que o movimento pode ser decomposto numa translação do centro  $C$  e numa rotação cujo centro está situado sobre o eixo  $Z$  e igual a  $\alpha = -1/R_C$ , conforme se mostra na Figura 3.4 para uma secção em I.

De facto, considerando que  $\bar{w}$  é da forma  $\bar{w} = w_O + \alpha y$  e atendendo às Eqs. (3.148)–(3.149) e (3.196), tem-se

$$\begin{cases} (w_O + \alpha y) \cos \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{R_C} (Z_C - Z_O) + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R_C} R_O = (\bar{Z} - Z_C) \alpha, \\ -(w_O + \alpha y) \sin \varphi + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R_C} (Z_C - Z_O) + \frac{\cos^2 \varphi}{R_C} R_O, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{R_C}, \\ w_O = -\frac{\sin \varphi}{R_C} R_O - \frac{\cos \varphi}{R_C} (Z_O - Z_C). \end{cases} \quad (3.199)$$

Desta forma, uma vez que o centro  $C$  verifica  $Z_O = Z_C$  e  $R_O = R_C$ , as expressões (3.196) e (3.199) fornecem  $\bar{v} = \cos \varphi$  e  $\bar{w} = -\sin \varphi$ , respetivamente. Substituindo na Eq. (3.148) obtém-se, conforme esperado,  $\bar{u}_Z = d_{CZ} = 1$ .

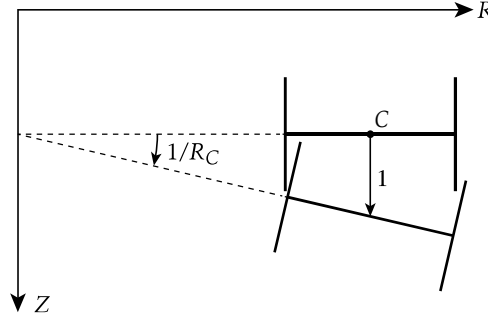


Figura 3.4: Movimento associado à flexão em torno do eixo horizontal.

Finalmente, as relações cinemáticas que definem o modo de flexão em torno de  $R$  são

$$\bar{u} = Z_C - \bar{Z} = Z_C - Z_O - y \cos \varphi, \quad (3.200)$$

$$\bar{v} = \frac{\cos \varphi}{R_C} R_O + \frac{\sin \varphi}{R_C} (Z_C - Z_O), \quad (3.201)$$

$$\bar{w} = -\frac{\sin \varphi}{R_C} R_O - \frac{\cos \varphi}{R_C} (Z_O - Z_C) - \frac{y}{R_C} \quad (3.202)$$

$$d_{CX} = 0, \quad d_{CR} = 0, \quad d_{CZ} = 1, \quad \alpha = -\frac{1}{R_C}. \quad (3.203)$$

Os esforços generalizados são

$$\mathcal{X}_{xx} = M_R, \quad \mathcal{X}_{xx}^* = \frac{M_R}{R_C^2}, \quad \mathcal{X}_{xy} = 0, \quad (3.204)$$

devendo-se notar que não surge qualquer momento torsor devido a tensões de corte. As forças exteriores são dadas por

$$\mathcal{Q}_x = 0, \quad (3.205)$$

$$\mathcal{Q}_y + \mathcal{Q}_z = p_Z d_{CZ} + m_X \alpha = p_Z - \frac{m_X}{R_C}. \quad (3.206)$$

A análise do modo de torção é mais complexa. No entanto, é possível simplificar o processo assumindo que (i) a secção transversal sofre uma rotação em torno de  $C$ , o que significa que  $d_{CR} = d_{CZ} = 0$  (apesar de, como se mostrará na Secção 3.7, em geral,  $d_{CZ} \neq 0$ ) e (ii)  $\mathcal{X}_{xy}$  é o momento torsor clássico de Saint-Venant ( $\mathcal{X}_{xy} = T_{SV}$ ). Se a função de empenamento for definida de modo a causar  $\alpha = 1$ , obtém-se

$$\mathcal{X}_{xx} = B, \quad \mathcal{X}_{xx}^* = -\frac{M_R}{R_C}, \quad (3.207)$$

onde  $B$  denota o bimomento. As forças exteriores resultam em

$$\mathcal{Q}_x = 0, \quad (3.208)$$

$$\mathcal{Q}_y + \mathcal{Q}_z = m_X \alpha = m_X. \quad (3.209)$$

Os resultados anteriores e a Eq. (3.117) fornecem as equações de equilíbrio

$$\frac{M_R}{R_C^2} + M_R'' = p_Z - \frac{m_X}{R_C}, \quad (3.210)$$

$$-\frac{M_R}{R_C} - T' = m_X, \quad (3.211)$$

onde, como é habitual, o momento torsor total é igual a  $T = -B' + T_{SV}$ . Estas equações coincidem com as obtidas por Vlasov (1958, Capítulo XII) e por Dabrowski (1968), embora exista uma ligeira diferença de sinais devido à convenção adotada.

As matrizes modais resultantes são lineares em  $\bar{\beta}$  e a sua integração torna-se difícil. No entanto, ao se desprezar tal dependência ( $\bar{\beta} \approx 1$ ) torna-se possível obter (os índices 1 e 2 correspondem à flexão e torção, respetivamente)

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_2 = \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (3.212)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & EI_w \end{bmatrix}, \quad (3.213)$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GJ \end{bmatrix}, \quad (3.214)$$

$$\mathbf{F} = EI \begin{bmatrix} \frac{1}{R_C^2} & 0 \\ -\frac{1}{R_C} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.215)$$

$$\mathbf{G} = EI \begin{bmatrix} \frac{1}{R_C^4} & -\frac{1}{R_C^3} \\ -\frac{1}{R_C^3} & \frac{1}{R_C^2} \end{bmatrix}, \quad (3.216)$$

onde  $I_w$  é a constante de empenamento usual e  $I$  é o momento de inércia em torno do eixo horizontal (paralelo a  $R$ ) que passa por  $C$ .

De modo a obter as relações de Vlasov entre os esforços e as medidas de deformação da secção, deve-se começar por notar que os deslocamentos no plano e a rotação  $\Omega$  em torno do centro  $C$  são dados por

$$U_{CZ} = \mathbf{d}_{CZ}^T \boldsymbol{\phi} = \phi_1, \quad (3.217)$$

$$U_{CR} = \mathbf{d}_{CR}^T \boldsymbol{\phi} = 0, \quad (3.218)$$

$$\Omega = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\phi} = -\frac{\phi_1}{R_C} + \phi_2. \quad (3.219)$$

Utilizando as Eqs. (3.108)–(3.109) (ou, em alternativa, para obter  $M_R$ , a Eq. (3.106)) e as matrizes da GBT calculadas anteriormente, obtêm-se as relações clássicas (Vlasov, 1958)

$$M_R = EI\kappa, \quad (3.220)$$

$$B = EI_w \tau', \quad (3.221)$$

$$T_{SV} = GJ\tau, \quad (3.222)$$

onde as curvaturas de flexão e de torção são dadas por

$$\kappa = U''_{CZ} - \frac{\Omega}{R_C}, \quad (3.223)$$

$$\tau = \Omega' + \frac{U'_{CZ}}{R_C} \quad (3.224)$$

e estão relacionadas com os modos de deformação de corpo rígido através de

$$\kappa = \phi_1'' + \frac{\phi_1}{R_C^2} - \frac{\phi_2}{R_C}, \quad (3.225)$$

$$\tau = \phi_2'. \quad (3.226)$$

### 3.7 Determinação dos modos de deformação

Nas Secções 3.6.1 e 3.6.2 particularizou-se a formulação das Secções 3.3–3.5 para o caso de apenas existirem modos de deformação associados aos movimentos de corpo rígido da secção, recuperando assim as teorias de Winkler e Vlasov. No entanto, interessa agora utilizar a formulação desenvolvida para o caso de secções deformáveis, pelo que se torna necessário desenvolver um processo para a determinação destes modos de deformação arbitrários (respeitando no entanto a hipótese de Kirchhoff).

Deve-se salientar que, em relação ao caso reto, a determinação dos modos de deformação para o caso curvo é dificultada pelo facto de a hipótese de Vlasov requerer a utilização da relação (3.129), a qual é significativamente mais complexa.

Neste trabalho foram seguidas duas abordagens distintas para a determinação dos modos de deformação:

- (A1) Utilização dos modos para barras prismáticas, sendo que no caso dos modos naturais de Vlasov apenas se retêm as funções de empenamento  $\bar{u}_k$ , determinando-se as correspondentes funções  $\bar{v}_k$  através da hipótese de Vlasov (3.129) e as funções  $\bar{w}_k$  considerando que a secção transversal se comporta como um pórtico plano sob a ação de deslocamentos impostos  $\bar{v}_k$ .
- (A2) Utilização de uma base inicial de modos de deformação e subsequente hierarquização/categorização através de problemas de valores e vetores próprios envolvendo as matrizes modais da GBT (3.99)–(3.101).

#### 3.7.1 Abordagem A1

Conforme foi referido na Secção 2.6, os modos de deformação para o caso prismático podem ser obtidos, para qualquer secção transversal de parede fina de paredes retas, através do programa *freeware* GBTUL 2.06 (Bebiano et al., 2015, 2018). Conforme se referiu anteriormente, a dificuldade na determinação dos modos de deformação para barras de eixo circular está apenas associada aos modos naturais de Vlasov. Assim, nesta

primeira abordagem, considera-se que os restantes modos de deformação coincidem com os obtidos para barras retas.

Assim, recorre-se ao programa GBTUL 2.06 para obter os modos de deformação e as funções de empenamento  $\bar{u}_k$  dos modos naturais de Vlasov. Este conjunto de funções de empenamento define os modos de “corpo rígido” (extensão axial, flexão e, se a secção for aberta, torção) e os modos distorcionais. As funções de empenamento dos modos de Vlasov  $\bar{u}_k$  obtidas desta forma são, no máximo, lineares, o que está de acordo com a imposição das hipóteses H1 e H2 ( $\gamma_{xy}^M = \varepsilon_{yy}^M = 0$ ).

A utilização da hipótese de Vlasov (3.129) permite obter as respetivas funções  $\bar{v}_k$ . De facto, de acordo com a Eq. (3.132), se  $\bar{u}_k = a + by$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , tem-se  $\bar{v}_k = -\frac{R_O}{R_C}b - aK_z$ .

A determinação das funções  $\bar{w}_k$  é um pouco mais complexa, uma vez que envolve analisar a secção transversal como se esta fosse um pórtico plano cujas barras são axialmente indeformáveis e possuem inércia igual a  $I = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ . De seguida, impõem-se deslocamentos em cada parede correspondentes aos deslocamentos  $\bar{v}_k$ , o que conduz a funções  $\bar{w}_k$  polinomiais, no máximo, do terceiro grau,  $\bar{w}_k = c_0 + c_1y + c_2y^2 + c_3y^3$ , com  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . A título de exemplo, a Figura 3.5 mostra o procedimento descrito para uma secção em I, rodada a  $45^\circ$  — os deslocamentos indicados correspondem à função de empenamento associada à flexão em torno do eixo de maior inércia.

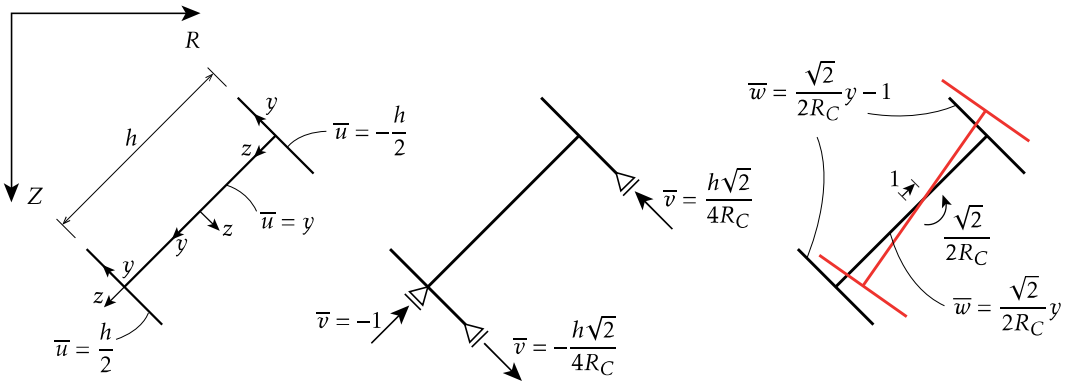


Figura 3.5: Exemplo de aplicação da abordagem A1 a uma secção em I para a função de empenamento associada à flexão em torno do eixo de maior inércia.

Deve referir-se que esta abordagem não é muito útil para secções complexas, dado que a determinação das configurações dos modos naturais de Vlasov envolve cálculos que não são facilmente sistematizáveis. Por outro lado, como não se utilizam as matrizes modais da GBT para o caso curvo, os modos ficam fortemente acoplados (apesar de em barras curvas existir sempre um acoplamento natural). Assim, esta abordagem será apenas utilizada para secções relativamente simples: na Secção 3.10.1 é aplicada a uma secção em I orientada de três formas distintas e, na Secção 3.10.2, a uma secção tubular quadrada).

### 3.7.2 Abordagem A2

Conforme se referiu, a abordagem A1 torna-se pouco prática quando o número de modos naturais de Vlasov aumenta. Assim, considera-se pertinente o desenvolvimento de um processo sistemático para a determinação dos modos de deformação para barras de eixo circular, baseado nos conceitos já desenvolvidos para o caso reto (Bebiano et al., 2015; Gonçalves et al., 2010b, 2014). Em particular, pretende-se preservar a categorização dos modos utilizada nestes artigos e permitir que seja possível analisar qualquer tipo de secção transversal (aberta, fechada ou “mista”) de paredes retas.

Tal como explicado na Secção 2.6.2, o processo de determinação dos modos de deformação inicia-se com uma discretização da secção transversal em nós naturais e nós intermédios. Para obter uma base inicial para os modos de deformação consideram-se três graus de liberdade em cada nó, nomeadamente dois deslocamentos no plano da secção transversal (a rotação é condensada estaticamente) e um deslocamento de empenamento (para fora do plano da secção). Entre cada nó utilizam-se funções cúbicas de Hermite para os deslocamentos  $\bar{w}_k$  e funções lineares para  $\bar{v}_k$  e  $\bar{u}_k$ . Conforme se viu anteriormente, a utilização de funções lineares é completamente compatível com as hipóteses de inextensibilidade transversal das paredes (H1) e de Vlasov (H2). A base inicial para os modos de deformação é obtida através da imposição de um deslocamento unitário em cada grau de liberdade, gerando uma base com  $3D$  modos de deformação, onde  $D$  é o número total de nós da discretização da secção transversal. Na Figura 3.6 mostra-se a base inicial dos modos de deformação para uma secção em C com reforços discretizada com um nó intermédio na alma — naturalmente, a discretização com 7 nós conduz a uma base inicial com 7 modos de empenamento e 14 modos no plano, perfazendo um total de 21 modos de deformação.

Os modos de deformação finais são obtidos a partir da base inicial, através de uma série de operações de mudança de base, utilizando problemas de valores e vetores próprios generalizados, com base nas matrizes modais da GBT (3.99)–(3.101). Estas matrizes são calculadas assumindo que  $R/R_C \approx 1/\bar{\beta}$  de forma a permitir o desacoplamento entre os termos de membrana e de flexão. Os problemas de valores próprios serão explicados de seguida e conduzem a conjuntos de modos de deformação semelhantes aos definidos na Secção 2.6.2, nomeadamente:

- **Modos naturais de Vlasov**, gerados pelos graus de liberdade de empenamento dos nós naturais e caracterizados por  $\gamma_{xy}^M = 0$  e  $\varepsilon_{yy}^M = 0$ . Tal como ocorre na GBT clássica, estes modos são ainda subdivididos em modos (i) distorcionais e (ii) de corpo rígido (extensão, flexão e, para secções abertas, torção).
- **Modos locais de placa**, que também satisfazem  $\gamma_{xy}^M = \varepsilon_{yy}^M = 0$  mas envolvem essencialmente flexão transversal, com empenamento desprezável. Estes modos diferem ligeiramente dos definidos na Secção 2.6.2 no sentido em que podem envolver empenamento, o que está de acordo com a definição original de Schardt (1989).



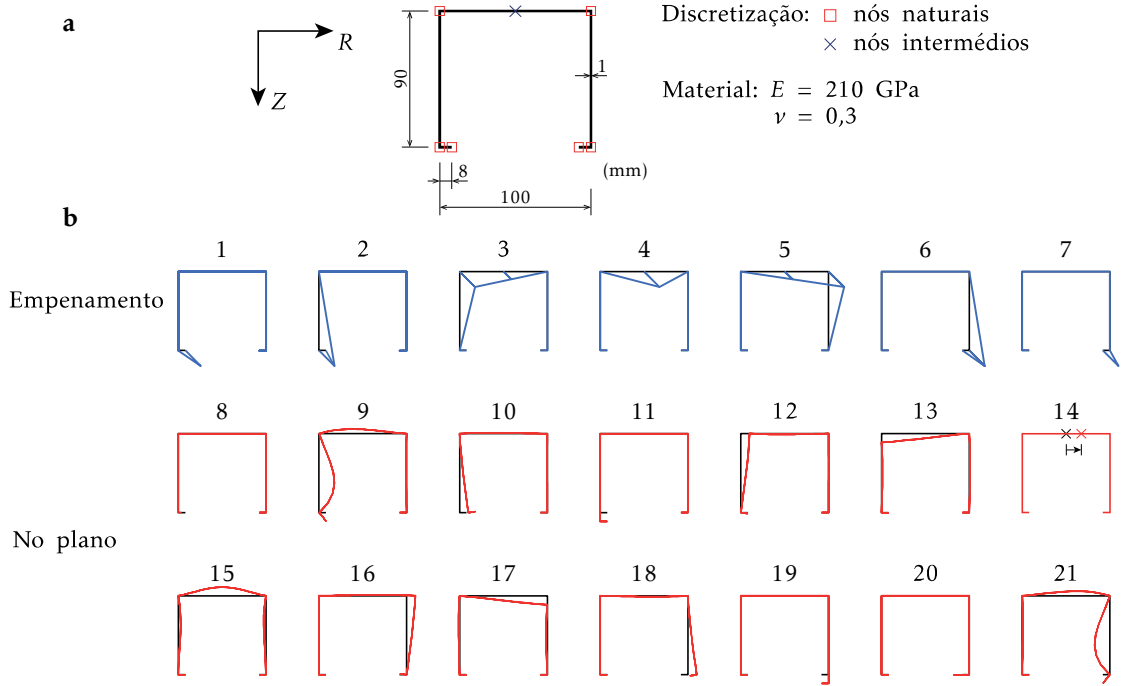


Figura 3.6: Secção em C com reforços: (a) geometria e discretização da secção e (b) modos de deformação iniciais.

- **Modos de corte**, com  $\gamma_{xy}^M \neq 0$  mas  $\varepsilon_{yy}^M = 0$ . Tal como em Gonçalves et al. (2014), estes modos são subdivididos em (i) modos de fluxo de corte, que surgem apenas para secções com partes fechadas e, neste caso, incluem também o modo de torção, (ii) funções de empenamento dos modos de Vlasov e (iii) funções de empenamento adicionais. Os modos de deformação que envolvem graus de liberdade de empenamento associados a nós intermédios são incluídos no conjunto (iii).
- **Modos de extensão transversal**, com  $\varepsilon_{yy}^M \neq 0$ . Analogamente aos ponto anterior, os modos que envolvem graus de liberdade associados a nós intermédios estão incluídos neste conjunto.

De acordo com as relações deformação-deslocamento (3.70)–(3.77), verifica-se que a hipótese de Vlasov é facilmente imposta através do cálculo do núcleo de  $\mathbf{D}_1^M$ , enquanto que a hipótese  $\varepsilon_{yy}^M = 0$  é satisfeita pelo núcleo de  $\mathbf{B}^M$ . Ambas as matrizes são semidefinidas positivas no espaço definido pelos modos de deformação iniciais. No que se segue,  $v$  representa um vetor-coluna com a dimensão apropriada ao problema de valores e vetores próprios em questão.

Em primeiro lugar, resolve-se

$$(\mathbf{B}^M - \lambda \mathbf{I})v = 0. \quad (3.227)$$

Os vetores próprios associados a  $\lambda \neq 0$  definem os modos de extensão transversal finais, que são  $\mathbf{B}^M$ -ortogonais. Em Bebiano et al. (2015) são propostos procedimentos adicionais para subdividir estes modos, mas tal não é seguido neste trabalho.

Os vetores próprios associados a  $\lambda = 0$  satisfazem a hipótese de inextensibilidade transversal das paredes e, portanto, contêm os restantes modos de deformação. Neste espaço, resolve-se

$$(\mathbf{D}_1^M - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3.228)$$

onde os vetores próprios associados a  $\lambda = 0$  satisfazem a hipótese de Vlasov e constituem uma base para os modos de Vlasov e locais de placa. A hierarquização destes modos segue o procedimento original proposto por Schardt (1989) para barras retas, i.e., resolve-se

$$(\mathbf{B}^F - \lambda(\mathbf{C}^M + \mathbf{C}^F)) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.229)$$

Desta forma, (i) os vetores próprios associados a  $\lambda = 0$  definem o subespaço dos modos de corpo rígido de Vlasov e (ii) os vetores próprios relativos a  $\lambda \neq 0$  fornecem os modos distorcionais e locais de placa<sup>2</sup>. Caso os vetores próprios sejam ordenados por ordem crescente, os primeiros modos são distorcionais e os seguintes são locais de placa.

A extração dos modos de corpo rígido difere daquela utilizada nas formulações da GBT para o caso reto, dado que esta não é válida para o caso curvo (baseia-se no facto de o problema de valores e vetores próprios associado à bifurcação de colunas uniformemente comprimidas com torção restringida conduzir a duas soluções, correspondentes às flexões em torno dos eixos centrais principais). Assim, de acordo com as formulações clássicas para barras de eixo circular (ver, por exemplo, Dabrowski, 1968; Oden, 1967), toma-se o eixo que passa pelo centróide da secção transversal como referência e a sua descrição cinemática é feita em termos de deslocamentos tangenciais (modo 1), radiais (modo 2) e para fora do plano (modo 3). Este procedimento conduz a deslocamentos que não estão relacionados com os eixos principais da secção transversal. As funções de empenamento são imediatamente definidas por

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{R}}{R_C} = \frac{1}{\beta}, \quad (3.230)$$

$$\bar{u}_2 = R_C - \bar{R}, \quad (3.231)$$

$$\bar{u}_3 = Z_C - \bar{Z}. \quad (3.232)$$

Relativamente aos modos 2 e 3, os deslocamentos do centróide no referencial global  $d_{CZk}$ ,  $d_{CRk}$  e a rotação de torção  $\alpha_k$  podem ser calculados seguindo o mesmo procedimento descrito nas Secções 3.6.1 e 3.6.2, obtendo-se resultados semelhantes, sendo a única diferença resultante do facto do modo 2 ter um deslocamento radial positivo, i.e.,  $d_{CR2} = 1$  (recordar a Eq. (3.167)).

A função de empenamento do modo 1 pode ser escrita na forma

$$\bar{u}_1 = \frac{R_O}{R_C} + y \frac{\sin \varphi}{R_C} \quad (3.233)$$

<sup>2</sup>Esta abordagem difere da utilizada pelo programa GBTUL 2.06, onde os modos locais de placa são calculados de forma a não envolverem empenamento.

e a hipótese de Vlasov (3.129) permite obter

$$\bar{v}_1 = -\frac{R_O}{R_C} \frac{\sin \varphi}{R_C} + \frac{R_O}{R_C} \frac{\sin \varphi}{R_C} = 0. \quad (3.234)$$

Este resultado conduz a  $\bar{w} = 0$ , o que implica  $d_{CR1} = d_{CZ1} = \alpha_1 = 0$ , ou seja, este modo não possui deslocamentos no plano. Os esforços generalizados, em vez de dados por (3.162), são agora da forma

$$\mathcal{X}_{xx} = N + \frac{M_Z}{R_C}, \quad \mathcal{X}_{xx}^* = 0, \quad \mathcal{X}_{xy} = 0 \quad (3.235)$$

e as matrizes modais da GBT (3.177)-(3.179), calculadas para os modos 1 e 2, são mais esparsas, ou seja,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI_r \end{bmatrix}, \quad (3.236)$$

$$\mathbf{F} = \frac{E}{R_C} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A & \frac{I_r}{R_C} \end{bmatrix}, \quad (3.237)$$

$$\mathbf{G} = \frac{E}{R_C^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A + \frac{I_r}{R_C^2} \end{bmatrix}. \quad (3.238)$$

Resumindo, os deslocamentos do centróide no referencial global  $d_{CZk}$  e  $d_{CRk}$  e a rotação de torção  $\alpha_k$  dos modos 1 a 3 são dados por

$$d_{CZ1} = 0, \quad d_{CR1} = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad (3.239)$$

$$d_{CZ2} = 0, \quad d_{CR2} = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad (3.240)$$

$$d_{CZ3} = 1, \quad d_{CR3} = 0, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{R_C}. \quad (3.241)$$

A determinação do modo de torção para secções abertas é efetuada de modo a garantir que as tensões  $\sigma_{xx}^M$  devidas apenas a  $\xi_{13}^M$  não provocam esforço axial nem momento fletor. Para tal, considerando o espaço dos modos de corpo rígido (com dimensão igual a 4), o modo de torção está associado ao único valor próprio não-nulo de

$$(\mathbf{D}_1^F - \lambda \mathbf{C}^M) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3.242)$$

uma vez que o núcleo de  $\mathbf{D}_1^F$  corresponde à restrição  $\gamma_{xy}^F = 0$  e as entradas de  $\mathbf{C}^M$  podem ser escritas como (recorde-se que se despreza a contribuição de  $\xi_{11}^M$  para  $\sigma_{xx}^M$ )

$$C_{ij}^M = \int_A E \bar{\beta} \bar{u}_i \bar{u}_j dA = \frac{1}{\phi_i''} \int_A (\sigma_{xx}^M)_i \bar{u}_j dA, \quad (3.243)$$

que, para  $j = 1, 2, 3$ , corresponde a calcular o esforço axial e os momentos fletores do modo  $i$ . Note-se que as Eqs. (3.231) e (3.232) correspondem a flexão em torno de eixos

centrais mas não necessariamente principais e que (3.230), apesar de introduzir uma extensão longitudinal constante na secção (basta substituir na expressão (3.60)), o integral não corresponde a determinar o esforço axial (tal seria obtido com  $\bar{u}_1 = 1$ ). No entanto, é suficiente que os modos 1 a 3 constituam uma base para o espaço correspondente à flexão e extensão axial, o que é automaticamente garantido, dado que constituem uma base para o núcleo de  $\mathbf{D}_1^F$  (correspondem a  $\gamma_{xy}^F = 0$ ). Note-se ainda a utilização de  $E$  em vez de  $E/(1 - \nu^2)$ , uma vez que não existem extensões transversais. Para secções fechadas, o modo de torção pertence ao espaço dos modos de corte, conforme será discutido em seguida.

Os modos de corte são obtidos de forma análoga à descrita em Gonçalves et al. (2014) para barras retas, embora as matrizes modais da GBT utilizadas sejam as para barras de eixo circular, mais complexas. O conjunto dos modos de corte é subdividido em três subconjuntos: (I) modos de fluxo de corte, que não existem para secções abertas, (II) funções de empenamento dos modos de Vlasov e (III) funções de empenamento adicionais.

Assim, os modos II são imediatamente obtidos a partir das funções de empenamento dos modos naturais de Vlasov, excluindo o modo 1 (extensão), que não produz deformação por corte.

Para os modos III, obtém-se o complemento ortogonal relativo a  $\mathbf{C}^M$  do conjunto II mais o modo 1, no espaço dos modos de empenamento. Estes modos são depois ortogonalizados e hierarquizados através de

$$(\mathbf{D}_1^M - \lambda \mathbf{C}^M) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.244)$$

O procedimento de cálculo dos modos I, que existem apenas para secções com células fechadas, é mais complexo. Em primeiro lugar, obtém-se uma base do espaço dos modos relativos a deslocamentos  $\bar{\mathbf{v}}$  independentes. Para tal, selecionam-se os modos iniciais associados a deslocamentos dos nós naturais (excetuando os deslocamentos segundo o eixo local  $z$  de nós de extremidade) e resolve-se o problema (3.227) para obter um subespaço sem extensão transversal. A esse subespaço adicionam-se os modos de corte II e III, removendo do primeiro conjunto o empenamento dos modos 2 e 3. Depois, resolve-se

$$(\mathbf{B}^F - \lambda (\mathbf{B}^F - \mathbf{D}_1^M)) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3.245)$$

onde os vetores próprios associados a  $0 < \lambda < 1$  definem o subespaço pretendido (sem torção). O modo de torção é extraído do conjunto definido por  $\lambda = 0$  (i.e., o núcleo de  $\mathbf{B}^F$ ), calculando-se o único valor próprio não-nulo de

$$(\mathbf{D}_1^F - \lambda \mathbf{D}_1^M) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.246)$$

Sempre que existam, os modos I são colocados de forma sequencial entre o modo 3 e o primeiro modo distorcional de Vlasov.

Conforme se referiu, as matrizes modais da GBT utilizadas nesta abordagem são dadas nas Eqs. (3.99)–(3.101) e têm em conta o efeito da curvatura da peça. Assim, é natural que o raio  $R_C$  tenha influência na forma dos modos de deformação finais. De forma a

ilustrar este efeito apresentam-se em seguida os modos de deformação de duas secções transversais para dois raios com diferente ordem de grandeza,  $R_C = 0,4 \text{ m}$  e  $R_C = 100 \text{ m}$ .

Na Figura 3.7 considera-se a secção transversal em  $C$  com reforços, cuja geometria e discretização foram já mostradas na Figura 3.6. Para ambos os raios, o centro  $C$  coincide com o centróide da secção. Como esperado, os modos de deformação variam com o valor de  $R_C$ . Em particular, à medida que o valor de  $R_C$  diminui, os modos locais de placa e distorcionais (e, consequentemente, os modos de corte distorcional) perdem a sua simetria/antissimetria. Para além disso, (i) o modo 1 não corresponde ao empenamento unitário, usual para este modo na GBT para barras retas (relembrar que este modo é agora dado pela Eq. (3.230)), (ii) o modo 3 exibe flexão para fora do plano e torção (ver Eq. (3.241)) e (iii) o modo de torção corresponde a uma rotação em torno de um ponto que não está no eixo de simetria (recorde-se que na Secção 3.6.2 se referiu que iria ser mostrado nesta Secção que  $d_{CZ} \neq 0$  para o modo de torção). Reciprocamente, quando o raio assume valores maiores, os modos têm tendência a se aproximarem dos correspondentes para o caso reto. Os modos de extensão transversal mantêm-se virtualmente inalterados com a variação de  $R_C$ , embora os modos 16 e 17 troquem de posição.

Considere-se agora a secção fechada com três células cuja geometria, discretização e propriedades materiais são indicadas na Figura 3.8. Uma vez mais, apresentam-se os modos de deformação para dois raios distintos,  $R_C = 0,4 \text{ m}$  e  $R_C = 100 \text{ m}$  (para este último apenas se mostram alguns modos relevantes) e considera-se que o centro  $C$  coincide com o centróide da secção. As conclusões a retirar são semelhantes às do caso anterior: (i) a simetria/antissimetria dos modos desaparece à medida que  $R_C$  diminui (em particular, os modos 5, 6, 15, 17 e 18 tornam-se muito assimétricos) e (ii) para  $R_C = 0,4 \text{ m}$  o modo 1 não corresponde a empenamento unitário e o modo 3 possui uma ligeira rotação de torção. Verifica-se mais uma vez que, para  $R_C = 0,4 \text{ m}$ , o centro de rotação do modo 4 situa-se à direita do centróide da secção.

### 3.8 Formulação de um elemento finito de compatibilidade

As relações obtidas nas Secções anteriores constituem uma base suficiente para desenvolver elementos finitos de barra. O elemento finito proposto nesta Secção baseia-se no desenvolvido por Gonçalves e Camotim (2011, 2012), com a interpolação das funções de amplitude  $\phi_k$  feita através de

$$\phi(X) = \psi(X)d, \quad (3.247)$$

onde a matriz  $\psi$  contém as funções de interpolação e o vetor  $d$  possui os valores nodais das funções de amplitude e das suas derivadas. É claro que o vetor  $d$  constitui a incógnita do problema.

Os modos de deformação que envolvem deslocamentos  $\bar{w} \neq 0$  devem estar associados a funções de interpolação de classe  $C^1$  de modo a satisfazer as condições de compatibilidade (continuidade dos deslocamentos e das derivadas), uma vez que é utilizada a hipótese de

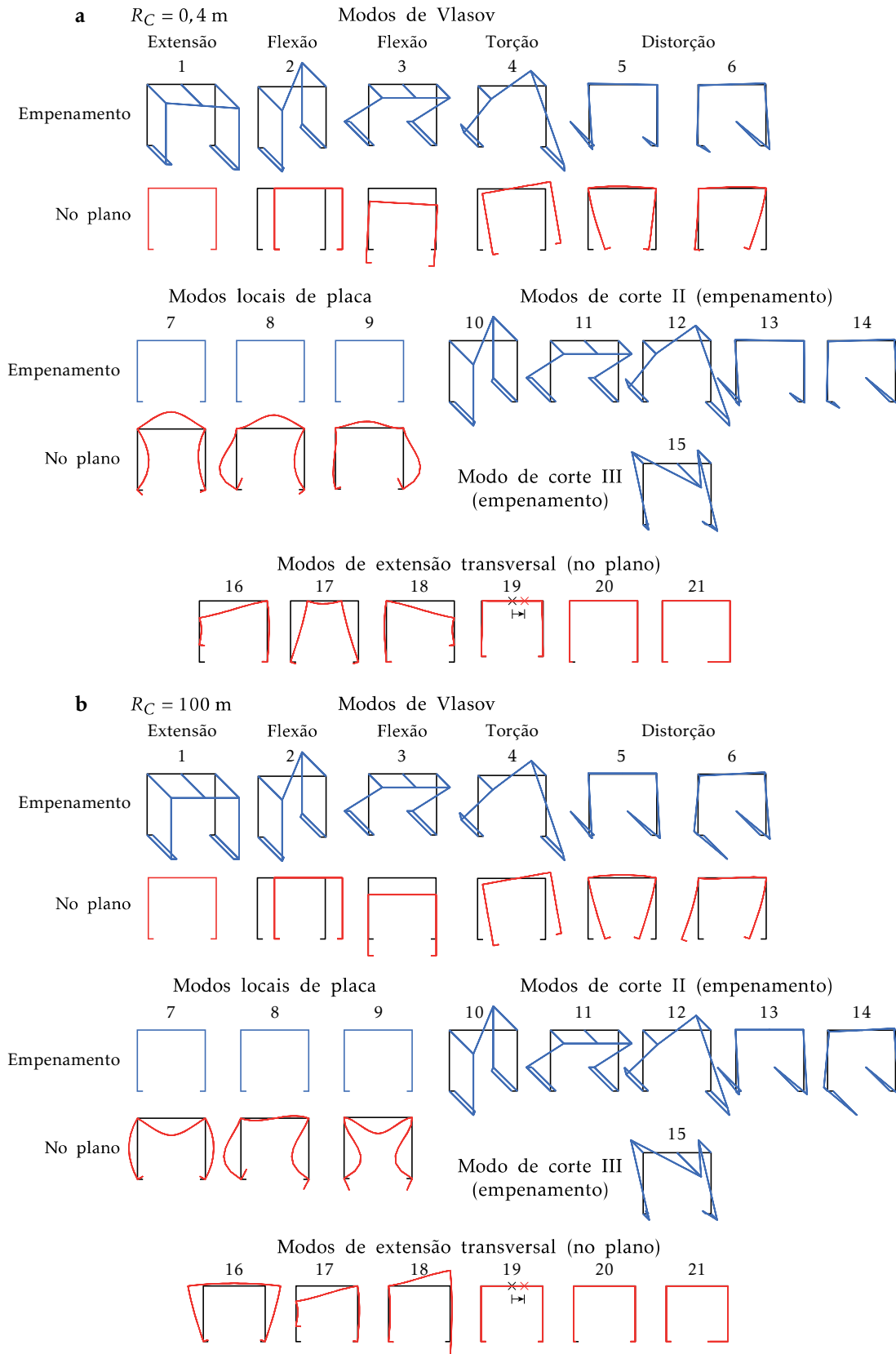


Figura 3.7: Modos de deformação de uma secção em C com reforços para dois raios distintos: (a)  $R_C = 0,4 \text{ m}$  e (b)  $R_C = 100 \text{ m}$ .

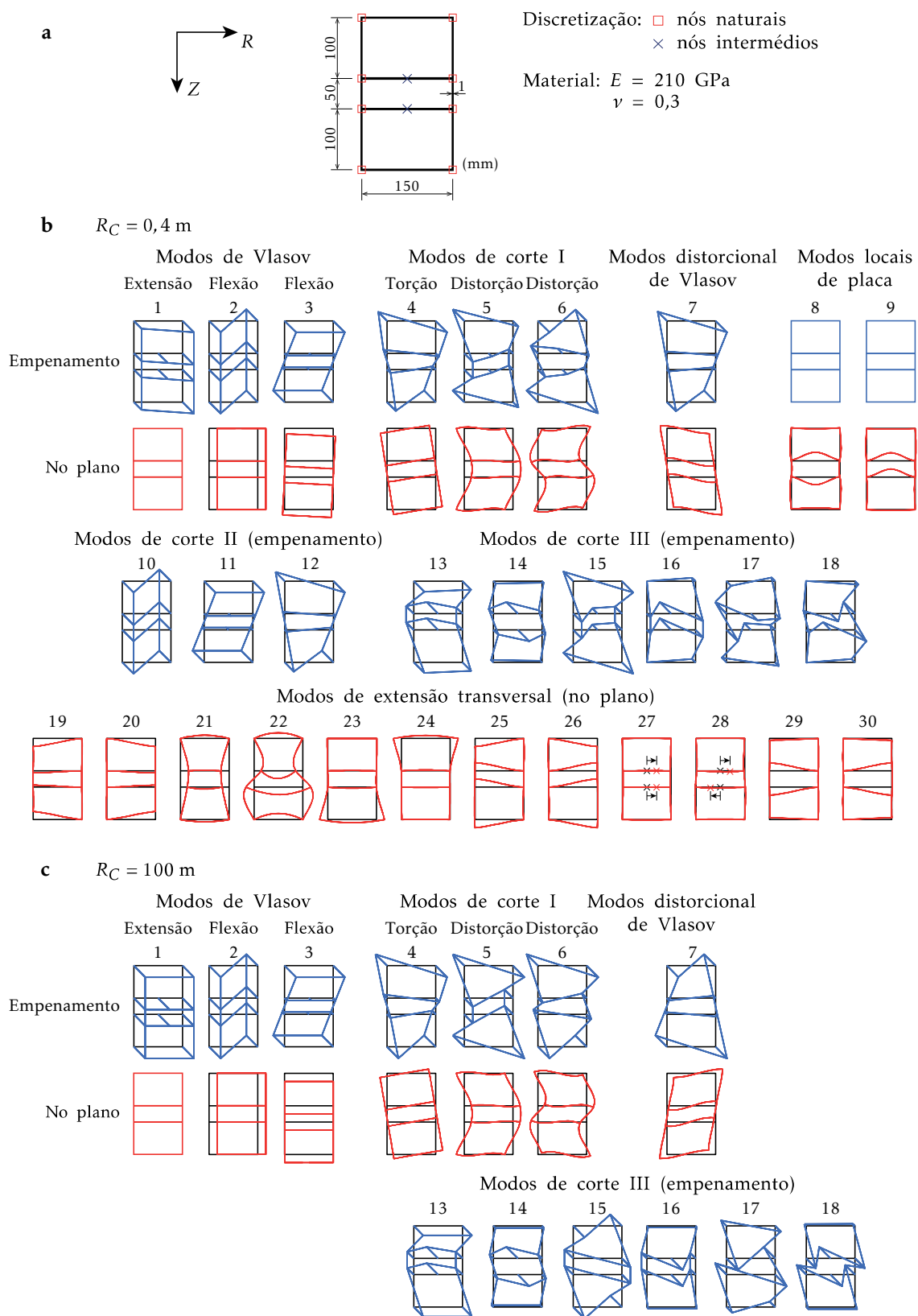


Figura 3.8: Modos de deformação de uma secção fechada com três células para dois raios distintos: (a)  $R_C = 0,4 \text{ m}$  e (b)  $R_C = 100 \text{ m}$ .

Kirchhoff. Assim, estes modos são interpolados por polinómios cúbicos de Hermite, cuja representação gráfica é mostrada na Figura 3.9, sendo dados por

$$H_1(X) = 2\left(\frac{X}{L_e}\right)^3 - 3\left(\frac{X}{L_e}\right)^2 + 1, \quad (3.248)$$

$$H_2(X) = L_e\left(\left(\frac{X}{L_e}\right)^3 - 2\left(\frac{X}{L_e}\right)^2 + \left(\frac{X}{L_e}\right)\right), \quad (3.249)$$

$$H_3(X) = -2\left(\frac{X}{L_e}\right)^3 + 3\left(\frac{X}{L_e}\right)^2, \quad (3.250)$$

$$H_4(X) = L_e\left(\left(\frac{X}{L_e}\right)^3 - \left(\frac{X}{L_e}\right)^2\right), \quad (3.251)$$

onde  $L_e$  representa o comprimento do elemento finito. Assim, para um dado modo  $k$ , a respetiva função de amplitude é dada por

$$\phi_k(X) = H_1\phi_k(0) + H_2\phi'_k(0) + H_3\phi_k(L_e) + H_4\phi'_k(L_e). \quad (3.252)$$

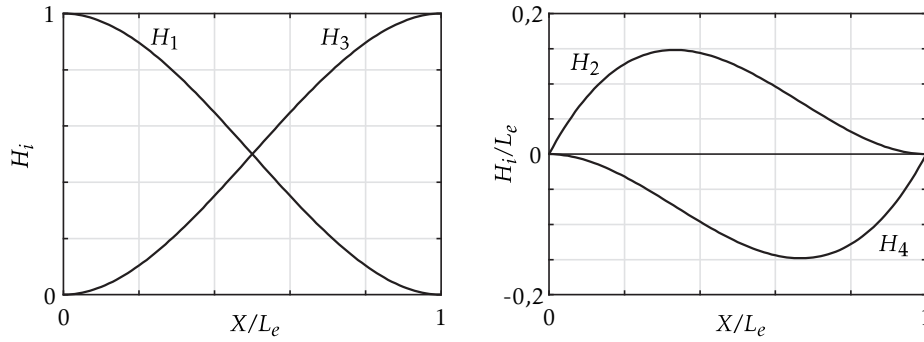


Figura 3.9: Polinómios cúbicos de Hermite.

Os modos que envolvem apenas deslocamentos de empenamento ( $\bar{u}_k \neq 0, \bar{v}_k = \bar{w}_k = 0$ ) satisfazem automaticamente a hipótese de Kirchhoff, sendo o campo de deslocamentos obtido exclusivamente a partir de  $\phi'_k$  (recordar Eq. (3.52)). Deste modo, embora seja necessário assegurar a continuidade da primeira derivada, aproxima-se diretamente  $\phi'_k$  (a função  $\phi_k$  não é utilizada para estes modos) com funções quadráticas hierárquicas de Lagrange (ver Figura 3.10 para uma representação gráfica destas funções), dadas por

$$L_1(X) = 1 - \frac{X}{L_e}, \quad (3.253)$$

$$L_2(X) = \frac{X}{L_e}, \quad (3.254)$$

$$L_3(X) = 4\left(\frac{X}{L_e} - \left(\frac{X}{L_e}\right)^2\right). \quad (3.255)$$

Assim, a aproximação de  $\phi'_k(X)$  é dada por

$$\phi'_k(X) = L_1\phi'_k(0) + L_3\phi'_k(L_e/2) + L_2\phi'_k(L_e). \quad (3.256)$$



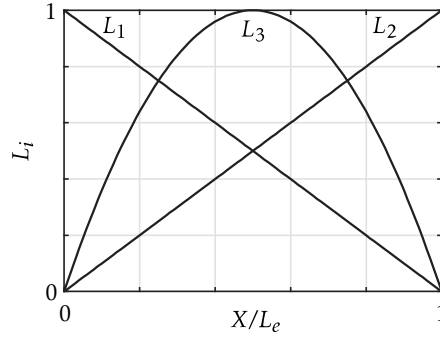


Figura 3.10: Funções de interpolação de Lagrange.

Ao se utilizar as funções de interpolação de Hermite e de Lagrange, fica definido um elemento finito de três nós, onde o nó inicial ( $X = 0$ ) está associado a  $L_1, H_1, H_2$ , o nó intermédio ( $X = L_e/2$ ) relaciona-se com  $L_3$  e o nó final ( $X = L_e$ ) com  $L_2, H_3, H_4$ . Considerando  $D$  modos de deformação, onde os primeiros  $D_w$  são modos de empenamento (o índice  $w$  deve-se à designação em língua inglesa, *warping*), obtém-se uma matriz  $\psi$  com dimensão  $D \times (4D - D_w)$  e com a seguinte forma

$$\psi = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} P(\tilde{L}_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\tilde{L}_3) & P(\tilde{L}_2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \tilde{H}_1 & \tilde{H}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{H}_3 & \tilde{H}_4 \end{array} \right], \quad (3.257)$$

onde  $\tilde{A} = \text{diag}(A, \dots, A)$  cuja dimensão é igual ao número de modos de deformação associados à função de interpolação  $A$ , e  $P(A)$  representa a primitiva da função  $A$  em ordem

a X. O vetor-coluna  $\mathbf{d}$  tem dimensão  $4D - D_w$  e é dado por

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \phi_1'(0) \\ \vdots \\ \phi_{D_w}'(0) \\ \phi_{D_w+1}(0) \\ \vdots \\ \phi_D(0) \\ \phi_{D_w+1}'(0) \\ \vdots \\ \phi_D'(0) \\ \phi_1'(L_e/2) \\ \vdots \\ \phi_{D_w}'(L_e/2) \\ \phi_1'(L_e) \\ \vdots \\ \phi_{D_w}'(L_e) \\ \phi_{D_w+1}(L_e) \\ \vdots \\ \phi_D(L_e) \\ \phi_{D_w+1}'(L_e) \\ \vdots \\ \phi_D'(L_e) \end{bmatrix}. \quad (3.258)$$

A Eq. (3.247) permite escrever

$$\delta\phi = \psi\delta\mathbf{d}, \quad (3.259)$$

$$\delta\phi' = \psi'\delta\mathbf{d}, \quad (3.260)$$

$$\delta\phi'' = \psi''\delta\mathbf{d} \quad (3.261)$$

ou, alternativamente, em formato matricial,

$$\delta\Phi = \Psi\delta\mathbf{d}, \quad (3.262)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \psi' \\ \psi'' \end{bmatrix}. \quad (3.263)$$

Recorrendo às expressões (3.66)–(3.67), (3.87), (3.262) e à simplificação  $R/R_C = 1/\bar{\beta}$ , a

expressão do trabalho virtual das forças interiores (3.91) fornece

$$\begin{aligned}
 \delta W_{int} &= -\delta \mathbf{d}^T \int_{A \times [0,L]} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon \boldsymbol{\Psi} \frac{1}{\beta} dA dX \, d \\
 &= -\delta \mathbf{d}^T \int_{A \times [0,L]} \boldsymbol{\Psi}^T (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M + \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M + \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F) \boldsymbol{\Psi} \frac{1}{\beta} dA dX \, d \\
 &= -\delta \mathbf{d}^T \int_{A \times [0,L]} \boldsymbol{\Psi}^T \left( (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M + 2 \text{sim} \left( (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F \right) + (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F \right) \boldsymbol{\Psi} \frac{1}{\beta} dA dX \, d \\
 &= -\delta \mathbf{d}^T \int_{A \times [0,L]} \boldsymbol{\Psi}^T \left( (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M + (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F \right) \boldsymbol{\Psi} \frac{1}{\beta} dA dX \, d. \tag{3.264}
 \end{aligned}$$

O termo  $2 \text{sim} \left( (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F \right)$  é linear em  $z$  e, portanto, o seu integral em  $A$  é nulo, permitindo desacoplar os termos de membrana e de flexão e simplificar a expressão a integrar. A separação dos termos de membrana e de flexão em duas parcelas independentes permite ainda utilizar matrizes constitutivas distintas para os termos de membrana,  $\mathbf{C}^M$ , e de flexão,  $\mathbf{C}^F$ . Relembre-se que, sempre que for considerada válida a hipótese  $\varepsilon_{yy}^M = 0$ , o que corresponde a não incluir modos de extensão transversal na análise, a matriz  $\mathbf{C}^M$  deve coincidir com a indicada na Eq. (3.128). Em caso contrário, deve ser utilizada a matriz dos estados planos de tensão (3.87). Para a matriz  $\mathbf{C}^F$ , utiliza-se sempre a matriz dos estados planos de tensão. A expressão anterior permite concluir que a matriz de rigidez elementar é dada por

$$\mathbf{K}_e = \int_{A \times [0,L]} \boldsymbol{\Psi}^T \left( (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M)^T \mathbf{C}^M \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^M + (\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F)^T \mathbf{C}^F \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^F \right) \boldsymbol{\Psi} \frac{1}{\beta} dA dX. \tag{3.265}$$

Por outro lado, o trabalho virtual das forças equivalentes (3.110) é dado por

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{d}^T \int_{[0,L]} \boldsymbol{\Psi}^T \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y + \mathcal{Q}_z \\ \mathcal{Q}_x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dX + \delta \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Psi}^T \delta \boldsymbol{\Phi}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_y + \boldsymbol{\tau}_z \\ \boldsymbol{\tau}_x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \bigg|_{X=0,L}, \tag{3.266}$$

de onde se pode retirar o vetor das forças exteriores elementar

$$\mathbf{Q}_e = \int_{[0,L]} \boldsymbol{\Psi}^T \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y + \mathcal{Q}_z \\ \mathcal{Q}_x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dX + \boldsymbol{\Psi}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_y + \boldsymbol{\tau}_z \\ \boldsymbol{\tau}_x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \bigg|_{X=0,L}. \tag{3.267}$$

À semelhança do que ocorre para formulações lineares da GBT para barras retas, este elemento é intrinsecamente insensível ao *locking* de corte devido à utilização da hipótese de Vlasov na separação dos modos de deformação (em modos de Vlasov, sem deformação por corte, e modos de corte), conforme foi discutido na Secção 3.7. No entanto, como será demonstrado na Secção que se segue, a curvatura natural da barra conduz à existência de outros tipos de *locking* que não estão presentes no caso das barras retas (para além do *locking* de membrana já mencionado na Secção 3.2). Para mitigar este efeito recorre-se a uma integração reduzida da matriz de rigidez com 3 pontos de Gauss segundo o

comprimento do elemento  $X$ . Segundo a direção da linha média  $y$  utilizam-se, em geral, 3 pontos — verifica-se que este número deve ser aumentado para 5 caso a relação  $h/R_C$  seja pequena, onde  $h$  é a dimensão da secção medida na direção  $R$ , em virtude da distribuição de tensões ser relativamente complexa, mesmo para os modos de flexão (e.g., recorde-se que  $\varepsilon_{xx}^M$  depende de  $\xi_{13}^M$ , que é função de  $\bar{\beta}$  e, portanto, gera uma distribuição de tensões não-linear mesmo no caso da flexão). Na direção da espessura  $z$  efetua-se integração analítica.

Na Secção 3.10 apresentam-se exemplos numéricos de aplicação e validação deste elemento finito.

### 3.9 Formulação de um elemento finito misto

Conforme foi mencionado no final da Secção anterior, elementos finitos curvos com secção deformável são suscetíveis a vários tipos de *locking*. A fonte deste fenómeno pode ser identificada na matriz auxiliar (3.69), mais exatamente no termo  $\xi_{11}$ , que não existe para barras retas e traduz um comportamento já conhecido para barras de eixo curvo: os deslocamentos radiais da secção transversal provocam extensão longitudinal,  $\varepsilon_{xx}$ . Por exemplo, a parcela de membrana (que constitui a principal causa para a ocorrência de *locking*), pode ser escrita como

$$\xi_{11}^M = \frac{\bar{w} \cos \varphi + \bar{v} \sin \varphi}{\bar{R}} = \frac{\bar{\mathbf{u}}_R}{\bar{R}}, \quad (3.268)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}}_R$  é um vetor coluna que contém as funções de deslocamento da linha média, na direção radial, relativas a cada modo de deformação. Assim, qualquer modo de deformação que envolva deslocamentos radiais provoca deformação longitudinal.

Atente-se agora às Eqs. (3.66) e (3.69) e, em particular, à componente  $\varepsilon_{xx}$ , que depende dos termos  $\xi_{11}$  e  $\xi_{13}$ . O primeiro termo é multiplicado por  $\phi$  enquanto que o segundo está associado a  $\phi''$ . A discrepância da ordem polinomial que existe entre os termos  $\xi_{11}$  e  $\xi_{13}$ , provocada pela interpolação direta das funções  $\phi_k$  (tal como efetuado na Secção 3.8) conduz à ocorrência de *locking*.

Deste modo, nesta Secção propõe-se um elemento finito misto, obtido através da interpolação direta das funções de amplitude modal  $\phi_k$  e das deformações associadas à componente de deformação  $\xi_{11}$ .

Em primeiro lugar, as componentes de deformação compatíveis são divididas da seguinte forma

$$\varepsilon_c = \bar{\mathbf{\Xi}}_\varepsilon \mathbf{\Phi} = (\bar{\mathbf{\Xi}}_\varepsilon + \tilde{\mathbf{\Xi}}_\varepsilon) \mathbf{\Phi}, \quad (3.269)$$

onde

$$\bar{\mathbf{\Xi}}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \xi_{13}^T \\ \xi_{21}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \xi_{32}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{\Xi}}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \xi_{11}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.270)$$

ou seja,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon$  contém as componentes de membrana e de flexão  $\xi_{ij}$  que surgem para barras retas (embora se utilizem, obviamente, as expressões (3.71)–(3.73) e (3.75)–(3.77)) e  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon$  é constituída apenas por  $\xi_{11}$ , que existe apenas para o caso curvo.

A aproximação da deformação é dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\varepsilon}^{AS}, \quad (3.271)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{AS} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{AS} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.272)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}^{AS}$  correspondem às extensões longitudinais assumidas (o índice superior  $AS$  provém da designação em língua inglesa, *assumed strain*), cuja distribuição na secção transversal é obtida diretamente de  $\xi_{11}$  para os modos de deformação relevantes e é interpolada ao longo do eixo da barra.

Os modos de deformação de empenamento não necessitam de uma componente assumida, uma vez que os seus deslocamentos no plano são nulos ( $\bar{v} = \bar{w} = 0$ ), o que conduz a  $\xi_{11} = 0$ . Por outro lado, existem modos que, embora os seus deslocamentos no plano sejam distintos, apresentam uma dependência linear entre si relativamente a  $\xi_{11}$  (e.g., o subespaço gerado pelos modos de flexão e torção possui uma dependência linear). Neste caso, apenas um dos modos deve ser escolhido para deformação assumida, de modo a evitar a singularidade da matriz de rigidez.

A dependência linear entre os modos de deformação (relativamente a  $\xi_{11}$ ) pode ser verificada através do cálculo da matriz modal  $\mathbf{G}$  (3.105) para o conjunto dos modos considerados na análise. O número de valores próprios não-nulos da matriz  $\mathbf{G}$  representa o número de deformações assumidas a considerar na análise.

As deformações assumidas são escritas como

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{AS} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon^{AS}(y, z) \boldsymbol{\phi}_\varepsilon(X), \quad (3.273)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon^{AS} = \begin{bmatrix} (\xi_{11}^{AS})^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.274)$$

onde  $\xi_{11}^{AS}$  contém as componentes independentes de  $\xi_{11}$  e o vetor  $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$  possui as respetivas funções de amplitude.

A formulação do elemento finito misto baseia-se no formato deformação-deslocamento do funcional de Hellinger-Reissner, dado por

$$\Pi_{HR} = \int_{A \times [0, L]} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_c) - \mathbf{U}^T \mathbf{q} \right) \frac{R}{R_C} dA dX - \int_A \mathbf{U}^T \mathbf{t} \frac{R}{R_C} dA \Big|_{X=0, L}. \quad (3.275)$$

Os parâmetros a interpolar correspondem às funções de amplitude modal,  $\boldsymbol{\phi}$ , e às funções de amplitude das deformações assumidas,  $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ . A interpolação das funções  $\boldsymbol{\phi}$  é feita de acordo com a abordagem seguida para o elemento finito de compatibilidade (3.8), ou seja,

$$\boldsymbol{\Phi}(X) = \boldsymbol{\Psi}_\phi d_\phi, \quad (3.276)$$

onde a matriz  $\Psi_\phi$  e o vetor  $d_\phi$  são idênticos aos apresentados nas Eqs. (3.263), (3.257) e (3.258).

Relativamente às deformações assumidas, utilizam-se polinómios de 1.º grau para interpolar as respectivas funções de amplitude  $\phi_\varepsilon$  (estes coincidem com os polinómios de Lagrange  $L_1$  e  $L_2$  indicados nas Eqs. (3.253) e (3.254)). De facto, verificou-se que a utilização de polinómios de grau superior não conduz a melhores resultados e note-se que funções lineares permitem colmatar a discrepância entre os graus polinomiais anteriormente referida, uma vez que  $\phi_\varepsilon$  e  $\phi''$  nas Eqs. (3.271) e (3.273) são agora interpoladas por funções com o mesmo grau. Assim, sendo  $D_\varepsilon$  o número de deformações assumidas, a interpolação pode ser escrita como

$$\phi_\varepsilon = \Psi_\varepsilon(X)d_\varepsilon, \quad (3.277)$$

$$\Psi_\varepsilon = \left[ \widetilde{L}_1 \mid \widetilde{L}_2 \right], \quad (3.278)$$

$$d_\varepsilon = \left[ \frac{\phi_\varepsilon(0)}{\phi_\varepsilon(L_\varepsilon)} \right], \quad (3.279)$$

onde  $\widetilde{L}_i = \text{diag}(L_i, \dots, L_i)$ , cuja dimensão é igual a  $D_\varepsilon$ .

Utilizando as Eqs. (3.269)–(3.274), as interpolações referidas em (3.276)–(3.279) e invocando a estacionariedade do funcional (3.275) relativamente às variáveis independentes, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HR} &= 0 \\ \Rightarrow \int_{A \times [0,L]} (\delta\varepsilon^T C \varepsilon_c - \delta\varepsilon^T C \varepsilon + \delta\varepsilon_c^T C \varepsilon - \delta U^T q) dA dX - \int_A \delta U^T t dA \Big|_{X=0,L} &= 0 \\ \Leftrightarrow \delta d_\phi^T (K_{\phi\phi} d_\phi + K_{\phi\varepsilon} d_\varepsilon - Q_e) + \delta d_\varepsilon^T (K_{\varepsilon\varepsilon} d_\varepsilon + K_{\phi\varepsilon}^T d_\phi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.280)$$

onde

$$K_{\phi\phi} = \int_{[0,L]} \Psi_\phi^T k_{\phi\phi} \Psi_\phi dX, \quad (3.281)$$

$$k_{\phi\phi} = \int_A \frac{R}{R_C} \left( \widetilde{\Xi}_\varepsilon^T C \widetilde{\Xi}_\varepsilon + \widetilde{\Xi}_\varepsilon^T C \widetilde{\Xi}_\varepsilon \right) dA, \quad (3.282)$$

$$K_{\phi\varepsilon} = \int_{[0,L]} \Psi_\phi^T k_{\phi\varepsilon} \Psi_\varepsilon dX, \quad (3.283)$$

$$k_{\phi\varepsilon} = \int_A \frac{R}{R_C} \widetilde{\Xi}_\varepsilon^T C \widetilde{\Xi}_\varepsilon^{AS} dA, \quad (3.284)$$

$$K_{\varepsilon\varepsilon} = - \int_{[0,L]} \Psi_\varepsilon^T k_{\varepsilon\varepsilon} \Psi_\varepsilon dX, \quad (3.285)$$

$$k_{\varepsilon\varepsilon} = \int_A \left( \widetilde{\Xi}_\varepsilon^{AS} \right)^T C \widetilde{\Xi}_\varepsilon^{AS} dA, \quad (3.286)$$

$$Q_e = \int_{[0,L]} \Psi_\phi^T \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_y + \mathcal{Q}_z \\ \mathcal{Q}_x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dX + \Psi_\phi^T \begin{bmatrix} \mathcal{T}_y + \mathcal{T}_z \\ \mathcal{T}_x \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Big|_{X=0,L}. \quad (3.287)$$

Fazendo  $\delta \mathbf{d}_\varepsilon = \mathbf{0}$  e  $\delta \mathbf{d}_\phi = \mathbf{0}$ , a Eq. (3.280) fornece, respetivamente,

$$\mathbf{K}_{\phi\phi} \mathbf{d}_\phi + \mathbf{K}_{\phi\varepsilon} \mathbf{d}_\varepsilon = \mathbf{Q}_e, \quad (3.288)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\varepsilon}^T \mathbf{d}_\phi + \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} \mathbf{d}_\varepsilon = \mathbf{0} \quad (3.289)$$

ou, em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\phi\phi} & \mathbf{K}_{\phi\varepsilon} \\ \mathbf{K}_{\phi\varepsilon}^T & \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_\phi \\ \mathbf{d}_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.290)$$

Os graus de liberdade  $\mathbf{d}_\varepsilon$  podem ser condensados estaticamente de forma a obter uma matriz de rigidez dependente apenas dos graus de liberdade associados aos deslocamentos,  $\mathbf{d}_\phi$ . Assim, tendo em conta que  $\mathbf{d}_\varepsilon = -\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \mathbf{K}_{\phi\varepsilon}^T \mathbf{d}_\phi$ , obtém-se

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{\phi\phi} - \mathbf{K}_{\phi\varepsilon} \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \mathbf{K}_{\phi\varepsilon}^T)}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{d}_\phi = \mathbf{Q}_e. \quad (3.291)$$

Seguindo um processo análogo à Secção 3.8, os termos de membrana e de flexão podem ser desacoplados através de  $R/R_C = 1/\bar{\beta}$  e a matriz de rigidez pode ser decomposta numa parcela de membrana e numa parcela de flexão.

Na Secção 3.10 são apresentados exemplos numéricos de aplicação e validação deste elemento finito.

### 3.10 Exemplos numéricos

Nesta Secção apresentam-se exemplos de aplicação e validação dos elementos finitos propostos nas Secções 3.8 e 3.9. Todos os exemplos apresentados consistem em arcos de  $90^\circ$  em consola, sujeitos a forças concentradas aplicadas na extremidade livre. Os exemplos diferem entre si na geometria da secção transversal, no raio de curvatura do eixo da peça e na orientação/magnitude da carga aplicada. Embora pudessem ter sido consideradas outras geometrias, carregamentos ou condições de apoio (um exemplo correspondente a uma barra simplesmente apoiada com  $30^\circ$  pode ser encontrado em Peres et al. (2018b)), como se verá, os exemplos considerados permitem observar claramente todos os fenómenos peculiares exibidos por barras curvas. Em particular, observa-se que a ação de carga concentradas pode provocar deformação da secção transversal ao longo de todo o comprimento da barra (para além de acoplamento extensão/flexão no plano e torção/flexão para fora do plano), um fenómeno que não ocorre em barras retas, para as quais a deformação local e distorcional da secção diminui rapidamente com a distância ao ponto de aplicação da carga — ver, e.g., Garcea et al. (2016). Em todos os casos, o material possui módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , e o centro da secção  $C$  coincide com o centróide.

A implementação de ambos os elementos finitos foi feita com recurso ao programa MATLAB (2018) e considerou-se sempre uma discretização uniforme (elementos de igual

comprimento) ao longo do eixo da barra. Conforme se referiu anteriormente, recorre-se a integração reduzida para mitigar o efeito de *locking* existente sempre que se utiliza o elemento de compatibilidade. Verifica-se que três pontos de integração na direção  $X$  são adequados para obter resultados precisos. No caso do elemento misto, verificou-se que o aumento do número de pontos de integração na direção  $X$  para além de 5 tem efeitos virtualmente nulos nos resultados, o que permite concluir que, como esperado, a aproximação mista torna-se insensível ao número de pontos de integração. Para a integração segundo  $y$  utilizam-se 3 pontos de Gauss, embora se deva recordar que este número deve ser aumentado sempre que a relação  $h/R_C$ , onde  $h$  é a altura da secção transversal medida na direção do eixo  $R$ , for pequena (não acontece em nenhum exemplo). A integração na direção  $z$  é feita analiticamente, em virtude da adoção da hipótese  $R/R_C \approx 1/\bar{\beta}$  (a qual permite também desacoplar os termos de membrana e flexão). Deve-se relembrar que, sempre que não são utilizados modos de extensão transversal, o que consiste em considerar  $\varepsilon_{yy}^M = 0$ , utiliza-se a matriz constitutiva (3.128) para os termos de membrana.

A validação dos resultados é feita através da comparação com resultados obtidos com modelos refinados de elementos finitos de casca de quatro nós. Nos primeiros quatro exemplos (Secções 3.10.1 e 3.10.2), que foram publicados em Peres et al. (2016a), utilizou-se o programa ANSYS (2016) e o elemento SHELL181, enquanto que nos restantes exemplos (Peres et al., 2018a, 2020a) recorreu-se ao programa ADINA (Bathe, 2019) e ao elemento MITC (Bathe e Dvorkin, 1985).

De seguida apresentam-se os vários exemplos numéricos considerados. Os exemplos apresentados nas Secções 3.10.1-3.10.5 envolvem o elemento finito de compatibilidade, enquanto que o elemento misto é utilizado nos exemplos da Secção 3.10.6.

Na Secção 3.10.1 analisa-se um arco com secção transversal em I para três situações distintas. Em primeiro lugar orienta-se a secção de forma a que a alma esteja contida no plano de curvatura e aplica-se uma força vertical concentrada no centróide, causando deformação por flexão-torção. De seguida considera-se a secção rodada  $45^\circ$  e sujeita a uma força com direção radial aplicada no ponto de intersecção banzo-alma — este exemplo permite demonstrar a versatilidade da formulação ao se utilizarem secções cujos eixos principais não são paralelos aos eixos do referencial global. Finalmente, considera-se a secção orientada como no primeiro exemplo, mas com a espessura reduzida e aplicando duas forças autoequilibradas nas extremidades dos banzos, de forma a causar deformação local. Deve-se ainda referir que se utiliza a abordagem A1 para o cálculo dos modos de deformação.

Na Secção 3.10.2 é estudado um arco com secção tubular quadrada sujeito a uma carga excêntrica relativamente ao centróide da secção, provocando deformação por flexão-torção e distorção. À semelhança dos exemplos anteriores, os modos de deformação são calculados utilizando a abordagem A1.

Nos três exemplos seguintes utiliza-se a abordagem A2 para calcular os modos de deformação, uma vez que as secções transversais utilizadas são muito mais complexas, tornando pouco prático a utilização da abordagem A1. Na Secção 3.10.3 analisa-se uma



secção em C com reforços sujeita a duas forças autoequilibradas aplicadas nos pontos de intersecção banzo-reforço, provocando distorção ao longo de toda a barra. A Secção 3.10.4 envolve uma secção fechada com três células sujeita a uma força vertical (segundo  $Z$ ) aplicada num dos cantos da secção. Finalmente, na Secção 3.10.5 estuda-se uma secção em caixão bitrapezoidal sujeita a uma força vertical, também aplicada num dos cantos da secção.

Por último, na Secção 3.10.6 apresentam-se três exemplos de aplicação e validação do elemento finito misto desenvolvido na Secção 3.9. Começa-se por analisar uma barra com secção em I sujeita a uma força aplicada no ponto superior de intersecção banzo-alma — este exemplo permite verificar o desempenho do elemento misto face à presença de *locking* de membrana. O segundo exemplo envolve uma secção em C com reforços sujeita a duas forças aplicadas nos pontos de intersecção banzo-alma, causando deformação por flexão-torção — identifica-se a existência de diferentes tipos de *locking* para além do associado à flexão-torção. Finalmente, estuda-se uma secção em L com reforços sujeita a uma força aplicada no ponto de intersecção das abas, provocando distorção significativa da secção.

### 3.10.1 Aplicação da abordagem A1 para estudar secções em I

Em primeiro lugar estudam-se arcos com secção em I, utilizando os modos de deformação obtidos através da abordagem A1 (recordar Secção 3.7.1). De acordo com esta abordagem, utilizando o programa GBTUL e uma discretização da secção com um único nó intermédio na alma, obtêm-se os 21 modos de deformação indicados na Figura 3.11, sendo que os deslocamentos no plano da secção dos modos naturais de Vlasov (para esta secção correspondem apenas aos quatro modos de “corpo rígido”) dependem da orientação da secção transversal, conforme se discute de seguida, e por isso não são representados na figura — apenas se mostram as funções de empenamento associadas.

As configurações dos modos de corpo rígido são determinadas de acordo com o processo descrito na Secção 3.7.1, sendo dependentes das curvaturas  $K_z$  de cada parede. A Figura 3.12 mostra estas configurações para várias orientações da secção. Verifica-se que a forma dos modos varia com a orientação da secção e podem ser tecidos os seguintes comentários:

- (i) O modo 1 (extensão) envolve um deslocamento radial igual a  $1/R_C$ , o que está de acordo com a Eq. (3.161).
- (ii) Para os casos  $a$  e  $b$ , as formas dos modos 2 e 3 (flexão) correspondem às calculadas nas Secções 3.6.1 e 3.6.2 — em particular, conforme foi já visto nessas Secções, surge rotação de torção igual a  $1/R_C$  associada à flexão em torno de  $R$  (modo 2 do caso  $a$  e modo 3 do caso  $b$ ). No caso  $c$ , ambos os modos de flexão possuem rotação de torção, o que se deve ao facto de os eixos principais da secção não serem paralelos aos do referencial global, ao contrário do que foi adotado na dedução das expressões (3.167) e (3.203).

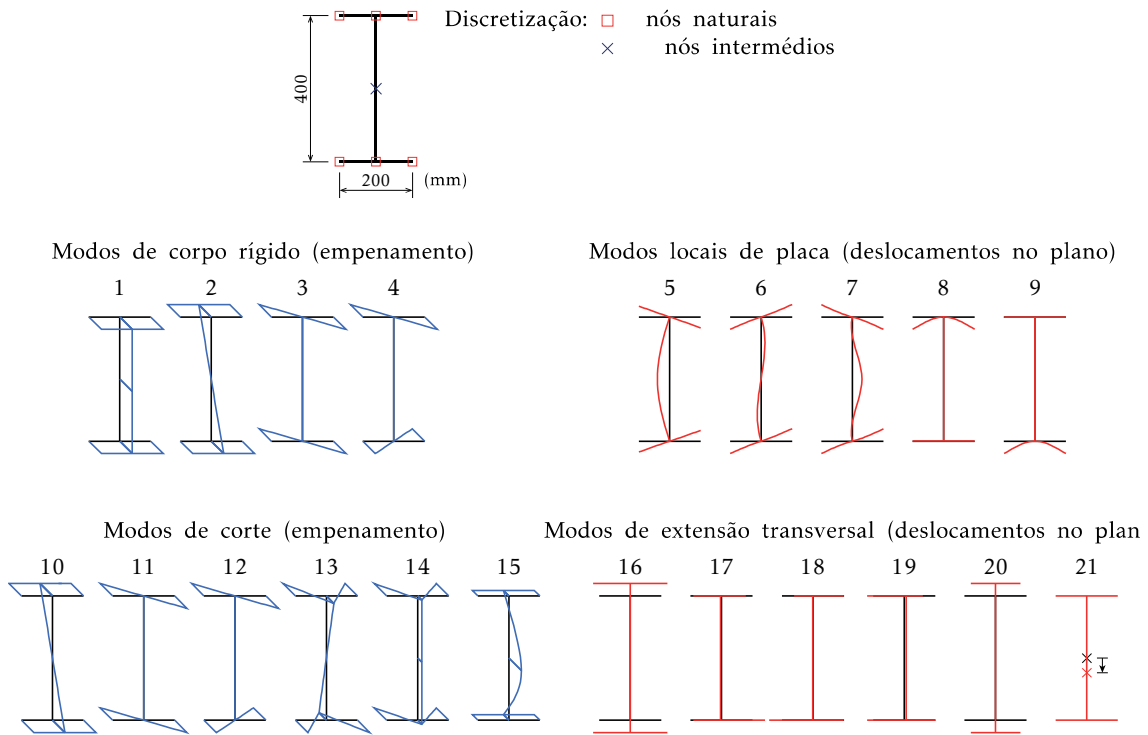


Figura 3.11: Modos de deformação para uma secção em I de acordo com a abordagem A1 (no caso dos modos 1 a 4 apenas se representam as funções de empenamento).

- (iii) Relativamente ao modo 4 (torção), verifica-se que podem ocorrer deslocamentos do centro  $C$ , mostrando que a hipótese  $d_{CZ} = d_{CR} = 0$  adotada na Secção 3.6.2 não é válida. No entanto, tais deslocamentos são relativamente pequenos.

Seguidamente analisa-se, com o elemento finito de compatibilidade, um arco com  $R_C = 5$  m. Nas análises efetuadas nesta Secção, a integração foi feita utilizando 3 pontos de integração segundo  $X$  e  $y$  (recorde-se que a integração segundo  $z$  é analítica).

Na Figura 3.13 representam-se os resultados obtidos para o caso da alma contida no plano de curvatura (corresponde ao caso  $b$  da Figura 3.12), quando atua uma força no centro  $C$  da secção de extremidade, segundo  $Z$ . Na figura, a tabela fornece o deslocamento vertical (segundo  $Z$ ) do ponto de aplicação da carga, obtido com (i) um modelo com 2532 elementos finitos (EF) de casca, (ii) 20 elementos finitos da GBT e vários conjuntos de modos de deformação, e (iii) a solução de Vlasov (o cálculo foi feito para 30 elementos idênticos aos descritos em El-Amin e Kasem (1978), utilizando funções de Hermite para aproximar o campo de deslocamentos — a formulação deste elemento pode ser consultada no Anexo A).

Em primeiro lugar, note-se que a solução de Vlasov está 15% abaixo do resultado obtido com elementos de casca. Esta diferença é facilmente explicada através de uma análise dos restantes resultados na tabela, uma vez que os modos locais de placa (LP) e de corte (C) exercem uma influência significativa no resultado. De facto, utilizando estes modos, a solução da GBT difere apenas 3% da do modelo de casca e, caso se utilizem

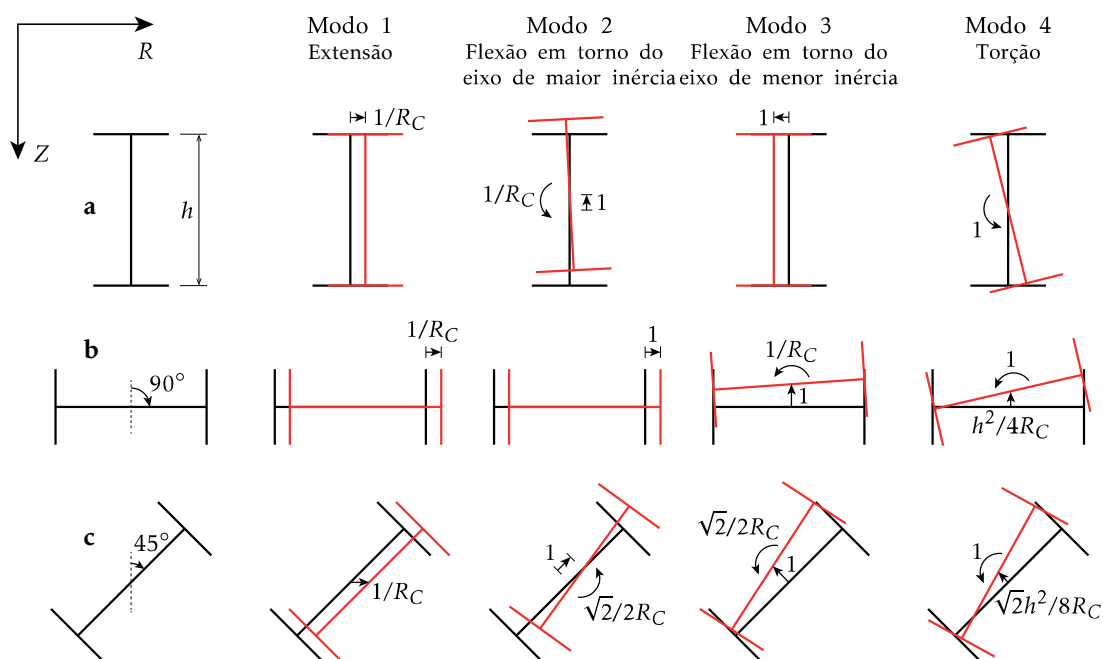


Figura 3.12: Componentes no plano dos modos de deformação de corpo rígido para barras curvas com secção em I orientada de três formas distintas.

30 elementos finitos da GBT, esta diferença baixa para 2,5%. Neste exemplo não são apresentados resultados com modos de extensão transversal, uma vez que se verificou que estes têm um papel virtualmente nulo. O gráfico de convergência por baixo da tabela corrobora estes resultados: usando 10 EF os valores do deslocamento já são bastante próximos dos obtidos com o modelo de elementos de casca, e não se justifica considerar mais do que 20 elementos.

Os resultados tabelados mostram ainda que existe uma ligeira diferença entre as soluções de Vlasov e da GBT-CR, que pode ser explicada lembrando que na Secção 3.6.2 foi demonstrado que as equações de Vlasov são uma simplificação das obtidas com a GBT.

As configurações deformadas representadas na Figura 3.13 permitem verificar que existe uma excelente concordância entre os resultados obtidos com os modelos de casca e da GBT (com todos os modos de deformação). No entanto, verifica-se que, embora os modos LP e C tenham influência nos valores do deslocamento do ponto de aplicação da carga, a sua presença não é visível nestas configurações. Os gráficos de amplitude modal apresentados na parte de baixo da figura permitem tecer alguns comentários a respeito desta observação. O gráfico da esquerda permite concluir que a flexão e a torção são os modos predominantes, sendo as respetivas amplitudes superiores às dos modos LP e C por duas ordens de magnitude. No gráfico da direita apresentam-se exclusivamente as funções de amplitude dos modos LP e C (a numeração corresponde à indicada na Figura 3.11). Observa-se que, curiosamente, as funções apresentam valores mais elevados perto da secção de encastramento e que os modos LP 5 e 6 (rotação do banzo e flexão transversal da alma) são os mais relevantes, embora os modos LP 7 (flexão transversal

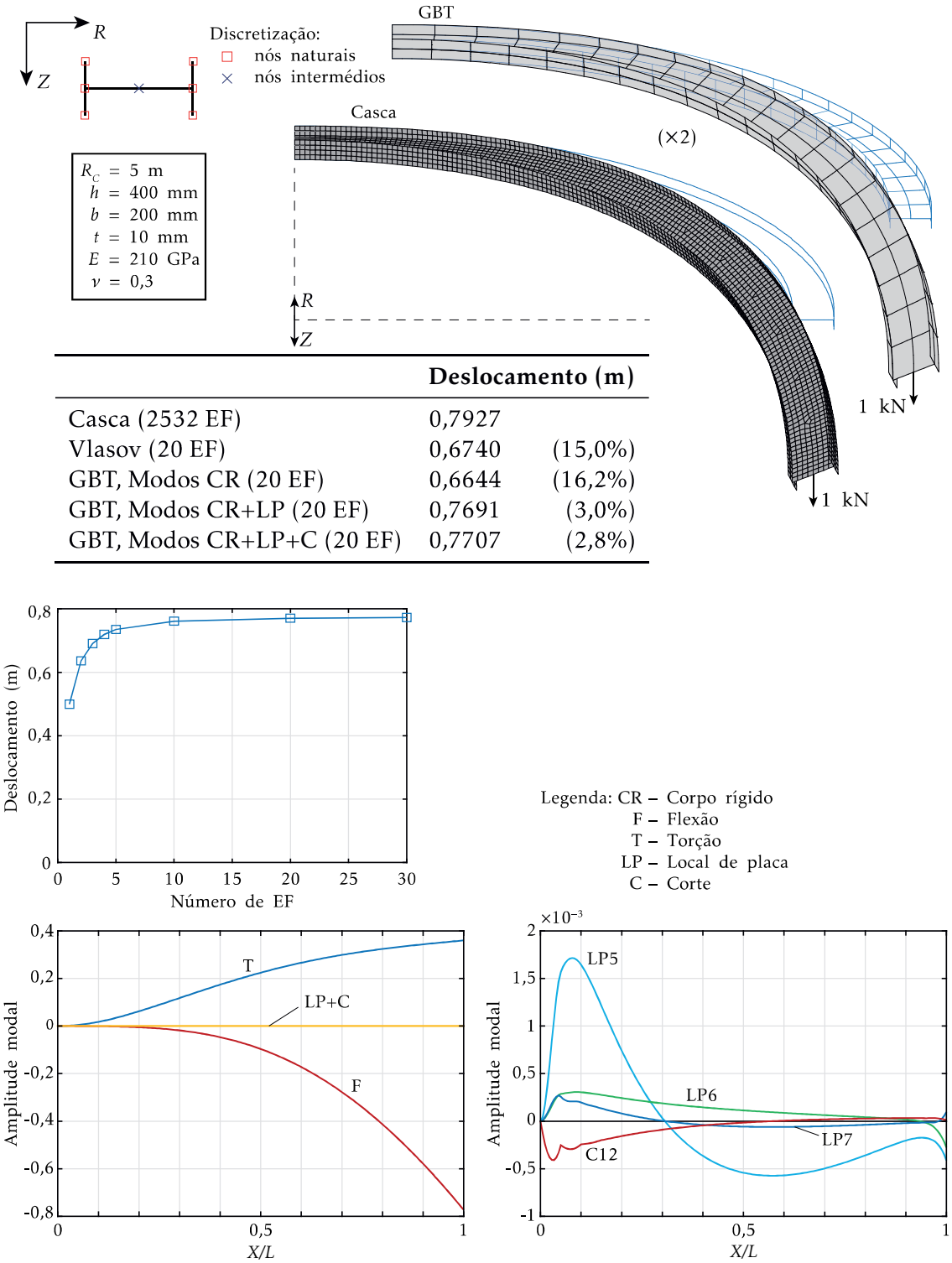


Figura 3.13: Flexão para fora do plano de um arco com secção em I, com a alma contida no plano de curvatura.

simétrica) e o modo de bicorte 12 também não tenham um papel desprezável.

Considere-se agora que a secção transversal forma  $45^\circ$  com os eixos  $R$  e  $Z$ , tal como no caso *c* da Figura 3.12. Aplica-se uma carga na direção radial, no nó inferior de interseção banzo-alma da secção de extremidade, conforme mostrado na Figura 3.14. O objetivo deste exemplo é demonstrar que a formulação proposta é facilmente adaptável a casos mais complexos, com secções rodadas em relação aos eixos globais (as paredes da secção formam faixas cónicas).

A tabela da Figura 3.14 permite comparar o deslocamento radial do ponto de aplicação da carga, obtido com um modelo refinado de elementos de casca (3151 EF) e com 20 elementos da GBT e vários conjuntos de modos de deformação. Conclui-se que os modos de corte não têm um papel significativo nos resultados (os modos de extensão transversal também podem ser desprezados) e que os modos locais de placa são fundamentais na obtenção de resultados precisos — com estes modos a diferença para a solução obtida com o modelo de elementos de casca é de apenas 2,0%. Mais uma vez, as configurações deformadas apresentadas evidenciam a excelente concordância entre as soluções dos modelos de casca e da GBT.

Os dois gráficos de amplitude modal apresentados na parte de baixo da Figura 3.14 também permitem retirar informações relevantes. Os quatro modos de corpo rígido (CR) são predominantes, tendo amplitudes várias ordens de grandeza acima das dos modos LP. No entanto, tal como já foi referido e à semelhança do exemplo anterior, os modos LP não são visíveis na configuração deformada mas são essenciais para obter um valor preciso do deslocamento do ponto de aplicação da carga — em particular, os gráficos de amplitude modal permitem concluir que os modos LP 5, 6, 7 e 9 são os que têm maior participação.

Por fim, considere-se que a secção está de novo orientada de modo a que a alma esteja contida no plano de curvatura (caso *b* da Figura 3.12), mas que agora atuam na barra duas forças autoequilibradas, aplicadas nas extremidades dos banzos da secção de extremidade livre, provocando deformação local. Os resultados são apresentados na Figura 3.15.

Na tabela da Figura 3.15 apresentam-se os valores do deslocamento radial dos pontos de aplicação das cargas, obtidos com o modelo de elementos de casca (2532 EF) e com os elementos finitos da GBT, considerando todos os modos de deformação e 20, 30 e 50 elementos de igual comprimento. A solução da GBT com 20 elementos já se encontra bastante próxima da obtida com o modelo de elementos de casca (1,2%) e aumentando o número de elementos para 50 obtém-se uma diferença relativa virtualmente nula (0,2%). A excelente concordância entre os resultados é também evidenciada pelas configurações deformadas ilustradas na figura, principalmente perto da extremidade livre (a configuração deformada obtida com a GBT corresponde a 30 elementos finitos).

Na parte inferior da Figura 3.15 apresentam-se os gráficos de amplitude modal, sendo o gráfico da direita uma ampliação do intervalo  $[-1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-4}]$ , para permitir visualizar a participação dos modos locais de placa. Ao longo do comprimento da peça, as participações mais significativas correspondem à flexão em torno da menor inércia (modo 3) e torção (modo 4). Na vizinhança da extremidade livre, os modos locais de placa

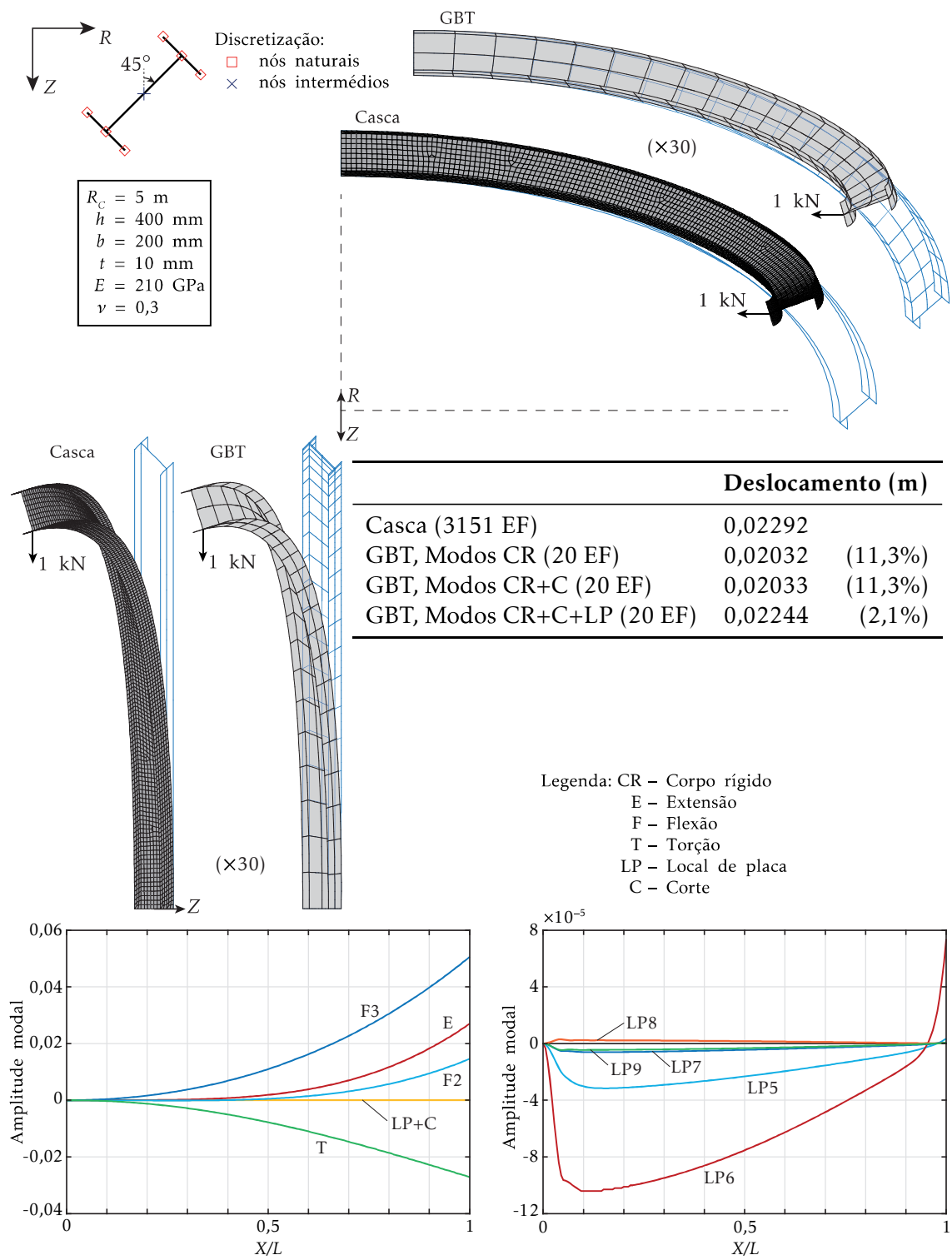
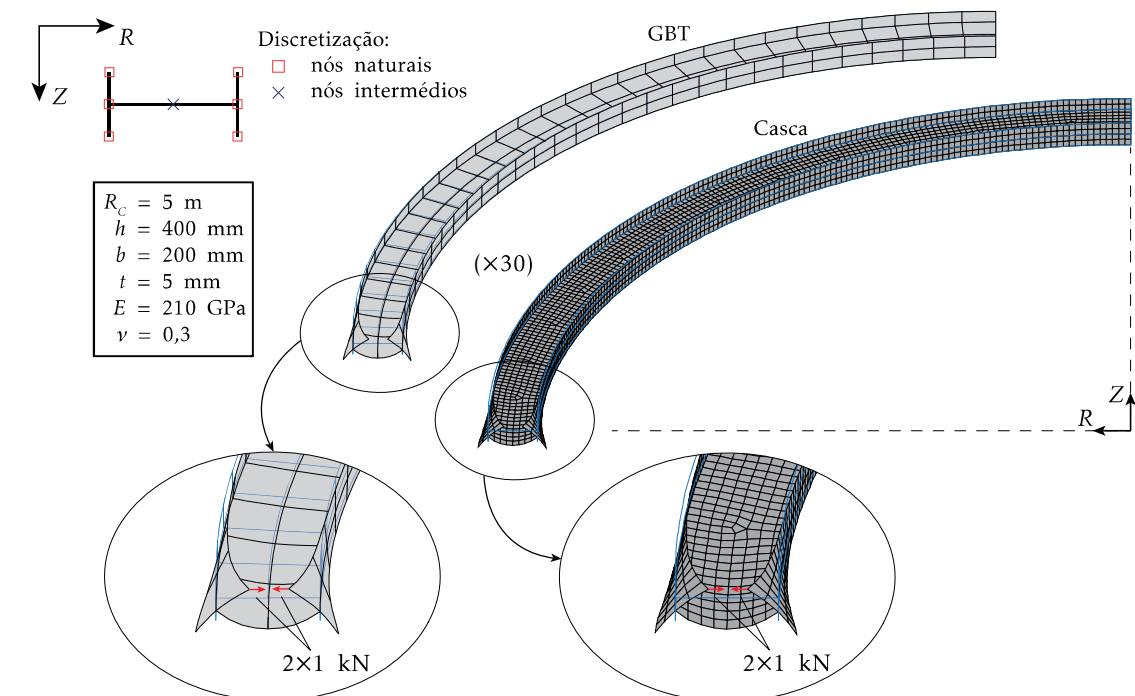


Figura 3.14: Arco com secção em I rodada 45°.



|                             | Deslocamento (m) |        |             |        |
|-----------------------------|------------------|--------|-------------|--------|
|                             | Nó interior      |        | Nó exterior |        |
| Casca (2532 EF)             | 0,004037         |        | 0,004288    |        |
| GBT, Todos os modos (20 EF) | 0,003987         | (1,2%) | 0,004237    | (1,2%) |
| GBT, Todos os modos (30 EF) | 0,004013         | (0,6%) | 0,004261    | (0,6%) |
| GBT, Todos os modos (50 EF) | 0,004031         | (0,2%) | 0,004278    | (0,2%) |

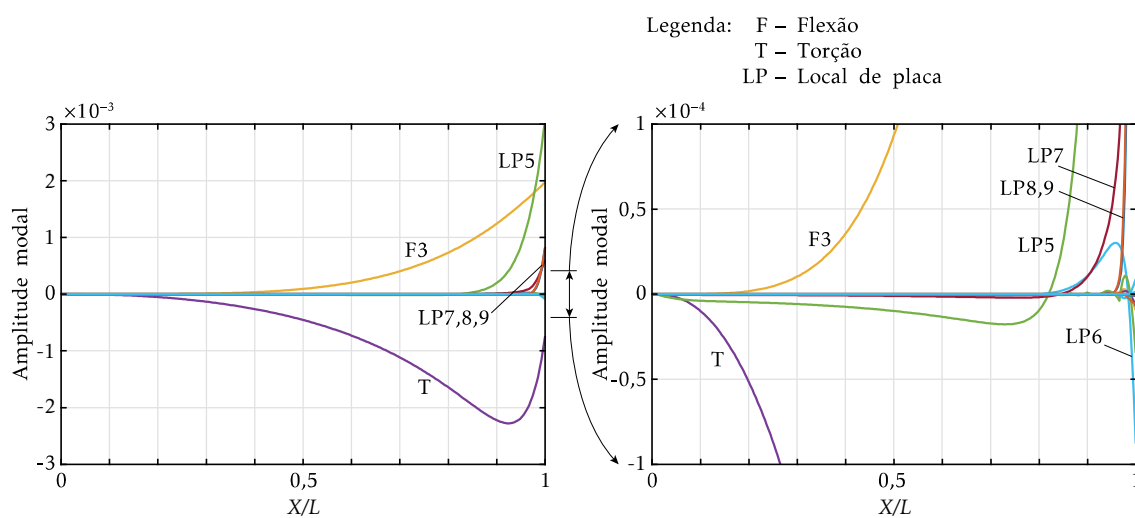


Figura 3.15: Arco com secção em I sujeito a forças autoequilibradas.



também são relevantes devido ao efeito das forças concentradas. Em particular, o modo LP 5 tem uma participação mais significativa que os restantes, uma vez que a sua forma corresponde precisamente à deformação imposta pelas forças (relembrar a forma dos modos na Figura 3.11) — o modo LP 7 tem uma forma semelhante, mas a sua participação modal é inferior à do modo LP 5. Os modos LP 8 e 9 têm participações modais virtualmente coincidentes, causando flexão dos banzos com amplitudes idênticas. Para além disso, verifica-se que a secção de extremidade possui uma configuração complexa, com a participação de vários modos (as curvas não numeradas correspondem a modos de extensão transversal).

### 3.10.2 Secção quadrada

Este exemplo diz respeito a um tubo quadrado, conforme se mostra na Figura 3.16. Tal como nos casos da Secção anterior, utiliza-se a abordagem A1 para determinar os modos de deformação. Para este exemplo particular não é necessário considerar nós intermédios na discretização da secção, pelo que se obtêm os 12 modos de deformação que se mostram na figura. Os primeiros três modos de corpo rígido satisfazem a hipótese de Vlasov (3.129). Uma vez que a secção é fechada, o modo de torção (modo 4) causa distorção de membrana e, portanto, não verifica a hipótese de Vlasov — por esta razão, utiliza-se o modo de torção correspondente a barras retas. Os modos de corte envolvem um modo distorcional no plano (modo 5) e três funções de empenamento, onde as duas primeiras (modos 6 e 7) correspondem ao empenamento dos modos 2 e 3. É de notar que na GBT clássica o modo 5 corresponde ao único modo distorcional de Vlasov (sendo o modo 8 a sua correspondente função de empenamento) e, portanto, de acordo com a abordagem A1, seria necessário recalcular os deslocamentos no plano da secção de modo a satisfazer a hipótese de Vlasov. No entanto, tal abordagem não foi seguida, tendo-se separado simplesmente as componentes no plano (modo 5) e de empenamento (modo 8). Finalmente, obtêm-se quatro modos de extensão transversal.

A barra está sujeita a uma carga excêntrica aplicada num dos cantos da secção transversal da extremidade livre, como se mostra na Figura 3.17. Na integração reduzida foram utilizados 3 pontos segundo  $X$  e segundo  $y$ . A tabela da figura fornece o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga, obtido com um modelo refinado de elementos de casca (5028 EF) e os elementos finitos da GBT, com 20 elementos de igual comprimento e diferentes conjuntos de modos de deformação. Estes resultados mostram que o modo de corte 5 é essencial para obter um valor correto para o deslocamento, fazendo com que a diferença em relação ao resultado obtido com o modelo de elementos de casca baixe de 68% para menos de 1%. A inclusão dos modos de extensão transversal na análise não revelou melhorias significativas nos resultados.

Na Figura 3.17, o gráfico apresentado abaixo da tabela mostra a evolução do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga, calculado com todos os modos de deformação, em função do número de elementos finitos da GBT (1, 2, 3, 4, 5, 10, 20 e 50 EF). Verifica-se que quatro elementos já permitem obter resultados bastante precisos



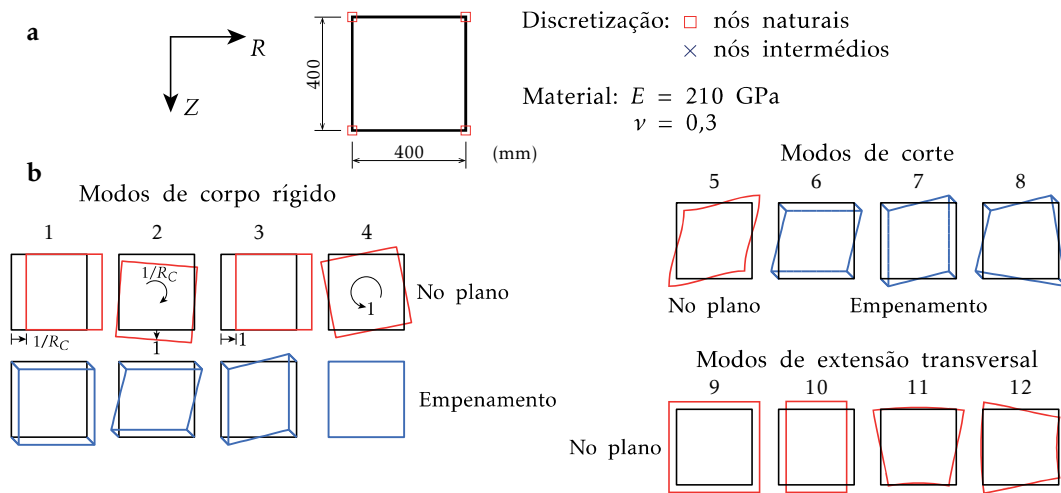


Figura 3.16: (a) Geometria, discretização e propriedades materiais e (b) modos de deformação para um tubo quadrado.

(a diferença relativamente ao resultado do modelo de elementos de casca está abaixo de 2%), o que pode ser justificado pelo facto de a deformação não ser severamente localizada neste exemplo particular. As amplitudes modais, representadas graficamente na parte inferior da figura, mostram que os modos 2 (flexão), 4 (torção) e 5 (corte distorcional) são os mais relevantes. Em particular, note-se que, muito embora a força seja aplicada na extremidade livre, as amplitudes dos modos 4 e 5 não são de todo localizadas perto dessa secção, variando de forma suave ao longo de todo o comprimento da barra — note-se que o máximo da distorção ocorre aproximadamente a meio da barra ( $X/L = 0,5$ ).

Finalmente, as configurações deformadas da Figura 3.17 mostram, uma vez mais, a excelente concordância entre os dois modelos de elementos finitos (casca/barra). Estas configurações permitem verificar que existe distorção da secção ao longo de toda a peça.

Antes de prosseguir, deve referir-se que, daqui em diante, em todos os exemplos os modos de deformação são calculados com recurso à abordagem A2 (recordar a Secção 3.7.2).

### 3.10.3 Secção em C com reforços sujeita a uma carga distorcional

Neste exemplo analisa-se um arco com uma secção em C com reforços, com a geometria e propriedades materiais indicadas na Figura 3.18. Para obter os modos de deformação (abordagem A2, Secção 3.7.2), a secção é discretizada conforme indicado na figura, permitindo obter 39 modos. As configurações dos modos relevantes para este exemplo estão representados na figura — para os modos locais de placa apenas se representa a componente no plano, uma vez que o empenamento é muito reduzido face aos deslocamentos no plano.

Considera-se que o arco está sujeito a duas forças opostas horizontais autoequilibradas de 0,01 kN, aplicadas nos nós de intersecção banzo-reforço da secção de extremidade livre, de forma a provocar distorção da secção. Os resultados são apresentados na Figura 3.19. Na análise foram considerados 3 pontos de integração segundo  $X$  e  $y$ .

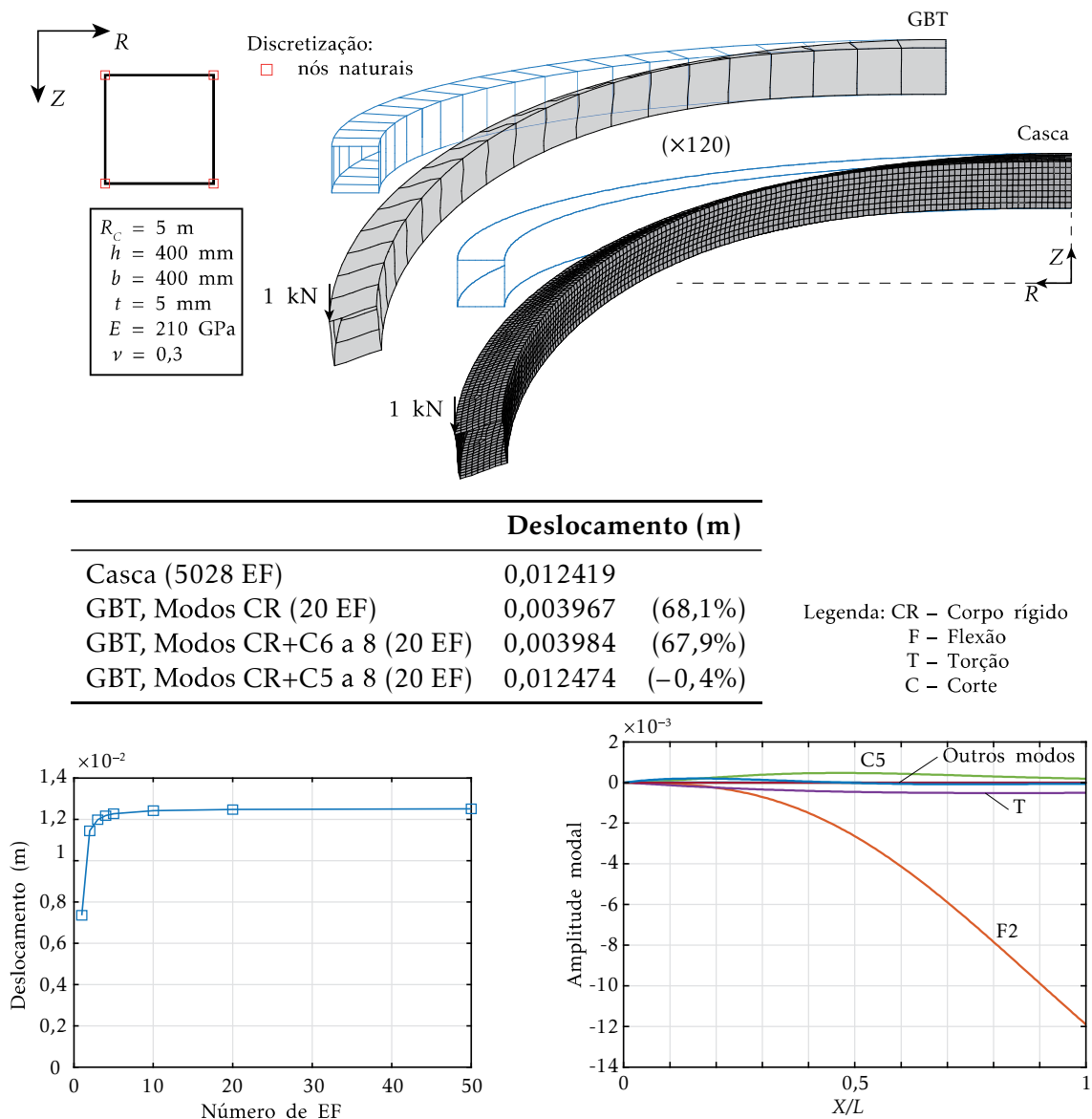


Figura 3.17: Arco com secção tubular quadrada, sujeito a uma carga vertical excêntrica.

A tabela na Figura 3.19 compara o deslocamento horizontal dos reforços na secção de extremidade livre, recorrendo a um modelo de elementos de casca (7066 EF) e ao elemento finito de compatibilidade da GBT (com 50 elementos e várias combinações de modos de deformação). Estes resultados mostram que a utilização conjunta dos modos de corpo rígido (CR), distorcionais (D) e locais de placa (LP) conduz a resultados muito precisos — o deslocamento horizontal dos pontos de aplicação da carga possui uma diferença de cerca de 2% relativamente à solução obtida com o modelo de elementos de casca. No entanto, devido à natureza localizada da deformação, é necessário considerar os modos de corte que, como se verifica, assumem também um papel importante, baixando a diferença relativa ao modelo de elementos de casca para menos de 1%. A influência dos modos de extensão transversal revelou-se virtualmente nula, pelo que estes não foram

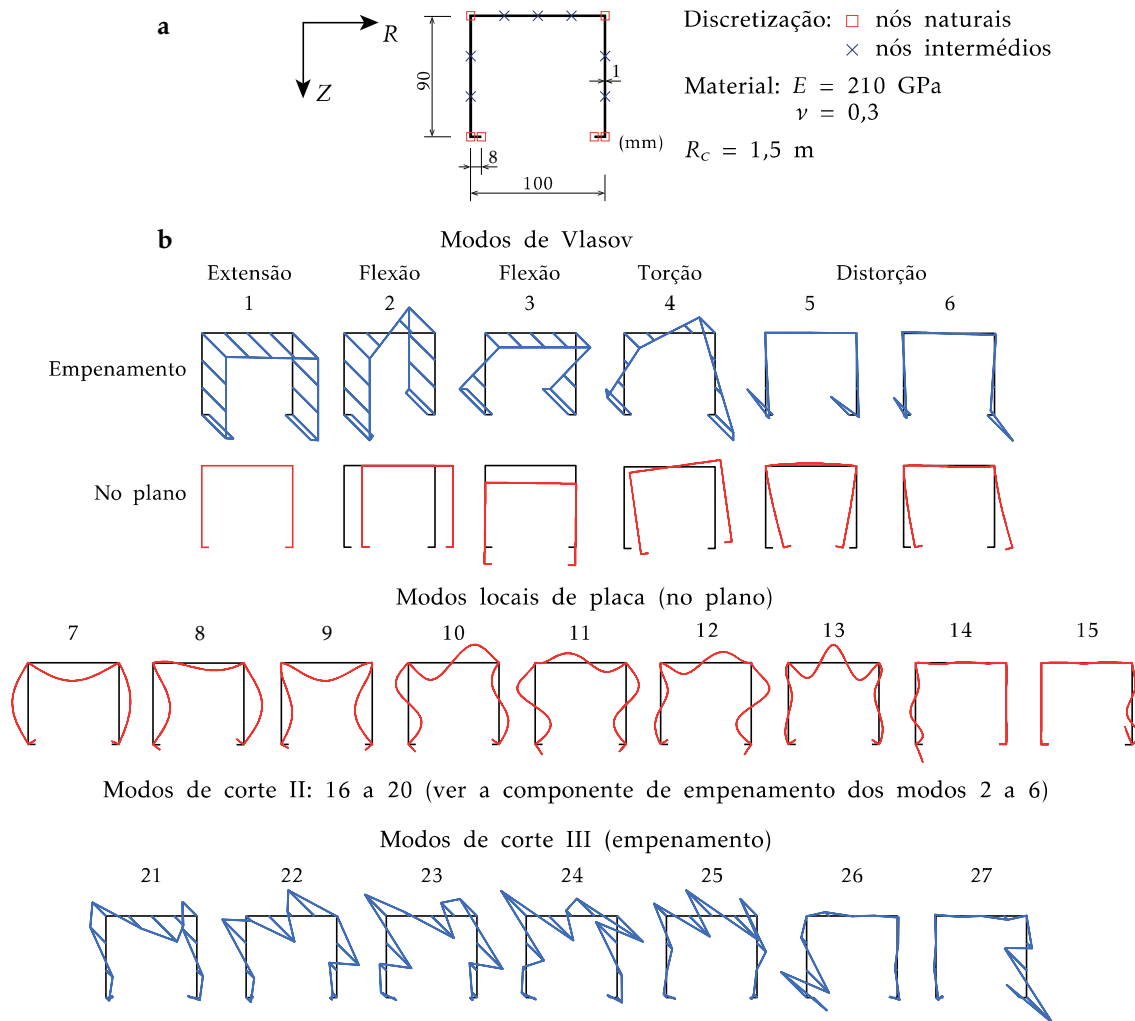


Figura 3.18: Secção em C com reforços: (a) geometria, discretização e propriedades materiais e (b) modos de deformação para  $R_C = 1,5 \text{ m}$ .

incluídos na análise. As configurações deformadas mostram de forma clara uma excelente concordância entre os dois modelos.

Os gráficos de amplitude modal fornecidos na parte inferior da Figura 3.19 permitem retirar algumas conclusões importantes — o gráfico da esquerda diz respeito aos modos CR+D, o da direita mostra as participações dos modos LP e o de baixo mostra os modos C. Embora as amplitudes dos modos LP sejam significativamente mais baixas que as dos modos CR+D, estes modos são indispensáveis, conforme foi já referido, para obter resultados precisos (ver a tabela na figura). Como esperado, as amplitudes modais apenas são significativas para  $X/L > 0,5$ , devido à deformação localizada na extremidade livre. Os modos C têm uma ligeira influência no resultado (têm participações modais inferiores às dos modos LP) e as respetivas funções de amplitude apenas são relevantes muito perto da extremidade.

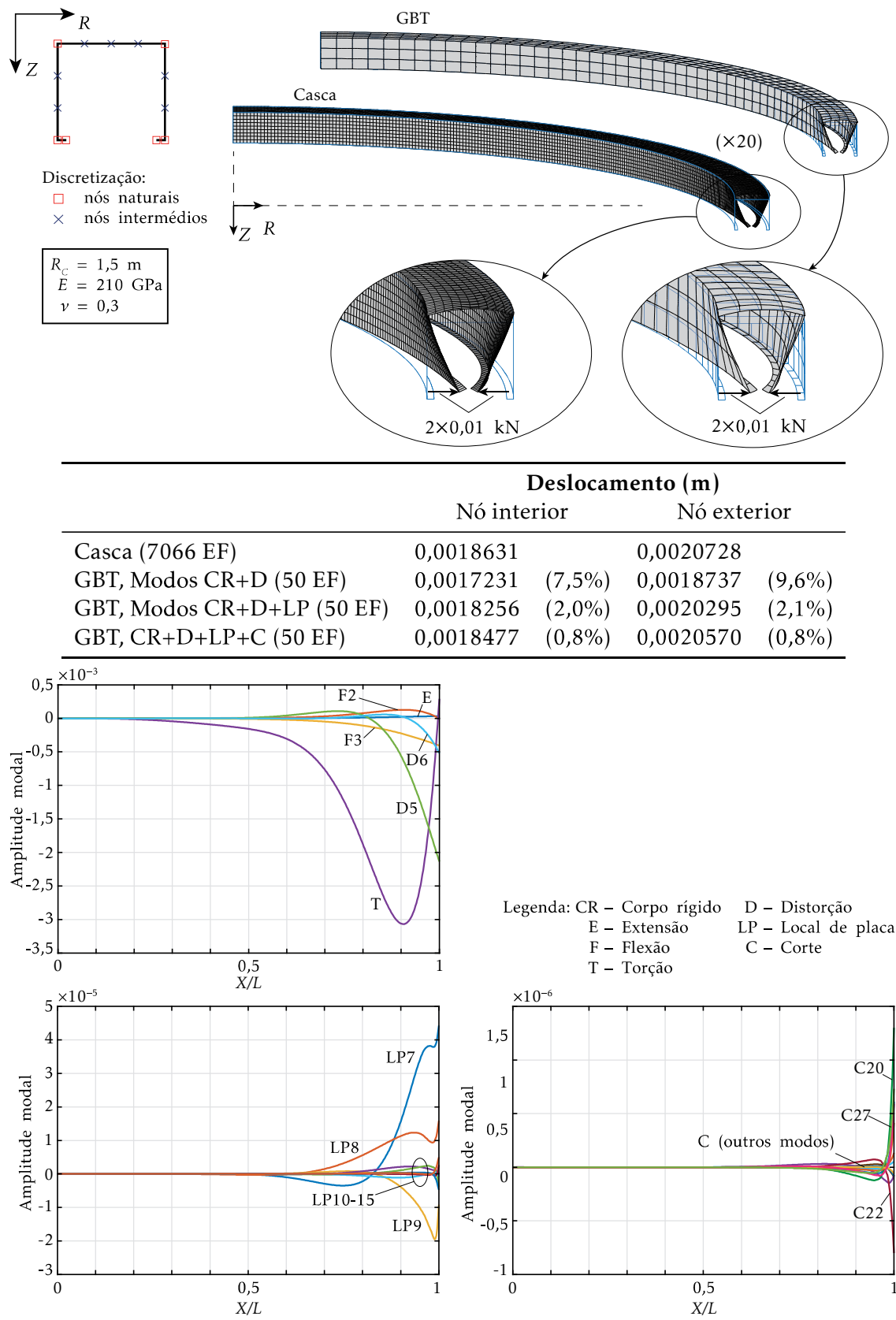


Figura 3.19: Arco com secção em C sujeito a uma carga distorcional.

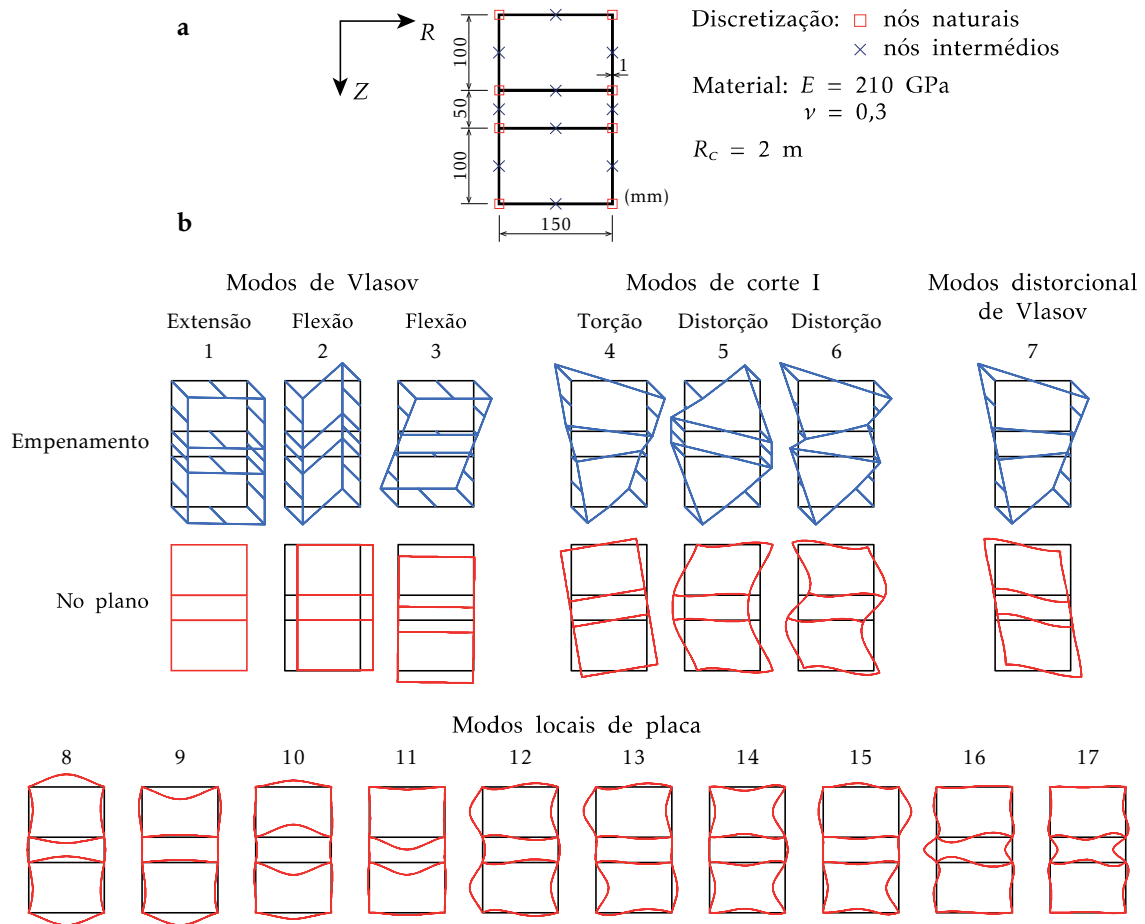


Figura 3.20: Secção fechada com três células: (a) geometria, discretização e propriedades materiais e (b) modos de deformação para  $R_C = 2 \text{ m}$ .

### 3.10.4 Secção fechada com três células sujeita a uma carga transversal excêntrica

Neste exemplo analisa-se a secção fechada com três células representada na Figura 3.20. A secção foi discretizada com um nó intermédio em cada parede (perfazendo um total de 10 nós intermédios), obtendo-se 54 modos de deformação (abordagem A2) — na Figura 3.20 apresentam-se os primeiros 17 modos, relevantes para o exemplo em estudo, com  $R_C = 2 \text{ m}$ .

Considera-se que o arco está sujeito a uma força vertical excêntrica em relação ao ponto C, aplicada num dos cantos da secção de extremidade livre, conforme mostra a Figura 3.21. Tal como nos exemplos anteriores, consideram-se várias combinações de modos de deformação da GBT, nomeadamente: (i) modos de corpo rígido (CR), onde se inclui o modo de corte 4, correspondente à torção (ii) o único modo distorcional de Vlasov (D) e (iii) modos locais de placa (LP). A influência dos restantes modos, i.e., de corte e de extensão transversal, é desprezável (embora os modos 5 e 6 sejam representados na Figura 3.20). Na análise foram considerados 3 pontos de integração segundo  $X$  e  $y$ .

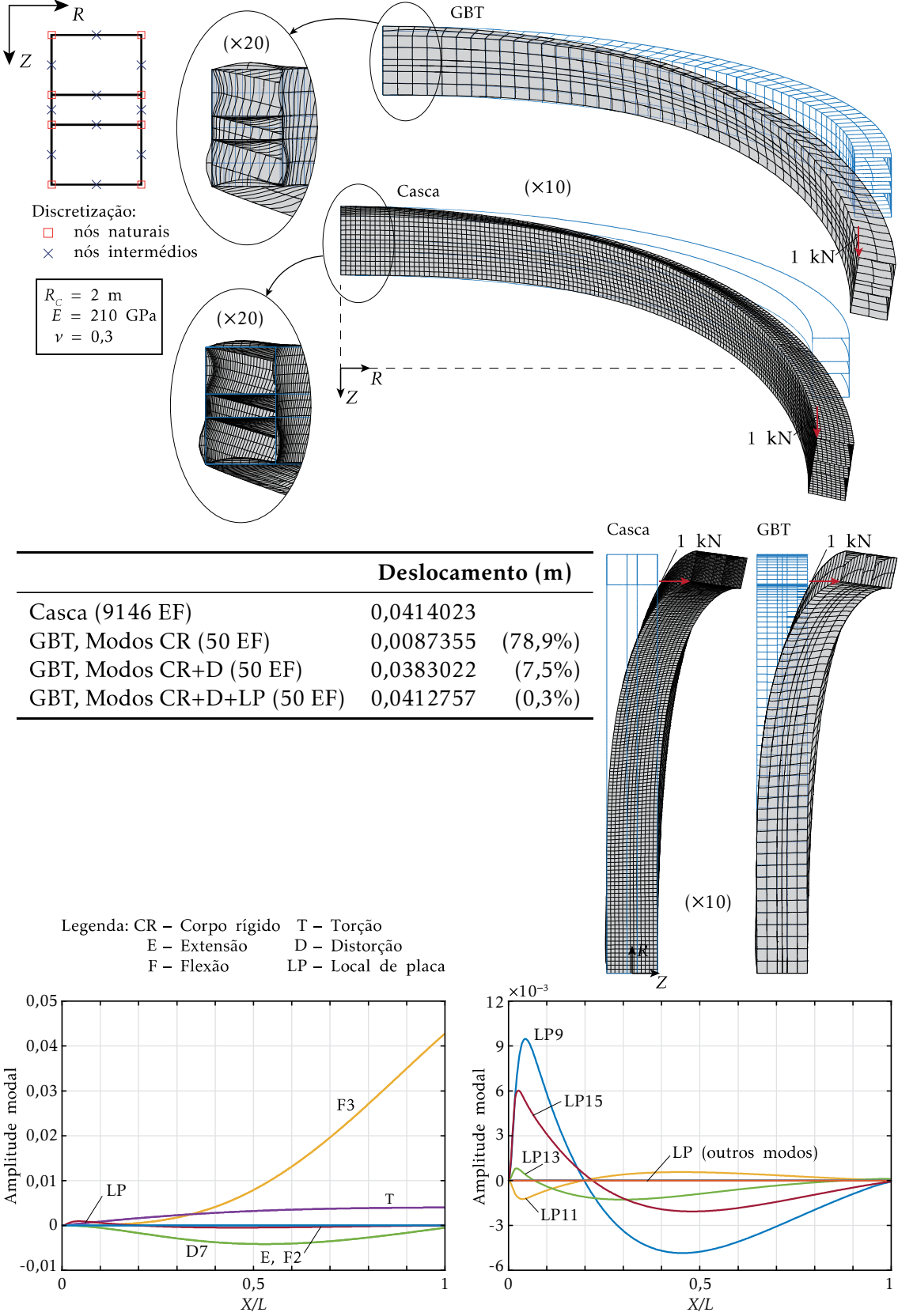


Figura 3.21: Secção fechada com três células sujeita a uma carga transversal excêntrica.

Os resultados são apresentados na Figura 3.21. A tabela mostra o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga obtido com um modelo de elementos finitos de casca (9146 EF) e 50 elementos finitos da GBT. Constatou-se, mais uma vez, que a solução da GBT é virtualmente coincidente com a do modelo de elementos de casca quando são incluídos os modos CR+D+LP na análise. De facto, embora a carga provoque a distorção da secção, ao incluir apenas os modos CR+D, o resultado difere 7,5% da solução obtida com o modelo de elementos de casca. Acrescentando os modos locais de placa, esta diferença é reduzida para 0,3%, demonstrando a influência da deformação local na peça — esta deformação ocorre de forma significativa perto da secção de encastramento, como se pode observar nos gráficos de amplitude modal (direita) e no detalhe da figura. De facto, os modos 9, 11, 13 e 15, caracterizados por terem uma forma antissimétrica relativamente ao eixo  $R$ , possuem uma maior participação face aos restantes modos locais de placa. O gráfico de amplitude modal da esquerda permite ainda mostrar a existência de torção e distorção ao longo de toda a barra. As configurações deformadas mostram mais uma vez uma excelente concordância entre ambos os modelos.

### 3.10.5 Secção fechada bitrapezoidal

Este exemplo consiste numa secção celular bitrapezoidal retirada de Garcea et al. (2016). A geometria da secção transversal e a sua discretização são apresentadas na Figura 3.22, a qual conduz a 51 modos de deformação. Os modos relevantes para o exemplo em estudo são apresentados na figura para  $R_C = 2$  m. Na análise foram considerados 3 pontos de integração segundo  $X$  e segundo  $y$ .

Na Figura 3.23 mostram-se os resultados obtidos para um arco com o mesmo raio, sob a ação de uma carga vertical excêntrica aplicada na extremidade livre. O deslocamento conjugado da carga é apresentado na tabela para um modelo de elementos de casca (22654 EF) e para 50 elementos da GBT, onde se utilizam várias combinações de modos de deformação. Conclui-se uma vez mais que os modos de corpo rígido não conseguem, por si só, reproduzir o comportamento da peça. Em particular, os três modos distorcionais de Vlasov (6 a 8) são essenciais para obter resultados precisos, reduzindo a diferença em relação ao modelo de elementos de casca em cerca de 27%. A tabela mostra ainda que a inclusão dos modos (i) locais de placa (LP 9 a 17), (ii) fluxo de corte I distorcional (FC 5) e (iii) corte II e III (C 18 a 33) permite reduzir a diferença relativa para um valor virtualmente nulo. As configurações deformadas mostram, novamente, uma excelente concordância entre os modelos.

Os gráficos de amplitude modal apresentados na parte inferior da Figura 3.23 permite verificar que os modos de flexão e de torção são predominantes e, atendendo ao gráfico da direita, os modos distorcionais de Vlasov assumem um papel relevante em todo o comprimento da barra, seguidos pelo modo de corte distorcional 5. Observa-se ainda que os modos locais de placa apenas se revelam importantes junto à secção de encastramento.



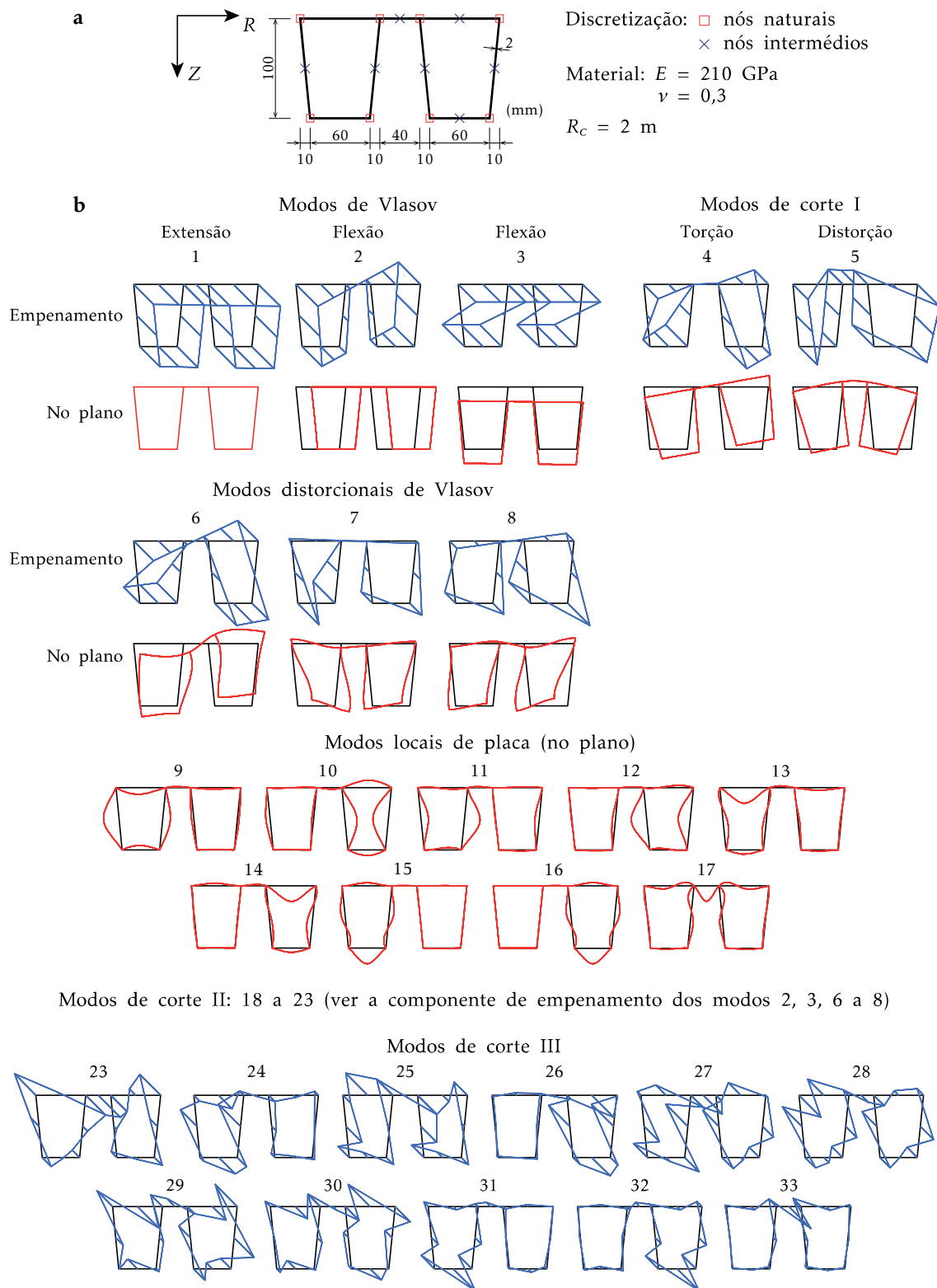
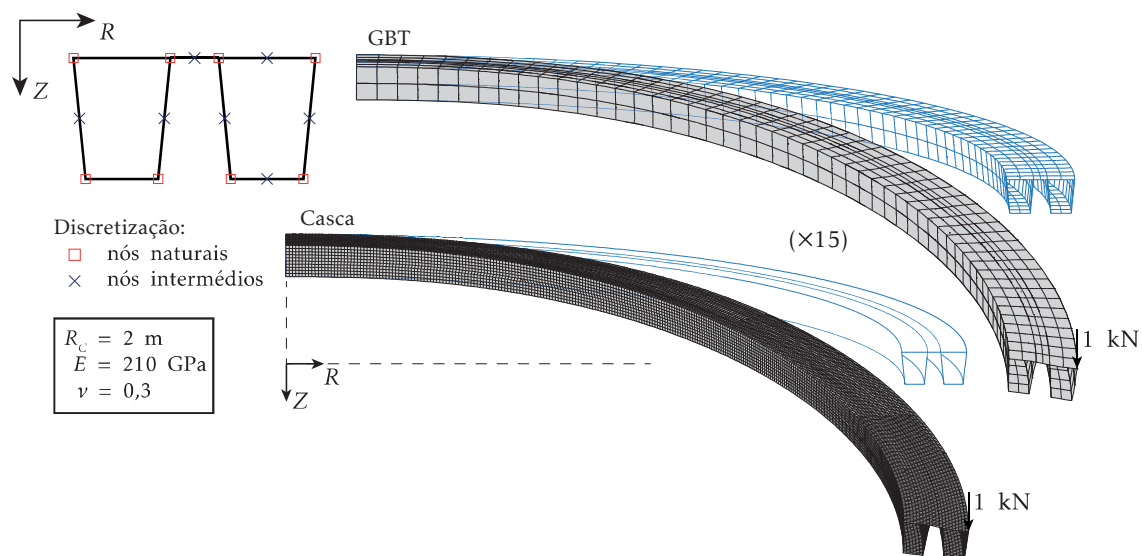


Figura 3.22: Secção celular bitrapezoidal: (a) geometria, discretização e propriedades materiais e (b) modos de deformação para  $R_c = 2$  m.





|                                 | Deslocamento (m) |         |
|---------------------------------|------------------|---------|
| Casca (22654 EF)                | 0,0374231        |         |
| GBT, Modos CR (50 EF)           | 0,0268902        | (28,1%) |
| GBT, Modos CR+D (50 EF)         | 0,0369412        | (1,3%)  |
| GBT, Modos CR+D+LP (50 EF)      | 0,0370178        | (1,1%)  |
| GBT, Modos CR+D+LP+FC (50 EF)   | 0,0370932        | (0,9%)  |
| GBT, Modos CR+D+LP+FC+C (50 EF) | 0,0373974        | (0,1%)  |

Legenda: CR – Corpo rígido  
 F – Flexão  
 T – Torção  
 FC – Corte I (com fluxo de corte – modo 5)  
 D – Distorção  
 LP – Local de placa  
 C – Corte II e III

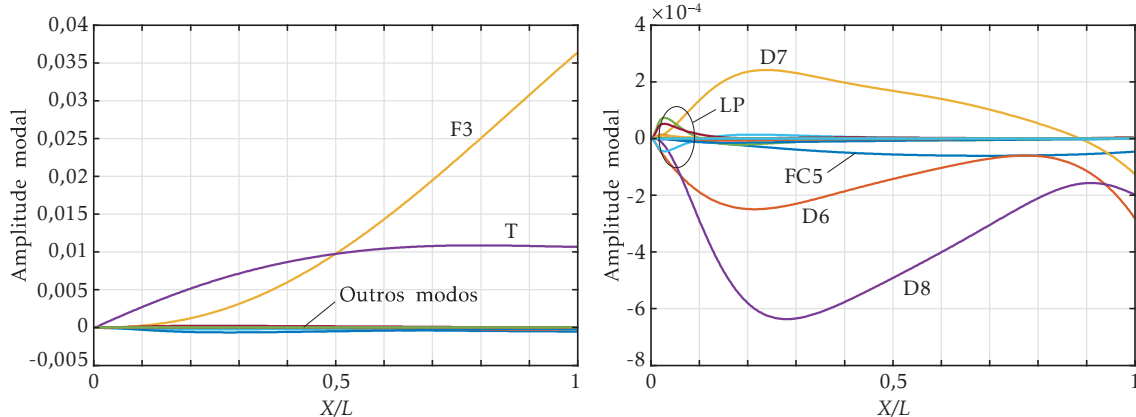


Figura 3.23: Secção bitrapezoidal sujeita a carga excêntrica.

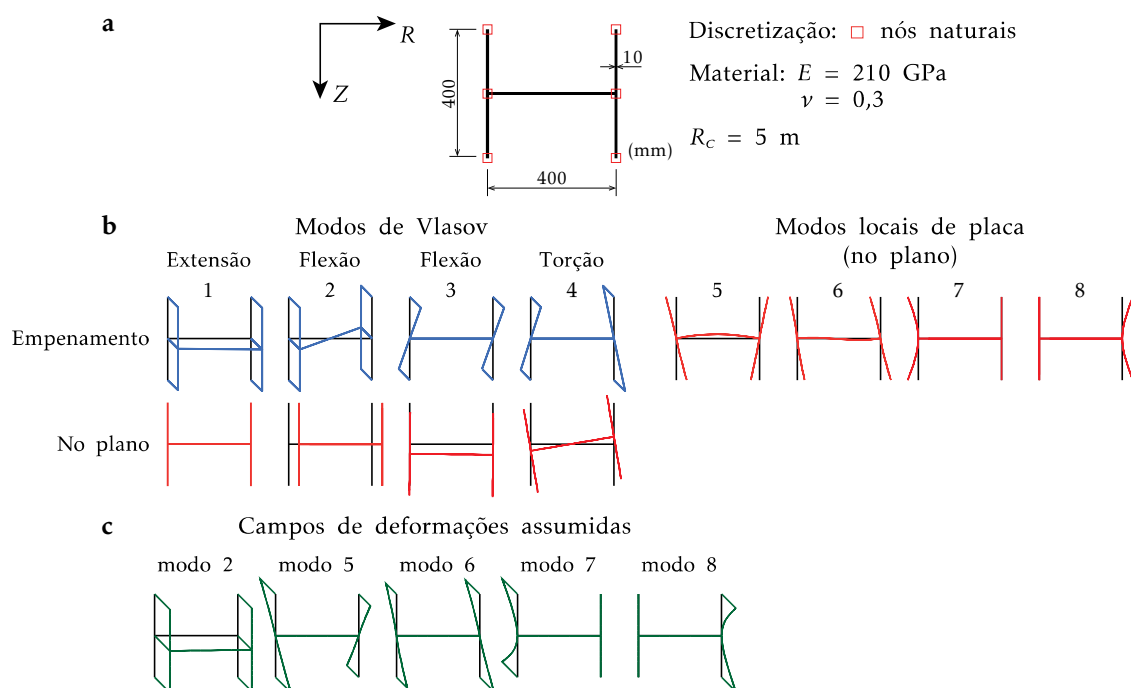


Figura 3.24: Seção em I: (a) geometria propriedades materiais e discretização, (b) modos de deformação e (c) campos de deformações de membrana assumidas.

### 3.10.6 Comparação entre os elementos de compatibilidade e misto

Nestes três últimos exemplos é feita uma comparação entre os elementos finitos de compatibilidade e misto, apresentados nas Secções 3.8 e 3.9, respetivamente. Para além disso, são utilizados modelos refinados de elementos finitos de casca para validar os resultados obtidos. Deve-se referir que em todos os exemplos a integração foi feita com recurso à quadratura de Gauss, tendo-se utilizado 3 pontos de integração segundo  $X$  no elemento de compatibilidade (à semelhança dos exemplos anteriores) e 5 pontos para o elemento misto. De facto, no elemento misto verificou-se que aumentar o número de pontos segundo  $X$  para valores superiores a 5 não revela alterações nos resultados. Segundo  $y$  foram utilizados 3 pontos de integração e segundo  $z$  a integração é feita analiticamente.

O primeiro exemplo consiste num arco com secção em I. Na Figura 3.24 apresenta-se a geometria da secção e a respetiva discretização, os modos de deformação (devido à sua contribuição negligenciável para os resultados, não se incluem os modos de corte e de extensão transversal) e os campos de deformações assumidas utilizados na análise<sup>3</sup> (o número do modo de deformação associado à deformação assumida é indicado). Dado que o problema é plano, os modos de deformação para fora do plano (3 e 4) e as respetivas deformações assumidas não são incluídos na análise.

O arco está sujeito a flexão no plano de curvatura, provocada por uma força vertical aplicada na extremidade livre da peça, na interseção de banço superior-alma, conforme

<sup>3</sup>Note-se que se representam apenas as deformações de membrana, dado que as parcelas de flexão são difíceis de reproduzir graficamente (variam na espessura).

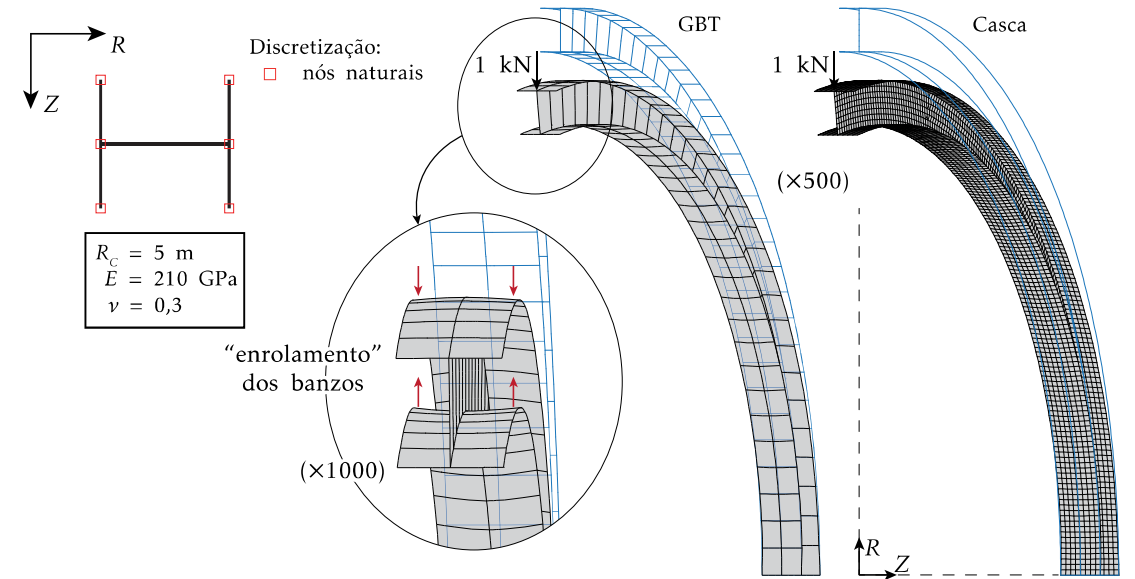
mostra a Figura 3.25, onde também são apresentados os resultados obtidos. Na tabela apresentam-se os valores do deslocamento do ponto de aplicação da força obtidos com (i) o modelo de elementos de casca (3778 EF), (ii) a solução de Winkler e (iii) 30 elementos mistos de barra considerando diferentes modos de deformação. Conforme esperado, o resultado obtido com a GBT utilizando apenas os modos 1 e 2 (extensão e flexão em torno do eixo de maior inércia, respetivamente) coincide com a solução da teoria de Winkler, uma vez que esta não tem em conta a deformação da secção transversal. Por outro lado, os modos locais de placa são essenciais para obter um valor preciso para o deslocamento medido, obtendo-se uma diferença relativa ao modelo de elementos de casca de 2,6%.

Na parte superior da figura mostram-se as configurações deformadas obtidas com o elemento finito misto (com 30 elementos, todos os modos de deformação e campos de deformações assumidas) e elementos finitos de casca (3778 EF). O detalhe da secção de extremidade mostra a ocorrência de “enrolamento” (*curling* na designação em língua inglesa) dos banzos. Este fenómeno apenas ocorre em peças retas ao considerar os efeitos geometricamente não-lineares, mas em peças curvas surge mesmo no caso linear, devido à curvatura inicial da peça.

Os gráficos *a* e *b* da Figura 3.25 permitem comparar o desempenho dos elementos de compatibilidade e misto relativamente à solução obtida com o modelo de elementos finitos de casca, em função do número de elementos finitos (de barra), quando se consideram na análise os modos 1 e 2 (gráfico *a*) e todos os oito modos (gráfico *b*). Verifica-se que (i) o elemento misto converge mais rapidamente que o elemento de compatibilidade e (ii) os modos locais de placa são fundamentais para obter resultados próximos dos do modelo de casca (neste caso, os valores da GBT diferem cerca de 2.6% dos resultados obtidos com o modelo de elementos de casca).

Os gráficos na parte inferior da Figura 3.25, *c* e *d*, mostram o andamento das funções de amplitude modal. Estas funções coincidem para o elemento de compatibilidade e misto quando se adota um número de elementos suficientemente refinado (30 elementos, neste caso). Conclui-se que os modos 1 (extensão) e 2 (flexão em torno do eixo de maior inércia) têm maior relevância, embora os modos locais de placa 7 e 8 também sejam essenciais para capturar o fenómeno de enrolamento dos banzos. A participação dos modos 5 e 6 é nula, uma vez que representam modos antissimétricos relativamente ao plano de curvatura da barra.

Considere-se agora a secção em C com reforços já analisada na Secção 3.10.3 (Figura 3.18). Na Figura 3.26 mostra-se a geometria da secção, a discretização, os modos de deformação relevantes e os campos de deformações assumidas. Conforme foi referido na Secção 3.9, os modos 2 a 4 (flexão e torção) formam um subespaço linearmente dependente relativamente a  $\xi_{11}$  (a matriz  $\mathbf{G}$  possui um valor próprio nulo), tornando-se necessário remover um destes modos do campo de deformações assumidas. Em particular, os modos 3 e 4 envolvem ambos um movimento de translação e uma rotação de torção, logo a utilização de ambos torna-se redundante e, deste modo, apenas um deles deve ser utilizado como deformação assumida (para o presente exemplo, mantém-se o modo 3).



| Deslocamento (m)           |           |         | Legenda: E – Extensão<br>F – Flexão<br>LP – Local de placa |
|----------------------------|-----------|---------|------------------------------------------------------------|
| Casca (3778 EF)            | 0,0015547 |         |                                                            |
| Winkler                    | 0,0012501 | (19,6%) |                                                            |
| GBT, Modos E+F2 (30 EF)    | 0,0012501 | (19,6%) |                                                            |
| GBT, Modos E+F2+LP (30 EF) | 0,0015145 | (2,6%)  |                                                            |

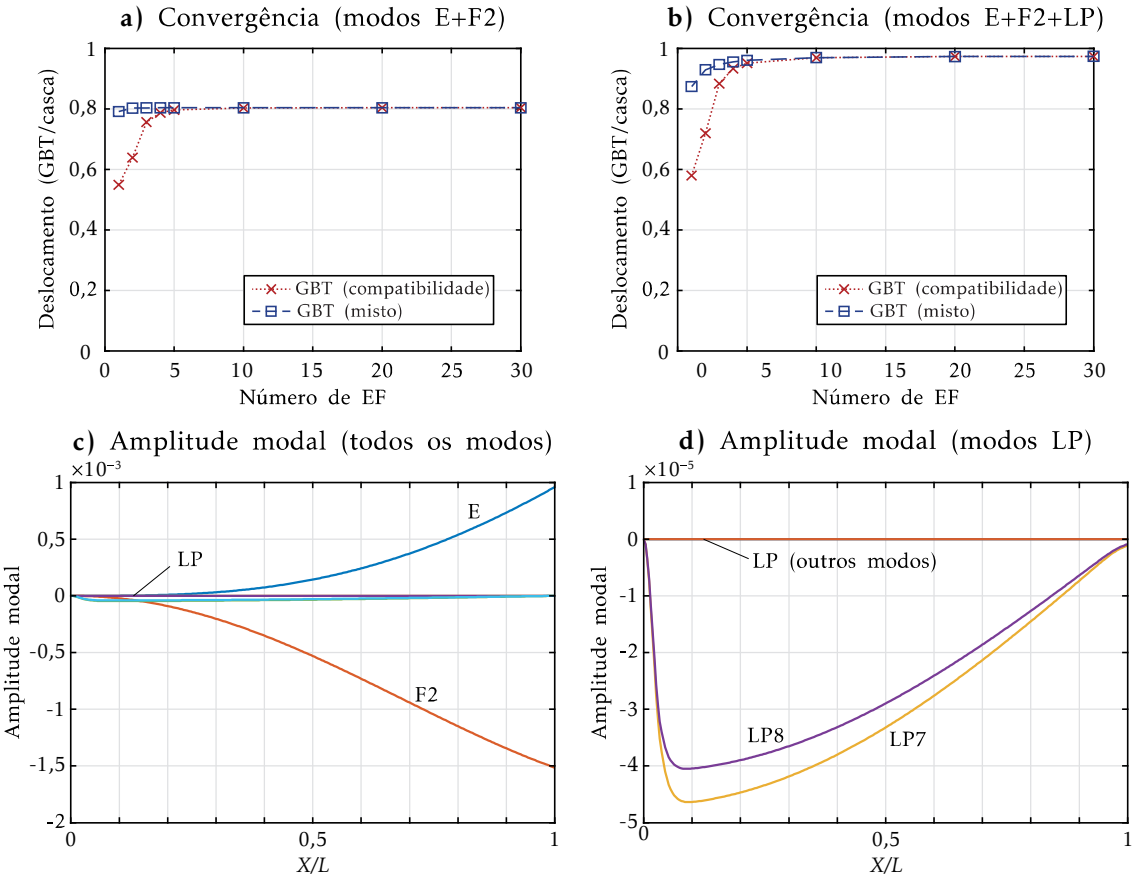


Figura 3.25: Flexão plana de uma arco com secção em I.

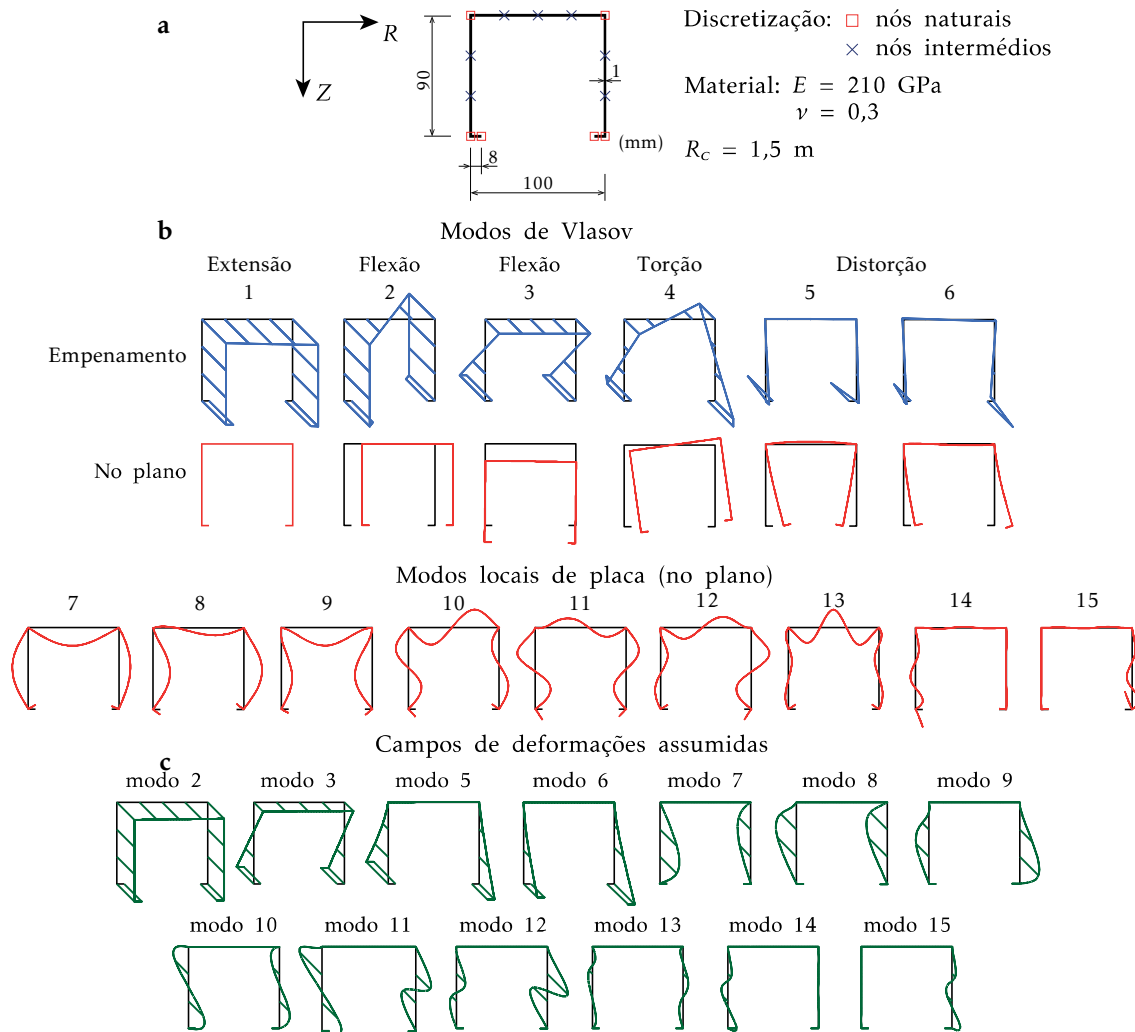


Figura 3.26: Secção em C com reforços: (a) geometria, discretização e propriedades materiais, (b) modos de deformação e (c) campos de deformações de membrana assumidas.

Conforme mostrado na Figura 3.27, a consola encontra-se sujeita a duas forças a atuar segundo Z e aplicadas nos nós de interseção banzo-alma da secção de extremidade livre. Na tabela da figura apresentam-se os valores do deslocamento vertical do ponto interior de aplicação da força obtidos com (i) um modelo refinado de elementos de casca (7066 EF) e (ii) o elemento misto proposto (30 EF) considerando diferentes conjuntos de modos de deformação. Verifica-se que, embora o problema envolva essencialmente flexão para fora do plano e torção, a deformação da secção assume um papel importante: os modos distorcionais permitem reduzir a diferença relativa ao modelo de elementos de casca em cerca de 80% e, ao se incluir também os modos locais de placa, obtém-se um erro virtualmente nulo. Os modos de corte e de extensão transversal não são incluídos na análise, uma vez que a sua contribuição para os resultados é desprezável. As configurações deformadas permitem verificar a excelente concordância entre ambos os modelos (a configuração deformada da GBT corresponde ao elemento misto, com 30 elementos, todos os modos de deformação e campos de deformações assumidas).

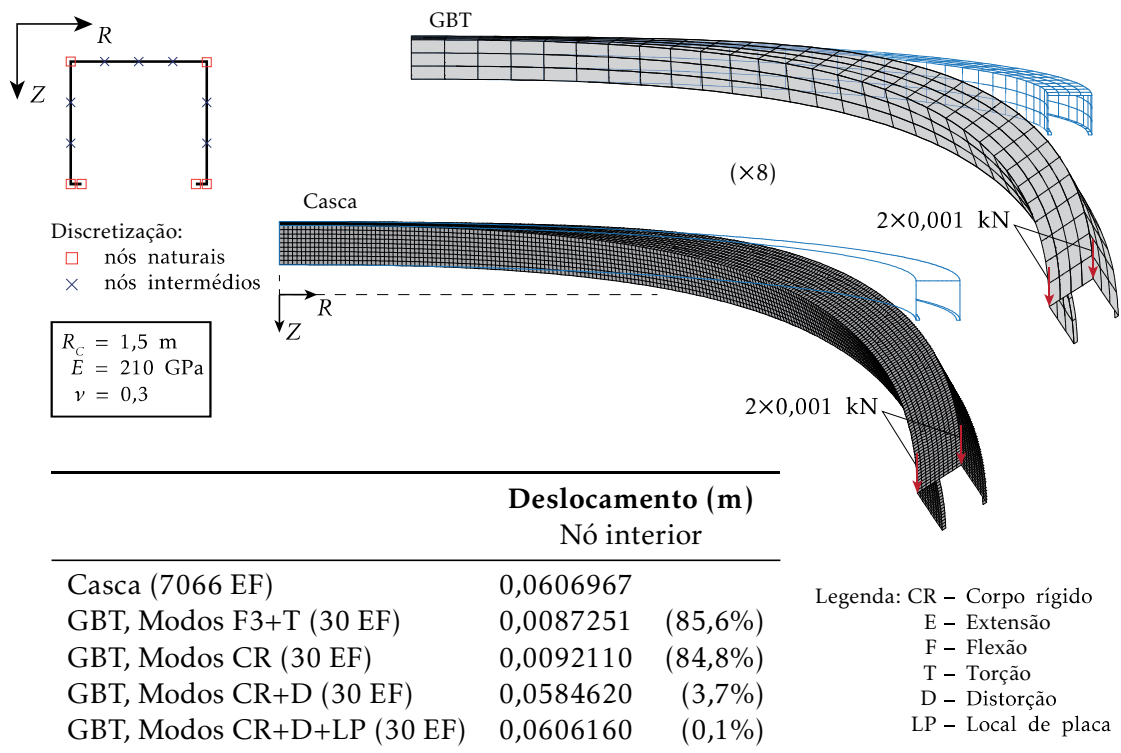


Figura 3.27: Arco com secção em C com reforços sujeito a duas forças segundo Z: geometria, propriedades materiais, configurações deformadas e tabela com os valores do deslocamento do nó interior.

Na Figura 3.28, os gráficos *a* a *d* permitem comparar o desempenho dos dois elementos finitos da GBT propostos, relativamente ao modelo de casca (a comparação é feita relativamente ao deslocamento vertical do ponto interior de aplicação da carga), em função do número de elementos finitos. Estes gráficos mostram, mais uma vez, que o elemento misto possui um desempenho superior ao elemento de compatibilidade. Para além disso, observa-se que a influência do modo distorcional é essencial para obter resultados precisos (gráfico *c*) e que a utilização de modos locais de placa melhora ainda mais os resultados (gráfico *d*). Por outro lado, quando se consideram apenas os modos 3 e 4 (gráfico *a*), obtém-se um deslocamento que subestima muito o valor obtido com o modelo de elementos de casca, devido ao facto de não se estar a incluir a deformação da secção na análise. Este gráfico mostra claramente que o elemento de compatibilidade exibe um comportamento muito pior que o elemento misto. O gráfico *a* deve ser comparado com o gráfico *b*, onde são considerados todos os modos de corpo rígido. Neste último, o deslocamento para o qual ambos os elementos convergem é idêntico ao valor para o qual apenas o elemento misto converge no primeiro gráfico (a diferença relativamente ao modelo de casca decresce em apenas 1%). No entanto, o elemento de compatibilidade necessita de todos os modos de corpo rígido e pelo menos 5 elementos para acompanhar o resultado do elemento misto.

Os gráficos *e* a *g* mostram o andamento das funções de amplitude modal para todos

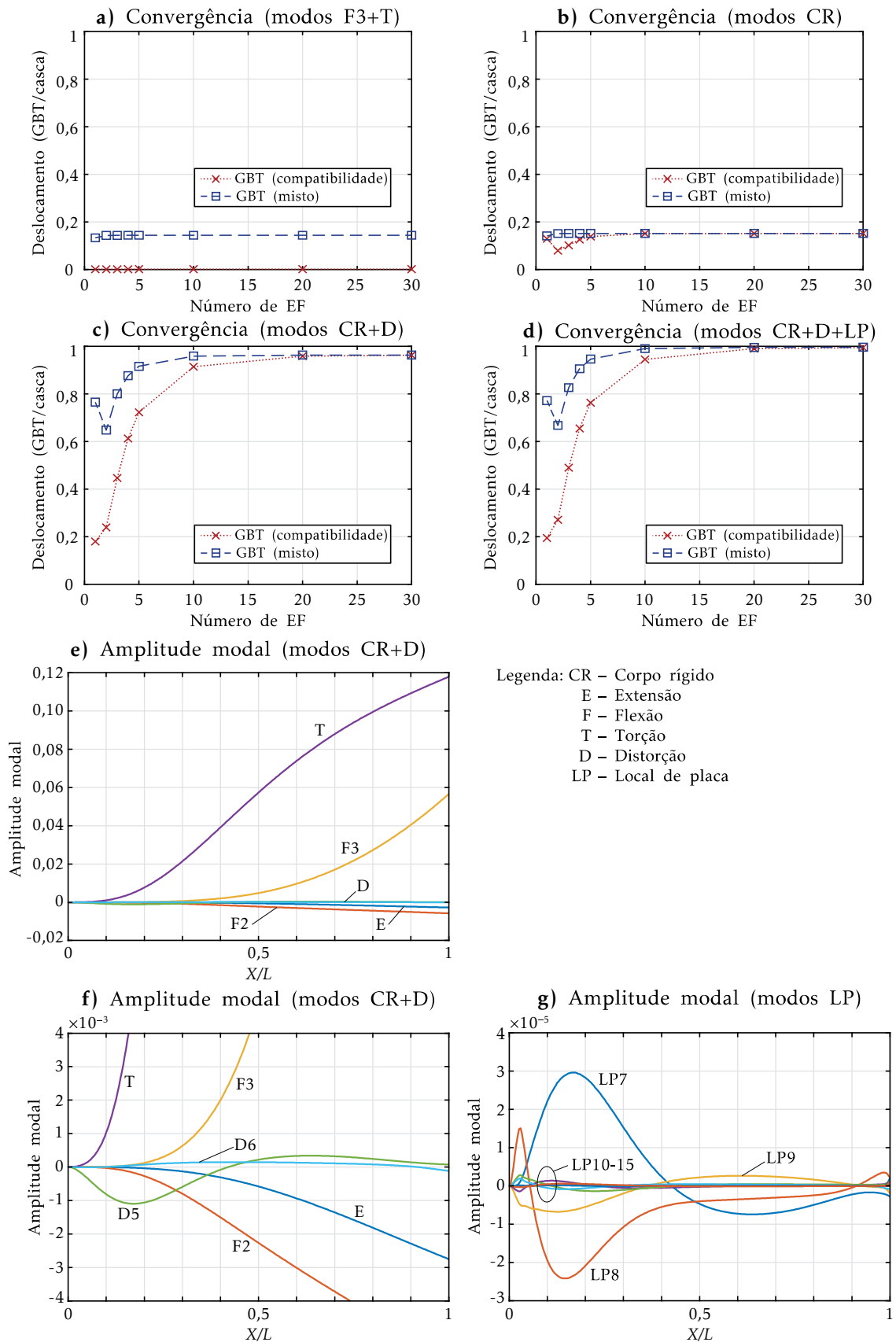


Figura 3.28: Arco com seção em C com reforços sujeito a duas forças segundo Z: gráficos de convergência e de amplitude modal.



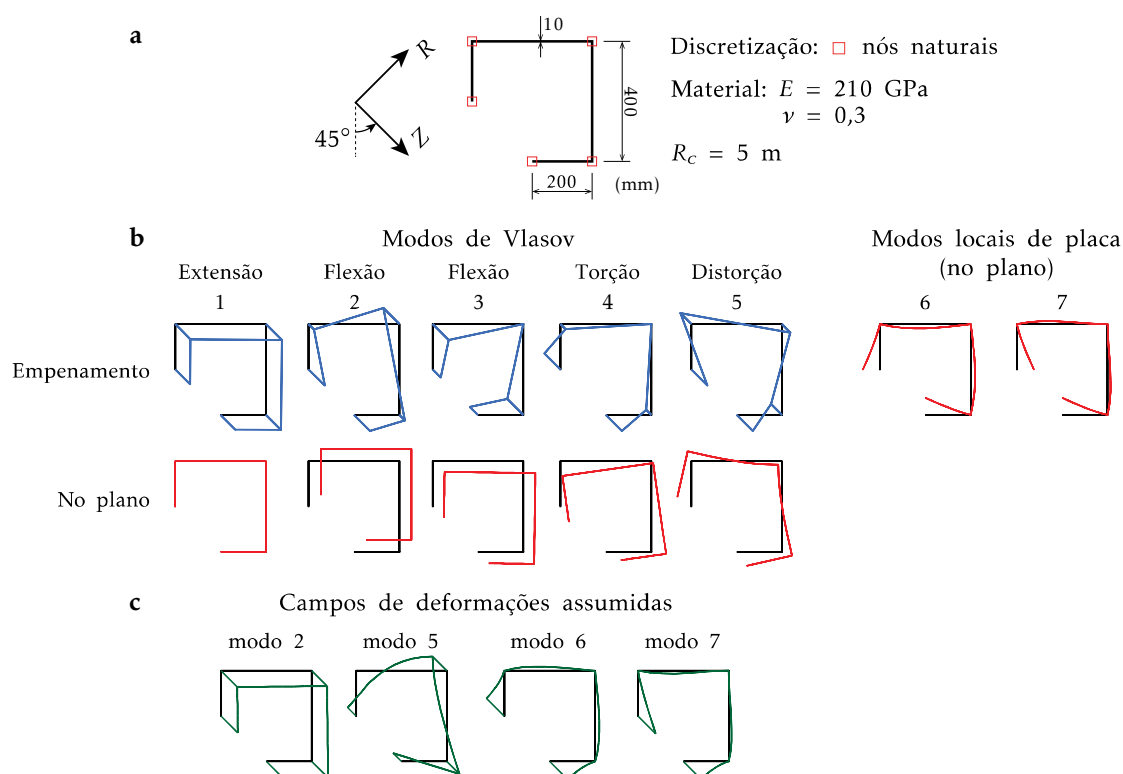


Figura 3.29: Secção em L com reforços: (a) geometria, discretização, propriedades materiais, (b) modos de deformação e (c) campos de deformações de membrana assumidas.

os modos de deformação e 30 elementos finitos (para esta discretização, os gráficos dos elementos de compatibilidade e misto coincidem). Embora os modos de corpo rígido 3 e 4 apresentem amplitudes superiores, (i) o modo distorcional 6 está presente em todo o comprimento da barra e (ii) o modo distorcional 5 e vários modos locais de placa surgem principalmente junto da secção de encastramento, longe do ponto de aplicação das forças — isto permite concluir que, embora não seja visível nas configurações deformadas, existe distorção/deformação local nessa zona.

Por fim, analisa-se uma secção em L de abas iguais com reforços, cuja geometria, discretização, propriedades materiais, modos de deformação e campos de deformações assumidas se apresentam na Figura 3.29. A discretização da secção não envolve nós intermédios uma vez que, para o carregamento considerado, os modos de deformação e deformações assumidas apresentados na figura são suficientes para obter excelentes resultados.

O arco está sujeito a uma carga vertical aplicada na extremidade livre, conforme se mostra na Figura 3.30, provocando a distorção da secção ao longo do comprimento da barra. Naturalmente, apenas se incluem modos de deformação simétricos (1, 2, 5 e 7) na análise, uma vez que a deformação da barra também é simétrica. Na Figura 3.31 são apresentados os resultados obtidos. Na tabela mostram-se os valores do deslocamento conjugado da força obtidos com (i) um modelo de elementos de casca (14513 EF), (ii) a



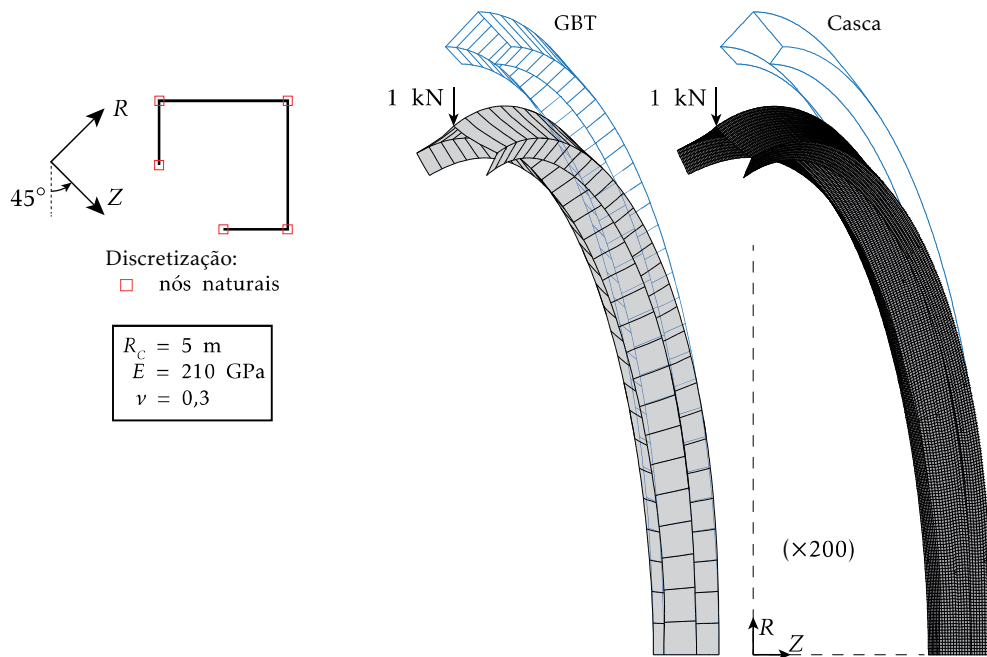


Figura 3.30: Flexão plana de um arco com seção em L com reforços: geometria, propriedades materiais e configurações deformadas.

teoria de Winkler e (iii) o elemento misto proposto (30 EF) e vários conjuntos de modos de deformação. Novamente, o resultado obtido apenas com os modos de extensão e de flexão é idêntico ao fornecido pela teoria de Winkler (a deformação da seção não é tida em conta). Verifica-se que o modo distorcional 5 permite reduzir a diferença relativa ao modelo de elementos de casca em cerca de 20%, mas os modos locais de placa são essenciais para obter um deslocamento com uma diferença relativa virtualmente nula. As configurações deformadas na Figura 3.30 permitem também concluir que os elementos da GBT e o modelo de elementos de casca estão em excelente concordância — é possível visualizar de forma clara a distorção na seção de extremidade e, de forma menos pronunciada, também ao longo do comprimento da barra.

Os gráficos *a* a *c* mostram o desempenho dos elementos de compatibilidade e misto da GBT relativamente ao modelo de elementos de casca (considerando o deslocamento conjugado da força aplicada), em função do número de elementos finitos e dos conjuntos de modos de deformação incluídos na análise — mais uma vez, o elemento misto possui um desempenho superior ao do elemento de compatibilidade. Os gráficos *b* e *c* permitem também observar a influência que o modo distorcional 5 e o modo local de placa 7 têm na obtenção de resultados precisos.

Os gráficos *d* e *e* apresentam as amplitudes modais, obtidas para todos os modos e com 30 elementos finitos (os gráficos dos elementos de compatibilidade e misto coincidem para esta discretização). É possível concluir que, como esperado, a flexão e a extensão são predominantes. O modo distorcional 5 também é bastante relevante, atingindo o seu máximo na seção de extremidade livre — no entanto, ao contrário do que sucede em

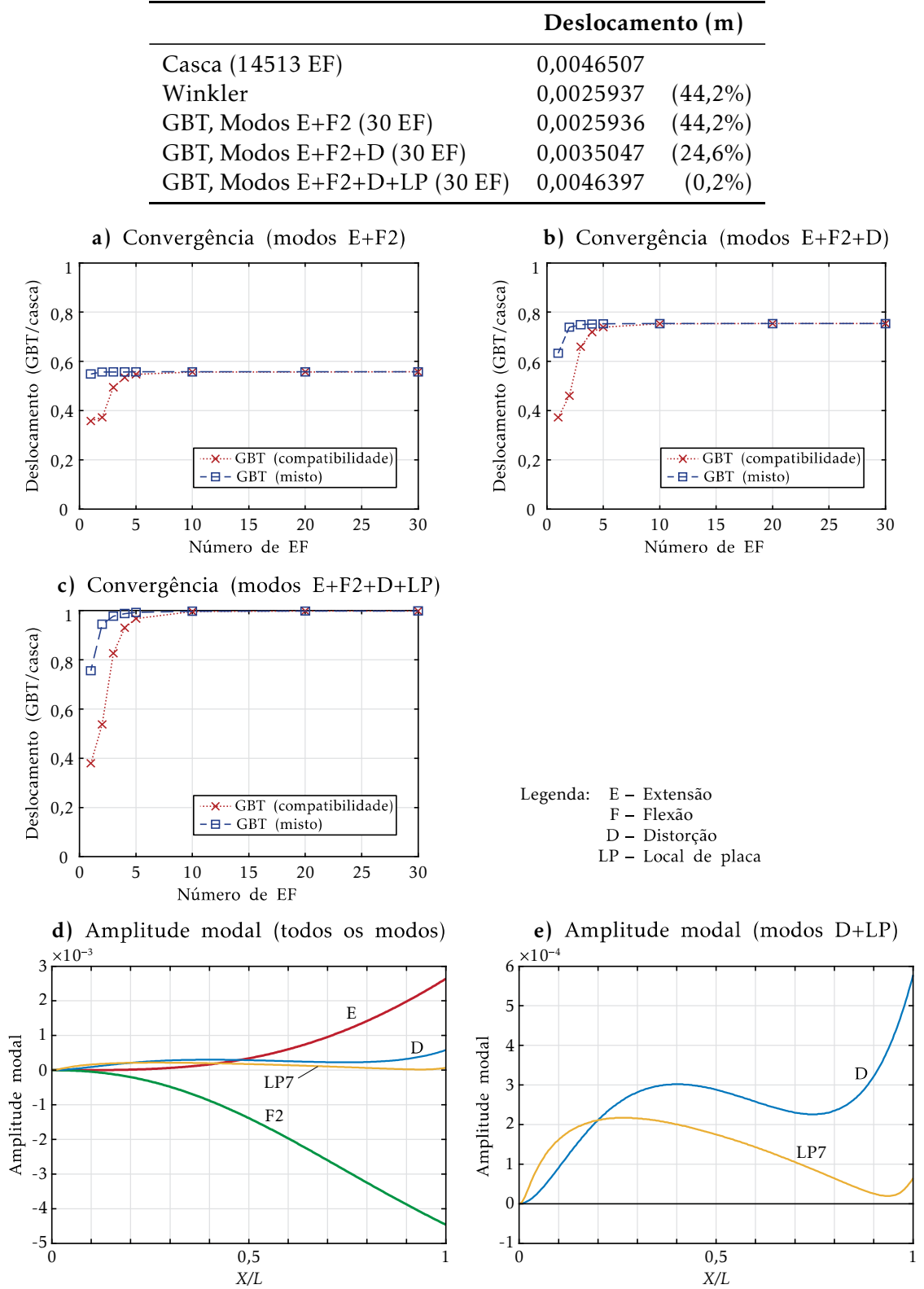


Figura 3.31: Flexão plana de um arco com secção em L com reforços: tabela com os valores do deslocamento do ponto de aplicação da força, gráficos de convergência e de amplitude modal.

barras retas, não exhibe “amortecimento” à medida que o observador se afasta do ponto de aplicação da força. O modo local de placa 7 exhibe um comportamento semelhante, embora o seu máximo não ocorra na extremidade livre.

### 3.11 Sumário

Neste Capítulo desenvolveu-se uma formulação geometricamente e fisicamente linear da Teoria Generalizada de Vigas para barras de parede fina de eixo circular. A formulação proposta permite impor as hipóteses usuais da GBT clássica, nomeadamente, as hipóteses de Kirchhoff, de Vlasov e de extensão transversal de membrana nula. Tal permite preservar a eficiência já conhecida da GBT clássica para barras retas. No entanto, não é demais referir que a formulação proposta permite também que se utilizem modos que não satisfaçam as hipóteses de Vlasov e/ou de extensão transversal de membrana nula. As equações de equilíbrio foram expressas em função das matrizes modais da GBT (surgeam três novas matrizes modais devido à curvatura das barras) e de esforços generalizados.

A formulação proposta é capaz de recuperar as equações clássicas de Winkler (caso plano) e Vlasov (caso tridimensional), tal como as respetivas relações entre esforços generalizados e medidas de deformação — esta abordagem é válida para secções em que o centróide coincida com o centro de corte e com eixos centrais principais paralelos aos eixos globais  $Z$  e  $R$ .

A imposição da hipótese de Vlasov no contexto das barras curvas conduz a uma restrição significativamente mais complexa que a obtida para barras retas. Assim, foram apresentadas duas abordagens para o cálculo de modos de deformação de barras de eixo circular. Na abordagem A1, destinada ao cálculo dos modos naturais de Vlasov (os restantes modos assumem-se iguais aos do caso prismático), utilizaram-se as funções de empenamento da GBT para barras retas para determinar os deslocamentos no plano da secção transversal — este procedimento é difícil de sistematizar e, portanto, está limitado a secções relativamente simples. Por outro lado, a abordagem A2, baseada no procedimento proposto por Gonçalves et al. (2010b, 2014), onde se utilizam problemas de valores e vetores próprios generalizados para obter e subdividir os modos de deformação, foi aplicada com sucesso a barras de eixo circular. Neste caso, foi mostrado que o raio de curvatura do eixo da barra influencia a forma dos modos de deformação — à medida que o raio aumenta, os modos aproximam-se dos modos obtidos para barras retas.

Finalmente, foram desenvolvidos, implementados e validados elementos finitos de compatibilidade (com aproximação direta das funções de amplitude modal dos modos de deformação) e misto (com aproximação das funções de amplitude modal e de deformações). O elemento finito de compatibilidade, embora seja insensível ao *locking* de corte devido à hipótese de Vlasov, não é livre de outras fontes de *locking*, principalmente de membrana. Assim, foi desenvolvido o elemento misto com aproximação da componente de deformação diretamente responsável pelo *locking*, para prevenir este fenómeno. Mostrou-se que a capacidade preditiva do elemento misto é superior à do elemento de

compatibilidade. Através de uma série de exemplos numéricos, foi ainda possível concluir que se obtêm resultados precisos com um número reduzido de modos de deformação e elementos finitos.

## Capítulo 4

# Formulação geometricamente exata para barras de eixo curvo

### 4.1 Introdução

No Capítulo 3 foi desenvolvida uma formulação linear da GBT para barras de eixo circular. A generalização desta formulação para grandes deslocamentos e curvaturas arbitrárias acarreta algumas dificuldades. Em primeiro lugar, a GBT não é válida para moderados a grandes deslocamentos e rotações finitas, uma vez que a descrição cinemática é baseada na hipótese de Kirchhoff para os pequenos deslocamentos e não considera explicitamente rotações finitas da secção. Por outro lado, as expressões deduzidas no Capítulo 3 são relativamente simples e elegantes em virtude da curvatura constante do eixo da barra — considerando uma curvatura arbitrária (bidimensional ou tridimensional) é-se conduzido, potencialmente, a expressões demasiado complexas. Por exemplo, a hipótese de Vlasov, para a qual se obteve uma expressão semelhante à utilizada para o caso reto, passa a ser dependente da curvatura (variável) da barra, conduzindo a modos de deformação variando ao longo do comprimento. Naturalmente, isto constitui uma dificuldade, tanto ao nível da conceção da formulação como da implementação computacional.

De forma a contornar as limitações enunciadas no parágrafo anterior, neste Capítulo desenvolve-se uma formulação geometricamente exata original para barras de parede fina cujo eixo possui uma curvatura inicial arbitrária. Este trabalho consiste numa extensão da formulação geometricamente exata desenvolvida por Gonçalves et al. (2010a) a problemas envolvendo barras pré-torcidas e/ou de eixo curvo, sujeitas a grandes deslocamentos, rotações finitas e deformação da secção transversal. Esta tarefa (não trivial) envolve a adoção criteriosa de hipóteses simplificativas, que são essenciais para garantir a eficiência computacional do elemento finito, sem que a precisão dos resultados seja afetada. Para além da introdução de uma configuração inicial envolvendo curvatura, esta formulação difere da proposta por Gonçalves et al. (2010a) no facto de não requerer o cálculo da derivada e das variações da curvatura de torção, que envolvem um esforço computacional elevado. Todas as expressões necessárias para a implementação do elemento finito de

barra proposto são ainda apresentadas numa forma matricial relativamente simples.

Conforme é feito nas abordagens geometricamente exatas, a descrição cinemática do elemento de barra proposto adota como graus de liberdade a translação e a rotação finita da secção transversal. Para além disso, a deformação da secção transversal é contabilizada através da inclusão de modos de deformação da secção na descrição cinemática. Os modos de deformação são obtidos utilizando o programa GBTUL 2.06 (Gonçalves et al., 2010b, 2014; Bebianio et al., 2015, 2018), dado que estes (i) consideram a deformação arbitrária da secção transversal e (ii) são subdivididos em conjuntos hierárquicos e com significado estrutural. Estes modos podem ainda ser complementados por modos de ordem superior (e.g., modos de extensão transversal quadráticos, conforme será visto na Secção 4.7).

Começa-se por apresentar, na Secção 4.2, uma breve revisão da literatura relativa às formulações de barra geometricamente exatas. Na Secção 4.3 apresenta-se a descrição cinemática e as hipóteses simplificativas adotadas, as quais são essenciais para a determinação das medidas de deformação, na Secção 4.4. Na Secção 4.5 obtêm-se as parcelas do trabalho virtual das forças interiores e exteriores e as respectivas linearizações incrementais/iterativas, com vista à implementação de um esquema incremental/iterativo com base no método de Newton-Raphson. Na Secção 4.6 procede-se à formulação de um elemento finito com base na formulação desenvolvida, com aproximação dos parâmetros cinemáticos por funções polinomiais cúbicas de Hermite. Para tal, são obtidas as variações do tensor de rotação total e das medidas de deformação (Secção 4.6.1), escrevem-se as medidas de deformação e as equações do trabalho virtual em função dos parâmetros cinemáticos (Secção 4.6.2) e reescreve-se as parcelas do trabalho virtual (e a sua linearização) atendendo à interpolação dos parâmetros cinemáticos (Secção 4.6.3). Finalmente, na Secção 4.7 são apresentados alguns exemplos de aplicação e validação do elemento finito proposto.

Deve-se ainda fazer uma observação final acerca da notação utilizada. A formulação do Capítulo 3 foi desenvolvida com vista a utilizar a descrição cinemática usual da GBT e, portanto, foi utilizada a notação introduzida por Gonçalves et al. (2010b) e Gonçalves e Camotim (2011) no contexto da GBT. Em contraste, a formulação apresentada neste Capítulo constitui uma extensão do trabalho desenvolvido por Gonçalves et al. (2010a), tendo-se optado por manter essa notação (a qual, por sua vez, é semelhante à utilizada por Ritto-Corrêa, 2004).

## 4.2 Revisão da literatura

Os primeiros contributos para o desenvolvimento de formulações de barras ditas *geometricamente exatas* deve-se a Reissner (1972), para o caso plano, e Simo (1985), para o caso tridimensional, razão pela qual se refere por vezes que este tipo de formulações são baseadas na *teoria de Reissner-Simo*. O termo *geometricamente exato* advém do facto da

validade da teoria subjacente se manter válida independentemente da magnitude dos deslocamentos e rotações envolvidos — a tese de Ritto-Corrêa (2004) inclui uma descrição detalhada desta teoria e dos seus desenvolvimentos.

Na teoria de Reissner-Simo, a descrição cinemática da secção transversal é feita exclusivamente através de movimentos de corpo-rígido (três translações e três rotações) e, portanto, considera que a secção permanece plana e indeformada em qualquer configuração. A consideração de modos de deformação foi introduzida pela primeira vez por Simo e Vu-Quoc (1991), os quais utilizaram um modo relativo ao empenamento de torção — este procedimento foi subsequentemente seguido por outros autores, nomeadamente Gruttmann et al. (1998, 2000) e Atluri et al. (2001). A formulação co-rotacional de Battini e Pacoste (2002a,b) também considera o empenamento de torção e permite incluir ou não a deformabilidade por corte e/ou bicorte.

A utilização de outros tipos de modos de deformação foi posteriormente explorada por outros autores. Petrov e Geradin (1998a,b) consideraram funções de distorção e empenamento associadas à solução de Saint-Venant para cada um dos seis esforços, mas não como graus de liberdade adicionais (para além disso, não é tida em conta a deformabilidade por corte). A formulação de Klinkel e Govindjee (2003) inclui três funções de empenamento para descrever o comportamento anisotrópico de barras sujeitas a flexão e torção.

As formulações desenvolvidas por Pimenta e Campello (2003) e Ritto-Corrêa (2004) permitem incluir modos de deformação tridimensionais arbitrários. No entanto, apenas a primeira foi implementada, para o caso de secções retangulares sujeitas a tração pura e flexão pura, utilizando três modos no plano associados a extensão e flexão, e um modo de empenamento de torção (Dasambiagio et al., 2009). Mais recentemente, Sokolev et al. (2015) propuseram uma formulação semelhante à de Dasambiagio et al. (2009), com aplicação ao caso plano e barras de secção retangular. Deve ainda mencionar-se a formulação de Wackerfuss e Gruttmann (2011) para secções de paredes espessas, a qual considera a deformação arbitrária da secção, muito embora os graus de liberdade associados sejam condensados estaticamente e, por isso, não são transmitidos entre elementos.

As supracitadas formulações não são aplicáveis a barras de parede fina suscetíveis à deformação da secção transversal. A primeira formulação geometricamente exata para barras de parede fina incluindo deformação arbitrária da secção transversal deve-se a Gonçalves et al. (2010a). Neste caso, os modos de deformação correspondem a funções arbitradas ou obtidas com a GBT. Esta formulação foi posteriormente melhorada em Gonçalves et al. (2011), introduzindo rotações finitas relativas entre as paredes da secção transversal, de forma a capturar melhor a distorção. No entanto, esta abordagem conduz a expressões significativamente mais complexas (o número de variáveis de rotação aumenta). Uma formulação semelhante foi proposta por Gabriele et al. (2016), para o estudo bidimensional do comportamento de cantoneiras e secções em C e I. Finalmente, deve-se referir o modelo espacial desenvolvido por Picault et al. (2016) para analisar régua de aço esbeltas, de secção transversal em arco circular, utilizando um único modo de deformação

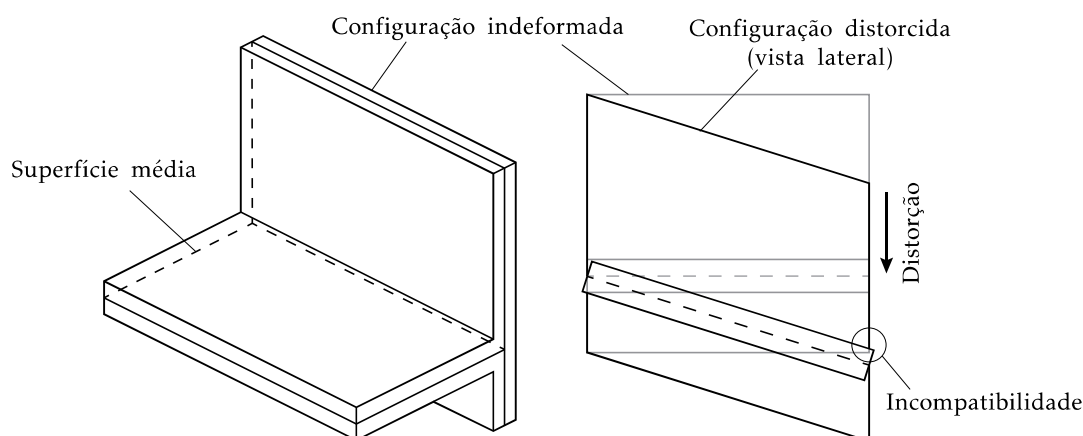


Figura 4.1: Incompatibilidade entre duas paredes adjacentes, quando ocorre distorção de membrana numa delas (a parede vertical).

que contabiliza a variação da curvatura da secção.

### 4.3 Descrição cinemática

A formulação proposta neste Capítulo baseia-se em três hipóteses fundamentais:

- (H1) A espessura da parede é reduzida relativamente às dimensões das secção transversal e é constante em cada parede (ou segmento de parede).
- (H2) Assume-se que a hipótese de Kirchhoff é válida — as fibras perpendiculares à superfície média das paredes mantêm-se indeformadas e perpendiculares à superfície média —, exceto para a deformação associada à curvatura de torção, caso em que as fibras não se mantêm necessariamente perpendiculares à superfície média.
- (H3) As deformações de flexão (variáveis na direção da espessura) são pequenas.

Estas hipóteses permitem descrever a configuração da secção transversal essencialmente em função da configuração da sua linha média (a exceção é o empenamento *secundário* ou variável na espessura, devido à curvatura de torção) e dividir as deformações em parcelas de membrana (relativas à superfície média das paredes) e de flexão (nulas ao nível da superfície média e lineares na direção da espessura). No entanto, conforme discutido em Gonçalves et al. (2010a), esta descrição conduz a uma ligeira perda de compatibilidade entre duas paredes não coplanares (ver Figura 4.1), devido ao “conflito” entre a hipótese de Kirchhoff e a existência de distorção de membrana nas paredes, mas tal não é significativo para barras de parede fina.

As deformações de flexão são aditivas, em virtude da hipótese H3, o que permite separar a deformação de flexão associada à curvatura de torção das restantes parcelas. Assim, o empenamento secundário associado à torção é considerado como um grau de liberdade independente (não depende da curvatura de torção), o que permite evitar o elevado esforço computacional associado ao cálculo das derivadas e variações da curvatura



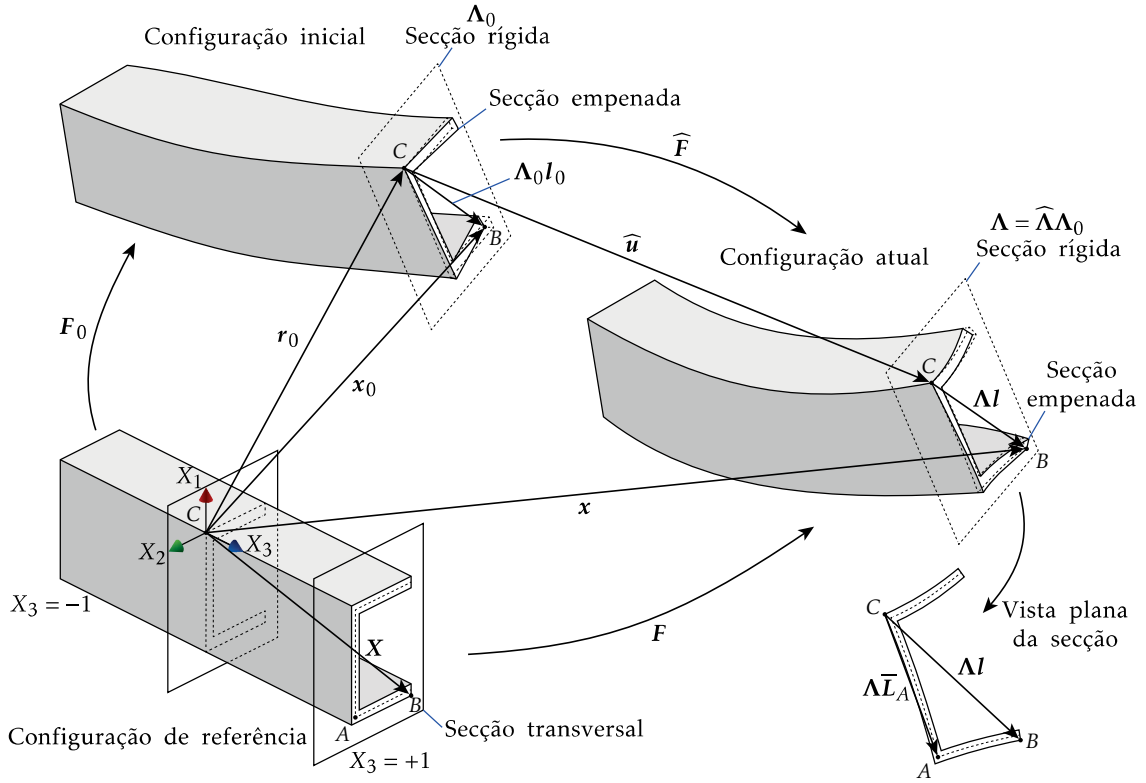


Figura 4.2: Configurações de referência, inicial e atual de uma barra de parede fina.

de torção (ver Gonçalves et al., 2010a). No entanto, note-se que o empenamento primário (na linha média) e secundário de torção são ambos incluídos na formulação, mas como modos de deformação independentes.

De acordo com a Figura 4.2, define-se um referencial ortonormado direto  $(X_1, X_2, X_3)$  com vetores-base  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e consideram-se três configurações para uma mesma barra:

- (i) A *configuração de referência*, onde a barra assume uma forma prismática reta imaginária, com o eixo longitudinal definido por  $X_3 \in [-1, 1]$ , cuja interseção com o plano de cada secção transversal (perpendicular ao eixo) define o centro  $C$ .
- (ii) A *configuração inicial*, correspondente à forma curva mas indeformada da barra e a  $\lambda = 0$ , sendo  $\lambda$  o fator de carga.
- (iii) A *configuração atual*, associada a  $\lambda \neq 0$ .

A posição do ponto  $C$  não está restringida a uma posição fixa, embora seja frequente assumir que  $C$  coincide com o centróide ou o centro de corte da secção transversal. Os vetores-posição de um ponto material arbitrário  $B$  nas configurações de referência, inicial e atual são representados por  $X$ ,  $x_0$  e  $x$ , respetivamente.

A configuração de referência de cada parede é definida por

$$X = X_3 E_3 + \bar{L}_A + R(X_1 E_1 + X_2 E_2), \quad X_1 \in [-t/2, t/2], \quad X_2 \in [0, b], \quad X_3 \in [-1, 1], \quad (4.1)$$

onde  $\bar{\mathbf{L}}_A$  é um vetor bidimensional, no plano da secção transversal, que define a posição da “origem”  $A$  da linha média de cada parede (na Figura 4.2 mostra-se este ponto para o banzo inferior),  $\mathbf{R}$  é um tensor de rotação “local” que efetua uma rotação dos vetores-base em torno de  $X_3$ , de forma a que  $\mathbf{R}\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{R}\mathbf{E}_2$  definam as direções da espessura e da linha média de cada parede, respetivamente,  $t$  é a espessura e  $b$  é a largura da parede. O tensor de rotação  $\mathbf{R}$  é constante para cada parede e mantém-se fixo relativamente ao movimento da secção (para as três configurações) e pode ser obtido através da fórmula de Rodrigues (recordar a Eq. (2.66)), para uma rotação em torno de  $X_3$ , conduzindo a

$$\mathbf{R} = \sin\varphi \tilde{\mathbf{E}}_3 + \cos\varphi (\mathbf{1} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3) + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3, \quad (4.2)$$

onde  $\varphi$  corresponde ao ângulo de rotação. A título de exemplo, para o banzo inferior na Figura 4.2 tem-se  $\varphi = \pi$ , uma vez que  $\mathbf{R}\mathbf{E}_2$  está orientado do ponto  $A$  para a extremidade livre do banzo.

Relativamente à configuração inicial, o vetor-posição é definido por

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{l}_0, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{l}_0 = \bar{\mathbf{L}}_A + \mathbf{R} \left( X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + \sum_{i=1}^D p_0^{(i)} \boldsymbol{\chi}^{(i)} \right), \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{r}_0 = X_3 \mathbf{E}_3 + \mathbf{u}_0(X_3)$  define a posição do centro  $C$  da secção transversal ( $\mathbf{u}_0$  é o respetivo vetor de deslocamento),  $\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{\Lambda}_0(X_3)$  é o tensor de rotação da secção transversal em torno de  $C$ ,  $\boldsymbol{\chi}^{(i)} = \boldsymbol{\chi}^{(i)}(X_1, X_2)$  são as funções de forma que definem os deslocamentos de cada modo de deformação da secção transversal  $i = 1, \dots, D$ , sendo  $D$  o número de modos considerados, e  $p_0^{(i)} = p_0^{(i)}(X_3)$  são as respetivas funções escalares de amplitude ao longo do eixo da barra.

Finalmente, a configuração atual é dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_0 + \widehat{\mathbf{u}} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{l}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \widehat{\mathbf{\Lambda}}(X_3) \mathbf{\Lambda}_0(X_3), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{L}}_A + \mathbf{R} \left( X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + \sum_{i=1}^D \left( p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)} \right) \boldsymbol{\chi}^{(i)} \right) = \mathbf{l}_0 + \mathbf{R} \sum_{i=1}^D \widehat{p}^{(i)} \boldsymbol{\chi}^{(i)}, \quad (4.7)$$

onde o símbolo “ $\widehat{\phantom{x}}$ ” é introduzido nos parâmetros que definem relações entre as configurações inicial e atual ( $\widehat{\mathbf{u}}$ ,  $\widehat{\mathbf{\Lambda}}$  e  $\widehat{p}^{(i)}$ ) e  $\mathbf{\Lambda}$  representa o tensor de rotação total da secção transversal.

É de notar que as expressões anteriores permitem uma descrição exata de qualquer configuração da barra, mesmo que seja conceptualmente necessário considerar um número infinito de modos de deformação. Em seguida serão introduzidas hipóteses simplificativas na formulação, mas deve desde já salientar-se que a descrição da linha média da secção transversal mantém-se cinematicamente completa.

As funções de forma dos modos de deformação são escritas na forma

$$\boldsymbol{\chi}^{(i)}(X_1, X_2) = \bar{\boldsymbol{\chi}}^{(i)}(X_2) + X_1 \boldsymbol{\psi}^{(i)}(X_2), \quad (4.8)$$

onde  $\bar{\chi}^{(i)}(X_2) = \bar{\chi}_1^{(i)}(X_2)\mathbf{E}_1 + \bar{\chi}_2^{(i)}(X_2)\mathbf{E}_2 + \bar{\chi}_3^{(i)}(X_2)\mathbf{E}_3$  define os deslocamentos da linha média da secção transversal e  $X_1\psi^{(i)}$  permite contabilizar a variação linear na direção da espessura (a sua componente segundo  $X_3$  corresponde ao empenamento secundário). Devido à hipótese H2, a variação da espessura da parede pode ser desprezada, sendo possível definir

$$\psi^{(i)} = \psi_2^{(i)}(X_2)\mathbf{E}_2 + \psi_3^{(i)}(X_2)\mathbf{E}_3. \quad (4.9)$$

Para além disso, a hipótese H2 também estabelece que as funções  $\psi^{(i)}$  são dependentes da configuração da superfície média da parede e, portanto, não constituem graus de liberdade independentes, com a exceção da função associada ao modo de empenamento secundário de torção.

Por uma questão de conveniência, antes de prosseguir, as Eqs. (4.5)–(4.7) são agora escritas em função dos deslocamentos da superfície média da parede,  $\bar{\mathbf{x}}$ , e do vetor-diretor  $\mathbf{n}$ , o qual define a direção das fibras inicialmente perpendiculares à superfície média das paredes. Para a configuração atual obtém-se

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + X_1\mathbf{n}, \quad (4.10)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{r}_0 + \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{\Lambda}_0\bar{\mathbf{l}}, \quad (4.11)$$

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l}(X_1 = 0) = \bar{\mathbf{l}}_A + \mathbf{R} \left( X_2\mathbf{E}_2 + \sum_{i=1}^D \left( p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)} \right) \bar{\chi}^{(i)} \right), \quad (4.12)$$

$$\mathbf{n} = \widehat{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{\Lambda}_0\mathbf{R} \left( \mathbf{E}_1 + \sum_{i=1}^D \left( p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)} \right) \psi^{(i)} \right) \quad (4.13)$$

e, para a configuração inicial, tem-se antes

$$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + X_1\mathbf{n}_0, \quad (4.14)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{\Lambda}_0\bar{\mathbf{l}}_0, \quad (4.15)$$

$$\bar{\mathbf{l}}_0 = \bar{\mathbf{l}}_A + \mathbf{R} \left( X_2\mathbf{E}_2 + \sum_{i=1}^D p_0^{(i)} \bar{\chi}^{(i)} \right), \quad (4.16)$$

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{\Lambda}_0\mathbf{R} \left( \mathbf{E}_1 + \sum_{i=1}^D p_0^{(i)} \psi^{(i)} \right). \quad (4.17)$$

## 4.4 Deformação

A deformação entre as três configurações pode ser caracterizada utilizando três gradientes de deformação, conforme indicado na Figura 4.2, dados por

$$\mathbf{F}_0 = \nabla \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}, \quad \widehat{\mathbf{F}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{x}_0}, \quad (4.18)$$

onde  $\nabla(\cdot) = d(\cdot)/d\mathbf{X}$ . Estes gradientes relacionam-se através de

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{F}}\mathbf{F}_0 \Rightarrow \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{F}_0^{-1}, \quad (4.19)$$

onde a última expressão vai ser utilizada no cálculo do tensor de deformação de Green-Lagrange, dado que os gradientes de deformação  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}_0$  envolvem derivadas em relação a  $\mathbf{X}$  e, portanto, podem ser obtidos a partir da derivação da descrição cinemática utilizada.

Em primeiro lugar, utiliza-se a Eq. (4.10) para escrever  $\mathbf{F}$  numa forma mais conveniente, dada por

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x} = \nabla \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{E}_1 + X_1 \nabla \mathbf{n}. \quad (4.20)$$

O primeiro termo,  $\nabla \bar{\mathbf{x}}$ , está associado apenas à superfície média e, portanto, constitui a parcela de membrana de  $\mathbf{F}$ , ou seja,

$$\mathbf{F}^M = \nabla \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3, \quad (4.21)$$

onde  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  são os vetores *push-forward*<sup>1</sup> de  $\mathbf{E}_2$  e  $\mathbf{E}_3$ , respetivamente. Estes vetores podem ser escritos em função das suas retro-rotações, pelo tensor de rotação  $(\widehat{\Lambda} \Lambda_0 \mathbf{R})^T$ , denotadas por  $\mathbf{g}_2$  e  $\mathbf{g}_3$ , i.e.,

$$\mathbf{e}_2 = \bar{\mathbf{x}}_{,2} = \widehat{\Lambda} \Lambda_0 \mathbf{R} \mathbf{g}_2, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{E}_2 + \sum_{i=1}^D \left( p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)} \right) \bar{\mathbf{x}}_{,2}^{(i)}, \quad (4.23)$$

$$\mathbf{e}_3 = \bar{\mathbf{x}}_{,3} = \widehat{\Lambda} \Lambda_0 \mathbf{R} \mathbf{g}_3, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_3 &= \mathbf{E}_3 + \Gamma + \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{l}} + \sum_{i=1}^D \left( p_{0,3}^{(i)} + \widehat{p}_{,3}^{(i)} \right) \bar{\mathbf{x}}^{(i)} \\ &= \mathbf{E}_3 + \Gamma + \mathbf{K} \times (\mathbf{R}^T \bar{\mathbf{l}}) + \sum_{i=1}^D \left( p_{0,3}^{(i)} + \widehat{p}_{,3}^{(i)} \right) \bar{\mathbf{x}}^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde foram utilizadas as medidas de deformação  $\Gamma$  e  $\mathbf{K}$ , originalmente propostas por Simo (1985) e, neste caso particular, dadas por

$$\Gamma = (\widehat{\Lambda} \Lambda_0 \mathbf{R})^T (\mathbf{r}_{0,3} + \widehat{\mathbf{u}}_{,3}) - \mathbf{E}_3 = \Gamma_1 \mathbf{E}_1 + \Gamma_2 \mathbf{E}_2 + \Gamma_3 \mathbf{E}_3, \quad (4.26)$$

$$\mathbf{K} = \text{axi} \left( (\widehat{\Lambda} \Lambda_0 \mathbf{R})^T (\widehat{\Lambda} \Lambda_0 \mathbf{R})_{,3} \right) = \mathbf{K}_0 + \widehat{\mathbf{K}} = \kappa_1 \mathbf{E}_1 + \kappa_2 \mathbf{E}_2 + \kappa_3 \mathbf{E}_3, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{R}^T \text{axi} (\Lambda_0^T \Lambda_{0,3}) = \kappa_{01} \mathbf{E}_1 + \kappa_{02} \mathbf{E}_2 + \kappa_{03} \mathbf{E}_3, \quad (4.28)$$

$$\widehat{\mathbf{K}} = (\Lambda_0 \mathbf{R})^T \text{axi} (\widehat{\Lambda}^T \widehat{\Lambda}_{,3}) = \widehat{\kappa}_1 \mathbf{E}_1 + \widehat{\kappa}_2 \mathbf{E}_2 + \widehat{\kappa}_3 \mathbf{E}_3. \quad (4.29)$$

Importa ainda referir que  $\Gamma$  quantifica a extensão/distorção do eixo da barra e  $\mathbf{K}$  mede a curvatura da barra/parede. Assim,  $\widehat{\mathbf{K}}$  e  $\mathbf{K}_0$  correspondem às retro-rotações das curvaturas entre as configurações inicial-atual e de referência-inicial, respetivamente. Note-se

<sup>1</sup>Esta designação está associada à alteração da configuração em relação à qual o vetor (ou tensor) está associado, utilizando um gradiente de deformação (ver, por exemplo, Bonet e Wood, 1997). Quando a transformação é feita para uma configuração “mais recente” (e.g., da configuração inicial para a de referência), diz-se que se efetuou um *push-forward*, sendo a transformação inversa designada por *pull-back*.

também que as curvaturas estão diretamente relacionadas com o conceito de *spin* (Secção 2.5.3), uma vez que, de (2.85) e (2.95),

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{R}^T \mathbf{T}_0^T \boldsymbol{\theta}_{0,3}, \quad (4.30)$$

$$\widehat{\mathbf{K}} = (\boldsymbol{\Lambda}_0 \mathbf{R})^T \widehat{\mathbf{T}}^T \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{,3}, \quad (4.31)$$

onde  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_0)$  e  $\widehat{\mathbf{T}} = \mathbf{T}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ .

O segundo termo da Eq. (4.20) surge como consequência natural da descrição cinemática adotada, utilizando o vetor diretor  $\mathbf{n}$ . Finalmente, o terceiro termo fornece

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{n} = & \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} \boldsymbol{\Lambda}_0 \mathbf{R} \left( \mathbf{K} \times \left( \mathbf{E}_1 + \sum_{i=1}^D \left( p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)} \right) \boldsymbol{\psi}^{(i)} \right) \otimes \mathbf{E}_3 \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^D \left( p_{0,3}^{(i)} + \widehat{p}_{,3}^{(i)} \right) \boldsymbol{\psi}^{(i)} \otimes \mathbf{E}_3 + \left( p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)} \right) \boldsymbol{\psi}_{,2}^{(i)} \otimes \mathbf{E}_2 \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

O próximo passo consiste em utilizar a hipótese H2 para exprimir as funções de forma na direção da espessura  $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$  e as respetivas amplitudes em função da configuração da superfície média da parede. Deste modo, à exceção do empenamento secundário de torção, as relações seguintes devem manter-se válidas para todas as configurações

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad \wedge \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \quad (4.33)$$

Atendendo à hipótese H3, retêm-se apenas os termos lineares e, das Eqs. (4.13) e (4.22)–(4.25), obtém-se

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 = \left( \mathbf{E}_1 + \sum_{i=1}^D \left( p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)} \right) \boldsymbol{\psi}^{(i)} \right) \cdot \mathbf{g}_2 \approx \sum_{i=1}^D \left( p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)} \right) \left( \psi_2^{(i)} + \bar{\chi}_{1,2}^{(i)} \right) = 0, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = & \left( \mathbf{E}_1 + \sum_{i=1}^D \left( p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)} \right) \boldsymbol{\psi}^{(i)} \right) \cdot \mathbf{g}_3 \\ \approx & \Gamma_1 + \mathbf{E}_1 \cdot \left( \mathbf{K} \times \left( \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{l}} \right) \right) + \sum_{i=1}^D \left( \left( p_{0,3}^{(i)} + \widehat{p}_{,3}^{(i)} \right) \bar{\chi}_1^{(i)} + \left( p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)} \right) \psi_3^{(i)} \right) \\ \approx & \Gamma_1 - \kappa_3 \left( \bar{d}_A + X_2 \right) + \sum_{i=1}^D \left( \left( p_{0,3}^{(i)} + \widehat{p}_{,3}^{(i)} \right) \bar{\chi}_1^{(i)} + \left( p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)} \right) \psi_3^{(i)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde  $\bar{d}_A = \bar{\mathbf{L}}_A \cdot \mathbf{R} \mathbf{E}_2$ .

Primeiro, a Eq. (4.34) é satisfeita se, para cada modo  $i$ ,

$$\psi_2^{(i)} = -\bar{\chi}_{1,2}^{(i)}. \quad (4.36)$$

Relativamente à Eq. (4.35), despreza-se a componente de distorção do eixo na direção da espessura,  $\Gamma_1$ , uma vez que é, em geral, desprezável para barras de parede fina (e recorde-se que esta simplificação afeta apenas os termos de flexão). Para os restantes termos, obtêm-se as relações seguintes:

- (i) De acordo com a hipótese H2, a curvatura de torção  $\kappa_3$  não tem de satisfazer a Eq. (4.35). Esta abordagem difere da proposta por Gonçalves et al. (2010a) e evita o cálculo das derivadas e variações da curvatura de torção, que requerem um esforço computacional elevado. No entanto, caso se considerasse que a hipótese H2 também era válida para a curvatura de torção, então a Eq. (4.35) permite concluir que o empenamento secundário associado à torção é definido de forma particularmente simples, pela função (note-se a utilização do índice inferior  $t$ )

$$\psi_{t3} = \bar{d}_A + X_2. \quad (4.37)$$

Assim, esta função será utilizada como grau de liberdade independente. Esta abordagem é análoga à utilizada na teoria clássica da torção de Bencotter (1954), segundo a qual a função de empenamento é calculada assumindo que a sua amplitude ao longo da barra é igual à curvatura de torção, mas essa relação não é posteriormente considerada na descrição cinemática da barra (o que corresponde a permitir a ocorrência de deformação por bicorte).

- (ii) A cada modo de deformação  $i$  com  $\bar{\chi}_1^{(i)} \neq 0$  está associado um modo  $j$  tal que

$$\left(p_0^{(j)} + \widehat{p}^{(j)}\right)\psi_3^{(j)} + \left(p_{0,3}^{(i)} + \widehat{p}_{,3}^{(i)}\right)\bar{\chi}_1^{(i)} = 0, \quad i \neq j, \quad (4.38)$$

uma condição que pode ser satisfeita através de

$$p_0^{(j)} = p_{0,3}^{(i)} \quad \wedge \quad \widehat{p}^{(j)} = \widehat{p}_{,3}^{(i)} \quad \wedge \quad \psi_3^{(j)} = -\bar{\chi}_1^{(i)}. \quad (4.39)$$

Para efeitos práticos, os modos  $j$  são simplesmente adicionados aos correspondentes modos  $i$ , constituindo a sua componente  $\psi_3^{(i)}$ , na direção da espessura, mas tendo em conta que, de (4.39), as correspondentes funções de amplitude são  $p_{0,3}^{(i)}$  e  $\widehat{p}_{,3}^{(i)}$  em vez de  $p_0^{(i)}$  e  $\widehat{p}^{(i)}$ .

Os resultados anteriores permitem escrever  $\mathbf{n}$  sem as funções  $\psi^{(i)}$  (para condensar as expressões, utiliza-se a notação  $p^{(i)} = p_0^{(i)} + \widehat{p}^{(i)}$ ), i.e.,

$$\mathbf{n} = \widehat{\Lambda}\Lambda_0\mathbf{R}\left(E_1 + p_t\psi_{t3}E_3 - \sum_{i=1}^D \left(p^{(i)}\bar{\chi}_{1,2}E_2 + p_{,3}^{(i)}\bar{\chi}_1^{(i)}E_3\right)\right), \quad (4.40)$$

onde  $p_t$  é a função escalar da amplitude associada ao modo de empenamento secundário (4.37) — este modo é colocado fora do somatório uma vez que é, de certa forma, distinto dos restantes modos. Para além disso, mantendo apenas os termos lineares, a Eq. (4.32) fornece

$$\nabla\mathbf{n} = \widehat{\Lambda}\Lambda_0\mathbf{R}\nabla\mathbf{t}, \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{t} = & \left(-\kappa_2 + p_{t,3}\psi_{t3} - \sum_{i=1}^D p_{,33}^{(i)}\bar{\chi}_1^{(i)}\right)E_3 \otimes E_3 - \sum_{i=1}^D p^{(i)}\bar{\chi}_{1,22}^{(i)}E_2 \otimes E_2 \\ & + p_tE_3 \otimes E_2 + \kappa_3E_2 \otimes E_3 - \sum_{i=1}^D p_3^{(i)}\bar{\chi}_{1,2}^{(i)}(E_2 \otimes E_3 + E_3 \otimes E_2), \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde se tirou partido do facto de, pela Eq. (4.37),  $\psi_{t3,2} = 1$ . Caso se considerasse que  $p_t = \kappa_3$ , esta expressão permitiria recuperar a apresentada por Gonçalves et al. (2010a). No entanto, nesse caso surge o termo  $\kappa_{3,3}$ , cujas variações são particularmente complexas de obter e acarretam um esforço de cálculo significativo que prejudica o desempenho computacional do elemento finito.

Deve-se notar que as simplificações até aqui introduzidas têm apenas influência sobre as componentes de deformação de flexão. De facto, conforme será discutido de seguida, as componentes de deformação de membrana são geometricamente exatas.

Recorrendo à relação (4.19), a deformação de Green-Lagrange entre as configurações inicial e atual é dada por

$$\widehat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( \widehat{\mathbf{F}}^T \widehat{\mathbf{F}} - \mathbf{1} \right) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}_0^{-T} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{F}_0^{-1} - \mathbf{1} \right). \quad (4.43)$$

O termo  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  pode ser simplificado recorrendo às Eqs. (4.20), (4.21), (4.41) e (4.42), bem como às hipóteses H1 e H2, conduzindo a

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{F}^M)^T \mathbf{F}^M + 2X_1 \text{sim} \left( (\mathbf{F}^M)^T \nabla \mathbf{n} \right) + \underline{2\text{sim}((\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_3)} + \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1, \quad (4.44)$$

onde o termo sublinhado não surge na formulação apresentada por Gonçalves et al. (2010a), em que a hipótese de Kirchhoff também é satisfeita pela curvatura de torção. O primeiro termo é relativo à deformação de membrana, o segundo acopla os termos de membrana e de flexão e pode ser simplificado recorrendo à hipótese H3, obtendo-se  $(\mathbf{F}^M)^T \nabla \mathbf{n} \approx \nabla \mathbf{t}$ . Para o terceiro termo, atendendo à Eq. (4.35) e lembrando de (4.40) que a função de empenamento secundário foi separada dos restantes termos, obtém-se  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = (p_t - \kappa_3) \psi_{t3}$ . Assim, é-se conduzido a uma subdivisão das deformações em parcelas de membrana e de flexão, i.e.,

$$\widehat{\mathbf{E}} = \widehat{\mathbf{E}}^M + \widehat{\mathbf{E}}^F, \quad (4.45)$$

$$\widehat{\mathbf{E}}^M = \frac{1}{2} \mathbf{F}_0^{-T} \left( (\mathbf{F}^M)^T \mathbf{F}^M + \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{1} \right) \mathbf{F}_0^{-1}, \quad (4.46)$$

$$\widehat{\mathbf{E}}^F = \mathbf{F}_0^{-T} (\text{sim}(X_1 \nabla \mathbf{t} + (p_t - \kappa_3) \psi_{t3} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_3)) \mathbf{F}_0^{-1}. \quad (4.47)$$

Considerem-se primeiro os termos de membrana, que são geometricamente exatos. De forma a facilitar a interpretação física destes termos e a utilizar uma relação constitutiva para estados planos de tensão, é necessário escrevê-los num referencial que acompanha a superfície média da parede entre a configuração de referência e a configuração inicial. Tal é conseguido através de

$$\mathbf{E}^M = \check{\mathbf{\Lambda}}_0^T \widehat{\mathbf{E}}^M \check{\mathbf{\Lambda}}_0, \quad (4.48)$$

onde  $\check{\mathbf{\Lambda}}_0$  é um tensor de rotação, da configuração de referência para a configuração inicial, definido de forma a que  $\check{\mathbf{\Lambda}}_0 \mathbf{E}_1$  coincida com a direção da espessura e  $\check{\mathbf{\Lambda}}_0 \mathbf{E}_3$  acompanhe a posição das fibras longitudinais, conforme se ilustra na Figura 4.3. Note-se que, em geral,

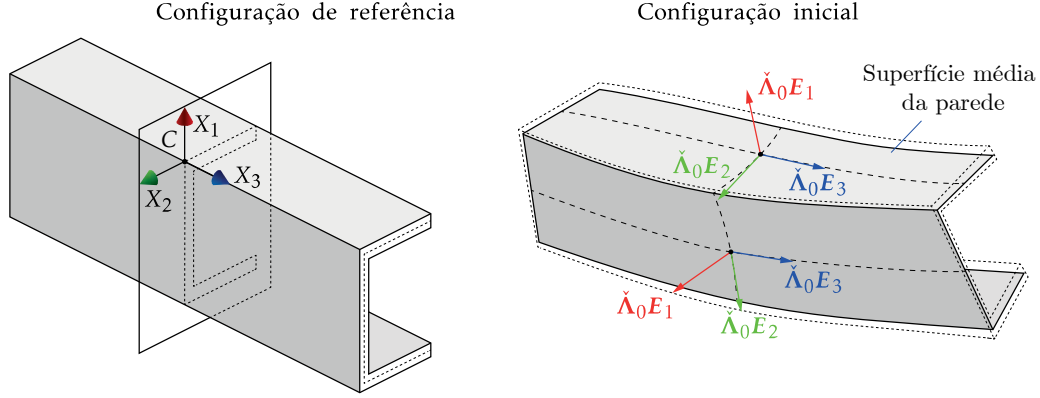


Figura 4.3: Rotação dos vetores-base por  $\check{\Lambda}_0$ , da configuração de referência para a configuração inicial.

$\check{\Lambda}_0 \neq \Lambda_0 R$ , em particular no caso de barras pré-torcidas. Assim, este tensor de rotação é dado por

$$\check{\Lambda}_0 = \check{e}_{01} \otimes E_1 + \check{e}_{02} \otimes E_2 + \check{e}_{03} \otimes E_3, \quad (4.49)$$

onde

$$\check{e}_{03} = \frac{e_{03}}{\|e_{03}\|}, \quad \check{e}_{01} = \frac{e_{02} \times e_{03}}{\|e_{02} \times e_{03}\|}, \quad \check{e}_{02} = \check{e}_{03} \times \check{e}_{01} \quad (4.50)$$

e, das Eqs. (4.22)–(4.25) e (4.26)–(4.28), tem-se

$$e_{02} = \Lambda_0 R g_{02}, \quad (4.51)$$

$$g_{02} = E_2 + \sum_{i=1}^D p_0^{(i)} \bar{\chi}_{,2}^{(i)}, \quad (4.52)$$

$$e_{03} = \Lambda_0 R g_{03}, \quad (4.53)$$

$$g_{03} = E_3 + \Gamma_0 + K_0 \times (R^T \bar{l}_0) + \sum_{i=1}^D p_{0,3}^{(i)} \bar{\chi}^{(i)}, \quad (4.54)$$

$$\Gamma_0 = (\Lambda_0 R)^T r_{0,3} - E_3. \quad (4.55)$$

Para além disso,  $F_0$  é calculado a partir de  $e_{02}$  e  $e_{03}$ , obtendo-se

$$F_0 = \frac{e_{02} \times e_{03}}{\|e_{02} \times e_{03}\|} \otimes E_1 + e_{02} \otimes E_2 + e_{03} \otimes E_3. \quad (4.56)$$

Finalmente, as relações anteriores conduzem a

$$\begin{aligned} 2E^M &= \check{\Lambda}_0^T F_0^{-T} ((g_2 \cdot g_2 - 1) E_2 \otimes E_2 + (g_3 \cdot g_3 - 1) E_3 \otimes E_3 \\ &\quad + (g_2 \cdot g_3) (E_2 \otimes E_3 + E_3 \otimes E_2)) F_0^{-1} \check{\Lambda}_0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Considerem-se agora os termos de flexão. Atendendo à hipótese H3, em vez de se efetuar a retro-rotação de (4.47), é suficiente subtrair a parcela corotacional entre as



configurações de referência/atual e de referência/inicial, obtendo-se

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^F &\approx X_1 \text{sim}(\nabla \mathbf{t} - \nabla \mathbf{t}_0) + \text{sim}((\widehat{p}_t - \widehat{\kappa}_3) \psi_{t3} \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_3) \\
 &= -X_1 \sum_{i=1}^D \widehat{p}^{(i)} \overline{\chi}_{1,22}^{(i)} \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 \\
 &\quad - X_1 \left( \widehat{\kappa}_2 - \widehat{p}_{t,3} \psi_{t3} + \sum_{i=1}^D \widehat{p}_{,33}^{(i)} \overline{\chi}_1^{(i)} \right) \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \\
 &\quad + \frac{1}{2} X_1 \left( \widehat{\kappa}_3 + \widehat{p}_t - 2 \sum_{i=1}^D \widehat{p}_{,3}^{(i)} \overline{\chi}_{1,2}^{(i)} \right) (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\widehat{p}_t - \widehat{\kappa}_3) \psi_{t3} (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_1). \tag{4.58}
 \end{aligned}$$

Relativamente à implementação computacional, é conveniente escrever os tensores de deformação utilizando notação de Voigt, denotada pelo índice inferior “ $v$ ”, ou seja,

$$\mathbf{E}_v = \mathbf{E}_v^M + \mathbf{E}_v^F, \tag{4.59}$$

$$\mathbf{E}_v^M = \begin{bmatrix} E_{22}^M \\ E_{33}^M \\ 2E_{23}^M \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_v^F = \begin{bmatrix} E_{22}^F \\ E_{33}^F \\ 2E_{23}^F \\ 2E_{13}^F \end{bmatrix}. \tag{4.60}$$

## 4.5 Tensão e equilíbrio

O tensor de deformação retro-rodado de Green-Lagrange  $\mathbf{E}_v$  forma um par conjugado com a retro-rotação do segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff,

$$\mathbf{S}_v = \begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{bmatrix}. \tag{4.61}$$

A relação constitutiva tangente pode assim ser escrita como

$$d\mathbf{S}_v = \mathbf{C}_t d\mathbf{E}_v, \tag{4.62}$$

onde  $\mathbf{C}_t$  é o operador constitutivo tangente (muito embora os exemplos apresentados na Secção 4.7 apenas considerem materiais elásticos lineares).

As equações de equilíbrio são obtidas através do princípio dos trabalhos virtuais, escrito no volume de referência, sendo dado por

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \Leftrightarrow - \int_V \mathbf{S}_v^T \delta \mathbf{E}_v J_0 dV + \delta \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{Q} = 0, \tag{4.63}$$

onde  $V$  é o volume da barra na configuração de referência,  $J_0 = \det(\mathbf{F}_0)$  e, por uma questão de simplicidade, apenas se considera uma força concentrada  $\mathbf{Q}$  aplicada na superfície

média da parede. A variação virtual do vetor-posição da superfície média pode ser obtido a partir da Eq. (4.11), a qual fornece

$$\delta \bar{\mathbf{x}} = \delta \widehat{\mathbf{u}} + \delta \widehat{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{\Lambda}_0 \bar{\mathbf{l}} + \widehat{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{R} \sum_{i=1}^D \delta \widehat{\mathbf{p}}^{(i)} \bar{\mathbf{x}}^{(i)}. \quad (4.64)$$

A resolução das equações de equilíbrio é efetuada recorrendo a um esquema incremental/iterativo clássico, o que requer a linearização das equações na direção de uma variação incremental/iterativa da configuração  $\Delta \phi$  e do parâmetro de carga  $\Delta \lambda$ , conduzindo a

$$D\delta W = D_{mat}\delta W_{int}[\Delta \phi] + D_{geo}\delta W_{int}[\Delta \phi] + D\delta W_{ext}[\Delta \phi] + D\delta W_{ext}[\Delta \lambda], \quad (4.65)$$

com

$$D_{mat}\delta W_{int}[\Delta \phi] = - \int_V \delta \mathbf{E}_v^T \mathbf{C}_t \Delta \mathbf{E}_v J_0 \, dV, \quad (4.66)$$

$$D_{geo}\delta W_{int}[\Delta \phi] = - \int_V \mathbf{S}_v^T \Delta \delta \mathbf{E}_v J_0 \, dV, \quad (4.67)$$

$$D\delta W_{ext}[\Delta \phi] = \Delta \delta \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{Q}, \quad (4.68)$$

$$D\delta W_{ext}[\Delta \lambda] = \delta \bar{\mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{Q}, \quad (4.69)$$

onde  $D_{mat}\delta W_{int}$  e  $D_{geo}\delta W_{int}$  são as chamadas parcelas material e geométrica, respetivamente, da linearização do trabalho virtual das forças interiores.

## 4.6 Formulação de um elemento finito

Adotando a abordagem seguida por Gonçalves et al. (2010a), os tensores de rotação são parametrizados por vetores de rotação, uma vez que (i) permitem uma interpretação geométrica simples das rotações, (ii) envolve o número mínimo de parâmetros (três), (iii) as condições de fronteira cinemática são facilmente interpretadas e (iv) torna-se possível atualizar as variáveis de forma aditiva no processo incremental/iterativo (ver Cardona e Geradin, 1988; Ibrahimbegović et al., 1995; Ritto-Corrêa e Camotim, 2002). Assim, os parâmetros cinemáticos independentes que definem as configurações atual e inicial podem ser agrupados nos vetores  $\widehat{\phi}$  e  $\phi_0$ , ou seja,

$$\widehat{\phi} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}} \\ \widehat{\boldsymbol{\theta}} \\ \widehat{\mathbf{p}}^{(1)} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{p}}^{(D)} \\ \widehat{\mathbf{p}}_t \end{bmatrix}, \quad \phi_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \boldsymbol{\theta}_0 \\ p_0^{(1)} \\ \vdots \\ p_0^{(D)} \\ p_{t0} \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

O elemento finito é obtido pela aproximação destes parâmetros cinemáticos utilizando polinómios cúbicos de Hermite (3.248)–(3.251), devido à continuidade requerida pela

hipótese de Kirchhoff. Isto conduz a um elemento de 2 nós com  $4 \times (7 + D)$  graus de liberdade, onde  $D$  é o número de modos de deformação (para além do modo de empenamento secundário de torção).

Embora seja seguida uma abordagem isoparamétrica, para a configuração inicial não é necessário especificar o ângulo de rotação  $\theta_0$ , uma vez que a formulação apenas requer o cálculo de  $\mathbf{K}_0$  e  $\mathbf{\Gamma}_0$  nos pontos de integração e do tensor  $\mathbf{\Lambda}_0$  para as secções escolhidas para representar a configuração da barra. Desta forma é possível evitar a singularidade da parametrização do vetor de rotação na definição da configuração inicial, que ocorre para ângulos múltiplos de  $2\pi$ . Por exemplo, a configuração inicial pode ser obtida utilizando-se a parametrização adotada por Manta e Gonçalves (2016), que depende da tangente do eixo da peça e do ângulo de torção. No entanto, a configuração atual é afetada por esta singularidade, mas nos exemplos apresentados na Secção 4.7 não se atingem ângulos próximos de  $\widehat{\theta} = 2\pi$ . Caso esse valor seja excedido, pode optar-se por (i) interpolar o vetor de rotação incremental, embora isto conduza a uma solução dependente da história de incrementação (Crisfield e Jelenić, 1999) ou (ii) implementar a estratégia co-rotacional recentemente proposta por Magisano et al. (2020), a qual se baseia no trabalho de Jelenić e Crisfield (1999).

Para cada elemento finito, os vetores das forças interiores e exteriores elementares são obtidos a partir da Eq. (4.63) e a matriz de rigidez elementar com as parcelas  $D\delta W[\Delta\phi]$  da Eq. (4.65). A escrita das correspondentes expressões em termos dos parâmetros interpolados (uma tarefa não trivial), é apresentada na Secção 4.6.2.

Conforme foi já referido na Secção anterior, as equações de equilíbrio são resolvidas através de um processo incremental/iterativo com o método de Newton-Raphson e controlo de força (nos exemplos apresentados não houve a necessidade de implementar outro tipo de controlo, como deslocamento ou comprimento de arco). As integrações são efetuadas com recurso à quadratura de Gauss, utilizando uma malha de  $3 \times 3$  pontos de integração na superfície média de cada parede, o que corresponde a uma integração reduzida, de modo a mitigar a ocorrência de *locking*. A integração segundo a direção da espessura é feita de forma analítica, em virtude de, na Secção 4.7, apenas se considerarem materiais elásticos lineares.

#### 4.6.1 Variações de $\mathbf{\Lambda}$ , $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{K}$

De forma a ser possível escrever as equações de equilíbrio e a sua linearização em função dos parâmetros interpolados é necessário obter as variações virtuais e incrementais/iterativas do tensor de rotação  $\mathbf{\Lambda}$  e das medidas de deformação  $\mathbf{\Gamma}$  e  $\mathbf{K}$ . Para tal, recorre-se às derivadas direcionais dos tensores de rotação, escrevendo-as através dos tensores associados definidos nas Secções 2.5.2 e 2.5.3.

A variação virtual do tensor de rotação  $\mathbf{\Lambda}$  corresponde à sua derivada direcional segundo a direção  $\delta\theta$ . Da mesma forma, a variação incremental/iterativa do tensor  $\mathbf{\Lambda}$  é a derivada segundo  $\Delta\theta$  (basta substituir  $\delta\theta$  por  $\Delta\theta$ ) e a segunda variação,  $\delta\Delta\mathbf{\Lambda}$ , está

associada às direções  $\delta\theta$  e  $\Delta\theta$ . Deste modo, atendendo às Eqs. (2.75)-(2.77), tem-se

$$\delta\Lambda a = \Xi_{D\Lambda}(a)\delta\theta, \quad (4.71)$$

$$\delta\Lambda^T a = \Xi_{D\Lambda^T}(a)\delta\theta, \quad (4.72)$$

$$\Delta\delta\Lambda a \cdot b = \Xi_{D^2\Lambda}(a, b)\Delta\theta \cdot \delta\theta, \quad (4.73)$$

onde  $a$  e  $b$  são vetores arbitrários.

Conforme foi já referido, o tensor de rotação total  $\Lambda$  é dado pela composição dos tensores  $\Lambda_0$  e  $\widehat{\Lambda}$ , i.e.,  $\Lambda = \widehat{\Lambda}\Lambda_0$ . Deste modo, atendendo às equações anteriores e ao facto de as variações do tensor  $\Lambda_0$  serem nulas, é possível escrever

$$\delta\Lambda a = (\delta\widehat{\Lambda})\Lambda_0 a = \Xi_{D\widehat{\Lambda}}(\Lambda_0 a)\delta\widehat{\theta}, \quad (4.74)$$

$$\delta\Lambda^T a = \Lambda_0^T (\delta\widehat{\Lambda}^T) a = \Lambda_0^T \Xi_{D\widehat{\Lambda}^T}(a)\delta\widehat{\theta}, \quad (4.75)$$

$$\Delta\delta\Lambda a \cdot b = (\Delta\delta\widehat{\Lambda})(\Lambda_0 a) \cdot b = \Xi_{D^2\widehat{\Lambda}}(\Lambda_0 a, b)\Delta\widehat{\theta} \cdot \delta\widehat{\theta}. \quad (4.76)$$

Relativamente a  $\Gamma$ , atendendo à Eq. (4.26), obtém-se

$$\delta\Gamma = (\Lambda_0 R)^T \left( \Xi_{D\widehat{\Lambda}^T}(r_{0,3} + \widehat{u}_{,3})\delta\widehat{\theta} + \widehat{\Lambda}^T \delta\widehat{u}_{,3} \right), \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \Delta\delta\Gamma \cdot a &= (\Delta\delta\Lambda R)^T (r_{0,3} + \widehat{u}_{,3}) \cdot a + (\Delta\Lambda R)^T \delta\widehat{u}_{,3} \cdot a + (\delta\Lambda R)^T \Delta\widehat{u}_{,3} \cdot a \\ &= \Delta\delta\widehat{\Lambda}(\Lambda_0 R a) \cdot (r_{0,3} + \widehat{u}_{,3}) + \Delta\widehat{\Lambda}(\Lambda_0 R a) \cdot \delta\widehat{u}_{,3} + \delta\widehat{\Lambda}(\Lambda_0 R a) \cdot \Delta\widehat{u}_{,3} \\ &= \delta\widehat{\theta} \cdot \left( \Xi_{D^2\widehat{\Lambda}}(\Lambda_0 R a, r_{0,3} + \widehat{u}_{,3})\Delta\widehat{\theta} + \Xi_{D\widehat{\Lambda}^T}^T(\Lambda_0 R a)\Delta\widehat{u}_{,3} \right) \\ &\quad + \delta\widehat{u}_{,3} \cdot \Xi_{D\widehat{\Lambda}}(\Lambda_0 R a)\Delta\widehat{\theta}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Finalmente, as variações do vetor das curvaturas  $K$  são obtidas recorrendo às Eqs. (2.101)-(2.103), (4.27) e (4.31), tendo-se

$$\delta K = \delta\widehat{K} = (\Lambda_0 R)^T \left( \Xi_{D\widehat{T}^T}(\widehat{\theta}_{,3})\delta\widehat{\theta} + \widehat{T}\delta\widehat{\theta}_{,3} \right), \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \Delta\delta K \cdot a &= \Delta\delta\widehat{K} \cdot a = \left( \Delta\delta\widehat{T}\Lambda_0 R \right)^T \widehat{\theta}_{,3} \cdot a + \left( \Delta\widehat{T}\Lambda_0 R \right)^T \delta\widehat{\theta}_{,3} \cdot a + \left( \delta\widehat{T}\Lambda_0 R \right)^T \Delta\widehat{\theta}_{,3} \cdot a \\ &= \Delta\delta\widehat{T}(\Lambda_0 R a) \cdot \widehat{\theta}_{,3} + \Delta\widehat{T}(\Lambda_0 R a) \cdot \delta\widehat{\theta}_{,3} + \delta\widehat{T}(\Lambda_0 R a) \cdot \Delta\widehat{\theta}_{,3} \\ &= \delta\widehat{\theta} \cdot \left( \Xi_{D^2\widehat{T}}(\Lambda_0 R a, \widehat{\theta}_{,3})\Delta\widehat{\theta} + \Xi_{D\widehat{T}^T}^T(\Lambda_0 R a)\Delta\widehat{\theta}_{,3} \right) \\ &\quad + \delta\widehat{\theta}_{,3} \cdot \Xi_{D\widehat{T}}(\Lambda_0 R a)\Delta\widehat{\theta}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde se tirou partido do facto de que  $\delta K_0 = 0$  e  $\Delta\delta K_0 = 0$ .

#### 4.6.2 Equações em função dos parâmetros cinemáticos

O elemento finito proposto interpola os parâmetros em  $\widehat{\phi}$ , pelo que é conveniente escrever (4.63) e (4.65) em função destes parâmetros. Em primeiro lugar, começa-se por definir os vetores  $\delta\widehat{\Phi}$  e  $\Delta\widehat{\Phi}$ , que contêm as variações virtual e incremental/iterativa de  $\widehat{\phi}$ ,  $\widehat{\phi}_{,3}$  e  $\widehat{\phi}_{,33}$ , ou seja,

$$\delta\widehat{\Phi} = \begin{bmatrix} \delta\widehat{\phi} \\ \delta\widehat{\phi}_{,3} \\ \delta\widehat{\phi}_{,33} \end{bmatrix}, \quad \Delta\widehat{\Phi} = \begin{bmatrix} \Delta\widehat{\phi} \\ \Delta\widehat{\phi}_{,3} \\ \Delta\widehat{\phi}_{,33} \end{bmatrix}, \quad (4.81)$$

onde  $\widehat{\phi}$  é definido em (4.70) e tem dimensão igual a  $\mathcal{D} = 7 + D$ , onde  $D$  é o número de modos de deformação (uma vez mais, recorde-se, excluindo o modo de empenamento secundário) e, portanto,  $\delta\widehat{\Phi}$  e  $\Delta\widehat{\Phi}$  têm dimensão igual a  $3\mathcal{D}$ .

Com vista à implementação computacional, definem-se as matrizes auxiliares  $\Theta_{D(\cdot)}$  e  $\Theta_{D^2(\cdot)}$ , as quais permitem escrever, dados dois vetores arbitrários  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , definidos num espaço de dimensão arbitrária,

$$\delta\mathbf{a} = \Theta_{D\mathbf{a}}\delta\widehat{\Phi}, \quad (4.82)$$

$$\Delta\delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta\widehat{\Phi}^T \Theta_{D^2\mathbf{a}}(\mathbf{b})\Delta\widehat{\Phi}. \quad (4.83)$$

Em acréscimo, para contornar a complexidade decorrente da presença de  $F_0^{-1}$  e permitir a utilização do formato vetorial do tensor de deformação, introduz-se a matriz  $A_v$ , dada por

$$A_v = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{33} & a_{23} & \mathbf{0}_{4 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (4.84)$$

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} E_2 \cdot A_{ij} E_2 \\ E_3 \cdot A_{ij} E_3 \\ 2E_2 \cdot A_{ij} E_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

$$A_{22} = \check{\Lambda}_0^T F_0^{-T} (E_2 \otimes E_2) F_0^{-1} \check{\Lambda}_0, \quad (4.86)$$

$$A_{33} = \check{\Lambda}_0^T F_0^{-T} (E_3 \otimes E_3) F_0^{-1} \check{\Lambda}_0, \quad (4.87)$$

$$A_{23} = \frac{1}{2} \check{\Lambda}_0^T F_0^{-T} (E_2 \otimes E_3 + E_3 \otimes E_2) F_0^{-1} \check{\Lambda}_0. \quad (4.88)$$

Com as expressões anteriores, as variações das deformações de membrana são dadas por

$$\delta E_v^M = \begin{bmatrix} \delta E_{22}^M \\ \delta E_{33}^M \\ 2\delta E_{23}^M \\ 0 \end{bmatrix} = A_v \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2 \cdot \delta \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \cdot \delta \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \delta \mathbf{g}_3 + \delta \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 \\ 0 \end{bmatrix} = A_v \Theta_{DE_v^M} \delta\widehat{\Phi}, \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \Delta\delta E_v^M \cdot S_v &= \begin{bmatrix} \Delta\delta E_{22}^M \\ \Delta\delta E_{33}^M \\ 2\Delta\delta E_{23}^M \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{g}_2 \cdot \delta \mathbf{g}_2 \\ \Delta\mathbf{g}_3 \cdot \delta \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_3 \cdot \Delta\delta \mathbf{g}_3 \\ \Delta\mathbf{g}_2 \cdot \delta \mathbf{g}_3 + \delta \mathbf{g}_2 \cdot \Delta\mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_2 \cdot \Delta\delta \mathbf{g}_3 \\ 0 \end{bmatrix}^T A_v^T \begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{bmatrix} \\ &= \delta\widehat{\Phi}^T \Theta_{D^2 E_v^M} (A_v^T S_v) \Delta\widehat{\Phi}, \end{aligned} \quad (4.90)$$

onde se tirou partido do facto de  $\Delta\delta \mathbf{g}_2 = \mathbf{0}$ . Nestas expressões, as matrizes auxiliares são

dadas, para cada parede, por

$$\Theta_{DE_v^M} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2^T \Theta_{Dg_2} \\ \mathbf{g}_3^T \Theta_{Dg_3} \\ \mathbf{g}_2^T \Theta_{Dg_3} + \mathbf{g}_3^T \Theta_{Dg_2} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3D} \end{bmatrix}, \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{D^2 E_v^M} (\mathbf{A}_v^T \mathbf{S}_v) &= (\mathbf{a}_{22} \cdot \mathbf{S}_v) \Theta_{Dg_2}^T \Theta_{Dg_2} \\ &+ (\mathbf{a}_{33} \cdot \mathbf{S}_v) (\Theta_{Dg_3}^T \Theta_{Dg_3} + \Theta_{D^2 g_3}(\mathbf{g}_3)) \\ &+ (\mathbf{a}_{23} \cdot \mathbf{S}_v) (\Theta_{Dg_2}^T \Theta_{Dg_3} + \Theta_{Dg_3}^T \Theta_{Dg_2} + \Theta_{D^2 g_3}(\mathbf{g}_2)), \end{aligned} \quad (4.92)$$

sendo a matriz  $\Theta_{Dg_2}$  dada por (todos os termos que envolvem o índice  $i$  estão definidos para  $i = 1, \dots, D$ )

$$\Theta_{Dg_2} = \begin{bmatrix} \Theta_{Dg_2}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.93)$$

$$\Theta_{Dg_2}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \bar{\chi}_{,2}^{(i)} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

e a matriz  $\Theta_{Dg_3}$  por

$$\Theta_{Dg_3} = \begin{bmatrix} \Theta_{Dg_3}^{(1)} & \Theta_{Dg_3}^{(2)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.95)$$

$$\Theta_{Dg_3}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \left( \Theta_{Dg_3}^{(1)} \right)_{(2)} & \bar{K} \bar{\chi}^{(i)} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (4.96)$$

$$\left( \Theta_{Dg_3}^{(1)} \right)_{(2)} = \mathbf{R}^T \left( \Lambda_0^T \Xi_{D\hat{\Lambda}}^T (\mathbf{r}_{0,3} + \hat{\mathbf{u}}_{,3}) - \tilde{\mathbf{l}} \Lambda_0^T \Xi_{D\hat{T}}^T (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,3}) \right), \quad (4.97)$$

$$\Theta_{Dg_3}^{(2)} = \begin{bmatrix} (\hat{\Lambda} \Lambda_0 \mathbf{R})^T & -\mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{l}} \Lambda_0^T \hat{\mathbf{T}}^T & \bar{\chi}^{(i)} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

Relativamente às segundas variações,  $\Theta_{D^2 g_3}$ , as expressões relevantes são

$$\Theta_{D^2 g_3}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \Theta_{D^2 g_3}^{(11)}(\mathbf{b}) & \Theta_{D^2 g_3}^{(12)}(\mathbf{b}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \text{Sim.} & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.99)$$

$$\Theta_{D^2 g_3}^{(11)}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times D} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ & \left( \Theta_{D^2 g_3}^{(11)}(\mathbf{b}) \right)_{(22)} & \left( \Theta_{D^2 g_3}^{(11)}(\mathbf{b}) \right)_{(23)} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ & & \mathbf{0}_{D \times D} & \mathbf{0}_{D \times 1} \\ \text{Sim.} & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.100)$$

com

$$\left( \Theta_{D^2 g_3}^{(11)}(\mathbf{b}) \right)_{(22)} = \Xi_{D^2 \hat{\Lambda}} (\Lambda_0 \mathbf{R} \mathbf{b}, \mathbf{r}_{0,3} + \hat{\mathbf{u}}_{,3}) + \Xi_{D^2 \hat{T}} (\Lambda_0 \tilde{\mathbf{l}} \mathbf{R} \mathbf{b}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{,3}), \quad (4.101)$$

$$\left( \Theta_{D^2 g_3}^{(11)}(\mathbf{b}) \right)_{(23)} = \Xi_{D\hat{T}}^T (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{,3}) \Lambda_0 \mathbf{R} \tilde{\chi}^{(i)} \mathbf{b}, \quad (4.102)$$

e

$$\mathbf{\Theta}_{D^2\mathbf{g}_3}^{(12)}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times D} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \left( \mathbf{\Theta}_{D^2\mathbf{g}_3}^{(12)}(\mathbf{b}) \right)_{(21)} & \left( \mathbf{\Theta}_{D^2\mathbf{g}_3}^{(12)}(\mathbf{b}) \right)_{(22)} & \mathbf{0}_{3 \times D} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{D \times 3} & \left( \mathbf{\Theta}_{D^2\mathbf{g}_3}^{(12)}(\mathbf{b}) \right)_{(32)} & \mathbf{0}_{D \times D} & \mathbf{0}_{D \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times D} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

em que

$$\left( \mathbf{\Theta}_{D^2\mathbf{g}_3}^{(12)}(\mathbf{b}) \right)_{(21)} = \mathbf{\Xi}_{D\widehat{\Lambda}}^T (\mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{R} \mathbf{b}), \quad (4.104)$$

$$\left( \mathbf{\Theta}_{D^2\mathbf{g}_3}^{(12)}(\mathbf{b}) \right)_{(22)} = \mathbf{\Xi}_{D\widehat{T}}^T (\mathbf{\Lambda}_0 \widetilde{\mathbf{I}} \mathbf{R} \mathbf{b}), \quad (4.105)$$

$$\left( \mathbf{\Theta}_{D^2\mathbf{g}_3}^{(12)}(\mathbf{b}) \right)_{(32)} = \left( \widehat{\mathbf{T}} \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{R} \widetilde{\mathbf{\chi}}^{(i)} \mathbf{b} \right)^T. \quad (4.106)$$

Considerando agora a deformação de flexão, tem-se

$$\delta \mathbf{E}_v^F = \begin{bmatrix} \delta E_{22}^F \\ \delta E_{33}^F \\ 2\delta E_{23}^F \\ 2\delta E_{13}^F \end{bmatrix} = \mathbf{\Theta}_{DE_v^F} \delta \widehat{\mathbf{\Phi}}, \quad (4.107)$$

$$\Delta \delta \mathbf{E}_v^F \cdot \mathbf{S}_v = \begin{bmatrix} \Delta \delta E_{22}^F \\ \Delta \delta E_{33}^F \\ 2\Delta \delta E_{23}^F \\ 2\Delta \delta E_{13}^F \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{bmatrix} = \delta \widehat{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{\Theta}_{D^2E_v^F}(\mathbf{S}_v) \Delta \widehat{\mathbf{\Phi}}. \quad (4.108)$$

A matriz  $\mathbf{\Theta}_{DE_v^F}$  é definida por

$$\mathbf{\Theta}_{DE_v^F} = -X_1 \mathbf{N}_{DE_v^F} - \psi_{t3} \mathbf{M}_{DE_v^F}, \quad (4.109)$$

de componentes

$$\mathbf{N}_{DE_v^F} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{DE_v^F}^{(1)} & \mathbf{N}_{DE_v^F}^{(2)} & \mathbf{N}_{DE_v^F}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (4.110)$$

$$\mathbf{N}_{DE_v^F}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \left( \mathbf{N}_{DE_v^F}^{(1)} \right)_{(2)} & \mathbf{0}_{1 \times D} & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times D} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.111)$$

$$\mathbf{N}_{DE_v^F}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \left( \mathbf{N}_{DE_v^F}^{(2)} \right)_{(2)} & \mathbf{0}_{1 \times D} & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times D} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.112)$$

$$\mathbf{N}_{DE_v^F}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times D} & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times D} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.113)$$

com

$$\left( \mathbf{N}_{DE_v^F}^{(1)} \right)_{(2)} = (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 \mathbf{R}^T - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3) \mathbf{\Lambda}_0^T \mathbf{\Xi}_{D\widehat{T}^T} (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{,3}), \quad (4.114)$$

$$\left( \mathbf{N}_{DE_v^F}^{(2)} \right)_{(2)} = (\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 \mathbf{R}^T - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3) \mathbf{\Lambda}_0^T \widehat{\mathbf{T}}^T, \quad (4.115)$$

e ainda

$$\mathbf{M}_{DE_v^F} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{DE_v^F}^{(1)} & \mathbf{M}_{DE_v^F}^{(2)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.116)$$

$$\mathbf{M}_{DE_v^F}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times D} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \left( \mathbf{\Xi}_{D\widehat{T}^T}^T (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{,3}) \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{E}_3 \right)^T & \mathbf{0}_{1 \times D} & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.117)$$

$$\mathbf{M}_{DE_v^F}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times D} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \left( \widehat{\mathbf{T}} \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{E}_3 \right)^T & \mathbf{0}_{1 \times D} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.118)$$

Finalmente, a matriz  $\boldsymbol{\Theta}_{D^2E_v^F}$  é dada por

$$\boldsymbol{\Theta}_{D^2E_v^F}(\mathbf{S}_v) = X_1 \mathbf{N}_{D^2E_v^F} (S_{23} \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{E}_3 - S_{33} \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{R} \mathbf{E}_2) - \psi_{t3} \mathbf{N}_{D^2E_v^F} (S_{13} \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{E}_3), \quad (4.119)$$

em que

$$\mathbf{N}_{D^2E_v^F}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{D^2E_v^F}^{(11)}(\mathbf{b}) & \mathbf{N}_{D^2E_v^F}^{(12)}(\mathbf{b}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \text{Sim.} & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.120)$$



cujas componentes são dadas por

$$\mathbf{N}_{D^2 E_v^F}^{(11)}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times D} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ & \mathbf{\Xi}_{D^2 \widehat{T}}(\mathbf{b}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{,3}) & \mathbf{0}_{3 \times D} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ & & \mathbf{0}_{D \times D} & \mathbf{0}_{D \times 1} \\ \text{Sim.} & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.121)$$

$$\mathbf{N}_{D^2 E_v^F}^{(12)}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times D} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ & \mathbf{\Xi}_{D^2 \widehat{T}}^T(\mathbf{b}) & \mathbf{0}_{3 \times D} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ & & \mathbf{0}_{D \times D} & \mathbf{0}_{D \times 1} \\ \text{Sim.} & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.122)$$

Relativamente aos deslocamentos, obtém-se

$$\delta \bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Theta}_{D\bar{\mathbf{x}}} \delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}, \quad (4.123)$$

$$\Delta \delta \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{b} = \delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Theta}_{D^2 \bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{b}) \Delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}, \quad (4.124)$$

onde as matrizes auxiliares são dadas por

$$\boldsymbol{\Theta}_{D\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_{D\bar{\mathbf{x}}}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.125)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{D\bar{\mathbf{x}}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{\Xi}_{D\widehat{\Lambda}}(\Lambda_0 \bar{\mathbf{l}}) & \widehat{\Lambda} \Lambda_0 R \bar{\chi}^{(i)} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (4.126)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{D^2 \bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_{D^2 \bar{\mathbf{x}}}^{(11)}(\mathbf{b}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \text{Sim.} & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.127)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{D^2 \bar{\mathbf{x}}}^{(11)}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times D} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ & \mathbf{\Xi}_{D^2 \widehat{\Lambda}}(\Lambda_0 \bar{\mathbf{l}}, \mathbf{b}) & \mathbf{\Xi}_{D\widehat{\Lambda}}^T(\Lambda_0 R \bar{\chi}^{(i)}) \mathbf{b} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ & & \mathbf{0}_{D \times D} & \mathbf{0}_{D \times 1} \\ \text{Sim.} & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.128)$$

Utilizando as expressões desenvolvidas nesta Secção, o trabalho virtual (4.63) e a sua linearização (4.65) podem ser reescritos de forma mais adequada para a sua posterior implementação numérica, i.e.,

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}^T \boldsymbol{\Theta}_{DE_v}^T \mathbf{s}_v J_0 dV, \quad (4.129)$$

$$\delta W_{ext} = \sum_j \delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}^T \boldsymbol{\Theta}_{D\bar{\mathbf{x}}}^T \mathbf{Q}_j, \quad (4.130)$$

$$D_{mat} \delta W_{int}[\Delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}] = - \int_V \delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}^T \boldsymbol{\Theta}_{DE_v}^T \mathbf{c}_t \boldsymbol{\Theta}_{DE_v} \Delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}} J_0 dV, \quad (4.131)$$

$$D_{geo} \delta W_{int}[\Delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}] = - \int_V \delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}^T \boldsymbol{\Theta}_{D^2 E_v}(\mathbf{s}_v) \Delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}} J_0 dV, \quad (4.132)$$

$$D \delta W_{ext}[\Delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}] = \sum_j \delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}^T \boldsymbol{\Theta}_{D^2 \bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{Q}_j) \Delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}, \quad (4.133)$$

$$D \delta W_{ext}[\Delta \boldsymbol{\lambda}] = \sum_j \delta \widehat{\boldsymbol{\Phi}}^T \boldsymbol{\Theta}_{D\bar{\mathbf{x}}}^T \Delta \mathbf{Q}_j, \quad (4.134)$$

onde  $V = [-1, 1] \times A$  ( $A$  representa a secção transversal na configuração de referência). Para além disso, o desacoplamento entre a deformação de membrana e de flexão conduz a

$$\Theta_{DE_v} = A_v \Theta_{DE_v^M} + \Theta_{DE_v^F}, \quad (4.135)$$

$$\Theta_{D^2E_v}(S_v) = \Theta_{D^2E_v^M}(A_v^T S_v) + \Theta_{D^2E_v^F}(S_v). \quad (4.136)$$

Deve-se referir que  $D_{mat}\delta W_{int}$ ,  $D_{geo}\delta W_{int}$  e  $D\delta W_{ext}[\Delta\widehat{\phi}]$  são simétricas e, portanto, invariantes relativamente à troca entre  $\delta\widehat{\Phi}$  e  $\Delta\widehat{\Phi}$ , o que conduz a uma matriz de rigidez tangente simétrica.

### 4.6.3 Interpolação dos parâmetros cinemáticos

Conforme foi já mencionado, os parâmetros cinemáticos independentes que definem as configurações atual e inicial são agrupados nos vetores  $\widehat{\phi}$  e  $\phi_0$  (Eq. (4.70)). A interpolação dos vetores  $\widehat{\phi}$  e  $\phi_0$  segue uma abordagem semelhante à apresentada na Secção 3.8, escrevendo-se

$$\widehat{\phi}(X_3) = \psi(X_3)\widehat{d}, \quad (4.137)$$

$$\phi_0(X_3) = \psi(X_3)d_0, \quad (4.138)$$

onde a matriz  $\psi$ , de dimensão  $(7 + D) \times (4 \times (7 + D))$ , contém os polinómios cúbicos de Hermite e é da forma

$$\psi = \left[ \widetilde{H}_1 \mid \widetilde{H}_2 \mid \widetilde{H}_3 \mid \widetilde{H}_4 \right], \quad (4.139)$$

onde  $\widetilde{H}_i = \text{diag}(H_i, \dots, H_i)$  (recordar Figura 3.9). Os vetores-coluna  $\widehat{d}$  e  $d_0$  contêm os valores nodais dos parâmetros cinemáticos relativos às configurações atual e inicial, respetivamente, têm dimensão  $4 \times (7 + D)$  e são dados por

$$\widehat{d} = \begin{bmatrix} \widehat{\phi}(0) \\ \widehat{\phi}_{,3}(0) \\ \widehat{\phi}(L_e) \\ \widehat{\phi}_{,3}(L_e) \end{bmatrix}, \quad d_0 = \begin{bmatrix} \phi_0(0) \\ \phi_{0,3}(0) \\ \phi_0(L_e) \\ \phi_{0,3}(L_e) \end{bmatrix}, \quad (4.140)$$

sendo  $L_e$  o comprimento do elemento finito.

As Eqs. (4.81) e (4.137) permitem escrever

$$\delta\widehat{\Phi} = \Psi \delta\widehat{d}, \quad \Delta\widehat{\Phi} = \Psi \Delta\widehat{d}, \quad (4.141)$$

onde

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \psi_{,3} \\ \psi_{,33} \end{bmatrix}. \quad (4.142)$$

Com vista à implementação numérica das expressões (4.129)-(4.134), recorre-se à interpolação indicada na Eq. (4.141). Em primeiro lugar, é vantajoso decompor as tensões  $S_v$  (4.61) da seguinte forma

$$S_v = S_v^M + X_1 \bar{S}_v^F + S_{13}^F E_4, \quad (4.143)$$

onde  $E_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  e

$$S_v^M = \begin{bmatrix} S_{22}^M \\ S_{33}^M \\ S_{23}^M \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_1 \bar{S}_v^F = \begin{bmatrix} S_{22}^F \\ S_{33}^F \\ S_{23}^F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_{13}^F E_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_{13}^F \end{bmatrix}. \quad (4.144)$$

Utilizando as expressões (4.135)-(4.136) para desacoplar os termos de membrana e de flexão, torna-se possível efetuar uma integração analítica segundo  $X_1$  (os termos cuja função integranda é linear em  $X_1$  são nulos), obtendo-se

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = \delta \hat{\mathbf{d}}^T & \left( -t \int_L \int_S \boldsymbol{\Psi}^T \left( \boldsymbol{\Theta}_{DE_v^M}^T \mathbf{A}_v^T S_v^M - \psi_{t3} S_{13}^F \mathbf{M}_{DE_v^F}^T E_4 \right) J_0 dX_2 dX_3 \right. \\ & \left. + \frac{t^3}{12} \int_L \int_S \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{N}_{DE_v^F}^T \bar{S}_v^F J_0 dX_2 dX_3 \right), \end{aligned} \quad (4.145)$$

$$\delta W_{ext} = \delta \hat{\mathbf{d}}^T \sum_j \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Theta}_{D\bar{x}}^T \mathbf{Q}_j, \quad (4.146)$$

$$\begin{aligned} D_{mat} \delta W_{int}[\Delta \hat{\mathbf{d}}] = \delta \hat{\mathbf{d}}^T & \left( -t \int_L \int_S \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Theta}_{DE_v^M}^T \mathbf{A}_v^T C_t^M \mathbf{A}_v \boldsymbol{\Theta}_{DE_v^M} \boldsymbol{\Psi} J_0 dX_2 dX_3 \right. \\ & - t \int_L \int_S \psi_{t3}^2 \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M}_{DE_v^F}^T C_t^F \mathbf{M}_{DE_v^F} \boldsymbol{\Psi} J_0 dX_2 dX_3 \\ & \left. - \frac{t^3}{12} \int_L \int_S \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{N}_{DE_v^F}^T C_t^F \mathbf{N}_{DE_v^F} \boldsymbol{\Psi} J_0 dX_2 dX_3 \right) \Delta \hat{\mathbf{d}}, \end{aligned} \quad (4.147)$$

$$\begin{aligned} D_{geo} \delta W_{int}[\Delta \hat{\mathbf{d}}] = \delta \hat{\mathbf{d}}^T & \left( -t \int_L \int_S \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Theta}_{D^2 E_v^M} (A_v^T S_v^M) \boldsymbol{\Psi} J_0 dX_2 dX_3 \right. \\ & + t \int_L \int_S \psi_{t3} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{N}_{D^2 E_v^F} (S_{13}^F \boldsymbol{\Lambda}_0 E_3) \boldsymbol{\Psi} J_0 dX_2 dX_3 \\ & \left. - \frac{t^3}{12} \int_L \int_S \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{N}_{D^2 E_v^F} (\bar{S}_{23}^F \boldsymbol{\Lambda}_0 E_3 - \bar{S}_{33}^F \boldsymbol{\Lambda}_0 R E_2) \boldsymbol{\Psi} J_0 dX_2 dX_3 \right) \Delta \hat{\mathbf{d}}, \end{aligned} \quad (4.148)$$

$$D \delta W_{ext}[\Delta \hat{\mathbf{d}}] = \delta \hat{\mathbf{d}}^T \sum_j \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Theta}_{D^2 \bar{x}} (\mathbf{Q}_j) \boldsymbol{\Psi} \Delta \hat{\mathbf{d}}, \quad (4.149)$$

$$D \delta W_{ext}[\Delta \boldsymbol{\lambda}] = \delta \hat{\mathbf{d}}^T \sum_j \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Theta}_{D\bar{x}}^T \Delta \mathbf{Q}_j, \quad (4.150)$$

onde  $S$  representa a linha média da secção transversal e  $L \in [-1, 1]$ . Note-se ainda que o desacoplamento dos termos de membrana e de flexão permite utilizar matrizes constitutivas distintas para os termos de membrana,  $C_t^M$ , e de flexão,  $C_t^F$ .

Assim, a matriz de rigidez tangente é dada por

$$\begin{aligned}
 K_{te} = & t \int_L \int_S \Psi^T \Theta_{DE_v^M}^T A_v^T C_t^M A_v \Theta_{DE_v^M} \Psi J_0 dX_2 dX_3 \\
 & + t \int_L \int_S \psi_{t3}^2 \Psi^T M_{DE_v^F}^T C_t^F M_{DE_v^F} \Psi J_0 dX_2 dX_3 \\
 & + \frac{t^3}{12} \int_L \int_S \Psi^T N_{DE_v^F}^T C_t^F N_{DE_v^F} \Psi J_0 dX_2 dX_3 \\
 & + t \int_L \int_S \Psi^T \Theta_{D^2 E_v^M} (A_v^T S_v^M) \Psi J_0 dX_2 dX_3 \\
 & - t \int_L \int_S \psi_{t3} \Psi^T N_{D^2 E_v^F} (S_{13}^F \Lambda_0 E_3) \Psi J_0 dX_2 dX_3 \\
 & + \frac{t^3}{12} \int_L \int_S \Psi^T N_{D^2 E_v^F} (\bar{S}_{23}^F \Lambda_0 E_3 - \bar{S}_{33}^F \Lambda_0 R E_2) \Psi J_0 dX_2 dX_3 \\
 & - \sum_j \Psi^T \Theta_{D^2 \bar{x}} (Q_j) \Psi
 \end{aligned} \tag{4.151}$$

o vetor das forças incrementais por

$$Q_e = \sum_j \Psi^T \Theta_{D\bar{x}}^T \Delta Q_j \tag{4.152}$$

e o vetor das forças desequilibradas por

$$\begin{aligned}
 G_e = & \sum_j \Psi^T \Theta_{D\bar{x}}^T Q_j - t \int_L \int_S \Psi^T \left( \Theta_{DE_v^M}^T A_v^T S_v^M - \psi_{t3} S_{13}^F M_{DE_v^F}^T E_4 \right) J_0 dX_2 dX_3 \\
 & + \frac{t^3}{12} \int_L \int_S \Psi^T N_{DE_v^F}^T \bar{S}_v^F J_0 dX_2 dX_3.
 \end{aligned} \tag{4.153}$$

## 4.7 Exemplos numéricos

Nesta Secção apresentam-se alguns exemplos de aplicação e validação do elemento finito proposto.

Os modos de deformação são obtidos com o programa GBTUL 2.06 (Gonçalves et al., 2010b, 2014; Bebianio et al., 2015, 2018). No entanto, os modos de extensão transversal fornecidos por este programa correspondem a funções  $\bar{\chi}_2$  apenas lineares (na direção da linha média), enquanto que os modos que envolvem deslocamentos transversais à linha média são cúbicos. Esta discrepância de grau polinomial conduz a soluções excessivamente rígidas em problemas geometricamente não-lineares. Com vista à mitigação deste fenómeno, são considerados modos  $\bar{\chi}_2$  quadráticos adicionais, tal como sugerido noutros estudos (Gonçalves e Camotim, 2012; Martins et al., 2018) e efetua-se integração reduzida segundo  $X_2$ , conforme foi já mencionado na Secção 4.6 (3 pontos de Gauss). Estes modos quadráticos correspondem a considerar funções da forma

$$\bar{\chi}_2^{(i)} = 4 \left( \frac{X_2}{b} - \left( \frac{X_2}{b} \right)^2 \right) \tag{4.154}$$

em cada segmento de parede, onde  $b$  representa a respetiva largura.

Deve-se notar que nem todos os modos da GBT podem ser incluídos no elemento finito proposto, uma vez que a translação e a rotação da secção transversal já se encontram descritas por  $\widehat{u}$  e  $\widehat{\theta}$  — nos pequenos deslocamentos, estes seis graus de liberdade correspondem exatamente aos modos 1 a 4 da GBT (extensão axial, duas flexões e torção) e aos dois modos de corte obtidos a partir das funções de empenamento dos modos de flexão. Assim, estes modos não são incluídos. Por outro lado, há que incluir o modo de empenamento de torção, o qual é obtido a partir do modo 4 da GBT, e o modo de corte associado deve também ser excluído, de forma a evitar uma dependência linear na descrição cinemática.

Adota-se uma lei material de Saint-Venant-Kirchoff para estados planos de tensão, cuja matriz é “aumentada” para ter em conta a distorção na direção da espessura resultante da torção, ou seja,

$$C_t = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (4.155)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficientes de Possion e  $G$  o módulo de distorção (recorde-se a ordem das componentes de tensão e deformação, indicada nas Eqs. (4.59)-(4.60) e (4.61)). Quando se considera que a extensão transversal das paredes é nula, i.e., quando não se consideram modos de extensão transversal na análise, a matriz constitutiva relativa aos termos de membrana é substituída por

$$C_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (4.156)$$

de forma a evitar soluções excessivamente rígidas devidas ao efeito de Poisson.

À exceção do primeiro exemplo, apenas se consideram secções transversais em I — os modos de deformação de uma secção em I genérica, discretizada com um nó intermédio em cada parede, são apresentados na Figura 4.4. Conforme foi já mencionado, os modos 1 a 3 (extensão e flexões) e 14 a 16 (modos de corte de flexão e torção) não são incluídos nas análises e, portanto, não são representados na figura. Relativamente ao modo de torção (modo 4), apenas é retida a parcela de empenamento. Todos os restantes modos são incluídos: (i) modos locais de placa (5 a 13), (ii) modos de corte (17 a 23) e (iii) modos de extensão transversal lineares (24 a 33) e quadráticos (34 a 43, não apresentados na figura).

Todos os exemplos correspondem a barras com uma extremidade encastrada. Esta condição de fronteira bloqueia todos os deslocamentos e rotações, incluindo o empenamento.

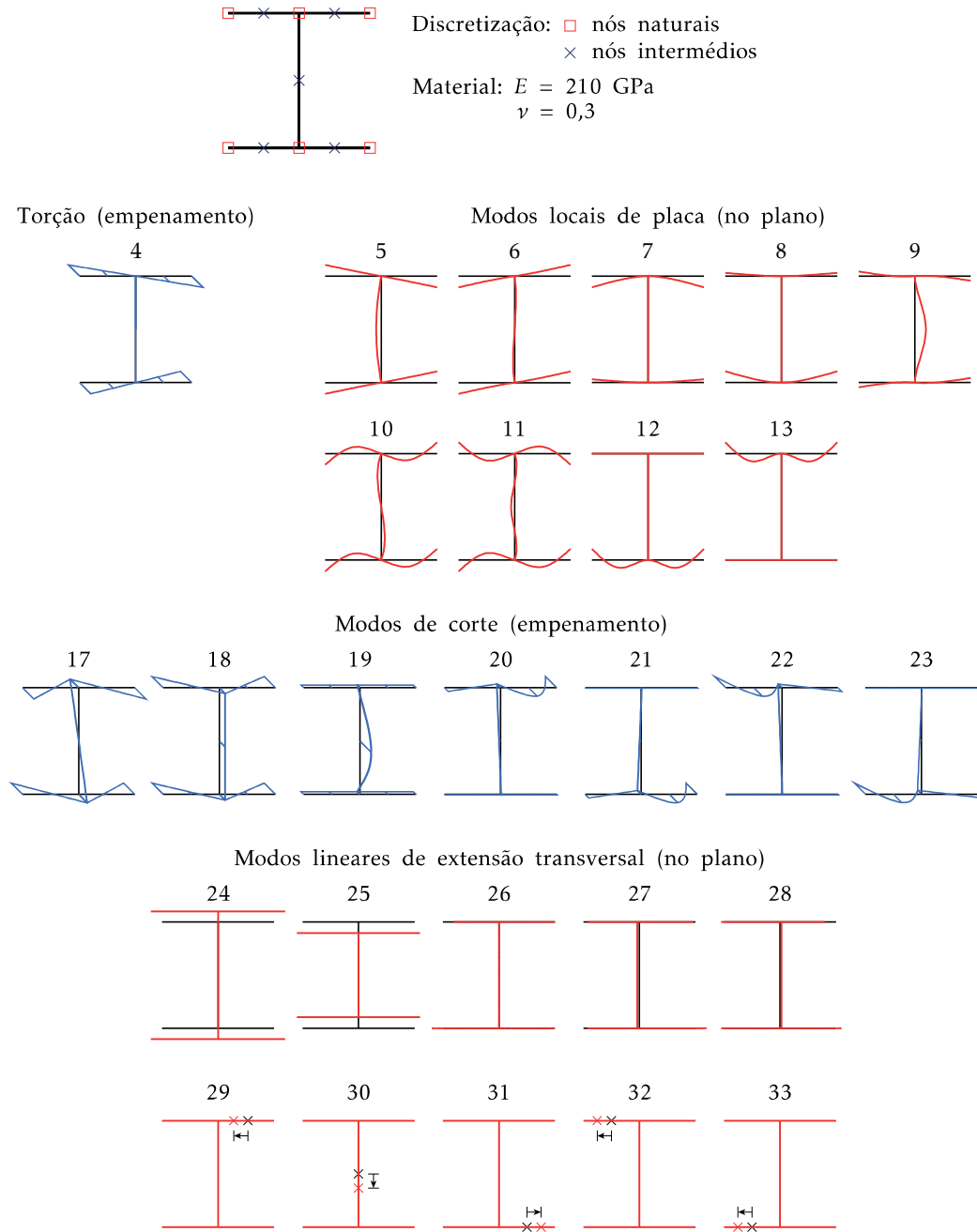


Figura 4.4: Modos de deformação para uma secção em I genérica.

Para o elemento proposto, estas condições são aplicadas com

$$\widehat{\mathbf{u}}(0) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \widehat{\mathbf{p}}^{(i)} = \widehat{\mathbf{p}}_t = 0, \quad (4.157)$$

$$\widehat{\mathbf{p}}_{,3}^{(i)} = 0, \quad (4.158)$$

em que a Eq. (4.158) apenas se aplica a modos com  $\overline{\chi}_1^{(i)} \neq 0$ , em virtude da hipótese de Kirchhoff (modos 5 a 13, 24 e 25, na Figura 4.4).

A implementação do elemento proposto foi efetuada em MATLAB (2018). Para efeitos de validação e comparação, recorre-se a modelos de elementos de casca de quatro nós

MITC (Bathe e Dvorkin, 1985), analisados utilizando o programa ADINA (Bathe, 2019).

Os exemplos numéricos considerados são apresentados em seguida e encontram-se subdivididos em três Secções. Em todos os casos adotam-se discretizações uniformes com o elemento finito proposto e considera-se  $E = 210$  GPa e  $\nu = 0,3$ .

Na Secção 4.7.1 analisam-se barras de eixo reto, em consola, pré-torcidas, variando a secção transversal e o ângulo de pré-torção. Em primeiro lugar considera-se uma secção retangular de parede fina e um ângulo de pré-torção igual a  $180^\circ$ ; em segundo lugar estuda-se uma secção em I com um ângulo de pré-torção igual a  $360^\circ$ . Ambas as barras encontram-se sujeitas a uma força axial de tração, aplicada no centróide da respetiva secção da extremidade livre, de forma a capturar o acoplamento não-linear de extensão-torção.

De seguida, na Secção 4.7.2, são estudadas barras com o eixo inicial definido através de uma linha definida no espaço tridimensional e secção transversal em I. A configuração inicial das barras é obtida a partir de um arco plano com  $360^\circ$  e aplicando uma força na extremidade livre segundo a direção perpendicular ao plano de curvatura, de modo a obter uma configuração tridimensional. Em primeiro lugar considera-se uma secção em I mais compacta, de forma a que esta não seja suscetível à encurvadura local, e é aplicada uma força vertical na ligação superior banzo-alma da extremidade livre. Para este caso é ainda analisado o efeito da diferença entre se iniciar o carregamento a partir da configuração inicial plana (arco com  $360^\circ$ ) ou da configuração inicial tridimensional. Por fim, no último exemplo, considera-se a mesma secção transversal mas com a espessura das paredes reduzida de forma a provocar a deformação da secção, a qual passa a assumir um papel importante na resposta estrutural.

Por último, na Secção 4.7.3, apresentam-se três exemplos que envolvem barras de eixo circular com  $90^\circ$  e secção transversal em I. O primeiro caso foi originalmente analisado por Gonçalves (2019), utilizando elementos de barra geometricamente exatos de dois nós e incluindo empenamento de torção. Este exemplo envolve um arco com secção transversal compacta (a deformação da secção assume um papel desprezável), sujeito a uma força atuante no centróide da secção da extremidade livre, na direção perpendicular ao plano de curvatura, provocando flexão-torção. Em seguida estuda-se um arco semelhante ao anterior, embora (i) se reduza a relação largura-espessura das paredes de forma a provocar a deformação da secção e (ii) a força seja aplicada na extremidade livre de um dos banzos. No último exemplo mantém-se a secção transversal do exemplo anterior e reduz-se o raio do arco para metade, de forma a aumentar os efeitos da deformação local.

Finalmente, considera-se relevante indicar os tempos de cálculo verificados para dois casos analisados. Todas as análises foram efetuadas utilizando um processador Intel Core i7-6700HQ CPU @ 2.60 GHZ. Para 10 EF e 5 modos de deformação (ver Figura 4.5), cada iteração demora cerca de 0,24 segundos. Em contraste, para 40 EF e 38 modos de deformação (ver Figura 4.14) são necessários, em média, 17,3 segundos para completar uma iteração.

#### 4.7.1 Barras pré-torcidas

O primeiro exemplo consiste numa barra em consola com, 3 metros de comprimento e secção transversal retangular (de parede fina), com um ângulo de pré-torção igual a  $180^\circ$ , encontrando-se sujeita a uma força axial de tração  $F$ , aplicada no centróide da secção da extremidade livre, conforme se mostra na Figura 4.5. Este exemplo tem como objetivo demonstrar que o elemento finito proposto é capaz de capturar o acoplamento não-linear entre a extensão da barra e a torção (a pré-torção diminui à medida que a tração aumenta — ver, por exemplo, Hodges (1980), Krenk (1983) e Kordolemis et al. (2015)).

Na Figura 4.5 mostra-se o gráfico força-rotação da secção da extremidade livre com (i) 366 e 1452 elementos de casca, (ii) a formulação proposta com 5 elementos finitos e apenas o modo de empenamento secundário de torção (obviamente, este modo é essencial na modelação da torção da barra) e (iii) a formulação proposta com 10 elementos e os modos de empenamento secundário e de extensão transversal, permitindo capturar o efeito de Poisson — estes modos foram obtidos para a discretização da parede ilustrada na Figura 4.6, ou seja, com um nó intermédio na parede, obtendo-se dois modos de extensão transversal linear e dois quadráticos (estes últimos não são mostrados na figura).

Na zona inferior da Figura 4.5 apresentam-se, para cada discretização, as configurações indeformada (linhas azuis<sup>2</sup>) e deformada (cinzento), sendo esta última obtida para  $F = 10000$  kN. A rotação associada a este nível de carga corresponde a uma rotação de torção de, aproximadamente,  $2,72$  rad ( $156^\circ$ ).

Os resultados mostram que todos os modelos estão em excelente concordância e que o acoplamento não-linear extensão-torção é bem capturado pelo elemento proposto, mesmo quando se considera apenas o modo de empenamento secundário na análise. A introdução dos modos de extensão transversal conduz a resultados ligeiramente mais flexíveis e que coincidem de forma muito precisa com o modelo de elementos de casca perto do topo do gráfico.

Apesar de não se apresentarem no gráfico, deve-se notar que, ao utilizar 10 elementos finitos sem modos de extensão transversal, obtêm-se resultados um pouco mais flexíveis (diferenças inferiores a 1% em termos de deslocamento) que os dos modelos de casca, uma vez neste caso não se está a considerar o efeito de Poisson restringido no apoio. Por outro lado, ao utilizar modos de extensão transversal, torna-se necessário considerar pelo menos 10 elementos para obter resultados precisos (menos elementos conduzem a soluções mais rígidas).

Em seguida analisa-se uma barra com 3 metros de comprimento e secção transversal em I, sujeita a uma força axial  $F$  aplicada no centróide da secção. O ângulo de pré-torção é igual a  $360^\circ$ , conforme ilustrado na Figura 4.7. Nesta figura apresenta-se o gráfico força-rotação da secção da extremidade livre, obtido com (i) um modelo com 1534 elementos de casca e (ii) a formulação proposta com 2, 5 e 10 elementos e considerando apenas os modos

---

<sup>2</sup>Para melhor visualizar a configuração indeformada, esta é também representada separadamente, para 10 EF.



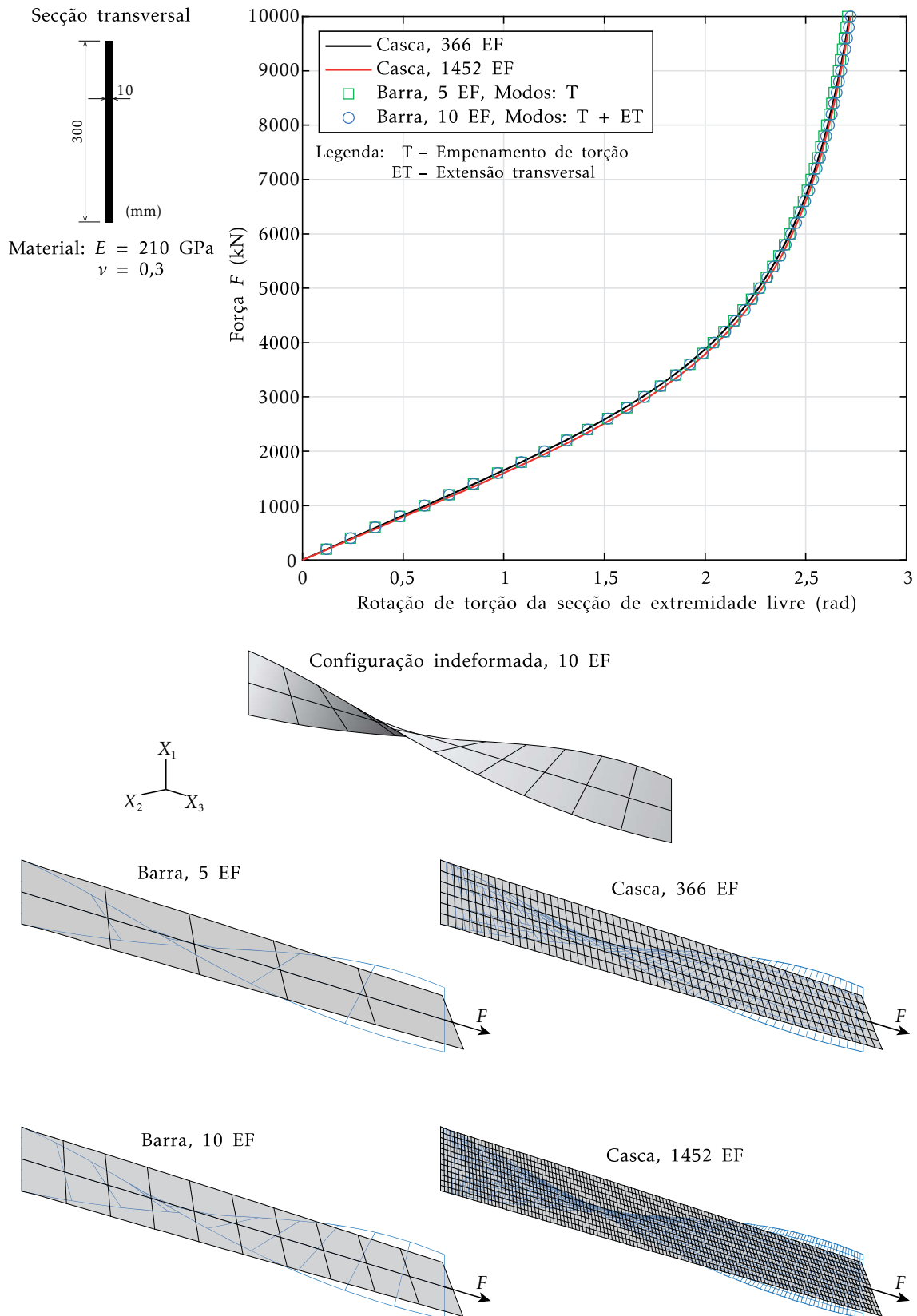


Figura 4.5: Consola com secção retangular, pré-torcida a  $180^\circ$  e sujeita a uma força axial de tração.

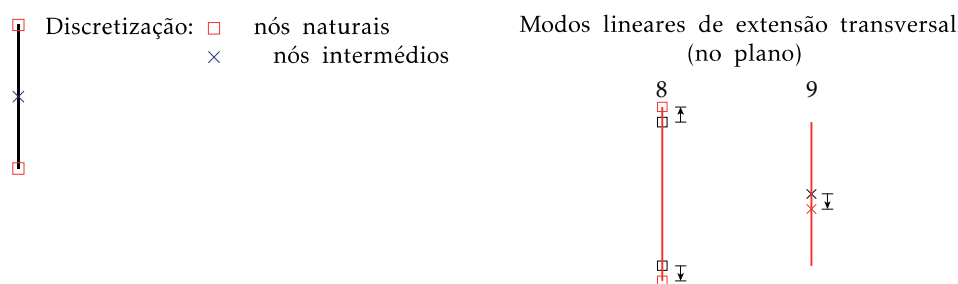


Figura 4.6: Secção retangular de parede fina: discretização e modos lineares de extensão transversal.

de empenamento primário e secundário de torção<sup>3</sup>. Observa-se que os resultados obtidos com 5 e 10 elementos de barra coincidem e estão bastante próximos dos obtidos com o modelo de elementos de casca (embora sejam mais rígidos até uma rotação de 5 radianos e ligeiramente mais flexíveis perto da força máxima). Mais uma vez, as configurações deformadas relativas a  $F = 50000$  kN são apresentadas na parte inferior da Figura 4.7, mostrando que existe uma excelente concordância entre os vários modelos — para esta força, a rotação máxima da secção de extremidade é de, aproximadamente, 5,8 rad (332°).

#### 4.7.2 Barras com eixo inicial dado por uma curva tridimensional

Vão agora ser analisadas barras cujo eixo inicial corresponde a uma curva tridimensional. Nos casos considerados, essa configuração é obtida partindo de um arco plano com 360° e aplicando uma força na ligação banzo-alma da extremidade livre, apontando para fora do plano de curvatura, de modo a obter uma configuração tridimensional.

Em primeiro lugar considera-se o caso da Figura 4.8, correspondente a uma barra com uma secção em I relativamente compacta, pouco suscetível à encurvadura local. A configuração inicial (representada a azul na parte inferior esquerda da figura) é obtida considerando um arco plano de raio igual a 2 metros (representado a preto) e aplicando uma força para fora do plano igual a  $F = 0,3$  kN. O deslocamento vertical conjugado desta força é de 1,4422 m com 5 elementos finitos e 1,6537 m com 20 elementos. A configuração obtida com 20 elementos foi posteriormente exportada para o programa ADINA, para criar o modelo de elementos de casca (cuja configuração inicial se representa a azul na parte inferior direita da figura). Naturalmente, a força aplicada e a deformação gerada para definir a configuração inicial não são consideradas na análise subsequente.

O gráfico na Figura 4.8 mostra as trajetórias de equilíbrio (força-deslocamento do respetivo ponto de aplicação) obtidas (i) com um modelo de 4122 elementos de casca e (ii) a formulação proposta, com 5 e 20 elementos finitos e incluindo apenas os modos de empenamento de torção (primário e secundário). Conclui-se que 5 elementos não são suficientes para obter uma solução precisa para deslocamentos superiores a 2,5 m,

<sup>3</sup>Deve referir-se que, sem estes modos, o comportamento da barra é muito mais rígido, obtendo-se uma linha quase vertical no gráfico da figura.

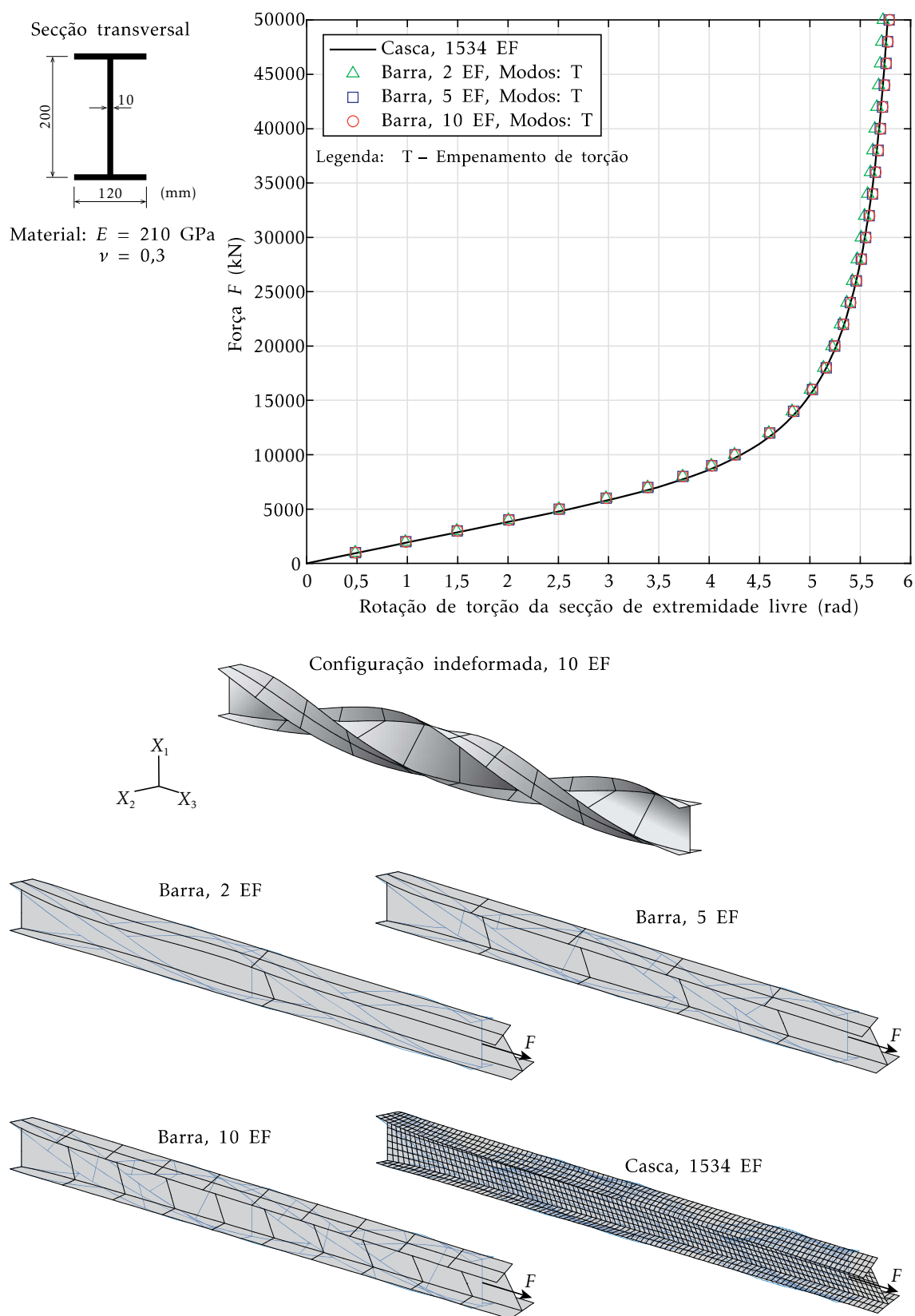


Figura 4.7: Consola com secção em I, pré-torcida a  $360^\circ$  e sujeita a uma força axial de tração.

enquanto que 20 elementos fornecem resultados quase idênticos aos do modelo de casca. Esta excelente concordância pode ainda ser observada nas configurações deformadas representadas na parte inferior da Figura 4.8, para  $F = 1$  kN e  $F = 10$  kN.

De seguida analisa-se o efeito da diferença entre considerar a configuração inicial plana (arco circular com  $360^\circ$ ) e tridimensional (após a aplicação da força vertical), ou seja, a diferença entre iniciar a análise a partir das configurações representadas a preto e a azul, respetivamente, na parte inferior da Figura 4.8. Naturalmente, ao considerar a configuração inicial plana, a força e o deslocamento são medidos relativamente à configuração tridimensional, i.e., a força é  $F = F_{\text{total}} - 0,3$  kN e o deslocamento correspondente é  $d = d_{\text{total}} - 1,6537$  m. Os resultados obtidos são apresentados no gráfico da Figura 4.9. Observa-se que existe uma diferença significativa entre as curvas para as duas configurações iniciais — a diferença máxima em termos de deslocamentos ocorre, aproximadamente, para  $F = 0,60$  kN e tem um valor de 8,53%. De qualquer forma, não é demais salientar que, mesmo para a configuração inicial plana, os resultados obtidos com o elemento proposto coincidem virtualmente com os do modelo de elementos de casca.

Por fim, considera-se um último exemplo com a configuração inicial do caso anterior, mas com uma secção transversal mais esbelta (a espessura das paredes é reduzida para 5 mm), de forma a despoletar a deformação da secção no seu plano. O gráfico força-deslocamento da Figura 4.10 mostra os resultados obtidos com (i) um modelo com 6331 elementos de casca, (ii) a formulação proposta com 5 e 20 elementos que envolvem apenas os modos de empenamento de torção (primário e secundário) e (iii) a formulação proposta com 5 e 20 elementos que incluem, para além dos modos de empenamento de torção, os modos locais de placa da Figura 4.4. O gráfico mostra claramente que os modos locais de placa são essenciais para obter resultados precisos e que, ao utilizar 20 elementos, obtêm-se resultados virtualmente idênticos aos do modelo de elementos de casca. Note-se, no entanto, que a deformação local não é visível nas configurações deformadas, mesmo quando ocorrem grandes deslocamentos (ver a parte inferior da Figura 4.10). A influência dos modos locais de placa ao longo do comprimento da barra pode ser visualizada na Figura 4.11, onde é mostrado o andamento das funções de amplitude relativas a estes modos. Verifica-se que o modo LP5 é predominante, manifestando-se ao longo de todo o comprimento, sendo particularmente relevante perto da zona do apoio e para aproximadamente  $X/L = 0,6$ , onde a função de amplitude atinge o seu máximo. O modo LP7 também se destaca relativamente aos restantes modos, tanto junto do apoio como em  $X/L = 0,6$ , embora tenha uma participação inferior à do modo LP5. Observa-se ainda que o modo LP6 tem uma maior participação na extremidade livre, sobrepondo-se, em valor absoluto, às amplitudes dos modos LP5 e 7. Deve referir-se que se verificou que a inclusão de modos adicionais não se traduz numa diferença significativa relativamente aos resultados já apresentados.

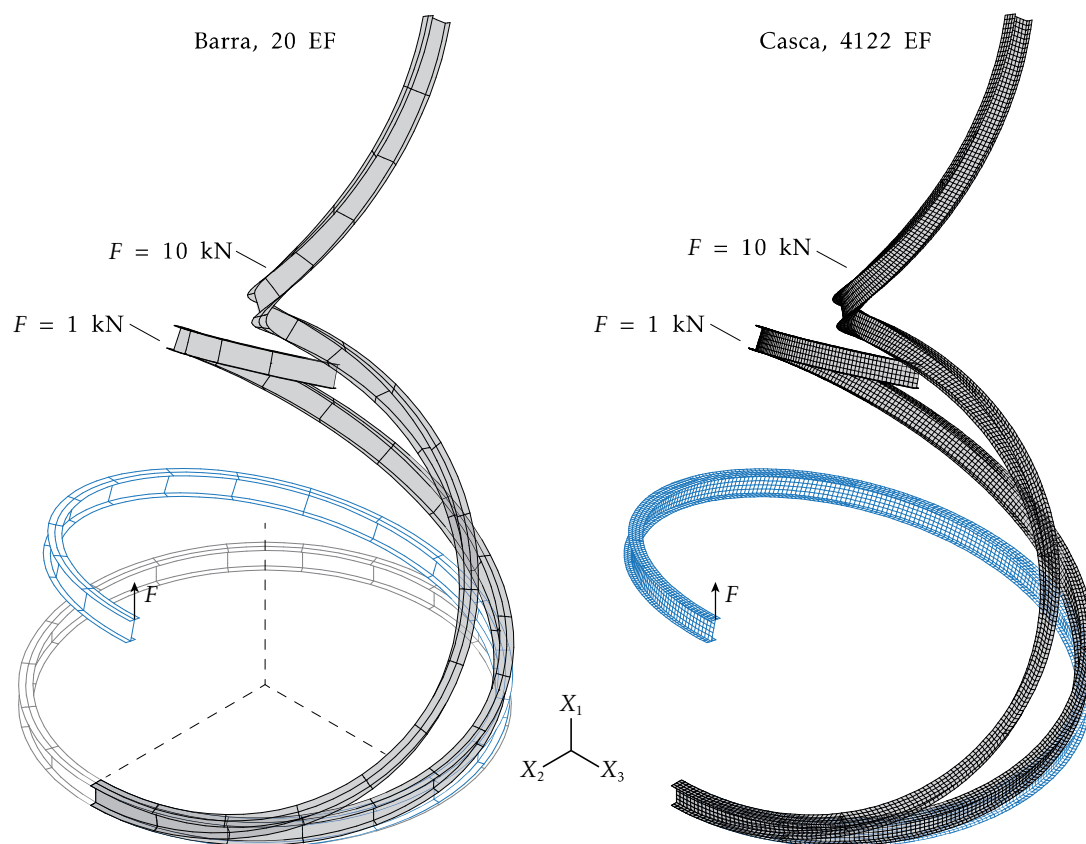
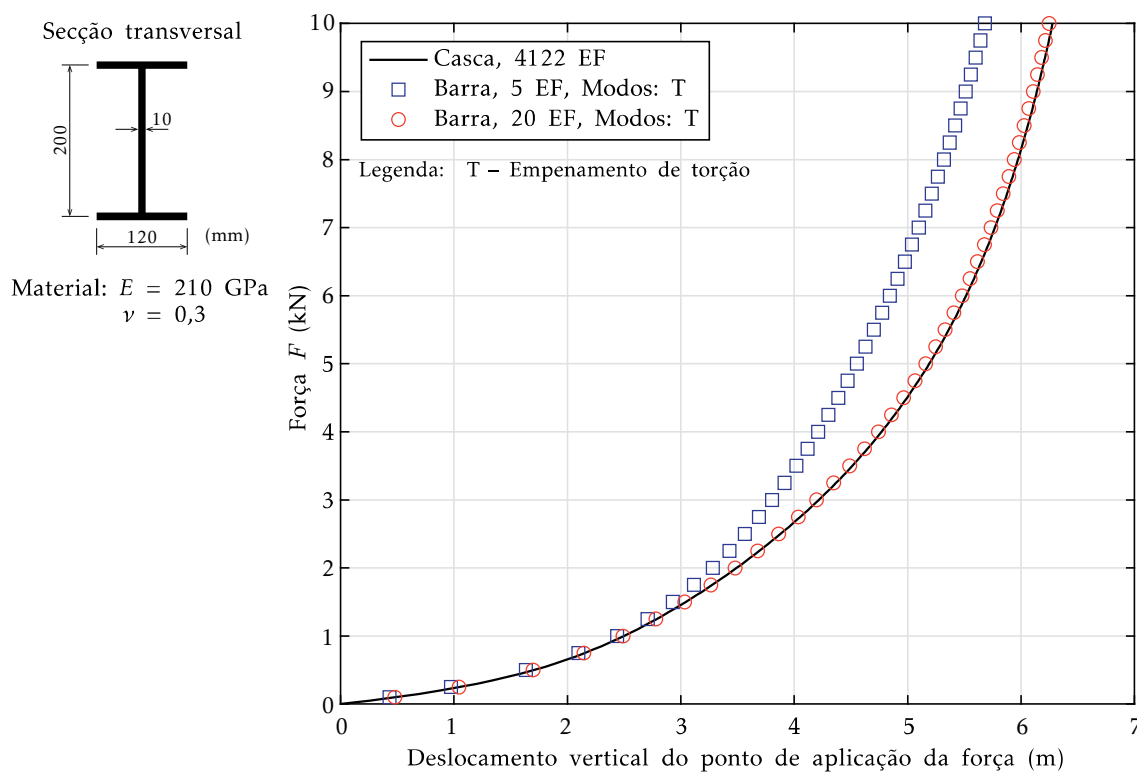


Figura 4.8: Barra de eixo inicial curvo tridimensional com secção em I compacta: geometria da secção, propriedades materiais, gráfico força-deslocamento e configurações deformadas.

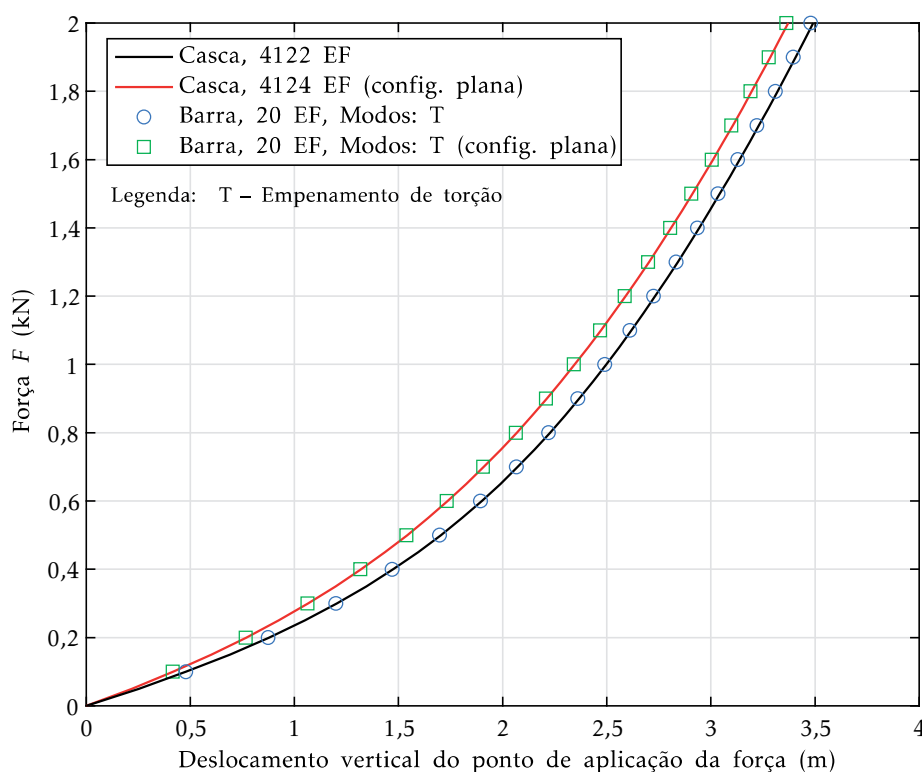


Figura 4.9: Gráfico força-deslocamento para as configurações iniciais plana e tridimensional.

### 4.7.3 Barras de eixo circular

Nesta última Secção analisam-se barras de eixo circular com  $90^\circ$  e secção em I, sujeitas à ação de forças aplicadas na secção de extremidade livre.

O primeiro exemplo consiste no arco representado na Figura 4.12, com 6 metros de comprimento e uma secção compacta. A força atua no centróide da secção de extremidade, segundo a direção perpendicular ao plano de curvatura, causando flexão-torção. Uma vez que a secção transversal é compacta e o comprimento da barra é relativamente grande, a deformação da secção tem um papel negligenciável. Este exemplo foi originalmente analisado por Gonçalves (2019) com recurso a elementos de barra geometricamente exatos de dois nós (ou seja, elementos retos) e incluindo empenamento de torção.

O gráfico da Figura 4.12 mostra as trajetórias de equilíbrio (relação força-deslocamento do ponto de aplicação da carga) obtidas com (i) 530 e 2416 elementos de casca, (ii) 6 e 50 elementos geometricamente exatos de dois nós (Gonçalves, 2019) e (iii) a formulação proposta com 6 elementos (apenas com os modos de empenamento de torção) e 20 elementos (com todos os modos indicados na Figura 4.4). Em primeiro lugar, deve-se notar que as curvas obtidas para os modelos de casca são ligeiramente distintas, mostrando que mesmo para esta secção (compacta) é necessário refinar bastante a malha. Ambos os modelos de elementos de barra com empenamento de torção (o proposto e o de Gonçalves (2019)) fornecem resultados virtualmente coincidentes com os obtidos pelo modelo de elementos



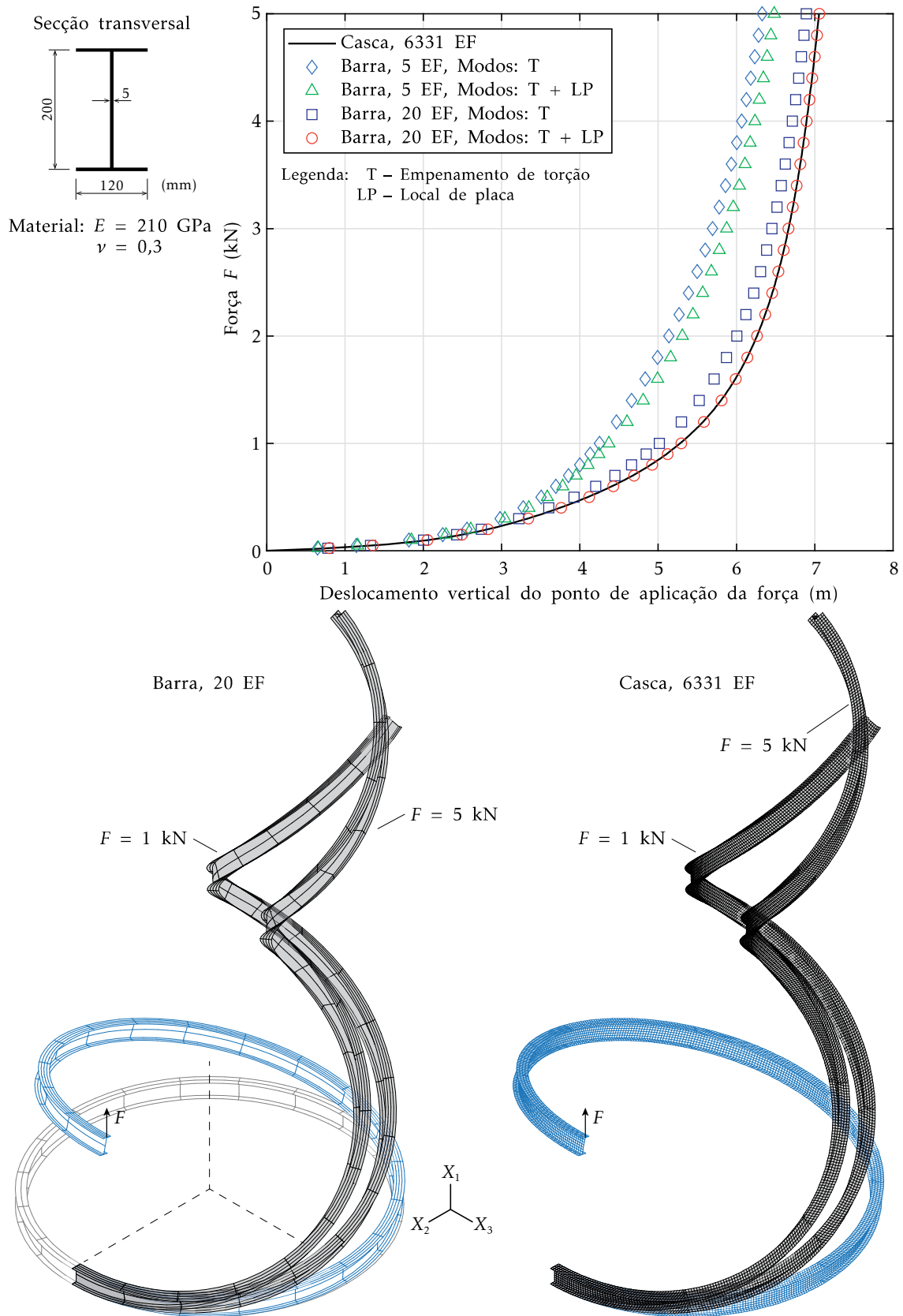


Figura 4.10: Barra de eixo inicial curvo tridimensional com secção em I esbelta: geometria da secção, propriedades materiais, gráfico força-deslocamento e configurações deformadas.

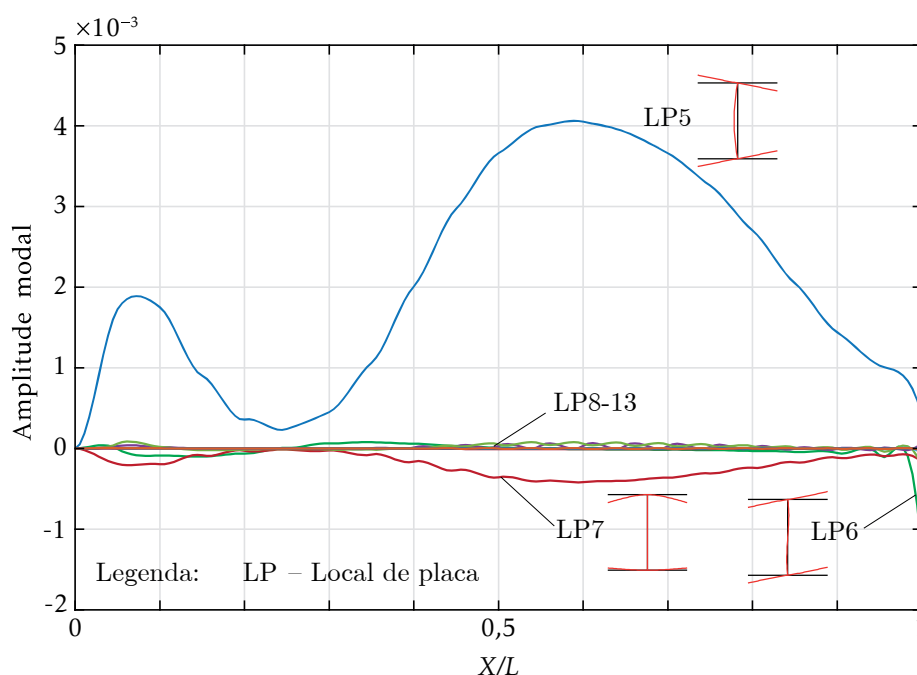


Figura 4.11: Funções de amplitude modal dos modos locais de placa.

de casca mais refinado, desde que se considere um número suficiente de elementos (6 no primeiro caso; 50 no segundo). Por outro lado, a utilização de 20 elementos de barra com todos os modos de deformação conduz a resultados ligeiramente mais flexíveis que os da malha mais refinada de elementos de casca (diferenças inferiores a 1% em termos de deslocamento). Embora não se mostre no gráfico, aumentar o número de elementos não conduz a diferenças significativas no resultados obtidos. Conclui-se também que o elemento proposto é muito mais preciso que o de Gonçalves (2019), uma vez que utilizando apenas 6 elementos e os modos de empenamento de torção obtêm-se resultados que apenas são reproduzidos com 50 elementos de dois nós. As configurações deformadas apresentadas na parte inferior da Figura 4.12 correspondem a um deslocamento lateral igual a 3 m e permitem constatar uma excelente concordância entre ambos os modelos para grandes deslocamentos.

O próximo caso a ser analisado é semelhante ao anterior, embora se reduza a razão largura-espessura das paredes para despoletar a deformação da secção transversal, conforme se mostra na Figura 4.13. Para além disso, a força lateral é aplicada na extremidade livre de um dos banzos e o raio adotado para o arco é igual a 4 metros, o que resulta num comprimento do eixo semelhante ao do caso anterior (no entanto, a linha média da secção transversal possui maiores dimensões).

O gráfico da Figura 4.13 mostra a evolução do deslocamento lateral do ponto de aplicação da carga para (i) um modelo com 3317 elementos de casca e (ii) a formulação proposta com 20 e 40 elementos, e vários conjuntos de modos de deformação. Verifica-se



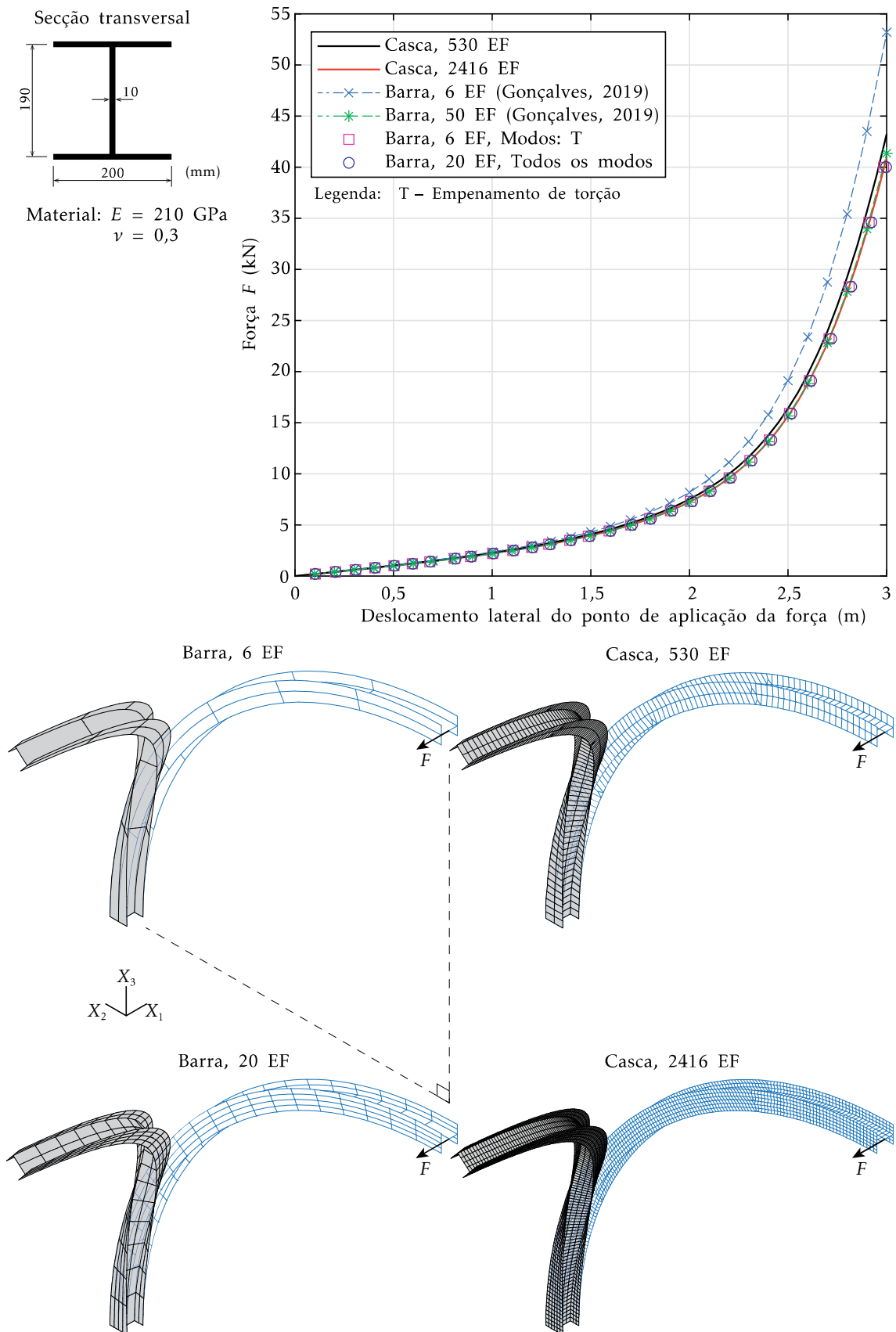


Figura 4.12: Arco circular de  $90^\circ$  com secção transversal compacta: geometria da secção, propriedades materiais, gráfico força-deslocamento e configurações deformadas.

## CAPÍTULO 4. FORMULAÇÃO GEOMETRICAMENTE EXATA PARA BARRAS DE EIXO CURVO

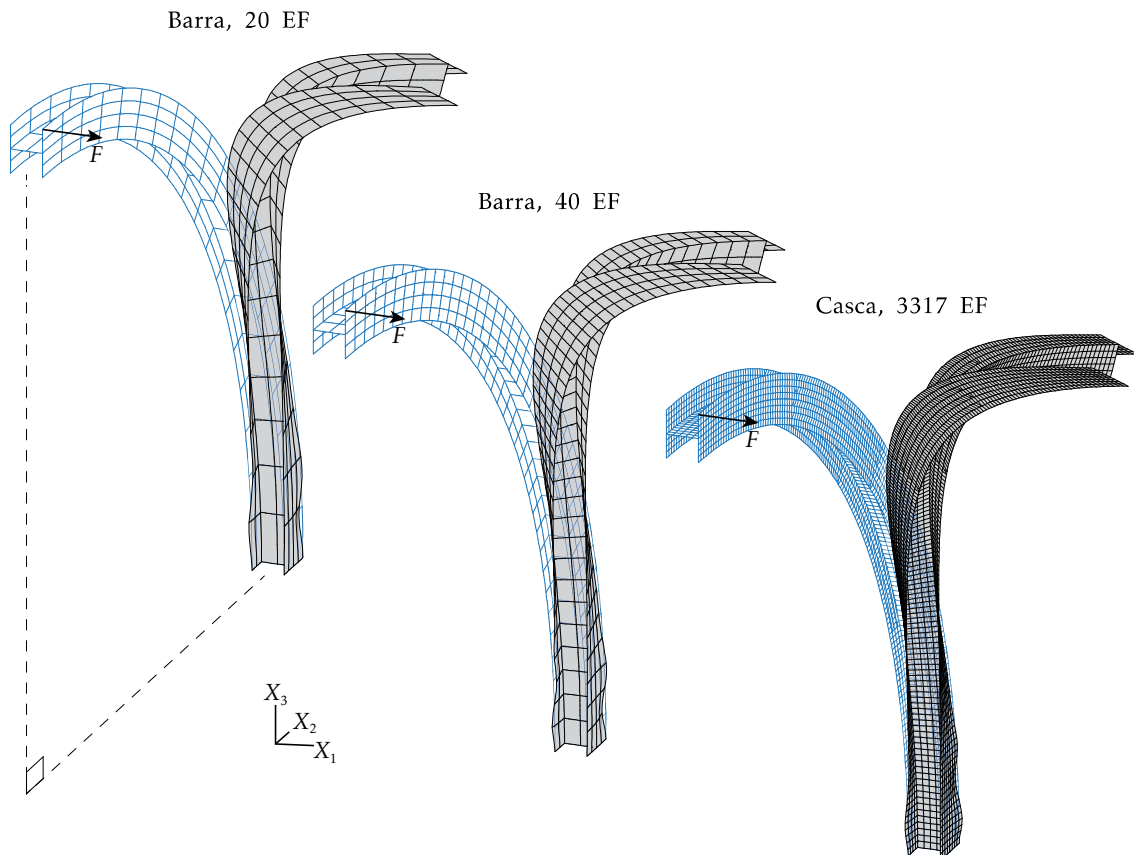
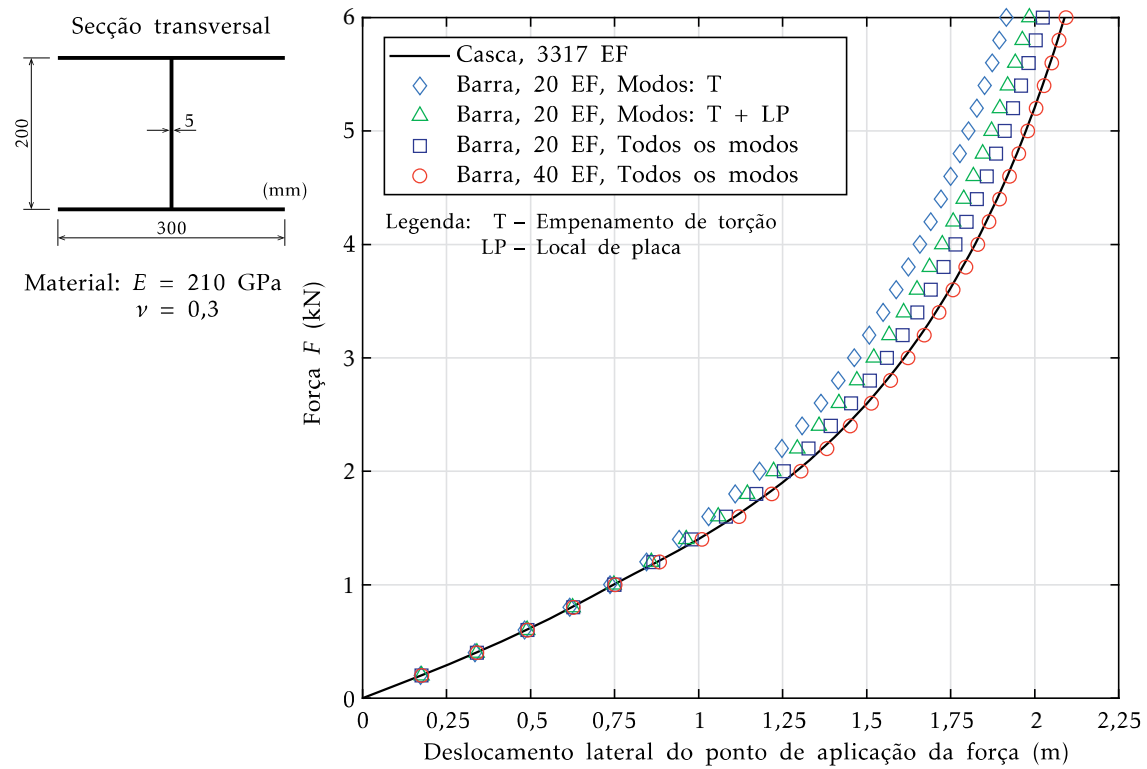


Figura 4.13: Arco circular de 90° com secção transversal esbelta: geometria da secção, propriedades materiais, gráfico força-deslocamento e configurações deformadas.

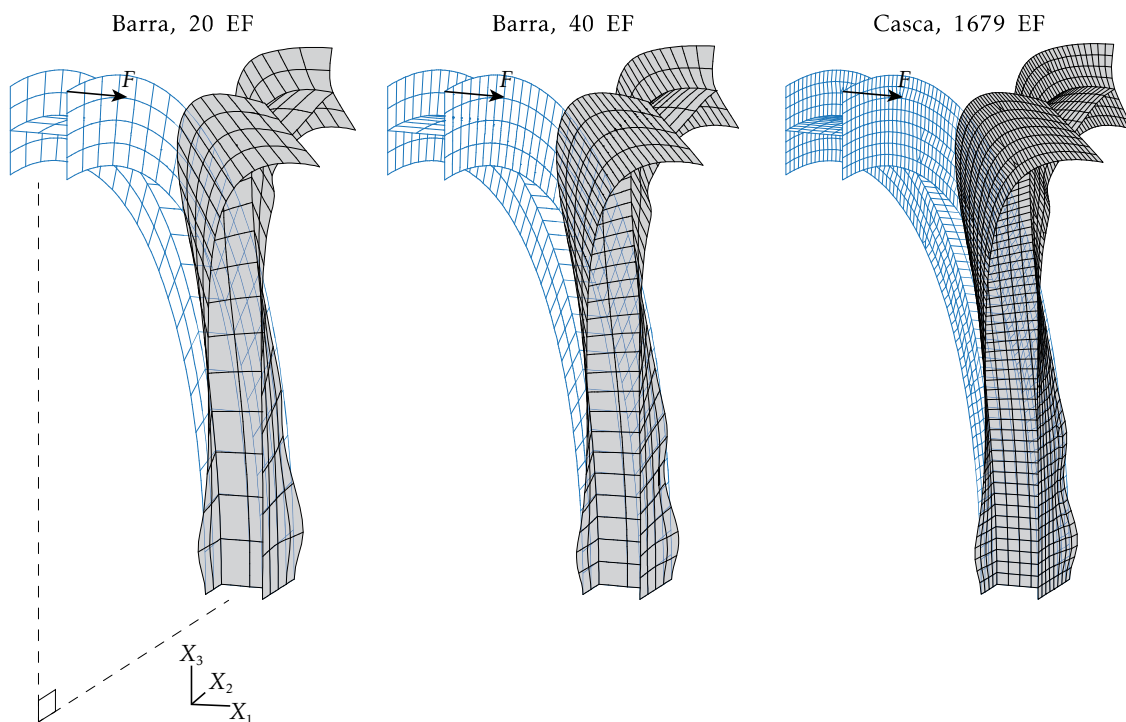
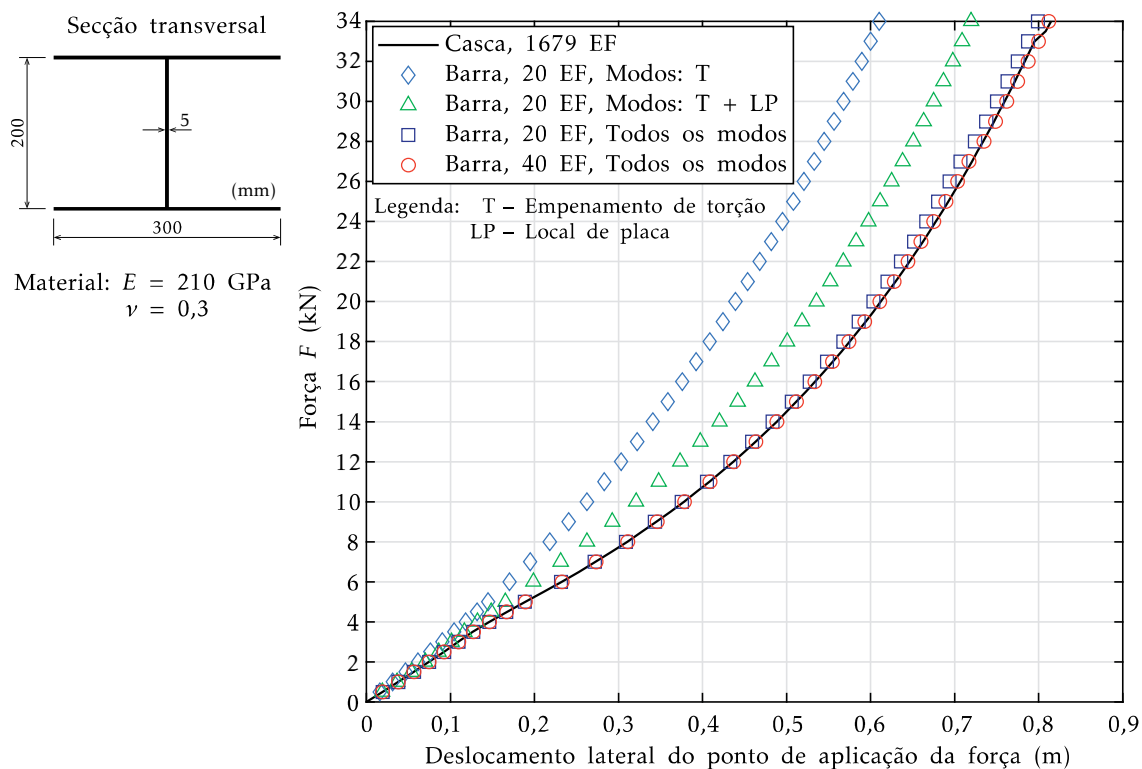


Figura 4.14: Arco circular de  $90^\circ$  curto com secção transversal esbelta: geometria da secção, propriedades materiais, gráfico força-deslocamento e configurações deformadas.

que utilizando apenas os modos de empenamento de torção se obtêm diferenças significativas relativamente ao modelo de casca para forças acima de 1 kN, o que indica que a deformação da secção torna-se relevante a partir deste nível de força. Aumentando o número de modos de deformação permite melhorar os resultados, mas uma concórdância virtualmente perfeita apenas é alcançada com 40 elementos e todos os modos de deformação.

As configurações deformadas apresentadas na Figura 4.13 dizem respeito ao deslocamento máximo indicado no gráfico sendo que, no caso do elemento proposto, consideram-se todos os modos de deformação. Estas configurações apresentam uma deformação que combina flexão-torção global com flexão localizada dos banzos perto encastramento — note-se que, curiosamente, o ponto de aplicação da força não corresponde ao deslocamento lateral máximo. Embora a solução com 20 elementos de barra já seja bastante semelhante à do modelo de elementos casca, utilizando 40 elementos é possível capturar de forma muito precisa a deformação localizada perto do apoio. No entanto, deve-se notar que mesmo este modelo mais refinado não reproduz exatamente o movimento do banzo da direita do modelo de elementos de casca na zona do encastramento — considerar mais elementos de barra não melhora os resultados obtidos com 40 elementos.

Finalmente, num último exemplo, mantém-se a secção transversal do caso anterior mas reduz-se o raio do arco para 2 metros, de forma a despoletar uma deformação local mais pronunciada. O gráfico da Figura 4.14 mostra as curvas força-deslocamento para (i) um modelo com 1679 elementos de casca e (ii) modelos de elementos de barra, com 20 e 40 elementos, e vários conjuntos de modos de deformação. Devido à natureza extrema da deformação da secção neste problema, considerando apenas os modos de empenamento de torção não permite capturar os resultados do modelo de casca, mesmo para forças relativamente baixas. De forma análoga ao caso anterior, são obtidos resultados extremamente precisos se forem considerados todos os modos de deformação e 40 elementos finitos.

As configurações deformadas apresentadas na Figura 4.14 são relativas ao deslocamento máximo no gráfico (aproximadamente 0,8 m) e mostram claramente que a deformação da secção está presente ao longo de toda a barra. Em contraste com o exemplo anterior, deve-se referir que a deformação da secção é agora muito bem capturada ao longo de toda a barra caso se considerem 40 elementos e todos os modos de deformação.

## 4.8 Sumário

Neste Capítulo desenvolveu-se uma formulação geometricamente exata para estudar problemas estruturais envolvendo barras de parede fina pré-torcidas e/ou de eixo curvo sujeitas a grandes deslocamentos e rotações finitas, bem como deformação da secção transversal no plano e para fora deste (empenamento). A deformação da secção é introduzida através de funções de forma (modos de deformação) obtidas a partir da GBT, as quais constituem conjuntos de modos de deformação bem definidos hierarquicamente e

com significado estrutural. O modo de empenamento secundário associado à torção (na direção da espessura das paredes) é obtido de forma a ser independente da curvatura de torção, conduzindo a uma maior eficiência computacional relativamente à formulação para barras retas de Gonçalves et al. (2010a).

O elemento finito desenvolvido envolve a interpolação direta dos parâmetros cinemáticos independentes (três translações, três rotações,  $D$  modos de deformação arbitrários e o modo de empenamento secundário de torção) utilizando polinómios cúbicos de Hermite, resultando num elemento com  $4 \times (7 + D)$  graus de liberdade. Todas as expressões necessárias à implementação computacional da formulação foram apresentadas numa forma matricial.

A precisão do elemento finito proposto foi demonstrada através de vários exemplos numéricos, tendo-se utilizados modelos refinados de elementos finitos de casca para validar e comparar os resultados obtidos. Demonstrou-se que o elemento proposto conduz a resultados excelentes mesmo quando (i) a configuração inicial assume uma forma tridimensional complexa e (ii) ocorrem grandes deslocamentos e rotações finitas em conjunto com a deformação da secção transversal.



## Capítulo 5

# Conclusões e desenvolvimentos futuros

### 5.1 Conclusões

O trabalho apresentado nesta tese consistiu no desenvolvimento de formulações originais para barras de parede fina de eixo curvo, tendo sido mostrado que os elementos finitos (de barra) baseados nestas formulações constituem alternativas vantajosas face aos elementos de casca, tanto na eficiência computacional — envolvem um número muito menor de graus de liberdade, mantendo a precisão dos resultados — como na interpretação dos resultados — os modos de deformação da secção transversal permitem uma interpretação com significado estrutural.

O trabalho foi desenvolvido em duas fases: em primeiro lugar foi apresentada uma formulação fisicamente e geometricamente linear para barras de eixo circular, baseada na Teoria Generalizada de Vigas (Capítulo 3) e, em segundo lugar, desenvolveu-se uma formulação geometricamente exata para barras pré-curvas e/ou pré-torcidas envolvendo grandes deslocamentos e rotações finitas, a qual utiliza os modos de deformação da GBT (Capítulo 4).

De seguida são apresentadas as conclusões relativas a cada uma das formulações desenvolvidas.

#### 5.1.1 Conclusões relativas à formulação linear para barras de eixo circular

Relativamente à formulação linear para barras de eixo circular, a qual foi apresentada no Capítulo 3, destacam-se as seguintes conclusões:

1. A formulação desenvolvida conduz a expressões relativamente mais complexas do que as da GBT clássica (barras retas), em virtude da presença da curvatura da barra. Em particular, surge uma nova componente da deformação na direção longitudinal que traduz a já conhecida particularidade de barras de eixo circular: deslocamentos radiais provocam extensão longitudinal do eixo da barra. Esta nova

componente conduz ao surgimento de um novo esforço generalizado e três novas matrizes modais da GBT.

2. Apesar da relativa complexidade das expressões, a formulação permite incluir as hipóteses simplificativas usuais da GBT, nomeadamente, a hipótese de Kirchhoff, a hipótese de Vlasov (distorção de membrana nula) e a hipótese de inextensibilidade transversal das paredes da secção transversal. Estas hipóteses simplificativas são fundamentais para preservar a eficiência da GBT clássica (para barras de eixo reto): obtêm-se soluções precisas com um número reduzido de modos de deformação e, em acréscimo, a hipótese de Vlasov conduz a uma formulação sem *locking* de corte. No entanto, é de salientar que é possível utilizar modos de deformação que não satisfazem as hipóteses de Vlasov e/ou de inextensibilidade transversal das paredes, sendo que, em alguns casos, a inclusão destes modos permite melhorar a precisão das soluções (em particular, os modos que não satisfazem a hipótese de Vlasov são fundamentais para secções fechadas). À semelhança do que sucede com a GBT para barras retas, a consideração de ambas as hipóteses obriga a que os modos de deformação sejam definidos por funções de empenamento  $\bar{u}_k$  lineares e deslocamentos transversais  $\bar{v}_k$  constantes, mas a hipótese de Vlasov conduz, no entanto, a uma restrição mais complexa do que a obtida para o caso reto, conforme é discutido no ponto 4).
3. A formulação proposta permite recuperar as equações clássicas das teorias de Winkler (caso plano) e de Vlasov (caso tridimensional), bem como as relações entre esforços generalizados e medidas de deformação, sempre que o centróide seja coincidente com o centro de corte e os eixos principais da secção sejam paralelos aos eixos do referencial global. Este procedimento demonstra, uma vez mais, a versatilidade e o carácter geral desta formulação face às teorias clássicas para barras de eixo circular.
4. A consideração da hipótese de Vlasov no contexto das barras curvas envolve uma restrição significativamente mais complexa entre as componentes  $\bar{u}_k$  e  $\bar{v}_k$  dos modos de deformação, face à obtida para barras retas. Tal implica que os modos de deformação dependem da curvatura (correspondem aos modos das barras retas quando a curvatura é infinita). Assim, foram desenvolvidas duas abordagens para o cálculo dos modos de deformação para barras de eixo circular:
  - a) Numa primeira abordagem, destinada simplesmente ao cálculo dos modos naturais de Vlasov (os restantes modos assumem-se iguais aos do caso reto), utilizam-se as funções de empenamento para barras retas de modo a determinar os deslocamentos no plano da secção transversal, impondo a hipótese de Vlasov. Este procedimento revelou-se difícil de sistematizar, motivando o desenvolvimento de uma abordagem mais geral.



- b) A segunda abordagem é baseada no procedimento proposto por Gonçalves et al. (2010b,2014) para barras retas, utilizando problemas de valores e vetores próprios generalizados de forma a obter e subdividir os modos de deformação. Desta forma, a nomenclatura clássica dos modos foi mantida.
5. Foram desenvolvidos, implementados e validados dois elementos finitos, nomeadamente um elemento de compatibilidade (com aproximação direta das funções de amplitude modal dos modos de deformação) e um elemento misto (com aproximação das funções de amplitude modal e das extensões longitudinais que causam a ocorrência de *locking* de membrana).
- a) Os exemplos numéricos apresentados mostraram de forma clara a versatilidade e a eficiência computacional do elemento de compatibilidade, tendo-se obtido resultados muito precisos com um número reduzido de modos de deformação e elementos finitos. O carácter modal da GBT permitiu incluir ou não determinados modos de deformação nas análises, de forma a aferir a sua influência nos resultados. Para além disso, através da observação das funções de amplitude modal, foi possível verificar a importância relativa dos vários modos de deformação ao longo do comprimento da barra.
- b) Muito embora o elemento de compatibilidade tenha fornecido resultados excelentes e seja insensível ao *locking* de corte, existem outras fontes de *locking* que afetam o desempenho do elemento. O elemento finito misto com aproximação das funções de amplitude modal e do campo de deformações assumidas permitiu prevenir o *locking* decorrente da curvatura da barra e revelou possuir uma capacidade preditiva muito superior à do elemento de compatibilidade.
- c) Os exemplos apresentados permitem concluir que o comportamento de barras curvas exibe peculiaridades notáveis: o efeito de *flange curling* pode ser observado no caso linear (em peças retas apenas ocorre no caso geometricamente não-linear), (ii) cargas concentradas induzem a deformação da secção não só na sua vizinhança mas também em zonas significativamente afastadas (tal não sucede em peças retas).

### 5.1.2 Conclusões relativas à formulação geometricamente exata para barras curvas

A formulação geometricamente exata para barras curvas (e/ou pré-torcidas) permite tecer as seguintes conclusões:

1. A formulação permite incluir, para além dos movimentos de corpo rígido, a deformação da secção transversal no plano e para fora deste (empenamento). Esta é caracterizada através de funções de forma que definem a configuração do folheto médio, cuja descrição é cinematicamente completa (no presente trabalho utilizaram-se os modos de deformação da GBT para peças retas, os quais constituem um conjunto de

modos bem definidos, hierárquicos e com significado estrutural). A simplificação da formulação ocorre ao nível dos termos de flexão (termos que variam na direção da espessura das paredes), que são calculados considerando algumas hipóteses simplificativas.

2. O modo de empenamento secundário associado à torção foi definido de forma independente da curvatura de torção, o que constitui uma melhoria na eficiência computacional face à formulação desenvolvida por Gonçalves et al. (2010a) para barras retas. Em particular, a presente abordagem evita o cálculo da derivada e das variações da curvatura de torção.
3. A introdução de uma configuração inicial curva e/ou pré-torica constituiu uma tarefa não trivial, uma vez que as expressões se tornam significativamente mais complexas em relação às apresentadas por Gonçalves et al (2010a). No entanto, foi possível apresentá-las num formato cuja implementação computacional é relativamente simples.
4. O elemento finito interpola diretamente os parâmetros cinemáticos independentes (três translações, três rotações,  $D$  modos de deformação arbitrários e o modo de empenamento secundário de torção) utilizando funções cúbicas de Hermite, constituindo assim um elemento com  $4 \times (7 + D)$  graus de liberdade.
5. Os exemplos numéricos apresentados permitiram validar o elemento finito proposto, tendo-se obtido resultados muito precisos em problemas envolvendo grandes deslocamentos e rotações finitas com complexidade considerável. Em particular, foram analisadas (i) barras pré-torcidas sujeitas a uma força axial, demonstrando que o elemento captura adequadamente o acoplamento não-linear entre a extensão axial e a torção, (ii) barras com eixo inicial definido por uma curva tridimensional complexa, mesmo sofrendo deformação da secção, e (iii) barras curvas sujeitas a uma considerável deformação da secção.

## 5.2 Desenvolvimentos futuros

Na opinião do autor, as formulações desenvolvidas nesta tese constituem já uma contribuição significativa para a análise de barras curvas e/ou pré-torcidas, uma vez que permitem (i) considerar uma configuração inicial arbitrária, (ii) incluir a deformação da secção transversal, e (iii) oferecem a hipótese de efetuar análises lineares ou não-lineares. Apesar disso, é possível apontar alguns assuntos ainda por desenvolver que irão permitir obter uma formulação ainda mais potente e geral:

1. Em primeiro lugar, considera-se que a introdução de efeitos fisicamente não-lineares constitui uma extensão natural das formulações apresentadas. A introdução destes efeitos no contexto da GBT para barras retas foi já efetuada por Gonçalves e

Camotim (2011, 2012) (considerando uma lei constitutiva do tipo elastoplástico), Henriques et al. (2015) e na tese de Henriques (2020), onde é analisado o comportamento de vigas mistas aço-betão (incluindo o efeito da fluência e fendilhação do betão). A título de exemplo, refere-se que a introdução de uma lei constitutiva elastoplástica, junto com tensões residuais, permitirá efetuar estudos relativos à resistência de barras curvas com secção deformável, à semelhança dos estudos que são correntemente realizados para desenvolver as regras de verificação da segurança de barras com secção compacta do Eurocódigo 3 (ver, e.g., Taras, 2016; Gonçalves e Camotim, 2017; Snijder et al., 2018; Simões da Silva et al., 2020).

2. A formulação geometricamente exata pode ser facilmente adaptada para efetuar análises lineares de estabilidade e, portanto, calcular as cargas de bifurcação e os respetivos modos de instabilidade. Este assunto foi já estudado de forma preliminar e publicado em Peres et al. (2020b). Note-se que isto constitui uma aplicação relevante da formulação proposta, uma vez que a precisão das análises lineares de estabilidade é altamente dependente da precisão dos termos geometricamente não-lineares considerados — assim, tendo em conta que se parte de uma formulação geometricamente exata, a sua particularização para o caso de uma análise linear de estabilidade deverá conduzir a resultados muito precisos.
3. A análise dinâmica (incluindo vibrações livres ou forçadas, com ou sem amortecimento) tem também um grande interesse no âmbito da análise estrutural de barras de eixo curvo (e.g., para estudar o comportamento em serviço de pontes ou passadiços).
4. Na sua forma original, a GBT tem sido exclusivamente aplicada ao estudo de barras isoladas. A aplicação da GBT a estruturas reticuladas foi iniciada por Basaglia et al. (2006a,b,2007), utilizando equações de constrangimento. Mais recentemente, Manta et al. (2020) propuseram uma abordagem mais geral, combinando elementos de barra da GBT e elementos de casca. Deste modo, considera-se que um procedimento semelhante a este último, aliando elementos de casca e barras curvas/pré-torcidas constituirá um avanço significativo nesta área.



# Referências

## A

- Andreassen, M. J. & Jönsson, J. (2012a). Distortional solutions for loaded semi-discretized thin-walled beams. *Thin-Walled Structures*, 50, 116-127.
- Andreassen, M. J. & Jönsson, J. (2012b). Distortional buckling modes of semi-discretized thin-walled columns. *Thin-Walled Structures*, 51, 53-63.
- ANSYS (2016). *Versão 16.2*. ANSYS Inc.
- Argyris, J. (1982). An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1-3), 85-155.
- Arici, M. & Granata, M. F. (2016). Unified theory for analysis of curved thin-walled girders with open and closed cross section through HSA method. *Engineering Structures*, 113, 299-314.
- Armero, F. & Valverde, J. (2012a). Invariant Hermitian finite elements for thin Kirchhoff rods. I: The linear plane case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216, 427-457.
- Armero, F. & Valverde, J. (2012b). Invariant Hermitian finite elements for thin Kirchhoff rods. II: The linear three-dimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216, 458-485.
- Ashwell, D. G. & Sabir, A. B. (1971). Limitations of certain curved finite elements when applied to arches. *International Journal of Mechanical Sciences*, 13(2), 133-139.
- Ashwell, D. G., Sabir, A. B. & Roberts, T. M. (1971). Further studies in the application of curved finite elements to circular arches. *International Journal of Mechanical Sciences*, 13(6), 507-517.
- Ashwell, D. G. & Gallagher, R. H. (1976). *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*. John Wiley & Sons, 1976.
- Atluri, S. N., Iura, M. & Vasudevan, S. (2001). A consistent theory of finite stretches and finite rotations, in space-curved beams of arbitrary cross-section. *Computational Mechanics*, 27(4), 271-281.

Auricchio, F., Da Veiga, L. B., Kiendl, J., Lovadina, C. & Reali, A. (2013). Locking-free isogeometric collocation methods for spatial Timoshenko rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 263, 113-126.

## B

Barnshaw, C. (2018). *Induction bending: the state of the art*. Acedido a 29 de dezembro de 2020. URL: [www.thefabricator.com/thefabricator/article/tubepipefabrication/induction-bending-the-state-of-the-art](http://www.thefabricator.com/thefabricator/article/tubepipefabrication/induction-bending-the-state-of-the-art).

Basaglia, C., Camotim, D. & Silvestre, N. (2006a). Formulation of a GBT-based finite element to analyse the global buckling behaviour of plane and spatial thin-walled frames. Em: C. A. Mota Soares et al. (editores) *III European Conference on Computational Mechanics — Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, p. 682, Springer, Dordrecht, Holanda.

Basaglia, C., Camotim, D. & Silvestre, N. (2006b). GBT-based analysis of the local and global buckling behavior of 3-dimensional cold-formed steel frames. Em: R. LaBoube, W. Yu (editores), *Proceedings of the 18th International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, 331-350, Orlando, Florida, Estados Unidos.

Basaglia, C., Camotim, D., & Silvestre, N. (2007). GBT-based analysis of the local-plate, distortional and global buckling behavior of thin-walled steel frames. Em: *Proceedings of SSRC Annual Stability Conference*, 391-412, Nova Orleães, Luisiana, Estados Unidos.

Bathe, K. J. & Dvorkin, E. N. (1985). A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(2), 367-383.

Bathe, K. J. (2019). *ADINA system*. ADINA R&D Inc.

Battini, J. M. & Pacoste, C. (2002a). Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 1755-1789.

Battini, J. M. & Pacoste, C. (2002b). Plastic instability of beam structures using co-rotational elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 5811-5831.

Bebiano, R., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2015). A cross-section analysis procedure to rationalise and automate the performance of GBT-based structural analyses. *Thin-Walled Structures*, 92, 29-47.

Bebiano, R., Camotim, D. & Gonçalves, R. (2018). GBTUL 2.0 - A second-generation code for the GBT-based buckling and vibration analysis of thin-walled members. *Thin-Walled Structures*, 124, 235-257.

---

Benscotter, S. U. (1954). A theory of torsion bending for multicell beams. *Journal of Applied Mechanics ASME*, 21(1), 25-34.

Bonet, J. & Wood, R. D. (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press.

## C

Cai, J. (2019). Obtaining the modal participation of displacements, stresses, and strain energy in shell finite-element eigen-buckling solutions of thin-walled structural members via Generalized Beam Theory. *Thin-Walled Structures*, 134, 148-158.

Cai, J. & Moen, C. D. (2016). Elastic buckling analysis of thin-walled structural members with rectangular holes using generalized beam theory. *Thin-Walled Structures*, 107, 274-286.

Camotim, D., Basaglia, C., Bebiano, R., Gonçalves, R. & Silvestre, N. (2010a). Latest developments in the GBT analysis of thin-walled steel structures. Em: E. Batista, P. Vellasco, L. Lima (editores) *Proceedings of International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures*, 33-58, Rio de Janeiro, Brasil.

Camotim, D., Basaglia, C., Silva, N. F. & Silvestre, N. (2010b). Numerical analysis of thin-walled structures using generalised beam theory (GBT): recent and future developments. Em: B. Topping, J. Adam, F. Pallarés, R. Bru, M. Romero (editores) *Computational Technology Reviews*, Volume 1, 315-354, Saxe-Coburg Publications, Stirlingshire, Reino Unido.

Camotim, D. & Basaglia, C. (2013). Buckling analysis of thin-walled steel structures using Generalized Beam Theory (GBT): state-of-the-art report. *Steel Construction*, 6(2), 117-131.

Cantin, G. (1970). Rigid body motions in curved finite elements. *AIAA Journal*, 8(7), 1252-1255.

Cantin, G. & Clough, R. W. (1968). A curved, cylindrical-shell, finite element. *AIAA Journal*, 6(6), 1057-1062.

Cardona, A. & Geradin, M. (1988). A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(11), 2403-2438.

Casafont, M., Bonada, J., Pastor, M. M., Roure, F. & Susín, A. (2018). Linear buckling analysis of perforated cold-formed steel storage rack columns by means of the generalised beam theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18(1), 1850004 (32 págs.).

- Cheung, M. S. & Cheung, Y. K. (1971). Analysis of curved box girder bridges by finite strip method. *IABSE Publications*, 31(I), 1-19.
- Choi, I. S., Jang, G. W., Choi, S., Shin, D. & Kim, Y. Y. (2017). Higher order analysis of thin-walled beams with axially varying quadrilateral cross sections. *Computers & Structures*, 179, 127-139.
- Crisfield, M. A. (1986). *Finite elements and solution procedures for structural analysis: linear analysis (Volume 1)*. Pineridge Press.
- Crisfield, M. A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures. Volume 1: Essentials*. John Wiley & Sons.
- Crisfield, M. A. (1997). *Non-linear finite element analysis of solids and structures. Volume 1: Advanced topics*. John Wiley & Sons.
- Crisfield, M. A. & Jelenić, G. (1999). Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation. *Proceedings of the Royal Society of London - A*, 455, 1125-1147.

## D

- Dabrowski, R. (1964). Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Trägern mit offenem Profil, *Der Stahlbau*, 33(12), 364-372.
- Dabrowski, R. (1965). Woblkrafttorsion von gekrümmten Kastenträgern mit nichtverformbarem Profil, *Der Stahlbau*, 34(5), 135-141.
- Dabrowski, R. (1968). *Gekrümmte dünnwandige Träger. Theorie und Berechnung*, Springer-Verlag. Tradução inglesa: *Curved Thin-Walled Girders: Theory and analysis*, Cement and Concrete Association, 1972.
- Dasambiagio, E. R., Pimenta, P. M. & Campello, E. M. B. (2009). A finite strain rod model that incorporates general cross section deformation and its implementation by the Finite Element Method. Em: H. S. da Costa Mattos, M. Alves (editores) *Solid Mechanics in Brazil 2009*, ABCM Symposium Series in Solid Mechanics, Vol. 2, 145-168, Rio de Janeiro, Brasil.
- Davies, J. M. (1998). Generalised beam theory (GBT) for coupled instability problems. Em: J. Rondal (editor) *Coupled Instabilities in Metal Structures: Theoretical and Design Aspects*. CISM International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures), vol. 379, 151-223. Springer, Viena, Áustria.
- Davies, J. M. (2000). Recent research advances in cold-formed steel structures. *Journal of Constructional Steel Research*, 55(1-3), 267-288.



- 
- Davies, J. M. & Leach, P. (1994). First-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31(2-3), 187-220.
- Davies, J. M., Leach, P. & Heinz, D. (1994). Second-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31(2-3), 221-241.
- Davies, J. M., Leach, P. & Taylor, A. (1997). The design of perforated cold-formed steel sections subject to axial load and bending. *Thin-Walled Structures*, 29(1-4), 141-157.
- De Miranda, S., Madeo, A., Melchionda, D. & Ubertini, F. (2015). A high performance flexibility-based GBT finite element. *Computers & Structures*, 158, 285-307.
- De Miranda, S., Madeo, A., Melchionda, D., Patruno, L. & Ruggerini, A. W. (2017). A corotational based geometrically nonlinear Generalized Beam Theory: buckling FE analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 121, 212-227.
- Duan, L. & Zhao, J. (2019). GBT deformation modes for thin-walled cross-sections with circular rounded corners. *Thin-Walled Structures*, 136, 64-89.

## E

- El-Amin, F. M. & Kasem, M. A. (1978). Higher-order horizontally-curved beam finite element including warping for steel bridges. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(1), 159-167.

## F

- Ferrarotti, A., Piccardo, G. & Luongo, A. (2017). A novel straightforward dynamic approach for the evaluation of extensional modes within GBT “cross-section analysis”. *Thin-Walled Structures*, 114, 52-69.

## G

- Gabriele, S., Rizzi, N. & Varano, V. (2016). A 1D nonlinear TWB model accounting for in plane cross-section deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 94, 170-178.
- Garcea, G., Madeo, A. & Casciaro, R. (2012a). The implicit corotational method and its use in the derivation of nonlinear structural models for beams and plates. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 7(6), 509-538.
- Garcea, G., Madeo, A. & Casciaro, R. (2012b). Nonlinear FEM analysis for beams and plate assemblages based on the implicit corotational method. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 7(6), 539-574.

- Garcea, G., Gonçalves, R., Bilotta, A., Manta, D., Bebiano, R., Leonetti, L., Magisano, D. & Camotim, D. (2016). Deformation modes of thin-walled members: A comparison between the method of Generalized Eigenvectors and Generalized Beam Theory. *Thin-Walled Structures*, 100, 192-212.
- Goldstein, H. (1980). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley.
- Gonçalves, R. (2007). *Análise de vigas de parede fina com secção deformável: novas formulações e aplicações*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Gonçalves, R. (2019). An assessment of the lateral-torsional buckling and post-buckling behaviour of steel I-section beams using a geometrically exact beam finite element. *Thin-Walled Structures*, 143, 106222 (15 págs.).
- Gonçalves, R. & Camotim, D. (2011). Generalised beam theory-based finite elements for elastoplastic thin-walled metal members. *Thin-Walled Structures*, 49(10), 1237-1245.
- Gonçalves, R. & Camotim, D. (2012). Geometrically non-linear generalised beam theory for elastoplastic thin-walled metal members. *Thin-Walled Structures*, 51, 121-129.
- Gonçalves, R. & Camotim, D. (2013). Buckling behaviour of thin-walled regular polygonal tubes subjected to bending or torsion. *Thin-Walled Structures*, 73, 185-197.
- Gonçalves, R. & Camotim, D. (2017). A system-based approach for the design of laterally unbraced multi-span steel columns and beams. *Engineering Structures*, 135, 10-20.
- Gonçalves, R., Bebiano, R. & Camotim, D. (2014). On the shear deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory. *Thin-Walled Structures*, 84, 325-334.
- Gonçalves, R., Ritto-Corrêa, M. & Camotim, D. (2010a). A large displacement and finite rotation thin-walled beam formulation including cross-section deformation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24), 1627-1643.
- Gonçalves, R., Ritto-Corrêa, M. & Camotim, D. (2010b). A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of generalized beam theory. *Computational Mechanics*, 46(5), 759-781.
- Gonçalves, R., Ritto-Corrêa, M. & Camotim, D. (2011). Incorporation of wall finite relative rotations in a geometrically exact thin-walled beam element. *Computational Mechanics*, 48(2), 229-244.
- Greco, L. & Cuomo, M. (2016). An isogeometric implicit G1 mixed finite element for Kirchhoff space rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 298, 325-349.

---

Gruttmann, F., Sauer, R. A. W. W. & Wagner, W. (1998). A geometrical nonlinear eccentric 3D-beam element with arbitrary cross-sections. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 160(3), 383-400.

Gruttmann, F., Sauer, R. & Wagner, W. (2000). Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(12), 1675-1702.

Guimaraes, J. E. F. & Heppler, G. R. (1992). On trigonometric basis functions for  $C^1$  curved beam finite elements. *Computers & Structures*, 45(2), 405-413.

## H

Haisler, W. E. & Stricklin, J. A. (1967). Rigid-body displacements of curved elements in the analysis of shells by the matrix-displacement method. *AIAA Journal*, 5(8), 1525-1527.

Henriques, D. (2020). *Análise e modelação avançada de vigas mistas aço-betão utilizando a Teoria Generalizada de Vigas*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Caparica, Portugal.

Henriques, D., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2015). A physically non-linear GBT-based finite element for steel and steel-concrete beams including shear lag effects. *Thin-Walled Structures*, 90, 202-215.

Henriques, D., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2016). GBT-based finite element to assess the buckling behaviour of steel-concrete composite beams. *Thin-Walled Structures*, 107, 207-220.

Hodges, D. H. (1980). Torsion of pretwisted beams due to axial loading. [Journal of Applied Mechanics], 47(2), 393-397.

## I

Ibrahimbegović, A., Frey, F. & Kožar, I. (1995). Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(21), 3653-3673.

Ishaquddin, M., Raveendranath, P. & Reddy, J. N. (2013). Coupled polynomial field approach for elimination of flexure and torsion locking phenomena in the Timoshenko and Euler-Bernoulli curved beam elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 65, 17-31.

## J

Jelenić, G. & Crisfield, M. A. (1999). Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171(1-2), 141-171.

## K

Kikuchi, F. (1982). Accuracy of some finite element models for arch problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 35(3), 315-345.

King, C. & Brown, D. (2001). *Design of Curved Steel*. SCI Publication P281. The Steel Construction Institute.

Klinkel, S. & Govindjee, S. (2003). Anisotropic bending-torsion coupling for warping in a non-linear beam. *Computational Mechanics*, 31, 78-87.

Kordolemis, A., Aravas, N. & Giannakopoulos, A. E. (2015). Pretwisted beams in axial tension and torsion: analogy with dipolar gradient elasticity and applications to textile materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 141(10), 04015036 (13 págs.).

Krenk, S. (1983). The torsion-extension coupling in pretwisted elastic beams. *International Journal of Solids and Structures*, 19(1), 67-72.

## L

Leach, P. (1994). The calculation of modal cross-section properties for use in the generalized beam theory. *Thin-Walled Structures*, 19(1), 61-79.

Love, A. (1906). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 2.<sup>a</sup> Edição. Cambridge University Press.

## M

Magisano, D., Leonetti, L., Madeo, A. & Garcea, G. (2020). A large rotation finite element analysis of 3D beams by incremental rotation vector and exact strain measure with all the desirable features. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 361, 112811 (24 págs.).

Manta, D. & Gonçalves, R. (2016). A geometrically exact Kirchhoff beam model including torsion warping. *Computers & Structures*, 177, 192-203.

---

Manta, D., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2020). Combining shell and GBT-based finite elements: Linear and bifurcation analysis. *Thin-Walled Structures*, 152, 106665 (14 págs.).

Martins, A. D., Camotim, D., Gonçalves, R. & Dinis, P. B. (2018). Enhanced geometrically nonlinear generalized beam theory formulation: Derivation, numerical implementation, and illustration. *Journal of Engineering Mechanics*, 144(6), 04018036 (20 págs.).

MATLAB (2018). *Versão 9.4.0 (R2018a)*. TheMathWorks Inc., Massachussetts.

Mebane, P. M. & Stricklin, J. A. (1971). Implicit rigid body motion in curved finite elements. *AIAA Journal*, 9(2), 344-345.

Meck, H. R. (1980). An accurate polynomial displacement function for unite ring elements. *Computers & Structures*, 11(4), 265-269.

## N

Nedelcu, M. (2011). GBT formulation to analyse the buckling behaviour of isotropic conical shells. *Thin-Walled Structures*, 49(7), 812-818.

Nedelcu, M. (2012). GBT-based buckling mode decomposition from finite element analysis of thin-walled members. *Thin-Walled Structures*, 54, 156-163.

Nguyen, T. T., Nguyen, N. L., Lee, J. & Nguyen, Q. H. (2021). Analysis of non-uniform polygonal cross-sections for thin-walled functionally graded straight and curved beams. *Engineering Structures*, 226, 111366 (11 págs.).

## O

Oden, J. T. (1967). *Mechanics of Elastic Structures*. McGraw-Hill.

## P

Peres, N., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2016a). First-order generalised beam theory for curved thin-walled members with circular axis. *Thin-Walled Structures*, 107, 345-361.

Peres, N., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2016b). First-order Generalized Beam Theory for curved members with circular axis. Em: R. LaBoube, W. Yu (editores) *Proceedings of the International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, 1-15, Baltimore, Maryland, Estados Unidos.

- Peres, N., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2018a). GBT-based cross-section deformation modes for curved thin-walled members with circular axis. *Thin-Walled Structures*, 127, 769-780.
- Peres, N., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2018b). Application of Generalised Beam Theory to curved members with circular axis. *Der Stahlbau*, 87(4), 345-354.
- Peres, N., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2018c). First-order GBT for thin-walled members with arbitrary cross-section and circular axis. *Proceedings of the 8th International Conference on Thin-Walled Structures*, n.º 88 (14 págs.), Lisboa, Portugal.
- Peres, N., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2018d). Using Generalized Beam Theory to Assess the Behavior of Curved Thin-Walled Members. Em: R. LaBoube, W. Yu (editores) *Proceedings of the International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, 1-15, St. Louis, Missouri, Estados Unidos.
- Peres, N., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2020a). A GBT-based mixed finite element for curved thin-walled members with circular axis. *Thin-Walled Structures*, 146, 106462 (10 págs.).
- Peres, N., Gonçalves, R. & Camotim, D. (2020b). A geometrically exact curved thin-walled beam finite element accounting for cross-section deformation. Em: *Proceedings of SSRC Annual Stability Conference*, 19 págs., Atlanta, Georgia, USA.
- Petrov, E. & G  radin, M. (1998a). Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids. Part 1: Beam concept and geometrically exact nonlinear formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 165, 42-92.
- Petrov, E. & G  radin, M. (1998b). Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids. Part 2: Anisotropic and advanced beam models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 165, 93-127.
- Pimenta, P. M. & Campello, E. M. B. (2003). A fully nonlinear multi-parameter rod model incorporating general cross-sectional in-plane changes and out-of-plane warping. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1(1), 119-140.
- Picault, E., Bourgeois, S., Cochelin, B. & Guinot, F. (2016). A rod model with thin-walled flexible cross-section: Extension to 3D motions and application to 3D foldings of tape springs. *International Journal of Solids and Structures*, 84, 64-81.

## R

- Ranzi, G. & Luongo, A. (2011). A new approach for thin-walled member analysis in the framework of GBT. *Thin-Walled Structures*, 49(11), 1404-1414.

- 
- Reddy, J. N. (2013). *An Introduction to Continuum Mechanics*. Cambridge University Press.
- Reissner, E. (1972). On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 23(5), 795-804.
- Ritto-Corrêa, M. (2004). *Análise de estruturas reticuladas: rumo a uma teoria geometricamente exacta, cinematicamente completa e fisicamente não linear*. Tese de Doutorado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Ritto-Corrêa, M. & Camotim, D. (2002). On the differentiation of the Rodrigues formula and its significance for the vector-like parameterization of Reissner–Simo beam theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(9), 1005-1032.
- Ruggerini, A. W., Madeo, A., Gonçalves, R., Camotim, D., Ubertini, F. & de Miranda, S. (2019). GBT post-buckling analysis based on the Implicit Corotational Method. *International Journal of Solids and Structures*, 163, 40-60.

## S

- Sapountzakis, E. J. & Tsiptsis, I. N. (2015). Generalized warping analysis of curved beams by BEM. *Engineering Structures*, 100, 535-549.
- Schardt, R. (1966). Eine erweiterung der technischen biegetheorie zur berechnung prismatischer faltwerke. *Der Stahlbau*, 35(6), 161-171.
- Schardt, R. (1989). *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie: Lineare Probleme* (em alemão). Springer-Verlag, Berlin, Alemanha.
- Schardt, R. (1994a). Generalized beam theory — an adequate method for coupled stability problems. *Thin-Walled Structures*, 19(2-4), 161-180.
- Schardt, R. (1994b). Lateral-torsional and distortional buckling of channel and hat-sections. *Journal of Constructional Steel Research*, 31(2-3), 243-265.
- Schlaich, J. & Scheef, H. (1982). *Concrete box girder bridges. Structural engineering documents*, IABSE.
- Silvestre, N. (2005). *Teoria generalizada de vigas: formulações, implementação numérica e aplicações*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Simo, J. C. (1985). A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(1), 55-70.

- Simo, J. C. & Vu-Quoc, L. (1991). A geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 27(3), 371-393.
- Simões da Silva, L., Tankova, T. & Rebelo, C. (2020). Safety Assessment of Eurocode 3 Stability Design Rules for Prismatic Members in Bending and Compression. *International Journal of Steel Structures*, 20(1), 343-354.
- Snijder, H. H., Van der Aa, R. P., Hofmeyer, H. & van Hove, B. W. E. M. (2018). Lateral torsional buckling design imperfections for use in non-linear FEA. *Steel Construction*, 11(1), 49-56.
- Stolarski, H. & Belytschko, T. (1982). Membrane locking and reduced integration for curved elements. *Journal of Applied Mechanics*, 49(1), 172-176.
- Stuelpnagel, J. (1964). On the parametrization of the three-dimensional rotation group. *SIAM Review*, 6(4), 422-430.

## T

- Taig, G., Ranzi, G. & Luongo, A. (2016). GBT pre-buckling and buckling analyses of thin-walled members under axial and transverse loads. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 28, 41-66.
- Taras, A. (2016). Derivation of DSM-type resistance functions for in-plane global buckling of steel beam-columns. *Journal of Constructional Steel Research*, 125, 95-113.
- Timoshenko, S. (1953). *History of Strength of Materials*. Dover Civil and Mechanical Engineering Series, Dover Publications.
- Topkaya, C., Williamson, E. B. & Frank, K. H. (2004). Behavior of curved steel trapezoidal box-girders during construction. *Engineering Structures*, 26(6), 721-733.
- Tsiptsis, I. N. & Sapountzakis, E. J. (2017). Generalized warping and distortional analysis of curved beams with isogeometric methods. *Computers & Structures*, 191, 33-50.

## V

- Vieira, L. (2017). *Longitudinal analysis of steel-concrete composite box girder decks: Comparison between the classical formulations and the generalized beam theory*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Vlasov, V. (1958). *Tonkostenye sterjni* (em russo). Fizmatgiz, Moscovo, Rússia. Tradução francesa: *Pièces Longues en Voiles Minces*, Éditions Eyrolles, Paris, França (1962).



---

## W

Wackerfuss, J. & Gruttmann, F. (2011). A nonlinear Hu-Washizu variational formulation and related finite-element implementation for spatial beams with arbitrary moderate thick cross-sections. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(17-20), 1671-1690.

Winkler, E. (1868). *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit* (em alemão). Verlag H. Dominicus, Praga, República Checa.

## Y

Yamada, Y. & Ezawa, Y. (1977). On curved finite elements for the analysis of circular arches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(11), 1635-1651.

## Z

Ziemian, R. (editor) (2010). *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, Sexta Edição, John Wiley & Sons.



## Anexo A

# Formulação de um elemento finito de Vlasov

Conforme foi referido no Capítulo 3, Vlasov (1958) desenvolveu o trabalho seminal acerca do comportamento de barras de eixo circular com secção aberta duplamente simétrica (o centro de corte coincide com o centróide) sujeitas a flexão para fora do plano e torção.

A solução de Vlasov, considerando que não existem forças distribuídas ao longo da barra, é dada pelo sistema de equações diferenciais homogêneas (ver, e.g., El-Amin e Kasem, 1978)

$$\left(EI + \frac{EI_w}{R_C^2}\right)w'''' - \frac{GJ}{R_C^2}w'' - \frac{EI + GJ}{R_C}\theta'' + \frac{EI_w}{R_C}\theta'''' = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{EI_w}{R_C}w'''' - \frac{EI + GJ}{R_C}w'' + \frac{EI}{R_C^2}\theta - GJ\theta'' + EI_w\theta'''' = 0, \quad (\text{A.2})$$

onde  $w$  é o deslocamento do centro de corte,  $\theta$  o ângulo de torção,  $E$  o módulo de elasticidade,  $G$  o módulo de distorção e as propriedades da secção correspondem às das barras retas, i.e., (i)  $I$  é o momento de inércia em torno do eixo de flexão relevante, (ii)  $J$  representa o fator de rigidez à torção e (iii)  $I_w$  representa a constante de empenamento para a torção.

Em alternativa à resolução analítica das equações anteriores, é possível recorrer ao método dos elementos finitos, aproximando diretamente as funções  $w$  e  $\theta$  na forma variacional das equações de equilíbrio. Neste caso, sendo  $x$  o eixo longitudinal da barra e  $L$  o seu comprimento, a energia de deformação elástica é dada por (ver, e.g., El-Amin e Kasem, 1978)

$$U = \frac{EI}{2} \int_L \left(w'' - \frac{\theta}{R_C}\right)^2 dx + \frac{GJ}{2} \int_L \left(\frac{w'}{R_C} + \theta'\right)^2 dx + \frac{EI_w}{2} \int_L \left(\frac{w''}{R_C} + \theta''\right)^2 dx, \quad (\text{A.3})$$

e a respetiva variação fornece

$$\begin{aligned}\delta U = & EI \int_L \left( \delta w'' - \frac{\delta \theta}{R_C} \right) \left( w'' - \frac{\theta}{R_C} \right) dx \\ & + GJ \int_L \left( \frac{\delta w'}{R_C} + \delta \theta' \right) \left( \frac{w'}{R_C} + \theta' \right) dx \\ & + EI_w \int_L \left( \frac{\delta w''}{R_C} + \delta \theta'' \right) \left( \frac{w''}{R_C} + \theta'' \right) dx.\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

Deste modo, considerando uma única força concentrada  $Q$ , a forma variacional do equilíbrio, neste caso obtida invocando a estacionariedade da energia potencial, é dada por

$$\delta U - Q \delta u = 0, \quad (\text{A.5})$$

onde  $u$  é o deslocamento conjugado da força  $Q$ . A variação da energia de deformação elástica (A.4) pode ainda ser escrita em forma matricial, obtendo-se

$$\delta U = \int_L \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta \theta \\ \delta w' \\ \delta \theta' \\ \delta w'' \\ \delta \theta'' \end{bmatrix}^T \mathbf{K}^* \begin{bmatrix} w \\ \theta \\ w' \\ \theta' \\ w'' \\ \theta'' \end{bmatrix} dx, \quad (\text{A.6})$$

onde a matriz  $\mathbf{K}^*$  é dada por

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{EI}{R_C^2} & 0 & 0 & -\frac{EI}{R_C} & 0 \\ & & \frac{GJ}{R_C^2} & \frac{GJ}{R_C} & 0 & 0 \\ & & & GJ & 0 & 0 \\ & & & & EI + \frac{EI_w}{R_C^2} & \frac{EI_w}{R_C} \\ \text{Sim.} & & & & & EI_w \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Utilizando polinómios cúbicos de Hermite (3.248)-(3.251) para aproximar o campo de deslocamentos, o qual é constituído pelas funções  $w$  e  $\theta$ , é possível escrever

$$w(x) = H_1 w(0) + H_2 w'(0) + H_3 w(L_e) + H_4 w'(L_e), \quad (\text{A.8})$$

$$\theta(x) = H_1 \theta(0) + H_2 \theta'(0) + H_3 \theta(L_e) + H_4 \theta'(L_e), \quad (\text{A.9})$$

onde  $L_e$  representa o comprimento do elemento finito e os valores nodais de  $w$  e  $\theta$  correspondem às incógnitas do problema. As Eqs. (A.8)-(A.9) podem também ser escritas em

formato matricial, ou seja,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}(x)\mathbf{d}, \quad (\text{A.10})$$

com

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & 0 & 0 & H_3 & H_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & H_2 & 0 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} w(0) & w'(0) & \theta(0) & \theta'(0) & w(L_e) & w'(L_e) & \theta(L_e) & \theta'(L_e) \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.12})$$

Naturalmente, a variação do campo de deslocamentos e das suas derivadas fornece

$$\delta \mathbf{U} = \boldsymbol{\psi} \delta \mathbf{d}, \quad (\text{A.13})$$

$$\delta \mathbf{U}' = \boldsymbol{\psi}' \delta \mathbf{d}, \quad (\text{A.14})$$

$$\delta \mathbf{U}'' = \boldsymbol{\psi}'' \delta \mathbf{d}. \quad (\text{A.15})$$

Substituindo as expressões (A.10)-(A.15) na Eq. (A.6), torna-se possível escrever a variação da energia de deformação elástica em função do vetor  $\mathbf{d}$  e da sua variação, i.e.,

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_L \begin{bmatrix} \delta \mathbf{U} \\ \delta \mathbf{U}' \\ \delta \mathbf{U}'' \end{bmatrix}^T \mathbf{K}^* \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}' \\ \mathbf{U}'' \end{bmatrix} dx \\ &= \int_L \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \delta \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\psi}' \delta \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\psi}'' \delta \mathbf{d} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\psi}' \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\psi}'' \mathbf{d} \end{bmatrix} dx \\ &= \delta \mathbf{d}^T \int_L \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}' \\ \boldsymbol{\psi}'' \end{bmatrix}^T \mathbf{K}^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}' \\ \boldsymbol{\psi}'' \end{bmatrix} dx \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

onde se identifica a matriz de rigidez do elemento finito como sendo

$$\mathbf{K}_e = \int_L \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}' \\ \boldsymbol{\psi}'' \end{bmatrix}^T \mathbf{K}^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}' \\ \boldsymbol{\psi}'' \end{bmatrix} dx. \quad (\text{A.17})$$

A integração desta expressão fornece a matriz

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} K_A & K_B & K_C & K_D & -K_A & K_B & -K_C & K_D \\ & K_E & K_F & K_G & -K_B & K_H & -K_D & K_I \\ & & K_J & K_K & -K_C & K_D & K_L & K_M \\ & & & K_N & -K_D & K_I & -K_M & K_O \\ & & & & K_A & -K_B & K_C & -K_D \\ & & & & & K_E & -K_F & K_G \\ & & & & & & K_J & -K_K \\ & & & & & & & K_N \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

com as componentes  $K_A$ - $K_O$  dadas por

$$K_A = \frac{6}{5} \frac{10EIR_C^2 + GJL^2 + 10EI_w}{L^3 R_C^2}, \quad (\text{A.19})$$

$$K_B = \frac{1}{10} \frac{60EIR_C^2 + GJL^2 + 60EI_w}{L^2 R_C^2}, \quad (\text{A.20})$$

$$K_C = \frac{6}{5} \frac{(EI + GJ)L^2 + 10EI_w}{L^3 R_C}, \quad (\text{A.21})$$

$$K_D = \frac{1}{10} \frac{(EI + GJ)L^2 + 60EI_w}{L^2 R_C}, \quad (\text{A.22})$$

$$K_E = \frac{2}{15} \frac{30EIR_C^2 + GJL^2 + 30EI_w}{LR_C^2}, \quad (\text{A.23})$$

$$K_F = \frac{1}{10} \frac{(11EI + GJ)L^2 + 60EI_w}{L^2 R_C}, \quad (\text{A.24})$$

$$K_G = \frac{2}{15} \frac{(EI + GJ)L^2 + 30EI_w}{LR_C}, \quad (\text{A.25})$$

$$K_H = \frac{1}{30} \frac{60EIR_C^2 - GJL^2 + 60EI_w}{LR_C^2}, \quad (\text{A.26})$$

$$K_I = -\frac{1}{30} \frac{(EI + GJ)L^2 - 60EI_w}{LR_C}, \quad (\text{A.27})$$

$$K_J = \frac{1}{35} \frac{13EIL^4 + (42GJL^2 + 420EI_w)R_C^2}{L^3 R_C^2}, \quad (\text{A.28})$$

$$K_K = \frac{1}{210} \frac{11EIL^4 + (21GJL^2 + 1260EI_w)R_C^2}{L^2 R_C^2}, \quad (\text{A.29})$$

$$K_L = \frac{3}{70} \frac{3EIL^4 - (28GJL^2 + 280EI_w)R_C^2}{L^3 R_C^2}, \quad (\text{A.30})$$

$$K_M = -\frac{1}{420} \frac{13EIL^4 - (42GJL^2 + 2520EI_w)R_C^2}{L^2 R_C^2}, \quad (\text{A.31})$$

$$K_N = \frac{1}{105} \frac{EIL^4 + (14GJL^2 + 420EI_w)R_C^2}{LR_C^2}, \quad (\text{A.32})$$

$$K_O = -\frac{1}{420} \frac{3EIL^4 + (14GJL^2 - 840EI_w)R_C^2}{LR_C^2}. \quad (\text{A.33})$$

No exemplo analisado com recurso a este elemento finito (recordar a Figura 3.13), a única entrada não-nula do vetor das forças exteriores diz respeito à extremidade livre da barra ( $x = \pi R_C/2$ ) e corresponde a  $w(\pi R_C/2)$ , cujo valor é unitário. De forma a garantir o encastramento em  $x = 0$ , as condições de fronteira a impor são

$$w(0) = w'(0) = \theta(0) = \theta'(0) = 0. \quad (\text{A.34})$$